Н. Вульфъ и Д. Цинзерлингъ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА

КУРСЪ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ

ИЗДАНІЕ ВТОРОЕ ДОПОЛНЕННОЕ

1 изд. Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. допущено въ качествѣ руководства для среднихъ учебныхъ заведеній

ПЕТРОГРАДЪ
Изданіе *Я. БАШМАКОВА и К°*
1916

Типогр. 1-й Петроградск. Трудовой Артели. Лиговская ул., 34.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ДОПОЛНЕНІЯ.

Предисловіе къ первому изданію.

Предлагаемое руководство алгебры составлено примѣнительно къ программамъ гимназій и реальныхъ училищъ Министерства Народнаго Просвѣщенія. Статьи въ этомъ курсѣ расположены въ систематическомъ порядкѣ, въ томъ порядкѣ, въ какомъ долженъ повторяться курсъ алгебры въ выпускномъ классѣ. При первоначальномъ же прохожденіи курса порядокъ можетъ быть нѣсколько измѣненъ, а нѣкоторыя статьи вовсе опущены. Такъ, при первомъ прохожденіи курса алгебры по нашему руководству могутъ быть опущены: глава VII (изслѣдованіе общихъ формулъ рѣшенія уравненій первой степени съ одною и двумя неизвѣстными), глава IX (неопредѣленныя уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными), глава XII (перемѣнныя величины и ихъ предѣлы), глава XIII (ирраціональныя числа) и въ общей теоріи логариѳмовъ статьи, касающіяся свойствъ ирраціональныхъ логариѳмовъ. Глава XV (уравненія 2-ой степени) можетъ быть пройдена непосредственно послѣ главы XI (извлеченіе квадратнаго корня). Статья о неравенствахъ отнесена въ офиціальныхъ программахъ въ конецъ курса, но мы рекомендовали-бы эту несложную, нетрудную, но вмѣстѣ съ тѣмъ очень важную статью пройти сейчасъ же послѣ статьи объ уравненіяхъ первой степени. Равнымъ образомъ мы рекомендовали-бы пройти достаточно подробно и статью о перемѣнныхъ величинахъ и ихъ предѣлахъ, такъ какъ, не говоря о тѣхъ важныхъ примѣненіяхъ, которыя имѣетъ эта статья въ дальнѣйшемъ курсѣ алгебры, безъ сколько-нибудь обстоятельнаго ознакомленія съ перемѣнными величинами и ихъ предѣлами, вся статья объ опредѣленіи длины окружности, площади круга, поверхностей и объемовъ круглыхъ тѣлъ въ геометріи остается совершенно необоснованною.

Мы не помѣстили въ нашемъ руководствѣ собранія упражненій. Успѣшное прохожденіе курса элементарной алгебры требуетъ рѣшенія учениками очень большого числа задачъ; поэтому обойтись безъ особаго сборника алгебраическихъ задачъ при прохожденіи курса алгебры совершенно невозможно; помѣщеніе же въ курсѣ нѣсколькихъ сотенъ задачъ и примѣровъ для упражненія учащихся не замѣнило-бы отдѣльнаго сборника задачъ и только удорожило-бы изданіе.

Составители.

7 марта 1912 года.

Предисловіе ко второму изданію.

Во второмъ изданіи сдѣлано нѣсколько болѣе или менѣе существенныхъ добавленій: такъ, въ виду заявленія со стороны нѣкоторыхъ преподавателей, что изученіе основныхъ свойствъ логариѳмовъ затрудняетъ учениковъ, въ этомъ изданіи сдѣлано добавленіе (стр. 243 мелкимъ шрифтомъ), позволяющее въ курсѣ гимназіи ограничиться первыми тремя свойствами логариѳмовъ. Для болѣе нагляднаго ознакомленія со свойствами показательной функціи введено графическое представленіе этой функціи (§ 105a).

Для лучшаго уясненія вопроса о сравненіи ирраціональныхъ чиселъ введено графическое ихъ представленіе (черт. 1—4).

Статья о прогрессіяхъ дополнена краткимъ изложеніемъ понятія о сходимости и расходимости рядовъ и приведены примѣры сходящагося и расходящагося ряда (§ 102a).

Статья о комплексныхъ выраженіяхъ дополнена тригонометрическимъ представленіемъ комплекснаго выраженія (Дополненія, § 4a), что̀ дало возможность подойти съ другой стороны къ вопросу о розысканіи всѣхъ значеній $\sqrt[n]{A}$. Свойства цѣлой функціи дополнены (Дополненія, § 9a) весьма важною теоремою, касающеюся комплексныхъ корней цѣлой функціи съ вещественными коэффиціентами.

Д. Цинзерлингъ.

Сентябрь 1915 года.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Предварительныя понятія.

§ 1. **Общія рѣшенія ариѳметическихъ задачъ.**

Въ каждой ариѳметической задачѣ различаются три слѣдующія части: **данныя числа, условія задачи и вопросъ.** Данными числами называются тѣ числа, которыя извѣстны въ задачѣ и надъ которыми надо производить дѣйствія для рѣшенія задачи. Условіями называются словесныя выраженія, опредѣляющія значеніе каждаго даннаго въ задачѣ числа и соотношеніе между ними. Изъ вопроса мы узнаемъ, какое неизвѣстное число требуется опредѣлить въ задачѣ.

Если, не измѣняя условія какой-нибудь задачи и ея вопроса, мы будемъ измѣнять только данныя числа, то составимъ неограниченный рядъ однородныхъ задачъ. Такъ какъ способъ рѣшенія задачи, т.-е. тѣ дѣйствія, которыя надо произвести надъ данными числами, чтобы найти неизвѣстныя, и порядокъ этихъ дѣйствій, зависитъ отъ условій задачи и ея вопроса и не зависитъ отъ заданныхъ чиселъ, т.-е. отъ числа единицъ или долей единицы, содержащихся въ каждомъ данномъ числѣ, то, очевидно, всѣ задачи одного рода, т.-е. отличающіяся только числовыми значеніями данныхъ величинъ, могутъ быть рѣшены однимъ способомъ или по одному правилу. Чтобы удобнѣе выразить **общее правило** для рѣшенія всѣхъ однородныхъ задачъ, можно данныя числа, а также и искомыя, обозначить какими-нибудь условными знаками, напримѣръ, буквами.

Такимъ образомъ составится **общая задача.** Подобнымъ же образомъ изъ каждаго ариѳметическаго вопроса можно составить **общій вопросъ**.

Рѣшеніе общихъ вопросовъ о числахъ и рѣшеніе общихъ задачъ составляетъ предметъ Элементарной Алгебры.

§ 2. **Алгебраическія знакоположенія.**

Для сокращенія изложенія рѣшенія общихъ вопросовъ и задачъ въ алгебрѣ согласились:

a) Данныя числа, входящія въ вопросъ или задачу, обозначать начальными буквами латинскаго или греческаго алфавита: a, b, c, d... или α, β, γ, δ..., а искомыя числа—послѣдними буквами алфавита: x, y, z; при этомъ величины, которыя по смыслу задачи или вопроса не предполагаются равными, должны обозначаться различными буквами.

b) Дѣйствія надъ числами условились обозначать тѣми же знаками, какъ и въ ариѳметикѣ; такъ, сложеніе чиселъ обозначаютъ знакомъ ($+$), вычитаніе — знакомъ ($-$), умноженіе—знакомъ (.), дѣленіе—знакомъ (:).

Вслѣдствіе этихъ соглашеній искомыя числа общей задачи и различныя требованія общихъ вопросовъ представляются **выраженіями изъ буквъ, соединенныхъ знаками дѣйствій.** Такія выраженія называются **формулами**.

Вотъ простѣйшія формулы:

формула сложенія: $a+b$

» вычитанія: $a-b$

» умноженія: $a \, . \, b$ или ab

» дѣленія: $a:b$ или $\dfrac{a}{b}$.

c) Соотношенія между числами выражаются знаками равенства и неравенства. Знакъ равенства ($=$) ставится между равными числами, или между формулами, выражающими равныя числа. Напримѣръ: $a=5$; $a=b$; $a+b=cd$.

Знаки неравенства: $>$ или $<$ ставятся между неравными числами, при чемъ они обращаются отверстіемъ къ большему числу, напримѣръ: $a>5$ (a больше 5), $a<b$ (a меньше b).

Иногда соединяютъ знаки равенства и неравенства: напримѣръ, пишутъ $a \geqq b$, что значитъ a болѣе или равно b, иначе говоря, a не менѣе b; $m \leqq n$, т.-е. m не болѣе n. Для того, чтобы показать, что a вообще неравно b, пишутъ $a \gtrless b$ или $a \neq b$.

§ 3. Примѣры на составленіе формулъ.

Задача. Требуется смѣшать два вещества разной цѣны, взявъ извѣстныя количества того и другого, и узнать цѣну единицы мѣры смѣси, зная цѣны единицы мѣры данныхъ веществъ и полагая, что смѣсь однородна и количество всей смѣси равно суммѣ количествъ смѣшанныхъ веществъ.

Пусть a обозначаетъ цѣну единицы мѣры перваго вещества, b—цѣну такой же единицы мѣры второго вещества, выраженную въ такихъ же единицахъ, какъ a, d—число единицъ перваго вещества въ смѣси и c—число единицъ второго вещества въ смѣси.

Обозначимъ цѣну единицы смѣси черезъ x.

Стоимость количества перваго вещества въ смѣси$=ad$.

Стоимость количества второго вещества въ смѣси$=bc$.

Стоимость всей смѣси$=ad+bc$; количество единицъ всей смѣси$=d+c$. Слѣдовательно, цѣна единицы смѣси равна $(ad+bc):(d+c)$.

Итакъ, $x=\dfrac{ad+bc}{d+c}$.

Эта формула выражаетъ рѣшеніе разсмотрѣнной общей задачи. Эту формулу можно примѣнять ко всякой частной задачѣ того же рода. Напр., положимъ, что смѣсь состоитъ изъ 3 фунтовъ пятирублеваго чая и 2 фунтовъ трехрублеваго; по выведенной формулѣ мы получимъ цѣну фунта смѣси, а именно:

$$x=\frac{5\,.\,3+3\,.\,2}{3+2}=4{,}2 \text{ рубля.}$$

Выведемъ теперь нѣсколько формулъ, которыми мы воспользуемся въ дальнѣйшемъ изложеніи курса алгебры.

1. **Формула четнаго числа.** Четнымъ называется число, которое дѣлится безъ остатка на 2. Для того, чтобы число дѣлилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ сомножителей, на которые разлагается данное число, былъ 2; такимъ образомъ, всякое четное число должно имѣть множителя 2, другой же множитель можетъ быть любое цѣлое число. А потому, формула четнаго числа будетъ **2a**, гдѣ a—любое цѣлое число.

2. **Формула нечетнаго числа.** Такъ какъ нечетное число отличается на 1 отъ ближайшаго къ нему четнаго числа, то, очевидно, формула нечетнаго числа будетъ **2a+1** или **2a—1**, гдѣ a—любое цѣлое число.

1*

3. **Формула кратнаго числа.** Общая формула числа кратнаго a будетъ ma, такъ какъ число, кратное a, должно имѣть a въ числѣ сомножителей, на которые это число можетъ быть разложено, другой же сомножитель можетъ быть любое цѣлое число m.

4. **Формула числа, которое при дѣленіи на b даетъ въ остаткѣ r:** Мы знаемъ изъ ариѳметики, что если одно число не дѣлится на другое на-цѣло, то первое число равно произведенію второго на цѣлую часть частнаго, сложенному съ остаткомъ. Поэтому, обозначая цѣлую часть частнаго черезъ q, мы можемъ написать искомую общую формулу въ видѣ $bq+r$, а зависимость между дѣлимымъ, дѣлителемъ, частнымъ (цѣлою частью частнаго) и остаткомъ выразить равенствомъ $a=bq+r$, гдѣ a—дѣлимое, b—дѣлитель, q—частное и r—остатокъ.

5. **Формула двузначнаго, трехзначнаго и вообще многозначнаго числа.** Всякое двузначное число содержитъ въ себѣ нѣсколько десятковъ и нѣсколько единицъ, при чемъ число единицъ, въ частномъ случаѣ, можетъ быть равно 0: обозначивъ число десятковъ черезъ a, а числа единицъ черезъ b, мы можемъ выразить двузначное число формулою: $a\,.\,10+b$ или $10a+b$, при чемъ a можетъ быть любое цѣлое число не меньшее единицы и не большее 9, b же—любое цѣлое число отъ 0 до 9. Напримѣръ, двузначное число 68 можно написать въ видѣ $6\,.\,10+8$.

Трехзначное число выражается формулою: $100\,.\,a+10\,.\,b+c$, гдѣ a—число сотенъ, b—число десятковъ и c—число единицъ, при чемъ a можетъ быть равно любому цѣлому числу отъ 1 до 9, b же и c кромѣ этихъ значеній могутъ быть равны и 0: напр., полагая $a=3$, $b=0$ и $c=7$, получимъ трехзначное число $100\,.\,3+10\,.\,0+7=307$.

Четырехзначное число выражается формулою: $1000a+100b+10c+d$ и т. д.

Численнымъ значеніемъ алгебраическаго выраженія или формулы называется число, которое получится, если замѣнить буквы опредѣленными числами и выполнить всѣ дѣйствія, указанныя въ формулѣ. Такъ, формула $x=\dfrac{ad+bc}{d+c}$, при $a=5$, $b=3$, $c=2$ и $d=3$, имѣетъ численное значеніе $x=4{,}2$.

Произведеніе равныхъ между собою чиселъ называется **степенью** одного изъ этихъ чиселъ. Такъ, **§ 4.** **Степень и корень.**

$a\,.\,a$ есть вторая степень числа a

$a\,.\,a\,.\,a$ „ третья „ „ „

$a\,.\,a\,.\,a\,.\,a$ „ четвертая „ „ „

и такъ далѣе.

Вторая степень называется **квадратомъ**, а третья—**кубомъ**. Перемноженіе равныхъ чиселъ называется **возвышеніемъ въ степень**, а каждый изъ множителей—**основаніемъ степени**. Для сокращеннаго обозначенія степени пишется основаніе, а надъ нимъ немного выше и справа—число, показывающее, сколько разъ основаніе взято множителемъ; это число называется **показателемъ степени**. Такимъ образомъ, получимъ:

$$a\,.\,a=a^2,\ a\,.\,a\,.\,a=a^3,\ a\,.\,a\,.\,a\,.\,a=a^4 \text{ и т. д.}$$

Вообще, $\underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a\,.\,a}_{m \text{ разъ}}=a^m$

Основаніе степени называется также **корнемъ**, а дѣйствіе, посредствомъ котораго по степени какого-либо числа и показателю степени находятъ самое число, т.-е. корень, называется **извлеченіемъ корня**. Такъ, 4 есть квадратъ 2, а 2—квадратный корень изъ 4; 27 есть кубъ 3, а 3 есть кубическій корень изъ 27; 16 есть четвертая степень 2, а 2 есть корень четвертой степени изъ 16; b^m есть m-ая степень b, а b есть корень m-ой степени изъ b^m. Для того, чтобы обозначить, что число a есть корень m-ой степени изъ числа b, пишутъ $a=\sqrt[m]{b}$; для обозначенія квадратнаго корня пишутъ знакъ $\sqrt{\ }$, опуская показателя корня, напр. $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ и т. д.

Алгебраическое выраженіе, въ которомъ послѣднее дѣйствіе не есть ни сложеніе, ни вычитаніе, называется **одночленомъ**. **§ 5.** **Одночленъ и многочленъ.**

Напримѣръ: $7a^2b^3c$; $\frac{3}{4}a^mb$; $\frac{ad+bc}{d+c}$.

Если въ одночленѣ одинъ изъ множителей есть число, означенное цифрами, то оно пишется впереди прочихъ множителей и называется **предстоящимъ** или **коэффиціентомъ**; такъ, въ предыдущихъ одночленахъ 7 и $^3/_4$—суть коэффиціенты. Когда передъ одночленомъ нѣтъ коэффиціента, тогда надо подразумѣвать у него коэффиціентъ, равный единицѣ; напримѣръ, a есть то же, что $1\,.\,a$. Подобное же соглашеніе принято и относительно показателей степеней; напримѣръ, a есть то же, что a^1.

Алгебраическое выраженіе, въ которомъ послѣднее дѣйствіе—сложеніе или вычитаніе, называется **многочленомъ.** Каждое слагаемое или вычитаемое многочлена называется его членомъ. По числу членовъ многочлены называются двучленами, трехчленами и т. д.

Такъ, $2a+b^2$ есть двучленъ
$3a-2b+c$—трехчленъ
$1000a+100b+10c+d$—четырехчленъ и т. д.

§ 6. **Употребленіе скобокъ.** Обычный порядокъ дѣйствій при нахожденіи численнаго значенія алгебраической формулы такой: сначала производятъ возвышеніе въ степень и извлеченіе корня, затѣмъ умноженіе и дѣленіе и, наконецъ, уже сложеніе и вычитаніе. Въ тѣхъ случаяхъ, когда порядокъ дѣйствій долженъ быть иной, употребляютъ скобки, обозначая этимъ, что сначала надо произвести дѣйствія надъ числами, стоящими въ скобкахъ, а затѣмъ уже надъ полученными результатами и другими числами.

Напримѣръ, при вычисленіи формулы $a+bc$ надо, согласно изложенному правилу, сначала умножить b на c и затѣмъ полученное произведеніе сложить съ a; если же надо сначала сложить a и b и затѣмъ полученную сумму умножить на c, то необходимо заключить сумму $a+b$ въ скобки и написать, такимъ образомъ, формулу въ видѣ: $(a+b)c$.

Возьмемъ еще примѣръ: пусть дано вычислить формулу ab^m; согласно установленному нами порядку производства дѣйствій, надо сначала b возвысить въ степень m и затѣмъ умножить a на полученную степень b^m. Если же по смыслу задачи намъ надо сначала a умножить на b и затѣмъ полученное произведеніе возвысить въ степень m, то мы должны произведеніе ab заключить въ скобки и написать формулу въ видѣ: $(ab)^m$.

Скобки употребляютъ также тогда, когда можетъ возникнуть недоразумѣніе, въ какомъ порядкѣ производить дѣйствія; напр., въ формулѣ $a:b:c$ результатъ будетъ иной, раздѣлимъ-ли мы сначала a на b и затѣмъ полученное частное раздѣлимъ на c, или сначала раздѣлимъ b на c и затѣмъ a на полученное частное. Во избѣжаніе недоразумѣній, надо въ первомъ случаѣ частное $a:b$ заключить въ скобки, а во второмъ—частное $b:c$; такимъ образомъ, въ первомъ случаѣ формула напишется въ видѣ $(a:b):c$, а во второмъ случаѣ—въ видѣ $a:(b:c)$. Пусть $a=12$, $b=3$ и $c=2$; тогда $(a:b):c=(12:3):2=4:2=2$ и $a:(b:c)=12:(3:2)=12:1,5=8$.

Иногда въ томъ выраженіи, которое надо заключить въ скобки, уже имѣются скобки; тогда употребляются скобки другого вида. Напримѣръ, для того, чтобы обозначить, что произведеніе суммы двухъ количествъ b и c на d требуется вычесть изъ a и затѣмъ полученную разность вычесть изъ p, мы должны написать формулу въ такомъ видѣ:

$$p-[a-(b+c)d].$$

Иногда приходится вводить скобки третьяго рода: напр., въ формулѣ: $a\{b-[(c+d)f+m]\}$. Здѣсь порядокъ дѣйствій будетъ такой: сначала надо сложить c съ d, затѣмъ сумму $(c+d)$ умножить на f и къ полученному произведенію придать m; потомъ полученную сумму вычесть изъ b и на разность умножить a.

Черта, которая употребляется для обозначенія дроби, а также знакъ корня замѣняютъ скобки; такимъ образомъ, выраженіе $(a+b):(c-d)$ можно написать въ видѣ $\frac{a+b}{c-d}$ и въ формулѣ $\sqrt[3]{a+b+c}$ нѣтъ надобности сумму $a+b+c$ заключать въ скобки, такъ какъ знакъ корня уже показываетъ, что надо сначала сложить a, b и c и затѣмъ изъ полученной суммы извлечь корень.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Алгебраическія числа и дѣйствія надъ ними.

---

§ 7. **Положительныя и отрицательныя числа.**

Задача. Нѣкто, идя въ лавку, взялъ съ собой a рублей; въ лавкѣ онъ купилъ товара на b рублей. Спрашивается, сколько денегъ у него осталось послѣ покупки.

При рѣшеніи этой задачи могутъ встрѣтиться три случая:

1) $a > b$, напр. $a=25$; $b=18$; отвѣтъ $a-b=7$.

Значитъ, чтобы рѣшить эту задачу, надо изъ числа рублей, взятыхъ съ собою покупателемъ, вычесть стоимость купленнаго товара въ рубляхъ, и тогда полученный остатокъ и дастъ отвѣтъ на поставленный вопросъ.

2) $a=b$, напр. $a=25$; $b=25$. Рѣшая эту задачу такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, получимъ $a-b=25-25=0$.

Этотъ отвѣтъ показываетъ, что покупатель всѣ взятыя съ собою деньги истратилъ на покупку товара.

3) $a < b$, напр. $a=25$; $b=32$. Примѣняя къ этому случаю тотъ же способъ рѣшенія, мы должны были-бы изъ a вычесть b; но мы этого сдѣлать не можемъ, такъ какъ вычесть изъ меньшаго числа большее, по правиламъ ариѳметики, нельзя; да и сама задача при этихъ условіяхъ оказывается невозможною; очевидно, у покупателя при такомъ условіи остаться денегъ не можетъ. Но мы можемъ измѣнить вопросъ задачи, а именно—спросить, сколько рублей не хватитъ покупателю для уплаты за купленный товаръ, или сколько онъ останется долженъ продавцу. Тогда, при данныхъ условіяхъ, задача оказывается вполнѣ возможной и должна быть рѣшена также дѣйствіемъ вычитанія, но

только вычесть придется не b изъ a, но a изъ b; и полученная разность будетъ представлять не число наличныхъ рублей (единицъ), а число **недостающихъ**. Очевидно, недостающія единицы по смыслу своему противоположны наличнымъ. Недостающія единицы мы будемъ называть **отрицательными**, а, противоположныя имъ, наличныя—**положительными**.

Положительныя и отрицательныя единицы въ другихъ вопросахъ могутъ имѣть другой смыслъ, но всегда другъ другу противоположный. Это мы можемъ видѣть на слѣдующей задачѣ.

Нѣкто прошелъ въ первый день a верстъ, во второй же день b верстъ. Спрашивается, на сколько верстъ онъ прошелъ больше въ первый день, чѣмъ во второй. Очевидно, для рѣшенія этой задачи надо изъ числа верстъ, пройденныхъ въ первый день, вычесть число верстъ, пройденныхъ во второй; такимъ образомъ, рѣшеніе этой задачи будетъ выражаться формулою: $a—b$.

Если $b>a$, то вычитаніе по правиламъ ариѳметики сдѣлать нельзя, да и самая задача оказывается невозможною: если путешественникъ во второй день прошелъ большее число верстъ, чѣмъ въ первый, то, очевидно, нельзя поставить вопросъ, на сколько онъ въ первый день прошелъ **больше**, чѣмъ во второй, онъ въ первый день прошелъ меньше, чѣмъ во второй, и потому, естественно, вопросъ долженъ быть такой: на сколько верстъ путешественникъ въ первый день прошелъ **меньше**, чѣмъ во второй. Для рѣшенія этого вопроса надо изъ b вычесть a и тогда рѣшеніе задачи выразится формулою $b—a$, при чемъ значеніе единицъ въ этомъ случаѣ будетъ противоположно значенію единицъ полученной разности въ томъ случаѣ, когда въ этой задачѣ $a>b$; если разность $a—b$ будетъ представлять нѣкоторое число **положительныхъ** единицъ, то $b-a$ будетъ представлять нѣкоторое число **отрицательныхъ** единицъ.

Возьмемъ еще примѣръ: вчера въ полдень термометръ показывалъ a градусовъ выше нуля; за сутки температура упала на b градусовъ. Сколько градусовъ показываетъ термометръ въ полдень сегодня? Очевидно, для рѣшенія этой задачи надо изъ a вычесть b; такимъ образомъ рѣшеніе задачи выразится формулой $a—b$. При рѣшеніи этой задачи, какъ и обѣихъ предыдущихъ, могутъ встрѣтиться 3 случая:

1) $a>b$; 2) $a=b$; 3) $a<b$.

Въ первомъ случаѣ изъ a можно вычесть b и разность $a - b$ покажетъ, сколько градусовъ **выше** нуля показываетъ термометръ; во второмъ случаѣ разность $a - b = 0$, и, стало быть, термометръ будетъ стоять какъ разъ на нулѣ и, наконецъ, въ третьемъ случаѣ надо изъ b вычесть a и разность $(b - a)$ покажетъ, на сколько градусовъ **ниже** нуля стоитъ термометръ. Въ первомъ случаѣ, какъ говорятъ въ общежитіи, термометръ показываетъ $a - b$ градусовъ **тепла**, а въ третьемъ случаѣ $b - a$ градусовъ **мороза**. Число градусовъ выше нуля будетъ выражаться **положительнымъ** числомъ, а число градусовъ ниже нуля — **отрицательнымъ.**

Рѣшеніе всѣхъ трехъ разсмотрѣнныхъ задачъ мы можемъ выразить **одною** формулою $\mathbf{a - b}$, условившись при этомъ въ томъ случаѣ, когда $a < b$, вычитать a изъ b; полученная въ послѣднемъ случаѣ разность будетъ числомъ отрицательнымъ.

Отрицательныя числа вмѣстѣ съ положительными составляютъ, такъ называемыя, **алгебраическія** числа. Число единицъ или частей единицы, заключающееся въ каждомъ положительномъ или отрицательномъ числѣ, называется его **абсолютной величиной.**

Положительное число условились обозначать знакомъ $+$, поставленнымъ передъ его абсолютною величиною, а отрицательное число условились обозначать знакомъ $-$, поставленнымъ передъ абсолютною величиною числа. Такимъ образомъ, $(+5)$ обозначаетъ положительное число, абсолютная величина котораго равна 5, и $\left(-\frac{2}{7}\right)$ обозначаетъ отрицательное число, абсолютная величина котораго равна $\frac{2}{7}$; вообще, $(+a)$ обозначаетъ положительное число, абсолютная величина котораго равна a, и $(-b)$ обозначаетъ отрицательное число, абсолютная величина котораго равна b [1]).

Положительныя числа по существу суть числа ариѳметическія, и, слѣдовательно, абсолютная величина положительнаго числа совпадаетъ съ самимъ числомъ; а потому знакъ $+$, обозначающій положительное число, можно опускать.

---

[1]) Абсолютную величину числа иногда обозначаютъ двумя вертикальными чертами, между которыми пишется положительное или отрицательное число; напр. $|+5|=5|$; $|-2^2/_3|=2^2/_3$; $|-0{,}01|=0{,}01$, и т. д.

Согласно принятому обозначенію, мы можемъ рѣшеніе третьяго случая всѣхъ разсмотрѣнныхъ задачъ выразить равенствомъ:

$$a - b = -(b - a).$$

Это весьма важное равенство показываетъ намъ, какъ надо вообще поступать въ томъ случаѣ, когда изъ меньшаго числа приходится вычитать большее.

Два числа, имѣющія одну и ту же абсолютную величину, но противоположные знаки, называются противоположными, напр. $(+3)$ и (-3), $(-2,5)$ и $(+2,5)$.

Сумма двухъ противоположныхъ чиселъ равна 0. $(+a) + (-a) = 0$.

Въ справедливости этого основнаго равенства теоріи алгебраическихъ чиселъ можно убѣдиться на безчисленномъ множествѣ примѣровъ: нѣкто прошелъ a верстъ впередъ и ровно столько же верстъ обратно—очевидно, онъ вернулся на то же мѣсто, откуда ушелъ, т.-е. отошелъ отъ первоначальнаго своего мѣста на разстояніе, равное 0; термометръ поднялся на a дѣленій, затѣмъ на столько же дѣленій опустился—очевидно, онъ вернулся въ прежнее свое положеніе; нѣкто имѣлъ a рублей капитала и столько же рублей долга—очевидно, если онъ уплатитъ долгъ, то его капиталъ сдѣлается равнымъ 0, и т. д.

§ 8. **Сложеніе алгебраическихъ чиселъ.**

I. **Сложеніе двухъ чиселъ.** При сложеніи двухъ чиселъ мы имѣемъ три случая:

1) положительное число складывается съ положительнымъ: $(+a) + (+b)$;

2) отрицательное число складывается съ отрицательнымъ: $(-a) + (-b)$;

3) положительное число складывается съ отрицательнымъ: $(+a) + (-b)$ или $(-a) + (+b)$.

Чтобы сложить два положительныхъ числа или два отрицательныхъ, или, какъ говорятъ, два числа одного и того же знака, очевидно, надо сложить ихъ абсолютныя величины и сумму взять съ тѣмъ знакомъ, какой имѣютъ слагаемыя; такимъ образомъ: $(+a) + (+b) = +(a + b)$; $(-a) + (-b) = -(a + b)$; напр., $(+2,7)+(+3,3)=(+6)$, или $(-3)+(-4,8)=(-7,8)$.

Покажемъ, какъ сложить два числа, изъ которыхъ одно положительное, а другое отрицательное, или, какъ говорятъ, два числа съ разными знаками: $(+a)+(-b)$.

Предположимъ сначала, что $a>b$, т.-е. абсолютная величина перваго числа больше абсолютной величины второго числа: напр., $a=8$; $b=5{,}5$; такимъ образомъ, надо сложить $(+8)$ и $(-5{,}5)$. Разложивъ $(+8)$ на два слагаемыхъ: $(+5{,}5)$ и $+(8-5{,}5)$, имѣемъ: $(+8)+(-5{,}5)=+(8-5{,}5)+(+5{,}5)+$ $+(-5{,}5)=+(8-5{,}5)$, такъ какъ $(+5{,}5)+(-5{,}5)=0$; или, въ общемъ видѣ, (при $a>b$), $(+a)+(-b)=+(a-b)$.

Пусть теперь $a<b$; напр., $a=3{,}5$, $b=5$; такимъ образомъ, надо сложить $(+3{,}5)$ и (-5). Разложивъ (-5) на два слагаемыя: $(-3{,}5)$ и $+(5-3{,}5)$, имѣемъ: $(+3{,}5)+(-5)=(+3{,}5)+$ $+(-3{,}5)+[-(5-3{,}5)]=-(5-3{,}5)$, такъ какъ $(+3{,}5)+$ $+(-3{,}5)=0$; или, въ общемъ видѣ, (при $a<b$), $(+a)+$ $+(-b)=-(b-a)$.

Такимъ образомъ, если слагаемыя имѣютъ разные знаки, то для полученія суммы надо изъ **большей абсолютной величины вычесть меньшую и полученную разность взять со знакомъ того слагаемаго, абсолютная величина котораго больше.**

II. **Сложеніе нѣсколькихъ чиселъ.** Пусть дано сложить нѣсколько чиселъ, изъ которыхъ нѣкоторыя—положительныя, а нѣкоторыя—отрицательныя, напр., $(+8)+(-0{,}5)+(+2{,}8)+$ $+(-3)+(-7{,}5)$. Можно складывать такъ: сложить первое слагаемое со вторымъ, къ полученной суммѣ прибавить третье слагаемое, ко вновь полученной суммѣ—четвертое и т. д., пока не дойдемъ до послѣдняго слагаемаго; такимъ образомъ, $(+8)+(-0{,}5)+(+2{,}8)+(-3)+(-7{,}5)=(+7{,}5)+$ $+(+2{,}8)+(-3)+(-7{,}5)=(+10{,}3)+(-3)+(-7{,}5)=(+7{,}3)+$ $+(-7{,}5)=(-0{,}2)$.

Мы придемъ къ тому же самому результату, если сложимъ сначала всѣ положительныя слагаемыя, затѣмъ всѣ отрицательныя и первую сумму сложимъ со второю; ихъ сумма и представитъ сумму данныхъ слагаемыхъ; такимъ образомъ $(+8)+$ $+(-0{,}5)+(+2{,}8)+(-3)+(-7{,}5)=[(+8)+(+2{,}8)]+$ $+[(-0{,}5)+(-3)+(-7{,}5)]=(+10{,}8)+(-11)=(-0{,}2)$.

Мы пришли-бы къ тому же результату, если-бы стали складывать въ какомъ-нибудь иномъ порядкѣ. Такимъ образомъ, мы видимъ, что сумма алгебраическихъ чиселъ или, какъ говорять, **алгебраическая сумма** обладаетъ, подобно ариѳметической, свойствомъ перемѣстительности.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, мы видимъ на разсмотрѣнномъ примѣрѣ, что алгебраическая сумма, подобно ариѳметической, обладаетъ и свойствомъ сочетательности.

На практикѣ, въ большинствѣ случаевъ, удобнѣе складывать отдѣльно положительныя и отрицательныя слагаемыя, а затѣмъ уже полученныя ихъ суммы.

§ 9. Вычитаніе алгебраическихъ чиселъ.

Опредѣленіе. **Вычитаніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго по суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному изъ нихъ находятъ другое.**

Теорема. **Вычитаніе можетъ быть замѣнено сложеніемъ, причемъ вычитаемое замѣняется слагаемымъ, представляющимъ число, противоположное данному вычитаемому, т.-е.** $a-b=a+(-b)$, причемъ буквы a и b обозначаютъ въ данномъ случаѣ не абсолютныя величины алгебраическихъ чиселъ, а самыя числа [1]).

Пусть вычитаемое будетъ число положительное, знакъ же уменьшаемаго безразличенъ; слѣдовательно, изъ a надо вычесть $(+b)$. Требуется доказать, что $a-(+b)=a+(-b)$ . . . (1). Въ справедливости этого равенства мы можемъ убѣдиться непосредственно, на основаніи опредѣленія дѣйствія вычитанія: достаточно сложить предполагаемую разность съ вычитаемымъ; если въ суммѣ получимъ уменьшаемое—значитъ вычитаніе сдѣлано вѣрно. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $(-b)+(+b)=0$, то $a+(-b)+(+b)=a$, что и доказываетъ справедливость равенства (1).

Пусть теперь вычитаемое будетъ отрицательное число, знакъ же уменьшаемаго попрежнему безразличенъ; такимъ образомъ, надо изъ a вычесть $(-b)$. Требуется доказать, что $a-(-b)=$ $=a+(+b)$. Въ справедливости этого равенства мы также убѣждаемся на основаніи опредѣленія дѣйствія вычитанія, по которому сумма разности: $a+(+b)$ и вычитаемаго $(-b)$

1) Мы до сихъ поръ обозначали буквами лишь ариѳметическія числа. Въ настоящей главѣ мы будемъ придерживаться этого и далѣе, оговариваясь всякій разъ, когда подъ буквами мы будемъ разумѣть алгебраическія числа, въ дальнѣйшемъ же курсѣ, наоборотъ, мы будемъ подъ буквами разумѣть алгебраическія числа, оговариваясь всякій разъ, когда буквы будутъ обозначать ариѳметическія числа.

должна быть равна уменьшаемому a, что и есть на самомъ дѣлѣ: $a+(+b)+(-b)=a$, такъ какъ $(+b)+(-b)=0$.

Итакъ, равенство $a-b=a+(-b)$ справедливо для какихъ угодно значеній a и b.

Съ помощью только что доказанной теоремы не трудно вывести правило вычитанія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ. Мы имѣемъ здѣсь 4 случая:

1) Изъ положительнаго числа вычитается положительное: $(+a)-(+b)$.

2) Изъ положительнаго числа вычитается отрицательное: $(+a)-(-b)$.

3) Изъ отрицательнаго числа вычитается положительное: $(-a)-(+b)$.

4) Изъ отрицательнаго числа вычитается отрицательное: $(-a)-(-b)$.

Примѣняя ко всѣмъ этимъ случаямъ доказанную теорему, имѣемъ:

1) $(+a)-(+b)=(+a)+(-b)=+(a-b)$, если $a>b$
$=-(b-a)$, если $a<b$.

2) $(+a)-(-b)=(+a)+(+b)=+(a+b)$.

3) $(-a)-(+b)=(-a)+(-b)=-(a+b)$.

4) $(-a)-(-b)=(-a)+(+b)=-(a-b)$, если $a>b$
$=+(b-a)$, если $a<b$.

Отсюда слѣдуетъ правило вычитанія алгебраическихъ чиселъ: **если уменьшаемое и вычитаемое имѣютъ разные знаки, то надо сложить ихъ абсолютныя величины и сумму взять со знакомъ уменьшаемаго, а если знаки уменьшаемаго и вычитаемаго одинаковы, то надо изъ большей абсолютной величины вычесть меньшую и разность взять со знакомъ уменьшаемаго, если абсолютная величина уменьшаемаго больше абсолютной величины вычитаемаго, и съ обратнымъ знакомъ, если абсолютная величина уменьшаемаго меньше абсолютной величины вычитаемаго.**

Слѣдствіе теоремы § 9. Всякій многочленъ можно представить въ видѣ алгебраической суммы. Въ самомъ дѣлѣ, пусть данъ многочленъ: $a+b-c+d-f$; примѣняя теорему § 9, мы можемъ написать данный многочленъ въ видѣ: $a+b+(-c)+d+(-f)$, что и доказываетъ требуемое.

Обратно, всякую алгебраическую сумму: $a+(-b)+(-c)+$ $+d+f$ можно, примѣняя обратное преобразованіе, написать въ видѣ: $a-b-c+d+f$.

Каждое слагаемое алгебраической суммы называется ея членомъ.

§ 10. **Сложеніе и вычитаніе алгебраическихъ суммъ.**

Пусть дано сложить двѣ алгебраическія суммы: $[a+b+$ $+(-c)]$ и $[d+(-e)+(-f)]$. Согласно представленія о суммѣ, какъ совокупности нѣсколькихъ алгебраическихъ чиселъ, для составленія общей суммы надо къ первой суммѣ присоединить послѣдовательно всѣ члены второй суммы; такимъ образомъ,

$$[a+b+(-c)]+[d+(-e)+(-f)]=a+b+(-c)+d+$$
$$+(-e)+(-f) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Примѣръ.

$[8+3{,}2+(-2{,}8)]+[5+(-3{,}5)+(-2{,}1)]=(+8)+(+3{,}2)+$ $+(-2{,}8)+(+5)+(-3{,}5)+(-2{,}1)=(+8)+(+3{,}2)+(+5)+$ $+(-2{,}8)+(-3{,}5)+(-2{,}1)=(+16{,}2)+(-8{,}4)=(+7{,}8)$.

Пусть требуется изъ суммы $[a+b+(-c)]$ вычесть сумму $[d+(-e)+(-f)]$. По опредѣленію дѣйствія вычитанія, искомая разность, будучи сложена съ вычитаемымъ, должна въ суммѣ дать уменьшаемое. Очевидно, разность должна содержать всѣ члены уменьшаемаго съ ихъ знаками и всѣ члены вычитаемаго съ обратными знаками, такъ какъ въ такомъ случаѣ при сложеніи разности съ вычитаемымъ останутся всѣ члены уменьшаемаго и пропадутъ всѣ члены вычитаемаго.

Такимъ образомъ, $[a+b+(-c)]-[d+(-e)+(-f)]=a+b+$ $+(-c)+(-d)+e+f \quad \ldots\ldots \quad (2)$,

такъ какъ $[a+b+(-c)+(-d)+e+f]+[d+(-e)+(-f)]=a+b+$ $(-c)+(-d)+e+f+d+(-e)+(-f)=a+b+(-c)$.

Отсюда слѣдуетъ правило вычитанія алгебраическихъ суммъ: **для того, чтобы вычесть изъ одной алгебраической суммы другую, надо выписать всѣ члены первой суммы (уменьшаемаго) и приписать къ нимъ всѣ члены второй суммы (вычитаемаго), взятые съ обратнымъ знакомъ.**

Разсматривая равенства:

$$[a+b+(-c)]+[d+(-e)+(-f)]=a+b+(-c)+d+(-e)+$$
$$+(-f)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$
$$[a+b+(-c)]-[d+(-e)+(-f)]=a+b+(-c)+(-d)+(+e)+$$
$$+(+f)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

мы видимъ, что, **если передъ скобками стоитъ знакъ $+$, то можно скобки опустить, при чемъ знаки членовъ внутри скобокъ не измѣняются; если же передъ скобками стоитъ знакъ $-$, то скобки тоже можно опустить, но при этомъ знаки всѣхъ членовъ внутри скобокъ должны быть измѣнены на обратные.** Если передъ скобками стоитъ знакъ $-$, то, опуская скобки, мы должны знакъ $-$, стоящій передъ скобками, измѣнить на обратный.

Написавъ равенства (1) и (2) въ обратномъ порядкѣ, т.-е. правую часть равенства вмѣсто лѣвой, а лѣвую вмѣсто правой, мы замѣчаемъ, что, обратно, можно любое число членовъ заключить въ скобки, при чемъ, если передъ скобками мы поставимъ знакъ плюсъ, то члены, которые будутъ заключены въ скобки, должны сохранить свои знаки, а если передъ скобками будетъ поставленъ знакъ минусъ, то всѣ члены, заключенные въ скобки, должны измѣнить свои знаки на обратные.

Такимъ образомъ, если мы у всѣхъ членовъ алгебраической суммы измѣнимъ знаки на обратные, то измѣняется знакъ и у всей суммы: $a+b+(-c)=-[(-a)+(-b)+(+c)]$.

§ 11. **Сравненіе величинъ алгебраическихъ чиселъ.**

Опредѣленіе. **Алгебраическое число a больше алгебраическаго числа b, если разность $a-b$ число положительное, и, наоборотъ, алгебраическое число a меньше алгебраическаго числа b, если разность $a-b$ число отрицательное.**

Слѣдствія: 1) **Положительное число больше 0.** Въ самомъ дѣлѣ, $(+a)-0=(+a)$, т.-е. разность $(+a)-0$ есть число положительное, а потому, согласно опредѣленію, $(+a)>0$.

2) **Отрицательное число меньше 0.** Въ самомъ дѣлѣ, $(-a)-0=$ $=(-a)$, т.-е. разность, $(-a)-0$ есть число отрицательное, а потому, согласно опредѣленію, $(-a)<0$.

Пользуясь этими слѣдствіями, мы можемъ выразить опредѣленіе такъ: $a>b$, если $a-b>0$ и $a<b$, если $a-b<0$ (здѣсь подъ a и b мы разумѣемъ самыя алгебраическія числа, а не ихъ абсолютныя величины).

3) **Изъ двухъ положительныхъ чиселъ то больше, абсолютная величина котораго больше;** дѣйствительно, если $a>b$, то $(+a)-$

$-(+b)=+(a-b)$, т.-е. разность $(+a)-(+b)$ есть число положительное, а потому $(+a)>(+b)$.

Это свойство положительныхъ чиселъ показываетъ намъ, что опредѣленіе, на основаніи котораго сравниваютъ величины алгебраическихъ чиселъ, находится въ полномъ согласіи съ тѣмъ, что̀ понимаютъ подъ бо̀льшимъ или меньшимъ числомъ въ ариѳметикѣ.

4) **Изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ то больше, абсолютная величина котораго меньше;** дѣйствительно, если $a>b$, то $(-a)-(-b)=(-a)+(+b)=-(a-b)$, т.-е. разность $(-a)-(-b)$ есть число отрицательное, и потому $(-a)<(-b)$ или $(-b)>(-a)$.

5) **Положительное число больше отрицательнаго:** $(+a)-(-b)=(+a)+(+b)=+(a+b)$, т.-е. разность $(+a)-(-b)$ есть число положительное, и потому $(+a)>(-b)$.

Эти свойства положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ даютъ намъ право смотрѣть на отрицательныя числа, какъ на числа, продолжающія рядъ ариѳметическихъ чиселъ (положительныхъ) по другую сторону нуля.

Такимъ образомъ, всѣ алгебраическія числа могутъ быть представлены слѣдующимъ рядомъ чиселъ.

$$\cdots, -3, \cdots, -2, \cdots, -1, \cdots 0, \cdots, +1, \cdots, +2, \cdots, +3, \cdots$$

§ 12. Умноженіе алгебраическихъ чиселъ.

При умноженіи алгебраическихъ чиселъ мы имѣемъ четыре случая:

1) положительное число умножается на положительное,

2) отрицательное число умножается на положительное,

3) положительное число умножается на отрицательное,

4) отрицательное число умножается на отрицательное.

Въ первомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ умноженіемъ двухъ ариѳметическихъ чиселъ, и потому можно сказать, что **произведеніе положительнаго числа на положительное равно произведенію ихъ абсолютныхъ величинъ, взятому со знакомъ $+$.**

Во второмъ случаѣ, такъ какъ множитель число положительное, т.-е. ариѳметическое, можно примѣнить опредѣленіе умноженія, данное въ ариѳметикѣ, по которому умножить одно число (въ данномъ случаѣ отрицательное) на другое, значитъ повторить первое число слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во множителѣ, если этотъ множитель цѣлое число, или взять такую часть перваго, какую часть единицы составляетъ второе число, если это число дробное. Очевидно, и въ томъ, и въ другомъ случаѣ мы получимъ въ результатѣ отрицательное число и вмѣстѣ съ тѣмъ можемъ сказать, что **произведеніе отрицательнаго числа на положительное равно произведенію ихъ абсолютныхъ величинъ, взятому со знакомъ —.**

Изъ ариѳметики извѣстно, что произведеніе какого-либо числа a на сумму двухъ другихъ чиселъ $(b+c)$ равно суммѣ произведеній числа a на число b и числа a на число c, т.-е. $a(b+c)=ab+ac$; равнымъ образомъ, произведеніе какого-либо числа a на разность чиселъ $(b-c)$ равно разности произведеній числа a на число b и числа a на число c, т.-е. $a(b-c)=ab-ac$.

Распространяя равенство $a(b-c)=ab-ac$ на тотъ случай, когда $b<c$, мы приходимъ къ отрицательному произведенію; въ самомъ дѣлѣ, $b<c$, значитъ и $ab<ac$, и потому разность $ab-ac$ есть число отрицательное; но, вѣдь, и $(b-c)$число отрицательное, значитъ **произведеніе положительнаго числа на отрицательное есть число отрицательное.** Съ другой стороны, мы имѣемъ: $a(b-c)=$ $=ab-ac=-(ac-ab)=-[a(c-b)]=-[a|b-c|]$, а потому можно сказать, что **произведеніе положительнаго числа на отрицательное равно произведенію ихъ абсолютныхъ величинъ, взятому со знакомъ —.**

Примѣняя тѣ же разсужденія къ произведенію $(-a)$ на $(b-c)$ гдѣ $b<c$, т.-е. $(b-c)<0$, получаемъ равенство: $(-a)(b-c)=$ $=(-a)b-(-a)c=(-ab)-(-ac)=-ab+ac$; но $ac>ab$, а потому разность $ac-ab$ есть число положительное, и мы приходимъ къ заключенію, что **произведеніе отрицательнаго числа на отрицательное есть число положительное.** Съ другой стороны, $(-a)(b-c)=(-a)b-(-a)c=-ab+ac=a(c-b)=|-a|\cdot|b-c|$, т. е. **произведеніе отрицательнаго числа на отрицательное равно произведенію ихъ абсолютныхъ величинъ, взятому со знакомъ $+$.**

Такимъ образомъ, мы имѣемъ слѣдующія формулы:

1) $(+a)\cdot(+b)=+ab$
2) $(-a)\cdot(+b)=-ab$
3) $(+a)\cdot(-b)=-ab$
4) $(-a)\cdot(-b)=+ab$

Выведемъ теперь правило знаковъ для того случая, когда число сомножителей больше двухъ. Мы видимъ, что умноженіе какого бы то ни было алгебраическаго числа на отрицательное число мѣняетъ его знакъ на обратный, при умноженіи же на положительное число знакъ не мѣняется; первый сомножитель мы можемъ всегда предполагать положительнымъ (въ противномъ случаѣ мы могли-бы ввести множителя 1). Отсюда ясно, что, если отрицательный сомножитель будетъ только одинъ, то произведеніе будетъ число отрицательное, такъ какъ знакъ $+$ перемѣнится на $-$; при наличности двухъ отрицательныхъ сомножителей, произведеніе будетъ имѣть знакъ $+$, такъ какъ знакъ перемѣнится дважды: съ $+$ на $-$ и съ $-$ на $+$; при трехъ отрицательныхъ сомножителяхъ произведеніе опять будетъ отрицательнымъ, и т. д. Такимъ образомъ, **при четномъ числѣ отрицательныхъ сомножителей (или при ихъ отсутствіи) произведеніе будетъ число положительное, а при нечетномъ числѣ отрицательныхъ сомножителей, произведеніе будетъ число отрицательное; число же положительныхъ сомножителей на знакъ произведенія не вліяетъ.**

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему правилу умноженія алгебраическихъ чиселъ: **чтобы умножить два или нѣсколько алгебраическихъ чиселъ, надо перемножить ихъ абсолютныя величины и произведеніе взять со знакомъ $+$, если число отрицательныхъ сомножителей четное или равно 0, и со знакомъ $-$, если число отрицательныхъ сомножителей нечетное.**

Примѣры.

1) $(+3)\cdot(-2)\cdot(+1)\cdot(-4)\cdot(-5)=(-6)\cdot(+1)\cdot(-4)\cdot(-5)=$
$=(-6)\cdot(-4)\cdot(-5)=(+24)\cdot(-5)=(-120).$

2) $(-4)\cdot(+2)\cdot(+3)\cdot(-1)\cdot(+6)=(-8)\cdot(+3)\cdot(-1)\cdot(+6)=$
$=(-24)\cdot(-1)\cdot(+6)=(+24)\cdot(+6)=(+144).$

Слѣдствіе. **Степень отрицательнаго числа есть число положительное, если показатель степени четное число, и число отрицательное, если показатель степени нечетное число**; такимъ образомъ,

$$(-a)^{2m}=+a^{2m} \text{ и } (-a)^{2m+1}=-a^{2m+1}.$$

§ 13. Свойства произведенія алгебраическихъ чиселъ.

Свойство 1. Произведеніе алгебрическихъ чиселъ не измѣняетъ свой величины отъ перестановки сомножителей (свойство перемѣстительности).

Такъ какъ умноженіе алгебраическихъ чиселъ приводится къ умноженію ихъ абсолютныхъ величинъ, а изъ ариѳметики извѣстно, что произведеніе нѣсколькихъ чиселъ, какъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ, не измѣняетъ своей величины отъ перестановки этихъ чиселъ, то, значитъ, абсолютная величина произведенія нѣсколькихъ алгебраическихъ чиселъ отъ перестановки сомножителей не измѣняется; но знакъ произведенія зависитъ только отъ числа отрицательныхъ сомножителей, поэтому перестановка сомножителей не повліяетъ и на знакъ произведенія. Такимъ образомъ, 1-ое свойство является доказаннымъ.

Подобнымъ же образомъ могутъ быть доказаны слѣдующія свойства произведенія:

Свойство 2. Въ произведеніи нѣсколькихъ множителей можно замѣнить произвольное число множителей ихъ произведеніемъ (свойство собирательности); напр., $abcd=ac\,(bd)$.

Свойство 3. Для того, чтобы умножить произведеніе нѣсколькихъ множителей на какое-либо число, достаточно умножить на это число одного изъ множителей; напр., $abcd\cdot f=a\,(bf)\,cd$.

Свойство 4. Для того, чтобы какое-нибудь число умножить на произведеніе нѣсколькихъ множителей, достаточно умножить это число послѣдовательно на всѣ множители произведенія; напр., $f(abcd)=fabcd$.

§ 14. Дѣленіе алгебраическихъ чиселъ.

Опредѣленіе. **Дѣленіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго по произведенію a двухъ алгебраическихъ чиселъ и одному изъ нихъ b находятъ другое c; такимъ образомъ, эти три числа: данныя a и b и искомое c, связаны между собою равенствомъ:**

$$a = b \cdot c$$

причемъ буквы a, b и c обозначаютъ въ данномъ случаѣ не абсолютныя величины алгебраическихъ чиселъ, а самыя числа. Изъ этого равенства: $a=bc$ мы тотчасъ, зная знаки a и b, по правилу знаковъ при умноженіи двухъ алгебраическихъ чиселъ, находимъ знакъ у c.

Если a—положительное число, то b и c должны имѣть одинаковые знаки, и потому, при положительномъ a и положительномъ

b, c должно быть тоже положительнымъ; при положительномъ a и отрицательномъ b, c должно быть отрицательнымъ. Если a—отрицательное число, то b и c должны имѣть разные знаки, и потому, при отрицательномъ a и положительномъ b, c должно имѣть отрицательный знакъ; при отрицательномъ a и отрицательномъ b, c должно имѣть положительный знакъ.

Отсюда мы выводимъ, что c (частное) будетъ имѣть положительный знакъ, если а (дѣлимое) и b (дѣлитель) имѣютъ одинаковые знаки, и отрицательный знакъ, если a и b имѣютъ разные знаки. Съ другой стороны, мы имѣемъ:

$$|a| = |b| \,.\, |c|,$$

откуда

$$|c| = |a| : |b|$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему правилу дѣленія алгебраическихъ чиселъ: **для того, чтобы раздѣлить одно алгебраическое число a на другое b, надо абсолютную величину перваго раздѣлить на абсолютную величину второго и полученное частное взять со знакомъ $+$, если a и b имѣютъ одинаковые знаки, и со знакомъ —, если a и b имѣютъ разные знаки.**

Напр., $\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(+\frac{4}{7}\right) = -\left(\frac{2}{3} : \frac{4}{7}\right) = -\frac{14}{12} = -1\frac{1}{6}$.

Свойство 1. Вмѣсто того, чтобы дѣлить какое-либо число на нѣсколько данныхъ чиселъ послѣдовательно, можно раздѣлить его сразу на произведеніе этихъ чиселъ.

Пусть дано алгебраическое число a раздѣлить на число b, полученное частное—на число c и, наконецъ, новое частное на число d; докажемъ, что результатъ будетъ тотъ же, если мы число a раздѣлимъ сразу на произведеніе bcd.

Обозначимъ частное отъ дѣленія a на b черезъ q; тогда, по опредѣленію дѣйствія дѣленія, $a = bq$. Частное отъ дѣленія перваго частнаго q на c обозначимъ черезъ q_1; тогда $q = cq_1$. И, наконецъ, частное отъ дѣленія частнаго q_1 на d обозначимъ черезъ q_2; тогда $q_1 = dq_2$.

Подставивъ вмѣсто q и q_1 послѣдовательно ихъ значенія, получимъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$a = bq = bcq_1 = bcdq_2$; откуда $q_2 = a : (bcd)$, что и доказываетъ требуемое.

Свойство 2. Если мы умножимъ дѣлимое и дѣлитель на одно и то же число, то частное своей величины не измѣнитъ. Пусть дѣлимое равно a, дѣлитель b и частное c; тогда $a=bc$. Умножимъ обѣ части этого равенства на какое-нибудь алгебраическое число q; равенство отъ этого не нарушится, такъ какъ оба произведенія будутъ равны и по величинѣ, и по знаку; такимъ образомъ, мы получаемъ равенство:

$$aq=bcq \text{ или } aq=bq\,.\,c; \text{ откуда } (aq):(bq)=c.$$

Такимъ же образомъ мы докажемъ, что частное не измѣнится, если мы дѣлимое и дѣлитель раздѣлимъ на одно и то же число.

§ 15. **Умноженіе и дѣленіе алгебраической суммы на алгебраическое число.**

Пусть дано умножить алгебраическую сумму $(a+b+c)$, гдѣ a, b и c какія угодно алгебраическія числа, на цѣлое положительное число d, напр., на 3. По опредѣленію дѣйствія умноженія, мы можемъ написать:

$(a+b+c)3=(a+b+c)+(a+b+c)+(a+b+c)=(a+a+a)+$ $+(b+b+b)+(c+c+c)=a\,.\,3+b\,.\,3+c\,.\,3$, или, вообще,

$$(a+b+c)d=ad+bd+cd.$$

Пусть теперь дано раздѣлить алгебраическую сумму $(a+b+c)$ на цѣлое положительное число d, напр., на 7. Для того, чтобы раздѣлить алгебраическую сумму $(a+b+c)$ на 7, надо каждое слагаемое этой суммы раздѣлить на 7 и полученныя частныя сложить; такимъ образомъ, частное отъ дѣленія алгебраической суммы $(a+b+c)$ на 7 будетъ $\left(\frac{a}{7}+\frac{b}{7}+\frac{c}{7}\right)$. Въ правильности полученнаго результата мы легко убѣждаемся, умноживъ полученное частное $\left(\frac{a}{7}+\frac{b}{7}+\frac{c}{7}\right)$ на дѣлителя 7. Примѣняя разсмотрѣнный уже случай умноженія алгебраической суммы на цѣлое положительное число, мы получаемъ:

$$\left(\frac{a}{7}+\frac{b}{7}+\frac{c}{7}\right)7=\frac{a}{7}\,.\,7+\frac{b}{7}\,.\,7+\frac{c}{7}\,.\,7=a+b+c,$$

что и доказываетъ справедливость полученнаго результата. Такимъ образомъ, вообще, $(a+b+c):d=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}$.

Переходимъ теперь къ тому случаю, когда алгебраическая сумма умножается на дробное положительное число; пусть множитель $d=\frac{2}{5}$. Умножить алгебраическую сумму $(a+b+c)$ на $\frac{2}{5}$ значитъ взять $\frac{2}{5}$ этой суммы; для этого мы должны данную сумму раздѣлить на 5 и полученный результатъ умножить на 2.

Такимъ образомъ,

$$(a+b+c)\cdot\frac{2}{5}=\frac{a+b+c}{5}\cdot 2=\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}\right)2=a\cdot\frac{2}{5}+b\cdot\frac{2}{5}+c\cdot\frac{2}{5},$$

или, вообще,

$$(a+b+c)d=ad+bd+cd.$$

Теперь, пусть множитель d будетъ число отрицательное; $d=-|d|$. Тогда,

$$(a+b+c)\cdot -|d|=-(a+b+c)\cdot|d|=-[a|d|+ +b|d|+c|d|]=-a|d|-b|d|-c|d|=a\cdot -|d|+ +b\cdot -|d|+c\cdot -|d|=ad+bd+cd.$$

Итакъ, равенство $(a+b+c)d=ad+bd+cd$ доказано для какихъ-угодно алгебраическихъ чиселъ: a, b, c и d. Значитъ, **для того, чтобы умножить алгебраическую сумму на какое-либо алгебраическое число, надо каждое слагаемое суммы умножить на это число и полученныя произведенія сложить.**

Подобно тому, какъ доказана справедливость равенства $(a+b+c):d=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}$ для того случая, когда d—цѣлое положительное число, можетъ быть доказана, на основаніи опредѣленія дѣйствія дѣленія, справедливость этого равенства для какихъ-угодно алгебраическихъ чиселъ: a, b, c и d. Значитъ, **для того, чтобы раздѣлить алгебраическую сумму на какое-либо алгебраическое число, надо каждое слагаемое суммы раздѣлить на это число и полученныя частныя сложить.**

Установивъ въ настоящей главѣ правила дѣйствій надъ алгебраическими числами, мы приходимъ къ весьма важному заключенію, что **всѣ четыре основныя дѣйствія надъ алгебраическими числами приводятся къ дѣйствіямъ надъ ихъ абсолютными величинами, т.-е. къ дѣйствіямъ надъ числами ариѳметическими.**

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Дѣйствія надъ цѣлыми алгебраическими выраженіями.

§ 16.

Тождественныя преобразованія. Сущность дѣйствій надъ алгебраическими выраженіями.

Алгебраическою формулою или алгебраическимъ выраженіемъ, какъ мы уже знаемъ, называется совокупность буквъ и чиселъ, соединенныхъ знаками дѣйствій: если мы вмѣсто буквъ подставимъ какія-либо числа и произведемъ указанныя въ формулѣ дѣйствія, то получимъ численное значеніе даннаго алгебраическаго выраженія, соотвѣтствующее даннымъ численнымъ значеніямъ входящихъ въ него буквъ.

Два алгебраическихъ выраженія, которыя равны при всѣхъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ буквъ, называются **тождественными.** Напримѣръ,

$$a+b \text{ и } b+a$$
$$(a+b)\,c \text{ и } ac+bc.$$

Равенство двухъ тождественныхъ выраженій называется **тождествомъ.**

Дѣйствія надъ алгебраическими выраженіями суть ничто иное, какъ составленіе изъ нихъ новаго алгебраическаго выраженія, численное значеніе котораго для какихъ-угодно значеній буквъ, входящихъ въ данныя выраженія, равно результату тѣхъ же самыхъ дѣйствій надъ численными значеніями данныхъ выраженій, при тѣхъ же самыхъ численныхъ значеніяхъ буквъ. Такимъ образомъ, **дѣйствія надъ алгебраическими выраженіями суть ничто иное, какъ преобразованія однихъ алгебраическихъ**

выраженій въ другія, имъ тождественныя. Благодаря такому опредѣленію дѣйствій надъ алгебраическими выраженіями, всѣ свойства и правила дѣйствій надъ алгебраическими числами распространяются и на цѣлыя алгебраическія выраженія, т. е. на такія, въ которыхъ буквы не входятъ въ знаменатель [1]).

Напримѣръ, какія-бы численныя значенія мы ни подставляли вмѣсто буквъ, входящихъ въ алгебраическія выраженія A и B [2]), всегда $A+B=B+A$. Значитъ, свойство перемѣстительности, справедливое для суммы алгебраическихъ чиселъ, распространяется и на сумму алгебраическихъ выраженій.

§ 17. Сложеніе цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій.

Опредѣленіе. **Сложить два или нѣсколько алгебраическихъ выраженій значитъ найти такое алгебраическое выраженіе, численное значеніе котораго равно суммѣ численныхъ значеній слагаемыхъ алгебраическихъ выраженій, каково бы ни было численное значеніе буквъ, входящихъ въ эти выраженія.**

1. ***Сложеніе подобныхъ одночленовъ.*** **Подобными одночленами называются такіе одночлены, которые или тождественно равны, или отличаются только коэффиціентами и знаками;** напр.,

$$3ab^2 \text{ и } 3ab^2$$
$$5ab^2 \text{ и } -5ab^2$$
$$2a^2 \text{ и } -3a^2.$$

Пусть дано сложить нѣсколько подобныхъ одночленовъ, напр., $3ab^2$, $-2{,}3ab^2$, ab^2 и $-1{,}8ab^2$. Составимъ изъ нихъ сумму, соединивъ ихъ знакомъ сложенія; такимъ образомъ, получаемъ алгебраическую сумму: $3ab^2+(-2{,}3ab^2)+ab^2+(-1{,}8ab^2)$ или многочленъ: $3ab^2-2{,}3ab^2+ab^2-1{,}8ab^2$. Такъ какъ ab^2 есть нѣкоторое число, то сумму: $3ab^2+(-2{,}3ab^2)+ab^2+(-1{,}8ab^2)$ можно разсматривать, какъ результатъ умноженія многочлена: $[3+(-2{,}3)+1+(-1{,}8)]$ на число ab^2, и потому можно написать, что $3ab^2+(-2{,}3ab^2)+ab^2+(-1{,}8ab^2)=ab^2[3+(-2{,}3)+1+(-1{,}8)]=ab^2\,.\,(-0{,}1)=-0{,}1ab^2$. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему правилу сложенія подобныхъ одночленовъ: **для того, чтобы сложить нѣсколько подобныхъ одночле-**

[1]) Здѣсь, конечно, предполагается, что буквы не входятъ и подъ знакомъ корня.

[2]) Мы условимся вообще обозначать малыми буквами алгебраическія числа, а большими буквами—общія выраженія алгебраическихъ одночленовъ.

новъ, надо сложить ихъ коэффиціенты и къ полученному такимъ образомъ числу приписать буквенную часть этихъ одночленовъ.

Въ многочленѣ могутъ оказаться подобные члены, и тогда ихъ можно, сложивъ, соединить въ одинъ; такое преобразованіе называется **приведеніемъ подобныхъ членовъ** многочлена.

Примѣры:

1) $2a^4+2a^3b+3a^3b=2a^4+5a^3b$

2) $2a^4-2a^3b-3a^3b=2a^4-5a^3b$

3) $2a^4+5a^3b-2a^3b=2a^4+3a^3b$

4) $2a^4-5a^3b+2a^3b=2a^4-3a^3b$

5) $3b^3+5a^3b-2a^3b+7a^3b-8a^3b=3b^3+(5a^3b+7a^3b)-$ $-(2a^3b+8a^3b)=3b^3+12a^3b-10a^3b=3b^3+2a^3b.$

2. ***Сложеніе какихъ бы то ни было одночленовъ.*** **Для того, чтобы сложить нѣсколько какихъ бы то ни было одночленовъ, надо соединить ихъ знакомъ сложенія и затѣмъ, если въ числѣ данныхъ одночленовъ есть подобные, сдѣлать приведеніе.**

Пусть даны одночлены: $3a^2b, -2b^3, 5b^3, -2a^2b, -4b^3$; ихъ сумма равна $3a^2b+(-2b^3)+5b^3+(-2a^2b)+(-4b^3)=a^2b+$ $+(-b^3)=a^2b-b^3$.

3. ***Сложеніе многочленовъ.*** **Для того, чтобы сложить два или нѣсколько многочленовъ, надо выписать всѣ члены перваго многочлена и приписать къ нимъ всѣ члены остальныхъ многочленовъ, сохраняя ихъ знаки.**

Пусть дано сложить многочлены: $(A+B-C)$ и $(D-E+F)$, гдѣ A, B, C, D, E, F какіе-нибудь одночлены. Тогда, согласно послѣднему правилу, мы можемъ написать слѣдующее тождество:

$$(A+B-C)+(D-E+F)=A+B-C+D-E+F.$$

Примѣръ:

$$(5a^2b^3-3a^4+3)+(2a^4-3a^2b^3-8)=5a^2b^3-3a^4+3+$$
$$+2a^4-3a^2b^3-8=2a^2b^3-a^4-5.$$

§ 18. **Вычитаніе цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій.**

Опредѣленіе. **Вычесть одно алгебраическое выраженіе изъ другого, значитъ найти такое алгебраическое выраженіе, численное значеніе котораго равно разности численныхъ значеній уменьшаемаго и вычитаемаго, при всякомъ численномъ значеніи буквъ, входящихъ въ эти алгебраическія выраженія.**

Изъ этого опредѣленія непосредственно вытекаютъ слѣдующія правила вычитанія одночленовъ и многочленовъ.

Правило 1. **Для того, чтобы вычесть одинъ одночленъ изъ другого, надо ко второму одночлену приписать первый, взятый съ обратнымъ знакомъ**; если эти одночлены подобны, то ихъ можно соединить въ одинъ.

Примѣръ:

Пусть даны одночлены: $3{,}5a^5b^3, -0{,}8a^5b^3$; ихъ разность равна: $3{,}5a^5b^3-(-0{,}8a^5b^3)=3{,}5a^5b^3+0{,}8a^5b^3=4{,}3a^5b^3$.

Правило 2. **Для того, чтобы вычесть одинъ многочленъ изъ другого, надо выписать всѣ члены второго многочлена и приписать къ нимъ всѣ члены перваго, взятые съ обратнымъ знакомъ.** Если въ полученномъ многочленѣ окажутся подобные члены, слѣдуетъ сдѣлать приведеніе.

Пусть дано вычесть многочленъ $(D-E+F)$ изъ многочлена $(A+B-C)$. Согласно приведенному правилу 2, мы можемъ написать слѣдующее тождество:

$$(A+B-C)-(D-E+F)=A+B-C-D+E-F.$$

Примѣръ:

$$(5a^2b^3-3a^4+3)-(2a^4-3a^2b^3-8)=5a^2b^3-3a^4+3-2a^4+3a^2b^3+$$
$$+8=8a^2b^3-5a^4+11.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что если передъ скобками стоитъ знакъ $+$, то скобки можно опустить, не перемѣняя знаковъ у членовъ многочлена, заключеннаго въ скобкахъ. Если же передъ скобками стоитъ знакъ $-$, то, опуская скобки, мы должны измѣнить знаки всѣхъ членовъ многочлена, заключеннаго въ скобки, на обратные; при этомъ долженъ быть измѣненъ на обратный знакъ $-$, стоящій передъ скобками. Равнымъ образомъ, можно любое число членовъ заключить въ скобки, поставивъ знакъ $+$ передъ скобками; если же мы передъ скобками поставимъ знакъ $-$, то должны знаки всѣхъ членовъ, заключенныхъ въ скобки, перемѣнить на обратные.

Примѣры:

1) $A-[B-(C-D)+E]$.

Эту задачу можно рѣшить двояко:

a) раскрыть сперва внутреннія, а затѣмъ наружныя скобки:

$$A-[B-(C-D)+E]=A-[B-C+D+E]=A-B+C-D-E;$$

b) раскрыть сперва наружныя, а потомъ внутреннія скобки:

$$A-[B-(C-D)+E]=A-B+(C-D)-E=A-B+C-D-E.$$

Второй способъ удобнѣе перваго.

2) $A-\{B-[C-(D-E)]\}$.

a) $A-\{B-[C-(D-E)]\}=A-\{B-[C-D+E]\}=$
$=A-\{B-C+D-E\}=A-B+C-D+E$.

b) $A-\{B-[C-(D-E)]\}=A-B+[C-(D-E)]=$
$=A-B+C-(D-E)=A-B+C-D+E$.

§ 19.

Умноженіе цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій.

Опредѣленіе. **Перемножить два или нѣсколько алгебраическихъ выраженій, значитъ найти такое алгебраическое выраженіе, численное значеніе котораго равно произведенію численныхъ значеній данныхъ сомножителей при всякомъ численномъ значеніи входящихъ въ нихъ буквъ.**

1. ***Перемноженіе двухъ или нѣсколькихъ степеней одного и того же основанія.*** Пусть дано перемножить нѣсколько степеней одного и того же основанія, напр.: a^3, a^2 и a^4; ихъ произведеніе равно: $a^3 \cdot a^2 \cdot a^4=aaa \cdot aa \cdot aaaa=$ $=a^{3+2+4}=a^9$. Изъ этого примѣра мы непосредственно выводимъ, что **произведеніе двухъ или нѣсколькихъ степеней одного и того же основанія равно степени того же основанія, показатель которой равенъ суммѣ показателей сомножителей.**

Примѣры:

1) $b^5 \cdot b^n=b^{5+n}$,

2) $x^{n-2} \cdot x^{3n+1}=x^{4n-1}$,

3) $p^{5-2n} \cdot p^{2n}=p^5$.

2. ***Умноженіе одночленовъ.*** Пусть дано перемножить три одночлена: $5a^4d$, $\frac{2}{7}a^3bc^2$ и $-3abc^3$; произведеніе ихъ будетъ:

$$5a^4d \cdot \frac{2}{7}a^3bc^2 \cdot (-3)abc^3.$$

Согласно опредѣленію дѣйствія умноженія алгебраическихъ выраженій, всѣ свойства произведенія алгебраическихъ чиселъ распространяются и на цѣлыя алгебраическія выраженія, а потому, зная, что отъ перестановки сомножителей величина произведенія не измѣняется, мы можемъ написать слѣдующее равенство:

$$5a^4 d \cdot \frac{2}{7}a^3bc^2 \cdot (-3)abc^3 = 5 \cdot \frac{2}{7}(-3) \cdot a^4 \cdot a^3 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c^2 \cdot c^3 \cdot d \cdot$$

Послѣднее выраженіе, на основаніи только что доказаннаго, равно: $5 \cdot \frac{2}{7} \cdot (-3)a^{3+4+1} \cdot b^{1+1} \cdot c^{2+3} \cdot d$, и потому мы имѣемъ равенство: $5a^4d \cdot \frac{2}{7}a^3bc^2 \cdot (-3)abc^3 = 5 \cdot \frac{2}{7} \cdot (-3) \cdot a^{4+3+1}b^{1+1}c^{2+3}d$, которое выражаетъ слѣдующее правило умноженія одночленовъ: **для того, чтобы перемножить два или нѣсколько одночленовъ, надо коэффиціенты ихъ перемножить, показатели степеней одинаковыхъ буквъ сложить, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ одного сомножителя, перенести въ произведеніе съ ихъ показателями.**

Примѣры:

1) $$\frac{3}{4}ab^3x^ry \cdot \frac{5}{6}a^3b^nx^{3r} = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot (a \cdot a^3) \cdot (b^3 \cdot b^n) \cdot (x^r \cdot x^{3r}) \cdot y = \\ = \frac{5}{8}a^4b^{n+3}x^{4r}y.$$

2) $-2a^3b^p \cdot -3a^2c = (-2) \cdot (-3) \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^p \cdot c = 6a^5b^pc.$

3) $\frac{1}{2}a^4 \cdot -3ab^2 \cdot 2a^2b^5 = \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot 2 \cdot a^4 \cdot a \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^5 = -3a^7b^7.$

4) $6a^3b^5c^nx^r \cdot -4ab^2c^{n-1} \cdot y = -24a^4b^7c^{2n-1}x^ry.$

3) ***Умноженіе многочлена на одночленъ.*** Пусть дано умножить многочленъ $(A+B+C)$ на одночленъ D.

Примѣняя свойство произведенія алгебраической суммы на какое-либо алгебраическое число, мы пишемъ равенство $(A+B+C) \cdot D = AD+BD+CD$ (1), которое выражаетъ правило умноженія многочлена на одночленъ: **для того, чтобы умножить многочленъ на одночленъ, надо каждый членъ многочлена умножить на одночленъ и полученныя произведенія сложить.**

Примѣры:

1) $(3a^2b+0{,}4ab^5-a^4)\,.\,2ab^2=6a^3b^3+0{,}8a^2b^7-2a^5b^2$,

2) $(a^nb^p-0{,}3a^{2n}b^{m+p}-5a^{3n}b^{m-p})\,.\,(-a^nb^m)=-a^{2n}b^{m+p}+$
$+0{,}3a^{3n}b^{2m+p}+5a^{4n}b^{2m-p}$.

Равенство (1) можно написать въ видѣ: $AD+BD+CD=$ $=(A+B+C)D$, откуда мы заключаемъ, что, если всѣ члены многочлена имѣютъ общаго множителя, то этотъ многочленъ можно замѣнить произведеніемъ общаго множителя на многочленъ, члены котораго суть произведенія прочихъ множителей соотвѣтственныхъ членовъ даннаго многочлена. Такое преобразованіе называется вынесеніемъ общаго множителя за скобки.

Примѣры:

1) $9a^2b^3+3a^3b^2-6a^5b^4=3a^2b^2(3b+a-2a^3b^2)$,

2) $a^{n+1}c^5-2a^{n+2}c^3+4a^nc^4=a^nc^3\,(ac^2-2a^2+4c)$.

4. ***Умноженіе многочлена на многочленъ.*** Пусть дано перемножить многочлены $(A+B+C)$ и $(D+E+F)$. Примѣняя тѣ же разсужденія, мы можемъ написать равенство: $(A+B+C)\,.\,(D+E+F)=(A+B+C)\,D+(A+B+C)\,E+(A+$ $+B+C)\,F=AD+BD+CD+AE+BE+CE+AF+BF+CF$, которое выражаетъ слѣдующее правило умноженія многочлена на многочленъ: **для того, чтобы умножить многочленъ на многочленъ, надо каждый членъ перваго многочлена умножить на каждый членъ второго многочлена и всѣ полученныя произведенія сложить.** Если въ произведеніи окажутся подобные члены, то слѣдуетъ сдѣлать приведеніе.

Примѣры:

1) $(a^3b-0{,}5a^2b^2+2ab^3)\,(3a-2b)=3a^4b-1{,}5a^3b^2+6a^2b^3-2a^3b^2+$
$+a^2b^3-4ab^4=3a^4b-3{,}5a^3b^2+7a^2b^3-4ab^4$,

2) $(a^p-2b^n)\,(a^{2p}+2a^pb^n+4b^{2n})=a^{3p}-2a^{2p}b^n+2a^{2p}b^n-4a^pb^{2n}+$
$+4a^pb^{2n}-8b^{3n}=a^{3p}-8b^{3n}$.

§ 20. Умноженіе расположенныхъ многочленовъ.

Расположить многочленъ по степенямъ какой-нибудь буквы значитъ, написать его члены въ такомъ порядкѣ, чтобы показатели степеней этой буквы шли, или уменьшаясь, или увеличиваясь. Буква, относительно которой расположенъ многочленъ, называется **главной буквой**. Членъ съ наибольшимъ показателемъ главной буквы называется **высшимъ членомъ**, а съ наименьшимъ показателемъ—**низшимъ членомъ**.

Примѣры:

1) многочленъ $2ax^3-3abx^2+b^3x-5ab$ расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы x,

2) многочленъ $a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$ расположенъ по возрастающимъ степенямъ буквы b.

Произведеніе всѣхъ множителей въ каждомъ членѣ многочлена, кромѣ главной буквы, называется коэффиціентомъ при главной буквѣ. Такъ, въ 1-мъ примѣрѣ: $2a$ - коэффиціентъ при 3-ей степени x,—$3ab$ - коэффиціентъ при 2-ой степени x; во 2-мъ примѣрѣ:—$3a^2$—коэффиціентъ при первой степени b, и т. д.

Такимъ образомъ, первоначальное опредѣленіе коэффиціента, какъ численнаго множителя, распространяется на буквенные множители.

Можетъ случиться, что въ многочленѣ будетъ нѣсколько членовъ, имѣющихъ одну и ту же степень главной буквы; тогда всѣ такіе члены соединяютъ въ одинъ, вынеся степень главной буквы за скобки. Напримѣръ, въ многочленѣ: $3a^2x+$ $+2ab^2x^2-ab^3x+\frac{1}{3}b^2x$ можно первый, третій и четвертый члены соединить въ одинъ, вынеся за скобки множитель x, и тогда данный многочленъ представится въ видѣ $\left(3a^2-ab^3+\frac{1}{3}b^2\right)x+$ $+2ab^2x^2$. Многочленъ, стоящій въ скобкахъ и не содержащій главной буквы, принято также называть коэффиціентомъ при нѣкоторой степени главной буквы. Такъ, въ данномъ примѣрѣ, трехчленъ: $3a^2-ab^3+\frac{1}{3}b^2$ будетъ коэффиціентомъ при первой степени количества x.

Для облегченія приведенія подобныхъ членовъ перемножаемые многочлены располагаютъ по степенямъ одной буквы и, подписавъ одинъ многочленъ подъ другимъ, проводятъ черту и умножаютъ верхній многочленъ на каждый членъ нижняго. Каждое изъ такихъ произведеній пишутъ въ особой строкѣ такъ, чтобы подобные члены находились одинъ подъ другимъ; затѣмъ полученныя произведенія складываютъ.

Примѣры:

1)

	$3a^2 - 5ab + 2b^2$
	$2a^2 + 4ab - 2b^2$
произведеніе множимаго на 1-й членъ множителя	$6a^4 - 10a^3b + 4a^2b^2$
произведеніе множимаго на 2-й членъ множителя	$+ 12a^3b - 20a^2b^2 + 8ab^3$
произведеніе множимаго на 3-й членъ множителя	$- 6a^2b^2 + 10ab^3 - 4b^4$
Полное произведеніе	$6a^4 + 2a^3b - 22a^2b^2 + 18ab^3 - 4b^4$

2)

$$\begin{array}{l}
2x^5 - 3x^3 + 5x - 2 \\
x^4 - 3x^3 + 1 \\
\hline
2x^9 - 3x^7 + 5x^5 - 2x^4 \\
\quad - 6x^8 + 9x^6 - 15x^4 + 6x^3 \\
\qquad + 2x^5 - 3x^3 + 5x - 2 \\
\hline
2x^9 - 6x^8 - 3x^7 + 9x^6 + 7x^5 - 17x^4 + 3x^3 + 5x - 2
\end{array}$$

Число членовъ въ произведеніи двухъ многочленовъ.

Вслѣдствіе приведенія подобныхъ членовъ, мы не можемъ заранѣе сказать, сколько членовъ будетъ въ произведеніи двухъ многочленовъ; мы можемъ указать только наибольшее и наименьшее число членовъ.

a) Изъ правила умноженія многочленовъ легко видѣть, что наибольшее число членовъ равно произведенію числа членовъ одного многочлена на число членовъ другого.

b) Отъ умноженія высшихъ и низшихъ членовъ многочленовъ получатся соотвѣтственно высшій и низшій члены произведенія, которые, не имѣя себѣ подобныхъ членовъ, не могутъ сократиться. Такимъ образомъ, въ произведеніи двухъ многочленовъ останутся **по крайней мѣрѣ** два члена.

Выведемъ нѣсколько важнѣйшихъ формулъ, по которымъ можно находить, въ частныхъ случаяхъ, произведенiе, не производя на самомъ дѣлѣ перемноженiя. **§ 21.** **Частные случаи умноженія многочленовъ**

Первая формула: $(A+B)\ (A-B)=A^2-B^2$.

$$\begin{array}{r} A+B \\ A-B \\ \hline A^2+AB \\ -AB-B^2 \\ \hline A^2 \quad - \quad B^2 \end{array}$$

Слѣдовательно, $(A+B)\ (A-B)=A^2-B^2$, т.-е. **произведенiе суммы двухъ количествъ на ихъ разность равно разности квадратовъ этихъ количествъ.**

Примѣры.

1) $(x+1)\ (x-1)=x^2-1$
2) $(m^2+4)\ (m^2-4)=m^4-16$
3) $(a^2b+ab^3)\ (a^2b-ab^3)=a^4b^2-a^2b^6$
4) $68 \cdot 72=(70-2)\ (70+2)=(70)^2-(2)^2=4900-4=4896$.

Вторая формула: $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

$$\begin{array}{r} A+B \\ A+B \\ \hline A^2+AB \\ +AB+B^2 \\ \hline A^2+2AB+B^2 \end{array}$$

Слѣдовательно, $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, т.-е. **квадратъ суммы двухъ количествъ равенъ квадрату перваго количества + (плюсъ) удвоенное произведенiе перваго количества на второе, + (плюсъ) квадратъ второго количества.**

Примѣры.

1) $(a+1)^2=a^2+2a+1$
2) $(a^2+2)^2=a^4+4a^2+4$
3) $(ab^2+a^2b)^2=a^2b^4+2a^3b^3+a^4b^2$
4) $(82)^2=(80+2)^2=(80)^2+2 \cdot 80 \cdot 2+2^2=6400+320+4=6724$.

Третья формула: $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$$\begin{array}{r} A-B \\ A-B \\ \hline A^2-AB \\ -AB+B^2 \\ \hline A^2-2AB+B^2 \end{array}$$

Слѣдовательно, $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$, т.-е. **квадратъ разности двухъ количествъ равенъ квадрату перваго количества — (минусъ) удвоенное произведенiе перваго количества на второе + (плюсъ) квадратъ второго количества.**

Примѣры.

1) $(m^2-n^3)^2=m^4-2m^2n^3+n^6$
2) $(2a-3b)^2=4a^2-12ab+9b^2$
3) $(89)^2=(90-1)^2=(90)^2-2 \,.\, 90 \,.\, 1+1^2=8100-180+1=7921.$

Четвертая формула: $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

$$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=(A^2+2AB+B^2)(A+B)$$

$$\begin{array}{r} A^2+2AB+B^2 \\ A+B \\ \hline A^3+2A^2B+AB^2 \\ +A^2B+2AB^2+B^3 \\ \hline A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 \end{array}$$

Слѣдовательно, $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$, т.-е. **кубъ суммы двухъ количествъ равенъ кубу перваго количества + (плюсъ) утроенное произведенiе квадрата перваго количества на второе, + (плюсъ) утроенное произведенiе перваго количества на квадратъ второго, + (плюсъ) кубъ второго количества.**

Примѣры.

1) $(2a+3b)^3=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$
2) $(a^2+0,2)^3=a^6+0,6a^4+0,12a^2+0,008$
3) $(41)^3=(40+1)^3=(40)^3+3 \,.\, (40)^2 \,.\, 1+3 \,.\, 40 \,.\, 1^2+1^3=64000+$
$+4800+120+1=68921.$

Пятая формула: $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

$$(A-B)^3=(A-B)^2\,(A-B)=(A^2-2AB+B^2)\,(A-B)$$

$$\begin{array}{r} A^2-2AB+B^2 \\ A-B \\ \hline A^3-2A^2B+AB^2 \\ -A^2B+2AB^2-B^3 \\ \hline A^3-3A^2B+3AB^2-B^3 \end{array}$$

Слѣдовательно, $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$, т.-е. **кубъ разности двухъ количествъ равенъ кубу перваго количества,—(минусъ) утроенное произведеніе квадрата перваго количества на второе, $+$ (плюсъ) утроенное произведеніе перваго количества на квадратъ второго, — (минусъ) кубъ второго количества.**

Примѣры.

1) $(2a-3b)^3=8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$

2) $(10a-b)^3=1000a^3-300a^2b+30ab^2-b^3$

3) $(39)^3=(40-1)^3=(40)^3-3\,.\,(40)^2\,.\,1+3\,.\,40\,.\,1^2-1^3=$ $=64000-4800+120-1=59319$.

Опредѣленіе. **Раздѣлить одно алгебраическое выраженіе на другое значитъ найти такое алгебраическое выраженіе, численное значеніе котораго равно частному отъ дѣленія численнаго значенія перваго алгебраическаго выраженія на численное значеніе второго, при всякомъ численномъ значеніи входящихъ въ нихъ буквъ.**

§ 22 Дѣленіе цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій.

Дѣленіе степеней одного и того же основанія. Пусть дано раздѣлить a^7 на a^3.

По опредѣленію дѣйствія дѣленія, произведеніе искомаго частнаго на a^3 должно быть равно a^7. Очевидно, частное должно взять равнымъ a^4, такъ какъ произведеніе a^4 на a^3, **при всякомъ значеніи** количества a, равно a^7. Такимъ образомъ, частное будетъ степень того же количества a, съ показателемъ, равнымъ разности показателей дѣлимаго и дѣлителя. Разсуждая подобнымъ образомъ, мы можемъ сказать, что, вообще, частное отъ дѣленія a^m на a^p (гдѣ m и p—цѣлыя положительныя числа) равно a^{m-p}, если $m>p$; если $m=p$, то частное, очевидно, равно 1.

Если же $m<p$, то говорятъ, что количество a^m на количество a^p на-цѣло не дѣлится, и пишутъ частное въ видѣ дроби.

Такимъ образомъ, $a^m : a^p = a^{m-p}$ при $m>p$

$$a^m : a^p = 1 \quad » \quad m=p$$

$$a^m : a^p = \frac{a^m}{a^p} \quad » \quad m<p$$

Дѣленіе одночленовъ. Пусть дано раздѣлить одночленъ $10a^4b^3c^6d$ на одночленъ $-2a^3b^3c$.

По опредѣленію дѣйствія дѣленія, произведеніе искомаго частнаго на $-2a^3b^3c$ должно быть равно $10a^4b^3c^6d$. Коэффиціентъ искомаго частнаго долженъ быть такимъ числомъ, произведеніе котораго на (—2) было-бы равно 10; такимъ числомъ будетъ частное отъ дѣленія 10 на (—2), т.-е. (—5). Затѣмъ, въ произведеніи должно быть четыре множителя, равныхъ a, а въ дѣлителѣ ихъ 3; значитъ въ частномъ долженъ быть одинъ множитель, равный a. Подобнымъ образомъ мы убѣждаемся въ томъ, что въ частномъ должно быть пять множителей равныхъ c, множителя же b не должно быть вовсе. Наконецъ, въ произведеніи есть множитель d, котораго нѣтъ въ дѣлителѣ,— значитъ, онъ долженъ быть въ частномъ. Итакъ, частное отъ дѣленія $10a^4b^3c^6d$ на $-2a^3b^3c$ будетъ равно $-5ac^5d$. Эти разсужденія приводятъ насъ къ слѣдующему правилу дѣленія одночлена на одночленъ: **чтобы раздѣлить одинъ одночленъ на другой, надо раздѣлить коэффиціентъ дѣлимаго на коэффиціентъ дѣлителя (отнеся къ нимъ знаки, стоящіе передъ одночленами), изъ показателей дѣлимаго вычесть показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя, перенести въ частное безъ измѣненія тѣ буквы, которыя не входятъ въ дѣлитель, и не писать въ частномъ тѣхъ буквъ, которыя входятъ въ дѣлимое и дѣлитель съ равными показателями степени.**

Изъ того, что было сказано о дѣленіи степеней одного и того же основанія, слѣдуетъ, что дѣленіе одного одночлена на другой **на-цѣло** возможно лишь въ томъ случаѣ, если показатели буквъ въ дѣлителѣ не больше показателей тѣхъ же буквъ въ дѣлимомъ и если въ дѣлитель не входятъ буквы, которыхъ нѣтъ въ дѣлимомъ. Въ противномъ случаѣ частное пишутъ въ видѣ дроби; напр., $a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5}$, или $ab^3 : a^3cd = \frac{ab^3}{a^3cd}$.

Дѣленіе многочлена на одночленъ.

Правило: **Чтобы раздѣлить многочленъ на одночленъ, надо каждый членъ многочлена раздѣлить на этотъ одночленъ и полученныя частныя сложить.**

Это правило выражается тождествомъ: $(A+B+C):D=$ $=A:D+B:D+C:D$. Справедливость этого тождества слѣдуетъ непосредственно изъ вышеприведеннаго опредѣленія дѣленія одного алгебраическаго выраженія на другое. Въ справедливости его можно убѣдиться также путемъ провѣрки, на основаніи того, что произведеніе частнаго на дѣлителя равно дѣлимому:

$$(A:D+B:D+C:D).D=(A:D).D+(B:D).D+(C:D).D=$$
$$=A+B+C.$$

Дѣленіе одночлена на многочленъ.

Положимъ, дано раздѣлить одночленъ M на многочленъ $A+B+C$. Это изобразимъ такъ: $M:(A+B+C)$.

Искомое частное не можетъ быть ни цѣлымъ одночленомъ, ни цѣлымъ многочленомъ, потому что:

a) если-бы частное было одночленъ, то произведеніе этого одночлена на дѣлителя $(A+B+C)$ было-бы многочленъ, тогда какъ дѣлимое есть одночленъ;

b) частное не можетъ быть также и многочленомъ, ибо произведеніе этого многочлена на дѣлителя $(A+B+C)$ было-бы многочленъ, тогда какъ дѣлимое есть одночленъ.

На основаніи этого, заключаемъ, что одночленъ не дѣлится на многочленъ, т.-е. нѣтъ такого цѣлаго алгебраическаго выраженія, которое, будучи умножено на цѣлый многочленъ, дало-бы въ произведеніи цѣлый одночленъ, и потому частное изображаемъ дробью, числителемъ которой пишемъ одночленъ, а знаменателемъ многочленъ:

$$M:(A+B+C)=\frac{M}{A+B+C}.$$

Раздѣлить одинъ многочленъ на другой значитъ найти новый многочленъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя, далъ-бы дѣлимое. **§ 23. Дѣленіе многочлена на многочленъ.**

Разсмотримъ примѣръ:

$$(12a^5-38a^4+10a^3+34a^2-8a):(2a^2-3a-4).$$

Дѣйствія располагаются слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 12a^5-38a^4+10a^3+34a^2-8a & 2a^2-3a-4 \\
 & -12a^5\mp 18a^4\mp 24a^3 & A+B+C+\ldots\ldots \\
\hline
\text{1-й остат.} & -20a^4+34a^3+34a^2-8a & 6a^3-10a^2+2a \\
 & \mp 20a^4\pm 30a^3\pm 40a^2 & 1)\ A\,.\,2a^2=12a^5, \\
\text{2-ой остатокъ} & +\ 4a^3-\ 6a^2-8a & \quad A=12a^5:2a^2=6a^3. \\
 & \pm\ 4a^3\mp\ 6a^2\mp 8a & 2)\ B\,.\,2a^2=-20a^4, \\
 & 0 & \quad B=-20^4:2a^2=-10a^2. \\
 & & 3)\ C\,.\,2a^2=4a^3, \\
 & & \quad C=4a^3:2a^2=2a.
\end{array}
$$

Обозначимъ искомое частное через $A+B+C+\ldots\ldots$

Изъ правилъ умноженія многочлена на многочленъ слѣдуетъ, что высшій членъ дѣлимаго, т.-е. даннаго произведенія, есть произведеніе высшихъ членовъ дѣлителя (даннаго множителя) и частнаго (искомаго множителя); слѣдовательно, **чтобы найти высшій членъ частнаго, надо высшій членъ дѣлимаго раздѣлить на высшій членъ дѣлителя.**

Вычтя изъ дѣлимаго произведеніе дѣлителя на первый членъ частнаго, мы получимъ первый остатокъ, который представляетъ собою произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго, начиная со второго его члена; поэтому высшій членъ перваго остатка есть произведеніе высшаго члена дѣлителя на второй членъ частнаго [1]). Слѣдовательно, **чтобы найти второй членъ частнаго, надо высшій членъ перваго остатка раздѣлить на высшій членъ дѣлителя.**

Вычтя изъ перваго остатка произведеніе дѣлителя на второй членъ частнаго, мы получимъ второй остатокъ, который представляетъ собою произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго, начиная съ третьяго его члена; поэтому высшій членъ второго остатка есть произведеніе высшаго члена дѣлителя на третій членъ частнаго. Слѣдовательно, **чтобы найти третій членъ частнаго, надо высшій членъ второго остатка раздѣлить на высшій членъ дѣлителя и т. д.**

[1]) Мы предполагаемъ, что члены частнаго расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы.

§ 24. **Признаки невозможнаго дѣленія многочленовъ.**

Разсмотримъ теперь признаки, которые указываютъ намъ на то, что одинъ многочленъ не дѣлится на другой.

1) Если показатель главной буквы въ высшемъ или низшемъ членѣ дѣлимаго соотвѣтственно менѣе показателя главной буквы въ высшемъ или низшемъ членѣ дѣлителя, то дѣленіе на-цѣло невозможно.

Примѣръ.

$$(3x^2-5x+4):(5x^3-2x^2).$$

2) Если показатель главной буквы въ высшемъ и низшемъ членѣ дѣлимаго, соотвѣтственно, не менѣе показателя главной буквы въ высшемъ и низшемъ членѣ дѣлителя, то надо поступать слѣдующимъ образомъ:

a) Если многочлены расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы, то надо продолжать дѣленіе до тѣхъ поръ, пока не получится остатокъ, въ высшемъ членѣ котораго показатель главной буквы менѣе показателя главной буквы въ высшемъ членѣ дѣлителя.

Примѣръ.

$$\begin{array}{r|l}
2x^3+7x^2+14x+2 & x^2+2x+3 \\ \cline{2-2}
-2x^3\pm4x^2\pm\ 6x & 2x+3+\dfrac{2x-7}{x^2+2x+3} \\ \cline{1-1}
3x^2+\ 8x+2 & 1)\ 2x^3:x^2=2x \\
-3x^2\pm\ 6x\pm9 & 2)\ 3x^2:x^2=3 \\ \cline{1-1}
2x-7 &
\end{array}$$

Такъ какъ въ послѣднемъ остаткѣ показатель главной буквы x менѣе показателя буквы x въ высшемъ членѣ дѣлителя, то заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

b) Если многочлены расположены по возрастающимъ степенямъ главной буквы, то предварительно опредѣляютъ высшій членъ частнаго, раздѣливъ высшій членъ дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя и продолжаютъ дѣленіе многочленовъ до тѣхъ поръ, пока не дойдутъ въ частномъ до такого члена, показатель при главной буквѣ котораго равенъ разности показателей высшихъ членовъ дѣлимаго и дѣлителя; если при этомъ получается остатокъ, то заключаютъ, что дѣленіе невозможно.

Примѣръ.

$$\begin{array}{r|l} 1-6x+12x^2-3x^3 & 1-3x+2x^2 \\ \hline -1\mp 3x\pm\ \ 2x^2 & 1-3x+\dfrac{x^2+3x^3}{1-3x+2x^2} \\ \hline -3x+10x^2-3x^3 & 1)\ 1:1=1 \\ \mp 3x\pm\ \ 9x^2\mp 6x^3 & 2)\ -3x:1=-3x \\ \hline x^2+3x^3 & \end{array}$$

Предварительное дѣйствіе: $-3x^3:2x^2=-\dfrac{3}{2}x$. Слѣдовательно, высшій членъ частнаго долженъ содержать букву x въ первой степени.

Такъ какъ мы опредѣлили въ частномъ членъ, содержащій x въ первой степени, и получили остатокъ (x^2+3x^3), то заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Когда при дѣленіи многочленовъ получается остатокъ, то для полученія полнаго частнаго къ цѣлой части частнаго приписываютъ дробь, числителемъ которой пишутъ остатокъ, а знаменателемъ дѣлитель [1]).

Вообще, если одинъ многочленъ на другой не дѣлится, то частное будетъ дробное выраженіе, числитель котораго равенъ первому многочлену, а знаменатель второму многочлену. Такъ, частное отъ дѣленія многочлена $(3x^2-5x+4)$ на многочленъ $(5x^3-2x^2)$ будетъ дробное выраженіе: $\dfrac{3x^2-5x+4}{5x^3-2x^2}$.

§ 25. **Разложеніе многочленовъ на множители.** Разложеніе многочлена на множители имѣетъ своею задачею преобразованіе многочлена въ одночленъ, представляющій произведеніе нѣсколькихъ множителей.

Разсмотримъ важнѣйшіе случаи и пріемы разложенія многочленовъ на множители.

1) Вынесеніе общаго множителя за скобки.

Можетъ представиться такой случай, когда всѣ члены многочлена имѣютъ общаго множителя; такой многочленъ можно преобразовать въ произведеніе общаго множителя всѣхъ его членовъ на частное, полученное отъ дѣленія даннаго многочлена

---

[1]) Пусть A—дѣлимое, B—дѣлитель, C—частное и R—остатокъ; тогда, $A-R=BC$ или $A=BC+R$. Дѣля обѣ части равенства на B, получаемъ: $A:B=C+R:B$.

на общаго множителя. Пусть данъ многочленъ $AD+BD+CD$, всѣ члены котораго имѣютъ общаго множителя D. Раздѣливъ данный многочленъ на D, получаемъ въ частномъ многочленъ $A+B+C$; тогда, по опредѣленію дѣйствія дѣленія, имѣемъ:

$$AD+BD+CD=D\,(A+B+C).$$

Изъ этого тождества непосредственно слѣдуетъ пріемъ разложенія на множители многочлена, всѣ члены котораго имѣютъ общаго множителя.

Этотъ случай разложенія многочлена на множители намъ уже пришлось примѣнять въ § 20.

Примѣры.

1) $am+bm-cm=m\,(a+b-c)$
2) $5a^2-25b^2+10c^2=5\,(a^2-5b^2+2c^2)$
3) $m^4x^3-m^5x^2=m^4x^2\,(x-m)$.

2) **Разложеніе на множители двучленовъ вида: A^2-B^2, A^3-B^3, A^3+B^3.**

a) Мы имѣемъ тождество: $A^2-B^2=(A+B)\,(A-B)$, согласно которому разность квадратовъ двухъ количествъ равна произведенію суммы этихъ количествъ на ихъ разность.

По этой формулѣ мы можемъ разлагать на множители всѣ такіе двучлены, которые представляютъ разность квадратовъ двухъ количествъ.

Примѣры.

1) $m^2-1=(m+1)\,(m-1)$
2) $9x^2-4y^2=(3x)^2-(2y)^2=(3x+2y)\,(3x-2y)$
3) $16a^4-9b^4=(4a^2)^2-(3b^2)^2=(4a^2+3b^2)\,(4a^2-3b^2)$.

b) Раздѣлимъ (A^3-B^3) на $(A-B)$

$$\begin{array}{r|l}
A^3-B^3 & A-B \\ \cline{2-2}
-A^3\mp A^2B & A^2+AB+B^2 \\ \cline{1-1}
A^2B-B^3 & \\
-A^2B\mp AB^2 & \\ \cline{1-1}
AB^2-B^3 & \\
-AB^2\mp B^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Отсюда, по опредѣленію дѣйствія дѣленія, получаемъ тождество:

$$A^3-B^3=(A-B)\,(A^2+AB+B^2),$$

по которому мы можемъ разлагать на множители двучлены представляющіе разность кубовъ двухъ количествъ [1]).

Примѣры.

1) $m^3-1=(m-1)(m^2+m+1)$
2) $b^6-27c^3=(b^2)^3-(3c)^3=(b^2-3c)(b^4+3b^2c+9c^2)$

c) Раздѣлимъ (A^3+B^3) на $(A+B)$

$$
\begin{array}{l|l}
A^3+B^3 & A+B \\
\cline{2-2}
-A^3\pm A^2B & A^2-AB+B^2 \\
\cline{1-1}
-A^2B+B^3 & \\
\mp A^2B\mp AB^2 & \\
\cline{1-1}
AB^2+B^3 & \\
-AB^2\pm B^3 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Отсюда, по опредѣленію дѣйствія дѣленія, получаемъ тождество:

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2),$$

по которому мы можемъ разлагать на множители двучлены, представляющіе сумму кубовъ двухъ количествъ.

---

[1]) Мы показали, что разность вторыхъ и третьихъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на разность самихъ этихъ количествъ. Не трудно обобщить это свойство на разность какихъ—угодно одинаковыхъ цѣлыхъ и положительныхъ степеней двухъ количествъ. Для этого достаточно показать, что, если разность n-ыхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на разность этихъ количествъ, то и разность $n+1$-ыхъ степеней также раздѣлится.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$
\begin{array}{l|l}
A^{n+1}-B^{n+1} & A-B \\
\cline{2-2}
-A^{n+1}\mp A^nB & A^n+\ldots \\
\cline{1-1}
A^nB-B^{n+1}=B(A^n-B^n) &
\end{array}
$$

но A^n-B^n, по предположенію, дѣлится на $A-B$, значитъ и $A^{n+1}-B^{n+1}$ раздѣлится на $A-B$. Мы показали, что A^3 B^3 дѣлится на $A-B$, значитъ и A^4-B^4 дѣлится на $A-B$; если A^4-B^4 дѣлится на $A-B$, то и A^5-B^5 дѣлится на $A-B$, и т. д.

Это свойство разности одинаковыхъ степеней двухъ количествъ показываетъ, что разность одинаковыхъ степеней двухъ количествъ всегда можетъ быть разложена на множители.

Примѣры.

1) $a^3+8=a^3+2^3=(a+2)(a^2-2a+4)$

2) $125a^6+b^6=(5a^2)^3+(b^2)^3=(5a^2+b^2)(25a^4-5a^2b^2+b^4)$.

3) **Разложеніе на множители трехчленовъ вида: $A^2+2AB+B^2$ и $A^2-2AB+B^2$.**

Мы имѣли (§ 21) тождества: $A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$
и $A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$

по которымъ мы можемъ разлагать на множители трехчлены вида: $A^2+2AB+B^2$ и $A^2-2AB+B^2$.

Примѣры.

1) $a^4+4a^2b+4b^2=(a^2)^2+2\ .\ a^2\ .\ 2b+(2b)^2=(a^2+2b)^2$

2) $b^{2p}-2b^pc^2+c^4=(b^p)^2-2\ .\ b^p\ .\ c^2+(c^2)^2=(b^p-c^2)^2$.

4) **Разложеніе на множители четырехчленовъ вида:**

$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 \text{ и } A^3-3A^2B+3AB^2-B^3.$$

Мы имѣли (§ 21) тождества: $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3$
и $A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=(A-B)^3$.

По этимъ формуламъ мы можемъ разлагать на множители многочлены вида: $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ и $A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$.

Примѣры.

1) $a^3+6a^2+12a+8=a^3+3\ .\ 2\ .\ a^2+3\ .\ 2^2\ .\ a+2^3=(a+2)^3$

2) $8a^3-12a^2b^2+6ab^4-b^6=(2a)^3-3\ .\ (2a)^2\ .\ b^2+$
$+3\ .\ (2a)\ .\ (b^2)^2-(b^2)^3=(2a-b^2)^3$.

5) **Способъ группировки членовъ.**

Иногда многочленъ можно разбить на такія группы, всѣ члены которыхъ имѣютъ общаго множителя. Когда мы разложимъ на множители каждую группу, то можетъ случиться, что всѣ группы будутъ имѣть общаго множителя; вынеся этого множителя за скобку, мы представимъ данный многочленъ въ видѣ произведенія и, такимъ образомъ, разложимъ его на множители.

Примѣры.

1) $\underbrace{ac+ad}_{\text{1-я группа}}+\underbrace{bc+bd}_{\text{2-я группа}}=a(c+d)+b(c+d)=(c+d)(a+b)$

2) $18n^2x+12x-9n^2-6=(18n^2x+12x)-(9n^2+6)=$
$=6x(3n^2+2)-3(3n^2+2)=(3n^2+2)(6x-3)=3(3n^2+2)(2x-1)$.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Алгебраическія дроби и дробныя выраженія.

§ 26. **Алгебраическая дробь. Основное свойство алгебраической дроби.**

Алгебраическою дробью $\frac{a}{b}$ называется частное отъ дѣленія алгебраическаго числа a не алгебраическое число b. Числитель и знаменатель дроби называются ея членами.

Алгебраическая дробь отличается отъ ариѳметической тѣмъ, что въ ариѳметической дроби числитель и знаменатель суть числа цѣлыя и положительныя; въ алгебраической же дроби числитель и знаменатель могутъ принимать любыя значенія: цѣлыя или дробныя, положительныя или отрицательныя.

Покажемъ, что всѣ свойства ариѳметическихъ дробей, а также и правила дѣйствій надъ ними распространяются на алгебраическія дроби.

Основное свойство. **Численное значеніе дроби не измѣнится, если оба члена ея умножить или раздѣлить на одно и то же алгебраическое число.**

Пусть дана дробь $\frac{a}{b}$; умножимъ оба члена ея на какое-нибудь число m, тогда получимъ дробь $\frac{am}{bm}$. Покажемъ, что эти двѣ дроби: $\frac{a}{b}$ и $\frac{am}{bm}$ имѣютъ одно и то же численное значеніе. какія-бы значенія мы ни придавали количествамъ a, b и m.

Умножимъ каждую изъ этихъ дробей на bm.

1) $\frac{a}{b} \cdot bm = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right) m = am$

2) $\frac{am}{bm} \cdot bm = am.$

Такъ какъ послѣ умноженія на bm, въ томъ и другомъ случаѣ, мы получили одно и то же количество, то заключаемъ, что наши дроби тождественно равны, т.-е.

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Написавъ это равенство въ обратномъ порядкѣ, получимъ:

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$$

Отсюда слѣдуетъ, что численное значеніе дроби не измѣняется, если оба члена дроби раздѣлить на одно и то же число.

Повѣримъ это свойство на частномъ примѣрѣ:

Пусть $a=\left(+\frac{3}{5}\right)$; $b=\left(-\frac{7}{8}\right)$; $m=\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Численное значеніе дроби

$$\frac{a}{b}=\frac{\left(+\frac{3}{5}\right)}{\left(-\frac{7}{8}\right)}=\left(+\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{7}{8}\right)=-\left(\frac{3}{5}:\frac{7}{8}\right)=-\frac{24}{35}.$$

Численное значеніе дроби

$$\frac{am}{bm}=\frac{\left(+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{-\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)}{+\left(\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{3}\right)}=\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(+\frac{7}{12}\right)}=-\left(\frac{2}{5}:\frac{7}{12}\right)=-\frac{24}{35}.$$

Численное значеніе обѣихъ дробей, какъ видимъ, одинаково.

Доказанное основное свойство даетъ намъ возможность приводить алгебраическія дроби къ одному знаменателю и сокращать ихъ такимъ же образомъ, какъ это дѣлается въ ариѳметикѣ.

§ 27. Дѣйствія надъ алгебраическими дробями.

Сложеніе и вычитаніе. **Чтобы сложить дроби съ одинаковыми знаменателями, достаточно сложить ихъ числители и подъ суммой подписать общаго знаменателя.**

Это правило выражается слѣдующимъ равенствомъ:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}\quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

Чтобы показать справедливость этого равенства, умножимъ обѣ части его на m; получимъ:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right).m=\left(\frac{a+b+c}{m}\right).m$$

или $$\frac{a}{m}.m+\frac{b}{m}.m+\frac{c}{m}.m=\frac{a+b+c}{m}.m$$

т.-е. $$a+b+c=a+b+c.$$

Отсюда мы заключаемъ, что равенство (1) справедливо.

Чтобы вычесть дроби съ одинаковыми знаменателями, достаточно изъ числителя уменьшаемой дроби вычесть числителя вычитаемой дроби и подъ разностью подписать общаго знаменателя.

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Доказательство равенства (2) такое же, какъ и равенства (1).

Если при сложеніи и вычитаніи дроби будутъ имѣть различныхъ знаменателей, то надо привести ихъ къ общему знаменателю и затѣмъ поступать по предыдущимъ правиламъ.

Если при сложеніи и вычитаніи, кромѣ дробей, будутъ и цѣлыя числа, то эти послѣднія надо принимать за дроби, имѣющія знаменателемъ единицу; напримѣръ: $a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$.

Численный примѣръ.

$$\frac{\left(+\frac{2}{3}\right)}{(+2)}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(+2)}+\frac{(-2)}{(-3)}=$$

$$=\frac{\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot(-3)-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-3)+(-2)\cdot(+2)}{(+2)\,.\,(-3)}=$$

$$=\frac{(-2)+\left(-\frac{3}{2}\right)+(-4)}{(-6)}=\frac{\left(-\frac{15}{2}\right)}{(-6)}=\frac{15}{12}=1\,\frac{1}{4}.$$

Повѣримъ этотъ результатъ, произведя непосредственно дѣйствія, указанныя въ формулѣ:

$$\frac{\left(+\frac{2}{3}\right)}{(+2)}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(+2)}+\frac{(-2)}{(-3)}.$$

$$\frac{\left(+\frac{2}{3}\right)}{(+2)}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(+2)}+\frac{(-2)}{(-3)}=\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=1\frac{1}{4}.$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ тому же результату, къ какому мы пришли раньше, примѣнивъ правило сложенія и вычитанія алгебраическихъ дробей.

Умноженіе. **Чтобы перемножить дроби, достаточно произведеніе числителей раздѣлить на произведеніе знаменателей.**

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Чтобы доказать справедливость этого равенства, умножимъ обѣ части его на bd.

$$1)\ \left(\frac{a}{b}\ \frac{c}{d}\right).\ bd=\left(\frac{a}{b}\ .\ b\right)\left(\frac{c}{d}\ .\ d\right)=ac.$$

$$2)\ \frac{ac}{bd}\ .\ bd=ac.$$

Такъ какъ мы получили равные результаты, то заключаемъ, что наше равенство вѣрно.

Если при умноженіи, кромѣ дробей, встрѣчаются цѣлыя числа, то ихъ надо принимать за дроби, имѣющія знаменателемъ единицу.

$$a\ .\ \frac{b}{c}=\frac{a}{1}\ .\ \frac{b}{c}=\frac{ab}{c};\ \frac{a}{b}\ .\ c=\frac{a}{b}\ .\ \frac{c}{1}=\frac{ac}{b}$$

Численный примѣръ.

$$\frac{\left(+\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right)}\cdot\frac{(-2)}{\left(-\frac{3}{8}\right)}=\frac{\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot(-2)}{\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)}=$$

$$=\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(+\frac{3}{20}\right)}=-\frac{40}{9}=-4\frac{4}{9}.$$

Повѣримъ этотъ результатъ, произведя непосредственно дѣйствія, указанныя въ формулѣ: $\dfrac{\left(+\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right)} \cdot \dfrac{\left(-2\right)}{\left(-\frac{3}{8}\right)}$.

$$\frac{\left(+\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right)} \cdot \frac{(-2)}{\left(-\frac{3}{8}\right)} = \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(+\frac{16}{3}\right) = -\frac{80}{18} = -\frac{40}{9} = -4\frac{4}{9}.$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ тому же результату, къ какому мы пришли раньше, примѣнивъ правило умноженія алгебраическихъ дробей.

Дѣленіе. **Чтобы раздѣлить дробь на дробь, достаточно дѣлимое умножить на обращенную дробь дѣлителя.**

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Чтобы доказать справедливость этого равенства, умножимъ частное, т.-е. дробь $\frac{ad}{bc}$, на дѣлителя $\frac{c}{d}$; получимъ: $\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

Такъ какъ мы получили въ произведеніи данное дѣлимое, то заключаемъ, что наше равенство вѣрно.

Если при дѣленіи, кромѣ дробей, встрѣчаются также цѣлыя числа, то ихъ надо принимать за дроби, имѣющія знаменателемъ единицу.

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{bc}$$

Численный примѣръ.

$$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(+\frac{4}{5}\right)} : \frac{(-3)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(+\frac{4}{5}\right) \cdot (-3)} =$$

$$= \frac{\left(+\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{12}{5}\right)} = -\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12}\right) = -\frac{5}{36}.$$

Повѣримъ этотъ результатъ, произведя непосредственно действія, указанныя въ формулѣ: $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(+\frac{4}{5}\right)} : \dfrac{-3}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(+\frac{4}{5}\right)} : \frac{(-3)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\right) : +(3\,.\,2) = \left(-\frac{5}{6}\right) : (+6) = -\frac{5}{36}.$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ тому же результату, къ какому мы пришли раньше, примѣнивъ правило дѣленія алгебраическихъ дробей.

§ 28. **Дробныя алгебраическія выраженія и дѣйствія надъ ними.**

Дробныя алгебраическія выраженія. Дробнымъ алгебраическимъ выраженіемъ называется выраженіе, которое содержитъ буквенныя количества въ знаменателѣ. Дробное алгебраическое выраженіе можетъ быть одночленъ или многочленъ. Одночленное дробное алгебраическое выраженіе можно разсматривать, какъ частное, полученное отъ дѣленія одного одночлена или многочлена на другой, когда дѣлимое не дѣлится на дѣлителя на-цѣло. Всѣ свойства и правила дѣйствій надъ алгебраическими дробями распространяются на одночленныя дробныя алгебраическія выраженія, такъ какъ доказательства основного свойства и правилъ дѣйствій для одночленныхъ дробныхъ алгебраическихъ выраженій тѣ же, что и для алгебраическихъ дробей.

Для примѣра докажемъ основное свойство: одночленное дробное алгебраическое выраженіе $\frac{A}{B}$ или, короче, дробь $\frac{A}{B}$, у которой A и B какіе угодно одночлены, или многочлены, равно тождественно дроби $\frac{AC}{BC}$, которая получилась отъ умноженія числителя и знаменателя данной дроби на одночленъ или многочленъ C.

Умножимъ обѣ дроби на BC и получимъ:

1) $\frac{A}{B}\cdot BC = \left(\frac{A}{B}\cdot B\right)\cdot C = AC.$

2) $\frac{AC}{BC}\cdot BC = AC.$

Произведенія получились равныя, множители равные, значитъ равны и множимые, т. е. $\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}$.

Написавъ это равенство въ обратномъ порядкѣ, т. е. правую часть равенства вмѣсто лѣвой, а лѣвую вмѣсто правой, мы замѣчаемъ, что дробь $\frac{AC}{BC}$ тождественно равна дроби $\frac{A}{B}$, которая получилась отъ дѣленія числителя и знаменателя данной дроби на количество C.

Слѣдствія основного свойства:

1) Приведеніе членовъ дроби къ цѣлому виду.

Примѣры.

$$\frac{\frac{2}{3}a}{b}=\frac{\frac{2}{3}a \,.\, 3}{b \,.\, 3}$$

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{3}b}=\frac{\frac{1}{2}a \,.\, 6}{\frac{1}{3}b \,.\, 6}=\frac{\text{[illegible]}}{2b}.$$

2) **Перемѣна знаковъ у членовъ дроби.**

Примѣры.

$$\frac{a}{b}=\frac{a \,.\, (-1)}{b \,.\, (-1)}=\frac{-a}{-b}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a \,.\, (-1)}{b \,.\, (-1)}=-\frac{-a}{b}=-\frac{a}{-b}.$$

Такимъ образомъ, если мы измѣняемъ знакъ у одного изъ членовъ дроби, то должны измѣнить знакъ передъ дробью; если же мы измѣняемъ знакъ у обоихъ членовъ дроби, то передъ дробью остается прежній знакъ.

3) ***Сокращеніе дробей.*** **Чтобы сократить дробь, надо числителя и знаменателя ея раздѣлить на произведеніе всѣхъ общихъ ихъ множителей.**

Примѣры.

1) $\frac{a^2c}{ab}=\frac{ac}{b}$

2) $\frac{2ax^5}{4ab^2x^3}=\frac{x^2}{2b^2}$

3) $\frac{30(a+b)^2(a-b)^n}{45(a-b)^{n+4}}=\frac{2(a+b)^2}{3(a-b)^4}$

4) $\frac{12a-15x}{16a-20x}=\frac{3(4a-5x)}{4(4a-5x)}=\frac{3}{4}$

5) $\frac{ax-ab}{2ax+3x-3b-2ab}=\frac{a(x-b)}{2a(x-b)+3(x-b)}=\frac{a(x-b)}{(2a+3)(x-b)}=$

$$=\frac{a}{2a+3}.$$

4) Приведеніе дробей къ общему знаменателю.

Правило. **Чтобы привести дроби къ общему знаменателю, надо найти наименьшее кратное всѣхъ знаменателей; это количество и будетъ общимъ знаменателемъ. Затѣмъ числителя и знаменателя каждой дроби надо умножить на частное отъ дѣленія общаго знаменателя на знаменателя этой дроби.**

Наименьшимъ кратнымъ нѣсколькихъ алгебраическихъ выраженій называется простѣйшее алгебраическое выраженіе, которое дѣлится безъ остатка на всѣ данныя алгебраическія выраженія.

Чтобы найти наименьшее кратное одночленовъ, надо составить произведеніе изъ всѣхъ различныхъ множителей данныхъ одночленовъ съ наибольшими ихъ показателями.

Примѣры:

1) Найти наименьшее кратное количествъ: $12ax$ и $16a^3x^2$. Наименьшее кратное равно $2^4 3a^3x^2=48a^3x^2$.

2) Найти наименьшее кратное количествъ: $28a^5b^5c^3$; $6a^4b^3c^3n$; $84a^3b^3c^4d^2$.

$$28=2^2\,.\,7$$
$$6=2\,.\,3$$
$$84=2^2\,.\,3\,.\,7$$

Наименьшее кратное будетъ $2^2\,.\,3\,.\,7a^5b^5c^4d^2n=84a^5b^5c^4d^2n$.

Чтобы найти наименьшее кратное многочленовъ, надо сперва разложить ихъ на множители и затѣмъ поступать такъ же, какъ при нахожденіи наименьшаго кратнаго одночленовъ.

Примѣръ.

Найти наименьшее кратное многочленовъ:

a^5-a-a^4+1 и a^5-a+a^4-1

$a^5-a-a^4+1=a^4(a-1)-(a-1)=(a-1)(a^4-1)$

$a^5-a+a^4-1=a^4(a+1)-(a+1)=(a+1)(a^4-1)$

Наименьшее кратное равно $(a-1)(a+1)(a^4-1)=(a^2-1)(a^4-1)$.

Примѣры приведенія дробей къ общему знаменателю.

1) Привести къ общему знаменателю дроби:

$$\frac{7a}{48b^5d^4},\ \frac{3c^2}{8b^3d}\ \text{и}\ \frac{2x^3}{3bd^2}.$$

Знаменатель $48b^5d^4$ дѣлится на прочихъ знаменателей и потому будетъ общимъ знаменателемъ данныхъ дробей:

$$48b^5d^4 : 8b^3d = 6b^2d^3;\quad 48b^5d^4 : 3bd^2 = 16b^4d^2.$$

Слѣдовательно, дроби: $\frac{7a}{48b^5d^4}$ остается безъ перемѣны;

$$\frac{3c^2}{8b^3d} = \frac{18c^2b^2d^3}{48b^5d^4};$$

$$\frac{2x^3}{3bd^2} = \frac{32x^3b^4d^2}{48b^5d^4}.$$

2) Привести къ общему знаменателю дроби:

$$\frac{1}{6a^3+6a^2b},\ \frac{7}{4a^2b-4ab^2}\ \text{и}\ \frac{5}{12ab(a^2+b^2+2ab)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6a^3+6a^2b=6a^2\,(a+b) \\ 4a^2b-4ab^2=4ab\,(a-b) \\ 12ab\,(a^2+b^2+2ab)=12ab\,(a+b)^2 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{общее наименьшее кратное} \\ 12a^2b\,(a-b)\,(a+b)^2\end{array}$$

$$\frac{1}{6a^2\,(a+b)} = \frac{2b\,(a+b)\,(a-b)}{12a^2b\,(a-b)\,(a+b)^2};\quad \frac{7}{4ab\,(a-b)} =$$

$$= \frac{21a\,(a+b)^2}{12a^2b\,(a-b)\,(a+b)^2};\quad \frac{5}{12ab\,(a+b)^2} = \frac{5a\,(a-b)}{12a^2b\,(a-b)\,(a+b)^2}.$$

Примѣры на дѣйствія надъ одночленными дробными алгебраическими выраженіями.

1) $$\frac{3c}{a^2+ac} + \frac{2a}{ac+c^2} - \frac{a^2+4c^2}{a^2c+ac^2} = \frac{3c}{a\,(a+c)} + \frac{2a}{c\,(a+c)} -$$

$$- \frac{a^2+4c^2}{ac\,(a+c)} = \frac{3c\,.\,c+2a\,.\,a-(a^2+4c^2)}{ac\,(a+c)} = \frac{3c^2+2a^2-a^2-4c^2}{ac\,(a+c)} =$$

$$= \frac{a^2-c^2}{ac\,(a+c)} = \frac{(a+c)\,(a-c)}{ac\,(a+c)} = \frac{a-c}{ac}.$$

Этотъ примѣръ, между прочимъ, показываетъ намъ, что дробное многочленное алгебраическое выраженіе можетъ быть замѣнено тождественнымъ ему дробнымъ одночленнымъ выраженіемъ.

2) $\frac{8x^5}{15an^4} : \frac{2x^3}{3an^3} = \frac{24an^3x^5}{30ax^3n^4} = \frac{4x^2}{5n}$

3) $\frac{5a^2}{6x^3} \cdot \frac{4n}{7a^2} = \frac{20a^2n}{42a^2x^3} = \frac{10n}{21x^3}$

4) $\frac{6a^{p+1}}{a^2-b^2} \cdot \frac{a+b}{2a^p} = \frac{6a^{p+1}(a+b)}{2a^p(a+b)(a-b)} = \frac{3a}{a-b}$

5) $\frac{a^2x^{2n}}{a^3-1} : \frac{a^3x^{n-1}}{a-1} = \frac{a^2x^{2n}(a-1)}{(a^3-1)\,.\,a^3x^{n-1}} = \frac{a^2x^{2n}(a-1)}{a^3x^{n-1}(a-1)(a^2+a+1)} =$

$= \frac{x^{n+1}}{a(a^2+a+1)}$

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Отношенія и пропорціи.

§ 29. **Отношенія и пропорціи.** **Отношеніемъ двухъ количествъ называется число, на которое надо умножить одно изъ нихъ, чтобы получить другое.**—Положимъ, данныя количества суть a и b и пусть $a=b\,.\,q$; тогда q есть отношеніе количествъ a и b.

Изъ равенства $a=bq$ имѣемъ $q=\frac{a}{b}$ или $q=a:b$; слѣдовательно, **отношеніе выражаетъ частное, полученное отъ дѣленія одного количества на другое.**—Дѣлимое или числитель называются **предыдущимъ членомъ,** а дѣлитель или знаменатель—**послѣдующимъ членомъ** отношенія.

Равенство двухъ отношеній называется **пропорціей**; такъ, если $a:b=q$ и $c:d=q$, то имѣемъ пропорцію

$$a:b=c:d$$

Пропорцію пишутъ еще такъ: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Члены пропорціи имѣютъ особыя названія: a и d называются **крайними членами,** b и c—**средними членами** пропорціи.

Основное свойство членовъ пропорціи. Напишемъ пропорцію въ видѣ равенства двухъ дробей $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Умноживъ обѣ части равенства на произведеніе знаменателей дробей, получимъ:

$$\frac{a}{b}\,.\,bd=\frac{c}{d}\,.\,bd \text{ или } ad=cb.$$

Послѣднее равенство выражаетъ слѣдующее свойство пропорціи: **во всякой пропорціи произведеніе крайнихъ ея членовъ равно произведенію среднихъ.**

Обратно: если четыре количества m, n, p, r имѣютъ то свойство, что произведеніе двухъ изъ нихъ, напримѣръ, $m \, . \, r$ равно произведенію двухъ остальныхъ, т. - е. $n \, . \, p$, то изъ этихъ количествъ можно составить пропорцію. Итакъ, $m \, . \, r = n \, . \, p$; составимъ произведеніе двухъ количествъ, взявъ одно изъ нихъ изъ одного произведенія, другое изъ другого, напр. $n \, . \, r$, и раздѣлимъ обѣ части даннаго равенства на это послѣднее произведеніе; получимъ:

$$\frac{m \, . \, r}{n \, . \, r} = \frac{n \, . \, p}{n \, . \, r} \text{ или } \frac{m}{n} = \frac{p}{r} \, .$$

Положимъ, дана пропорція $a : b = c : d$.

По доказанному, имѣемъ $ad = bc$.

Отсюда, $a = \frac{bc}{d}$ и $d = \frac{bc}{a}$.

Слѣдовательно, **каждый крайній членъ пропорціи равенъ произведенію среднихъ членовъ, раздѣленному на другой крайній.**

Изъ того же равенства $ad = bc$ имѣемъ

$$b = \frac{ad}{c} \text{ и } c = \frac{ad}{b} \, .$$

Слѣдовательно, **каждый средній членъ пропорціи равенъ произведенію крайнихъ членовъ, раздѣленному на другой средній.**

Перестановка членовъ пропорціи.

Положимъ, дана пропорція $a : b = c : d$. . . . . . . (1)
Изъ этой пропорціи имѣемъ равенство $a \, . \, d = b \, . \, c$ . . . (α)
Въ данной пропорціи: 1) можно переставить крайніе члены

$d : b = c : a$. . . . . (2)

2) можно переставить средніе члены

$a : c = b : d$. . . . . (3)

3) можно переставить средніе и крайніе члены

$d : c = b : a$ . . . . (4)

4) можно средніе члены поставить крайними, а крайніе средними; для этого достаточно въ данной

пропорціи второе отношеніе написать первымъ, а первое вторымъ; такимъ образомъ,

$$c : d = a : b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Примѣняя къ этой пропорціи предыдущія перестановки членовъ, получаемъ:

$$c : a = d : b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$b : d = a : c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$b : a = d : c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Правильность всѣхъ этихъ пропорцій видна изъ того, что въ каждой изъ нихъ обнаруживается равенство произведеній крайнихъ и среднихъ членовъ, т.-е. въ каждой изъ нихъ имѣетъ мѣсто равенство $ad = bc$.

Среднее пропорціональное. Если въ пропорціи средніе члены равны, то пропорція называется *непрерывной*, а каждый изъ равныхъ среднихъ членовъ называется *среднимъ пропорціональнымъ* между двумя крайними.

Положимъ, дана пропорція:

$$a : b = b : c.$$

По основному свойству пропорціи имѣемъ:

$$b \,.\, b = a \,.\, c \text{ или } b^2 = ac,$$

откуда

$$b = \sqrt{ac}.$$

Слѣдовательно, **среднее пропорціональное двухъ чиселъ равно квадратному корню изъ произведенія этихъ чиселъ.**

Среднимъ пропорціональнымъ нѣсколькихъ чиселъ называется корень, показатель котораго равенъ числу данныхъ чиселъ, изъ произведенія этихъ чиселъ.

Пусть дано n чиселъ: $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$; среднимъ пропорціональнымъ ихъ будетъ $m = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$.

Сложныя пропорціи. Пусть даны пропорціи:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1} \text{ и } \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2}.$$

Перемноживъ данныя пропорціи, т.-е. перемноживъ соотвѣтственныя части данныхъ равенствъ, получаемъ пропорцію:

$$\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Раздѣливъ первую пропорцію на вторую, т.-е. раздѣливъ обѣ части перваго равенства на соотвѣтственныя части второго равенства, получаемъ пропорцію:

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{d_1} : \frac{c_2}{d_2} \text{ или } \frac{a_1 b_2}{b_1 a_2} = \frac{c_1 d_2}{d_1 c_2} \quad \ldots \ldots (2)$$

Подобнымъ образомъ, имѣя пропорцію $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, мы, какъ слѣдствіе, получаемъ пропорцію:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Пропорціи: (1), (2) и (3) называются **сложными** пропорціями.

Возьмемъ пропорцію $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Прибавляя къ обѣимъ частямъ равенства и вычитая изъ обѣихъ частей равенства по единицѣ, получимъ **Производныя пропорціи.**

$$1) \ \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \text{ или } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \ldots \ldots (\alpha)$$

$$2) \ \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \text{ или } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad \ldots \ldots (\alpha')$$

Раздѣливъ равенства (α) и (α') на данную пропорцію, получимъ

$$1) \ \frac{a+b}{b} : \frac{a}{b} = \frac{c+d}{d} : \frac{c}{d} \text{ или } \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad \ldots \ldots (\beta)$$

$$2) \ \frac{a-b}{b} : \frac{a}{b} = \frac{c-d}{d} : \frac{c}{d} \text{ или } \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \quad \ldots \ldots (\beta')$$

Равенства (α), (α'), (β) и (β') называются **производными** пропорціями; онѣ указываютъ намъ на свойство пропорціи, по которому **сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ своему послѣдующему (предыдущему) члену, какъ сумма или разность членовъ второго отношенія относится къ своему послѣдующему (предыдущему) члену.**

Раздѣливъ отношенія пропорціи (α) на соотвѣтственныя отношенія пропорціи (α'), получимъ новую пропорцію:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma),$$

которая также будетъ производная пропорція и указываетъ намъ, что сумма членовъ перваго отношенія любой пропорціи относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ ихъ разности.

Свойство равныхъ отношеній.

Положимъ, имѣемъ рядъ равныхъ отношеній:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots\ldots$$

Обозначивъ величину каждаго изъ этихъ отношеній черезъ q, получимъ:

$$\frac{a_1}{b_1}=q;\ \frac{a_2}{b_2}=q;\ \frac{a_3}{b_3}=q\ \ldots$$

откуда

$$a_1=b_1q;\ a_2=b_2q;\ a_3=b_3q\ \ldots$$

Сложивъ почленно эти равенства, находимъ

$$a_1+a_2+a_3+\ldots=b_1q+b_2q+b_3q+\ldots$$

или

$$a_1+a_2+a_3+\ldots=q(b_1+b_2+b_3+\ldots)$$

Отсюда

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots}=q,\ \text{но}\ q=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots$$

слѣдовательно,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots$$

Такимъ образомъ, **если данъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма предыдущихъ членовъ относится къ суммѣ послѣдующихъ членовъ, какъ любой изъ предыдущихъ относится къ своему послѣдующему.**

§ 30.

Пропорціональность величинъ.

Во многихъ вопросахъ встрѣчаются величины, связанныя между собой такими условіями, при которыхъ съ измѣненіемъ одной величины измѣняется и другая. Между законами такого рода измѣненій остановимся на слѣдующихъ двухъ:

1) Если двѣ величины измѣняются такъ, что съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной изъ нихъ въ нѣсколько разъ другая также увеличивается или уменьшается и во столько же разъ, то такія величины называются **прямо-пропорціональными**.

Положимъ, имѣемъ двѣ такія величины: a (напр., количество товара) и b (стоимость его), и пусть значеніямъ a_1 и a_2 величины a соотвѣтствуютъ значенія b_1 и b_2 величины b; тогда, если отношеніе $\frac{a_1}{a_2}=m$, то также и $\frac{b_1}{b_2}=m$, откуда $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

Слѣдовательно, **при прямой пропорціональности отношеніе двухъ произвольныхъ значеній одной величины равно отношенію соотвѣтственныхъ значеній другой величины.**

2) Двѣ величины называются **обратно-пропорціональными**, если, при увеличеніи или уменьшеніи одной изъ нихъ въ нѣсколько разъ, другая, наоборотъ, уменьшается или увеличивается во столько же разъ.

Положимъ, имѣемъ двѣ такія величины: a (напр., число работниковъ) и b (время, употребленное ими для исполненія работы), и пусть значеніямъ a_1 и a_2 величины a соотвѣтствуютъ значенія b_1 и b_2 величины b. Тогда, если отношеніе $\frac{a_1}{a_2}=m$, то отношеніе $\frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{m}$ или $\frac{b_2}{b_1}=m$; откуда

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_2}{b_1}.$$

Слѣдовательно, **при обратной пропорціональности отношеніе двухъ произвольныхъ значеній одной величины равно обратному отношенію соотвѣтственныхъ значеній другой величины.**

Возьмемъ двѣ прямо-пропорціональныя величины: a и b, и пусть a_1, a_2, a_3 . . . . будутъ различныя значенія величины a и b_1, b_2, b_3 . . . .—соотвѣтственныя имъ значенія величины b. Такъ какъ a и b, по условію, прямо-пропорціональныя величины, то

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2};\quad \frac{a_2}{a_3}=\frac{b_2}{b_3};\quad \frac{a_3}{a_4}=\frac{b_3}{b_4},\ \text{и т. д.}$$

Перемѣняя въ этихъ пропорціяхъ мѣстами средніе члены, получимъ пропорціи:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2};\quad \frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3};\quad \frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4},\ \text{и т. д., т.-е.}$$

получимъ рядъ равныхъ отношеній:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots \text{ и т. д.}$$

Отсюда мы выводимъ слѣдующее свойство прямо-пропорціональныхъ величинъ:

Отношеніе соотвѣтственныхъ значеній двухъ прямо-пропорціональныхъ величинъ есть величина постоянная, т.-е. отношенія соотвѣтственныхъ значеній двухъ прямо-пропорціональныхъ величинъ, для всѣхъ значеній этихъ величинъ, равны.

Возьмемъ теперь двѣ обратно-пропорціональныя величины: a и b и пусть

a_1, a_2, a_3.... различныя значенія величины a,
b_1, b_2, b_3.... соотвѣтственныя значенія величины b.

Такъ какъ a и b, по условію, обратно-пропорціональныя величины, то

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_2}{b_1};\quad \frac{a_2}{a_3}=\frac{b_3}{b_2};\quad \frac{a_3}{a_4}=\frac{b_4}{b_3}, \text{ и т. д.}$$

Зная, что произведеніе среднихъ членовъ пропорціи равно произведенію крайнихъ ея членовъ, пишемъ

$a_1b_1=a_2b_2$; $a_2b_2=a_3b_3$; $a_3b_3=a_4b_4$, и т. д., откуда
$a_1b_1=a_2b_2=a_3b_3=a_4b_4=\ldots$ и т. д.

Этотъ рядъ равенствъ приводитъ насъ къ слѣдующему свойству обратно-пропорціональныхъ величинъ:

Произведеніе соотвѣтственныхъ значеній двухъ обратно-пропорціональныхъ величинъ есть величина постоянная, т.-е. произведеніе соотвѣтственныхъ значеній двухъ обратно-пропорціональныхъ величинъ не измѣняется съ измѣненіемъ значеній этихъ величинъ.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Уравненія первой степени.

Равенства бываютъ троякаго рода: **§ 31.** **Виды равенствъ.**

1) **Условныя равенства**, напр., 1) $a=b$; a вообще не равно b, но, по условію или по соглашенію, a можетъ равняться b; 2) $a=3$; a вообще не равно 3, но, по условію или по соглашенію, a можетъ равняться 3.

2) **Тождества**, напр., $2a+2b=2(a+b)$; $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Тождествомъ называется такое равенство, у котораго обѣ части имѣютъ одинаковыя численныя значенія при какихъ-угодно значеніяхъ буквъ, входящихъ въ это равенство.

3) **Уравненія**, напр., $2x-1=5$; $ax-b=bx$. Уравненіемъ называется равенство, у котораго обѣ части имѣютъ одинаковую численную величину, или обращаются въ тождество, только при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ.

Такъ, равенство $2x-1=5$ справедливо при $x=3$. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя вмѣсто x въ лѣвую часть равенства 3, получаемъ

$$2 \cdot 3-1=5, \text{ т. е. } 5=5.$$

При другомъ значеніи x, равенство не имѣетъ мѣста; напр., при $x=1$, имѣемъ

$$2 \cdot 1-1=5, \text{ т. е. } 1=5;$$

при $x=2$ имѣемъ

$$2 \cdot 2-1=5, \text{ т. е. } 3=5, \text{ и т. д.}$$

Уравненіе $ax-b=bx$, обращается въ тождество при $x=\frac{b}{a-b}$.

Дѣйствительно, подставляя $\frac{b}{a-b}$ вмѣсто x, получаемъ тождество $\frac{ab}{a-b}-b=\frac{b^2}{a-b}$.

Буквенныя количества, отъ значенія которыхъ зависитъ обращеніе уравненія въ тождество, называются неизвѣстными.

Уравненія различаются по числу неизвѣстныхъ: уравненія съ одною, двумя, тремя и т. д. неизвѣстными.

Кромѣ того, уравненія бываютъ раціональныя или ирраціональныя, цѣлыя или дробныя, въ зависимости отъ того, какими выраженіями по отношенію къ неизвѣстнымъ будутъ части уравненія, раціональными или ирраціональными, цѣлыми или дробными [1]).

Такимъ образомъ, $\frac{\sqrt{a}}{b}x^2-\sqrt{b}\,x=c$ есть цѣлое раціональное уравненіе съ одною неизвѣстною

$\frac{a}{x}+bx=a^2$ — дробное раціональное уравненіе съ одною неизвѣстною.

$\sqrt{x+3}=y$ — ирраціональное уравненіе съ двумя неизвѣстными.

Числа или выраженія, которыя, будучи подставлены въ уравненіе вмѣсто неизвѣстныхъ, обращаютъ это уравненіе въ тождество, называются **корнями** уравненія. **Рѣшить уравненіе значитъ найти его корни.**

§ 32. **Преобразованія уравненій.**

Тождественными или равносильными уравненіями называются уравненія, имѣющія одни и тѣ же корни.

Напримѣръ: $2x-1=5$, корень котораго равенъ 3
и $15x=45$, корень котораго также равенъ 3.

Разсмотримъ тѣ преобразованія, которыя приходится дѣлать при рѣшеніи уравненій.

---

[1]) Выраженіе называется раціональнымъ по отношенію къ количеству x, если количество x не входитъ въ это выраженіе подъ знакомъ корня; въ противномъ случаѣ выраженіе называется ирраціональнымъ.

Раціональное выраженіе называется цѣлымъ по отношенію къ количеству x, если количество x не входитъ въ знаменателѣ: въ противномъ случаѣ раціональное выраженіе называется дробнымъ.

1. Если къ обѣимъ частямъ уравненія придадимъ или вычтемъ изъ нихъ одно и то же количество, то получимъ новое уравненіе, равносильное съ даннымъ.

Дано уравненіе $2x-1=5$, корень котораго $x=3$.

a) Придадимъ къ обѣимъ частямъ уравненія число 5, получимъ

$$2x-1+5=5+5 \text{ или } 2x+4=10;$$

корень новаго уравненія $x=3$.

b) Вычтемъ изъ обѣихъ частей даннаго уравненія число 4, получимъ $2x-1-4=5-4$ или $2x-5=1$; корень новаго уравненія $x=3$.

Мы показали на примѣрѣ, что, если мы къ обѣимъ частямъ уравненія придадимъ одно и то же количество, то новое уравненіе будетъ равносильно данному; теперь докажемъ это.

Доказать, что два уравненія равносильны, это значитъ, согласно опредѣленію, доказать, что всѣ корни перваго уравненія удовлетворяютъ второму и обратно.

Всякое уравненіе можно представить въ видѣ равенства $A=B$ (1), гдѣ A и B нѣкоторыя выраженія, содержащія извѣстныя и неизвѣстныя количества. Придадимъ къ обѣимъ частямъ уравненія $A=B$ нѣкоторое выраженіе C, которое также можетъ содержать извѣстныя и неизвѣстныя количества; получимъ уравненіе $A+C=B+C$ (2).

Легко видѣть, что для тѣхъ значеній неизвѣстныхъ, для которыхъ $A=B$, также будетъ справедливо и равенство $A+C=B+C$; значитъ, корни перваго уравненія удовлетворяютъ второму, и въ этомъ смыслѣ можно сказать, что уравненіе (2) есть слѣдствіе уравненія (1).

Прибавляя, теперь, къ обѣимъ частямъ уравненія (2) по $-C$, мы получаемъ уравненіе (1) и такимъ образомъ убѣждаемся въ томъ, что корни уравненія (2) удовлетворяютъ уравненію (1).

Итакъ, мы показали, что оба уравненія имѣютъ одни и тѣ же корни и въ этомъ смыслѣ суть слѣдствія одно другого.

На этомъ свойствѣ основаны слѣдующія преобразованія уравненій:

1) Перенесеніе членовъ изъ одной части уравненія въ другую.

Примѣръ.

$$
\begin{array}{r}
ax+b=c-dx \\
-b \qquad -b \\
\hline
ax=c-dx-b \\
+dx \qquad +dx \\
\hline
ax+dx=c-b
\end{array}
$$

Этотъ примѣръ показываетъ, что можно переносить члены изъ одной части уравненія въ другую, но надо измѣнять при этомъ знаки этихъ членовъ на обратные.

2) Равные члены съ одинаковыми знаками въ обѣихъ частяхъ уравненія можно сократить.

Примѣръ.

$$ax+mx+b=cx+mx+d,$$

откуда, вычитая изъ обѣихъ частей уравненія по mx, получаемъ $ax+b=cx+d$.

3) Можно измѣнить у всѣхъ членовъ уравненія знаки на обратные.

Примѣръ.

$$
\begin{array}{l}
\quad ax-b=cx-d \\
+\ \underline{-ax+b-cx+d \quad -ax+b-cx+d} \\
\qquad -cx+d=-ax+b \text{ или } -ax+b=-cx+d.
\end{array}
$$

4) Всѣ члены уравненія можно перенести въ лѣвую часть, и тогда уравненіе приметъ видъ: $A=0$. Напримѣръ, уравненіе $ax+b=cx+d$, послѣ перенесенія всѣхъ членовъ въ лѣвую часть, принимаетъ видъ $ax-cx+b-d=0$.

Если данное уравненіе было относительно неизвѣстныхъ раціональнымъ и цѣлымъ, то A представляетъ собою раціональный и цѣлый относительно неизвѣстныхъ многочленъ; при этомъ, если A содержитъ только одну неизвѣстную, то наибольшій показатель при этой неизвѣстной опредѣляетъ такъ называемую **степень уравненія**; напримѣръ:

$ax^2+bx+c=0$—уравненіе второй степени съ одною неизвѣстною.

$3y^3+ay+b=0$—уравненіе третьей степени съ одною неизвѣстною.

Если A содержитъ нѣсколько неизвѣстныхъ, то степень уравненія опредѣляется наибольшею суммою показателей при неизвѣстныхъ въ одномъ членѣ. Напримѣръ, уравненіе:

$2x^2yz+x^3y^2z-y^4z=3x^4-z^5$ есть уравненіе съ тремя неизвѣстными шестой степени (сумма показателей у члена x^3y^2z равна 6).

II. Если обѣ части уравненія умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же количество, не равное нулю и не содержащее неизвѣстныхъ, то получимъ новое уравненіе, равносильное съ даннымъ.

Возьмемъ уравненіе $2x-1=5$, корень котораго $x=3$.

a) Умножимъ обѣ части уравненія на 6:

$$(2x-1)\,.\,6=5\,.\,6 \text{ или}$$

$12x-6=30$—новое уравненіе, корень котораго $x=3$.

b) Раздѣлимъ обѣ части уравненія на 7:

$$(2x-1):7=5:7 \text{ или}$$

$\frac{2}{7}x-\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$—новое уравненіе, корень котораго $x=3$.

Итакъ, всѣ три уравненія имѣютъ одинъ и тотъ же корень.

Мы показали на примѣрѣ, что если мы обѣ части уравненія умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же количество, не содержащее неизвѣстныхъ и не равное 0, то получимъ новое уравненіе, равносильное данному. Теперь докажемъ это.

Умножимъ обѣ части уравненія $A=B$ (1), гдѣ A и B нѣкоторыя выраженія, содержащія извѣстныя и неизвѣстныя величины, на количество C, не содержащее неизвѣстныхъ и не равное 0; получимъ уравненіе $AC=BC$ (2), которому мы можемъ придать видъ $AC-BC=0$ или $(A-B)\,.\,C=0$.

Тѣ значенія неизвѣстныхъ, которыя удовлетворяютъ уравненію (1), т.-е. обращаютъ его въ тождество, обращаютъ въ 0 разность $A-B$ и потому удовлетворяютъ уравненію (2), такъ какъ для того, чтобы произведеніе обратилось въ 0, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ множителей обратился въ 0. Значитъ, всѣ корни перваго уравненія удовлетворяетъ второму.

Теперь покажемъ, что, обратно, всѣ корни второго уравненія удовлетворяютъ первому.

Уравненіе (2) удовлетворяется тѣми значеніями неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ въ 0 произведеніе $(A-B)\,.\,C$, но въ этомъ произведеніи множитель C отъ значеній неизвѣстныхъ не зависитъ и не равенъ 0; поэтому произведенію $(A-B).C$ можетъ обратиться въ 0 только тогда, если первый множитель его, т.-е. $A-B$, обращается въ 0. А это и показываетъ, что, когда справедливо равенство $AC=BC$, то справедливо и равенство $A=B$.

Такимъ образомъ, мы показали, что оба уравненія имѣютъ одни и тѣ же корни и въ этомъ смыслѣ суть слѣдствія одно другого.

Изъ послѣдняго слѣдуетъ, что обѣ части уравненія можно раздѣлить на одно и то же количество, не содержащее неизвѣстныхъ и не равное 0. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе $AC=BC$ равносильно уравненію $A=B$; значитъ, и уравненіе $A=B$ равносильно уравненію $AC=BC$, а оно получается изъ уравненія $AC=BC$ дѣленіемъ обѣихъ частей его на количество C.

На этомъ свойствѣ основаны слѣдующія преобразованія уравненій:

1) Если всѣ члены уравненія имѣютъ общаго множителя, не содержащаго неизвѣстныхъ, то можно упростить уравненіе, раздѣливъ всѣ члены его на этого общаго множителя.

Примѣръ.

$$60x-20=40x+60.$$

Раздѣливъ обѣ части этого уравненія на 20, получимъ уравненіе, равносильное данному: $3x-1=2x+3$.

2) Если въ уравненіе входятъ дробные члены (не содержащіе неизвѣстныхъ въ знаменателѣ), то можно уравненіе освободить отъ знаменателей; для этого надо найти общаго знаменателя всѣхъ дробей, входящихъ въ уравненіе, и обѣ части уравненія умножить на этого общаго знаменателя.

Примѣръ.

$$\frac{2}{3}x-5=\frac{1}{4}+\frac{5}{6}x;\ \text{общій знаменатель}=12.$$

Умноживъ обѣ части даннаго уравненія на 12, получаемъ:

$$\left(\frac{2}{3}x-5\right).12=\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{6}x\right).12,\ \text{или}\ 8x-60=3+10x.$$

Посторонніе корни. Потеря корней.

Если мы умножимъ или раздѣлимъ обѣ части уравненія на выраженіе, содержащее неизвѣстныя этого уравненія (цѣлое относительно этихъ неизвѣстныхъ), то получимъ вообще уравненіе, неравносильное съ даннымъ уравненіемъ; въ первомъ случаѣ могутъ появиться **посторонніе корни**, а во второмъ случаѣ могутъ **потеряться** нѣкоторые корни даннаго уравненія.

Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе: $x-3=5$; это уравненіе имѣетъ только одинъ корень $x=8$. Умножимъ обѣ части уравненія на выраженіе $x-2$, получимъ новое уравненіе: $(x-3)(x-2)=5(x-2)$. Этому уравненію удовлетворяютъ два корня: $x=8$ и $x=2$, причемъ $x=2$ для даннаго уравненія посторонній корень; въ этомъ мы легко можемъ убѣдиться, подставивъ въ данное уравненіе значеніе x, равное 2.

Обратно, если данное уравненіе будетъ $(x-3)(x-2)=5(x-2)$, которое имѣетъ два корня: $x=8$ и $x=2$, то, раздѣливъ обѣ части этого уравненія на $(x-2)$, мы получимъ новое уравненіе: $x-3=5$, которому удовлетворяетъ только одинъ корень $x=8$; корень же $x=2$ потерялся.

Это замѣчаніе всегда надо имѣть въ виду, когда, при преобразованіи уравненія, мы умножаемъ или дѣлимъ его на выраженіе, содержащее неизвѣстныя этого уравненія.

При рѣшеніи уравненій можно встрѣтиться съ такимъ случаемъ, когда обѣ части уравненія имѣютъ общаго множителя, содержащаго неизвѣстныя; тогда, дѣля обѣ части уравненія на этого общаго множителя, мы теряемъ корни, какъ это мы видѣли на послѣднемъ примѣрѣ, и потому надо опредѣлить эти корни, приравнявъ 0 того общаго множителя, на который мы раздѣлили обѣ части уравненія, и присоединить ихъ къ прочимъ корнямъ даннаго уравненія.

Затѣмъ, при рѣшеніи дробныхъ уравненій, т. е. такихъ, въ которыхъ неизвѣстныя входятъ въ знаменатель, приходится, освобождаясь отъ знаменателя, содержащаго неизвѣстныя, умножать обѣ части уравненія на выраженіе, содержащее неизвѣстныя; это же преобразованіе, какъ мы сказали выше, можетъ ввести посторонніе корни. Поэтому, при рѣшеніи такихъ уравненій надо, найдя корни, путемъ подстановки найденныхъ корней въ данное уравненіе опредѣлить, которые изъ найденныхъ корней удовлетворяютъ данному уравненію, прочіе же корни отбросить.

§ 33. **Правила рѣшенія уравненія первой степени съ одною неизвѣстною.**

Исходя изъ только что разсмотрѣнныхъ преобразованій, мы приходимъ къ слѣдующимъ правиламъ рѣшенія уравненій первой степени съ одною неизвѣстною:

1) Если уравненіе содержитъ дробные члены, то уравненіе нужно освободить отъ знаменателей.

2) Если уравненіе содержитъ скобки, то надо ихъ раскрыть.

3) Перенести неизвѣстные члены въ одну часть уравненія, а извѣстные въ другую и сдѣлать приведеніе.

4) Обѣ части уравненія раздѣлить на коэффиціентъ при неизвѣстной.

Вообще всѣ эти преобразованія имѣютъ цѣлью, путемъ послѣдовательной замѣны даннаго уравненія рядомъ ему равносильныхъ, привести рѣшеніе даннаго уравненія къ рѣшенію уравненія вида $x=a$, въ которомъ самый видъ уравненія даетъ его рѣшеніе.

Чтобы повѣрить рѣшеніе уравненія, надо найденную величину неизвѣстной подставить въ данное уравненіе: если получимъ тождество, то заключаемъ, что уравненіе рѣшено вѣрно.

Примѣръ.

$$\frac{5x}{16}-\frac{1}{4}=\frac{3x}{2}-5;\ \text{общій знаменатель}=16$$

$$5x-4=24x-80$$

$$5x-24x=-80+4$$

$$-19x=-76$$

$$19x=76$$

$$x=\frac{76}{19}=4.$$

Повѣрка: $\frac{5}{16}\cdot 4-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}\cdot 4-5$

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=6-5$$

$$\frac{4}{4}=1 \text{ или } 1=1.$$

Слѣдовательно, уравненіе рѣшено вѣрно.

Мы привели примѣръ рѣшенія численнаго уравненія, т. е. такого, въ которое, кромѣ неизвѣстной, иныхъ буквенныхъ количествъ не входитъ.

Если же въ уравненіе, кромѣ неизвѣстныхъ, входятъ и другія буквенныя количества, то такое уравненіе называется **буквеннымъ уравненіемъ**, напр.: $ax+b=cx+d$ или $\frac{x}{a}+\frac{x}{b-a}=\frac{a}{a+b}$.

Буквенныя уравненія рѣшаются по тѣмъ же правиламъ, какъ и численныя уравненія.

При рѣшеніи буквенныхъ уравненій можетъ случиться, что послѣ перенесенія членовъ съ неизвѣстной въ одну часть уравненія, мы будемъ имѣть два или нѣсколько членовъ, содержащихъ неизвѣстную, и съ которыми нельзя сдѣлать приведенія.—Въ этихъ случаяхъ надо неизвѣстную вынести за скобки и выраженіе, стоящее въ скобкахъ, разсматривать какъ коэффиціентъ при неизвѣстной.

Примѣръ.

$$ax+b=cx+d.$$

Перенесемъ члены, содержащіе x, въ лѣвую часть равенства, а члены, не содержащіе x, въ правую; получимъ

$$ax-cx=d-b.$$

Вынесемъ x за скобки, получимъ:

$$(a-c)x=d-b.$$

Наконецъ, раздѣливъ обѣ части послѣдняго уравненія на коэффиціентъ $a-c$, находимъ

$$x=\frac{d-b}{a-c}.$$

Эта дробь $\frac{d-b}{a-c}$ и есть корень даннаго уравненія; подставивъ это выраженіе вмѣсто x въ данное уравненіе, получаемъ тождество.

§ 34. Рѣшеніе уравненій 1-й степени съ двумя неизвѣстными. Общій видъ уравненій 1-й степени съ двумя неизвѣстными.

Если освободить уравненіе отъ знаменателей, раскрыть скобки, перенести члены съ обѣими неизвѣстными въ одну часть уравненія, а извѣстные члены въ другую и сдѣлать приведеніе, то уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными будетъ имѣть видъ:

$$ax+by=c,$$

гдѣ a, b и c—цѣлыя числа или цѣлыя количества.

Примѣръ.

$2x-\frac{y+5}{3}=7+\frac{x-3y}{4}$; общій знаменатель$=12$.

Умножаемъ обѣ части уравненія на 12 и получаемъ:

$$24x-(y+5)\cdot 4=84+(x-3y)\cdot 3$$
$$24x-4y-20=84+3x-9y$$
$$24x-4y-3x+9y=84+20$$
$$21x+5y=104.$$

Уравненіе съ двумя неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, т.-е. совмѣстныхъ значеній неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ данному уравненію.

Возьмемъ для примѣра уравненіе $21x+5y=104$.

Одному изъ неизвѣстныхъ мы можемъ давать произвольныя численныя значенія.

Положимъ $y=1$; тогда для полученія x имѣемъ уравненіе:

$$21x+5=104$$
$$21x=104-5=99$$
$$x=\frac{99}{21}=\frac{33}{7}=4\frac{5}{7}.$$

Положимъ $y=2$; получаемъ уравненіе:

$$21x+10=104$$
$$21x=104-10=94$$
$$x=\frac{94}{21}=4\frac{10}{21};\text{ и т. д.}$$

Такимъ образомъ, значенію $y=1$ соотвѣтствуетъ значеніе $x=4\frac{5}{7}$; значенію $y=2$—значеніе $x=4\frac{10}{21}$; и т. д.

Мы могли-бы давать произвольныя значенія неизвѣстному x и тогда получали-бы изъ даннаго уравненія соотвѣтственныя значенія для y.

Если уравненіе имѣетъ три или болѣе неизвѣстныхъ, то всѣмъ неизвѣстнымъ, кромѣ одной, можно давать произвольныя значенія, значенія же этой одной неизвѣстной будутъ уже опредѣляться значеніями прочихъ неизвѣстныхъ.

Совокупность нѣсколькихъ уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными, которыя должны во всѣхъ уравненіяхъ имѣть одни и тѣ же значенія, называется **системою уравненій**.

§ 35. Рѣшеніе системы 2-хъ уравненій 1-й степени съ 2-мя неизвѣстными.

Чтобы рѣшить систему двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными, исключаютъ изъ нихъ одну неизвѣстную и, такимъ образомъ, вмѣсто двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, получаютъ одно уравненіе съ одною неизвѣстною, которое и рѣшаютъ. Найдя значеніе этой неизвѣстной, подставляютъ его въ одно изъ данныхъ уравненій и опредѣляютъ вторую неизвѣстную.

Разсмотримъ тѣ пріемы, посредствомъ которыхъ исключается изъ системы одна изъ неизвѣстныхъ.

I. Способъ подстановки.

Рѣшаемъ одно изъ уравненій относительно одной изъ неизвѣстныхъ и полученное выраженіе подставляемъ въ другое уравненіе вмѣсто этой неизвѣстной; тогда получимъ уравненіе, которое содержитъ только одну неизвѣстную.

Примѣръ.

Дана система уравненій $\begin{cases} 5x+14y=24 \\ 19x-21y=17 \end{cases}$

Изъ перваго уравненія имѣемъ $x=\frac{24-14y}{5}$; подставляя это значеніе x во второе уравненіе, получаемъ:

$19\left(\frac{24-14y}{5}\right)-21y=17$, или, по раскрытіи скобокъ и освобожденіи отъ знаменателя:

$$456-266y-105y=85.$$

Перенеся неизвѣстные члены въ одну часть уравненія, а извѣстные въ другую и сдѣлавъ приведеніе, получимъ

$$371y=371, \qquad \text{откуда } y=1.$$

Подставивъ значеніе $y=1$ въ формулу, выражающую x, получаемъ:

$$x=\frac{24-14\,.\,1}{5}=2.$$

Итакъ, данная система уравненій имѣетъ одно рѣшеніе: $x=2$; $y=1$.

II. Способъ сложенія и вычитанія.

Если коэффиціенты при которой-нибудь изъ неизвѣстныхъ въ обоихъ уравненіяхъ равны или отличаются только знаками, то для исключенія этой неизвѣстной достаточно данныя уравненія вычесть одно изъ другого въ первомъ случаѣ и сложить во второмъ.

Если же коэффиціенты при исключаемой неизвѣстной не одинаковы, то каждое изъ данныхъ уравненій умножимъ на такое число, чтобы получились равные коэффиціенты (для этого достаточно опредѣлить наименьшее кратное данныхъ коэффиціентовъ).

Затѣмъ полученныя уравненія складываемъ или вычитаемъ одно изъ другого, смотря по тому, имѣютъ-ли коэффиціенты исключаемой неизвѣстной разные или одинаковые знаки.

Примѣры.

a) Дана система уравненій $\begin{cases} 7x+11y=2 \\ 7x-11y=0. \end{cases}$

Исключаемъ y; члены, содержащіе y, имѣютъ разные знаки, и потому складываемъ данныя уравненія:

$$\begin{array}{r|l} 7x+11y=2 & \\ 7x-11y=0 & + \\ \hline 14x=2;\quad x=\frac{1}{7}\cdot & \end{array}$$

Подставивъ $\frac{1}{7}$ вмѣсто x въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., во второе, получимъ: $7\cdot\frac{1}{7}-11y=0$; $1-11y=0$; $11y=1$; $y=\frac{1}{11}\cdot$

b) Дана система уравненій $\begin{cases} 3x+5y=19 \\ 3x-2y=\ 5. \end{cases}$

Исключаемъ x; члены, содержащіе x, имѣютъ одинаковые знаки, слѣдовательно, надо вычесть одно уравненіе изъ другого:

$$(3x+5y)-(3x-2y)=19-5$$
$$3x+5y-3x+2y=14$$
$$7y=14;\ y=2.$$

Поставивъ 2 вмѣсто y въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., во второе, получимъ: $3x-2.2=5$; $3x=9$; $x=3$.

c) Дана система уравненій $\begin{cases} 12x+15y=8 \\ 16x+\ \ 9y=7. \end{cases}$

Уравняемъ коэффиціенты при одной изъ неизвѣстныхъ, напр., при y, и вычтемъ 1-е уравненіе изъ 2-го.

$$\begin{array}{r|l} 12x+15y=\ 8 & .\ 3 \\ 16x+\ \ 9y=\ 7 & .\ 5 \\ \hline 36x+45y=24 & \\ 80x+45y=35 & - \\ \hline 44x=11;\ x=\frac{1}{4}. & \end{array}$$

$$12\ .\ \frac{1}{4}+15y=8;\ 3+15y=8;\ 15y=5;\ y=\frac{1}{3}.$$

III. Способъ сравненія неизвѣстныхъ.

Для исключенія одной неизвѣстной изъ двухъ уравненій рѣшаемъ оба уравненія относительно исключаемой неизвѣстной, сравниваемъ два выраженія ея и получаемъ такимъ образомъ уравненіе, которое содержитъ только одну неизвѣстную.

Примѣръ.

Дана система уравненій $\begin{cases} 4x+5y=55 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

Рѣшаемъ оба уравненія относительно одной и той же неизвѣстной, напр., x; получаемъ выраженія: $x=\frac{55-5y}{4}$ и $x=\frac{1+2y}{3}$. Такъ какъ x въ обоихъ уравненіяхъ должно имѣть одно и то же значеніе, то соединяемъ обѣ формулы знакомъ равенства и получаемъ:

$$\frac{55-5y}{4}=\frac{1+2y}{3}$$

Освободивъ уравненіе отъ знаменателей, имѣемъ:

$$165-15y=4+8y$$

или

$$161=23y,$$

откуда

$$y=\frac{161}{23}=7.$$

Для нахожденія x подставляемъ значеніе y въ одну изъ предыдущихъ формулъ, напр., во вторую: $x=\frac{1+2\cdot 7}{3}=\frac{15}{3}=5$.

Здѣсь слѣдуетъ обратить вниманіе на одинъ особый видъ системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, при рѣшеніи которой общій пріемъ преобразованія уравненія, состоящій въ приведеніи всѣхъ членовъ уравненія къ одному общему знаменателю и затѣмъ отбрасываніи этого знаменателя, приводитъ насъ къ уравненію второй степени; такую систему надо рѣшать особымъ пріемомъ.

Дана система уравненій $\begin{cases} \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=m. \\ \frac{c}{x}+\frac{d}{y}=n. \end{cases}$

Рѣшая эту систему обычнымъ пріемомъ, мы привели-бы ее къ виду:

$$\begin{cases} ay+bx=mxy \\ cy+dx=nxy \end{cases}$$

т.-е. получили бы систему двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными.

Введемъ новыя неизвѣстныя: $z=\frac{1}{x}$ и $t=\frac{1}{y}$. Подставивъ въ данную систему z вмѣсто $\frac{1}{x}$ и t вмѣсто $\frac{1}{y}$, получимъ слѣдующую систему съ неизвѣстными z и t:

$$\begin{cases} az+bt=m \\ cz+dt=n, \end{cases}$$

которая представляетъ систему двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными. Рѣшивъ эту систему однимъ изъ разсмотрѣнныхъ пріемовъ, найдемъ значенія z и t.

Пусть $z=p$, $t=q$; отсюда $\frac{1}{x}=p$ или $x=\frac{1}{p}$; $\frac{1}{y}=q$ или $y=\frac{1}{q}$.

§ 36. **Рѣшеніе системъ опредѣленныхъ уравненій 1-ой степени съ тремя и болѣе неизвѣстными.**

Всякое уравненіе первой степени, содержащее какое бы то ни было число неизвѣстныхъ, всегда можно привести къ виду

$$ax+by+cz+......=m,$$

гдѣ a, b, c,.....m суть цѣлыя числа или цѣлыя количества. Для этого надо освободить уравненіе отъ знаменателей, раскрыть скобки, перенести всѣ члены съ неизвѣстными въ лѣвую часть, а извѣстные члены въ правую и сдѣлать приведеніе.

Вообще, чтобъ рѣшить систему n уравненій съ n неизвѣстными, приводятъ каждое изъ данныхъ уравненій къ виду $ax+by+cz+....=m$; изложенными способами исключаютъ изъ данной системы одну неизвѣстную и такимъ образомъ получаютъ $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными. Изъ этихъ уравненій опять исключаютъ одну неизвѣстную, получаютъ $n-2$ уравненія съ $n-2$ неизвѣстными; продолжая такимъ образомъ, доходятъ до двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными и, наконецъ, до одного уравненія съ одною неизвѣстною. Рѣшивъ это уравненіе, черезъ послѣдовательную подстановку, находятъ всѣ неизвѣстныя данныхъ уравненій.

Примѣры.

1) Дана система уравненій $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$

a) Исключаемъ z изъ перваго и третьяго уравненій, и затѣмъ изъ перваго и второго:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+9y-9z=5 \\ \hline 9x+5y=33 \quad (\alpha) \end{array}\right| + \qquad \begin{array}{r} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ \hline 4x-8y+18z=56 \\ 21x+9y-18z=-3 \\ \hline 25x+y=53 \quad (\beta) \end{array} \begin{array}{l} .\,2 \\ .\,3 \\ + \\ \\ \end{array}$$

b) Изъ уравненій (α) и (β) исключаемъ y.

$$\left.\begin{array}{r} 9x+5y=33 \\ 25x+y=53 \\ \hline \end{array}\right| .\,5 \qquad \left.\begin{array}{r} 9x+5y=33 \\ 125x+5y=265 \\ \hline \end{array}\right| -$$

$$-116x=-232;\ x=\frac{232}{116}=2.$$

Найдемъ y при помощи уравненія (β): $25 \,.\, 2+y=53$; $50+y=53$; $y=3$. Найдя x и y, подставимъ ихъ значенія въ одно изъ данныхъ уравненій, напримѣръ, въ первое, и получимъ: $2 \,.\, 2-4 \,.\, 3+9z=28$; $9z=36$; $z=4$.

Итакъ: $x=2$, $y=3$, $z=4$.

2) Если не всѣ уравненія содержатъ всѣ неизвѣстныя, то ходъ рѣшенія значительно сокращается; для примѣра рѣшимъ систему уравненій.

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+\ y=\ 5 \\ x+3z=16 \\ 5y-\ z=10 \end{array}\right.$$

изъ 1-го и 2-го уравненій исключаемъ x:

$$\begin{array}{r|l} 2x+\ y=\ 5 & \\ x+3z=16 & .\,2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2x+\ y=\ 5 & \\ 2x+6z=32 & - \\ \hline 6z-\ y=27 & \end{array}$$

Теперь мы имѣемъ два уравненія: третье данное и новое, съ неизвѣстными y и z; исключаемъ y

$$\begin{array}{r|l} 6z-\ y=27 & 5 \\ -\ z+5y=10 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30z-5y=135 & \\ -\ z+5y=\ 10 & + \\ \hline \end{array}$$

$$29z=145;\ z=\frac{145}{29}=5.$$

Для нахожденія y возьмемъ третье данное уравненіе, получимъ: $5y-5=10$; $5y=15$; $y=3$.

Для нахожденія x возьмемъ первое данное уравненіе, получимъ: $2x+3=5$; $2x=2$; $x=1$.

Итакъ: $x=1$; $y=3$; $z=5$.

§ 37.

…шеніе системы n уравній 1-ой степ… съ n неизвѣстными … способу опредѣлен…ъ множителей (способъ Безу).

Дана система уравненій:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+\ldots+p_1u=q_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\ldots+p_2u=q_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z+\ldots+p_3u=q_3 \\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ a_nx+b_ny+c_nz+\ldots+p_nu=q_n \end{array}\right.$$

Умножимъ обѣ части перваго уравненія на нѣкоторое число l_1, обѣ части второго уравненія на нѣкоторое число l_2 и т. д. и сложимъ; тогда мы получимъ уравненіе:

$$(l_1a_1+l_2a_2+\ldots+l_na_n)x+(l_1b_1+l_2b_2+\ldots+l_nb_n)y+(l_1c_1+l_2c_2+\ldots+$$
$$+l_nc_n)z+\ldots+(l_1p_1+l_2p_2+\ldots+l_np_n)u=l_1q_1+l_2q_2+\ldots+l_nq_n (*)$$

Теперь опредѣлимъ множители: $l_1, l_2, \ldots l_n$ такъ, чтобы обратились въ 0 коэффиціенты у всѣхъ неизвѣстныхъ, кромѣ одной. Для этого мы одному изъ множителей должны придать какое-нибудь опредѣленное значеніе, напр. $l_1=1$; а всѣ прочіе множители опредѣлимъ подъ условіемъ, чтобы $n-1$ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ обратились въ 0. Тогда мы исключимъ всѣ неизвѣстныя, кромѣ одной; пусть эта послѣдняя будетъ x.

Такимъ образомъ, мы получаемъ систему $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными: $l_2, l_3, \ldots l_n$

$$\begin{cases} b_1+l_2b_2+\ldots+l_nb_n=0 \\ c_1+l_2c_2+\ldots+l_nc_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_1+l_2p_2+\ldots+l_np_n=0 \end{cases}$$

Рѣшивъ эту систему какимъ-нибудь способомъ, мы найденныя значенія: $l_2, l_3, \ldots l_n$ подставимъ въ уравненіе (*) и получимъ уравненіе первой степени съ одною неизвѣстною, которую и опредѣлимъ. Подставивъ найденное значеніе неизвѣстной x въ любыя $n-1$ уравненія данной системы, мы получимъ систему $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными: $y, z, \ldots u$.

Можно поступать иначе: опредѣливъ соотвѣтственнымъ образомъ значенія $l_2, l_3, \ldots l_n$, исключающія всѣ неизвѣстныя, кромѣ x, мы можемъ теперь поставить задачею опредѣлить значенія $l_2, l_3, \ldots l_n$, при которыхъ обращаются въ 0 всѣ коэффиціенты въ уравненіи (*), кромѣ коэффиціента при y.

Тогда мы, поступая такъ же, какъ мы поступали для опредѣленія x, опредѣлимъ значеніе y.

Поступая такимъ же образомъ далѣе, мы найдемъ значенія всѣхъ неизвѣстныхъ, удовлетворяющія данной системѣ, т.-е. рѣшимъ данную систему n уравненій 1-ой степени съ n неизвѣстными.

Примѣръ.

Примѣнимъ способъ Безу къ рѣшенію системы:

$$\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$$

рѣшенной уже ранѣе другимъ способомъ.

Составимъ уравненіе (*); оно будетъ

$$(2+7l_2+7l_3)x+(-4+3l_2+9l_3)y+(9-6l_2-9l_3)z=28-$$
$$-l_2+5l_3 \ldots (*).$$

Найдемъ сперва значеніе x; для этого мы должны опредѣлить множители l_2 и l_3 подъ условіемъ, чтобы коэффиціенты при y и z въ уравненіи (*) были равны 0.

Получаемъ систему 2-хъ уравненій 1-й степени съ двумя неизвѣстными: l_2 и l_3

$$\begin{cases} -4+3l_2+9l_3=0 \\ 9-6l_2-9l_3=0. \end{cases}$$

Рѣшаемъ эту систему

$$\begin{cases} -4+3l_2+9l_3+9-6l_2-9l_3=0 \\ -4+3l_2+9l_3=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5-3l_2=0 \\ -4+3l_2+9l_3=0, \end{cases}$$

откуда $l_2=\frac{5}{3}$ и $l_3=-\frac{1}{9}$.

Подставляя найденныя значенія l_2 и l_3 въ уравненіе (*), получаемъ уравненіе

$$\left[2+7\cdot\frac{5}{3}+7\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)\right]x=28-\frac{5}{3}-\frac{5}{9} \text{ или } \frac{116}{9}x=\frac{232}{9};$$

откуда $x=2$.

Найдемъ теперь значеніе y; для этого мы должны опредѣлить множители l_2 и l_3 подъ условіемъ, чтобы коэффиціенты при x и z въ уравненіи (*) были равны 0.

Получаемъ систему уравненій

$$\begin{cases} 2+7l_2+7l_3=0 \\ 9-6l_2-9l_3=0 \end{cases}$$

Рѣшаемъ эту систему

$$\begin{cases}(2+7l_2+7l_3)6+(9-6l_2-9l_3)7=0\\ 2+7l_2+7l_3=0.\end{cases} \text{ или } \begin{cases}75-21l_3=0\\ 2+7l_2+7l_3=0,\end{cases}$$

откуда $$l_2=-\frac{27}{7} \text{ и } l_3=\frac{25}{7}.$$

Подставляя найденныя значенія l_2 и l_3 въ уравненіе (*), получаемъ уравненіе

$$\left[-4+3\cdot\left(-\frac{27}{7}\right)+9\cdot\frac{25}{7}\right]y=28+\frac{27}{7}+5\cdot\frac{25}{7} \text{ или } \frac{116}{7}y=\frac{348}{7};$$

откуда $$y=3.$$

Наконецъ, найдемъ тѣмъ же способомъ значеніе z; для этого мы должны опредѣлить множители l_2 и l_3 подъ условіемъ, чтобы коэффиціенты при x и y въ уравненіи (*) были равны 0.

Получаемъ систему уравненій

$$\begin{cases}2+7l_2+7l_3=0\\ -4+3l_2+9l_3=0.\end{cases}$$

Рѣшаемъ ее.

$$\begin{cases}(2+7l_2+7l_3)3-(-4+3l_2+9l_3)7=0\\ -4+3l_2+9l_3=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}34-42l_3=0\\ -4+3l_2+9l_3=0,\end{cases}$$

откуда $$l_2=-\frac{23}{21} \text{ и } l_3=\frac{17}{21}.$$

Подставляя найденныя значенія l_2 и l_3 въ уравненіе (*), получаемъ уравненіе

$$\left[9-6\cdot\left(-\frac{23}{21}\right)-9\cdot\frac{17}{21}\right]z=28+\frac{23}{21}+5\cdot\frac{17}{21} \text{ или } \frac{58}{7}z=\frac{232}{7};$$

откуда $$z=4.$$

§ 38.

Системы уравненій 1-ой степени, имѣющія число уравненій, равное числу неизвѣстныхъ, меньшее этого числа и большее.

a) Система, въ которой число неизвѣстныхъ равно числу уравненій, имѣетъ вообще лишь одно рѣшеніе, т.-е. одну совокупность значеній неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ всѣмъ уравненіямъ системы, потому что рѣшеніе такой системы приводится къ рѣшенію одного уравненія первой степени съ одною неизвѣстною, которое имѣетъ одинъ корень.

b) Если число уравненій менѣе числа неизвѣстныхъ, то такая система чрезъ исключеніе неизвѣстныхъ приводится, вообще говоря [1]), къ одному уравненію, содержащему нѣсколько неизвѣстныхъ. Такому уравненію удовлетворяетъ безчисленное множество значеній для неизвѣстныхъ. Поэтому, въ зависимости отъ значеній этихъ неизвѣстныхъ, и остальныя неизвѣстныя данной системы будутъ имѣть неограниченное число значеній, удовлетворяющихъ данной системѣ. Вслѣдствіе этого такая система называется **неопредѣленною системою**.

c) Система, въ которой число уравненій больше числа неизвѣстныхъ, черезъ исключеніе неизвѣстныхъ приводится къ одному или нѣсколькимъ равенствамъ между извѣстными количествами въ уравненіяхъ. Если эти равенства невозможны, то данныя уравненія **несовмѣстны**.—Если эти равенства содержатъ буквенныя данныя уравненій, то они выражаютъ тѣ условія, при которыхъ данныя уравненія будутъ совмѣстны, т.-е. не будутъ противорѣчить другъ другу. Вслѣдствіе этого эти равенства называются **условными**.

Примѣры.

1) Дана система уравненій

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \\ x-y=2. \end{cases}$$

Исключаемъ y изъ перваго и второго уравненій и получаемъ: $3x=9$.

Исключаемъ y изъ перваго и третьяго уравненій и получаемъ: $2x=7$.

Изъ этихъ уравненій имѣемъ

$$x=3 \text{ и } x=3^1/_2.$$

---

[1]) **Въ частности, можетъ быть такой случай, когда уравненія системы противорѣчатъ другъ другу, и тогда система оказывается невозможною напр., такая система двухъ уравненій съ тремя неизвѣстными:**

$$x+\ y+2z=5$$
$$3x+3y+6z=7$$

Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ обѣ части 1-го уравненія на 3, мы получаемъ: $3x+3y+6z=15$; сравнивъ это уравненіе съ 2-мъ уравненіемъ данной системы, мы видимъ, что одна и та же величина должна быть заразъ равна 15 и 7.

Мы получаемъ невозможное равенство $3=3^1/_2$, и потому данная система уравненій невозможна.

2) Дана система уравненій

$$\begin{cases} x+\ \ y=2a \\ x-\ \ y=2b \\ 4x-3y=5b+3 \\ 3x+2y=2a-1. \end{cases}$$

Опредѣливъ x и y изъ первыхъ двухъ уравненій, находимъ:

$$x=a+b,\ y=a-b.$$

Подставивъ эти значенія x и y въ два послѣднія уравненія, получаемъ систему двухъ условныхъ уравненій:

$$\begin{cases} a+2b=3 \\ 3a+\ \ b=-1. \end{cases}$$

Изъ этихъ уравненій находимъ: $a=-1$, $b=2$; такъ что данныя уравненія только тогда возможны, когда $a=-1$ и $b=2$. Въ этомъ случаѣ $x=1$, $y=-3$ и это рѣшеніе удовлетворяетъ всѣмъ четыремъ даннымъ уравненіямъ.

§ 39. Составленіе уравненій изъ условій задачи.

Когда зависимость между данными и искомыми задачи можетъ быть выражена равенствомъ, то рѣшеніе задачи приводится къ составленію и затѣмъ рѣшенію уравненія. При этомъ вообще руководствуются слѣдующимъ общимъ правиломъ: обозначивъ искомыя количества черезъ x, y, z..., производятъ надъ ними и данными числами всѣ дѣйствія, какъ-бы для провѣрки рѣшенія задачи, въ предположеніи, что искомыя количества найдены; такимъ образомъ, находятъ выраженія, которыя по условію задачи равны. Соединивъ эти выраженія знаками равенства, получаютъ уравненія, чрезъ рѣшеніе которыхъ и находятъ искомыя предложенной задачи.

Примѣры.

1) Найти два числа, которыхъ сумма равна 38, а разность 6. Обозначимъ меньшее искомое число черезъ x. Слѣдовательно, по условію задачи большее искомое число будетъ $x+6$. По условію задачи имѣемъ уравненіе: $x+x+6=38$

или $2x+6=38$.

Рѣшаемъ это уравненіе: $2x=32$; $x=16$.

Итакъ, меньшее искомое число равно 16, большее искомое число равно $16+6=22$.

Общая задача. Найти два числа, зная ихъ сумму s и разность d.

Обозначимъ меньшее искомое число черезъ x; тогда большее искомое число равно $x+d$.

Слѣдовательно, согласно условію задачи, $x+x+d=s$

или $$2x+d=s.$$

Отсюда $$2x=s-d;\ x=\frac{s-d}{2}.$$

Итакъ, меньшее искомое число равно $\frac{s-d}{2}$.

Большее искомое число равно $\frac{s-d}{2}+d=\frac{s-d+2d}{2}=\frac{s+d}{2}$.

2) Учитель раздаетъ ученикамъ въ классѣ перья. Если онъ дастъ по три пера каждому ученику, то останется 8 лишнихъ перьевъ; если же онъ станетъ давать по 4 пера каждому, то недостанетъ перьевъ 6 ученикамъ. Сколько въ классѣ учениковъ и сколько учитель принесъ перьевъ?

Обозначимъ число учениковъ въ классѣ черезъ x.

По первому условію задачи число перьевъ у учителя равно $3x+8$.

По второму условію задачи число перьевъ у учителя равно $(x-6)\,.\,4$.

Слѣдовательно, имѣемъ уравненіе: $3x+8=4(x-6)$

или $$3x+8=4x-24,$$

откуда $$x=32.$$

Итакъ, число учениковъ въ классѣ равно 32.

Число перьевъ у учителя равно $3\,.\,32+8=104$.

Общая задача. Учитель принесъ въ классъ перья. Если онъ будетъ давать по a перьевъ каждому ученику, то у него останется b лишнихъ перьевъ; если же онъ станетъ давать по c перьевъ каждому, то у него недостанетъ перьевъ для d учениковъ. Сколько было учениковъ и сколько перьевъ?

Обозначимъ искомое число учениковъ черезъ x.

Тогда число перьевъ у учителя будетъ равно по одному условію $ax+b$, а по другому $(x-d)c$.

Слѣдовательно, $ax + b = cx - cd$

$$b + cd = cx - ax$$

$$b + cd = x(c - a).$$

Отсюда x (число учениковъ) $= \frac{b + cd}{c - a}$.

Число перьевъ равно $ax + b = a\left(\frac{b + cd}{c - a}\right) + b =$

$$= \frac{ab + acd + cb - ab}{c - a} = \frac{acd + cb}{c - a}.$$

3) Опредѣлить дробь, которая обращается въ $^3/_4$, когда къ числителю и знаменателю придадимъ по 1, и въ дробь $^2/_3$, когда отъ числителя и знаменателя отнимемъ по 1.

Пусть числитель искомой дроби равенъ x, а ея знаменатель равенъ y.

Тогда искомая дробь равна $\frac{x}{y}$.

По условію задачи будемъ имѣть

$$\begin{cases} \frac{x + 1}{y + 1} = \frac{3}{4} \\ \frac{x - 1}{y - 1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Рѣшимъ эту систему уравненій

$$\begin{cases} 4(x + 1) = 3(y + 1) \\ 3(x - 1) = 2(y - 1) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4x + 4 = 3y + 3 \\ 3x - 3 = 2y - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1 \;\big|\; .2 \\ 3x - 2y = 1 \;\big|\; .3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 6y = -2 \;\big|\; - \\ 9x - 6y = 3 \;\big| \end{cases}$$

$$x = 5;$$

$$15 - 2y = 1; \quad 2y = 14; \quad y = 7.$$

Слѣдовательно, искомая дробь равна $\frac{5}{7}$.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Изслѣдованіе общихъ формулъ рѣшенія уравненій первой степени съ одною и двумя неизвѣстными.

§ 40. Всякое уравненіе первой степени съ одною неизвѣстною можно послѣ нѣкоторыхъ преобразованій представить въ видѣ:

Изслѣдованіе уравненія 1-ой степени съ одною неизвѣстною.

$$\mathbf{ax + b = a'x + b'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ a, a', b, b' количества, не зависящія отъ x.

Рѣшаемъ это уравненіе

$$ax - a'x = b' - b$$
$$x(a - a') = b' - b$$
$$x = \frac{b' - b}{a - a'}\,.$$

Разсмотримъ различные случаи, которые могутъ встрѣтиться при рѣшеніи уравненія (1) въ зависимости отъ того, какія значенія будутъ имѣть количества: a, a', b, b'.

Положительное рѣшеніе.

1. Для того, чтобы x было положительнымъ, необходимо и достаточно, чтобы числитель и знаменатель дроби $\frac{b' - b}{a - a'}$ имѣли одинаковые знаки; такимъ образомъ, рѣшеніе будетъ положительнымъ, если

$$\begin{cases} b' - b > 0 \\ a - a' > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} b' - b < 0 \\ a - a' < 0 \end{cases}$$

Положительное рѣшеніе вообще указываетъ на возможность задачи, рѣшеніе которой приводится къ составленію и рѣшенію уравненія. Но могутъ быть такіе случаи, когда положительное рѣшеніе и не будетъ удовлетворять поставленнымъ въ задачѣ условіямъ; это можетъ случиться тогда, когда искомое, кромѣ тѣхъ условій, на основаніи которыхъ составлено уравненіе, должно удовлетворять еще другимъ условіямъ.

Примѣры.

1) Нѣсколько работниковъ получили 100 рублей; если-бы ихъ было пятью менѣе, то каждый изъ нихъ получилъ-бы втрое болѣе. Сколько было работниковъ?

Обозначимъ искомое число работниковъ черезъ x.

Тогда число рублей, которое получилъ каждый, равно $\frac{100}{x}$.

Число рублей, которое получилъ-бы каждый, если-бы число работниковъ уменьшилось на 5, равно $\frac{100}{x-5}$.

По условію задачи второе число втрое болѣе перваго, и потому имѣемъ уравненіе:

$$\frac{100}{x} \cdot 3 = \frac{100}{x-5}$$

или

$$3x-15=x,$$

откуда

$$2x=15 \text{ и } x=7^1/_2.$$

Такимъ образомъ, искомое число работниковъ оказалось $7^1/_2$.

Это рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію, но не удовлетворяетъ задачѣ, такъ какъ по смыслу задачи отвѣтъ долженъ быть числомъ не только положительнымъ, но и цѣлымъ.

2) Опредѣлить двузначное число, въ которомъ число единицъ въ два раза болѣе числа десятковъ, а разность этихъ чиселъ равна 7.

Пусть число единицъ равно x;
тогда число десятковъ будетъ равно $x-7$.

По условію задачи имѣемъ уравненіе:

$$2(x-7)=x \text{ или } 2x-14=x,$$

откуда

$$x=14.$$

Это рѣшеніе не удовлетворяетъ задачѣ, такъ какъ значеніе x (числа единицъ) должно быть менѣе 10.

Отрицательное рѣшеніе.

2. Для того, чтобы x было отрицательнымъ, необходимо и достаточно, чтобы числитель и знаменатель дроби $\frac{b'-b}{a-a'}$ имѣли разные знаки; такимъ образомъ, рѣшеніе будетъ отрицательнымъ, если

$$\begin{cases} b'-b>0 \\ a-a'<0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} b'-b<0 \\ a-a'>0 \end{cases}$$

Если по смыслу задачи искомое можетъ имѣть противоположныя значенія, то отрицательное рѣшеніе само по себѣ не указываетъ на невозможность задачи.

Примѣромъ можетъ служить слѣдующая задача:

Игрокъ, имѣя при себѣ въ началѣ игры 10 рублей, выигралъ въ первый разъ вдвое больше того, сколько онъ имѣлъ денегъ по окончаніи игры. Чѣмъ окончилась игра, если во второй разъ игрокъ проигралъ 15 рублей.

По смыслу задачи отвѣтъ можетъ быть положительный и отрицательный: положительное рѣшеніе покажетъ, что игрокъ остался по окончаніи игры въ выигрышѣ, а отрицательное рѣшеніе покажетъ, что онъ остался въ проигрышѣ. Обозначимъ число рублей, которое игрокъ выигралъ или проигралъ, черезъ x.

Составимъ уравненіе, опредѣляющее x изъ условій задачи:

$$10+2(10+x)-15=10+x.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получаемъ $x=-5$.

Игра окончилась тѣмъ, что игрокъ проигралъ 5 рублей.

Если условія задачи не допускаютъ для искомаго возможности имѣть противоположныя значенія, то отрицательное рѣшеніе укажетъ на невозможность задачи. При этомъ отрицательныя рѣшенія могутъ получиться вслѣдствіе невѣрной постановки вопроса, или вслѣдствіе неправильности самаго заданія.

Примѣромъ задачи, имѣющей отрицательное рѣшеніе вслѣдствіе неправильно поставленнаго вопроса, можетъ служить слѣдующая задача:

Сколько единицъ надо прибавить къ числителю и знаменателю дроби $\frac{3}{4}$, чтобы получить дробь $\frac{2}{3}$?

Обозначимъ искомое число единицъ черезъ x; тогда, согласно условію задачи, получимъ уравненіе:

$$\frac{3+x}{4+x}=\frac{2}{3} \text{ или } 9+3x=8+2x$$

откуда $$x=-1.$$

Отрицательное рѣшеніе указываетъ на невозможность задачи.

Посмотримъ, нельзя-ли измѣнить въ этой задачѣ вопросъ такъ, чтобы рѣшеніе стало возможнымъ. Подставимъ въ полученное уравненіе, вмѣсто x, $-x$; получимъ уравненіе

$$\frac{3-x}{4-x}=\frac{2}{3}.$$

Рѣшивъ это уравненіе, находимъ $x=1$.

Найденное положительное рѣшеніе, указывающее на возможность задачи, отвѣчаетъ на слѣдующій вопросъ: сколько единицъ надо *отнять* отъ числителя и знаменателя дроби $\frac{3}{4}$, чтобы получить дробь $\frac{2}{3}$.

Отрицательныя рѣшенія могутъ явиться, какъ мы уже сказали, также вслѣдствіе невѣрности самаго заданія.

Возьмемъ слѣдующую задачу:

Двое, отправляясь за покупками, взяли съ собой различныя суммы денегъ, при чемъ второй взялъ 5-ю рублями менѣе перваго. Первый издержалъ $\frac{1}{10}$ своихъ денегъ, а второй $\frac{1}{8}$, послѣ чего у нихъ осталось денегъ поровну.

Сколько рублей было у перваго?

Число рублей перваго обозначимъ черезъ x, число рублей второго будетъ тогда $x-5$.

Послѣ израсходованія, у перваго осталось $\frac{9}{10}x$, а у второго $\frac{7}{8}(x-5)$.

По условію задачи будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{9}{10}x=\frac{7}{8}(x-5). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

или

$$36x=35(x-5),$$

откуда

$$x=-175.$$

Отрицательное рѣшеніе указываетъ на невозможность задачи. Посмотримъ, нельзя-ли измѣнить условіе задачи такъ, чтобы задача стала возможною. Замѣнимъ въ уравненіи (1) x черезъ $-x$, получимъ

$$-\frac{9}{10}x=\frac{7}{8}(-x-5)$$

или

$$\frac{9}{10}x=\frac{7}{8}(x+5). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Изъ послѣдняго уравненія находимъ $x=175$.

Сравнивъ уравненіе (2) съ уравненіемъ (1), мы приходимъ къ заключенію, что условіе задачи должно быть измѣнено такъ:

Двое, отправляясь за покупками, взяли различныя суммы денегъ, при чемъ второй взялъ 5-ю рублями *болѣе* перваго. Первый издержалъ и т. д.

Нулевое рѣшеніе.

3. Пусть $b'-b=0$ или $b=b'$, и a не равно a', напр., $a-a'=m$; тогда $x=\frac{b'-b}{a-a'}=\frac{0}{m}=0$.

Покажемъ на слѣдующихъ задачахъ, какое значеніе можетъ имѣть нулевое рѣшеніе.

1) Какое число надо придать къ числамъ 108 и 27, чтобы первая сумма была въ четыре раза болѣе второй?

Обозначимъ искомое число черезъ x.

Изъ условій задачи мы имѣемъ уравненіе:

$$108+x=4(27+x)$$

или

$$108+x=108+4x$$

откуда

$$3x=0 \text{ и } x=\frac{0}{3}=0.$$

Въ этой задачѣ нулевое рѣшеніе показываетъ, что самыя данныя числа уже удовлетворяютъ условію задачи, потому что 108 въ четыре раза болѣе 27.

2) Игрокъ, имѣя при себѣ въ началѣ игры 10 рублей, выигралъ въ первый разъ вдвое болѣе того, сколько онъ имѣлъ денегъ по окончаніи игры. Чѣмъ окончилась игра, если во второй разъ игрокъ проигралъ 20 рублей?

Обозначимъ число рублей, которое игрокъ выигралъ или проигралъ, черезъ x. Тогда, для опредѣленія x, имѣемъ уравненіе:

$$10+2(10+x)-20=10+x.$$

Рѣшивъ это уравненіе, находимъ $x=0$.

Нулевое рѣшеніе, въ данномъ случаѣ, даетъ вполнѣ опредѣленный отвѣтъ на поставленный въ задачѣ вопросъ: игра окончилась въ ничью.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что нулевое рѣшеніе само по себѣ еще не указываетъ на невозможность задачи.

Невозможное рѣшеніе.

4. Пусть b' не равно b, напр., $b'-b=m$; но $a-a'=0$, т.-е. $a=a'$.

Тогда $x=\frac{b'-b}{a-a'}$ приметъ видъ $x=\frac{m}{0}$.

Это выраженіе не имѣетъ смысла, такъ какъ нѣтъ такого числа, которое, будучи умножено на 0, дало-бы въ произведеніи нѣкоторое число m, неравное 0.

Обращаемся къ самому уравненію: $ax+b=a'x+b'$, которое при данныхъ условіяхъ можетъ быть написано такъ:

$$ax+b=ax+b'.$$

Ясно, что первая часть этого уравненія, ни при какихъ значеніяхъ x, не равна второй части. Слѣдовательно, самое уравненіе невозможно, а потому невозможна и задача, изъ условій которой получилось это уравненіе.

Для примѣра возьмемъ слѣдующую задачу:

Сколько единицъ надо прибавить къ числителю и знаменателю дроби $\frac{3}{4}$, чтобы получить единицу?

Обозначивъ черезъ x число единицъ, которое надо прибавить къ числителю и знаменателю дроби $\frac{3}{4}$, получимъ уравненіе

$$\frac{3+x}{4+x}=1 \text{ или } 3+x=4+x,$$

которое, очевидно, не можетъ быть удовлетворено никакимъ значеніемъ x; примѣненіе же общей формулы: $x=\frac{b'-b}{a-a'}$ даетъ $x=\frac{1}{0}$.

Эта задача ясно указываетъ на существенную разницу между этимъ случаемъ и предыдущими: тамъ, если и была невозможна задача, то уравненіе было вполнѣ возможно, здѣсь же уравненіе невозможно, а тѣмъ самымъ, конечно, невозможна и задача.

Неопредѣленное рѣшеніе.

5. Выраженіе $x=\frac{b'-b}{a-a'}$, при $b'-b=0$ и $a-a'=0$, принимаетъ видъ $x=\frac{0}{0}$. Это выраженіе не имѣетъ опредѣленнаго значенія, такъ какъ любое число, будучи умножено на 0, даетъ въ произведеніи 0.

Чтобы объяснить значеніе этого рѣшенія для задачи, обратимся къ уравненію $ax+b=a'x+b'$, которое при данныхъ условіяхъ принимаетъ видъ: $ax+b=ax+b$.

Это равенство есть тождество; слѣдовательно, оно справедливо при какихъ угодно значеніяхъ x. Поэтому значеніе $x=\frac{0}{0}$ указываетъ на неопредѣленность задачи.

Пояснимъ это на слѣдующей задачѣ:

Имѣются четыре куска сукна: во второмъ кускѣ тремя аршинами, въ третьемъ пятью аршинами и въ четвертомъ восемью аршинами болѣе, чѣмъ въ первомъ; вмѣстѣ же, въ первомъ и въ четвертомъ кускахъ столько, сколько во второмъ и въ третьемъ. Сколько аршинъ въ каждомъ кускѣ?

Пусть число аршинъ въ первомъ кускѣ будетъ x; тогда во второмъ кускѣ будетъ $x+3$, въ третьемъ $x+5$ и въ четвертомъ $x+8$. По условію задачи имѣемъ уравненіе:

$$x+x+8=x+3+x+5 \text{ или } 2x+8=2x+8.$$

Это равенство есть тождество и потому задача удовлетворяется всевозможными положительными значеніями x. Примѣняя къ послѣднему уравненію общія правила рѣшенія уравненій, получимъ:

$$2x-2x=8-8;\ (2-2)x=0;\ 0\,.\,x=0, \text{ откуда } x=\frac{0}{0}.$$

§ 41.

Раскрытіе кажущейся неопредѣленности.

Иногда выраженіе вида $\frac{0}{0}$ можетъ представить и кажущуюся неопредѣленность.

Покажемъ два способа раскрытія кажущейся неопредѣленности.

Возьмемъ примѣръ:

$$x=\frac{a^2-1}{a^3-1};$$

при

$$a=1,\ x=\frac{1^2-1}{1^3-1}=\frac{0}{0}.$$

Первый способъ. Положимъ $a=1+\alpha$.

Слѣдовательно, $x=\frac{(1+\alpha)^2-1}{(1+\alpha)^3-1}=\frac{1+2\alpha+\alpha^2-1}{1+3\alpha+3\alpha^2+\alpha^3-1}=$

$$=\frac{2\alpha+\alpha^2}{3\alpha+3\alpha^2+\alpha^3}=\frac{\alpha(2+\alpha)}{\alpha(3+3\alpha+\alpha^2)}=\frac{2+\alpha}{3+3\alpha+\alpha^2}.$$

Положивъ въ этой формулѣ $\alpha=0$, получимъ $x=\frac{2}{3}$. Это и есть истинное значеніе x.

Второй способъ. Разлагаемъ числителя и знаменателя дроби на множители и сокращаемъ дробь:

$$x=\frac{a^2-1}{a^3-1}=\frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}=\frac{a+1}{a^2+a+1}.$$

Положивъ въ послѣдней формулѣ $a=1$, получимъ:

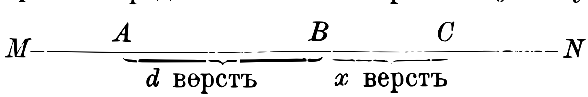
$$x=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

§ 42.

Задача о курьерахъ.

Всѣ случаи рѣшенія задачи, приводящагося къ составленію и рѣшенію уравненія 1-ой степени съ одною неизвѣстною, легко разсмотрѣть на такъ называемой задачѣ о курьерахъ:

Два курьера ѣдутъ въ направленіи отъ M къ N. Одинъ курьеръ проѣзжаетъ въ часъ v верстъ, а другой v' верстъ. Послѣдняго видѣли на станціи B, спустя h часовъ послѣ того, какъ перваго замѣтили на станціи A, отстоящей отъ B на d верстъ. Опредѣлить мѣсто встрѣчи двухъ курьеровъ.



Положимъ, что курьеры встрѣтятся въ точкѣ C.

Число часовъ, которое первый курьеръ ѣхалъ отъ станціи A до мѣста встрѣчи C, равно $\frac{d+x}{v}$.

Число часовъ, которое второй курьеръ ѣхалъ отъ станціи B до мѣста встрѣчи C, равно $\frac{x}{v'}$.

Слѣдовательно, по условію задачи, имѣемъ уравненіе:

$$\frac{d+x}{v}-\frac{x}{v'}=h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Рѣшаемъ это уравненіе:

$$dv'+xv'-xv=vv'h$$
$$dv'-vv'h=xv-xv'$$
$$v'(d-vh)=x(v-v')$$
$$x=\frac{v'(d-vh)}{v-v'}.$$

Разсмотримъ всѣ случаи рѣшенія задачи о курьерахъ.

1. **Положительное рѣшеніе.** Корень уравненія (1) будетъ положительнымъ,

если $\begin{cases} d>vh \\ v>v' \end{cases}$

или $\begin{cases} d<vh \\ v<v' \end{cases}$

Положительное рѣшеніе указываетъ на возможность задачи.

Въ самомъ дѣлѣ, vh есть число верстъ, пройденное первымъ курьеромъ въ h часовъ. Разстояніе d между станціями больше vh, это значитъ, что, когда второй курьеръ былъ на станціи B, первый до нея не доѣхалъ, но онъ ѣдетъ скорѣе— значитъ рано или поздно догонитъ второго курьера и такимъ образомъ встрѣча произойдетъ за станціей B. То же самое случится, если разстояніе d между станціями меньше vh; это значитъ, что, когда второй курьеръ былъ на станціи B, первый ее уже проѣхалъ, но онъ ѣдетъ тише второго, значитъ второй курьеръ его догонитъ, и встрѣча произойдетъ гдѣ-нибудь за станціей B.

2. Отрицательное рѣшеніе. Корень уравненія (1) будетъ отрицательнымъ,

если $\begin{cases} d > vh \\ v < v' \end{cases}$

или $\begin{cases} d < vh \\ v > v' \end{cases}$

Отрицательное рѣшеніе указываетъ на то, что встрѣча за станціей B не произойдетъ. Объясненіе этому мы найдемъ въ условныхъ неравенствахъ. Въ самомъ дѣлѣ, $d > vh$, это значитъ, что, когда второй курьеръ былъ на станціи B, первый до нея еще не доѣхалъ; при этомъ первый курьеръ ѣдетъ тише второго, поэтому разстояніе между ними будетъ только увеличиваться. Наоборотъ, если $d < vh$ и $v > v'$, то первый курьеръ въ то время, какъ второй былъ на станціи B, эту станцію уже проѣхалъ и такъ какъ онъ къ тому же ѣдетъ скорѣе, то разстояніе между ними будетъ только увеличиваться и встрѣча за станціей B произойти не можетъ. Если распространить вопросъ задачи и опредѣлять мѣсто встрѣчи не только за станціей B, но и до станціи B, то отрицательное рѣшеніе не укажетъ на невозможность задачи, а покажетъ только, что встрѣча произошла *до* станціи B, на разстояніи отъ нея, равномъ x.

3. Нулевое рѣшеніе. Корень уравненія (1) будетъ равно 0, если

$$\begin{cases} d = hv \\ v \neq v'. \end{cases}$$

При этихъ условіяхъ, разстояніе мѣста встрѣчи отъ станціи B равно 0, иными словами встрѣча произошла на самой станціи B. Это же говорятъ намъ непосредственно самыя условія: $d = hv$—это значитъ, что въ тотъ моментъ, когда второй курьеръ былъ на станціи B, первый также туда пріѣхалъ, т.-е. оба пріѣхали одновременно, но такъ какъ согласно второму условію скорости ихъ неравны, то послѣ встрѣчи на станціи B они должны были разъѣхаться и болѣе встрѣтиться не могли.

4. Невозможное рѣшеніе. Корень уравненія (1) принимаетъ видъ $\frac{m}{0}$,

если $\begin{cases} d \neq hv \\ v = v'. \end{cases}$

Въ этомъ случаѣ уравненіе невозможно, а тѣмъ самымъ невозможна и задача. Легко найти объясненіе этому въ самыхъ условіяхъ задачи. Дѣйствительно, $d \neq hv$—значитъ, когда второй курьеръ былъ на станціи B, перваго курьера тамъ не было, т.-е. разстояніе между ними было неравно 0, и это разстояніе должно оставаться неизмѣннымъ, такъ какъ оба курьера ѣдутъ съ одною и тою же скоростью, и потому встрѣчи быть не можетъ.

5. Неопредѣленное рѣшеніе. Корень уравненія (1) принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$,

если
$$\begin{cases} d=hv \\ v=v'. \end{cases}$$

Видъ, который принимаетъ корень уравненія при этихъ условіяхъ, указываетъ на неопредѣленность рѣшенія задачи. Объясненіе этого слѣдуетъ непосредственно изъ условій задачи: $d=hv$ – значитъ, оба курьера были одновременно на станціи B; при этомъ они ѣдутъ съ одною и тою же скоростью, стало быть они все время ѣдутъ вмѣстѣ и потому любое мѣсто ихъ пути можно принять за мѣсто встрѣчи.

§ 43. **Изслѣдованіе системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.**

Дана система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} ax+by-c=0 \\ a_1x+b_1y-c_1=0. \end{cases}$$

Если хотя одинъ изъ коэффиціентовъ: a, a_1, b и b_1 не равенъ 0, то, примѣняя для рѣшенія данной системы способъ сложенія и вычитанія, мы получимъ новую систему, у которой одно уравненіе будетъ содержать только одну неизвѣстную и которая будетъ **равносильна** данной.

Пусть $a \neq 0$; тогда, умножая обѣ части перваго уравненія на a_1 и обѣ части второго уравненія на a, получаемъ новую систему

$$\begin{cases} (a_1x+b_1y-c_1)a-(ax+by-c)a_1=0 \\ ax+by-c=0. \end{cases}$$

Покажемъ, что вторая система равносильна данной; для этого надо показать, что корни первой системы удовлетворяютъ второй и обратно. Въ самомъ дѣлѣ,

если $\qquad ax+by-c=0$ и $a_1x+b_1y-c_1=0,$

то и $\qquad (a_1x+b_1y-c_1)a-(ax+by-c)a_1=0;$

значитъ, корни первой системы удовлетворяютъ второй.

Обратно,

$$ax+by-c=0, \text{ а потому и } (a_1x+b_1y-c_1)a=0.$$

Но a по условію не равно 0, значитъ $a_1x+b_1y-c_1=0$. Такимъ образомъ корни второй системы удовлетворяютъ первой [1]).

Преобразовавъ первое уравненіе второй системы, получаемъ эту систему въ видѣ

$$\begin{cases}(ab_1-a_1b)y=ac_1-a_1c\\ ax+by=c.\end{cases}$$

Изъ перваго уравненія получаемъ

$$y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}.$$

Подставляя найденное значеніе y во второе уравненіе, находимъ

$$x=\frac{c-\dfrac{b(ac_1-a_1c)}{ab_1-a_1b}}{a}=\frac{cab_1-ca_1b-bac_1+ba_1c}{a(ab_1-a_1b)}=\frac{a(cb_1-bc_1)}{a(ab_1-a_1b)}=$$
$$=\frac{cb_1-bc_1}{ab_1-a_1b}.$$

Найденныя значенія x и y представляютъ общія формулы рѣшенія системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

---

[1]) Приведенными въ этомъ § разсужденіями мы доказали, что методъ сравненія коэффиціентовъ или методъ сложенія и вычитанія приводитъ насъ къ системѣ уравненій, равносильной данной. Не трудно показать, что методъ подстановки и методъ сравненія могутъ быть сведены къ сложенію и вычитанію уравненій и потому также приводятъ къ системѣ уравненій, равносильной данной. Такимъ образомъ, является доказанной правильность тѣхъ пріемовъ, которые мы употребляемъ для рѣшенія системы двухъ уравненій 1-ой степени съ двумя неизвѣстными.

Правила составленія общихъ формулъ рѣшенія системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

Возьмемъ систему 2-хъ уравненій 1-ой степени съ 2-мя неизвѣстными и напишемъ найденныя нами рѣшенія:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{cb_1-bc_1}{ab_1-ba_1} \\ \\ y=\dfrac{ac_1-ca_1}{ab_1-ba_1}. \end{cases}$$

Разсматривая эти формулы, легко вывести правила для непосредственнаго ихъ составленія.

1) Общій знаменатель въ этихъ формулахъ составляется изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ слѣдующимъ образомъ: надо коэффиціенты при неизвѣстныхъ написать въ видѣ квадрата, перемножить ихъ крестъ на крестъ и изъ перваго произведенія вычесть второе:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \swarrow & \searrow \\ a_1 & b_1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{ab_1-ba_1.} \end{array}$$

Полученная разность представитъ общій знаменатель формулъ рѣшенія системы уравненій.

2) Для полученія числителя формулы, опредѣляющей x, надо замѣнить въ предыдущей группѣ коэффиціенты при x соотвѣтственными извѣстными членами и далѣе поступать, какъ раньше:

$$\begin{array}{cc} c & b \\ \swarrow & \searrow \\ c_1 & b_1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{cb_1-bc_1.} \end{array}$$

Полученная разность и будетъ числителемъ формулы, опредѣляющей x.

3) Для полученія формулы, опредѣляющей y, надо замѣнить въ первой таблицѣ коэффиціенты при y соотвѣтственными извѣстными членами и далѣе поступать, какъ раньше:

$$\begin{array}{cc} a & c \\ a_1 & c_1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{ac_1 - ca_1} \end{array}$$

Полученная разность будетъ числителемъ формулы, опредѣляющей y.

Мы замѣчаемъ также, что числителя формулы, опредѣляющей x, можно получить изъ знаменателя, замѣною въ знаменателѣ коэффиціентовъ при x въ обоихъ уравненіяхъ соотвѣтственными извѣстными членами, а числителя формулы, опредѣляющей y, замѣною въ знаменателѣ коэффиціентовъ при y соотвѣтственными извѣстными членами. Это даетъ другой способъ составленія числителей формулъ, выражающихъ рѣшеніе данной системы уравненій.

Численный примѣръ.

$$\begin{cases} 3x + 14y = 47 \\ 2x - 21y = 1. \end{cases}$$

1) $\begin{array}{cc} 3 & 14 \\ 2 & -21 \end{array}$

$3 \,.\, (-21) - 14 \,.\, 2 = -63 - 28 = -91$ — общій знаменатель формулъ, опредѣляющихъ x и y.

2) $\begin{array}{cc} 47 & 14 \\ 1 & -21 \end{array}$

$47 \,.\, (-21) - 14 \,.\, 1 = -987 - 14 = -1001$ — числитель формулы, опредѣляющей x.

3) $\begin{array}{cc} 3 & 47 \\ 2 & 1 \end{array}$

$3 \,.\, 1 - 47 \,.\, 2 = 3 - 94 = -91$ — числитель формулы, опредѣляющей y.

Слѣдовательно,

$$x=\frac{-1001}{-91}=11$$

$$y=\frac{-91}{-91}=1.$$

Изслѣдованіе общихъ формулъ рѣшенія системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными. Условія неопредѣленности и несовмѣстности системы.

Разсмотримъ различные случаи, какіе могутъ встрѣтиться при рѣшеніи системы двухъ уравненій 1-ой степени съ двумя неизвѣстными.

Дана система уравненій

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

Рѣшенія этой системы выражаются формулами:

$$\begin{cases} x=\dfrac{cb_1-bc_1}{ab_1-ba_1} \\ y=\dfrac{ac_1-ca_1}{ab_1-ba_1} \end{cases}$$

1) Общій знаменатель ab_1-ba_1 не равенъ 0.

Въ этомъ случаѣ система имѣетъ одно опредѣленное рѣшеніе, при чемъ значенія x и y могутъ быть положительныя, отрицательныя или нулевыя. Смыслъ этихъ рѣшеній такой же, какъ и въ уравненіяхъ съ одною неизвѣстною.

2) Общій знаменатель ab_1-ba_1 равенъ 0.

Положимъ, что a, b, a_1, b_1 не равны 0, и докажемъ, что въ этомъ случаѣ числители формулъ, опредѣляющихъ x и y, одновременно не равны 0 или одновременно равны 0. Обозначимъ для краткости числителей формулъ, опредѣляющихъ x и y, черезъ N_x и N_y; такимъ образомъ,

$$N_x=cb_1-bc_1$$
$$N_y=ac_1-ca_1$$

По заданію мы имѣемъ: $ab_1-ba_1=0$, откуда $ab_1=ba_1$; и, слѣдовательно, $b_1=\frac{ba_1}{a}$.

Подставимъ полученное значеніе b_1 въ выраженіе числителя x.

$$N_x = c \cdot \frac{ba_1}{a} - bc_1 = \frac{cba_1 - abc_1}{a} = \frac{b\,(ca_1 - ac_1)}{a} = -\frac{b}{a}\underbrace{(ac_1 - ca_1)}_{N_y}$$

Итакъ,

$$N_x = -\frac{b}{a} \cdot N_y$$

Такъ какъ, по условію, a и b не равны 0, то изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что N_x и N_y, одновременно, равны 0 или не равны 0.

На основаніи доказаннаго будемъ имѣть слѣдующіе случаи:

А) $ab_1 - ba_1 = 0$, но N_x и N_y не равны 0.

Тогда

$$x = \frac{N_x}{0}$$

$$y = \frac{N_y}{0}$$

Этотъ невозможный видъ рѣшеній показываетъ, что данная система уравненій не имѣетъ рѣшеній.

Можно показать, что въ этомъ случаѣ данныя уравненія несовмѣстимы.

Уравняемъ въ нихъ коэффиціенты при y.

$$\left\{\begin{array}{l|l} ax + by = c & b_1 \\ a_1x + b_1y = c_1 & b \end{array}\right.$$

Получимъ систему $\left\{\begin{array}{l} ab_1x + bb_1y = cb_1 \\ a_1bx + bb_1y = c_1b \end{array}\right.$

Сравнивая почленно уравненія этой системы, видимъ, что первыя ихъ части тождественно равны ($ab_1 = a_1b$), тогда какъ вторыя части не равны; слѣдовательно, одно уравненіе противорѣчитъ другому.

Выведемъ признаки несовмѣстной системы.

Изъ равенства $ab_1 - ba_1 = 0$ имѣемъ: $ab_1 = ba_1$

или $$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

но $$cb_1 \mp c_1 b$$

и потому $$\frac{b}{b_1} \mp \frac{c}{c_1}$$

Такимъ образомъ, **въ несовмѣстной системѣ коэффиціенты при неизвѣстныхъ пропорціональны, а извѣстные члены имъ не пропорціональны.**

На основаніи этого признака можно легко написать несовмѣстную систему уравненій:

например̂ъ: $$\begin{cases} 5x+3y=17 \\ 15x+9y=27 \end{cases}$$

B) Положимъ, $ab_1-ba_1=0$ и $N_x=0$, $N_y=0$. Тогда

$$x=\frac{0}{0} \text{ и } y=\frac{0}{0}.$$

Этотъ видъ рѣшеній показываетъ, что данная система удовлетворяется безчисленнымъ множествомъ рѣшеній и поэтому представляетъ собою неопредѣленную систему. Чтобы это доказать, уравняемъ въ данныхъ уравненіяхъ коэффиціенты при одной изъ неизвѣстныхъ, напр., при y.

$$\begin{cases} ax+by=c & \big| b_1 \\ a_1x+b_1y=c_1 & \big| b \end{cases}$$

Получимъ систему $$\begin{cases} ab_1x+bb_1y=cb_1 \\ a_1bx+bb_1y=c_1b \end{cases}$$

Сравнивая эти уравненія, мы видимъ, что обѣ части ихъ тождественно равны ($ab_1=a_1b$ и $cb_1=c_1b$); слѣдовательно, данная система состоитъ, въ сущности, изъ одного уравненія съ двумя неизвѣстными, которое, какъ извѣстно, имѣетъ безчисленное множество рѣшеній.

Выведемъ признакъ неопредѣленной системы.

Изъ данныхъ условій имѣемъ:

$$ab_1-a_1b=0$$
$$N_x=cb_1-bc_1=0.$$

Отсюда получаемъ:

$$ab_1=a_1b$$
$$cb_1=c_1b.$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ слѣдующія пропорціи:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1} \text{ и } \frac{c}{c_1}=\frac{b}{b_1}$$

Слѣдовательно, $$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$$

Такимъ образомъ, **въ неопредѣленной системѣ коэффиціенты при неизвѣстныхъ и извѣстные члены соотвѣтственно пропорціональны.**

На основаніи этого признака легко написать неопредѣленную систему уравненій:

например̌ъ $$\begin{cases} 3x-5y=11 \\ 12x-20y=44. \end{cases}$$

§ 44. **Частные случаи системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.**

Положимъ, что въ системѣ двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными коэффиціенты a и a_1 или b и b_1 равны 0.

Пусть $b=0$ и $b_1=0$.

Тогда мы будемъ имѣть:

$$ab_1-ba_1=a\ 0-0\ .\ a_1=0$$
$$cb_1-bc_1=c\ .\ 0-0\ .\ c_1=0$$

Но $ac_1-ca_1=N_y$ не равно 0.

Слѣдовательно, $x=\frac{0}{0}$; $y=\frac{N_y}{0}$

Чтобы разъяснить этотъ случай, надо обратиться къ даннымъ уравненіямъ. Данная система уравненій, т. е.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1, \end{cases}$$

при данныхъ условіяхъ, принимаетъ видъ:

$$\begin{cases} ax=c \\ a_1x=c_1, \end{cases}$$

т.-е. мы получили два уравненія съ одною неизвѣстною.

Изъ этихъ уравненій находимъ $x=\frac{c}{a}$ и $x=\frac{c_1}{a_1}$.

Если $\frac{c}{a} \mp \frac{c_1}{a_1}$, то одно уравненіе противорѣчитъ другому; если же $\frac{c}{a}=\frac{c_1}{a_1}$, то уравненія тождественны. Что же касается до $y=\frac{N_y}{0}$, то мы видимъ, что въ данныхъ уравненіяхъ y не можетъ имѣть никакихъ значеній, такъ какъ онъ совсѣмъ и не входитъ въ эти уравненія.

Подобнымъ же образомъ изслѣдуется и тотъ случай, когда $a=0$ и $a_1=0$.

Предположимъ теперь, что извѣстные члены системы уравненій равны 0, т.-е.

$$c=0 \text{ и } c_1=0$$

Тогда система уравненій приметъ видъ:

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ a_1x+b_1y=0 \end{cases}$$

Въ этомъ случаѣ $N_x=0$, $N_y=0$ и, слѣдовательно, $x=0$ и $y=0$.

Если, кромѣ того, $ab_1-ba_1=0$, то рѣшенія примутъ неопредѣленный видъ: $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$; въ послѣднемъ случаѣ мы будемъ имѣть неопредѣленную систему. Дѣйствительно, данныя уравненія можно написать въ видѣ $x+\frac{b}{a}y=0$ и $x+\frac{b_1}{a_1}y=0$; но изъ условія $ab_1-ba_1=0$ имѣемъ: $\frac{b}{a}=\frac{b_1}{a_1}$; слѣдовательно, лѣвыя части уравненій тождественно равны и система двухъ уравненій приводится къ одному уравненію съ двумя неизвѣстными. Въ этомъ случаѣ x и y остаются неопредѣленными, но отношеніе ихъ вполнѣ опредѣленное; въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія $x+\frac{b}{a}y=0$ имѣемъ: $\frac{x}{y}=$ $=-\frac{b}{a}$.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Неравенства.

§ 45. **Неравенства. Виды неравенствъ.**

Два выраженія, соединенныя знакомъ $>$ или $<$, составляютъ **неравенство**. Неравенства бываютъ **одинаковаго и противоположнаго или обратнаго смысла**, смотря по тому, одинаковые или различные знаки находятся между ихъ частями, т.-е. двумя выраженіями, составляющими неравенство. Напримѣръ:

1) $A>B$ и $C>D$—неравенства одинаковаго смысла.

2) $A>B$ и $C<D$—неравенства обратнаго смысла.

Во II-ой главѣ (§ 11) было дано опредѣленіе того, что значитъ $a>b$, если a и b какія угодно алгебраическія числа. Распространимъ это опредѣленіе на алгебраическія выраженія и скажемъ, что алгебраическое выраженіе A больше алгебраическаго выраженія B, если разность $A-B$ есть число положительное; иначе говоря, неравенству $A>B$ удовлетворяютъ всѣ тѣ значенія буквъ, входящихъ въ выраженія A и B, которыя дѣлаютъ разность $A-B$ числомъ положительнымъ. Равнымъ образомъ, мы будемъ говорить, что алгебраическое выраженіе A меньше алгебраическаго выраженія B, если разность $A-B$ отрицательное число; иначе говоря, неравенство $A<B$ удовлетворяется всѣми тѣми значеніями буквъ, входящихъ въ выраженія A и B, которыя дѣлаютъ разность $A-B$ отрицательнымъ числомъ.

Неравенства бываютъ: 1) **безусловныя**, т.-е. справедливыя для какихъ угодно значеній буквъ, входящихъ въ эти неравенства; напр., $a+1>a$ или $a-1<a$;

и 2) **условныя**, т.-е. справедливыя лишь для извѣстной группы значеній буквъ, входящихъ въ эти неравенства; напр., неравенство $a+1>3$, справедливое лишь для численныхъ значеній a, которыя больше 2, или неравенство $3x<1$, справедливое для значеній x, которыя меньше $\frac{1}{3}$.

Неравенства перваго рода соотвѣтствуютъ тождествамъ, а неравенства 2-го рода—уравненіямъ.

§ 46. Разсмотримъ тѣ теоремы, на которыхъ основаны преобразованія неравенствъ, приводящія ихъ къ новымъ неравенствамъ, равносильнымъ первымъ, т. е. удовлетворяющимся тѣми же значеніями буквъ, какъ и первыя неравенства.

Теоремы, на которыхъ основаны преобразованія неравенствъ.

Теорема 1. **Если къ обѣимъ частямъ неравенства придать или вычесть изъ нихъ одно и то же количество, то получится новое неравенство того же смысла, какъ и данное, и равносильное съ нимъ.**

Дано неравенство $A>B$. Докажемъ, что если мы къ обѣимъ частямъ неравенства $A>B$ придадимъ или вычтемъ изъ нихъ одно и то же количество C, то получимъ новыя неравенства:

$$1)\ A+C>B+C$$
$$2)\ A-C>B-C,$$

равносильныя съ даннымъ.

Напишемъ тождество: $A-B=A-B+C-C$.

Изъ этого тождества мы выводимъ два новыхъ тождества:

$$1)\ A-B=(A+C)-(B+C)$$
$$2)\ A-B=(A-C)-(B-C).$$

Такъ какъ, по заданію, $A>B$, то разность $A-B$ число положительное и, слѣдовательно, разности, написанныя во вторыхъ частяхъ послѣднихъ тождествъ, тоже числа положительныя. Такимъ образомъ, имѣемъ неравенства:

$$1)\ (A+C)-(B+C)>0$$
$$2)\ (A-C)-(B-C)>0.$$

Изъ этихъ неравенствъ, согласно опредѣленію, получаемъ требуемыя неравенства:

$$1)\ A+C>B+C$$
$$2)\ A-C>B-C.$$

Теперь покажемъ, что два неравенства $A>B$ и $A+C>B+C$ являются слѣдствіями одно другого.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства $A > B$ мы получили неравенство $A+C > B+C$, а изъ послѣдняго, вычитая изъ обѣихъ его частей по C, получаемъ первое. Подобнымъ же образомъ можно показать, что неравенства $A>B$ и $A-C>B-C$ также являются слѣдствіями одно другого. Если же два неравенства являются слѣдствіями одно другого, то это, очевидно, разнозначуще тому, что эти неравенства равносильны.

Слѣдствіе. Доказанная теорема даетъ намъ право переносить члены изъ одной части неравенства въ другую съ перемѣною знака.

Возьмемъ, напримѣръ, неравенство $ax+b>cx+d$;
вычтя изъ обѣихъ частей неравенства по cx и по b, получаемъ:

$$ax+b-cx-b>cx+d-cx-b \text{ или } ax-cx>d-b.$$

Сравнивая послѣднее неравенство съ даннымъ, замѣчаемъ, что членъ cx перешелъ изъ правой части въ лѣвую, а членъ b перешелъ изъ лѣвой части въ правую; при этомъ у обоихъ членовъ знакъ перемѣнился на обратный.

Теорема 2. **Если обѣ части неравенства умножить или раздѣлить на одно и то же положительное количество, то получится новое неравенство того же смысла, какъ и данное, и равносильное съ нимъ.**

Дано: $A>B$ и $C>0$.

Докажемъ, что если мы умножимъ или раздѣлимъ обѣ части даннаго неравенства на положительное количество C, то получимъ новыя неравенства:

$$1)\ AC>BC \text{ и } 2)\ \frac{A}{C}>\frac{B}{C}.$$

Такъ какъ, по заданію, $A>B$, то разность $A-B$ положительное число, C тоже положительное число; слѣдовательно, $(A-B)C$ или $AC-BC$ также число положительное.

Отсюда, по опредѣленію, имѣемъ: $AC>BC$.

Такъ какъ дѣленіе обѣихъ частей неравенства на C равнозначуще умноженію на $\frac{1}{C}$, то, очевидно, справедливо также неравенство $\frac{A}{C}>\frac{B}{C}$.

Умноживъ обѣ части неравенства $A > B$ на положительное количество C, мы получили неравенство $AC > BC$; раздѣливъ обѣ части второго неравенства на положительное число C, мы получимъ первое неравенство. Значитъ, неравенства $A>B$ и $AC>BC$ (при $C>0$) суть слѣдствія одно другого. Подобнымъ образомъ доказывается, что неравенства $A>B$ и $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ также слѣдствія одно другого.

Теорема 3. **Если обѣ части неравенства умножить или раздѣлить на одно и то же отрицательное число, то получится новое неравенство обратнаго смысла съ даннымъ и ему равносильное.**

Дано: $A>B$ и $C<0$.

Докажемъ, что если мы умножимъ или раздѣлимъ обѣ части неравенства на отрицательное число C, то получимъ новыя неравенства:

$$1)\ AC<BC \text{ и } 2)\ \frac{A}{C}<\frac{B}{C}.$$

Такъ какъ $A>B$, то разность $A-B$ число положительное, а C отрицательное число; слѣдовательно, $(A-B)C$ или $AC-BC$ будетъ числомъ отрицательнымъ.

Отсюда, согласно опредѣленію, получаемъ неравенство $AC<BC$.

Такъ какъ дѣленіе обѣихъ частей неравенства на C равнозначуще умноженію на $\frac{1}{C}$, то, очевидно, справедливо и неравенство: $\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$.

Разсуждая такъ же, какъ мы разсуждали въ двухъ предшествующихъ случаяхъ, мы придемъ къ заключенію, что при $C<0$ неравенства $A>B$ и $AC<CB$, а также неравенства $A>B$ и $\frac{A}{C}<\frac{B}{C}$ являются слѣдствіями одно другого.

§ 47. **Преобразованіе неравенствъ.** На второй и третьей теоремахъ основаны слѣдующія преобразованія неравенствъ:

1) Если обѣ части неравенства содержатъ общаго множителя, то неравенство можно упростить, раздѣливъ обѣ части его на этого множителя. При этомъ необходимо имѣть въ виду знакъ общаго множителя: если общій множитель

положительное число, то знакъ неравенства не мѣняется; если—отрицательное, то знакъ неравенства мѣняется на обратный. Если же знакъ общаго множителя неизвѣстенъ, то и самое сокращеніе невозможно.

Примѣры.

1) $(x-1)(x-3)^2>(2x-5)(x-3)^2$

Общій множитель $(x-3)^2$ при всѣхъ положительныхъ или отрицательныхъ, цѣлыхъ или дробныхъ значеніяхъ x имѣетъ положительное значеніе (кромѣ значенія $x=3$, когда этотъ множитель обращается въ 0); слѣдовательно, раздѣливъ обѣ части неравенства на $(x-3)^2$, мы получимъ новое неравенство,

$$x-1>2x-5,$$

всѣ рѣшенія котораго, кромѣ $x=3$, представляютъ рѣшенія даннаго неравенства.

2) $(x-1)(x-3)^3>(2x-5)(x-3)^3$.

Общій множитель въ этомъ неравенствѣ есть $(x-3)^3$, который будетъ числомъ отрицательнымъ для значеній $x<3$ и числомъ положительнымъ для значеній $x>3$.

Слѣдовательно, раздѣливъ обѣ части даннаго неравенства на этого общаго множителя, получимъ новыя неравенства:

a) $x-1>2x-5$, равносильное съ даннымъ неравенствомъ при $x>3$;

b) $x-1<2x-5$, равносильное съ даннымъ неравенствомъ при $x<3$.

II) Если неравенство содержитъ дробные члены, то его можно освободить отъ знаменателей.

Для этого надо прежде всего привести всѣ члены первой части отдѣльно и всѣ члены второй части отдѣльно къ общему знаменателю. Тогда данное неравенство приметъ видъ:

$$\frac{A}{B}>\frac{C}{D} \text{ или } \frac{A}{B}-\frac{C}{D}>0 \text{ или } \frac{AD-BC}{BD}>0\ .\ .\ .\ (1)$$

Дальнѣйшее преобразованіе будетъ зависѣть отъ того, извѣстенъ знакъ знаменателя или нѣтъ.

Предположимъ, что знакъ общаго знаменателя BD намъ извѣстенъ.

1) Положимъ, $BD>0$.

Умноживъ неравенство (1) на BD, получимъ новое неравенство:

$$AD-BC>0.$$

Это неравенство уже не содержитъ дробныхъ членовъ.

2) Положимъ, $BD<0$.

Умноживъ неравенство (1) на BD, получимъ новое неравенство:

$$AD-BC<0.$$

Это неравенство не содержитъ дробныхъ членовъ.

Предположимъ теперь, что знакъ общаго знаменателя BD намъ неизвѣстенъ. Изъ неравенства (1) мы видимъ, что числитель и знаменатель дроби должны быть одного и того же знака.

Поэтому мы можемъ сдѣлать два предположенія:

$$1)\ \begin{cases} AD-BC>0 \\ BD>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2)\ \begin{cases} AD-BC<0 \\ BD<0 \end{cases}$$

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ одно неравенство съ дробными членами можетъ быть замѣнено двумя системами неравенствъ, по два неравенства въ каждой, у которыхъ дробныхъ членовъ уже не будетъ.

§ 48. **Рѣшеніе неравенствъ 1-ой степени съ одною неизвѣстной.**

Неравенство 1-ой степени съ одною неизвѣстною можетъ быть приведено въ виду: $ax+b>a'x+b'$.

Неравенства рѣшаются пріемами, сходными съ пріемами рѣшенія уравненій. Имѣемъ:

$$ax+b>a'x+b';$$

Рѣшеніе одного неравенства 1-ой степени съ одною неизвѣстною.

отсюда, перенеся члены, содержащіе неизвѣстную, въ лѣвую часть, а члены, не содержащіе неизвѣстной, въ правую часть неравенства, получаемъ:

$$ax-a'x>b'-b;$$

или

$$(a-a')x>b'-b.$$

Если $a-a'>0$, то $x>\frac{b'-b}{a-a'}$, т.-е. для x надо брать численныя значенія, превышающія число $\frac{b'-b}{a-a'}$; это число называется низшимъ предѣломъ численныхъ значеній x.

Если $a-a'<0$, то $x<\frac{b'-b}{a-a'}$, т.-е. для x надо брать численныя значенія, меньшія числа $\frac{b'-b}{a-a'}$; это число называется высшимъ предѣломъ численныхъ значеній x.

Примѣръ.

Рѣшить неравенство $\frac{3}{5}-3x<\frac{1}{4}x-2$.

Перенесемъ члены съ неизвѣстною въ лѣвую, а извѣстные въ правую часть неравенства, получимъ

$$-3x-\frac{1}{4}x<-2-\frac{3}{5}$$

или

$$-3\frac{1}{4}x<-2\frac{3}{5}$$

Раздѣливъ обѣ части неравенства на $-3\frac{1}{4}$, находимъ

$$x>\frac{4}{5}.$$

Такимъ образомъ, данному неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, бо̀льшія $\frac{4}{5}$.

Рѣшеніе системы двухъ неравенствъ 1-ой степени съ одною неизвѣстною.

Дана система неравенствъ

$$\begin{cases} ax+b>a'x+b' \\ cx+d>c'x+d' \end{cases}$$

Рѣшаемъ каждое изъ данныхъ неравенствъ, независимо одно отъ другого, вышеуказаннымъ пріемомъ. Мы получаемъ два предѣла для численныхъ значеній x.

а) Положимъ, получились предѣлы одноименные; напр.:

1) $$x>3, \quad x>7;$$

слѣдовательно, оба неравенства удовлетворяются численными значеніями $x>7$.

2) $$x<3, \quad x<1;$$

слѣдовательно, оба неравенства удовлетворяются численными значеніями $x<1$.

b) Положимъ, получились предѣлы разноименные; напр.,

1) $$x > 3 \text{ и } x < 7;$$
тогда $$7 > x > 3,$$

откуда мы видимъ, что оба неравенства удовлетворяются численными значеніями x, заключающимися между числами 3 и 7.

2) $$x < 3 \text{ и } x > 7.$$

Въ этомъ случаѣ предѣлы противорѣчатъ другъ другу; слѣдовательно, данная система неравенствъ не имѣетъ рѣшеній.

Такимъ образомъ, при рѣшеніи системы двухъ неравенствъ 1-ой степени съ одною неизвѣстною получается одинъ изъ трехъ случаевъ: или неравенства даютъ одноименные предѣлы, и тогда рѣшенія одного неравенства заключаются въ другомъ; или неравенства даютъ разноименные предѣлы, при чемъ низшій предѣлъ меньше высшаго, тогда одно неравенство дополняетъ другое; или, наконецъ, неравенства даютъ разноименные предѣлы и при этомъ низшій предѣлъ больше высшаго, тогда неравенства противорѣчатъ другъ другу и рѣшеній не существуетъ вовсе.

Если система неравенствъ содержитъ ихъ три и болѣе, то дѣло приводится также къ одному изъ трехъ разсмотрѣнныхъ случаевъ.

Сложеніе и вычитаніе неравенствъ.

Неравенства одинаковаго смысла можно складывать, а неравенства обратнаго смысла вычитать одно изъ другого; въ первомъ случаѣ мы получаемъ въ результатѣ неравенство того же смысла, что̀ и слагаемыя неравенства, а во второмъ случаѣ неравенство одинаковаго смысла съ тѣмъ неравенствомъ, изъ котораго вычитаемъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть дана система

$$\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A - B > 0 \\ C - D > 0. \end{cases}$$

Сумма двухъ положительныхъ чиселъ есть число положительное, и потому имѣемъ:

$$(A - B) + (C - D) > 0$$
или $$(A + C) - (B + D) > 0$$
откуда $$A + C > B + D.$$

Теперь возьмемъ систему

$$\begin{cases} A > B \\ C < D \end{cases}$$

и докажемъ справедливость неравенства $A-C>B-D$.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\begin{matrix} A > B \\ C < D \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} A-B > 0 \\ C-D < 0 \end{matrix}$$

Разность между положительнымъ и отрицательнымъ числомъ есть число положительное и потому $(A-B)-(C-D)>0$ или $(A-C)-(B-D)>0$, т.-е. $A-C>B-D$.

Обратное заключеніе будетъ несправедливо. Такъ, если $A+C>B+D$, то изъ этого еще не слѣдуетъ, что $A>B$ и $C>D$; равнымъ образомъ, если $A-C>B-D$, то изъ этого не слѣдуетъ, что $A>B$ и $C<D$.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Неопредѣленныя уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными.

---

§ 49.

Общій видъ неопредѣленныхъ уравненій 1-ой степени съ двумя неизвѣстными.

Уравненіе съ двумя неизвѣстными имѣетъ, какъ мы знаемъ (§ 34), безчисленное множество системъ значеній неизвѣстныхъ, ему удовлетворяющихъ; поэтому уравненіе съ двумя неизвѣстными называется **неопредѣленнымъ уравненіемъ**.

Мы будемъ разсматривать рѣшеніе такихъ неопредѣленныхъ уравненій 1-ой степени съ двумя неизвѣстными, у которыхъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ и извѣстный членъ—раціональныя числа, т.-е. положительныя или отрицательныя, цѣлыя или дробныя числа. Такія уравненія, умноженіемъ обѣихъ частей на общее наименьшее кратное знаменателей и раздѣленіемъ затѣмъ обѣихъ частей уравненія на общаго множителя всѣхъ его членовъ, если таковой имѣется, приводятся къ виду $ax+by=c$, гдѣ a, b и c—цѣлыя числа, неимѣющія общаго множителя. Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы будемъ предполагать, что данное неопредѣленное уравненіе уже приведено къ такому виду.

Условіе возможности цѣлыхъ рѣшеній неопредѣленнаго уравненія 1-ой степени съ двумя неизвѣстными.

Обыкновенно, **рѣшая неопредѣленное уравненіе, имѣютъ въ виду нахожденіе только цѣлыхъ и положительныхъ значеній x и y, удовлетворяющихъ данному уравненію.**

Поэтому важно знать, всегда ли и при какихъ условіяхъ возможно нахожденіе цѣлыхъ рѣшеній; отвѣтъ на это даетъ слѣдующая теорема.

Теорема. **Для того, чтобы неопредѣленное уравненіе имѣло цѣлыя рѣшенія, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты при неизвѣстныхъ были числа взаимно-простыя.**

Возьмемъ уравненіе: $ax+by=c$.

1. Выраженное теоремою условіе необходимо. Въ самомъ дѣлѣ, если a и b не будутъ числа взаимно-простыя, а будутъ имѣть какого-нибудь общаго множителя m, то можно положить:

$$a=ma_1;\ b=mb_1.$$

Тогда данное уравненіе можно написать такъ:

$$ma_1x+mb_1y=c \text{ или } a_1x+b_1y=\frac{c}{m}.$$

Изъ послѣдняго уравненія видимъ, что при цѣлыхъ значеніяхъ x и y первая часть уравненія представляетъ собою цѣлое число, тогда какъ вторая часть его есть число дробное; очевидно, такое равенство невозможно.

2. Это условіе достаточно, т.-е., если коэффиціенты a и b числа взаимно-простыя, то уравненіе имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одну систему цѣлыхъ значеній неизвѣстныхъ, ему удовлетворяющихъ.

Чтобы это доказать, рѣшимъ данное уравненіе относительно одной изъ неизвѣстныхъ, напр., относительно y.

$$ax+by=c$$
$$by=c-ax$$
$$y=\frac{c-ax}{b}$$

Докажемъ, что если мы въ формулу, выражающую y въ x, будемъ вмѣсто x подставлять числа: $0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots m \ldots n \ldots (b-1)$, то при одной изъ этихъ подстановокъ y выразится цѣлымъ числомъ. Изъ формулы, выражающей y, видимъ, что значенія y, соотвѣтственныя взятымъ значеніямъ x, получаются черезъ дѣленіе на b слѣдующихъ дѣлимыхъ:

$$c-a\,.\,0,\ c-a\,.\,1,\ c-a\,.\,2, \ldots c-am, \ldots c-an, \ldots c-a(b-1).$$

Докажемъ, что при этихъ дѣленіяхъ не могутъ получиться равные остатки [1]).

Допустимъ противное и предположимъ, что при дѣленіи на b чиселъ $c-am$ и $c-an$ получаются цѣлыя частныя q и q_1 и одинъ и тотъ же остатокъ r.

---

[1]) Остатки надо брать положительные; такъ, напр., при дѣленіи $(8-5\,.\,2)$ на 3 надо взять частное, равное -1, и тогда остатокъ будетъ 1.

Тогда мы имѣемъ слѣдующія равенства:

$$c-am=bq+r$$
$$c-an=bq_1+r$$

Вычтя изъ перваго равенства второе, получаемъ:

$$c-am-c+an=bq+r-bq_1-r \text{ или } an-am=bq-bq_1$$

или

$$a(n-m)=b(q-q_1),$$

откуда

$$q-q_1=\frac{a(n-m)}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Въ этомъ равенствѣ первая часть $q-q_1$ есть число цѣлое, такъ какъ q и q_1 числа цѣлыя. Во второй части равенства a и b числа взаимно-простыя, а $n-m$, очевидно, меньше b; слѣдовательно, произведеніе $a(n-m)$ не можетъ дѣлиться на b[1]), и потому вторая часть равенства есть дробное число. Цѣлое число не можетъ быть равно дробному, и потому равенство (1) невѣрно; значитъ, невѣрно и наше предположеніе, что при двухъ какихъ-нибудь дѣленіяхъ могутъ получиться равные остатки.

Итакъ, всѣ остатки при этихъ дѣленіяхъ различны. Замѣтивъ же, что каждый изъ этихъ остатковъ долженъ быть менѣе дѣлителя b и что число ихъ есть b (число дѣленій), заключаемъ, что остатки будутъ также числа ряда: $0, 1, 2, 3, \ldots m \ldots n \ldots (b-1)$, только въ какомъ-нибудь иномъ порядкѣ. Изъ этого слѣдуетъ, что одинъ изъ остатковъ равенъ нулю и, значитъ, есть такое цѣлое значеніе x, при которомъ и y будетъ имѣть цѣлое значеніе.

Примѣръ.

$$7x-3y=-11$$
$$-3y=-11-7x$$
$$y=\frac{7x+11}{3}.$$

---

1) На основаніи теоремы ариѳметики: если произведеніе двухъ чиселъ дѣлится на третье число, простое съ однимъ изъ множителей, то другой множитель долженъ раздѣлиться на это третье число. Стало быть, для того, чтобы $a(n-m)$ раздѣлилось на b, надо, чтобы $n-m$ раздѣлилось на b, а это невозможно, такъ какъ $n-m<b$.

Беремъ для x рядъ значеній: 0, 1, 2; соотвѣтствующіе имъ остатки будутъ: 2, 0, 1. Значитъ, при $x=1$, y получаетъ также цѣлое значеніе, равное 6.

§ 50. **Опредѣленіе общихъ рѣшеній неопредѣленнаго уравненія по даннымъ частнымъ его рѣшеніямъ.**

Частнымъ рѣшеніемъ неопредѣленнаго уравненія называется каждая система цѣлыхъ значеній неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ данному уравненію; **общими рѣшеніями** называются формулы, посредствомъ которыхъ можно вычислить всѣ частныя рѣшенія.

Возьмемъ уравненіе: $ax+by=c$, гдѣ a и b взаимно-простыя числа.

Положимъ:

$$\left.\begin{array}{l} x=m \\ y=n \end{array}\right\} \text{одно частное рѣшеніе.}$$

Подставивъ значенія x и y въ данное уравненіе, получимъ тождество: $am+bn=c$.

Вычтя это тождество изъ даннаго уравненія, получимъ:

$$ax-am+by-bn=0$$

или
$$a(x-m)+b\,(y-n)=0,$$

откуда
$$a(x-m)=-b(y-n)$$

и
$$x-m=\frac{-b\,(y-n)}{a}$$

слѣдовательно,
$$x=m-\frac{b(y-n)}{a}.$$

Чтобы x имѣло цѣлое значеніе, необходимо и достаточно, чтобы дробь $\frac{y-n}{a}$, при цѣломъ значеніи y, представляла цѣлое число (см. примѣчаніе на стр. 114).

Обозначимъ черезъ t произвольное цѣлое число и положимъ:

$$\frac{y-n}{a}=t;$$

откуда
$$y-n=at$$

Слѣдовательно,
$$\left\{\begin{array}{l} x=m-bt \\ y=n+at \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Формулы (α) суть общія рѣшенія даннаго неопредѣленнаго уравненія.

Такъ какъ t совершенно произвольное цѣлое число, то въ предыдущихъ формулахъ мы можемъ измѣнить t, на $(-t)$, и тогда получимъ другой видъ общихъ рѣшеній:

$$\begin{cases} x = m + bt \\ y = n - at \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Формулы, выражающія x и y, суть двучлены, первыми членами которыхъ являются данныя частныя рѣшенія. Вторые ихъ члены содержатъ произвольное цѣлое число t, коэффиціентами котораго являются коэффиціенты уравненія a и b. Въ формулѣ, выражающей x, берется коэффиціентъ при y, т.-е. b; а въ формулѣ, выражающей y,—коэффиціентъ при x, т.-е. a; при чемъ одинъ изъ нихъ берется съ тѣмъ знакомъ, съ какимъ онъ входитъ въ уравненіе, а другой съ обратнымъ знакомъ.

§ 51. **Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ.**

По предыдущимъ формуламъ опредѣляются всѣ цѣлыя значенія x и y, удовлетворяющія данному уравненію; чтобы значенія x и y были, кромѣ того, числа положительныя, необходимо выбрать значенія для t, удовлетворяющія неравенствамъ:

$$\begin{cases} m - bt > 0 \\ n + at > 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Мы можемъ предполагать $a > 0$, такъ какъ черезъ перемѣну знаковъ въ уравненіи коэффиціентъ a можно всегда сдѣлать положительнымъ. Что же касается коэффиціента b, то онъ можетъ быть и положительнымъ, и отрицательнымъ.

Разсмотримъ отдѣльно случай, когда $b > 0$ и когда $b < 0$.

1. Пусть b положительное число; тогда $-b$ будетъ число отрицательное.

Рѣшимъ неравенства (1) относительно t.

$$-bt > -m$$

$$t < \frac{-m}{-b} \text{ или } t < \frac{m}{b}$$

$$at > -n$$

$$t > \frac{-n}{a}.$$

Слѣдовательно, $\frac{m}{b} > t > -\frac{n}{a}$.

Изъ этихъ неравенствъ видимъ, что для t надо брать только цѣлыя значенія, заключающіяся между найденными предѣлами. Очевидно, число такихъ цѣлыхъ значеній будетъ ограничено или же такихъ значеній вовсе не будетъ. Поэтому, когда b число положительное, то неопредѣленное уравненіе имѣетъ ограниченное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній или же вовсе ихъ не имѣетъ.

2. Пусть теперь b число отрицательное; тогда $-b$ будетъ число положительное.

Рѣшаемъ неравенства (1):

$$-bt > -m \qquad\qquad at > -n$$

$$t > \frac{-m}{-b} \qquad\qquad t > \frac{-n}{a}$$

$$\text{или } t > \frac{m}{b}.$$

Такъ какъ мы получили ограниченія для t только съ одной стороны, то заключаемъ, что t можетъ имѣть неограниченное число цѣлыхъ значеній. Поэтому, если въ данномъ уравненіи коэффиціентъ b отрицательное число, то уравненіе имѣетъ неограниченное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

I. Рѣшеніе уравненій, въ которыхъ коэффиціентъ a или b равенъ единицѣ. § 52. **Рѣшеніе численныхъ уравненій.**

Положимъ, дано уравненіе: $x+by=c$.

Рѣшая это уравненіе относительно x, имѣемъ:

$$x=c-by;$$

слѣдовательно, при цѣлыхъ значеніяхъ y, мы получаемъ цѣлыя значенія для x.

Примѣръ.

$$x+3y=19, \text{ откуда } x=19-3y$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x=19-3y > 0 \end{cases}$$

слѣдовательно, $6\frac{1}{3} > y > 0$.

Всѣ цѣлыя положительныя рѣшенія даннаго неопредѣленнаго уравненія можно выразить слѣдующею таблицею:

$y=$	1	2	3	4	5	6
$x=$	16	13	10	7	4	1

II. Рѣшеніе уравненій, въ которыхъ извѣстный членъ c **равенъ 0.**

Дано уравненіе $ax+by=0$.

Рѣшая его относительно x, находимъ:

$$x=-\frac{by}{a}=-b\cdot\frac{y}{a}.$$

Пусть $\frac{y}{a}=t$, гдѣ t произвольное цѣлое число; тогда будемъ имѣть:

$$x=-bt;\ y=at.$$

Примѣръ.

$$5x-7y=0$$
$$5x=7y$$
$$x=\frac{7y}{5}=7\cdot\frac{y}{5}$$
$$\frac{y}{5}=t$$
$$y=5t;\ x=7t$$

$5t>0$ или $t>0$

$7t>0$ $\quad$ $t>0$

Рѣшеній будетъ безчисленное множество; ихъ можно выразить слѣдующею таблицею:

$t=$	1	2	3	....
$x=$	7	14	21	....
$y=$	5	10	15	....

III. Общій случай.

Уравненіе общаго вида $ax+by=c$, гдѣ a и b числа взаимно-простыя, можно рядомъ послѣдовательныхъ преобразованій привести къ уравненію, въ которомъ коэффиціентъ при одной изъ неизвѣстныхъ будетъ единица. Мы это покажемъ на численныхъ примѣрахъ:

Примѣры.

$$1)\ 17x+8y=211 \quad \dots\dots\dots \quad (\alpha)$$

Рѣшаемъ уравненіе относительно той неизвѣстной, у которой коэффиціентъ меньше, и изъ полученной формулы исключаемъ цѣлую часть; получаемъ:

$$y=\frac{211-17x}{8}=26+\frac{3}{8}-2x-\frac{x}{8}=26-2x+\frac{3-x}{8}.$$

Для того, чтобы, при цѣломъ x, y также было цѣлымъ числомъ необходимо, чтобы $\frac{3-x}{8}$ было цѣлымъ числомъ; положимъ

$\frac{3-x}{8}=t$, гдѣ t— нѣкоторое цѣлое число;

тогда

$$y=26-2x+t$$

$$3-x=8t \quad \dots\dots\dots \quad (\beta)$$

$$-x=8t-3$$

$$x=3-8t$$

Подставляемъ въ формулу, опредѣляющую y, вмѣсто x, его выраженіе въ t и получаемъ:

$$y=26-2(3-8t)+t=26-6+16t+t=20+17t.$$

Итакъ:

$$x=3-8t$$

$$y=20+17t.$$

Теперь, для того, чтобы опредѣлить положительныя значенія x и y, удовлетворяющія данному уравненію, составляемъ неравенства:

$$\begin{cases} 3-8t>0 \\ 20+17t>0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} -8t>-3 & 20>-17t \\ t<\frac{3}{8} & t>-\frac{20}{17}=-1\frac{3}{17} \end{array}$$

$$\frac{3}{8}>t>-1\frac{3}{17}.$$

Значитъ, для t можно взять только два значенія: 0 и —1. Соотвѣтствующія имъ значенія x и y приведены въ таблицѣ:

$t=$	0	-1
$x=$	3	11
$y=$	20	3

$$2)\ 7x-11y=5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$x=\frac{5+11y}{7}=\frac{5}{7}+y+\frac{4}{7}y=y+\frac{5+4y}{7}=y+t \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{5+4y}{7}=t;\ 5+4y=7t \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

$$y=\frac{7t-5}{4}=t-1+\frac{3t}{4}-\frac{1}{4}=t-1+\frac{3t-1}{4}=t-1+t'. \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{3t-1}{4}=t';\ 3t-1=4t' \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

$$t=\frac{4t'+1}{3}=t'+\frac{t'+1}{3}=t'+t'' \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\frac{t'+1}{3}=t'';\ t'=3t''-1 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Черезъ послѣдовательную подстановку формулъ (4), (3), (2) и (1) находимъ:

$$t'=3t''-1$$
$$t=3t''-1+t''=4t''-1$$
$$y=4t''-1-1+3t''-1=7t''-3$$
$$x=7t''-3+4t''-1=11t''-4$$

Если мы желаемъ найти не только цѣлыя, но и положительныя рѣшенія, то мы должны положить

$7t''-3>0$	$11t''-4>0$
$7t''>3$	$11t''>4$
$t''>\frac{3}{7}$	$t''>\frac{4}{11}$

Такимъ образомъ, за t'' мы можемъ взять любое положительное цѣлое число и потому получаемъ безчисленное множество цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній даннаго уравненія; всѣ эти рѣшенія можно выразить слѣдующею таблицею:

$t''=$	1	2	3	и т. д.
$x=$	7	18	29	и т. д.
$y=$	4	11	18	и т. д.

Сравнивая въ разсмотрѣнныхъ примѣрахъ уравненія (α), (β), (γ), мы замѣчаемъ, что меньшій коэффиціентъ перваго (даннаго) уравненія становится бо́льшимъ коэффиціентомъ во второмъ уравненіи; меньшимъ же коэффиціентомъ второго уравненія является остатокъ, полученный отъ дѣленія бо́льшаго коэффиціента даннаго уравненія на меньшій.

Меньшій коэффиціентъ второго уравненія становится въ свою очередь бо́льшимъ коэффиціентомъ третьяго уравненія, меньшимъ коэффиціентомъ котораго является остатокъ, полученный отъ дѣленія меньшаго коэффиціента даннаго уравненія на первый остатокъ, и т. д.

Такъ какъ коэффиціенты даннаго неопредѣленнаго уравненія числа взаимно-простыя, то при такомъ послѣдовательномъ дѣленіи мы непремѣнно дойдемъ до остатка, равнаго единицѣ, а слѣдовательно, и до уравненія, въ которомъ одинъ изъ коэффиціентовъ будетъ единица.

Неопредѣленное уравненіе $ax+by=c$ легко рѣшить, если одинъ изъ коэффиціентовъ невеликъ, также при помощи теоремы § 49.

Пусть $a<b$; рѣшая уравненіе относительно x, получаемъ $x=\frac{c-by}{a}\cdot$ Теперь будемъ подставлять вмѣсто y, послѣдовательно, числа ряда: $0, 1, 2 \ldots (a-1)$, до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до такого y, при которомъ x будетъ цѣлымъ. Найдя такимъ образомъ одно частное рѣшеніе, мы затѣмъ, по формуламъ § 50, составимъ и общія рѣшенія.

§ 53. **Упрощенія, встрѣчающіяся при рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій 1-ой степени съ двумя неизвѣстными.**

I. Если въ уравненіи $ax+by=c$ одинъ изъ коэффиціентовъ и извѣстный членъ имѣютъ общаго множителя, то уравненіе можно упростить, раздѣливъ его на этого общаго множителя.

Примѣры.

1) Дано уравненіе: $35x-17y=42$.

Раздѣливъ обѣ части уравненія на общаго множителя у коэффиціента при x и извѣстнаго члена, получаемъ:

$$5x-\frac{17}{7}y=6 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Для того, чтобы лѣвая часть уравненія (1) была цѣлымъ числомъ при цѣлыхъ x и y, необходимо, чтобы y было кратнымъ 7, такъ какъ 17 и 7 числа взаимно-простыя.

Положимъ

$$y=7y',$$

гдѣ y' цѣлое число.

Подставляя въ уравненіе (1), вмѣсто y, его выраженіе въ y', получаемъ уравненіе: $5x-17y'=6$, которое проще даннаго. Рѣшивъ послѣднее уравненіе и найдя формулу цѣлыхъ рѣшеній y', мы умножимъ ее на 7 и получимъ формулу цѣлыхъ рѣшеній y, которая вмѣстѣ съ формулою цѣлыхъ рѣшеній x и даетъ общее рѣшеніе даннаго уравненія.

2) Дано уравненіе $33x-34y=187$.

33 и 187 имѣютъ общаго дѣлителя 11; поэтому раздѣлимъ обѣ части даннаго уравненія на 11 и получимъ уравненіе:

$$3x-34\frac{y}{11}=17.$$

Замѣняемъ $\frac{y}{11}$ черезъ y'; тогда уравненіе приметъ видъ:

$$3x-34y'=17.$$

34 и 17 имѣютъ общаго дѣлителя 17; поэтому, раздѣливъ обѣ части полученнаго уравненія на 17, придемъ къ уравненію:

$$3\cdot\frac{x}{17}-2y'=1.$$

Замѣнимъ $\frac{x}{17}$ черезъ x'; тогда уравненіе приметъ видъ:

$$3x'-2y'=1.$$

Рѣшивъ послѣднее уравненіе и найдя формулы цѣлыхъ рѣшеній x' и y', мы умножимъ первую на 17, а вторую на 11 и получимъ общія рѣшенія даннаго уравненія.

II. Если въ формулѣ, выражающей неизвѣстную, по исключеніи цѣлой части, мы получимъ дробь, члены числителя которой имѣютъ общаго множителя, то слѣдуетъ этого множителя вынести за скобки и обозначить черезъ t дробь безъ этого множителя.

Примѣръ.

Дано уравненіе: $7x+17y=41$.

$$x=5+\frac{6}{7}-2y-\frac{3y}{7}=5-2y+\frac{6-3y}{7}=5-2y+3\left(\frac{2-y}{7}\right).$$

Приравнявъ $\frac{2-y}{7}$ неизвѣстному цѣлому числу t, получимъ:

$$x=5-2y+3t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

кромѣ того, мы имѣемъ уравненіе:

$$7t+y=2 \text{ или } y=2-7t.$$

Подставивъ въ уравненіе (1) найденное выраженіе y въ t, получаемъ:

$$x=5-4+14t+3t=1+17t.$$

III. При исключеніи цѣлой части изъ дроби, выражающей неизвѣстную, можно пользоваться отрицательными остатками; напримѣръ, вмѣсто тождества $17=5 \,.\, 3+2$ взять тождество $17=5 \,.\, 4-3$.

Если отрицательный остатокъ по абсолютной величинѣ меньше положительнаго, то иногда выгодно взять отрицательный остатокъ вмѣсто положительнаго.

Примѣръ.

Пусть $x=\frac{41+26y}{7}=5+\frac{6}{7}+3y+\frac{5y}{7}=5+3y+\frac{6+5y}{7}$ . . . (1)

Пользуясь отрицательными остатками, мы можемъ выразить x другою формулою:

$$x=\frac{41+26y}{7}=6-\frac{1}{7}+4y-\frac{2y}{7}=6+4y-\frac{1+2y}{7} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Мы видимъ, что вторая формула приведетъ насъ къ болѣе простому уравненію: $\frac{1+2y}{7}=t$.

Въ этомъ примѣрѣ еще лучше взять отрицательный остатокъ у коэффиціента при y и сохранить положительный, хотя и большій по абсолютной величинѣ у извѣстнаго члена. Тогда x выразится формулою:

$$x=5+\frac{6}{7}+4y-\frac{2y}{7}=5+4y+2\,.\,\frac{3-y}{7}=5+4y+2t\;\ldots\ldots\;(3)$$

гдѣ

$$t=\frac{3-y}{7}\,.$$

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

Степени и корни.

§ 54.

Нулевые и отрицательные показатели.

Въ главѣ III (§ 22) мы вывели слѣдующія тождества, показывающія, какъ надо поступать при дѣленіи двухъ степеней одного и того же количества, если показатели степеней цѣлыя положительныя числа:

$$a^m : a^p = a^{m-p}, \text{ если } m > p$$

$$a^m : a^p = 1, \text{ если } m = p$$

$$a^m : a^p = \frac{a^m}{a^p}, \text{ если } m < p$$

Съ цѣлью установить единство правила для всѣхъ трехъ случаевъ, тѣмъ болѣе, что намъ можетъ быть и не извѣстно, равны показатели или нѣтъ и который изъ нихъ больше, если они не равны, условились распространить правило дѣленія двухъ степеней одного и того же количества, выведенное для того случая, когда $m > p$, и на случаи, когда $m = p$ и когда $m < p$.

При наличности такого соглашенія, мы для всѣхъ трехъ случаевъ получаемъ одно и то же тождество:

$$a^m : a^p = a^{m-p}.$$

Примѣняя правило дѣленія двухъ степеней одного и того же количества для того случая, когда $m = p$, мы приходимъ къ равенству

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0,$$

т.-е. приходимъ къ степени съ нулевымъ показателемъ.

Такъ какъ $a^m : a^m = 1$, то подъ количествомъ съ нулевымъ показателемъ, которое, конечно, не подходитъ подъ опредѣленіе степени, какъ произведенія равныхъ множителей, должно разумѣть условное выраженіе единицы.

Примѣняя правило дѣленія двухъ степеней одного и того же количества для того случая, когда $m < p$, мы приходимъ къ количеству съ отрицательнымъ показателемъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $p = m + q$; тогда

$$a^m : a^p = a^{m-(m+q)} = a^{-q}.$$

Съ другой стороны, мы знаемъ, что

$$a^m : a^p = \frac{a^m}{a^p} = \frac{a^m}{a^{m+q}} = \frac{1}{a^q}.$$

Отсюда мы приходимъ къ заключенію, что подъ количествомъ съ отрицательнымъ показателемъ надо разумѣть условное выраженіе дроби, у которой числитель равенъ 1, а знаменатель представляетъ степень того же количества съ положительнымъ показателемъ, равнымъ по абсолютной величинѣ данному отрицательному.

Такимъ образомъ, согласно установленнымъ опредѣленіямъ, мы можемъ писать

$$\mathbf{a}^0 = 1$$

$$\mathbf{a}^{-q} = \frac{1}{\mathbf{a}^q}.$$

§ 55. **Дѣйствія надъ количествами съ отрицательными показателями.**

Теперь надо показать, что дѣйствія надъ количествами съ цѣлыми отрицательными показателями производятся по тѣмъ же правиламъ, какъ и дѣйствія надъ количествами съ цѣлыми положительными показателями.

Такъ какъ при сложеніи и вычитаніи приходится производить дѣйствія лишь надъ коэффиціентами, то безразлично, каковы будутъ показатели, и потому все, что касается сложенія и вычитанія алгебраическихъ выраженій, въ которыя входятъ количества съ цѣлыми положительными показателями, распространяется и на такія алгебраическія выраженія, въ которыя входятъ количества съ цѣлыми отрицательными показателями.

Обратимся къ умноженію и дѣленію.

При умноженіи двухъ степеней одного и того же количества съ цѣлыми показателями мы имѣемъ четыре случая:

1) $a^m \,.\, a^p$.
2) $a^{-m} \,.\, a^p$,
3) $a^m \,.\, a^{-p}$,
4) $a^{-m} \,.\, a^{-p}$

гдѣ m и p цѣлыя положительныя числа.

Первый случай представляетъ извѣстный уже намъ случай умноженія двухъ степеней одного и того же количества съ цѣлыми положительными показателями.

1) $a^m \,.\, a^p = a^{m+p}$

2) $a^{-m} \,.\, a^p = \frac{1}{a^m} \cdot a^p = \frac{a^p}{a^m} = a^{p-m} = a^{(-m)+p}$

3) $a^m \,.\, a^{-p} = a^m \,.\, \frac{1}{a^p} = \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} = a^{m+(-p)}$

4) $a^{-m} \,.\, a^{-p} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{m+p}} = a^{-(m+p)} = a^{(-m)+(-p)}$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что правило умноженія двухъ степеней одного и того же количества съ цѣлыми показателями не зависитъ отъ того, будутъ-ли эти показатели положительныя или отрицательныя числа. Итакъ, каковы бы ни были цѣлыя числа m и p

$$a^m \,.\, a^p = a^{m+p}.$$

При дѣленіи двухъ степеней одного и того же количества съ цѣлыми показателями мы имѣемъ также четыре случая:

1) $a^m : a^p$
2) $a^{-m} : a^p$
3) $a^m : a^{-p}$
4) $a^{-m} : a^{-p}$

гдѣ m и p цѣлыя положительныя числа.

Первый случай представляетъ извѣстный уже намъ случай дѣленія двухъ степеней одного и того же количества съ положительными показателями.

1) $a^m : a^p = a^{m-p}$

2) $a^{-m} : a^p = \frac{1}{a^m} : a^p = \frac{1}{a^m \cdot a^p} = \frac{1}{a^{m+p}} = a^{-(m+p)} = a^{(-m)-p}$

3) $a^m : a^{-p} = a^m : \frac{1}{a^p} = a^m \cdot a^p = a^{m+p} = a^{m-(-p)}$

4) $a^{-m} : a^{-p} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^p} = \frac{a^p}{a^m} = a^{p-m} = a^{(-m)-(-p)}$

Отсюда мы заключаемъ, что правило дѣленія двухъ степеней одного и того же количества съ цѣлыми показателями не зависитъ отъ того, будутъ-ли показатели положительныя или отрицательныя числа.

Итакъ, каковы бы ни были цѣлыя числа m и p,

$$a^m : a^p = a^{m-p}$$

Пользуясь отрицательными показателями, мы можемъ:

a) дробное выраженіе представить въ цѣломъ видѣ:

Примѣры.

1) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = ab^{-1}$

2) $\frac{2a^2b}{c^3} = 2a^2b \cdot \frac{1}{c^3} = 2a^2bc^{-3}$

b) переносить въ дробномъ выраженіи множители изъ числителя въ знаменатель и обратно, измѣняя при этомъ знаки у показателей этихъ множителей:

Примѣръ.

$$\frac{a^p}{b^q} = \frac{1}{b^q \cdot \frac{1}{a^p}} = \frac{1}{a^{-p}b^q} = \frac{b^{-q}}{a^{-p}}$$

Мы знаемъ (§ 12), что

§ 56.

Возвышеніе въ степень одночленовъ. — Правило знаковъ при возвышеніи въ степень алгебраическихъ чиселъ.

1) $(+a)^m=+a^m$ при какомъ угодно цѣломъ положительномъ m;

2) $(-a)^m=+a^m$, когда m четное положительное число;

3) $(-a)^m=-a^m$, когда m нечетное положительное число. Покажемъ, что правило знаковъ остается то же самое и въ томъ случаѣ, когда показатель m—цѣлое отрицательное число. Пусть $m=-m_1$, гдѣ m_1—цѣлое положительное число.

Тогда 1) $(+a)^m=(+a)^{-m_1}=\dfrac{1}{(+a)^{m_1}}$;

но $(+a)^{m_1}>0$, значитъ и дробь $\dfrac{1}{(+a)^{m_1}}=(+a)^m>0$.

2) $(-a)^m=(-a)^{-m_1}=\dfrac{1}{(-a)^{m_1}}$;

при m четномъ $(-a)^{m_1}>0$, а потому и дробь $\dfrac{1}{(-a)^{m_1}}=(-a)^m>0$;

при m нечетномъ $(-a)^{m_1}<0$, а потому и дробь $\dfrac{1}{(-a)^{m_1}}=(-a)^m<0$.

Итакъ,

$(+a)^m=+a^m$ при какомъ угодно цѣломъ m;

$(-a)^m=+a^m$, когда m—четное число;

$(-a)^m=-a^m$, когда m—нечетное число.

Этотъ выводъ можно выразить еще такъ:

Четная степень всякаго положительнаго или отрицательнаго числа есть число положительное; знакъ же нечетной степени совпадаетъ со знакомъ основанія.

Возвышеніе степени въ степень.

Теперь покажемъ, какъ возвысить цѣлую степень [1]) какого-либо количества въ цѣлую степень. При этомъ намъ придется отдѣльно разсмотрѣть случай, когда показатель степени, въ которую возвышаютъ, положительное число, и когда этотъ показатель—отрицательное число; знакъ же показателя степени, которую возвышаютъ, безразличенъ.

---

[1]) Цѣлою степенью называется такая степень, показатель которой цѣлое число; степень называется положительною или отрицательною въ зависимости отъ того, будетъ-ли ея показатель положительное или отрицательное число.

Итакъ, пусть $m>0$; тогда $(a^p)^m = \underbrace{a^p a^p \ldots a_p}_{} = a^{\overbrace{p+p \ldots +p}^{m}} =$ $= a^{pm}$. Пусть теперь $m<0$; тогда, полагая $m=-m_1$, гдѣ m_1 цѣлое положительное число, получаемъ: $(a^p)^m = (a^p)^{-m_1} =$

$$= \frac{1}{(a^p)^{m_1}} = \frac{1}{a^{pm_1}} = a^{-pm_1} = a^{p\cdot(-m_1)} = a^{pm}.$$

Итакъ, **для того, чтобы возвысить цѣлую степень какого-либо количества въ цѣлую же степень, надо оставить то же основаніе, а показателемъ взять произведеніе показателей степеней;**

такимъ образомъ,

$(a^p)^m = a^{pm}$, каковы бы ни были цѣлыя числа p и m.

Возвышеніе въ степень произведенія и дроби.

Разсмотримъ сначала возвышеніе произведенія и дроби въ цѣлую положительную степень.

Итакъ, пусть $p>0$; тогда

1) $(ABC)^p = \underbrace{ABC\cdot ABC \cdots ABC}_{p} = \underbrace{AA\cdots A}_{p} \cdot \underbrace{BB\cdots B}_{p} \cdot \underbrace{CC\cdots C}_{p} =$ $= A^p B^p C^p$ (A, B, C—какія угодно количества);

2) $\left(\frac{A}{B}\right)^p = \underbrace{\frac{A}{B}\cdot\frac{A}{B}\cdots\frac{A}{B}}_{p} = \frac{A\cdot A\cdots A}{B\cdot B\cdots B} = \frac{A^p}{B^p}$ (A и B—какія угодно количества).

Теперь пусть $p<0$ и пусть $p=-p_1$, гдѣ $p_1>0$; тогда

1) $(ABC)^p = (ABC)^{-p_1} = \frac{1}{(ABC)^{p_1}} = \frac{1}{A^{p_1}.B^{p_1}.C^{p_1}} = \frac{1}{A^{p_1}}\cdot\frac{1}{B^{p_1}}\cdot\frac{1}{C^{p_1}} =$ $= A^{-p_1}.B^{-p_1}.C^{-p_1} = A^pB^pC^p.$

2) $$\left(\frac{A}{B}\right)^p = \left(\frac{A}{B}\right)^{-p_1} = \frac{1}{\left(\frac{A}{B}\right)^{p_1}} = \frac{1}{\frac{A^{p_1}}{B^{p_1}}} = \frac{B^{p_1}}{A^{p_1}} = \frac{A^{-p_1}}{B^{-p_1}} = \frac{A^p}{B^p}.$$

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующимъ правиламъ возвышенія въ цѣлую степень произведенія и дроби:

1) **Для того, чтобы возвысить въ цѣлую степень произведеніе нѣскольких количествъ, надо возвысить въ эту степень каждаго множителя и полученныя степени перемножить.**

2) Для того, чтобы возвысить въ цѣлую степень дробь, надо отдѣльно возвысить въ эту степень числителя и отдѣльно знаменателя и первую степень раздѣлить на вторую.

Пользуясь этими правилами, а также умѣя возвышать степень какого-либо количества въ степень, мы можемъ возвысить въ цѣлую степень какой угодно одночленъ, цѣлый или дробный. **Возвышеніе въ степень одночленовъ.**

Примѣры.

1) $(-2a^3b^2c)^5 = -2^5(a^3)^5(b^2)^5c^5 = -32a^{15}b^{10}c^5.$

2) $\left(-\frac{3a^{-2}b^p}{5c^4}\right)^{-3} = -\frac{(3a^{-2}b^p)^{-3}}{(5c^4)^{-3}} = -\frac{3^{-3}a^6b^{-3p}}{5^{-3}c^{-12}} = -\frac{5^3a^6c^{12}}{3^3b^{3p}} =$

$= -\frac{125a^6c^{12}}{27b^{3p}}.$

Такимъ образомъ, чтобы возвысить въ степень одночленъ, надо:

1) опредѣлить знакъ степени,

2) возвысить въ данную степень коэффиціенты,

3) показателей всѣхъ буквенныхъ множителей умножить на показателя степени.

§ 57. **Возвышеніе въ квадратъ многочленовъ.**

Всякій многочленъ можно, какъ извѣстно, представить въ видѣ алгебраической суммы; поэтому достаточно вывести формулу, выражающую квадратъ многочлена, только для того случая, когда всѣ члены многочлена соединены знакомъ сложенія.

1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$

$(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = a^2+2a\,.\,(-b)+b^2 = a^2-2ab+b^2.$

2) $(a+b+c)^2 = [(\underbrace{a+b}_{S})+c]^2 = (S+c)^2 = S^2+2Sc+c^2 =$

$= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 = \underbrace{a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2}_{\text{формула 1-ая.}} =$

$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 =$

$= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ .... (формула 2-ая).

3) $(\underbrace{a+b+c}_{s}+d) = (S+d)^2 = S^2+2Sd+d^2 = (a+b+c)^2+$

$+2(a+b+c)d+d^2 = \underbrace{a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2}_{\text{формула 1-ая.}} =$

$= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+$

$+2bc+2bd+2cd$ .... (формула 2-ая) и т. д.

Формула 1-я читается такъ: **квадратъ многочлена равенъ квадрату перваго члена, плюсъ (+) удвоенное произведеніе перваго члена на второй, плюсъ (+) квадратъ второго члена, плюсъ (+) удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на третій, плюсъ (+) квадратъ третьяго члена, плюсъ (+) удвоенное произведеніе суммы первыхъ трехъ членовъ на четвертый, плюсъ (+) квадратъ четвертаго члена, плюсъ (+) и т. д.**

Формула 2-ая читается такъ: **квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ, сложенной съ удвоенными произведеніями каждаго члена на всѣ послѣдующіе члены.**

Легко доказать, что обѣ выведенныя формулы справедливы для многочлена, имѣющаго какое угодно число членовъ. Допустимъ, что эти формулы справедливы для многочлена: $a+b+c+\cdots+k$, имѣющаго n членовъ; обозначимъ $a+b+$ $+c+\cdots+k$ черезъ S.

Прибавляя новый членъ l, получимъ многочленъ $S+l$, имѣющій $n+1$ членовъ, квадратъ котораго $(S+l)^2=S^2+2Sl+l^2$.

Послѣднее равенство доказываетъ справедливость обѣихъ формулъ для многочлена, имѣющаго $(n+1)$ членовъ; въ самомъ дѣлѣ:

1) Выраженіе S^2, по допущенію, содержитъ квадраты всѣхъ данныхъ n членовъ, но мы имѣемъ еще членъ l^2, слѣдовательно будемъ имѣть квадраты всѣхъ $n+1$ членовъ; далѣе, S^2 содержитъ удвоенныя произведенія перваго члена, суммы двухъ, трехъ и т. д. первыхъ членовъ на послѣдующій, но мы имѣемъ еще членъ $2Sl$, представляющій удвоенное произведеніе суммы n первыхъ членовъ на l, т.-е. $(n+1)$-ый членъ. Итакъ, мы видимъ, что 1-ая формула справедлива.

2) Въ выраженіе S^2 входятъ квадраты всѣхъ первыхъ n членовъ и удвоенныя произведенія всѣхъ этихъ членовъ, по два; далѣе, имѣемъ l^2, т.-е. квадратъ $(n+1)$-аго члена и выраженіе $2Sl=2(a+b+c+\cdots+k)\cdot l$, которое, по раскрытіи скобокъ, принимаетъ видъ: $2al+2bl+2cl+\cdots+2kl$, т.-е. оказывается равнымъ суммѣ удвоенныхъ произведеній всѣхъ n первыхъ членовъ на $(n+1)$-ый членъ. Слѣдовательно, 2-ая формула также справедлива.

Такъ какъ обѣ формулы выведены непосредственно для четырехъ членовъ, то заключаемъ, что эти формулы будутъ справедливы для 5, 6 и т. д. членовъ.

Примѣръ.

$$\left(a^2-\frac{1}{2}ab+3b^2\right)^2=(a^2)^2+\left(-\frac{1}{2}ab\right)^2+(3b^2)^2+2a^2\left(-\frac{1}{2}ab\right)+$$
$$+2a^2\,.\,3b^2+2\left(-\frac{1}{2}ab\right)\,.\,3b^2=a^4+\frac{1}{4}a^2b^2+9b^4-a^3b+6a^2b^2-$$
$$-3ab^3=a^4+6{,}25a^2b^2+9b^4-a^3b-3ab^3.$$

Извлеченіе корня изъ одночленовъ. § 58.

Извлеченіе корня изъ одночлена. Опредѣленіе корня.

Корнемъ цѣлой положительной степени n изъ количества a называется такое количество, n-ая степень котораго равна a.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго находятъ корни, называется, какъ мы уже знаемъ (§ 4), **извлеченіемъ корня** и обозначается знакомъ $\sqrt{}$.

Число n называется **показателемъ корня**, число a—**подкореннымъ количествомъ.**

Выраженіе $\sqrt[n]{a}$ надо разсматривать, и какъ обозначеніе дѣйствія, и какъ результатъ этого дѣйствія; поэтому, согласно опредѣленія корня, имѣемъ слѣдующее равенство:

$$\left(\sqrt[n]{\mathrm{a}}\right)^n=\mathrm{a}.$$

Различныя значенія корня.

a) Корень четной степени изъ положительнаго количества имѣетъ два значенія, различающіяся только знаками. Это слѣдуетъ изъ того, что количества съ равными абсолютными величинами и разными знаками, будучи возвышены въ четную степень, даютъ одно и то же положительное количество.

Примѣры.

1) $\sqrt{4}=+2$ и $\sqrt{4}=-2$ или $\sqrt{4}=\pm 2$.

2) $\sqrt[4]{a^4}=\pm a$, потому что $(+a)^4=+a^4$ и $(-a)^4=+a^4$.

b) Корень четной степени изъ отрицательнаго количества не можетъ быть выраженъ никакимъ положительнымъ и никакимъ отрицательнымъ числомъ, потому что четная степень всякаго положительнаго и отрицательнаго количества есть положительное количество.

Корень четной степени изъ отрицательнаго количества называется **мнимымъ количествомъ**.

Такъ, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[2n]{-a}$ суть мнимыя количества.

c) Корень нечетной степени имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и подкоренное количество.

Примѣры.

$$\sqrt[3]{+8}=+2;\ \sqrt[3]{-8}=-2;\ \sqrt[5]{+a^5}=a;\ \sqrt[5]{-a^5}=-a\ ^{1)}.$$

Извлеченіе корня изъ степени. При извлеченіи корня изъ степени надо различать два случая:

1) когда показатель подкоренного количества дѣлится на показателя корня;

2) когда показатель подкоренного количества не дѣлится на показателя корня.

Въ первомъ случаѣ корень представляетъ степень того же основанія, какое имѣетъ подкоренное количество, показатель которой равенъ частному, полученному отъ дѣленія показателя подкоренного количества на показателя корня.

Пусть $p=kn$; тогда $\sqrt[n]{a^p}=a^k$ и $\sqrt[n]{a^{-p}}=a^{-k}$.

Въ справедливости этихъ равенствъ мы убѣждаемся, возвысивъ правыя части этихъ равенствъ въ степень n.

$$(a^k)^n=a^{kn}=a^p,$$
$$(a^{-k})^n=a^{-kn}=a^{-p}.$$

Такъ какъ мы въ результатѣ получили подкоренныя количества, значитъ корни извлечены вѣрно.

Во второмъ случаѣ нельзя представить корень въ видѣ цѣлой степени того же основанія, какое имѣетъ подкоренное количество.

Допустимъ, что $\sqrt[n]{a^p}=a^k$, гдѣ k нѣкоторое цѣлое число; тогда $\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^n=a^{kn}$, или $a^p=a^{kn}$, откуда $p=kn$, что противорѣчитъ условію.

---

1) Вопросъ о различныхъ значеніяхъ корня и о числѣ этихъ значеній разсмотрѣнъ ниже.

Такіе корни, у которыхъ показатель подкоренного количества не дѣлится на показателя корня, называются **неизвлекомыми корнями или радикалами**. Въ дальнѣйшемъ курсѣ мы разсмотримъ тѣ преобразованія, которыя можно дѣлать съ радикалами.

Извлеченіе корня изъ произведенія и дроби.

Для того, чтобы извлечь корень изъ произведенія, надо извлечь корень отдѣльно изъ каждаго множителя и полученныя количества перемножить.

Такимъ образомъ, $\sqrt[n]{ABC}=\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B}\cdot\sqrt[n]{C}.$

Въ справедливости полученнаго результата мы убѣждаемся, возвысивъ найденное выраженіе корня въ n-ую степень:

$$\left(\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B}\cdot\sqrt[n]{C}\right)^n=\left(\sqrt[n]{A}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{B}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{C}\right)^n=ABC.$$

Мы получили подкоренное количество, значитъ найденное выраженіе корня есть, дѣйствительно, корень n-ой степени изъ даннаго произведенія.

Для того, чтобы извлечь корень изъ дроби, надо извлечь корень отдѣльно изъ числителя и знаменателя ея, и первый корень раздѣлить на второй.

Такимъ образомъ, $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$

Въ справедливости полученнаго результата мы убѣждаемся, возвысивъ найденное выраженіе корня въ n-ую степень.

$$\left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{A}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{B}\right)^n}=\frac{A}{B}.$$

Мы получили подкоренное количество, значитъ найденное выраженіе корня есть, дѣйствительно, корень n-ой степени изъ данной дроби.

Извлеченіе корня изъ одночлена.

[illegible] Извлеченіе корня изъ какого-либо одночлена приводится къ извлеченію корня изъ степени, произведенія и дроби, поэтому мы приходимъ къ слѣдующему правилу извлеченія корня изъ одночлена.

Для того, чтобы извлечь корень изъ одночлена, надо извлечь корень изъ коэффиціента и раздѣлить показатели всѣхъ множителей одночлена на показателя корня.

Правило, разумѣется, предполагаетъ, что подкоренное количество такой одночленъ, показатели всѣхъ множителей котораго дѣлятся на показателя корня.

Если данный одночленъ дробный, то надо отдѣльно извлечь корень изъ числителя и знаменателя, и первый корень раздѣлить на второй.

Примѣры.

1) $\sqrt[3]{8a^3b^6} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6} = 2ab^2.$

2) $\sqrt[3]{-64a^9b^{12}c^{15}} = -4a^3b^4c^5.$

3) $\sqrt[7]{a^{-14}(b-c)^{7x}} = a^{-2}(b-c)^x.$

4) $\sqrt[5]{\dfrac{32a^{-10}b^{5m}}{c^{5n+15}}} = \dfrac{\sqrt[5]{32a^{-10}b^{5m}}}{\sqrt[5]{c^{5n+15}}} = \dfrac{2a^{-2}b^m}{c^{n+3}}.$

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

Извлеченіе квадратнаго и кубическаго корня.

I. Извлеченіе квадратнаго корня изъ чиселъ.

§ 59.

Соотношеніе между числомъ цифръ даннаго числа, его квадрата и квадратнаго изъ него корня.

Теорема 1. **Если цѣлое число имѣетъ m цифръ, то квадратъ его имѣетъ $2m$ цифръ или $2m-1$ цифръ.**

Разсмотримъ эту теорему сперва на частныхъ примѣрахъ:

1) Возьмемъ какое-нибудь однозначное число a.

Такъ какъ однозначное число равно 1 или заключается между 1 и 10, т.-е.

$$1 \leqslant a < 10,$$

то

$$1 \leqslant a^2 < 100.$$

Слѣдовательно, квадратъ однозначнаго числа, будучи равенъ 1 или заключаясь между 1 и 100, содержитъ одну или двѣ цифры. Напр.:

$$3^2=9;\ 6^2=36.$$

2) Возьмемъ какое-нибудь двузначное число b.

Такъ какъ двузначное число равно 10 или заключается между 10 и 100, т.-е.

$$10 \leqslant b < 100,$$

то

$$100 \leqslant b^2 < 10000.$$

Слѣдовательно, квадратъ двузначнаго числа, будучи равенъ 100 или заключаясь между 100 и 10000, содержитъ 3 или 4 цифры. Напр.:

$$12^2=144;\ 83^2=6889.$$

Положимъ теперь, что число N имѣетъ m цифръ; очевидно, число N равно 10^{m-1} или заключается между 10^{m-1} и 10^m. Слѣдовательно,

$$(10^{m-1})^2 \leqslant N^2 < (10^m)^2 \text{ или } 10^{2m-2} \leqslant N^2 < 10^{2m};$$

но число 10^{2m-2} есть наименьшее число, имѣющее $2m-1$ цифръ, а 10^{2m} наименьшее число, имѣющее $2m+1$ цифръ, поэтому неравенства показываютъ, что N^2 будетъ имѣть $2m-1$ или $2m$ цифръ, т.-е., что квадратъ числа имѣетъ вдвое болѣе цифръ, чѣмъ самое число или вдвое болѣе безъ одной.

Теорема 2 (обратная). **Если цѣлое число, имѣющее m цифръ, есть квадратъ другого цѣлаго числа, то число цифръ послѣдняго равно** $\frac{m}{2}$ или $\frac{m+1}{2}$.

Положимъ, число N имѣетъ m цифръ и пусть $N=B^2$. Обозначимъ число цифръ B черезъ x; тогда, по предыдущей теоремѣ, имѣемъ одно изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$1)\ 2x=m;\ \text{откуда } x=\frac{m}{2},$$

$$2)\ 2x-1=m;\ \text{откуда } x=\frac{m+1}{2}.$$

Первая формула примѣняется, когда m четное число, а вторая, когда m нечетное число.

§ 60.

Опредѣленіе квадратнаго корня. Основныя теоремы.

Квадратнымъ корнемъ (точнымъ) изъ даннаго числа называется такое число, квадратъ котораго равенъ данному числу.

Напримѣръ: 3 есть квадратный корень изъ 9 или $3=\sqrt{9}$, такъ какъ $3^2=9$; $\frac{2}{3}$ есть квадратный корень изъ $\frac{4}{9}$ или $\frac{2}{3}=$ $=\sqrt{\frac{4}{9}}$, такъ какъ $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

Теорема 1. **Точный квадратный корень изъ цѣлаго числа есть цѣлое число.** Это слѣдуетъ изъ того, что квадратъ несократимой дроби есть также несократимая дробь. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\frac{a}{b}$ несократимая дробь (если-бы $\frac{a}{b}$ была сократимая дробь, то мы могли-бы замѣнить ее равною ей по величинѣ несократимою дробью, которая получится, если мы числителя и знаменателя данной дроби раздѣлимъ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя); тогда квадратъ ея, равный $\frac{a^2}{b^2}$, будетъ также несократимая дробь, такъ какъ, если a и b взаимно простыя числа, то и квадраты ихъ взаимно простыя числа.

Теорема 2. **Квадратный корень изъ дроби, числитель и знаменатель которой представляютъ квадраты нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ, равенъ дроби, члены которой суть квадратные корни соотвѣтствующихъ членовъ данной дроби.**

Пусть дана дробь $\frac{p^2}{q^2}$. Очевидно, $\sqrt{\frac{p^2}{q^2}}=\frac{p}{q}$, такъ какъ $\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{p^2}{q^2}$.

Опредѣленіе числа цифръ въ квадратномъ корнѣ изъ цѣлаго числа.

На основаніи 2-ой теоремы § 59 мы всегда можемъ опредѣлить число цифръ въ квадратномъ корнѣ изъ цѣлаго числа, по числу цифръ этого послѣдняго.

А именно, если подкоренное число содержитъ одну или двѣ цифры, то квадратный корень содержитъ только одну цифру; если подкоренное число содержитъ 3 или 4 цифры, то квадратный корень изъ него содержитъ двѣ цифры и т. д., и вообще, если подкоренное число содержитъ $2m$ или $2m-1$ цифръ, то квадратный корень изъ этого числа содержитъ m цифръ. Значитъ, для того, чтобы опредѣлить число цифръ въ квадратномъ корнѣ, надо раздѣлить на 2 число цифръ подкоренного числа, если это число цифръ четное, и раздѣлить на 2 число цифръ подкоренного числа, увеличенное единицею, если число цифръ подкоренного числа нечетное.

§ 61.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ однозначныхъ и двузначныхъ чиселъ.

Составимъ таблицу квадратовъ однозначныхъ чиселъ:

$$1^2=1;\ 2^2=4;\ 3^2=9;\ 4^2=16;\ 5^2=25;\ 6^2=36;\ 7^2=49;\ 8^2=64;\ 9^2=81.$$

Эта таблица даетъ вмѣстѣ съ тѣмъ квадратные корни изъ слѣдующихъ однозначныхъ и двузначныхъ чиселъ: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 и 81. Такимъ образомъ, квадратный корень изъ одного изъ этихъ чиселъ находится непосредственно въ таблицѣ; напр., $\sqrt{36}=6$, $\sqrt{64}=8$ и т. д. Ни изъ какого другого однозначнаго или двузначнаго числа извлечь точнаго квадратнаго корня нельзя. Напримѣръ, мы захотѣли-бы извлечь квадратный корень изъ 44; мы не найдемъ такого цѣлаго числа, а, согласно 1-й теоремѣ § 59, не найдемъ и дроби, квадратъ которыхъ былъ бы равенъ 44. Въ такомъ случаѣ ставятъ другую задачу, а именно ищутъ два такихъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, между квадратами которыхъ находится число 44. Такими числами оказываются 6 и 7, такъ какъ $6^2<44<7^2$.

Меньшее изъ этихъ чиселъ (6) называется приближеннымъ значеніемъ квадратнаго корня изъ 44 съ точностью до 1, съ недостаткомъ, а большее (7)—приближеннымъ значеніемъ квадратнаго корня изъ 44 съ точностью до 1, съ избыткомъ.

Вообще, если N какое-нибудь цѣлое число, которое не представляетъ квадрата какого-либо другого цѣлаго числа, то квадратнаго корня изъ него извлечь нельзя, но всегда можно найти два такихъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа a и $a+1$, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ $a^2<N<(a+1)^2$.

Правило извлеченія точнаго квадратнаго корня изъ цѣлаго числа, если это число представляетъ точный квадратъ, и приближеннаго корня съ точностью до 1 изъ цѣлаго числа, непредставляющаго точнаго квадрата, какъ мы сейчасъ увидимъ, одно и то же, и потому мы можемъ приступить къ извлеченію квадратнаго корня, не зная, представляетъ-ли подкоренное число точный квадратъ, или нѣтъ, подобно тому, какъ, приступая къ дѣленію одного цѣлаго числа на другое, мы можемъ не знать, дѣлится первое число на второе, или нѣтъ.

§ 62. **Извлеченіе двузначнаго и многозначнаго корня.**

Извлеченіе двузначнаго и многозначнаго корня основывается на слѣдующей теоремѣ:

Теорема. **Число десятковъ корня равно точному или приближенному квадратному корню, съ точностью до 1, съ недостаткомъ, изъ числа сотенъ подкоренного числа** [1]).

Для того, чтобы корень былъ двузначное или многозначное число, подкоренное число должно имѣть не менѣе трехъ цифръ. Поэтому подкоренное число можно выразить формулою $100a+10b+c$, гдѣ b и c однозначныя числа, число же a можетъ быть и многозначнымъ. Обозначивъ число десятковъ корня черезъ x, а число единицъ

[1]) Приведенное здѣсь доказательство теоремы принадлежитъ Н. С. Герману.

черезъ y, при чемъ y должно быть однозначное число, а x можетъ быть и многозначнымъ числомъ, получаемъ слѣдующія неравенства:

$$(10x+y)^2 \leqq 100a + 10b + c < (10x + y + 1)^2.$$

Знакъ равенства соотвѣтствуетъ здѣсь тому случаю, когда под коренное число представляетъ точный квадратъ.

Требуется доказать, что $x^2 \leqq a < (x+1)^2$.

Для доказательства перваго неравенства воспользуемся равенствомъ.

$$100a + 10b + c = (10x+y)^2 + R, \text{ гдѣ } R \geqq 0,$$

или

$$100a + 10b + c = 100x^2 + 2 \,.\, 10x \,.\, y + y^2 + R,$$

откуда

$$10b + c = (100x^2 - 100a) + 2 \,.\, 10x \,.\, y + y^2 + R.$$

Если $x^2 > a$, то $100x^2 > 100a$ и, такъ какъ x^2 и a суть числа цѣлыя, то $100x^2 - 100a = 100\ (x^2 - a) \geqq 100$, а потому

$$10b + c \geqq 100 + 2 \,.\, 10xy + y^2 + R.$$

Но это неравенство невозможно, такъ какъ въ правой части его мы имѣемъ число не меньшее 100, а въ лѣвой части двузначное число.

Итакъ, $x^2 \leqq a$.

Для доказательства второго неравенства воспользуемся неравенствомъ:

$$100a + 10b + c < (10x + y + 1)^2,$$

или

$$100a + 10b + c < 100x^2 + 2 \cdot 10x(y+1) + (y+1)^2.$$

Прибавимъ къ правой части и отнимемъ отъ нея число $(100 \cdot 2x + 100)$; получимъ:

$$100a + 10b + c < 100x^2 + 100 \cdot 2x + 100 + \{ [2 \cdot 10x\,(y+1) +$$

$$+ (y+1)^2] - [100 \cdot 2x + 100] \}.$$

Докажемъ, что величина, стоящая въ ломанныхъ скобкахъ, есть число отрицательное или нуль. Легко видѣть, что эта величина, при опредѣленномъ значенiи x, возрастаетъ съ возрастанiемъ значенiя y и достигаетъ своего наибольшаго значенiя при наибольшемъ значенiи y. Но y есть однозначное число и, слѣдовательно, наибольшее его значенiе равно 9.

Подставивъ значенiе y, равное 9, получаемъ:

$$2 \cdot 10x \cdot 10 + 10^2] - [100 \cdot 2x + 100] = 0.$$

Итакъ, наибольшее значеніе числа, стоящаго въ ломанныхъ скобкахъ, есть нуль, а потому, отбросивъ это число, мы ни въ какомъ случаѣ не уменьшимъ правой части неравенства, а слѣдовательно, неравенство не нарушится, и мы будемъ имѣть:

$$100a + 10b + c < 100(x+1)^2.$$

а значитъ, и подавно

$$100a < 100(x+1)^2$$

или

$$a < (x+1)^2.$$

Второе неравенство доказано и, слѣдовательно:

$x^2 \leqq a < (x+1)^2$, что и требовалось доказать.

Извлеченіе двузначнаго квадратнаго корня.

Для того, чтобы квадратный корень былъ число двузначное, подкоренное число, какъ мы знаемъ, должно быть трехзначнымъ или четырехзначнымъ.

Пусть дано извлечь квадратный корень изъ 5474; мы не знаемъ, представляетъ-ли 5474 точный квадратъ, и потому ставимъ вопросъ въ такомъ видѣ: найти такое цѣлое число a, которое удовлетворяло-бы условію: $a^2 \leqq 5474 < (a+1)^2$. Если разность $5474 - a^2$ окажется равною 0, то a будетъ точный квадратный корень изъ 5474; въ противномъ случаѣ a будетъ приближенный квадратный корень изъ 5474 съ точностью до 1, съ недостаткомъ.

Искомое число a есть число двузначное [1]) и потому можетъ быть представлено въ видѣ $10x + y$, гдѣ x — число десятковъ, а y — число единицъ.

Обозначивъ разность $5474 - a^2$ черезъ R, получаемъ равенство

$$5474 = a^2 + R, \text{ гдѣ } R \geqq 0.$$

Подставивъ въ это равенство, вмѣсто a; $10x + y$, получаемъ:

$$5474 = (10x + y)^2 + R$$

или

$$5474 = 100x^2 + 2 \cdot 10xy + y^2 + R. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

По доказанной теоремѣ искомое число десятковъ x равно квадратному корню, точному или приближенному, съ точ-

---

[1]) a не можетъ имѣть болѣе двухъ цифръ, такъ какъ въ противномъ случаѣ a^2 содержало-бы болѣе четырехъ цифръ, а это противорѣчило-бы неравенству $a^2 \leqq 5474$; a не можетъ быть числомъ однозначнымъ, такъ какъ это противорѣчило-бы неравенству $5474 < (a+1)^2$.

ностью до 1, съ недостаткомъ, изъ числа сотенъ подкоренного числа; поэтому число x должно удовлетворять неравенствамъ:

$$x^2 \leqq 54 < (x+1)^2;$$

откуда

$$x = 7.$$

Теперь, найденное значенiе x подставимъ въ равенство (1), которое принимаетъ видъ: $5474 = 100 \cdot 7^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot y + y^2 + R$; вычитая изъ обѣихъ частей этого равенства $7^2 \cdot 100$, получаемъ равенство

$$574 = 2 \cdot 7y \cdot 10 + y^2 + R. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Теперь надо подыскать наибольшее цѣлое значенiе y, которое-бы удовлетворяло этому равенству. Разсматривая написанное равенство, мы видимъ, что y долженъ быть не болѣе $574:(14 \cdot 10)$ или не болѣе $57:14$. Такимъ образомъ, наибольшее значенiе, которое можетъ имѣть y, будетъ 4. Подставимъ это значенiе y въ равенство (2). Если R при этомъ будетъ больше или равно 0, то взятое значенiе y вѣрно; въ противномъ случаѣ, надо взять значенiе y на единицу меньшее и опять испытать его, и повторять это до тѣхъ поръ, пока R не будетъ больше или равно 0.

Итакъ, подставляемъ значенiе $y=4$ въ равенство (2) и получаемъ: $574 = 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 10 + 16 + R$; откуда $R = 574 - 560 - 16 = -2$. R оказалось числомъ отрицательнымъ, значитъ надо взять для y значенiе на единицу меньшее, т.-е. 3, и подставить его въ равенство (2); получаемъ

$$574 = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 10 + 9 + R;$$

откуда

$$R = 574 - 420 - 9 = 145.$$

Значитъ искомое число a равно 73, и это будетъ приближенный квадратный корень съ точностью до 1, съ недостаткомъ; найденное число должно удовлетворять неравенствамъ $a^2 < 5474 < (a+1)^2$.

Дѣйствительно,

$$73^2 < 5474 < 74^2.$$

Подыскиванiе значенiя y дѣлать удобнѣе, если представить равенство (2) въ видѣ:

$$574 = (2 \cdot 7 \cdot 10 + y)\, y + R;$$

тогда опредѣленіе значенія y приведется къ подыскиванію такого числа единицъ у числа, у котораго число десятковъ есть удвоенное число десятковъ корня, чтобы произведеніе искомаго числа на число единицъ не превысило 574.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему правилу извлеченія двузначнаго квадратнаго корня: **сначала надо извлечь квадратный корень изъ числа сотенъ подкоренного числа: полученный корень представитъ число десятковъ искомаго корня изъ даннаго числа; затѣмъ надо вычесть изъ числа сотенъ подкоренного числа квадратъ найденнаго числа десятковъ и къ разности приписать остальныя цифры подкоренного числа, въ результатѣ мы получимъ первый остатокъ. Теперь надо подыскать число, у котораго число десятковъ равно удвоенному числу десятковъ корня, а число единицъ должно быть таково, чтобы произведеніе искомаго числа на число его единицъ не превысило перваго остатка (полезно найти предварительно верхній предѣлъ числа единицъ корня, раздѣливъ число десятковъ перваго остатка на удвоенное число десятковъ корня). Вычтя полученное произведеніе изъ перваго остатка, мы получимъ второй остатокъ. Если этотъ остатокъ окажется равнымъ 0, то найденный корень будетъ точный квадратный корень изъ даннаго числа; въ противномъ же случаѣ, мы нашли приближенный корень съ точностью до 1, съ недостаткомъ.**

Самыя вычисленія обыкновенно располагаются такъ:

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{5474} \\
 & \;\;49 \\
\hline
143 & \;\;574 \\
3 & \;\;429 \\
\cline{2-2}
 & \;\;145
\end{array}$$

73 — приближенный квадратный корень изъ 5474 съ точностью до 1, съ недостаткомъ.

Другой примѣръ.

Извлечь квадратный корень изъ 1225.

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{1225} \\
 & \;\;9 \\
\hline
65 & \;\;325 \\
5 & \;\;325 \\
\cline{2-2}
 & \;\;\;0
\end{array}$$

35 — точный квадратный корень изъ 1225.

Для того, чтобы квадратный корень былъ многозначное число, подкоренное число должно содержать **5** и болѣе цифръ. Квадратный корень и въ этомъ случаѣ можетъ быть представленъ формулою $10x+y$, только x будетъ не однозначное число, какъ при извлеченіи двузначнаго квадратнаго корня, а двузначное или многозначное. **Извлеченіе многозначнаго квадратнаго корня.**

Для опредѣленія числа десятковъ корня, мы должны извлечь корень изъ числа сотенъ подкоренной величины. Число сотенъ будетъ теперь многозначное число, и потому дѣло приводится къ извлеченію квадратнаго корня изъ многозначнаго числа, имѣющаго на двѣ цифры менѣе, чѣмъ данное подкоренное число. Извлеченіе квадратнаго корня изъ числа сотенъ даннаго подкоренного числа приводится въ свою очередь къ извлеченію квадратнаго корня изъ числа, имѣющаго еще на двѣ цифры менѣе, и т. д. Такимъ образомъ, въ концѣ концовъ мы придемъ къ извлеченію квадратнаго корня изъ однозначнаго или двузначнаго числа.

Примѣры.

1)
$$
\begin{array}{r|r|l}
 & \sqrt{8'35'21} & 289 \text{ — точный квадратный корень изъ } 83521 \\
 & 4 & \\
\hline
48 & 435 & \\
8 & 384 & \\
\hline
569 & 5121 & \\
9 & 5121 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

2)
$$
\begin{array}{r|r|l}
 & \sqrt{20'15'11'29} & 4489 \text{ — приближенный квадратный корень изъ } 20151129 \text{ съ точностью до } 1 \text{, съ недостаткомъ.} \\
 & 16 & \\
\hline
84 & 415 & \\
4 & 336 & \\
\hline
888 & 7911 & \\
8 & 7104 & \\
\hline
8969 & 80729 & \\
9 & 80721 & \\
\hline
 & 8 &
\end{array}
$$

Изъ этихъ примѣровъ мы выводимъ слѣдующее правило извлеченія многозначнаго квадратнаго корня: **прежде всего надо раздѣлить подкоренное число на грани, отъ правой руки къ лѣ-**

вой, по двѣ цифры въ каждой грани, при чемъ послѣдняя грань можетъ имѣть и одну цифру. Затѣмъ надо найти первую цифру корня, опредѣляя по таблицѣ квадратовъ наибольшее цѣлое число, котораго квадратъ не превышаетъ первой слѣва грани, и квадратъ найденнаго числа вычесть изъ этой грани. Чтобы найти 2-ую, 3-ью, 4-ую и т. д. цифры корня, надо поступать такъ же, какъ мы поступали при извлеченіи двузначнаго квадратнаго корня. Если послѣдній остатокъ окажется равнымъ 0, то найденный корень представитъ точный квадратный корень изъ даннаго числа, а если послѣдній остатокъ не будетъ равенъ 0, то найденное число представитъ приближенный квадратный корень изъ даннаго числа съ точностью до 1, съ недостаткомъ.

§ 63.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ дробей и смѣшанныхъ чиселъ, представляющихъ полные квадраты.

Чтобы извлечь квадратный корень изъ дроби, числитель и знаменатель которой представляютъ полные квадраты, достаточно извлечь квадратный корень отдѣльно изъ числителя и знаменателя дроби, и первый корень раздѣлить на второй; напримѣръ:

$$\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}=\frac{5}{6}.$$

Чтобы извлечь квадратный корень изъ смѣшаннаго числа, представляющаго полный квадратъ, надо обратить смѣшанное число въ обыкновенную дробь и поступать по предыдущему правилу, напримѣръ:

$$\sqrt{70\frac{9}{64}}=\sqrt{\frac{4489}{64}}=\frac{\sqrt{4489}}{\sqrt{64}}=\frac{67}{8}.$$

Возьмемъ примѣръ извлеченія квадратнаго корня изъ десятичной дроби:

$$\sqrt{0{,}0169}=\sqrt{\frac{169}{10000}}=\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{10000}}=\frac{13}{100}=0{,}13.$$

Отсюда непосредственно слѣдуетъ правило: **чтобы извлечь квадратный корень, изъ десятичной дроби съ четнымъ числомъ цифръ послѣ запятой (что является необходимымъ условіемъ для того, чтобы десятичная дробь была полнымъ квадратомъ), надо извлечь квадратный корень изъ данной дроби, не обращая вниманія на запятую, и отдѣлить въ полученномъ числѣ, отъ правой руки къ лѣвой, запятою число цифръ, вдвое меньшее того, сколько ихъ было послѣ запятой въ данной дроби.**

Примѣры.

1) $\sqrt{25,9081}=5,09$;
2) $\sqrt{0,00651249}=0,0807$;
3) $\sqrt{0,0007311616}=0,02704$.

§ 64. Извлеченіе приближенныхъ квадратныхъ корней.

Приближенными значеніями квадратнаго корня изъ какого-либо числа N (цѣлаго или дробнаго), съ точностью до 1, называются два такихъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, между квадратами которыхъ заключается число N. Меньшее изъ этихъ чиселъ называется приближеннымъ значеніемъ съ недостаткомъ, а большее—съ избыткомъ.

Какъ находятъ приближенныя значенія квадратнаго корня съ точностью до 1 изъ цѣлыхъ чиселъ, мы уже знаемъ.

Докажемъ теперь, что извлеченіе квадратнаго корня съ точностью до 1 изъ смѣшаннаго числа приводится къ извлеченію квадратнаго корня съ точностью до 1 изъ цѣлой части этого смѣшаннаго числа.

Пусть смѣшанное число $N=N_1+q$, гдѣ N_1—цѣлая часть смѣшаннаго числа, а q—правильная дробь. Согласно опредѣленію, извлечь квадратный корень изъ числа N съ точностью до 1 значитъ найти цѣлое число a, удовлетворяющее неравенствамъ:

$$a^2<N<(a+1)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Не трудно видѣть, что это то же цѣлое число, которое удовлетворяетъ неравенствамъ:

$$a^2\leqq N_1<(a+1)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\text{если } a^2\leqq N_1, \text{ то } a^2<N;$$

съ другой стороны, если $(a+1)^2>N_1$, то

$$(a+1)^2>N,$$

такъ какъ $(a+1)^2$—цѣлое число и потому отличается отъ цѣлаго числа N_1 не менѣе, какъ на единицу, разность же $N-N_1=q<1$. Такимъ образомъ, цѣлое число a, удовлетворяющее неравенствамъ (2), удовлетворяетъ и неравенствамъ (1).

Итакъ, мы доказали, что извлеченіе квадратнаго корня изъ смѣшаннаго числа съ точностью до 1 приводится къ извлеченію квадратнаго корня съ точностью до 1 изъ цѣлой его части.

Примѣръ.

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{387\frac{1}{5}} \\ & 1 \\ \hline 29 & 287 \\ 9 & 261 \\ \hline & 26 \end{array}$$

19—приближенный квадратный корень изъ $387\frac{1}{5}$ съ точностью до 1, съ недостаткомъ.

Приближенныя значенія квадратнаго корня съ точностью до 1 изъ правильной дроби, очевидно, равны: 0 (съ недостаткомъ) и 1 (съ избыткомъ). Извлеченіе квадратнаго корня съ точностью до 1 изъ неправильной дроби приводится къ извлеченію квадратнаго корня изъ смѣшаннаго числа, такъ какъ неправильная дробь можетъ быть представлена въ видѣ смѣшаннаго числа.

Примѣръ.

$$\sqrt{\frac{2748}{13}}=\sqrt{211\frac{5}{13}}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 24 & 111 \\ 4 & 96 \\ \hline & 15 \end{array}$$

14 — приближенный квадратный корень изъ $\frac{2748}{13}$ съ точностью до 1, съ недостаткомъ.

Опредѣленіе. **Извлечь квадратный корень изъ числа N съ точностью до $\frac{1}{k}$, гдѣ k—любое цѣлое число, значитъ найти такую дробь $\frac{a}{k}$, у которой числитель a—цѣлое число, и которая удовлетворяла-бы неравенствамъ:**

$$\left(\frac{a}{k}\right)^2<N<\left(\frac{a+1}{k}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Умноживъ всѣ члены неравенствъ (3) на k^2, получимъ неравенства:

$$a^2<Nk^2<(a+1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Неравенства (3) и (4) являются слѣдствіями одно другого, и потому мы можемъ сказать, что рѣшеніе неравенствъ (3) приводится къ рѣшенію неравенствъ (4), т.-е. къ извлеченію квадратнаго корня съ точностью до 1 изъ числа Nk^2.

Отсюда мы получаемъ слѣдующее правило извлеченія квадратнаго корня съ точностью до $\frac{1}{k}$: **для того, чтобы извлечь квадратный корень изъ какого-либо числа съ точностью до $\frac{1}{k}$, надо умножить это число на k^2, изъ полученнаго произведенія извлечь квадратный корень съ точностью до 1 и найденное приближенное значеніе квадратнаго корня изъ числа Nk^2 съ точностью до 1, съ недостаткомъ, раздѣлить на число k. Полученная дробь $\frac{a}{k}$ и будетъ приближенное значеніе квадратнаго корня изъ числа N съ точностью до $\frac{1}{k}$, съ недостаткомъ; дробь $\frac{a+1}{k}$ будетъ приближенное значеніе квадратнаго корня изъ числа N съ точностью до $\frac{1}{k}$, съ избыткомъ.**

Примѣры.

1) Вычислить $\sqrt{2}$ съ точностью до 0,001.

$$\sqrt{2 \,.\, 1000^2} = \sqrt{2'00'00'00'} \mid 1414.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
24 & 100 \\
4 & 96 \\
\hline
281 & 400 \\
1 & 281 \\
\hline
2824 & 11900 \\
4 & 11296 \\
\hline
 & 604
\end{array}$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt{2} = \dfrac{1414}{1000} = 1{,}414 \text{ съ недостаткомъ} \\
\sqrt{2} = \dfrac{1415}{1000} = 1{,}415 \text{ съ избыткомъ}
\end{array}\right\} \text{съ точностью до } 0{,}001.$$

2) Вычислить $\sqrt{\frac{8}{11}}$ съ точностью до 0,01.

$$\sqrt{\frac{8}{11} \,.\, 100^2} = \sqrt{\frac{80000}{11}} = \sqrt{7272\frac{8}{11}}$$

$$\sqrt{7272\frac{8}{11}} \mid 85$$

$$\begin{array}{r|r}
 & 64 \\
\hline
165 & 872 \\
5 & 825 \\
\hline
 & 47
\end{array}$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{8}{11}}=\frac{85}{100}&=0{,}85 \text{ съ недостаткомъ}\\ \sqrt{\frac{8}{11}}=\frac{86}{100}&=0{,}86 \text{ съ избыткомъ}\end{aligned}\right\}\text{ съ точностью до } 0{,}01.$$

3) Вычислить $\sqrt{0{,}231}$ съ точностью до 0,001

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{0{,}231\,.\,1000000}=\sqrt{23'10'00} & 480 \\ 16 & \\ \hline 88 \mid 710 & \\ 8 \mid 704 & \\ \hline 960 \mid 600 & \\ 0 \mid & \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{0{,}231}&=0{,}480 \text{ съ недостаткомъ}\\ \sqrt{0{,}231}&=0{,}481 \text{ съ избыткомъ}\end{aligned}\right\}\text{ съ точностью до } 0{,}001.$$

§ 65.

II. Извлеченіе кубическаго корня изъ чиселъ

Опредѣленіе числа цифръ куба цѣлаго числа и числа цифръ кубическаго корня изъ цѣлаго числа.

Теорема 1. **Если цѣлое число имѣетъ m цифръ, то его кубъ имѣетъ $3m$, $3m-1$ или $3m-2$ цифръ.**

Положимъ, число A имѣетъ m цифръ; тогда оно равно 10^{m-1} или заключается между 10^{m-1} и 10^m.

Слѣдовательно, $10^m > A \geqq 10^{m-1}$.

Возвысимъ члены этихъ неравенствъ въ кубъ; получаемъ

$$(10^m)^3 > A^3 \geqq (10^{m-1})^3$$

или

$$10^{3m} > A^3 \geqq 10^{3m-3}.$$

Такъ какъ 10^{3m} есть наименьшее число, имѣющее $3m+1$ цифръ, а 10^{3m-3} есть наименьшее число, имѣющее $3m-2$ цифры, то изъ этихъ неравенствъ слѣдуетъ, что число A^3 имѣетъ $3m$, $3m-1$ или $3m-2$ цифръ.

Теорема 2. **Если цѣлое число имѣетъ m цифръ и есть кубъ другого цѣлаго числа, то это послѣднее будетъ имѣть число цифръ, выражающееся одною изъ формулъ: $\frac{m}{3}$, $\frac{m+1}{3}$ и $\frac{m+2}{3}$.**

Положимъ, что A имѣетъ m цифръ и пусть $A=B^3$. Обозначимъ число цифръ B черезъ x. На основаніи предыдущей теоремы, получаемъ одно изъ трехъ равенствъ:

$$3x=m;\qquad \text{откуда } x=\frac{m}{3}$$

$$3x-1=m;\ \text{откуда } x=\frac{m+1}{3}$$

$$3x-2=m;\ \text{откуда } x=\frac{m+2}{3}$$

Опредѣленіе. **Кубическимъ корнемъ (точнымъ) изъ какого-либо числа N называется число, кубъ котораго равенъ числу N. Приближеннымъ кубическимъ корнемъ изъ числа N съ точностью до 1, съ недостаткомъ, называется цѣлое число a, удовлетворяющее неравенствамъ $a^3<N<(a+1)^3$. Число $(a+1)$ будетъ приближеннымъ корнемъ съ точностью до 1, съ избыткомъ.**

Согласно теоремѣ 2-ой, для того, чтобы опредѣлить число цифръ кубическаго корня изъ цѣлаго числа, надо раздѣлить подкоренное число на грани, отъ правой руки къ лѣвой, по 3 цифры въ каждой (послѣдняя грань можетъ имѣть и двѣ, и одну цифры); тогда, сколько получимъ граней, столько цифръ будетъ имѣть и корень.

§ 66.

Извлеченіе однозначнаго кубическаго корня.

Напишемъ таблицу кубовъ однозначныхъ чиселъ:

$1^3=1$; $2^3=8$; $3^3=27$; $4^3=64$; $5^3=125$; $6^3=216$; $7^3=343$; $8^3=512$; $9^3=729$.

Однозначный кубическій корень, точный или приближенный, съ точностью до 1, находятъ непосредственно по таблицѣ кубовъ.

Примѣры.

1) $\sqrt[3]{27}=3$;

2) $\sqrt[3]{512}=8$;

3) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{572}=8, \text{ съ недостаткомъ}\\ \sqrt[3]{572}\ \ 9, \text{ съ избыткомъ}\end{array}\right\}$ съ точностью до 1,

такъ какъ $8^3=572<9^3$.

§ 67. **Извлеченіе двузначнаго и многозначнаго кубическаго корня.**

Положимъ, дано извлечь $\sqrt[3]{9268}$, т.-е. найти точный кубическій корень, если подкоренное число точный кубъ, или приближенный кубическій корень съ точностью до 1, если подкоренное число не представляетъ точнаго куба. Такъ какъ данное подкоренное число содержитъ 4 цифры, то кубическій корень изъ него будетъ число двузначное [1]).

Обозначимъ число десятковъ корня черезъ x, а число единицъ черезъ y. Слѣдовательно, $(10x+y)^3=9268-R$ (если подкоренное число точный кубъ, $R=0$).

Такимъ образомъ, имѣемъ

$$1000x^3+300x^2y+30xy^2+y^3+R=9268 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

Изъ этого равенства выводимъ:

$$1000x^3 \leqq 9000; \quad x^3 \leqq 9.$$

Въ таблицѣ кубовъ отыскиваемъ наибольшее число, кубъ котораго не превышаетъ 9; находимъ $x=2$.

Найдя x, вычисляемъ $1000x^3$; найденное число, равное 8000, вычитаемъ изъ обѣихъ частей равенства (1) и получаемъ:

$$300x^2y+30xy^2+y^3+R=1268 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Изъ этого равенства выводимъ: $300x^2y \leqq 1200$

$$3x^2y \leqq 12; \quad y \leqq \frac{12}{3x^2};$$

подставляя вмѣсто x найденное его значеніе, получаемъ

$$y \leqq 12:12; \quad y=1.$$

Найденныя значенія x и y подставляемъ въ равенство (2) и получаемъ равенство: $1200+60+1+R=1268$; откуда $R=7$. Значитъ, число 21 есть приближенный кубическій корень изъ 9268 съ точностью до единицы, съ недостаткомъ.

Изъ разсмотрѣннаго примѣра выводимъ правило извлеченія двузначнаго кубическаго корня: **чтобы найти число десятковъ корня, надо по таблицѣ кубовъ подыскать наибольшее цѣлое число, кубъ котораго не превышаетъ первой грани.**

Единицы же корня находятъ посредствомъ дѣленія числа сотенъ остатка на утроенный квадратъ числа десятковъ корня, при чемъ за число единицъ надо взять цѣлую часть частнаго,

[1]) Здѣсь надо сдѣлать замѣчаніе, аналогичное замѣчанію на стр. 142 (примѣчаніе).

не превышающую 9, и подставить это число вмѣсто y въ равенство (2). Если R окажется нулемъ или положительнымъ числомъ, то число единицъ корня найдено вѣрно; въ противномъ случаѣ, надо уменьшить предполагаемое значеніе y на единицу и опять подставить въ равенство (2), и поступать такъ до тѣхъ поръ, пока послѣдній остатокъ R не окажется нулемъ или числомъ положительнымъ.

Методъ извлеченія двузначнаго кубическаго корня распространяется и на извлеченіе многозначнаго корня совершенно такъ же, какъ и для квадратнаго корня.

Примѣръ.

$$\sqrt[3]{9'938'375} = 215$$

$$\begin{array}{rl}
2^3 \ldots 8 & \\
3\,.\,2^2 = 12 & |\,1938 \;\ldots\; \text{1-ый остатокъ,} \\
3\,.\,2^2\,.\,1 & |\,12 \\
 & \;\;738 \\
3\,.\,2\,.\,1^2\,.\,.\;6 & \\
1^3 \quad 1 & \\
3\,.\,21^2 = 1323 & |\,677375 \;\ldots\; \text{2-ой остатокъ,} \\
3\,.\,21^2\,.\,5 & |\,6615 \\
 & \;\;15875 \\
3\,.\,21\,.\,5^2\,.\,.\,.\,.\,.\,1575 & \\
5^3 \qquad 125 & \\
 & \;\;0 \;\ldots\; \text{3-ій остатокъ.}
\end{array}$$

§ 68.

Извлеченіе кубическаго корня изъ дроби.

Чтобы извлечь кубическій корень изъ дроби (обыкновенной или десятичной, имѣющей число десятичныхъ знаковъ, кратное трехъ), представляющей полный кубъ, достаточно извлечь кубическій корень отдѣльно изъ числителя и знаменателя, и первый корень раздѣлить на второй.

Напримѣръ:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}; \quad \sqrt[3]{0{,}729} = 0{,}9.$$

Извлеченіе кубическаго корня изъ смѣшаннаго числа или изъ неправильной дроби, не представляющихъ точныхъ кубовъ, приводится на основаніи разсужденій, подобныхъ тѣмъ, которыя мы имѣли въ статьѣ объ извлеченіи квадратнаго корня, къ извлеченію кубическаго корня, съ точностью до 1, изъ цѣлой части смѣшаннаго числа.

§ 69. Извлеченіе приближенныхъ кубическихъ корней.

Опредѣленіе. **Извлечь кубическій корень изъ числа N съ точностью до $\frac{1}{k}$, гдѣ k — любое цѣлое число, значитъ найти такую дробь $\frac{a}{k}$, у которой числитель a цѣлое число и которая удовлетворяла бы неравенствамъ:**

$$\left(\frac{a}{k}\right)^3 < N < \left(\frac{a+1}{k}\right)^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Умноживъ всѣ члены неравенствъ (3) на k^3, получаемъ неравенства:

$$a^3 < Nk^3 < (a+1)^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Неравенства (3) и (4) являются слѣдствіями одно другого, и потому мы можемъ сказать, что рѣшеніе неравенствъ (3) приводится къ рѣшенію неравенствъ (4), т.-е. къ извлеченію кубическаго корня, съ точностью до 1, изъ числа Nk^3.

§ 70. Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочлена.

III. Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочлена.

Извлечь квадратный корень изъ многочлена значитъ найти такой многочленъ, квадратъ котораго былъ-бы равенъ данному многочлену.

Пріемъ извлеченія квадратнаго корня изъ многочлена выводится изъ формулы квадрата многочлена.

Расположимъ данный многочленъ P по возрастающимъ или убывающимъ степенямъ главной буквы.

Обозначимъ искомый квадратный корень черезъ $A+B+$ $+C+D+\ldots$ Этотъ многочленъ предполагаемъ расположеннымъ такимъ же образомъ, по степенямъ главной буквы.

1) Такъ какъ, по опредѣленію, $(A+B+C+\ldots)^2=P$, то заключаемъ, что первые члены этихъ многочленовъ (какъ высшіе или низшіе) равны, т.-е. A^2 равно первому члену многочлена P; слѣдовательно, **чтобы найти первый членъ корня, т.-е. A, достаточно извлечь квадратный корень изъ 1-го члена многочлена P.**

2) Обозначимъ алгебраическую сумму n первыхъ членовъ корня черезъ M, а такую же сумму остальныхъ членовъ этого корня черезъ N; получимъ

$$P=(M+N)^2=M^2+2MN+N^2;$$

откуда

$$P-M^2=2MN+N^2$$

или

$$P-M^2=(2M+N)N.$$

Изъ послѣдняго равенства заключаемъ, что остатокъ $P-M^2$ есть произведеніе двухъ многочленовъ, а именно $2M+N$ и N; поэтому первый членъ этого остатка равенъ произведенію первыхъ членовъ въ многочленахъ: $2M+N$ и N; а такъ какъ первый членъ въ многочленѣ $2M+N$ есть удвоенный первый членъ въ M, т.-е. удвоенный первый членъ корня A, а первый членъ въ N есть $(n+1)$-ый членъ корня, то, **раздѣливъ первый членъ остатка $P-M^2$ на удвоенный первый членъ корня, получимъ $(n+1)$-ый членъ корня.**

По этому правилу опредѣляются всѣ члены корня, начиная со второго.

Примѣръ.

$$\begin{array}{l r|l}
 & \sqrt{x^8-4x^7+4x^6-6x^5+14x^4-4x^3+9x^2-6x+1} & \sqrt{x^8}=x^4=A. \\
 & -x^8 & \\
\hline
P-A^2= & -4x^7+4x^6-6x^5+14x^4-4x^3+9x^2-6x+1 & -4x^7:2x^4=-2x^3=B \\
-(2A+B)B= & +4x^7-4x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
P-(A+B)^2= & -6x^5+14x^4-4x^3+9x^2-6x+1 & -6x^5:2x^4=-3x=C \\
-(2A+2B+C)C= & +6x^5-12x^4 \qquad -9x^2 \qquad\qquad & \\
\hline
P-(A+B+C)^2= & 2x^4-4x^3 \quad - \quad 6x+1 & 2x^4:2x^4=1=D \\
-(2A+2B+2C+D)D= & -2x^4+4x^3 \quad + \quad 6x-1 & \text{Искомый корень:} \\
\hline
 & 0 & x^4-2x^3-3x+1
\end{array}$$

Для перваго члена мы взяли только одно значеніе $+x^4$; но мы могли взять также $-x^4$; въ этомъ случаѣ остальные члены корня перемѣнили-бы знаки на обратные, и поэтому мы имѣли-бы корень: $-x^4+2x^3+3x-1$. Оба значенія корня можно соединить въ одну формулу: $\pm(x^4-2x^3-3x+1)$.

Изъ этого примѣра можно вывести слѣдующее правило извлеченія квадратнаго корня изъ многочлена:

Надо расположить многочленъ по возрастающимъ или убывающимъ степенямъ главной буквы. Затѣмъ, чтобы найти первый членъ корня, надо извлечь квадратный корень изъ перваго члена многочлена. Чтобы найти 2-й, 3-й, 4-й и т. д. члены корня, надо 1-й членъ соотвѣтствующаго остатка раздѣлить на удвоенный первый членъ

корня. а чтобы вычислить какой-нибудь остатокъ, надо удвоенную сумму найденныхъ членовъ корня сложить съ вновь найденнымъ членомъ корня; этотъ многочленъ умножить на вновь найденный членъ и полученное произведеніе вычесть изъ предшествующаго остатка.

Признаки невозможности извлеченія квадратнаго корня изъ многочлена.

1) Квадратный корень нельзя извлечь изъ двучлена.

2) Квадратный корень изъ многочлена не можетъ быть найденъ, если высшій или низшій члены многочлена не представляютъ точныхъ квадратовъ.

3) Квадратный корень изъ многочлена не можетъ быть найденъ, если во время дѣйствія получится остатокъ, первый членъ котораго не дѣлится на удвоенный первый членъ корня.

ГЛАВА ДВѢНАДЦАТАЯ.

О перемѣнныхъ величинахъ и ихъ предѣлахъ.

§ 71. **Постоянныя и перемѣнныя величины. Предѣлъ перемѣнной величины.**

Въ математикѣ приходится имѣть дѣло съ двоякаго рода величинами: 1) такими, которыя вообще не измѣняютъ своего значенія, напр., различныя числа 5, $\frac{3}{4}$, $\sqrt{2}$ и т. д., или не измѣняютъ значенія въ данномъ вопросѣ, напр., величина радіуса круга въ данномъ кругѣ; такого рода величины называются **постоянными**; и 2) такими, которыя въ одномъ и томъ же вопросѣ не сохраняютъ постояннаго значенія; такія величины называются **перемѣнными**.

Такія перемѣнныя величины, которыя, измѣняясь въ извѣстныхъ границахъ, могутъ получать въ этихъ границахъ любыя значенія, называются **непрерывными**.

Примѣромъ непрерывной перемѣнной величины можетъ служить длина хорды, которая въ данной окружности можетъ принимать любыя значенія отъ 0 до $2r$.

Перемѣнная величина, которая, измѣняясь, можетъ проходить только черезъ опредѣленныя значенія, минуя промежуточныя, называется **прерывистою**. Такая перемѣнная величина можетъ быть выражена рядомъ чиселъ, изъ которыхъ каждое представляетъ частное значеніе перемѣнной величины. Примѣромъ такого рода перемѣнныхъ величинъ можетъ служить періодическая десятичная дробь, напр., дробь $0,\dot{3}3\ldots$, которая можетъ быть представлена рядомъ конечныхъ десятичныхъ дробей:

$$0,3;\ 0,33;\ 0,333;\ldots;\ 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$$

Каждое изъ чиселъ этого ряда есть частное значеніе дроби 0,33 .

Если абсолютная величина разности между перемѣннымъ числомъ x и постояннымъ числомъ a, т.-е. $|x-a|$ можетъ сдѣлаться, и, при дальнѣйшихъ измѣненіяхъ x, остается менѣе произвольно малаго числа ε, то постоянное число a называется предѣломъ перемѣннаго числа x.

Пусть перемѣнное число x выражается рядомъ чиселъ: $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n \ldots$, гдѣ n любое цѣлое положительное число.

Примѣняя общее опредѣленіе предѣла перемѣннаго числа, мы можемъ сказать, что, если всегда, какое бы малое число ε ни было задано, можно найти цѣлое положительное число p, при которомъ, для всѣхъ значеній $n \geqq p$, абсолютная величина разности между перемѣннымъ числомъ x и постояннымъ a будетъ меньше ε, т.-е. $|x_n - a| < \varepsilon$, то перемѣнное число x имѣетъ предѣлъ, равный a.

Вмѣсто того, чтобы говорить, что перемѣнное число x, выражаемое рядомъ чиселъ: $x_1, x_2 \ldots, x_n \ldots$, имѣетъ предѣломъ число a, иногда говорятъ, что рядъ чиселъ: $x_1, x_2 \ldots, x_n \ldots$ стремится къ предѣлу, равному a.

Примѣры.

1) Пусть перемѣнное число x выражается рядомъ дробей:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

у которыхъ числитель на единицу болѣе знаменателя.

Обозначивъ знаменатель дроби черезъ n, будемъ имѣть

$$x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Всегда можно найти такое большое значеніе для n, при которомъ разность $x_n - 1 = 1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$ сдѣлается и, при дальнѣйшихъ измѣненіяхъ n, будетъ оставаться менѣе какъ угодно малаго числа ε (для этого достаточно взять $n > \frac{1}{\varepsilon}$).

Значитъ, перемѣнное число, выражаемое рядомъ (1), имѣетъ предѣлъ, равный 1.

2) Возьмемъ періодическую десятичную дробь 0,33. . .

Періодическая дробь 0,33... можетъ быть выражена рядомъ чиселъ:

$$0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ \ldots;\ 0{,}\underbrace{33\ldots3}_{n}.$$

Опредѣлимъ разности между постояннымъ числомъ $\frac{1}{3}$ и частными значеніями періодической дроби 0,33...

$$\frac{1}{3}-0{,}3=\frac{1}{30}=\frac{1}{3.10}$$

$$\frac{1}{3}-0{,}33=\frac{1}{300}=\frac{1}{3.10^2}$$

$$\frac{1}{3}-0{,}333=\frac{1}{3000}=\frac{1}{3.10^3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{3}-0{,}\underbrace{33\ldots3}_{n}=\frac{1}{3.10^n}.$$

Покажемъ, что всегда можно взять столь большое n, что $\frac{1}{3.10^n}$ будетъ меньше любого напередъ заданнаго, какъ угодно малаго, числа ε.

Раздѣливъ обѣ части неравенства $\frac{1}{3.10^n}<\varepsilon$ (1) на ε и умноживъ на 10^n, получимъ

$$10^n>\frac{1}{3\varepsilon}\ (2).$$

Неравенство (1) будетъ удовлетворено, если будетъ удовлетворено неравенство (2); послѣднему же неравенству, очевидно, всегда можно удовлетворить, взявъ достаточно большое значеніе для числа n.

При увеличеніи n разность $\frac{1}{3}-0{,}\underbrace{33\ldots3}_{n}$ будетъ только уменьшаться и потому неравенство (1) останется справедливымъ.

Отсюда слѣдуетъ, что періодическая дробь 0,33.... имѣетъ предѣлъ, равный $\frac{1}{3}$.

Для обозначенія того, что перемѣнное число x имѣетъ предѣлъ, равный a, пишутъ:

$$\text{пред. } x=a \text{ или } \lim x=a \text{ [1]).}$$

Такимъ образомъ, имѣемъ

$$\lim \frac{x+1}{x}=1; \ \lim 0{,}33\ldots=\frac{1}{3} \text{ и т. д.}$$

§ 72. **Величины: конечныя, безконечно-малыя и безконечно-большія.**

Безконечно-малою величиною называется такая перемѣнная величина, абсолютная величина которой можетъ сдѣлаться и при дальнѣйшихъ измѣненіяхъ остается менѣе произвольно малаго, напередъ заданнаго, положительнаго числа.

Такимъ образомъ, перемѣнное число x, выраженное рядомъ чиселъ: $x_1, x_2 \cdots, x_n \cdots$, будетъ безконечно-малой величиной, если всегда можно найти, какое бы малое число ε ни было задано, такое цѣлое положительное число p, при которомъ, для всѣхъ значеній $n \geqq p$, $|x_n|$ будетъ менѣе этого числа ε.

Такимъ образомъ, безконечно-малая величина, постоянно уменьшаясь, можетъ сколь угодно мало отличаться отъ 0, и потому 0 можно считать предѣломъ безконечно-малой величины.

Безконечно-большою величиною называется такая перемѣнная величина, абсолютная величина которой, увеличиваясь, можетъ превзойти и при дальнѣйшихъ измѣненіяхъ остается болѣе произвольно большого, напередъ заданнаго, положительнаго числа.

Такимъ образомъ, перемѣнное число x, выраженное рядомъ чиселъ: $x_1, x_2 \cdots, x_n \cdots$, будетъ безконечно-большой величиной, если всегда можно найти такое цѣлое положительное число p, при которомъ, для всѣхъ значеній $n \geqq p$, $|x_n|$ будетъ больше произвольно большого положительнаго числа A.

Безконечно-большія величины предѣла не имѣютъ.

Конечною перемѣнною величиною называется такая перемѣнная величина, абсолютная величина которой при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ не можетъ превзойти нѣкоторую постоянную величину, оставаясь въ то же время болѣе другой постоянной положительной величины.

---

[1]) Знакъ lim образуется начальными буквами французскаго слова limite, что значитъ предѣлъ.

Примѣромъ конечной перемѣнной величины можетъ служить періодическая десятичная дробь; при этомъ число періодовъ ея будетъ величина безконечно большая, а разность между періодическою дробью и ея предѣломъ безконечно малая.

Вообще, абсолютная величина разности между перемѣннымъ числомъ x и его предѣломъ a, согласно опредѣленію предѣла, есть величина безконечно малая, и потому соотношеніе между перемѣннымъ числомъ и его предѣломъ можетъ быть выражено равенствомъ: $|x-a|=\alpha$, гдѣ α — безконечно малое положительное число, то же соотношеніе можно выразить равенствомъ $x-a=\alpha$, подразумѣвая уже при этомъ подъ α безконечно малое число, положительное или отрицательное.

§ 73. Основныя теоремы, касающіяся безконечно малыхъ величинъ.

Теорема 1. **Произведеніе безконечно малой величины на конечную величину есть безконечно малая величина.**

Положимъ, даны величины: α—безконечно малая, k—конечная; надо доказать, что $k\alpha$ есть величина безконечно малая. Такъ какъ α есть безконечно малая величина, то всегда можно положить $|\alpha|<\left|\frac{\varepsilon}{k}\right|$, гдѣ ε есть произвольно малое, напередъ заданное, положительное число. Умноживъ неравенство $|\alpha|<\left|\frac{\varepsilon}{k}\right|$ на $|k|$, получимъ $|k\alpha|<\left|\frac{\varepsilon}{k}\right|\cdot|k|$ или $|k\alpha|<\varepsilon$. Это неравенство говоритъ намъ, что $|k\alpha|$ можетъ быть сдѣлано менѣе произвольно малаго положительнаго числа ε; слѣдовательно, $k\alpha$ есть безконечно малая величина.

Теорема 2. **Сумма конечнаго числа безконечно малыхъ величинъ есть безконечно малая величина.**

Положимъ, дано n безконечно малыхъ величинъ: α_1, α_2, α_3,. . .α_n. Надо доказать, что ихъ сумма: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n$ есть также безконечно малая величина.

Предположимъ, что данныя безконечно малыя величины количества положительныя, и выберемъ между ними наибольшую; положимъ, это будетъ α_3. Если мы замѣнимъ всѣ слагаемыя суммы $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)$ черезъ α_3, то получимъ новую сумму, которая будетъ больше данной; слѣдовательно, будемъ имѣть: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n<\underbrace{\alpha_3+\alpha_3+\alpha_3+\ldots+\alpha_3}_{n}$

или $$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n<n\alpha_3.$$

Но $n\alpha_3$, по теоремѣ 1-й, есть безконечно малая величина; слѣдовательно, изъ послѣдняго неравенства заключаемъ, что и сумма: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n$ есть величина безконечно малая. Очевидно, теорема останется справедливой и въ томъ случаѣ, когда нѣкоторыя изъ слагаемыхъ будутъ отрицательныя; поэтому заключаемъ, что **алгебраическая сумма безконечно малыхъ величинъ, взятыхъ въ конечномъ числѣ, есть величина безконечно малая.**

§ 74. **Главнѣйшія теоремы предѣлахъ.**

Теорема 1. **Если постоянная величина a заключается между двумя перемѣнными, разность между которыми есть величина безконечно малая, то a есть предѣлъ каждой изъ перемѣнныхъ.**

Положимъ, данныя перемѣнныя величины суть x и y; пусть $x>a>y$ и $x-y=\alpha$, гдѣ α безконечно малая величина.

Изъ данныхъ условій имѣемъ слѣдующія очевидныя неравенства:

$$x-a<x-y \text{ или } x-a<\alpha; \text{ откуда } \lim x=a$$
$$a-y<x-y \text{ или } a-y<\alpha; \text{ откуда } \lim y=a$$

Итакъ, обѣ перемѣнныя имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ a.

Теорема 2. **Если двѣ перемѣнныя величины при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ остаются равными между собою или отличаются на безконечно малую величину, то предѣлы ихъ равны.**

Дано: $\lim x=a$, $\lim y=b$ и $x=y$ при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ; требуется доказать, что $a=b$.

Изъ опредѣленія предѣла перемѣнной величины имѣемъ выраженія:

$x=a+\alpha$ и $y=b+\beta$, гдѣ α и β безконечно малыя величины.

Подставивъ въ равенство $x=y$, вмѣсто x и y, ихъ выраженія, получаемъ

$$a+\alpha=b+\beta,$$

откуда

$$a-b=\beta-\alpha.$$

Вторая часть этого равенства $\beta-\alpha$ есть величина безконечно малая или 0.

Слѣдовательно, и первая часть равенства $a-b$ должна быть величиною безконечно малою или равною 0; но безконечно малою величиною она быть не можетъ, такъ какъ разность двухъ постоянныхъ величинъ можетъ быть или величиною постоянною или равною 0. Поэтому равенство $a-b=\beta-\alpha$ можетъ имѣть мѣсто лишь въ томъ случаѣ, если обѣ части его равны 0.

Отсюда $a-b=0$ или $a=b$.

Такъ же доказывается теорема и въ томъ случаѣ, если двѣ перемѣнныя величины отличаются на безконечно малую величину.

Теорема 3. **Если двѣ перемѣнныя величины при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ имѣютъ постоянное отношеніе, то въ томъ же отношеніи находятся и ихъ предѣлы.**

Даны перемѣнныя x и y; пусть $\lim x=a$ и $\lim y=b$.

Согласно условію теоремы, x и y сохраняютъ постоянное отношеніе, напр., $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$.

Докажемъ, что $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$.

По опредѣленію предѣла, имѣемъ:

$$x=a+\alpha \text{ и } y=b+\beta,$$

гдѣ α и β безконечно малыя величины.

Подставивъ въ равенство $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$, вмѣсто x и y, ихъ значенія, получаемъ

$$\frac{a+\alpha}{b+\beta}=\frac{m}{n},$$

откуда
$$n(a+\alpha)=m(b+\beta)$$
или
$$na+n\alpha=mb+m\beta.$$

Такъ какъ $n\alpha$ и $m\beta$ безконечно малыя величины (§ 73, теор. 1), то

$$\lim\ (na+n\alpha)=na$$
и
$$\lim\ (mb+m\beta)=mb,$$

откуда, согласно предыдущей теоремѣ, имѣемъ

$$na=mb \text{ или } \frac{a}{b}=\frac{m}{n},$$

что̀ и требовалось доказать.

§ 75. Теоремы, на которыхъ основано нахожденіе предѣла суммы, разности, произведенія, частнаго, степени и корня изъ перемѣннаго числа.

Теорема 1. **Предѣлъ суммы конечнаго числа перемѣнныхъ величинъ равенъ суммѣ ихъ предѣловъ.**

Пусть даны n перемѣнныхъ величинъ: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$.

Положимъ, $\lim x_1=a_1, \lim x_2=a_2, \lim x_3=a_3, \ldots \lim x_n=a_n$.

По опредѣленію предѣла, имѣемъ

$$x_1=a_1+\alpha_1,\ x_2=a_2+\alpha_2,\ x_3=a_3+\alpha_3,\ \ldots\ x_n=a_n+\alpha_n,$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ безконечно малыя величины.

Сложивъ эти равенства, получимъ:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)+(\alpha_1+\alpha_2+ \\ +\alpha_3+\ldots+\alpha_n).$$

Такъ какъ $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)$ есть безконечно малая величина (§ 73, теор. 2), то изъ послѣдняго равенства заключаемъ, что

$$\lim (x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

или

$$\lim (x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)=\lim x_1+\lim x_2+\lim x_3+ \\ +\ldots+\lim x_n.$$

Теорема 2. **Предѣлъ разности перемѣнныхъ величинъ равенъ разности ихъ предѣловъ.**

Даны двѣ перемѣнныя величины: x_1 и x_2.

Пусть $\lim x_1=a_1$ и $\lim x_2=a_2$; тогда

$$x_1=a_1+\alpha_1 \text{ и } x_2=a_2+\alpha_2,$$

гдѣ α_1 и α_2 безконечно малыя величины.

Вычитая одно равенство изъ другого, получаемъ

$$x_1-x_2=(a_1-a_2)+(\alpha_1-\alpha_2).$$

Отсюда, такъ какъ $(\alpha_1-\alpha_2)$ величина безконечно малая, имѣемъ

$$\lim (x_1-x_2)=a_1-a_2=\lim x_1-\lim x_2.$$

Теорема 3. **Предѣлъ произведенія конечнаго числа перемѣнныхъ равенъ произведенію ихъ предѣловъ.**

Разсмотримъ сперва произведеніе двухъ сомножителей x_1 и x_2.

Пусть lim $x_1=a_1$ и lim $x_2=a_2$; тогда

$$x_1=a_1+\alpha_1 \text{ и } x_2=a_2+\alpha_2,$$

гдѣ α_1 и α_2 безконечно малыя величины.

Умножая одно равенство на другое, получаемъ

$$x_1x_2=(a_1+\alpha_1)(a_2+\alpha_2)=a_1a_2+(a_1\alpha_2+a_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2).$$

Такъ какъ выраженіе $(a_1\alpha_2+a_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2)$ есть безконечно малая величина (§ 73, теор. 1 и 2), то изъ послѣдняго равенства заключаемъ, что

$$\lim (x_1x_2)=a_1a_2=\lim x_1 \cdot \lim x_2.$$

Положимъ, даны три сомножителя: x_1, x_2, x_3; на основаніи предыдущаго случая, имѣемъ:

$$\lim (x_1x_2x_3)=\lim (x_1x_2) \cdot \lim x_3=\lim x_1 \cdot \lim x_2 \cdot \lim x_3.$$

Подобнымъ образомъ можно распространить теорему на всякое конечное число сомножителей.

Теорема 4. **Предѣлъ произведенія перемѣнной величины на постоянную равенъ произведенію предѣла перемѣнной величины на эту постоянную.**

Даны: перемѣнная величина x и постоянная p.

Пусть $\lim x=a$; тогда $x=a+\alpha$, гдѣ α безконечно малая величина. Умножая обѣ части этого равенства на p, получаемъ: $px=pa+p\alpha$; откуда, такъ какъ $p\alpha$ безконечно малая величина (§ 73, теор. 1), имѣемъ:

$$\lim (px)=pa=p\lim x.$$

Теорема 5. **Предѣлъ частнаго равенъ предѣлу дѣлимаго, раздѣленному на предѣлъ дѣлителя, если послѣдній не равенъ нулю.**

Обозначимъ частное отъ дѣленія перемѣнной величины x на перемѣнную величину y черезъ z, т.-е. положимъ $\dfrac{x}{y}=z$; тогда, $x=yz$.

По теоремѣ 3-й, имѣемъ:

$$\lim x=\lim (yz)=\lim y \cdot \lim z,$$

откуда
$$\lim z=\frac{\lim x}{\lim y};$$

слѣдовательно,
$$\lim\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\lim x}{\lim y}.$$

Теорема 6. **Предѣлъ дроби, у которой числитель постоянная величина, а знаменатель перемѣнная, равенъ дроби, имѣющей того же числителя, знаменатель которой равенъ предѣлу знаменателя данной дроби.**

Обозначивъ частное отъ дѣленія постоянной величины p на перемѣнную x черезъ z, имѣемъ

$$\frac{p}{x}=z, \text{ откуда } p=xz.$$

Пусть $\lim x=a$ и $\lim z=b$; тогда
$x=a+\alpha$ и $z=b+\beta$, гдѣ α и β безконечно малыя величины.

Перемноживъ эти равенства, имѣемъ

$$xz=(a+\alpha)(b+\beta)=p,$$

т.-е.

$$ab+(a\beta+b\alpha+\alpha\beta)=p.$$

Выраженіе, заключенное въ скобки, есть величина безконечно малая или 0, и потому $ab=p$;

откуда

$$b=\frac{p}{a}\text{ [1]}$$

или

$$\lim\left(\frac{p}{x}\right)=\frac{p}{\lim x}.$$

Теорема 7. **Предѣлъ степени, основаніе которой перемѣнное, а показатель постоянное и притомъ цѣлое число, равенъ той же степени предѣла основанія.**

---

[1]) Въ справедливости полученнаго результата можно убѣдиться, составивъ разность между перемѣннымъ числомъ $\frac{p}{x}$ и постояннымъ $\frac{p}{a}$. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{p}{x}-\frac{p}{a}=\frac{p}{a+\alpha}-\frac{p}{a}=\frac{pa-pa-p\alpha}{(a+\alpha)a}=-\frac{p\alpha}{(a+\alpha)a}=-\frac{p}{(a+\alpha)a}\cdot\alpha.$$

Послѣднее выраженіе представляетъ произведеніе конечной величины на безконечно малую и потому есть величина безконечно малая.

Итакъ, разность между $\frac{p}{x}$ и $\frac{p}{a}$ безконечно мала; значитъ, $\frac{p}{a}$ есть предѣлъ $\frac{p}{x}$.

Подставивъ найденныя значенія b и β въ выраженіе $(a\beta+b\alpha+\alpha\beta)$, мы убѣждаемся въ томъ, что эта сумма равна 0; въ самомъ дѣлѣ,

$$a\beta+b\alpha+\alpha\beta=a\cdot\frac{-p\alpha}{(a+\alpha)a}+\frac{p\alpha}{a}-\frac{\alpha\,.\,p\alpha}{(a+\alpha)a}=\frac{-ap\alpha+ap\alpha+p\alpha^2-p\alpha^2}{(a+\alpha)a}=0.$$

Предположимъ сначала, что показатель степени цѣлое положительное число. Обозначивъ перемѣнное основаніе черезъ x, а показатель степени черезъ m, имѣемъ:

$$\lim x^m = \lim (\underbrace{x \,.\, x \ldots x}_{m}) = \underbrace{\lim x \,.\, \lim x \ldots \lim x}_{m} = (\lim x)^m.$$

Теперь докажемъ теорему для того случая, когда показатель степени m цѣлое отрицательное число.

Пусть $m = -m_1$, гдѣ m_1 цѣлое положительное число; тогда

$$\lim x^m = \lim x^{-m_1} = \lim \left(\frac{1}{x^{m_1}}\right);$$

откуда, согласно теоремѣ 6-ой, получаемъ

$$\lim x^m = \frac{1}{\lim x^{m_1}} = \frac{1}{(\lim x)^{m_1}} = (\lim x)^{-m_1} = (\lim x)^m.$$

Теорема 8. **Предѣлъ корня изъ перемѣнной величины равенъ корню той же степени изъ предѣла подкоренной величины.**

Обозначивъ $\sqrt[n]{x}$, гдѣ x перемѣнное, а n постоянное цѣлое положительное число, черезъ z, имѣемъ: $\sqrt[n]{x} = z$; откуда $x = z^n$.

Примѣняя предыдущую теорему, получаемъ

$$\lim x = \lim z^n = (\lim z)^n.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей этого равенства корень n-ой степени, находимъ

$$\lim z = \sqrt[n]{\lim x}, \text{ т.-е. } \lim \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim x}.$$

А отсюда легко распространить теорему 7-ю на тотъ случай, когда показатель степени будетъ дробное число, т.-е. доказать, что $\lim x^{\frac{p}{q}} = (\lim x)^{\frac{p}{q}}$, если p цѣлое число, а q цѣлое и положительное число. Въ самомъ дѣлѣ, $\lim x^{\frac{p}{q}} = \lim \sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q]{\lim x^p} = \sqrt[q]{(\lim x)^p} = (\lim x)^{\frac{p}{q}}$.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ.

Объ ирраціональныхъ числахъ.

§ 76. **Ирраціональныя числа. Опредѣленіе ирраціональнаго числа.**

Какъ извѣстно изъ ариѳметики, мы можемъ разсматривать число, какъ результатъ измѣренія. Однимъ изъ простѣйшихъ случаевъ измѣренія будетъ измѣреніе отрѣзковъ прямой линіи. Измѣрить какой-либо отрѣзокъ значитъ найти отношеніе его къ другому отрѣзку, принятому за единицу. Если отрѣзокъ, принятый за единицу, или опредѣленная часть его, содержится цѣлое число разъ въ данномъ для измѣренія отрѣзкѣ, то отношеніе второго отрѣзка къ первому выразится цѣлымъ или дробнымъ числомъ. Но возможенъ и такой случай, когда ни отрѣзокъ, принятый за единицу, ни какая-либо опредѣленная часть его не содержится цѣлое число разъ въ данномъ для измѣренія отрѣзкѣ, и тогда отношеніе второго отрѣзка къ первому не можетъ выразиться ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ Съ такими случаями мы встрѣчаемся, между прочимъ, въ геометріи, когда опредѣляемъ отношеніе діагонали квадрата къ его сторонѣ, или отношеніе стороны квадрата или правильнаго треугольника, вписанныхъ въ кругъ, къ радіусу этого круга; или, наконецъ. отношеніе длины окружности круга къ его діаметру. Обратимъ вниманіе на то, что отношеніе діагонали квадрата къ его сторонѣ равно $\sqrt{2}$, а отношеніе стороны правильнаго вписаннаго въ кругъ треугольника къ радіусу этого круга равно $\sqrt{3}$. Такимъ образомъ, оба отношенія суть квадратные корни изъ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ точнаго квадратнаго корня извлечь нельзя. Это заставляетъ насъ расширить представленіе о числѣ, такъ какъ указываетъ на существованіе, кромѣ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, еще особой категоріи ариѳметическихъ чиселъ, которымъ дано названіе **ирраціональныхъ**, въ отличіе отъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, называемыхъ раціональными [1]).

Теперь посмотримъ, нельзя-ли установить связь между числами той и другой категоріи.

Пусть даны два ряда раціональныхъ чиселъ:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

и

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

которые обладаютъ слѣдующими свойствами

1) оба ряда содержатъ неопредѣленно большое число членовъ, т.-е. число n есть безконечно большое цѣлое число;
2) каждый членъ перваго ряда меньше каждаго члена второго ряда;
3) члены перваго ряда идутъ не уменьшаясь, т.-е. каждый послѣдующій членъ ряда больше или, въ частномъ случаѣ, равенъ предыдущему;
4) члены второго ряда идутъ не увеличиваясь, т.-е. каждый послѣдующій членъ ряда меньше или, въ частномъ случаѣ, равенъ предыдущему;
5) абсолютная величина разности между соотвѣтственными членами обоихъ рядовъ: $|a_n - b_n|$, при достаточно большомъ n, можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго напередъ заданнаго произвольно малаго числа, т.-е. есть величина безконечно малая. (A)

Предположимъ, что мы нашли такое раціональное число p, которое было-бы больше каждаго члена перваго ряда и меньше каждаго члена второго ряда и которое, такимъ образомъ, опредѣлялось-бы обоими рядами такъ:

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \ldots \leqq a_n \leqq \ldots < p < \ldots \leqq b_n \leqq b_{n-1} \ldots \leqq b_3 \leqq b_2 \leqq b_1,$$

при чемъ $|a_n - b_n|$ безконечно малая величина.

Такое раціональное число p будетъ, согласно теоремѣ 1-ой § 74, общимъ предѣломъ чиселъ a и b, выражаемыхъ

[1]) Во всей этой главѣ мы будемъ разсматривать ариѳметическія, т.-е. положительныя, ирраціональныя числа.

данными рядами, и это будетъ единственное постоянное число, опредѣляемое двумя рядами чиселъ (A). Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ существованіе другого постояннаго числа p' опредѣляемаго тѣми же рядами чиселъ (A), мы должны были-бы допустить возможность существованія между двумя числами a_n и b_n, отличающимися на безконечно малую величину, двухъ чиселъ, отличающихся на постоянную, т.-е на конечную, величину.

Покажемъ возможность существованія такихъ рядовъ чиселъ разсмотрѣннаго нами вида, которые не могутъ опредѣлить раціональное число.

Пусть раціональное число N не представляетъ точнаго квадрата другого раціональнаго числа.

Возьмемъ рядъ чиселъ, представляющихъ приближенныя значенія $\sqrt{N}$ съ точностью до: 1; 0,1; 0,01; 0,001 и т. д., съ недостаткомъ, и рядъ чиселъ, представляющихъ приближенныя значенія $\sqrt{N}$ съ точностью до: 1; 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. съ избыткомъ. Нетрудно видѣть, что два такихъ ряда чиселъ удовлетворяютъ условіямъ (A). Въ самомъ дѣлѣ:

1) оба ряда содержатъ неограниченное число членовъ такъ какъ приближенныя значенія $\sqrt{N}$ можно брать съ точностью до $(0,1)^n$, гдѣ n - какъ угодно большое цѣлое число

2) каждый членъ перваго ряда менѣе каждаго члена второго ряда;

3) въ первомъ ряду члены идутъ не уменьшаясь, а во второмъ не увеличиваясь;

4) абсолютная величина разности соотвѣтственныхъ членовъ обоихъ рядовъ $|a_n - b_n| = (0,1)^n$, при достаточно большомъ n, можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго произвольно малаго числа.

Предположимъ, что эти два ряда опредѣляютъ раціональное число p, и составимъ вторую систему двухъ рядовъ чиселъ, члены которыхъ будутъ квадраты соотвѣтственныхъ членовъ первыхъ рядовъ.

Пусть a_n приближенное значеніе $\sqrt{N}$ съ точностью до $(0,1)^n$, съ недостаткомъ, а b_n, съ избыткомъ; тогда квадраты этихъ чиселъ должны, согласно опредѣленію приближеннаго квадратнаго корня, удовлетворять неравенствамъ $a_n^2 < N < b_n^2$

Отсюда

$$N-a_n^2<b_n^2-a_n^2$$

или

$$N-a_n^2<(b_n+a_n)(b_n-a_n).$$

Но (b_n-a_n) величина безконечно малая, поэтому и $N-a_n^2$ величина безконечно малая, такъ какъ произведеніе безконечно малой величины (b_n-a_n) на конечную (b_n+a_n) есть величина безконечно малая. Такимъ образомъ, N есть предѣлъ числа a_n^2, а p, по предположенію, предѣлъ числа a_n.

Изъ теоріи предѣловъ мы знаемъ, что $\lim (a_n)^2=(\lim a_n)^2=p^2$.

Значитъ, $N=p^2$, что противорѣчитъ условію, согласно которому N не есть точный квадратъ другого раціональнаго числа.

Допустимъ, что всякіе два ряда чиселъ, удовлетворяющіе условіямъ (A), опредѣляютъ нѣкоторое постоянное число, находящееся между перемѣнными числами a_n и b_n.

Это постоянное число, если оно не представляетъ ни цѣлаго, ни дробнаго числа, мы будемъ называть ирраціональнымъ числомъ. Такимъ образомъ, мы будемъ опредѣлять ирраціональное число, какъ такое число, которое, не будучи ни цѣлымъ, ни дробнымъ, опредѣляется двумя рядами чиселъ, удовлетворяющими условіямъ (A).

Мы сказали, что p, если это число раціональное, есть общій предѣлъ чиселъ a_n и b_n; условимся называть p общимъ предѣломъ чиселъ a_n и b_n и въ томъ случаѣ, если p число ирраціональное.

Мы уже показали, что не могутъ существовать два раціональныхъ числа, которыя опредѣлялись-бы одною и тою же системою двухъ рядовъ чиселъ, удовлетворяющихъ условіямъ (A). Нетрудно видѣть, что вообще невозможно допустить существованіе двухъ чиселъ, будь то числа раціональныя или ирраціональныя, или одно раціональное, а другое ирраціональное, которыя опредѣлялись-бы одною и тою же системою двухъ рядовъ чиселъ, удовлетворяющихъ условіямъ (A), такъ какъ это значило-бы допустить существованіе двухъ постоянныхъ чиселъ между двумя числами a_n и b_n, разность которыхъ (b_n-a_n), при безпредѣльномъ увеличеніи числа n, безпредѣльно уменьшается.

Итакъ, мы будемъ подъ $\sqrt{N}$, если N не представляетъ точнаго квадрата, разумѣть число, опредѣляемое двумя рядами чиселъ, представляющихъ приближенныя значенія $\sqrt{N}$ съ недостаткомъ и съ избыткомъ. Такъ, подъ $\sqrt{2}$ мы будемъ разумѣть ирраціональное число, опредѣляемое двумя рядами чиселъ:

$$\left.\begin{cases} 1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ 1{,}414213;\ \ldots\ldots \\ 2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422;\ 1{,}414214;\ \ldots\ldots \end{cases}\right. \sqrt{2}$$

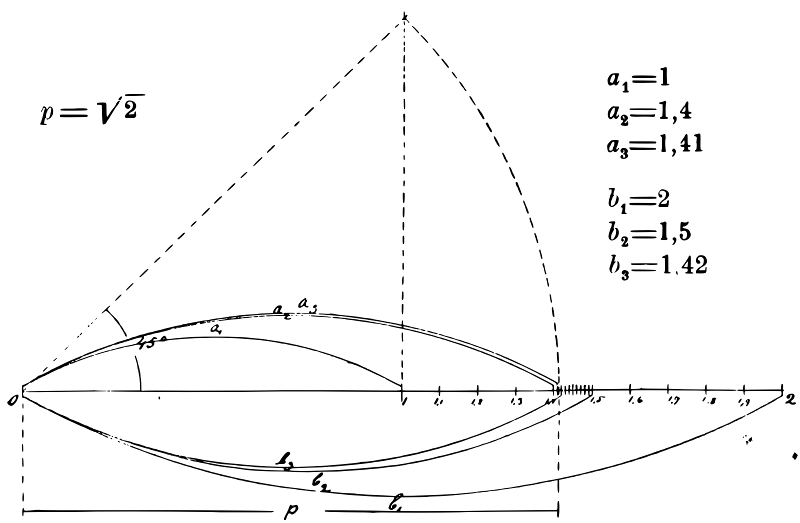
или сокращенно: $\sqrt{2}=1{,}414213\ \ldots\ldots$;

подъ $\sqrt{3}$ — ирраціональное число, опредѣляемое двумя рядами чиселъ:

$$\left.\begin{cases} 1;\ 1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732;\ 1{,}7320;\ 1{,}73205;\ 1{,}732050;\ 1{,}7320508\ldots \\ 2;\ 1{,}8;\ 1{,}74;\ 1{,}733;\ 1{,}7321;\ 1{,}73206;\ 1{,}732051;\ 1{,}7320509\ldots \end{cases}\right. \sqrt{3}$$

или сокращенно: $\sqrt{3}=1{,}7320508\ldots\ldots$

Для лучшаго уясненія идеи опредѣленія ирраціональнаго числа посредствомъ двухъ рядовъ раціональныхъ чиселъ прибѣгнемъ къ графическому пріему. Для этой цѣли на неопредѣленной прямой отъ нѣкоторой точки будемъ откладывать по одну сторону отрѣзки, пропорціональные числамъ обоихъ рядовъ; эти отрѣзки опредѣляютъ съ любою степенью точности отрѣзокъ, пропорціональный ирра-



Черт. 1.

ціональному числу, который въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ быть опредѣленъ независимо, посредствомъ геометрическаго построенія, вполнѣ точно.

Черт. 1 показываетъ, какъ опредѣлить графически $\sqrt{2}$.

Пусть два ирраціональныхъ числа p и p' опредѣляются двумя рядами чиселъ, удовлетворяющими условіямъ (A) **Сравненіе величины ирраціональныхъ чиселъ.**

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots\ldots \leqq a_n \ldots\ldots \\ b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots\ldots \geqq b_n \ldots\ldots \end{array}\right. \quad p$$

и

$$\left\{\begin{array}{l} a_1' \leqq a_2' \leqq \ldots\ldots \leqq a_n' \ldots\ldots \\ b_1' \geqq b_2' \geqq \ldots\ldots \geqq b_n' \ldots\ldots \end{array}\right. \quad p'$$

Мы будемъ говорить, что

1) ирраціональное число p равно ирраціональному числу p', если

$$a_n < b_n' \text{ и } a_n' < b_n$$

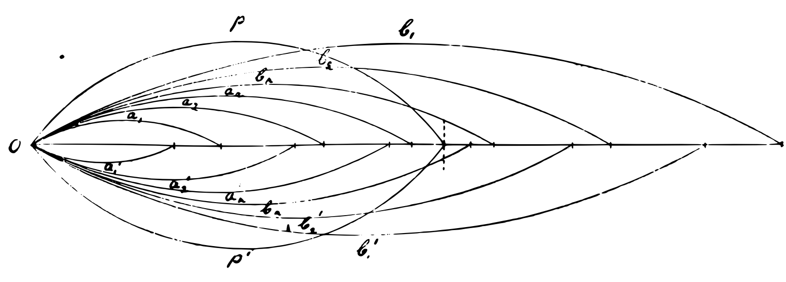
при какихъ угодно значеніяхъ числа n;

2) ирраціональное число p больше ирраціональнаго числа p', если есть такое цѣлое число n_1, при которомъ для всѣхъ значеній $n \geqq n_1$, $a_n > b_n'$;

3) ирраціональное число p меньше ирраціональнаго числа p', если есть такое цѣлое число n_1, при которомъ для всѣхъ значеній $n \geqq n_1$, $b_n < a_n'$.

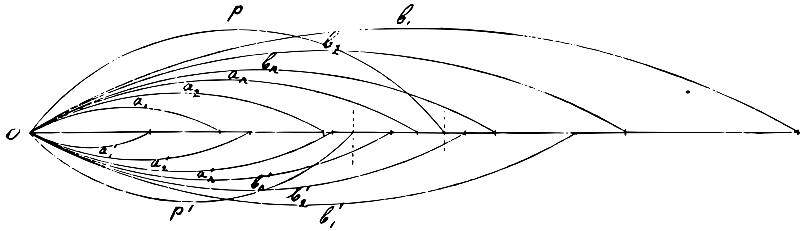
Изложенныя условія равенства и неравенства ирраціональныхъ чиселъ выражены графически на черт. 2, 3 и 4.

$p = p'$



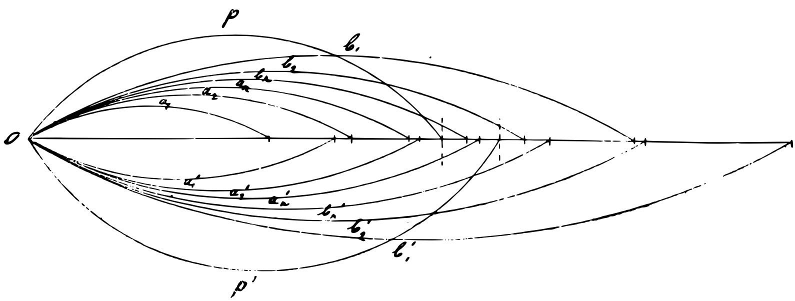
Черт. 2.

$p > p'$



Черт. 3.

$p < p'$



Черт. 4.

Дѣйствія надъ ирраціональными числами.

§ 77. Покажемъ теперь, какъ производить дѣйствія надъ ирраціональными числами.

Сложеніе. Пусть даны два ирраціональныхъ числа p и p', опредѣляемыя рядами:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots\ldots \leqq a_n \ldots \\ b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots\ldots \geqq b_n \ldots \end{array}\right. \quad p$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1' \leqq a_2' \leqq \ldots\ldots \leqq a_n' \ldots\ldots \\ b_1' \geqq b_2' \geqq \ldots\ldots \geqq b_n' \ldots\ldots \end{array}\right. \quad p'$$

Составимъ два новыхъ ряда чиселъ, взявъ суммы соотвѣтственныхъ членовъ данныхъ рядовъ:

$$\begin{array}{l} a_1 + a_1' \leqq a_2 + a_2' \leqq \ldots\ldots \leqq a_n + a_n' \ldots\ldots \\ b_1 + b_1' \geqq b_2 + b_2' \geqq \ldots\ldots \geqq b_n + b_n' \ldots\ldots \end{array} \quad (*)$$

Легко видѣть, что эти два ряда удовлетворяютъ условіямъ (A). Въ самомъ дѣлѣ, въ первомъ ряду члены идутъ, не уменьшаясь, а во второмъ, не увеличиваясь, и каждый членъ перваго ряда меньше каждаго члена второго. Остается показать, что абсолютная величина разности соотвѣтственныхъ членовъ этихъ двухъ рядовъ, при безпредѣльномъ увеличеніи числа n, безпредѣльно убываетъ.

Дѣйствительно,

$$(b_n+b_n')-(a_n+a_n')=(b_n-a_n)+(b_n'-a_n');$$

правая же часть этого равенства представляетъ сумму двухъ безконечно малыхъ слагаемыхъ, и потому есть величина безконечно малая.

Такимъ образомъ, два ряда (*) удовлетворяютъ условіямъ (A) и потому опредѣляютъ нѣкоторое число P, которое мы условимся называть суммою чиселъ p и p'; что́ и изобразимъ равенствомъ $P=p+p'$.

Вычитаніе. Пусть даны два ирраціональныхъ числа p и p', опредѣляемыя рядами:

$$\left.\begin{cases} a_1\leqq a_2\leqq \ldots\ldots \leqq a_n\leqq \ldots\ldots \\ b_1\geqq b_2\geqq \ldots\ldots \geqq b_n\geqq \ldots\ldots \end{cases}\right\} p$$

$$\left.\begin{cases} a_1'\leqq a_2'\leqq \ldots\ldots \leqq a_n'\leqq \ldots\ldots \\ b_1'\geqq b_2'\geqq \ldots\ldots \geqq b_n'\geqq \ldots\ldots \end{cases}\right\} p'$$

при чемъ $p>p'$, т.-е. $a_n>b_n'$.

Составимъ два новыхъ ряда:

$$\begin{cases} a_1-b_1'\leqq a_2-b_2'\leqq \ldots\ldots \leqq a_n-b_n'\leqq \ldots\ldots \\ b_1-a_1'\geqq b_2-a_2'\geqq \ldots\ldots \geqq b_n-a_n'\geqq \ldots\ldots \end{cases}$$

Члены перваго ряда идутъ, не уменьшаясь, а члены второго ряда, не увеличиваясь; каждый членъ перваго ряда меньше каждаго члена второго ряда, и, наконецъ, абсолютная величина разности двухъ соотвѣтственныхъ членовъ этихъ рядовъ:

$$(b_n-a_n')-(a_n-b_n')=(b_n-a_n)+(b_n'-a_n')$$

равна суммѣ двухъ безконечно малыхъ чиселъ, а потому и сама есть число безконечно малое.

Слѣдовательно, эти два ряда чиселъ удовлетворяютъ условіямъ (A) и потому опредѣляютъ нѣкоторое число P, которое мы условимся называть разностью чиселъ p и p'; что̀ и изобразимъ равенствомъ $P=p-p'$.

Умноженіе. Пусть даны два ирраціональныхъ числа p и p', опредѣляемыя рядами:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots\ldots \leqq a_n \leqq \ldots\ldots \\ b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots\ldots \geqq b_n \geqq \ldots \end{array}\right. \quad p$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1' \leqq a_2' \leqq \ldots\ldots \leqq a_n' \leqq \ldots\ldots \\ b_1' \geqq b_2' \geqq \ldots\ldots \geqq b_n' \geqq \ldots \end{array}\right. \quad p'$$

Составимъ два новыхъ ряда:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1a_1' \leqq a_2a_2' \leqq \ldots\ldots \leqq a_na_n' \leqq \ldots\ldots \\ b_1b_1' \geqq b_2b_2' \geqq \ldots\ldots \geqq b_nb_n' \geqq \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Члены перваго ряда идутъ, не уменьшаясь, а члены второго, не увеличиваясь; каждый членъ перваго ряда меньше каждаго члена второго ряда, и, наконецъ, абсолютная величина разности двухъ соотвѣтственныхъ членовъ этихъ рядовъ:

$$b_nb_n'-a_na_n'=b_nb_n'-a_na_n'+b_na_n'-b_na_n'=b_n(b_n'-a_n')+a_n'(b_n-a_n)$$

равна суммѣ двухъ произведеній, въ каждомъ изъ которыхъ одинъ множитель конечное число, а другой—безконечно малое; такая сумма, какъ извѣстно изъ теоріи предѣловъ, есть число безконечно малое. Значитъ, эти два ряда удовлетворяютъ условіямъ (A) и потому опредѣляютъ нѣкоторое число P, которое мы условимся называть произведеніемъ чиселъ p и p'; что̀ и изобразимъ равенствомъ $P=pp'$.

Случай произведенія двухъ сомножителей можно обычнымъ пріемомъ распространить на любое число сомножителей. Поэтому, подъ произведеніемъ нѣсколькихъ ирраціональныхъ чиселъ мы будемъ разумѣть число, опредѣляемое двумя рядами чиселъ:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1a_1'a_1''\ldots \leqq a_2a_2'a_2''\ldots \leqq \ldots \leqq a_na_n'a_n''\ldots \leqq \ldots \\ b_1b_1'b_1''\ldots \geqq b_2b_2'b_2''\ldots \geqq \ldots \geqq b_nb_n'b_n''\ldots \geqq \ldots \end{array}\right. \quad P=pp'p''\ldots$$

Возвышеніе въ степень. Въ частности, можетъ быть $a=a'=a''...$ ... и $b=b'=b''.....$ и мы тогда будемъ имѣть возвышеніе ирраціональнаго числа въ цѣлую и положительную степень. Такимъ образомъ, если нѣкоторое ирраціональное число p опредѣляется двумя рядами чиселъ:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots \\ b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n \geqq \ldots \end{array}\right. p,$$

то m-ая степень этого числа (P), гдѣ m цѣлое положительное число, будетъ опредѣляться двумя рядами чиселъ:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^m \leqq a_2^m \leqq \ldots \leqq a_n^m \leqq \ldots \\ b_1^m \geqq b_2^m \geqq \ldots \geqq b_n^m \geqq \ldots \end{array}\right. P=\underbrace{p\ldots p}_{m}=p^m.$$

Положимъ, $p=\sqrt{N}$, гдѣ N не представляетъ точнаго квадрата раціональнаго числа.

Пусть $\sqrt{N}$ опредѣляется двумя рядами чиселъ:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots \\ b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n \geqq \ldots \end{array}\right. \sqrt{N},$$

которые представляютъ приближенныя значенія $\sqrt{N}$ съ недостаткомъ и съ избыткомъ.

Составимъ два ряда чиселъ:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^2 \leqq a_2^2 \leqq \ldots \leqq a_n^2 \leqq \ldots \\ b_1^2 \geqq b_2^2 \geqq \ldots \geqq b_n^2 \geqq \ldots \end{array}\right. P=(\sqrt{N})^2,$$

опредѣляющихъ квадратъ ирраціональнаго числа $\sqrt{N}$; такимъ образомъ, $P=(\sqrt{N})^2$.

Съ другой стороны, вторые два ряда чиселъ опредѣляютъ число N. Въ самомъ дѣлѣ, число N удовлетворяетъ неравенствамъ $a_n^2 < N < b_n^2$,

откуда $N-a_n^2<b_n^2-a_n^2$ или $N-a_n^2<(b_n+a_n)(b_n-a_n)$;

но (b_n-a_n) есть число безконечно малое, и потому $N=\lim a_n^2$ и также $N=\lim b_n^2$. Такимъ образомъ, $P=N$ и, значитъ, мы имѣемъ равенство: $(\sqrt{N})^2=N$, **которое распространяетъ опредѣленіе квадратнаго корня, какъ такого числа, квадратъ котораго равенъ подкоренному числу, и на тотъ случай, когда подкоренное число не представляетъ точнаго квадрата раціональнаго числа.**

Такимъ же образомъ можно показать, что равенство $(\sqrt[m]{N})^m = N$ имѣетъ мѣсто и для того случая, когда N не представляетъ m-ой степени раціональнаго числа, при чемъ возвышеніе $\sqrt[m]{N}$ въ m-ую степень понимается въ только что разсмотрѣнномъ смыслѣ возвышенія въ степень ирраціональнаго числа.

Дѣленіе. Пусть даны два ирраціональныхъ числа p и p', опредѣляемыя рядами:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots \\ b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n \geqq \ldots \end{array}\right. p$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1' \leqq a_2' \leqq \ldots \leqq a_n' \leqq \ldots \\ b_1' \geqq b_2' \geqq \ldots \geqq b_n' \geqq \ldots \end{array}\right. p'$$

Составимъ два новыхъ ряда:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a_1}{b_1'} \leqq \frac{a_2}{b_2'} \leqq \ldots \leqq \frac{a_n}{b_n'} \leqq \ldots \\ \frac{b_1}{a_1'} \geqq \frac{b_2}{a_2'} \geqq \ldots \geqq \frac{b_n}{a_n'} \geqq \ldots \end{array}\right. P$$

Числа перваго ряда идутъ, не уменьшаясь, а числа второго ряда, не увеличиваясь; каждое число перваго ряда меньше каждаго числа второго ряда, и абсолютная величина разности двухъ соотвѣтственныхъ членовъ этихъ рядовъ равна

$$\frac{b_n}{a_n'} - \frac{a_n}{b_n'} = \frac{b_n b_n' - a_n a_n'}{a_n' b_n}.$$

Числитель этой дроби есть, какъ мы знаемъ изъ умноженія ирраціональныхъ чиселъ, величина безконечно малая, а знаменатель число конечное, и потому вся дробь—число безконечно малое.

Значитъ, эти два ряда удовлетворяютъ условіямъ *(A)* и потому опредѣляютъ нѣкоторое число P, которое условимся называть частнымъ отъ дѣленія числа p на число p'; что̀ и изобразимъ равенствомъ $P = \frac{p}{p'}$.

Продолжая разсуждать подобнымъ образомъ, мы можемъ распространить на ирраціональныя числа всѣ свойства дѣйствій надъ числами раціональными, какъ положительными, такъ и отрицательными.

Въ заключеніе замѣтимъ, что всѣ сдѣланные выводы остаются справедливыми и въ томъ случаѣ, если между числами p, p',..... будутъ раціональныя.

Изучая въ предшествующей главѣ свойства перемѣнныхъ величинъ и ихъ предѣловъ, мы имѣли въ виду, поскольку дѣло шло о числовыхъ значеніяхъ, лишь раціональныя числа. **Обобщеніе теоріи предѣловъ на ирраціональныя числа.**

Познакомившись въ настоящей главѣ съ ирраціональными числами и показавъ, какъ производить дѣйствія надъ ними, мы можемъ теперь, говоря о перемѣнномъ числѣ, имѣть въ виду не только раціональныя, но и ирраціональныя его значенія, т.-е. предполагать непрерывное измѣненіе перемѣннаго числа и вмѣстѣ съ этимъ допускать существованіе ирраціональнаго предѣла перемѣннаго числа. Въ этомъ смыслѣ могутъ быть обобщены и всѣ теоремы предшествующей главы.

...деній [1]).

...ли статьи о преобра- надъ ними мы будемъ,

$\bar{A}$ понимать лишь ариѳме- ...ическое значеніе всякій радикалъ

то, значитъ, подъ $\sqrt[n]{A}$ мы будемъ по- ...ѣ опредѣленную величину.

...ариѳметическое значеніе корня не измѣнится, если ...ня умножить или раздѣлить на какое-нибудь цѣлое ...е число, а подкоренное количество возвысить въ степень, которой равенъ этому числу, или извлечь изъ подкоренн...чества корень, показатель котораго равенъ тому же числу.

...до доказать, что $\sqrt[n]{A^p} = \sqrt[nq]{A^{pq}}$.

[1]) Это положеніе остается справедливымъ, какъ мы знаемъ изъ теоріи ...ціональныхъ чиселъ, и для того случая, когда ариѳметическое значеніе ... есть число ирраціональное.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ.

Преобразованія радикаловъ и дѣйствія надъ ирраціональными выраженіями.

---

§ 78. иеметиче-е значеніе адикала. Основная теорема.

Радикаломъ называется $\sqrt[n]{A}$, въ которомъ A не представляетъ n-ой степени какого-нибудь выраженія, не содержащаго знака корня.

Выраженія, не содержащія знака корня, называются **раціональными**, а выраженія, содержащія знакъ корня, **ирраціональными**.

Раці... ...ныя и ирраціональныя количества вмѣстѣ со-
...азываемыя **вещественныя количества**.

...еніе $\sqrt[n]{A}$, гдѣ A положительное коли-
...вается [1]), что $\sqrt[n]{A}$ имѣетъ n зна-
... вещественное положитель-
...наченіе корня изъ поло-
...**метическимъ значеніемъ**
...ываются **алгебраи-**

...чое, то корень

...а n четное
...потому не
...общіе ни-
...корня n

...ъ одно
...ораго

равна ариѳметическому значенію $\sqrt[n]{A}$; въ самомъ дѣлѣ, по правилу извлеченія корня изъ произведенія, получаемъ:

$$\sqrt[n]{-A}=\sqrt[n]{-1\cdot A}=\sqrt[n]{-1}\cdot\sqrt[n]{A}=-\sqrt[n]{A}.$$

Такъ какъ во всѣхъ послѣдующихъ преобразованіяхъ радикаловъ мы будемъ предполагать только ариѳметическія значенія радикаловъ, то во всѣхъ выраженіяхъ, въ которыя войдутъ корни нечетныхъ степеней изъ отрицательныхъ количествъ, такіе корни сперва должны быть преобразованы въ ариѳметическіе.

Всякій корень имѣетъ только одно ариѳметическое значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что $\sqrt[n]{A}$ имѣетъ два ариѳметическихъ значенія: a и b, гдѣ a и b положительныя неравныя числа; тогда получимъ: $A=a^n$ и $A=b^n$, откуда $a^n=b^n$. Но такое равенство невозможно, потому что неравныя положительныя числа, будучи взяты каждое n разъ сомножителями, не могутъ дать равныхъ произведеній [1]).

Такъ какъ въ дальнѣйшемъ изложеніи статьи о преобразованіяхъ радикаловъ и дѣйствіяхъ надъ ними мы будемъ, какъ уже сказано выше, подъ $\sqrt[n]{A}$ понимать лишь ариѳметическое значеніе, а ариѳметическое значеніе всякій радикалъ имѣетъ только одно, то, значитъ, подъ $\sqrt[n]{A}$ мы будемъ понимать одну вполнѣ опредѣленную величину.

Теорема. **Ариѳметическое значеніе корня не измѣнится, если показатель корня умножить или раздѣлить на какое-нибудь цѣлое положительное число, а подкоренное количество возвысить въ степень, показатель которой равенъ этому числу, или извлечь изъ подкоренного количества корень, показатель котораго равенъ тому же числу.**

Надо доказать, что $\sqrt[n]{A^p}=\sqrt[nq]{A^{pq}}$.

---

[1]) Это положеніе остается справедливымъ, какъ мы знаемъ изъ теоріи ирраціональныхъ чиселъ, и для того случая, когда ариѳметическое значеніе $\sqrt[n]{A}$ есть число ирраціональное.

Для доказательства возвысимъ въ степень nq оба выраженія, составляющія это равенство, и будемъ имѣть:

1) $\left(\sqrt[n]{A^p}\right)^{nq} = \left[\left(\sqrt[n]{A^p}\right)^n\right]^q = (A^p)^q = A^{pq}$.

2) $\left(\sqrt[nq]{A^{pq}}\right)^{nq} = A^{pq}$.

$\sqrt[n]{A^p}$ и $\sqrt[nq]{A^{pq}}$ представляютъ ариѳметическія значенія корня nq-ой степени изъ A^{pq}, и потому

$$\sqrt[n]{A^p} = \sqrt[nq]{A^{pq}} \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{A^p} = \sqrt[nq]{(A^p)^q}.$$

Это равенство непосредственно доказываетъ первую часть теоремы.

Читая послѣднее равенство справа налѣво, получаемъ вторую часть теоремы: ариѳметическое значеніе корня не измѣнится, если показатель корня раздѣлимъ на одного изъ его сомножителей, а изъ подкоренного количества извлечемъ корень, показатель котораго равенъ этому дѣлителю.

§ 79. **Преобразованія радикаловъ.** На доказанной теоремѣ основаны слѣдующія преобразованія радикаловъ:

a) Если подкоренное количество одночленъ и показатели всѣхъ его множителей имѣютъ общаго дѣлителя съ показателемъ корня, то можно упростить данный радикалъ, раздѣливъ показатель корня и показатели подкореннаго количества на этого общаго дѣлителя.

Примѣры.

$$\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}; \quad \sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3}; \quad \sqrt[15]{a^5b^{10}c^{20}} = \sqrt[3]{ab^2c^4}.$$

b) Нѣсколько радикаловъ, имѣющихъ различные показатели корня, можно привести къ общему показателю корня; общимъ показателемъ корня будетъ наименьшее кратное показателей корня данныхъ радикаловъ.

Примѣры.

1) Привести къ общему показателю корня радикалы:

$$\sqrt{a}; \quad \sqrt[3]{b^2}; \quad \sqrt[4]{c^3};$$

получаемъ

$$\sqrt[12]{a^6}; \quad \sqrt[12]{b^8}; \quad \sqrt[12]{c^9}.$$

2) Привести къ общему показателю корня радикалы:

$$\sqrt[4]{a^3};\quad \sqrt[5]{b^2};\quad \sqrt[10]{c^7};$$

получаемъ

$$\sqrt[20]{a^{15}};\quad \sqrt[20]{b^8};\quad \sqrt[20]{c^{14}}.$$

Кромѣ этихъ двухъ преобразованій радикаловъ, основанныхъ на теоремѣ § 78, укажемъ еще слѣдующія:

c) Если подкоренное количество одночленъ и показатели нѣкоторыхъ его множителей болѣе показателя корня или равны ему, то такой одночленъ можно разложить на два множителя, при чемъ въ первый войдутъ множители, показатели которыхъ дѣлятся на показатель корня, а въ другой—всѣ остальные.

Изъ перваго изъ этихъ множителей извлекаютъ корень, а второй множитель оставляютъ подъ знакомъ корня.

Примѣръ.

$$\sqrt[3]{16a^5b^7c^{10}} = \sqrt[3]{2^3a^3b^6c^9 \cdot 2a^2bc} = 2ab^2c^3\sqrt[3]{2a^2bc}.$$

Это преобразованіе называется выведеніемъ раціональнаго множителя изъ-подъ знака радикала.

d) Множители, находящіеся внѣ знака корня, можно подвести подъ знакъ корня.

Возьмемъ выраженіе $A\sqrt[n]{B}$ и положимъ $A\sqrt[n]{B} = x$.

Возвысимъ обѣ части этого равенства въ n-ую степень; получимъ

$$\left(A\sqrt[n]{B}\right)^n = x^n$$

или

$$A^nB = x^n,$$

откуда

$$x = \sqrt[n]{A^nB},\text{ т.-е. } A\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^nB}.$$

Примѣры.

1) $2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{8}.$

2) $a^3b^2\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a^9b^6ab} = \sqrt[3]{a^{10}b^7}.$

e) Такой радикалъ, подкоренное количество котораго есть дробь, можно преобразовать такъ, чтобы подкоренное количество было цѣлое; для этого достаточно числитель и знаменатель дроби умножить на такое число или выраженіе, чтобы корень изъ знаменателя извлекался.

Примѣры.

$$1)\ \sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b};$$

$$2)\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}\ \text{и т. д.}$$

вообще: $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}.$$

§ 80. **Дѣйствія надъ радикалами. Подобные радикалы.** Подобными радикалами называются такіе радикалы, у которыхъ подкоренныя количества и показатели корня одинаковы, напр., $a^2b\sqrt[3]{2a^2b^2}$ и $ab^2\sqrt[3]{2a^2b^2}$.

Чтобы судить о подобіи радикаловъ, надо привести ихъ къ простѣйшему виду; такъ, напр., радикалы $\sqrt{8}$ и $\sqrt{\frac{1}{2}}$, по виду не подобные, на самомъ дѣлѣ—подобны, что̀ видно изъ слѣдующихъ преобразованій:

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2};$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Если многочленъ содержитъ подобные радикалы, то можно сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ; напр.,

$$4\sqrt{18}-13\sqrt{8}+3\sqrt{50}=12\sqrt{2}-26\sqrt{2}+15\sqrt{2}=$$
$$=\sqrt{2}(12-26+15)=\sqrt{2}.$$

Сложеніе и вычитаніе радикаловъ. При сложеніи и вычитаніи ирраціональныхъ одночленовъ ихъ соединяютъ между собою знакомъ $+$ или $-$ и, если можно, дѣлаютъ приведеніе.

Примѣръ.

Даны радикалы: $\sqrt{a^3b},\ -c\sqrt{ab},\ \sqrt{ab^3}$;
ихъ сумма будетъ:

$$\sqrt{a^3b}-c\sqrt{ab}+\sqrt{ab^3}=a\sqrt{ab}-c\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}=(a+b-c)\sqrt{ab}.$$

При умноженіи радикаловъ могутъ быть два случая: 1) когда радикалы имѣютъ одинаковые показатели корня и 2) когда показатели корня разные.

Умноженіе радикаловъ.

1) Радикалы имѣютъ одинаковые показатели корня.

Положимъ, дано $\sqrt[n]{A}$ умножить на $\sqrt[n]{B}$.

Обозначимъ искомый результатъ черезъ x, т.-е.

$$\sqrt[n]{A}\,.\,\sqrt[n]{B}=x.$$

Возвысимъ обѣ части равенства въ степень n; получимъ

$$\left(\sqrt[n]{A}\,.\,\sqrt[n]{B}\right)^n=x^n$$

или
$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^n.\left(\sqrt[n]{B}\right)^n=x^n$$

или
$$AB=x^n;\text{ откуда } x=\sqrt[n]{AB};$$

слѣдовательно,
$$\sqrt[n]{A}\,.\,\sqrt[n]{B}=\sqrt[n]{AB}.$$

Отсюда непосредственно слѣдуетъ правило: **чтобы перемножить радикалы съ одинаковыми показателями корня, достаточно перемножить ихъ подкоренныя количества и изъ произведенія извлечь корень съ тѣмъ же показателемъ.**

2) Радикалы имѣютъ различные показатели корня.

Въ этомъ случаѣ надо сперва радикалы привести къ общему показателю корня и затѣмъ поступать по предыдущему правилу.

Примѣръ.

$$\sqrt{a}\,.\,\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^3}\,.\,\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2}.$$

При дѣленіи радикаловъ, какъ и при умноженіи, могутъ быть два случая:

Дѣленіе радикаловъ.

1) Радикалы имѣютъ одинаковые показатели корня.

Положимъ, $\sqrt[n]{A}$ надо раздѣлить на $\sqrt[n]{B}$.

Обозначимъ искомый результатъ черезъ x, т.-е.

$$\sqrt[n]{A}:\sqrt[n]{B}=x.$$

или

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=x.$$

Возвысимъ обѣ части этого равенства въ степень n; получимъ

$$\left\{\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right\}^n=x^n \text{ или } \frac{(\sqrt[n]{A})^n}{(\sqrt[n]{B})^n}=x^n$$

или

$$\frac{A}{B}=x^n; \text{ откуда } x=\sqrt[n]{\frac{A}{B}};$$

слѣдовательно,

$$\sqrt[n]{A}:\sqrt[n]{B}=\sqrt[n]{\frac{A}{B}}.$$

Отсюда непосредственно слѣдуетъ правило: **чтобы раздѣлить радикалы съ одинаковыми показателями корня одинъ на другой, надо раздѣлить ихъ подкоренныя количества и изъ полученнаго частнаго извлечь корень съ тѣмъ же показателемъ.**

2) Если радикалы имѣютъ различные показатели корня, то сперва надо ихъ привести къ общему показателю корня, а затѣмъ примѣнить предыдущее правило.

Замѣчаніе. Если радикалы имѣютъ коэффиціенты, то, при умноженіи или дѣленіи ихъ, надо отдѣльно произвести дѣйствіе надъ коэффиціентами и отдѣльно надъ самими радикалами.

Примѣры.

$$1)\ \frac{5}{8}\sqrt{a}\quad 0{,}4\sqrt{b}=\frac{5}{8}\ .\ 0{,}4\sqrt{ab}=\frac{1}{4}\sqrt{ab}.$$

$$2)\ \frac{4}{5}\sqrt{a}:0{,}4\sqrt{b}=\left(\frac{4}{5}:0{,}4\right)\sqrt{\frac{a}{b}}=2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Возвышеніе радикаловъ въ цѣлую степень.

Положимъ, $\sqrt[n]{A}$ надо возвысить въ степень p, гдѣ p цѣлое положительное число:

$$(\sqrt[n]{A})^p=\underbrace{\sqrt[n]{A}\ .\ \sqrt[n]{A}\ .\ .\ \sqrt[n]{A}}_{p}=\sqrt[n]{\underbrace{A\ .\ A\ .\ .\ A}_{p}}=\sqrt[n]{A^p}\ .$$

Теперь возьмемъ случай, когда показатель степени, въ которую надо возвысить радикалъ, цѣлое отрицательное число:

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^{-p}=\frac{1}{\left(\sqrt[n]{A}\right)^{p}}=\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{A^p}}=\sqrt[n]{\frac{1}{A^p}}=\sqrt[n]{A^{-p}}.$$

Отсюда непосредственно слѣдуетъ правило: **чтобы возвысить радикалъ въ цѣлую степень, надо возвысить въ эту степень подкоренное количество.**

Извлеченіе корня изъ радикала.

Положимъ, надо извлечь корень m-ой степени изъ $\sqrt[n]{A}$, при чемъ m и n цѣлыя положительныя числа.

Обозначимъ искомый результатъ черезъ x; тогда имѣемъ:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}=x.$$

Возвысимъ обѣ части этого равенства въ степень m:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}\right)^m=x^m;$$

слѣдовательно, $\sqrt[n]{A}=x^m.$

Возвысимъ обѣ части этого новаго равенства въ степень n:

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^n=x^{mn};$$

слѣдовательно, $A=x^{mn}$; откуда $x=\sqrt[mn]{A}.$

Итакъ,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[mn]{A}.$$

Отсюда слѣдуетъ правило: **чтобы извлечь корень изъ радикала, надо перемножить показатели корня.**

Замѣчаніе. Если радикалъ, изъ котораго надо извлечь корень, имѣетъ коэффиціентъ, то этотъ коэффиціентъ надо подвести подъ знакъ корня; напр.,

$$\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^nb}}=\sqrt[mn]{a^nb}.$$

Слѣдствія. 1) По выведенному правилу имѣемъ:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}} = \sqrt[mnp]{A},$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}} = \sqrt[mnp]{A};$$

слѣдовательно, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}}$, т.-е. ариѳметическое значеніе результата не зависитъ отъ того, въ какомъ порядкѣ извлекается корень, если приходится извлекать корень нѣсколько разъ подъ-рядъ.

2) По доказанному имѣемъ:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}} = \sqrt[mnp]{A};$$

слѣдовательно, обратно, $\sqrt[mnp]{A} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}}$,

т.-е. при извлеченіи корня, показатель котораго разлагается на множители, это извлеченіе можно замѣнить послѣдовательнымъ извлеченіемъ корней, показатели которыхъ суть множители даннаго показателя корня.

Примѣръ.

$$\sqrt[12]{531441} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{531441}}} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

$$\sqrt{53'14'41} = 729; \quad \sqrt{7'29} = 27; \quad \sqrt[3]{27} = 3.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 49 \\
\hline
142 & 4\ 14 \\
2 & 2\ 84 \\
\hline
1449 & 1\ 30\ 41 \\
9 & 1\ 30\ 41 \\
\hline
 & \quad 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 4 \\
\hline
47 & 3\ 29 \\
7 & 3\ 29 \\
\hline
 & \ 0
\end{array}$$

§ 81. Дѣйствія надъ ирраціональными многочленами.

Ирраціональными многочленами называются такіе многочлены, которые содержатъ радикалы. Всѣ дѣйствія надъ ирраціональными многочленами производятся по тѣмъ же правиламъ, какъ и надъ многочленами раціональными.

Примѣры.

1)
$$\left(\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{ax}{y}}\right)\cdot\sqrt{axy}=\sqrt{\frac{a}{x}}\cdot\sqrt{axy}+\sqrt{\frac{ax}{y}}\cdot\sqrt{axy}=$$
$$=\sqrt{\frac{a^2xy}{x}}+\sqrt{\frac{a^2x^2y}{y}}=a\sqrt{y}+ax.$$

2)
$$\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{6}\right)\left(2\sqrt{2}+\sqrt[4]{\frac{3}{8}}\right)=\sqrt{2}\,.\,2\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{6}\,.\,2\sqrt{2}+$$
$$+\sqrt{2}\,.\,\sqrt[4]{\frac{3}{8}}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{6}\,.\,\sqrt[4]{\frac{3}{8}}=4-\frac{1}{2}\sqrt[4]{24}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{24}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{18}{8}}=$$
$$=4-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{36}{16}}=4-\frac{1}{8}\sqrt[4]{36}=4-\frac{1}{8}\sqrt{6}.$$

3)
$$\left(2a\sqrt[3]{ax^2}-a\sqrt[6]{ax^5}-ax\right):\left(\sqrt[3]{a^2x}-\sqrt{ax}\right)=$$
$$=\left(2\sqrt[6]{a^8x^4}-\sqrt[6]{a^7x^5}-\sqrt[6]{a^6x^6}\right):\left(\sqrt[6]{a^4x^2}-\sqrt[6]{a^3x^3}\right)$$

$$\begin{array}{r|l}
2\sqrt[6]{a^8x^4}-\sqrt[6]{a^7x^5}-\sqrt[6]{a^6x^6} & \sqrt[6]{a^4x^2}-\sqrt[6]{a^3x^3} \\
\cline{2-2}
-2\sqrt[6]{a^8x^4}\mp2\sqrt[6]{a^7x^5} \qquad\qquad & 2\sqrt[6]{a^4x^2}+\sqrt[6]{a^3x^3} \\
\cline{1-1}
\sqrt[6]{a^7x^5}-\sqrt[6]{a^6x^6} & \\
-\sqrt[6]{a^7x^5}\mp\sqrt[6]{a^6x^6} & \\
\cline{1-1}
0 \qquad\quad &
\end{array}$$

§ 82. **Освобожденіе дробей отъ ирраціональныхъ знаменателей.**

При вычисленіи дробныхъ выраженій, знаменатели которыхъ содержатъ радикалы, бываетъ полезно предварительно преобразовать дробь такъ, чтобы знаменатель ея былъ количество раціональное.

Разсмотримъ нѣсколько важнѣйшихъ случаевъ.

I. Знаменатель одночленъ.

Возьмемъ дробь $\frac{a}{\sqrt{b}}$. Умноживъ числитель и знаменатель ея на $\sqrt{b}$, получимъ:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

Сдѣлавъ подобное преобразованіе съ дробью $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$, получимъ

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}}=\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b^2}}=\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}.$$

Вообще,

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}.$$

Примѣры.

$$1)\ 12:5\sqrt{3}=\frac{12}{5\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{5\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{15}=\frac{4\sqrt{3}}{5};$$

$$2)\ \frac{2\sqrt[3]{6}}{\sqrt[6]{2}}=\frac{2\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{2^5}}=\frac{2\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[6]{2^5}}{2}=\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{6^2}\cdot\sqrt[6]{2^5}=$$

$$=\sqrt[6]{3^2\cdot2^2\cdot2^5}=2\sqrt[6]{3^2\cdot2}=2\sqrt[6]{18}.$$

II. Знаменатель двучленъ, содержащій квадратные корни.

Примѣняя къ радикаламъ формулу произведенія суммы двухъ количествъ на ихъ разность, получаемъ слѣдующее тождество:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b;$$

отсюда получаемъ слѣдующія преобразованія дробей:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b};\quad \frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

Примѣры.

$$1)\ \frac{12}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{12(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}=4(\sqrt{5}-\sqrt{2});$$

$$2)\ \frac{2}{\sqrt{3}-5}=\frac{2(\sqrt{3}+5)}{(\sqrt{3}-5)(\sqrt{3}+5)}=\frac{2(\sqrt{3}+5)}{-22}=-\frac{\sqrt{3}+5}{11}.$$

III. Знаменатель трехчленъ, содержащій квадратные корни.

Возьмемъ дробь $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

Чтобы избавиться отъ одного изъ корней, напр., отъ $\sqrt{c}$, принимаемъ сумму двухъ другихъ корней за одинъ членъ; тогда знаменатель представится подъ видомъ двучлена:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{m}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}=$$

$$=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+b+2\sqrt{ab}-c}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(a+b-c)+2\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\,(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}.$$

Примѣры.

$$\frac{4}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{4}{(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}}=\frac{4(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})^2-3}=$$

$$=\frac{4(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{1-2\sqrt{2}+2-3}=\frac{4(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-2\sqrt{2}}=\frac{4(\sqrt{2}-2-\sqrt{6})}{-4}=$$

$$=2+\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

IV. Знаменатель двучленъ, содержащій кубическіе корни.

Возьмемъ тождества:

$$A^3-B^3=(A-B)\,(A^2+AB+B^2)$$
$$A^3+B^3=(A+B)\,(A^2-AB+B^2)$$

и положимъ въ нихъ

$$A=\sqrt[3]{m},\quad B=\sqrt[3]{n}.$$

Тогда получимъ:

$$m-n=(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n})\,(\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})$$
$$m+n=(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n})\,(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}).$$

Слѣдовательно, будемъ имѣть такія преобразованія:

$$\frac{M}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}=\frac{M\left(\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{m-n};$$

$$\frac{M}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}}=\frac{M\left(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{m+n}.$$

Примѣръ.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{7}.$$

Дробныя степени.

§ 83.

Опредѣленіе дробнаго показателя.

Формулу извлеченія корня изъ степени, т.-е. формулу $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, мы примѣняли до сихъ поръ лишь въ томъ случаѣ, когда показатель m дѣлился на показателя n; съ цѣлью обобщенія условились примѣнять эту формулу во всѣхъ случаяхъ, каковы бы ни были цѣлые показатели m и n. Такимъ образомъ, появились въ алгебрѣ количества съ **дробными показателями.**

Слѣдовательно, $\sqrt{a}$ можно замѣнить черезъ $a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a^2}$ черезъ $a^{\frac{2}{3}}$ и т. д.

Изъ тождества $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ слѣдуетъ, что **подъ дробною степенью должно понимать радикалъ, котораго показатель есть знаменатель, а показатель подкоренного количества—числитель дробнаго показателя.**

Напримѣръ: $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$; $2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$.

Дѣйствія надъ количествами съ дробными показателями.

Всѣ дѣйствія надъ количествами съ дробными показателями производятся по тѣмъ же правиламъ, какъ и надъ количествами съ показателями цѣлыми.

Такъ какъ при сложеніи и вычитаніи приходится производить дѣйствія лишь надъ коэффиціентами, то безразлично, каковы будутъ показатели, и потому все, что касается сложенія и вычитанія алгебраическихъ выраженій, въ которыя входятъ количества съ цѣлыми показателями, распространяется и на такія алгебраическія выраженія, въ которыя входятъ количества съ дробными показателями.

Обратимся къ остальнымъ дѣйствіямъ.

1) Умноженіе.

Надо доказать, что

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Такимъ образомъ, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, каковы бы ни были раціональныя числа x и y.

Напримѣръ:

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}.$$

2) Дѣленіе.

Надо доказать, что $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Такимъ образомъ, $a^x : a^y = a^{x-y}$, каковы бы ни были раціональныя числа x и y.

Напримѣръ:

$$a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{1}{14}}.$$

3) Возвышеніе въ степень.

Надо доказать, что $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}}.$$

Такимъ образомъ, $(a^x)^y = a^{xy}$, каковы бы ни были раціональныя числа x и y.

Напримѣръ:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2}} = a.$$

4) Извлеченіе корня.

Надо доказать, что $\sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{p}{q} : n}$.

$$\sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[nq]{a^p} = a^{\frac{p}{nq}} = a^{\frac{p}{q} : n}.$$

Такимъ образомъ, $\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$, каково бы ни было цѣлое положительное число n и раціональное число x.

Напримѣръ:

$$\sqrt[3]{a^{0,15}} = a^{0,15 : 3} = a^{0,05}.$$

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ.

Уравненія второй степени.

Общій видъ квадратнаго уравненія есть $ax^2+bx+c=0$, гдѣ a, b и c числа или алгебраическія выраженія, не содержащія буквы x. **§ 84.** **Виды квадратнаго уравненія.**

Раздѣливъ обѣ части уравненія $ax^2+bx+c=0$ на коэффиціентъ при x^2, т.-е. на a, получимъ:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Положимъ $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$.

Тогда полученное уравненіе приметъ видъ:

$$x^2+px+q=0.$$

Это болѣе простой видъ квадратнаго уравненія.

Если въ квадратное уравненіе не входитъ какой-нибудь членъ (кромѣ члена ax^2, такъ какъ тогда не было-бы квадратнаго уравненія), т.-е., если b или c равны 0, то квадратное уравненіе называется неполнымъ. **§ 85** **Рѣшеніе неполнаго квадратнаго уравненія вида $x^2+px=0$.**

Неполное уравненіе вида $x^2+px=0$ рѣшается слѣдующимъ образомъ:

Выведемъ x за скобки; получимъ:

$$x(x+p)=0.$$

Чтобы произведеніе было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ сомножителей былъ равенъ нулю; поэтому мы можемъ сдѣлать два предположенія:

1) $x=0$;

2) $x+p=0$, откуда $x=-p$.

Итакъ, данное уравненіе имѣетъ два рѣшенія:

$$x_1=0;\ x_2=-p.$$

Примѣры.

1) $x^2-3x=0$; $x(x-3)=0$;

слѣдовательно,

a) $x=0$, b) $x-3=0$;

откуда $x_1=0$; $x_2=3$.

2) $2x^2-5x=0$; $x^2-\frac{5}{2}x=0$; $x\left(x-\frac{5}{2}\right)=0$;

откуда a) $x=0$, b) $x-\frac{5}{2}=0$;

слѣдовательно,

$$x_1=0;\ x_2=\frac{5}{2}.$$

Рѣшеніе неполнаго квадратнаго уравненія вида: $x^2+q=0$.

Разсмотримъ рѣшеніе неполнаго квадратнаго уравненія вида $x^2+q=0$.

Преобразуемъ это уравненіе:

$$x^2+q=0;\ x^2-(-q)=0;\ x^2-(\sqrt{-q})^2=0;$$

откуда

$$x-(\sqrt{-q})(x+\sqrt{-q})=0.$$

Чтобы произведеніе было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ сомножителей былъ равенъ нулю. Значитъ, мы можемъ сдѣлать два предноложенія:

1) $x-\sqrt{-q}=0$, откуда $x=\sqrt{-q}$;

2) $x+\sqrt{-q}=0$, откуда $x=-\sqrt{-q}$.

Итакъ, данное уравненіе имѣетъ два рѣшенія:

$$x_1=\sqrt{-q} \text{ и } x_2=-\sqrt{-q}.$$

Разсматривая полученныя рѣшенія, мы приходимъ къ слѣдующему правилу: чтобы рѣшить уравненіе вида $x^2+q=0$, надо извлечь квадратный корень изъ извѣстнаго члена q, взятаго съ обратнымъ знакомъ; этотъ корень, взятый со знакомъ $(+)$, будетъ одно рѣшеніе, а взятый со знакомъ $(-)$— другое рѣшеніе даннаго уравненія.

Примѣры.

1) $x^2-16=0$ или $x^2=16$; слѣдовательно, $x=\pm\sqrt{16}$, откуда $x_1=4$; $x_2=-4$;

2) $x^2+9=0$; $x^2=-9$;

откуда $x=\pm\sqrt{-9}$.

При рѣшеніи уравненія $x^2+q=0$ можетъ случиться, какъ въ послѣднемъ примѣрѣ, что придется извлекать квадратный корень изъ отрицательнаго числа. Квадратный корень изъ отрицательнаго числа есть, какъ извѣстно, мнимое число. Поэтому, такіе корни квадратнаго уравненія называются **мнимыми**; тѣ же корни, которые выражаются вещественными числами, раціональными или ирраціональными, называются **вещественными**.

Такимъ образомъ, въ уравненіи $q^2+9=0$ оба корня мнимые[1]).

§ 80.

Рѣшеніе полнаго квадратнаго уравненія вида: $x^2+px+q=0$.

Полное квадратное уравненіе вида $x^2+px+q=0$ мы будемъ рѣшать слѣдующимъ образомъ:

Перенесемъ извѣстный членъ q въ правую часть уравненія и будемъ разсматривать x^2 и px, какъ первые два члена квадрата двучлена $A+B$, т.-е. $A^2=x^2$ и $2A \,.\, B=px$.

Отсюда мы можемъ найти оба члена искомаго двучлена.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\text{a) } A=x;\ \text{b) } 2x\,.\,B=px;$$

откуда находимъ

$$B=px:2x=\frac{p}{2}.$$

---

[1]) Въ цѣляхъ обобщенія условились квадратному корню изъ отрицательнаго числа придавать также два значенія, отличающіяся только знакомъ $(\pm)$.

Слѣдовательно, чтобы первая часть уравненія была квадратомъ двучлена, достаточно къ обѣимъ частямъ уравненія придать $\left(\frac{p}{2}\right)^2$; получимъ

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

или

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Извлечемъ квадратный корень изъ обѣихъ частей уравненія; получимъ

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};$$

откуда находимъ

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

или

$$\begin{cases} x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \\ x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \end{cases}$$

Итакъ, полное квадратное уравненіе имѣетъ два рѣшенія.

Сравнивая полученныя формулы съ даннымъ уравненіемъ, заключаемъ, что **корень квадратнаго уравненія вида:** $x^2+px+q=0$ **равенъ половинѣ коэффиціента при неизвѣстной въ первой степени, взятаго съ обратнымъ знакомъ, плюсъ (+) или минусъ (—) квадратный корень изъ квадрата этой половины, сложеннаго съ извѣстнымъ членомъ, взятымъ съ обратнымъ знакомъ.**

Рѣшеніе уравненія вида: $ax^2+bx+c=0$.

Раздѣлимъ обѣ части уравненія вида $ax^2+bx+c=0$ на коэффиціентъ при x^2, т.-е. на a; получимъ:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

По извѣстной уже намъ формулѣ, находимъ:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

или

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

По этой формулѣ и рѣшаютъ квадратныя уравненія общаго вида: $ax^2+bx+c=0$.

Возьмемъ уравненіе

§ 87. **Изслѣдованіе квадратнаго уравненія.**

$$ax^2+bx+c=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Корни этого уравненія выражаются формулами:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Изслѣдуемъ эти формулы, при чемъ будемъ предполагать коэффиціентъ a положительнымъ, что всегда возможно, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы можемъ умножить обѣ части уравненія на -1 и такимъ образомъ сдѣлать коэффиціентъ a положительнымъ.

a) Если c число отрицательное, то подкоренное количество b^2-4ac будетъ число положительное; слѣдовательно, x_1 и x_2 будутъ числа вещественныя и неравныя.

b) Если c число положительное и при этомъ $b^2-4ac \geqq 0$, то корни будутъ вещественные; при чемъ, въ первомъ случаѣ корни будутъ неравные, а во второмъ—равные: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

Если же, при $c>0$, $b^2-4ac<0$, то подкоренное количество будетъ отрицательнымъ и оба корня будутъ мнимые. Легко видѣть изъ самаго уравненія, что при этомъ условіи x не можетъ имѣть вещественныхъ значеній.

Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ уравненіе (1) преобразовать такъ:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=0.$$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ, есть число положительное при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ x, такъ какъ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$, какъ квадратъ вещественнаго количества, а $\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$ вслѣдствіе условія ($b^2-4ac<0$). Слѣдовательно, выраженіе, стоящее въ скобкахъ, ни при какомъ вещественномъ значеніи x не можетъ обратиться въ нуль.

§ 88. **Свойства корней квадратнаго уравненія.** Возьмемъ уравненіе: $x^2+px+q=0$.

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

1) Сложивъ корни, получаемъ:

$$x_1+x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}+\left(-\frac{p}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=-\frac{2p}{2}=-p.$$

Слѣдовательно, **сумма корней квадратнаго уравненія вида x^2+ $+px+q=0$ равна коэффиціенту при неизвѣстной въ первой степени, взятому съ обратнымъ знакомъ.**

2) Перемноживъ корни, получаемъ:

$$x_1\,.\,x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=$$

$$=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q.$$

Слѣдовательно, **произведеніе корней квадратнаго уравненія вида $x^2+px+q=0$ равно извѣстному члену уравненія.**

Эти свойства для уравненія вида $ax^2+bx+c=0$ выразятся равенствами: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

На основаніи свойствъ корней квадратнаго уравненія рѣшаются слѣдующіе вопросы:

А. По даннымъ корнямъ квадратнаго уравненія можно возстановить самое уравненіе.

Положимъ, даны корни квадратнаго уравненія: $x_1=5$; $x_2=3$. Чтобы составить искомое уравненіе, надо найти p и q.

По первому свойству имѣемъ:

$$x_1+x_2=-p;\ 8=-p;\ p=-8.$$

По второму свойству имѣемъ:

$$x_1\,.\,x_2=q;\ q=15.$$

Слѣдовательно, искомое уравненіе будетъ:

$$x^2-8x+15=0.$$

Повѣрка:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 15 \cdot 4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2};$$

откуда

$$x_1 = \frac{8+2}{2} = 5;\ x_2 = \frac{8-2}{2} = 3.$$

В. Не рѣшая квадратнаго уравненія, можно опредѣлить знаки вещественныхъ корней уравненія по знакамъ его коэффиціентовъ.

Относительно знаковъ квадратное уравненіе можетъ быть 4-хъ видовъ [1]):

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x^2 + px + q = 0 \\ 2)\ x^2 - px + q = 0 \end{array}\right\} \text{корни вещественные, если } \left(\frac{p}{2}\right)^2 \geqq q.$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ x^2 + px - q = 0 \\ 4)\ x^2 - px - q = 0 \end{array}\right\} \text{корни всегда вещественные.}$$

1) $\left.\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 = +q \\ x_1 + x_2 = -p \end{array}\right\}$ корни имѣютъ одинаковые знаки; оба корня отрицательные.

2) $\left.\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 = +q \\ x_1 + x_2 = +p \end{array}\right\}$ корни имѣютъ одинаковые знаки; оба корня положительные.

3) $\left.\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 = -q \\ x_1 + x_2 = -p \end{array}\right\}$ корни имѣютъ разные знаки; большій по абсолютной величинѣ корень имѣетъ знакъ (—).

4) $\left.\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 = -q \\ x_1 + x_2 = +p \end{array}\right\}$ корни имѣютъ разные знаки; большій по абсолютной величинѣ корень имѣетъ знакъ (+).

Примѣры.

1) $2x^2 + 5x + 2 = 0;\ x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0.$

Оба корня отрицательные.

Повѣрка:

$$x = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4};\quad x_1 = -\frac{8}{4} = -2;$$

$$x_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

---

[1]) p и q предполагаются положительными.

2) $x^2-10x+21=0$. Оба корня положительные.

Повѣрка:

$$x=5\pm\sqrt{25-21}=5\pm2;\ x_1=7;\ x_2=3.$$

3) $x^2+6x-7=0$. Корни имѣютъ разные знаки; большій по абсолютной величинѣ корень имѣетъ знакъ (—).

Повѣрка:

$$x=-3\pm\sqrt{9+7}=-3\pm4;\ x_1=-7;\ x_2=1.$$

4) $x^2-8x-20=0$. Корни имѣютъ разные знаки; большій по абсолютной величинѣ корень имѣетъ знакъ (+).

Повѣрка:

$$x=4\pm\sqrt{16+20}=4\pm6;\ x_1=+10;\ x_2=-2.$$

§ 89.

Разложеніе трехчлена второй степени на множители.

Трехчленомъ второй степени называется многочленъ вида:

$$ax^2+bx+c.$$

Въ этомъ трехчленѣ буква x называется главной буквой. Главной буквѣ мы можемъ давать какія угодно значенія; тѣ значенія главной буквы, при которыхъ трехчленъ дѣлается равнымъ нулю, называются корнями этого трехчлена.

Чтобы найти корни трехчлена, надо данный трехчленъ приравнять нулю и рѣшить полученное квадратное уравненіе.

Возьмемъ трехчленъ ax^2+bx+c.

Выведемъ коэффиціентъ при квадратѣ главной буквы, т.-е. a, за скобки; получимъ тождество

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\ \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Приравняемъ трехчленъ, заключенный въ скобки, нулю:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Рѣшимъ полученное квадратное уравненіе; пусть корни его будутъ x_1 и x_2.

По свойству корней квадратнаго уравненія, имѣемъ:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ \text{слѣдовательно,}\ \frac{b}{a}=-(x_1+x_2).$$

$$x_1\,.\,x_2=\frac{c}{a};\ \ \text{откуда}\ \frac{c}{a}=x_1\,.\,x_2.$$

Подставивъ во вторую часть тождества (1), вмѣсто $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$, ихъ выраженія въ x_1 и x_2, получимъ:

$$ax^2+bx+c=a\ [x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2];$$
$$ax^2+bx+c=a\ [x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2];$$
$$ax^2+bx+c=a\ [x(x-x_1)-x_2(x-x_1)];$$
$$ax^2+bx+c=a\ (x-x_1)\ (x-x_2).$$

Слѣдовательно, **трехчленъ второй степени разлагается на три множителя; первый изъ нихъ есть коэффиціентъ при квадратѣ главной буквы; остальные суть разности между главной буквой и корнями трехчлена.**

Такъ какъ въ трехчленѣ x^2+px+q коэффиціентъ при квадратѣ главной буквы равенъ единицѣ, то имѣемъ:

$$x^2+px+q=(x-x_1)\ (x-x_2).$$

Примѣръ.

Пусть дано разложить на множители трехчленъ 2-й степени:

$$3x^2+x-2.$$

Приравнявъ этотъ трехчленъ нулю, получаемъ уравненіе:

$$3x^2+x-2=0.$$

Корни этого уравненія будутъ:

$$x_1=\frac{2}{3} \text{ и } x_2=-1.$$

Подставивъ найденные корни въ формулу разложенія трехчлена 2-ой степени, будемъ имѣть:

$$3x^2+x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1)=(3x-2)(x+1).$$

Слѣдствія.

1) Всякое квадратное уравненіе имѣетъ только два корня, которые мы находимъ по извѣстнымъ намъ формуламъ.

Возьмемъ квадратное уравненіе $ax^2+bx+c=0$.

Разложивъ трехчленъ второй степени ax^2+bx+c на множители, мы можемъ написать уравненіе въ видѣ:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0,$$

гдѣ x_1 и x_2 корни уравненія, найденныя по извѣстнымъ формуламъ.

Лѣвая часть уравненія представляетъ произведеніе, а для того, чтобы произведеніе было равно нулю, необходимо, чтобы одинъ изъ его сомножителей былъ равенъ нулю; ясно, что ни одинъ изъ сомножителей произведенія, представляющаго лѣвую часть даннаго уравненія, не обращается въ нуль, если вмѣсто x возьмемъ число, не равное ни x_1, ни x_2. Слѣдовательно, никакое число, кромѣ x_1 и x_2, будучи подставлено въ уравненіе вмѣсто x, не обращаетъ лѣвую часть его въ нуль.

Итакъ, другихъ корней, кромѣ x_1 и x_2, быть не можетъ.

2) Пользуясь разложеніемъ трехчлена второй степени на множители, можно возстановлять квадратныя уравненія слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, корни искомаго уравненія суть: $x_1=3$; $x_2=2$; тогда искомое уравненіе будетъ:

$$(x-3)(x-2)=0$$

или

$$x^2-5x+6=0.$$

§ 90. Формула разложенія трехчлена второй степени на множители служитъ также для рѣшенія неравенства второй степени съ одною неизвѣстною.

Рѣшеніе неравенствъ второй степени съ одною неизвѣстною.

Неравенствомъ второй степени съ одною неизвѣстною называется неравенство вида $ax^2+bx+c>0$ или вида ax^2+bx+ $+c<0$; въ этихъ неравенствахъ a можно считать числомъ положительнымъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ коэффиціентъ при второй степени неизвѣстной можно было-бы сдѣлать положительнымъ, умноживъ обѣ части неравенства на -1.

Покажемъ, какъ рѣшать неравенства того и другого вида.

$$1)\ ax^2+bx+c>0 \ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Пусть корни трехчлена ax^2+bx+c будутъ x_1 и x_2; тогда неравенство (1) можно представить въ видѣ:

$$a(x-x_1)(x-x_2)>0.$$

Такъ какъ $a>0$, то неравенство (1) приводится къ двумъ системамъ неравенствъ первой степени:

$$\begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x>x_1 \\ x>x_2 \end{cases}$$

и
$$\begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x<x_1 \\ x<x_2 \end{cases}$$

$$2)\ ax^2+bx+c<0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Пусть корни трехчлена ax^2+bx+c будутъ x_1 и x_2; тогда неравенство (2) можно представить въ видѣ:

$$a(x-x_1)(x-x_2)<0.$$

Такъ какъ $a>0$, то неравенство (2) приводится къ двумъ системамъ неравенствъ первой степени:

$$\begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \text{ откуда } x_2>x>x_1$$

и

$$\begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \text{ откуда } x_2<x<x_1.$$

Примѣры.

1) Рѣшить неравенство $3x^2-5x-2>0$.

Корни трехчлена $3x^2-5x-2$ суть $-\frac{1}{3}$ и 2; поэтому данное неравенство приводится къ двумъ системамъ неравенствъ:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{3}>0 \\ x-2>0 \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x>-\frac{1}{3} \\ x>2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x+\frac{1}{3}<0 \\ x-2<0 \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x<-\frac{1}{3} \\ x<2 \end{cases}$$

Значитъ, данному неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, большія 2, и всѣ значенія x, меньшія $-\frac{1}{3}$.

2) Рѣшить неравенство $x^2+2x-3<0$.

Корни трехчлена x^2+2x-3 суть 1 и -3; поэтому данное неравенство приводится къ двумъ системамъ неравенствъ:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+3<0 \end{cases} \quad \text{откуда } 1<x<-3$$

$$\begin{cases} x-1<0 \\ x+3>0 \end{cases} \quad \text{откуда } -3<x<1.$$

Значитъ, данному неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, большія -3 и меньшія 1.

§ 91. **Рѣшеніе простѣйшихъ системъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными.**

I. Дана система уравненій:

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

Значенія x и y, удовлетворяющія данной системѣ уравненій, являются, вмѣстѣ съ тѣмъ, корнями уравненія:

$z^2-az+b=0$, такъ какъ по свойству корней квадратнаго уравненія $z_1+z_2=a$ и $z_1z_2=b$, гдѣ

$$z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$$

$$z_2=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$$

поэтому

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \\ y=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \\ y=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \end{cases}$$

Примѣръ.

Дана система уравненій:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ xy=11. \end{cases}$$

Составляемъ уравненіе:

$$z^2-12z+11=0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, имѣемъ

$$\begin{cases} z_1=6+\sqrt{36-11}=6+\sqrt{25}=11 \\ z_2=6-\sqrt{36-11}=6-\sqrt{25}=1 \end{cases}$$

откуда
$$\begin{cases} x=11 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=11. \end{cases}$$

Система 2-хъ уравненій съ двумя неизвѣстными вида:

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

представляетъ частный случай системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, изъ которыхъ одно уравненіе второй степени, а другое—первой. Такая система рѣшается очень просто способомъ подстановки, какъ это видно на слѣдующихъ примѣрахъ:

Примѣры.

1) Рѣшить систему уравненій

$$\begin{cases} x+y=20 \\ x^2+y=400 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=20-x \\ x^2+20-x=400; \end{cases}$$

откуда
$$x^2-x-380=0.$$

Рѣшивъ полученное квадратное уравненіе, находимъ

$$x_1=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+380}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1521}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{39}{2}=20$$

$$x_2=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+380}=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1521}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{39}{2}=-19.$$

$$y_1=20-x_1=20-20=0$$

$$y_2=20-x_2=20-(-19)=39.$$

2) Рѣшить систему уравненій

$$\begin{cases} x^2+y^2=27{,}2 \\ \dfrac{11x-2y}{x-1}=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=27{,}2 \\ 11x-2y=10x-10 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+y^2=27{,}2 \\ x=2y-10. \end{cases}$$

Подставивъ въ первое уравненіе, вмѣсто x, его выраженіе въ y, получаемъ:

$$(2y-10)^2+y^2=27,2$$
$$4y^2-40y+100+y^2=27,2$$
$$5y^2-40y+72,8=0$$
$$y^2-8y+14,56=0,$$

откуда

$$y_1=4+\sqrt{16-14,56}=4+1,2=5,2$$
$$y_2=4-\sqrt{16-14,56}=4-1,2=2,8$$
$$x_1=2y_1-10=10,4-10=0,4$$
$$x_2=2y_2-10=5,6-10=-4,4.$$

II. Дана система уравненій:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a \\ xy=b. \end{cases}$$

Эту систему уравненій можно рѣшить слѣдующимъ пріемомъ: умножимъ второе уравненіе на 2 и полученное уравненіе сначала сложимъ съ первымъ уравненіемъ, а затѣмъ вычтемъ его изъ перваго уравненія.

$$\left.\begin{cases} x^2+y^2=a \\ 2xy=2b \end{cases}\right| \pm$$

$x^2+y^2+2xy=a+2b$; или $(x+y)^2=a+2b$, откуда $x+y=\pm\sqrt{a+2b}$ | $x^2+y^2-2xy=a-2b$; или $(x-y)^2=a-2b$, откуда $x-y=\pm\sqrt{a-2b}$.

Слѣдовательно, получаемъ систему:

$$\left.\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{a+2b} \\ x-y=\pm\sqrt{a-2b} \end{cases}\right| \pm$$

1) $2x=\pm(\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b})$; $x=\pm\dfrac{\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b}}{2}$

2) $2y=\pm(\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b})$; $y=\pm\dfrac{\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b}}{2}$.

Такимъ образомъ, данная система уравненій имѣетъ 4 системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2} \\ y_1=\dfrac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-\dfrac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2} \\ y_2=-\dfrac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{2} \\ y_3=\dfrac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2} \end{cases};\quad \begin{cases} x_4=-\dfrac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{2} \\ y_4=-\dfrac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2} \end{cases}$$

Примѣръ.

$$\begin{cases} x^2+y^2=82 \\ xy=9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+y^2=82 \\ 2xy=18 \end{cases} \Bigg| \pm$$

$$\left.\begin{matrix} (x+y)^2=100; & x+y=\pm 10 \\ (x-y)^2=\ 64; & x-y=\pm\ 8 \end{matrix}\right| \pm$$

$$2x=\pm 18;\quad 2x=\pm\ 2;\quad x=\pm 9 \text{ или } \pm 1.$$
$$2y=\pm\ 2;\quad 2y=\pm 18;\quad y=\pm 1 \text{ или } \pm 9.$$

Такимъ образомъ, мы получили 4 системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x_1=9 \\ y_1=1 \end{cases};\quad \begin{cases} x_2=-9 \\ y_2=-1 \end{cases};\quad \begin{cases} x_3=1 \\ y_3=9 \end{cases};\quad \begin{cases} x_4=-1 \\ y_4=-9. \end{cases}$$

§ 92. Рѣшеніе уравненій, содержащихъ радикалы.

Теорема. **Если обѣ части уравненія возвысить въ цѣлую положительную степень, то получится новое уравненіе, вообще не равносильное съ даннымъ: въ новомъ уравненіи могутъ появиться корни, не принадлежащіе данному уравненію.**

Разсмотримъ теорему на случаѣ возвышенія обѣихъ частей уравненія въ квадратъ и кубъ.

1) Положимъ, дано уравненіе $A=B$, гдѣ A и B нѣкоторыя выраженія, содержащія извѣстныя и неизвѣстныя количества.

Возвысимъ обѣ части этого уравненія въ квадратъ; получимъ новое уравненіе:

$$A^2=B^2.$$

Это уравненіе можно замѣнить равносильнымъ ему уравненіемъ:

$$A^2-B^2=0 \text{ или } (A-B)(A+B)=0.$$

Чтобы произведеніе было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ множителей былъ равенъ нулю.

Если положимъ, что $A-B=0$ или $A=B$, то получимъ данное уравненіе.

Но можно также положить, что $A+B=0$ или $A=-B$.

Это уравненіе даетъ корни, не принадлежащіе данному уравненію.

2) Положимъ, дано уравненіе $A=B$.

Возвысимъ обѣ части этого уравненія въ кубъ; получимъ новое уравненіе:

$$A^3=B^3.$$

Это уравненіе можно замѣнить равносильнымъ ему уравненіемъ:

$$A^3-B^3=0 \text{ или } (A-B)(A^2+AB+B^2)=0.$$

Если положимъ, что $A-B=0$ или $A=B$, то получимъ данное уравненіе.

Если же положимъ, что $A^2+AB+B^2=0$, то получимъ уравненіе, которое дастъ корни, посторонніе данному уравненію.

Итакъ, при возвышеніи обѣихъ частей уравненія въ степень, можно ожидать появленія постороннихъ корней. Отсюда мы получаемъ слѣдующее правило:

Если для рѣшенія уравненія придется обѣ части даннаго уравненія возвысить въ степень, то, рѣшивъ полученное новое уравненіе, надо всѣ найденные корни подставить въ данное уравненіе и отбросить тѣ изъ нихъ, которые ему не удовлетворяютъ.

Это правило надо имѣть въ виду при рѣшеніи такъ называемыхъ радикальныхъ или ирраціональныхъ уравненій, т.-е. такихъ уравненій, въ которыхъ неизвѣстныя входятъ подъ знакомъ радикала.

Для рѣшенія ирраціональныхъ уравненій ихъ замѣняютъ раціональными уравненіями, которыя получаются отъ возвышенія въ степень, примѣненнаго одинъ или нѣсколько разъ.

I. Если въ уравненіе входитъ одинъ радикалъ, то членъ, содержащій этотъ радикалъ, отдѣляютъ въ одну часть уравненія, а остальные члены въ другую часть и возвышаютъ обѣ части уравненія въ соотвѣтствующую степень.

Примѣры.

1) Рѣшить уравненіе: $x-3=\sqrt{x-3}$ [1]).

Возвышаемъ обѣ части уравненія въ квадратъ; получаемъ

[1]) Корень въ этомъ и въ послѣдующихъ примѣрахъ предполагается положительный.

$$(x-3)^2=x-3$$

или

$$x^2-6x+9=x-3$$

или

$$x^2-7x+12=0.$$

Рѣшивъ послѣднее уравненіе, находимъ

$$x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-12}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}$$

$$x_1=4;\quad x_2=3.$$

Подставимъ полученные корни въ данное уравненіе:

$$x_1=4;\ \ 4-3=\sqrt{4-3};\ \ 1=\sqrt{1};\ \ 1=1.$$

$$x_2=3;\ \ 3-3=\sqrt{3-3};\ \ 0=0.$$

Слѣдовательно, оба корня удовлетворяютъ данному уравненію.

2) Рѣшить уравненіе: $x-3=\sqrt{3-x}$.

Возвышаемъ обѣ части уравненія въ квадратъ; получаемъ

$$(x-3)^2=3-x$$

или

$$x^2-6x+9=3-x$$

или

$$x^2-5x+6=0.$$

Рѣшивъ послѣднее уравненіе, находимъ

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$$

$$x_1=3;\quad x_2=2.$$

Подставимъ найденные корни въ данное уравненіе:

$x_1=3$; $3-3=\sqrt{3-3}$; $0=0$; слѣдовательно, значеніе x, равное 3, удовлетворяетъ данному уравненію.

$x_2=2$; $2-3=\sqrt{3-2}$; $-1=1$, что не можетъ быть; поэтому значеніе x, равное 2, данному уравненію не удовлетворяетъ.

3) Рѣшить уравненіе $1-x=\sqrt{3x-5}$.

Возвышаемъ обѣ части уравненія въ квадратъ:

$$(1-x)^2=3x-5$$

или

$$1-2x+x^2=3x-5$$

или

$$x^2-5x+6=0;$$

откуда

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно, $x_1=3$ и $x_2=2$.

Подставимъ найденные корни въ данное уравненіе:

$$x_1=3;\ 1-3=\sqrt{9-5};\quad -2=2$$
$$x_2=2;\ 1-2=\sqrt{6-5};\quad -1=1.$$

Такимъ образомъ, ни одинъ изъ найденныхъ корней не удовлетворяетъ данному уравненію, и потому данное уравненіе не имѣетъ рѣшеній.

II. Если уравненіе содержитъ нѣсколько радикаловъ, то распредѣляютъ ирраціональные члены въ обѣихъ частяхъ уравненія, уединяя тотъ радикалъ, который хотятъ уничтожить.

Примѣры.

1) Рѣшить уравненіе $\sqrt{x+3}=1+\sqrt{x}$.

Возвышаемъ обѣ части уравненія въ квадратъ

$$x+3=(1+\sqrt{x})^2$$
$$x+3=1+x+2\sqrt{x}$$
$$2=2\sqrt{x}\ \text{ или }\ 1=\sqrt{x}.$$

Возвышая опять обѣ части уравненія въ квадратъ, находимъ

$$x=1.$$

Подставивъ въ данное уравненіе значеніе x, равное 1, убѣждаемся въ томъ, что оно удовлетворяетъ данному уравненію.

2) Рѣшить уравненіе $1+\sqrt{3x}-\sqrt{2x+10}=0$.

Переносимъ $\sqrt{2x+10}$ въ правую часть и возвышаемъ обѣ части полученнаго уравненія въ квадратъ, находимъ:

$$(1+\sqrt{3x})^2=2x+10$$

или

$$1+3x+2\sqrt{3x}=2x+10 \text{ или } 2\sqrt{3x}=9-x.$$

Возвышая опять обѣ части уравненія въ квадратъ, получаемъ:

$$(2\sqrt{3x})^2=(9-x)^2 \text{ или } 4 \,.\, 3x=81-18x+x^2$$

или

$$x^2-30x+81=0;$$

откуда

$$x=15\pm\sqrt{225-81}=15\pm12;$$

слѣдовательно,

$$x_1=15+12=27$$
$$x_2=15-12=3.$$

Подставимъ въ данное уравненіе значеніе x, равное 27; получимъ

$$1+\sqrt{3\,.\,27}-\sqrt{54+10}=0$$
$$1+9-8=0 \text{ или } 10=8;$$

слѣдовательно, значеніе x, равное 27, данному уравненію не удовлетворяетъ.

Теперь подставимъ въ данное уравненіе значеніе x, равное 3; получимъ

$$1+\sqrt{3\,.\,3}-\sqrt{6+10}=0$$
$$1+3-4=0 \text{ или } 4-4=0;$$

такимъ образомъ, значеніе x, равное 3, удовлетворяетъ данному уравненію.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ.

Уравненія высшихъ степеней, приводящіяся къ уравненіямъ первой и второй степени.

§ 93. **Биквадратныя уравненія.** **Биквадратнымъ уравненіемъ называется уравненіе четвертой степени вида:**

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Раздѣлимъ обѣ части этого уравненія на коэффиціентъ при x^4; получимъ: $x^4+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}=0$.

Положимъ, $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$; тогда уравненіе приметъ видъ:

$$x^4+px^2+q=0 \dots \dots \dots (1)$$

Положимъ, $x^2=y$; замѣнивъ въ уравненіи (1) x^2 черезъ y, получаемъ квадратное уравненіе:

$$y^2+py+q=0,$$

корни котораго суть:

$$y_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$y_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Тогда для опредѣленія x мы будемъ имѣть уравненія:

1) $x^2=y_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$;

откуда $x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}.$

2) $x^2=y_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};$

откуда $x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}.$

Итакъ, биквадратное уравненіе имѣетъ четыре рѣшенія, заключающіяся въ формулѣ

$$x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}.$$

Примѣръ.

Дано уравненіе $x^4-8x^2+1=0$.

Замѣняемъ въ этомъ уравненіи x^2 черезъ y; получаемъ квадратное уравненіе

$$y^2-8y+1=0,$$

корни котораго суть:

$$y_1=4+\sqrt{15} \text{ и } y_2=4-\sqrt{15}.$$

Отсюда мы имѣемъ два уравненія для опредѣленія x:

$$x^2=4+\sqrt{15} \text{ и } x^2=4-\sqrt{15},$$

которыя даютъ слѣдующія 4 рѣшенія даннаго биквадратнаго уравненія:

$$x_1=\sqrt{4+\sqrt{15}};\ x_2=-\sqrt{4+\sqrt{15}};$$
$$x_3=\sqrt{4-\sqrt{15}};\ x_4=-\sqrt{4-\sqrt{15}}.$$

§ 94.

Преобразованіе выраженія $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

Корни биквадратнаго уравненія выражаются формулою вида:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}},$$

гдѣ

$$A=-\frac{p}{2} \text{ и } B=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Посмотримъ, нельзя-ли преобразовать сложный радикалъ, т.-е. такой, въ которомъ подкоренное количество—ирраціональное выраженіе, въ формулу, содержащую только простые радикалы.

Это преобразованіе основано на слѣдующемъ свойствѣ: если мы имѣемъ равенство: $a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'}$, въ которомъ a, b, a', b' суть количества раціональныя и притомъ $\sqrt{b}$ и $\sqrt{b'}$ неизвлекомые корни, то $a=a'$ и $b=b'$.

Чтобы доказать это свойство, предположимъ, что $a>a'$ и пусть $a=a'+c$.

Подставивъ $a'+c$, вмѣсто a, въ данное равенство, получаемъ

$$a'+c+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'},$$

или

$$c+\sqrt{b}=\sqrt{b'}.$$

Возвысивъ обѣ части этого равенства въ квадратъ, находимъ:

$$(c+\sqrt{b})^2=(\sqrt{b'})^2$$

или

$$c^2+2c\sqrt{b}+b=b';$$

откуда

$$2c\sqrt{b}=b'-c^2-b$$

или

$$\sqrt{b}=\frac{b'-c^2-b}{2c}.$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ по заданію $\sqrt{b}$ неизвлекомый квадратный корень, т.-е. количество ирраціональное, а вторая часть равенства количество раціональное; слѣдовательно, наше предположеніе, что $a>a'$, невѣрно; точно также доказывается, что a не можетъ быть меньше a'.

Итакъ, $a=a'$.

Вслѣдствіе этого данное равенство принимаетъ видъ

$$a'+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'};$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\sqrt{b}=\sqrt{b'} \text{ и } b=b'.$$

Теперь займемся преобразованіемъ формулы $\sqrt{A+\sqrt{B}}$.

Положимъ $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Найдемъ, при какомъ условіи x и y будутъ раціональныя количества.

Возвысимъ обѣ части этого равенства въ квадратъ; получимъ

$$(\sqrt{A+\sqrt{B}})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$
$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}$$
$$A+\sqrt{B}=x+y+\sqrt{4xy}.$$

Изъ этого равенства, на основаніи доказаннаго свойства, имѣемъ слѣдующую систему уравненій:

$$\begin{cases} x+y=A \\ 4xy=B \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y=A \\ xy=\frac{B}{4} \end{cases}$$

Рѣшеніе полученной системы уравненій приводится, какъ мы знаемъ (§ 91), къ рѣшенію уравненія

$$z^2-Az+\frac{B}{4}=0,$$

корни котораго суть:

$$z_1=x=\frac{A}{2}+\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2-\frac{B}{4}}=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$$

$$z_2=y=\frac{A}{2}-\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2-\frac{B}{4}}=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$$

Изъ этихъ формулъ мы видимъ, что x и y будутъ раціональными количествами лишь въ томъ случаѣ, когда выраженіе A^2-B есть точный квадратъ. Поэтому лишь въ этомъ случаѣ и примѣнимо разсмотрѣнное преобразованіе $\sqrt{A+\sqrt{B}}$.

Итакъ, мы получили слѣдующее преобразованіе:

$$1)\quad \sqrt{A+\sqrt{B}}=\pm\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right).$$

Подобнымъ же образомъ, изъ равенства $\sqrt{A-\sqrt{B}}=$ $=\sqrt{x}-\sqrt{y}$, найдемъ

$$2)\quad \sqrt{A-\sqrt{B}}=\pm\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right).$$

Примѣняя выведенныя формулы преобразованія сложнаго радикала вида $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ къ примѣру рѣшенія биквадратнаго уравненія, разсмотрѣнному въ предыдущемъ §, имѣемъ

$$x_1=\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-15}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-15}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2};x_2=-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2};x_3=\sqrt{4-\sqrt{15}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-15}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-15}}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2};\ x_4=-\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}.$$

Въ формулѣ рѣшенія биквадратнаго уравненія

$$A=-\frac{p}{2} \text{ и } B=\frac{p^2}{4}-q;$$

поэтому

$$A^2-B=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q.$$

Отсюда мы приходимъ къ заключенію, что формула преобразованія сложнаго радикала $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ примѣнима къ рѣшенію биквадратнаго уравненія вида $x^4+px^2+q=0$ лишь въ томъ случаѣ, когда извѣстный членъ уравненія q есть точный квадратъ раціональнаго количества.

§ 95. **Возвратныя или симметричныя уравненія.**

Возвратнымъ или симметричнымъ уравненіемъ 4-ой степени называется уравненіе вида:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

Теорема. **Если возвратное уравненіе имѣетъ корень, равный p, то оно имѣетъ корнемъ и количество $\frac{1}{p}$.**

Такъ какъ, по условію, p есть корень уравненія (1), то имѣемъ тождество

$$ap^4+bp^3+cp^2+bp+a=0 \quad \dots\dots\dots\dots (1')$$

Подставимъ въ многочленъ, написанный въ первой части уравненія (1), вмѣсто x, $\frac{1}{p}$ и опредѣлимъ полученное значеніе многочлена. Мы будемъ имѣть

$$a\left(\frac{1}{p}\right)^4+b\left(\frac{1}{p}\right)^3+c\left(\frac{1}{p}\right)^2+b\left(\frac{1}{p}\right)+a=\frac{a}{p^4}+\frac{b}{p^3}+\frac{c}{p^2}+\frac{b}{p}+a=$$

$$=\frac{a+bp+cp^2+bp^3+ap^4}{p^4}.$$

На основаніи тождества (1′) числитель послѣдней дроби равенъ нулю; слѣдовательно, значеніе многочлена при $x=\frac{1}{p}$ равно нулю. Изъ этого мы заключаемъ, что $\frac{1}{p}$ есть также корень возвратнаго уравненія (1). Вслѣдствіе этого свойства возвратное уравненіе называется также **взаимнымъ уравненіемъ**.

Раздѣлимъ обѣ части уравненія (1) на x^2, что̀ возможно сдѣлать, такъ какъ значеніе x, равное 0, не удовлетворяетъ уравненію (1). Тогда мы получаемъ уравненіе

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

равносильное данному (1).

Группируемъ члены уравненія (2) слѣдующимъ образомъ:

$$\left(ax^2+\frac{a}{x^2}\right)+\left(bx+\frac{b}{x}\right)+c=0$$

или

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Положимъ

$$x+\frac{1}{x}=y; \quad \text{тогда} \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$$

или

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2, \quad \text{откуда} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Подставивъ въ уравненіе (3), вмѣсто $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ и $\left(x+\frac{1}{x}\right)$, ихъ выраженія въ y, получаемъ

$$a(y^2-2)+by+c=0$$

или

$$ay^2+by+(c-2a)=0.$$

Рѣшимъ полученное квадратное уравненіе и обозначимъ его корни черезъ y_1 и y_2.

Тогда для опредѣленія x имѣемъ уравненія:

$$\text{a) } x+\frac{1}{x}=y_1 \text{ или } x^2-y_1x+1=0$$

$$\text{b) } x+\frac{1}{x}=y_2 \text{ или } x^2-y_2x+1=0.$$

Рѣшивъ эти квадратныя уравненія, найдемъ всѣ четыре корня даннаго возвратнаго уравненія.

Подобнымъ образомъ рѣшается уравненіе 4-ой степени вида $ax^4\pm bx^3+cx^2\mp bx+a=0$.

§ 96. **Двучленныя уравненія.**

Двучленнымъ уравненіемъ степени n называется уравненіе вида:

$$\mathbf{A}x^n+\mathbf{B}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Рѣшеніе этого общаго вида двучленнаго уравненія можетъ быть приведено къ рѣшенію двучленнаго уравненія вида $x^n\pm 1=0$. Раздѣлимъ обѣ части уравненія (1) на A и обозначимъ абсолютную величину частнаго, полученнаго отъ дѣленія B на A, черезъ a; смотря по тому, будутъ-ли B и A имѣть одинаковые или разные знаки, получимъ $\frac{B}{A}=\pm a$ и уравненіе (1) приметъ видъ:

$$x^n\pm a=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Положимъ теперь

$$x=z\sqrt[n]{a}, \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

гдѣ $\sqrt[n]{a}$ есть ариѳметическое значеніе корня n-ой степени изъ a.

Подставляя въ уравненіе (2), вмѣсто x, $z\sqrt[n]{a}$, получаемъ

$$\left(z\sqrt[n]{a}\right)^n \pm a=0$$

или

$$az^n \pm a=0.$$

Раздѣливъ обѣ части послѣдняго уравненія на a, получимъ

$$z^n \pm 1=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Итакъ, всякое двучленное уравненіе вида (1) указанными преобразованіями приводится къ уравненію вида (3). Найдя корни уравненія (3), мы по формулѣ (*) найдемъ всѣ значенія x, удовлетворяющія уравненію (1).

Двучленныя уравненія вида $x^n+1=0$ или вида $x^n-1=0$, въ частныхъ случаяхъ, могутъ быть рѣшены разложеніемъ лѣвой части уравненія на множители.

Покажемъ это на частномъ примѣрѣ.

Примѣръ.

Рѣшить уравненіе $x^{12}-1=0$.

Разложимъ $x^{12}-1$ на простѣйшіе множители; получимъ

$$x^{12}-1=(x^6+1)(x^6-1)=[(x^2)^3+1^3](x^3-1)(x^3+1)=$$
$$=(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1).$$

Такимъ образомъ, данное уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)=0.$$

Для того, чтобы произведеніе было равно 0, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ множителей былъ равенъ 0; поэтому данное уравненіе распадается на 6 независимыхъ уравненій:

$$1)\ x^2+1=0;\quad 2)\ x^4-x^2+1=0;\quad 3)\ x-1=0;$$
$$4)\ x^2+x+1=0;\quad 5)\ x+1=0;\quad 6)\ x^2-x+1=0.$$

Рѣшивъ всѣ эти уравненія, мы получимъ 12 значеній x, удовлетворяющихъ данному двучленному уравненію.

§ 97. **Трехчленныя уравненія вида $ax^{2n}+bx^n+c=0$.**

Трехчленнымъ уравненіемъ называется уравненіе вида:

$$\mathrm{a}x^{2n}+\mathrm{b}x^n+\mathrm{c}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Биквадратное уравненіе, разсмотрѣнное ранѣе, есть частный случай трехчленнаго уравненія.

Трехчленное уравненіе рѣшается слѣдующимъ образомъ.

Положимъ $x^n=y$; тогда $x^{2n}=y^2$.

Замѣнимъ въ данномъ уравненіи (1) x^n черезъ y и x^{2n} черезъ y^2; получимъ квадратное уравненіе:

$$ay^2+by+c=0.$$

Рѣшимъ это квадратное уравненіе и обозначимъ его корни черезъ y_1 и y_2.

Тогда для опредѣленія x мы будемъ имѣть уравненія:

$$1)\ x^n=y_1 \text{ или } x^n-y_1=0$$
$$2)\ x^n=y_2 \text{ или } x^n-y_2=0.$$

Рѣшивъ эти двучленныя уравненія, найдемъ всѣ корни уравненія (1).

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ.

Прогрессіи.

I. Ариѳметическая прогрессія.

Ариѳметическою прогрессіею называется рядъ чиселъ или выраженій, изъ которыхъ каждое, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному съ однимъ и тѣмъ же числомъ или выраженіемъ. Это послѣднее число или выраженіе называется разностью прогрессіи, а количества, составляющія прогрессію, ея членами. § 98. **Ариѳметическая прогрессія. Опредѣленія.**

Для обозначенія ариѳметической прогрессіи ставится знакъ $\div$.

Примѣры.

1) $\div$ 3, 5, 7, 9, 11 .... разность прогрессіи равна 2.

2) $\div$ 10, 7, 4, 1, —2, —5 .... разность прогрессіи равна —3.

3) $\div$ a^2, a^2+b^2, a^2+2b^2 .... разность прогрессіи равна b^2.

Чтобы найти разность прогрессіи, надо изъ какого-нибудь члена ея вычесть предыдущій; это слѣдуетъ непосредственно изъ опредѣленія ариѳметической прогрессіи.

Если разность прогрессіи положительное число, то прогрессія называется **возрастающей**.

Если разность прогрессіи отрицательное число, прогрессія называется **убывающей**.

Теорема 1. **Всякій членъ ариѳметической прогрессіи, начиная со второго, равенъ первому члену ея, сложенному съ произведеніемъ, полученнымъ отъ умноженія разности прогрессіи на число предшествующихъ членовъ.** **Опредѣленіе любого члена ариѳметической прогрессіи.**

Возьмемъ прогрессію:

$$\div u_1,\ u_2,\ u_3\ .\ .\ .\ .\ u_{n-1},\ u_n,\ u_{n+1}\ .\ .\ .\ .$$

Пусть разность прогрессіи равна d.

По опредѣленію ариѳметической прогрессіи имѣемъ:

$$\begin{aligned} u_2&=u_1+d\\ u_3&=u_2+d\\ u_4&=u_3+d\\ &\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\\ u_n&=u_{n-1}+d \end{aligned}$$

Сложивъ почленно всѣ эти равенства, получаемъ:

$$u_2+u_3+u_4+\ldots+u_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}+(n-1)d$$

Сокративъ теперь въ обѣихъ частяхъ этого равенства равные члены, находимъ:

$$u_n=u_1+d(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Теорема 2. **Въ ариѳметической прогрессіи, имѣющей опредѣленное число членовъ, сумма двухъ членовъ, равноотстоящихъ отъ начала и конца прогрессіи, равна суммѣ ея крайнихъ членовъ.**

Возьмемъ прогрессію

$$\div\ a,\ b,\ c\ldots k\ldots l\ldots x,\ y,\ z,$$

гдѣ k—n-й членъ отъ начала, а l—n-й членъ отъ конца прогрессіи.

Пусть разность прогрессіи будетъ d; тогда $d=b-a$.

По предыдущей теоремѣ имѣемъ:

$$k=a+d(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\alpha)$$

Напишемъ члены данной прогрессіи въ обратномъ порядкѣ:

$$\div\ z,\ y,\ x\ldots l\ldots k\ldots c,\ b,\ a.$$

Разность этой прогрессіи равна $a-b=-d$.

По предыдущей теоремѣ находимъ:

$$l=z+(-d)(n-1)$$
$$l=z-d(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\beta)$$

Сложивъ равенства (α) и (β), получимъ:

$$k+l=a+z$$

Теорема 3. **Сумма опредѣленнаго числа членовъ ариѳметической прогрессіи равна полусуммѣ крайнихъ ея членовъ, умноженной на число членовъ.**

Опредѣленіе суммы членовъ ариѳметической прогрессіи.

Возьмемъ прогрессію:

$$\div u_1,\ u_2,\ u_3 \cdots u_{n-1},\ u_n.$$

Обозначимъ сумму членовъ этой прогрессіи черезъ S.

$$\left.\begin{array}{l} S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}+u_n \\ S=u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\cdots+u_2+u_1 \end{array}\right| +$$

$$2S=(u_1+u_n)+(u_2+u_{n-1})+(u_3+u_{n-2})+\cdots+(u_{n-1}+u_2)+(u_n+u_1)$$

Но по предыдущей теоремѣ:

$$u_1+u_n=u_2+u_{n-1}=u_3+u_{n-2}=\cdots$$

Слѣдовательно, предыдущее равенство можно написать такъ:

$$2S=(u_1+u_n)n,$$

откуда

$$S=\frac{(u_1+u_n)n}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

§ 99. **Виды задачъ, относящихся къ ариѳметической прогрессіи.**

Мы вывели два равенства:

$$u^n=u_1+d(n-1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$S=\frac{(u_1+u_n)n}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Въ эти равенства входятъ 5 количествъ: u_1, u_n, n, d, S. Слѣдовательно, зная три изъ этихъ количествъ, можно, при помощи равенствъ (1) и (2), найти два остальныя; такимъ образомъ, можно составить 10 основныхъ задачъ на ариѳметическую прогрессію [1]). Всѣ эти задачи приводятся къ рѣшенію уравненій первой или второй степени.

[1]) Вотъ эти 10 основныхъ задачъ на ариѳметическую прогрессію:

дано	найти	дано	найти	дано	найти	дано	найти
1) $n,\ d,\ S$;	$u_1,\ u_n$	4) $u_n,\ n,\ d$;	$u_1,\ S$	7) $u_1,\ n,\ d$;	$u_n,\ S$	10) $u_1,\ u_n,\ n$;	$d,\ S$.
2) $u_n,\ d,\ S$;	$u_1,\ n$	5) $u_1,\ d,\ S$;	$u_n,\ n$	8) $u_1,\ u_n,\ S$;	$n,\ d$		
3) $u_n,\ n,\ S$;	$u_1,\ d$	6) $u_1,\ n,\ S$;	$u_n,\ d$	9) $u_1,\ u_n,\ d$;	$n,\ S$		

Примѣры.

1) Дано: $u_n=34$; $n=12$; $S=210$.
Найти u_1 и d.

$$u_n=u_1+d(n-1) \qquad S=\frac{(u_1+u_n)n}{2}$$

$$34=u_1+d(12-1) \qquad 210=\frac{(u_1+34)\,12}{2}=(u_1+34)6$$

$$34=u_1+11d \qquad 35=u_1+34;\ u_1=35-34=1$$

$$34=1+11d;\ 11d=33;\ d=3.$$

Итакъ, $u_1=1$; $d=3$.

2) Дано: $u_1=1$; $d=3$; $S=210$.
Найти u_n и n.

$$u_n=u_1+d(n-1);\ u_n=1+3\,(n-1)=1+3n-3$$

или

$$u_n=3n-2\ \dots\dots\dots\dots\ (\alpha)$$

$$S=\frac{(u_1+u_n)n}{2};\ 210=\frac{(1+u_n)n}{2};\ 420=(1+u_n)n$$

или

$$420=n+u_nn\ \dots\dots\dots\dots\ (\beta)$$

Подставляя въ уравненіе (β), вмѣсто u_n, его значеніе изъ уравненія (α), получаемъ:

$$420=n+(3n-2)n=n+3n^2-2n=3n^2-n$$

или

$$n^2-\frac{1}{3}n-140=0,$$

откуда

$$n=\frac{1}{6}\pm\sqrt{\frac{1}{36}+140}=\frac{1}{6}\pm\sqrt{\frac{5041}{36}}=\frac{1}{6}\pm\frac{71}{6}$$

или

$$n_1=\frac{1}{6}+\frac{71}{6}=\frac{72}{6}=12 \text{ и } n_2=\frac{1}{6}-\frac{71}{6}=-\frac{70}{6}.$$

Очевидно, n_2 не удовлетворяетъ условіямъ задачи, потому что число членовъ прогрессіи должно быть число цѣлое и положительное.

Слѣдовательно, нужно взять $n=12$
и тогда

$$u_n=3n-2=3\ .\ 12-2=34.$$

Итакъ, $u_n=34$; $n=12$.

Задача. Между двумя данными числами a и b помѣстить p среднихъ ариѳметическихъ членовъ, т.-е. p такихъ чиселъ, которыя съ данными числами a и b составили-бы ариѳметическую прогрессію

$$\div\, a\ \underbrace{.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .}_{p \text{ членовъ}}\ b$$

Въ этой задачѣ намъ дано: $u_1=a$; $u_n=b$; $n=p+2$.

Найдемъ разность прогрессіи d.

Возьмемъ равенство (1): $u_n=u_1+d(n-1)$.

Подставивъ въ него данныя количества, получимъ

$$b=a+(p+1)d$$
$$(p+1)d=b-a$$
$$d=\frac{b-a}{p+1}.$$

Слѣдовательно, искомая прогрессія будетъ:

$$\div\, a,\ a+\frac{b-a}{p+1},\ a+\frac{2(b-a)}{p+1}\ .\ .\ .\ .\ ,\ b.$$

Слѣдствіе. Если между каждыми двумя послѣдовательными членами ариѳметической прогрессіи, имѣющей разность d, помѣстить p среднихъ ариѳметическихъ членовъ, то получимъ новую прогрессію, разность которой будетъ $\frac{d}{p+1}$.

Возьмемъ прогрессію: $\div\, a,\ b,\ c,\ \ldots\ k,\ l\ \ldots$

Положимъ, разность прогрессіи равна d.

На основаніи предыдущей задачи будемъ имѣть:

1) для чиселъ, помѣщенныхъ между a и b, разность прогрессіи $=\frac{b-a}{p+1}$;

2) для чиселъ, помѣщенныхъ между b и c, разность прогрессіи $=\frac{c-b}{p+1}$;

. . . .

для чиселъ, помѣщенныхъ между l и k, разность прогрессіи $=\frac{l-k}{p+1}$, и т. д.

Но по опредѣленію ариѳметической прогрессіи имѣемъ:

$$b-a=c-b=d-c=\ldots\ldots=l-k=d.$$

Слѣдовательно, $\frac{b-a}{p+1}=\frac{c-b}{p+1}=\ldots\ldots\ldots=\frac{l-k}{p+1}=\frac{d}{p+1}$.

Итакъ, новая прогрессія имѣетъ разность, равную $\frac{d}{p+1}$.

II. Геометрическая прогрессія.

§ 100. Геометрическая прогрессія. Опредѣленія.

Геометрическою прогрессіею называется рядъ чиселъ или выраженій, изъ которыхъ каждое, начиная со второго, равно предыдущему, умноженному на одно и то же число или выраженіе.

Это число называется **знаменателемъ** прогрессіи, а числа или выраженія, составляющія прогрессію, называются ея членами.

Примѣры.

$\div 2, 6, 18, 54\ldots\ldots$, знаменатель прогрессіи равенъ 3.

$\div 5, -10, +20, -40\ldots$, „ „ „ -2.

$\div a^2, a^2b^2, a^2b^4, a^2b^6\ldots$, „ „ „ b^2.

Геометрическая прогрессія обозначается знакомъ $\div$.

Чтобы опредѣлить знаменатель прогрессіи, надо какой-нибудь членъ ея раздѣлить на предшествующій; это слѣдуетъ непосредственно изъ опредѣленія геометрической прогрессіи.

Если абсолютная величина знаменателя прогрессіи болѣе единицы, то абсолютная величина членовъ прогрессіи, по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда, возрастаетъ; такая прогрессія называется **возрастающею**.

Если абсолютная величина знаменателя прогрессіи менѣе единицы, то абсолютная величина ея членовъ по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда убываетъ; такая прогрессія называется **убывающею**.

Теорема 1. **Всякій членъ геометрической прогрессіи, начиная со второго, равенъ первому члену ея, умноженному на степень знаменателя прогрессіи, показатель которой равенъ числу предшествующихъ членовъ.** **Опредѣленіе любого члена геометрической прогрессіи.**

Возьмемъ прогрессію: $\div u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots\ldots u_{n-1}, u_n$.

Положимъ, знаменатель прогрессіи равенъ q.

По опредѣленію геометрической прогрессіи имѣемъ:

$$u_2=u_1q$$
$$u_3=u_2q$$
$$u_4=u_3q$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$u_n=u_{n-1}q$$

Перемноживъ эти равенства, получаемъ:

$$u_2 . u_3 . u_4 \ldots\ldots u_n = u_1 . u_2 . u_3 \ldots\ldots u_{n-1} . q^{n-1}.$$

Раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на $u_2.u_3.u_4 \ldots u_{n-1}$, получимъ:

$$u_n=u_1q^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Теорема 2. **Въ геометрической прогрессіи, имѣющей опредѣленное число членовъ, произведеніе двухъ членовъ, равноотстоящихъ отъ начала и конца прогрессіи, равно произведенію крайнихъ ея членовъ.**

Возьмемъ прогрессію:

$\div a, b, c \ldots\ldots\ldots\ldots k \ldots\ldots l \ldots\ldots x, y, z$, гдѣ k—n-ый членъ отъ начала, а l—n-ый членъ отъ конца прогрессіи.

Пусть знаменатель прогрессіи будетъ q; тогда $q=\frac{b}{a}$.

По предыдущей теоремѣ имѣемъ:

$$k=a . q^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Напишемъ члены прогрессіи въ обратномъ порядкѣ:

$\div z, y, x \ldots\ldots l \ldots\ldots k \ldots\ldots c, b, a$.

Знаменатель этой прогрессіи равенъ $\frac{a}{b}$;

$$\frac{a}{b}=\frac{a:a}{b:a}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{q}.$$

По предыдущей теоремѣ имѣемъ:

$$l = z.\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}$$

или

$$l = \frac{z}{q^{n-1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta)$$

Перемноживъ равенства (α) и (β), получаемъ:

$$k.l = a.q^{n-1}.\frac{z}{q^{n-1}}$$

или

$$k.l = a.z.$$

Опредѣленіе суммы членовъ геометрической прогрессіи.

Теорема 3. **Сумма опредѣленнаго числа членовъ геометрической прогрессіи равна дроби, числитель которой есть разность между произведеніемъ послѣдняго члена на знаменатель прогрессіи и первымъ членомъ, а знаменатель разность между знаменателемъ прогрессіи и единицею.**

Возьмемъ прогрессію

$$\div\!\div u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ldots\ldots\ldots\, u_{n-1},\ u_n.$$

Пусть знаменатель этой прогрессіи равенъ q.

Обозначимъ сумму членовъ прогрессіи черезъ s, т.-е. $s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$.

По опредѣленію геометрической прогрессіи имѣемъ:

$$u_2 = u_1 q$$
$$u_3 = u_2 q$$
$$u_4 = u_3 q$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$u_n = u_{n-1} q.$$

Сложивъ эти равенства, получаемъ

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n = q\,(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_{n-1}).$$

Первая часть равенства есть $s - u_1$, а вторая часть $q\,(s - u_n)$.

Слѣдовательно,

$$s - u_1 = q\,(s - u_n).$$

Рѣшимъ это уравненіе относительно s.

$$s-u_1=sq-u_nq$$
$$u_nq-u_1=sq-s$$
$$u_nq-u_1=s(q-1);$$

откуда

$$s=\frac{u_nq-u_1}{q-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Подставивъ въ полученную формулу, вмѣсто u_n, его значеніе, получимъ другое выраженіе суммы:

$$s=\frac{u_1q^{n-1}q-u_1}{q-1}=\frac{u_1q^n-u_1}{q-1}.$$

§ 101. **Виды задачъ, относящихся къ геометрической прогрессіи.**

Мы вывели два равенства:

$$u_n=u_1q^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$s=\frac{u_nq-u_1}{q-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Въ эти равенства входятъ пять количествъ:

$$u_1,\ u_n,\ n,\ s,\ q.$$

Слѣдовательно, зная три изъ этихъ количествъ, можно опредѣлить два остальныя; такимъ образомъ составляются 10 основныхъ задачъ на геометрическую прогрессію [1]).

Задача. Между данными двумя числами a и b помѣстить p среднихъ геометрическихъ членовъ, т.-е. p такихъ чиселъ, которыя съ данными числами a и b составили-бы геометрическую прогрессію

$$\div a\ \underbrace{\ldots\ldots}_{p\ \text{членовъ}}\ b$$

Въ этой задачѣ намъ дано:

$$u_1=a;\ u_n=b;\ n=p+2.$$

---

[1]) Вотъ эти 10 основныхъ задачъ:

дано	найти	дано	найти	дано	найти	дано	найти
1) $n,\ q,\ s;$	$u_1,\ u_n$	4) $u_n,\ q,\ s;$	$u_1,\ n$	7) $u_1,\ u_n,\ s;$	$n,\ q$	10) $u_1,\ u_n,\ n;$	$q,\ s$
2) $u_n,\ n,\ q;$	$u_1,\ s$	5) $u_1,\ q,\ s;$	$u_n,\ n$	8) $u_n,\ n,\ s;$	$u_1,\ q$		
3) $u_1,\ n,\ q;$	$u_n,\ s$	6) $u_1,\ u_n,\ q;$	$n,\ s$	9) $u_1,\ n,\ s;$	$u_n,\ q$		

Изъ нихъ только три первыя приводятся къ рѣшенію уравненій 1-й степени.

Найдемъ знаменатель прогрессіи q.

Возьмемъ равенство (1): $u_n = u_1 q^{n-1}$.

Подставивъ въ это равенство данныя количества, получимъ:

$$b = aq^{p+1};$$

откуда

$$q^{p+1} = \frac{b}{a}$$

и

$$q = \sqrt[p+1]{\frac{b}{a}}.$$

Найдя знаменатель прогрессіи, можно составить прогрессію:

$\div a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \cdot \cdot \cdot \cdot b$, гдѣ $q = \sqrt[p+1]{\frac{b}{a}}$.

Слѣдствіе. Если между каждыми двумя послѣдовательными членами геометрической прогрессіи, имѣющей знаменателемъ q, помѣстить p среднихъ геометрическихъ членовъ, то получимъ новую прогрессію, знаменатель которой будетъ $\sqrt[p+1]{q}$.

Для доказательства возьмемъ прогрессію:

$\div a,\ b,\ c,\ d \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot k,\ l \cdot \cdot \cdot$

Пусть знаменатель этой прогрессіи равенъ q.

На основаніи предыдущей задачи будемъ имѣть:

1) для среднихъ геометрическихъ членовъ, помѣщенныхъ между a и b, знаменатель прогрессіи равенъ $\sqrt[p+1]{\frac{b}{a}}$;

2) для среднихъ геометрическихъ членовъ, помѣщенныхъ между b и c, знаменатель прогрессіи равенъ $\sqrt[p+1]{\frac{c}{b}}$;

3) для среднихъ геометрическихъ членовъ, помѣщенныхъ между c и d, знаменатель прогрессіи равенъ $\sqrt[p+1]{\frac{d}{c}}$;

. . . .

для среднихъ геометрическихъ членовъ, помѣщенныхъ между k и l, знаменатель прогрессіи равенъ $\sqrt[p+1]{\frac{l}{k}}$, и т. д.

Но по опредѣленію геометрической прогрессіи имѣемъ:

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\dots\dots\dots=\frac{l}{k}=q.$$

Слѣдовательно,

$$\sqrt[p+1]{\frac{b}{a}}=\sqrt[p+1]{\frac{c}{b}}=\dots\dots=\sqrt[p+1]{\frac{l}{k}}=\sqrt[p+1]{q}.$$

Итакъ, знаменатель новой прогрессіи равенъ $\sqrt[p+1]{q}$.

Опредѣленіе. Если рядъ чиселъ, составляющихъ геометрическую прогрессію, можетъ быть продолженъ безъ конца, то прогрессія называется **безконечной**. § 102. Безконечная геометрическая прогрессія.

Теорема 1. **Абсолютная величина членовъ безконечной возрастающей геометрической прогрессіи, увеличиваясь по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда, можетъ превзойти всякое, какъ угодно большое, напередъ заданное, положительное число.**

Возьмемъ прогрессію:

$$\div\div u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \dots\dots\dots u_{n-1},\ u_n,\ u_{n+1}\dots\dots$$

Положимъ, абсолютная величина q знаменателя прогрессіи >1.

Обозначимъ черезъ A какое-нибудь, какъ угодно большое, напередъ заданное положительное число и докажемъ, что всегда можно найти такое значеніе для n, при которомъ будемъ имѣть:

$$|u_{n+1}|>A.$$

Такъ какъ прогрессія возрастающая, то можно написать слѣдующій рядъ неравенствъ:

$$\begin{gathered}|u_2|>|u_1|\\|u_3|>|u_1|\\|u_4|>|u_1|\\|u_5|>|u_1|\\\dots\dots\\\dots\dots\\|u_n|>|u_1|\\|u_{n+1}|>|u_1|\end{gathered}$$

Сложивъ эти неравенства, получаемъ:

$$|u_2|+|u_3|+|u_4|+|u_5|+\ldots+|u_n|+|u_{n+1}|>|u_1|.n.$$

Слѣдовательно, и подавно:

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|+\ldots+|u_n|+|u_{n+1}|>|u_1|n.$$

Замѣнивъ первую часть неравенства соотвѣтствующею формулою, получаемъ:

$$\frac{|u_{n+1}|.q-|u_1|}{q-1}>|u_1|.n.$$

Рѣшимъ это неравенство относительно $|u_{n+1}|$:

$$\frac{|u_{n+1}|.q-|u_1|}{q-1}>|u_1|n$$

$$|u_{n+1}|.q-|u_1|>|u_1|n(q-1)$$

$$|u_{n+1}|.q>|u_1|n(q-1)+|u_1|$$

$$|u_{n+1}|>\frac{|u_1|n(q-1)+|u_1|}{q}$$

Чтобы удовлетворить доказываемому неравенству $|u_{n+1}|>A$, достаточно найти такое значеніе для n, при которомъ

$$\frac{|u_1|n(q-1)+|u_1|}{q}>A$$

Рѣшимъ это неравенство относительно n:

$$|u_1|n(q-1)+|u_1|>Aq$$

$$|u_1|n(q-1)>Aq-|u_1|$$

$$n>\frac{Aq-|u_1|}{|u_1|(q-1)}.$$

Вычисливъ эту дробь и взявъ для n цѣлое число, превышающее результатъ этого вычисленія, мы получимъ членъ u_{n+1}, абсолютная величина котораго будетъ больше A.

Такъ какъ A совершенно произвольное, какъ угодно большое число, то мы можемъ сказать, что абсолютная величина членовъ безконечной возрастающей геометрической прогрессіи при неограниченномъ возрастаніи числа ея членовъ -- возрастаетъ безпредѣльно.

Слѣдствіе. Мы доказали, что $|u_{n+1}|>A$, но $|u_{n+1}|=|u_1|q^n$, слѣдовательно,

$$|u_1|\cdot q^n>A.$$

Положимъ $u_1=1$; тогда мы получимъ:

$$q^n>A.$$

Изъ этого неравенства слѣдуетъ, что степень положительнаго числа, большаго единицы, безпредѣльно возрастаетъ при неограниченномъ возрастаніи показателя степени.

Теорема 2. **Абсолютная величина членовъ безконечной убывающей геометрической прогрессіи, уменьшаясь по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда, можетъ сдѣлаться менѣе, какъ угодно малаго, напередъ заданнаго положительнаго числа.**

Возьмемъ прогрессію:

$$\div\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots\ u_{n-1},\ u_n,\ u_{n+1}\ \ldots\ldots$$

Пусть абсолютная величина q знаменателя этой прогрессіи <1. Обозначимъ черезъ ε произвольно малое, напередъ заданное, положительное число и докажемъ, что всегда можно найти такое значеніе для n, при которомъ $|u_{n+1}|<\varepsilon$.

Такъ какъ $q<1$, то $\frac{1}{q}>1$.

Слѣдовательно (слѣдствіе теор. 1), существуетъ такое значеніе для n, при которомъ будетъ справедливо неравенство:

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n>\frac{|u_1|}{\varepsilon}\ \text{или}\ \frac{1}{q^n}>\frac{|u_1|}{\varepsilon}.$$

Умноживъ обѣ части неравенства на $q^n\varepsilon$, находимъ:

$$\varepsilon>|u_1|q^n;\ \text{но}\ |u_1|q^n=|u_{n+1}|;$$

слѣдовательно $|u_{n+1}|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Мы доказали, что, при достаточно большомъ n, $|u_1|q^n$ будетъ $<\varepsilon$, гдѣ ε произвольно малое число; если въ послѣднемъ неравенствѣ мы положимъ $u_1=1$, то получимъ:

$$q^n<\varepsilon.$$

Отсюда слѣдуетъ, что степень положительнаго числа, меньшаго единицы, безпредѣльно уменьшается при неограниченномъ возрастанiи показателя степени.

Этотъ выводъ можно выразить такъ:

$$\text{при } q<1, \ \lim q^n=0.$$

Теорема 3. **Предѣлъ суммы членовъ безконечной убывающей геометрической прогрессiи равенъ первому члену ея, раздѣленному на разность между единицею и знаменателемъ прогрессiи.**

Возьмемъ прогрессiю:

$$\div\div\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ldots u_{n-1},\ u_n,\ u_{n+1}\ \ldots\ldots$$

и пусть абсолютная величина q знаменателя прогрессiи <1.

Обозначимъ черезъ S_n сумму n первыхъ членовъ этой прогрессiи, т.-е.

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+u_n.$$

Очевидно, что, при неограниченномъ возрастанiи числа членовъ, сумма S_n будетъ величиною перемѣнною. Найдемъ ея предѣлъ.

По предыдущему имѣемъ:

$$S_n=\frac{u_n\cdot q-u_1}{q-1}.$$

Умноживъ числитель и знаменатель этой дроби на -1, получимъ:

$$S_n=\frac{u_1-u_n\cdot q}{1-q}=\frac{u_1}{1-q}-\frac{u_n\cdot q}{1-q}.$$

Отсюда получимъ:

$$\frac{u_n\cdot q}{1-q}=\frac{u_1}{1-q}-S_n.$$

Въ этомъ равенствѣ $\frac{u_1}{1-q}$ есть величина постоянная, S_n — величина перемѣнная, а $\frac{u_n\cdot q}{1-q}$ — величина безконечно малая, потому что u_n, при неограниченномъ увеличенiи n, безпредѣльно убываетъ. Слѣдовательно, въ предыдущемъ равенствѣ разность между постоянной величиной $\left(\frac{u_1}{1-q}\right)$ и перемѣнной S_n есть величина безконечно малая; поэтому, по опредѣленію предѣла перемѣнной величины, имѣемъ:

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1-q},$$

откуда, положивъ $\lim S_n = S$, находимъ:

$$S = \frac{u_1}{1-q}.$$

Примѣры.

1) Найти предѣлъ суммы: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$

$u_1=1$; $q=\frac{1}{2}:1=\frac{1}{2}$; слѣдовательно,

$$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

2) Найти предѣлъ суммы: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$

$u_1=1$; $q=-\frac{1}{2}:1=-\frac{1}{2}$; слѣдовательно,

$$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

3) Найти предѣлъ суммы: $6+4+\frac{8}{3}+\cdots$

$u_1=6$; $q=4:6=\frac{2}{3}$; слѣдовательно,

$$S=\frac{6}{1-\frac{2}{3}}=18.$$

4) Найти предѣлъ періодической десятичной дроби $0{,}2828\cdots$

$$0{,}2828\cdots=0{,}28+0{,}0028+0{,}000028+\cdots$$

$$u_1=0{,}28;\; q=\frac{0{,}0028}{0{,}28}=0{,}01.$$

Слѣдовательно,

$$S=\frac{0{,}28}{1-0{,}01}=\frac{0{,}28}{0{,}99}=\frac{28}{99}.$$

§ 102a. Безконечно возрастающая и безконечно убывающая геометрическія прогрессіи служатъ примѣрами безконечныхъ рядовъ—первая [1]) примѣромъ расходящагося ряда, а вторая сходящагося.

Сходимость и расходимость рядовъ.

Безконечный рядъ называется **сходящимся**, если сумма n первыхъ его членовъ (S_n) при безпредѣльномъ увеличеніи n стремится къ нѣкоторому предѣлу, и **расходящимся**, если абсолютная величина суммы n первыхъ его членовъ (S_n), при безпредѣльномъ увеличеніи числа n, возрастаетъ безпредѣльно, т.-е., при достаточно большомъ n, дѣлается и, при дальнѣйшемъ увеличеніи n, остается больше всякаго, напередъ заданнаго, какъ угодно большого положительнаго числа.

Примѣры.

1) Разсмотримъ, такъ называемый, гармоническій рядъ:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$$

и докажемъ, что это рядъ расходящійся.

Возьмемъ сумму n первыхъ членовъ этого ряда

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

и представимъ ее въ слѣдующемъ видѣ:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

Число слагаемыхъ въ первой суммѣ, заключенной въ скобки, будетъ 2, во второй 2^2, въ третьей 2^3 и т. д.

Взявъ такое значеніе n, чтобы въ послѣдней суммѣ было 2^{p-1} слагаемыхъ, имѣемъ:

$$n = 1 + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{p-1} = 2 + \frac{2^{p-1} \cdot 2 - 2}{2-1} = 2 + 2^p - 2 = 2^p.$$

Очевидно, въ S_n каждая сумма, заключенная въ скобки, больше $\frac{1}{2}$, и потому мы можемъ написать

$$S_n > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{p}$$

[1]) Рядомъ въ математикѣ называется рядъ чиселъ, составленный по какому-либо опредѣленному закону; рядъ считается извѣстнымъ, если извѣстенъ законъ, по которому составлены всѣ его члены.

или $$S_n > 1 + \frac{p}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

При безпредѣльномъ увеличенiи n, будетъ безпредѣльно увеличиваться p (при p конечномъ и 2^p было-бы конечное число) и вмѣстѣ съ этимъ правая часть неравенства (1), а слѣдовательно, и S_n.

Такимъ образомъ, расходимость гармоническаго ряда доказана.

2) Разсмотримъ знакоперемѣнный рядъ:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

и докажемъ, что это рядъ сходящiйся.

Составимъ суммы n первыхъ членовъ этого ряда нечетнаго и четнаго порядка, давая n послѣдовательныя значенiя, начиная съ 1:

$$S_1 = 1;\ S_3 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6};\ S_5 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) =$$
$$= \frac{47}{60};\ \ldots\ S_{2m-1}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};\ S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12};\ S_6 = 1 - \frac{1}{2} +$$
$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{37}{60};\ \ldots\ S_{2m}.$$

Мы имѣемъ такимъ образомъ два ряда чиселъ:

$$S_1 > S_3 > S_5 > \ldots > S_{2m-1}$$
$$S_2 < S_4 < S_6 < \ldots < S_{2m}$$

первый рядъ убывающiй, второй возрастающiй; каждый членъ перваго ряда больше каждаго члена втораго ряда и разность между соотвѣтствующими членами этихъ двухъ рядовъ:

$$S_{2m-1} - S_{2m} = \frac{1}{2m},$$

при достаточно большомъ $n=2m$, можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго, напередъ заданнаго, сколько угодно малаго числа.

Это показываетъ, что оба ряда имѣютъ общiй предѣлъ, т.-е., что S_n имѣетъ предѣлъ, при чемъ

$$S_1 > \lim S_n > S_2.$$

Значитъ, этотъ предѣлъ заключается между 1 и $\frac{1}{2}$; предѣлъ S_n называютъ суммою сходящагося ряда.

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ.

Логариѳмы.

§ 103. Опредѣленіе логариѳма. Основное равенство.

Опредѣленіе. **Логариѳмомъ числа N при основаніи a, гдѣ a—любое положительное число, неравное единицѣ, называется показатель степени, въ которую надо возвысить число a, чтобы получить число N.** Согласно этому опредѣленію, зависимость между числомъ N, его логариѳмомъ x и основаніемъ a выражается равенствомъ

$$N=a^x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Логариѳмъ числа N при основаніи a условились обозначать знакомъ $\log_a N$ и $\lg_a N$.

Такимъ образомъ, равенство (1) можно выразить такъ:

$$N=a^{\lg_a N}.$$

Равенство (1) связываетъ три величины: N, a и x; по двумъ изъ нихъ можно опредѣлить третью. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ рѣшенію одной изъ трехъ задачъ:

1) найти число N по данному его логариѳму при основаніи a;

2) найти логариѳмъ числа N при основаніи a;

3) найти основаніе a, при которомъ логариѳмъ числа N имѣетъ данное значеніе.

Примѣры.

1) a) Найти число, логариѳмъ котораго при основаніи 3 равенъ 2. Согласно основному равенству (1), искомое число $N=3^2=9$.

b) Найти число, логариѳмъ котораго при основаніи $\frac{1}{2}$ равенъ 4.

Искомое число

$$N=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}.$$

c) Найти число, логариѳмъ котораго, при основаніи 10, равенъ —2.

Искомое число

$$N=10^{-2}=0{,}01.$$

2) a) Найти логариѳмъ 125 при основаніи 5.

Согласно основному равенству (1), имѣемъ

$$125=5^x \text{ или } 5^3=5^x; \text{ откуда } x=3.$$

Значитъ $lg_5 125=3$.

b) Найти логариѳмъ $\frac{1}{16}$ при основаніи 2.

$$\frac{1}{16}=2^x \text{ или } 2^{-4}=2^x; \text{ откуда } x=lg_2\frac{1}{16}=-4.$$

c) Найти логариѳмъ 3 при основаніи 9.

$$3=9^x \text{ или } 3=3^{2x}; \text{ откуда } 2x=1 \text{ и } x=\frac{1}{2}, \text{ т. е. } lg_9 3=\frac{1}{2}.$$

3) a) Найти основаніе, при которомъ $lg 1000=3$.

Согласно основному равенству (1), имѣемъ

$$1000=a^3; \text{ откуда } a=\sqrt[3]{1000}=10.$$

b) Найти основаніе, при которомъ $lg\frac{1}{4}=2$.

$$\frac{1}{4}=a^2; \text{ откуда } a=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

§ 104. Основныя свойства логариѳмовъ.

Прежде чѣмъ приступать къ изложенію свойствъ логариѳмовъ, условимся предполагать N положительнымъ числомъ и степенямъ съ дробными показателями придавать лишь ариѳметическое значеніе.

При разсмотрѣніи основныхъ свойствъ логариѳмовъ мы сначала ограничимся случаемъ, когда логариѳмы будутъ числа раціональныя, а затѣмъ обобщимъ всѣ свойства на тотъ случай, когда логариѳмы будутъ числа ирраціональныя.

Свойство 1. **При всякомъ основаніи логариѳмъ основанія равенъ 1, а логариѳмъ единицы равенъ 0.**

Дѣйствительно, при $N=a$ мы имѣемъ $a=a^1$ и при $N=1$ имѣемъ $1=a^0$.

Свойство 2. **При основаніи бо̀льшемъ единицы, числа бо̀льшія единицы имѣютъ положительные логариѳмы, а числа меньшія единицы—отрицательные логариѳмы; при основаніи меньшемъ единицы, наоборотъ, числа бо̀льшія единицы имѣютъ отрицательные логариѳмы, а числа меньшія единицы—положительные логариѳмы.**

Пусть $lg_a N=\frac{p}{q}$, гдѣ $a>1$, $p>0$ и $q>0$.

Тогда $N=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$; откуда $a^p=N^q$.

p—цѣлое положительное число, a—число бо̀льшее единицы; значитъ, $a^p>1$, а потому и $N^q>1$.

Надо доказать, что $N>1$. Допустимъ противное, т.-е. предположимъ, что $N<1$ или $N=1$; но тогда и N^q будетъ меньше или равно 1, что̀ противорѣчитъ заключенію, что $N^q>1$. Значитъ, $N>1$.

Пусть теперь $lg_a N=-\frac{p}{q}$, гдѣ $a>1$, $p>0$ и $q>0$.

Тогда $N=a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$; но $a^{\frac{p}{q}}$ по доказанному больше единицы; значитъ, $N=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}<1$.

Положимъ теперь, $a<1$.

a можно замѣнить черезъ $\frac{1}{b}$, гдѣ $b>1$;

тогда $N=a^x=\left(\frac{1}{b}\right)^x=\frac{1}{b^x}$.

Если $x>0$, то $b^x>1$ и $N=a^x=\frac{1}{b^x}<1$;

если же $x<0$, то $b^x<1$ и $N=a^x=\frac{1}{b^x}>1$.

Такимъ образомъ мы доказали, что

при $a>1$, 1) $N>1$, если $lg_a N>0$

2) $N<1$, если $lg_a N<0$

при $a<1$, 1) $N<1$, если $lg_a N>0$

2) $N>1$, если $lg_a N<0$.

Отсюда обычнымъ пріемомъ доказательства отъ противнаго выводимъ, что

при $a>1$, 1) $lg_a N>0$, если $N>1$

2) $lg_a N<0$, если $N<1$

при $a<1$, 1) $lg_a N>0$, если $N<1$

2) $lg_a N<0$, если $N>1$.

Свойство 3. **При основаніи бо̀льшемъ единицы, бо̀льшее число имѣетъ бо̀льшій логариѳмъ, а при основаніи меньшемъ единицы—меньшій логариѳмъ.**

Пусть $lg_a N_1=x_1$ и $lg_a N_2=x_2$. Докажемъ, что, при $a>1$, $N_1>N_2$, если $x_1>x_2$.

$N_1=a^{x_1}$ и $N_2=a^{x_2}$; $N_1-N_2=a^{x_1}-a^{x_2}=a^{x_2}(a^{x_1-x_2}-1)$.

$a^{x_1-x_2}>1$, такъ какъ $x_1-x_2>0$; значитъ, $a^{x_1-x_2}-1>0$;

$a^{x_2}>0$ и $a^{x_1-x_2}-1>0$, поэтому и $N_1-N_2=a^{x_2}(a^{x_1-x_2}-1)>0$ или $N_1>N_2$.

Такимъ же образомъ доказывается, что, при $a>1$, $x_1>x_2$, если $N_1>N_2$.

Теперь докажемъ, что, при $a<1$, $N_1<N_2$, если $x_1>x_2$.

$N_1-N_2=a^{x_1}-a^{x_2}=a^{x_2}(a^{x_1-x_2}-1)$

$x_1-x_2>0$; при $a<1$, $a^{x_1-x_2}<1$ и потому $a^{x_1-x_2}-1<0$.

$a^{x_2}>0$ и $a^{x_1-x_2}-1<0$; значитъ, $N_1-N_2<0$ или $N_1<N_2$.

Такимъ же образомъ доказывается, что, при $a<1$, $x_1<x_2$ если $N_1>N_2$.

Не трудно показать, какимъ образомъ можетъ быть найденъ логариѳмъ, точный или приближенный, всякаго положительнаго числа, при положительномъ основаніи, неравномъ 1.

Пусть требуется найти логариѳмъ x положительнаго числа N при положительномъ основаніи a; по опредѣленію,

$$N=a^x.$$

Если число N представляетъ степень a, показатель которой равенъ $\frac{p}{q}$, тогда $\frac{p}{q}$ и будетъ логариѳмомъ числа N при основаніи a; напримѣръ,

$$2=4^{\frac{1}{2}}; \text{ значитъ, } \frac{1}{2}=lg_4 2$$

или
$$100=10^2; \text{ значитъ, } 2=lg_{10}100.$$

Если число N не представляетъ нѣкоторой степени a съ раціональнымъ показателемъ, въ такомъ случаѣ число N не будетъ имѣть раціональнаго логариѳма; но тогда можно найти два раціональныхъ числа, отличающіяся на данную величину, между которыми заключался-бы логариѳмъ числа N.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется найти логариѳмъ числа N при основаніи a съ точностью до $\frac{1}{k}$, гдѣ k нѣкоторое цѣлое положительное число.

Возвысимъ обѣ части уравненія

$$N=a^x$$

въ k-ую степень;
тогда имѣемъ $N^k=a^{kx}$.

Вычисляемъ N^k и находимъ двѣ послѣдовательныя цѣлыя степени a, между которыми заключалось-бы число N^k; пусть показатели этихъ степеней будутъ m и $m+1$.

Тогда, $a^m<N^k<a^{m+1}$ при $a>1$ и $a^m>N^k>a^{m+1}$ при $a<1$

или $a^m<a^{kx}<a^{m+1}$ при $a>1$ и $a^m>a^{kx}>a^{m+1}$ при $a<1$; откуда, на основаніи свойства 3,

$$m<kx<m+1$$

или
$$\frac{m}{k}<x<\frac{m+1}{k},$$

такъ какъ k положительное число.

Такимъ образомъ, мы получили два приближенныхъ раціональныхъ значеній x, съ точностью до $\frac{1}{k}$, одно съ недостаткомъ, а другое съ избыткомъ.

Такъ какъ k совершенно произвольное цѣлое положительное число, то мы можемъ всегда опредѣлить логариѳмъ положительнаго числа при положительномъ основаніи, съ любою степенью точности.

Пусть, напримѣръ, надо найти $x=lg_{10}2$ съ точностью до 0,1.

Здѣсь $a=10$, $N=2$ и $k=10$;

значитъ $$(10^x)^{10}=10^{10x}=2^{10}=1024,$$
но $$10^3<1024<10^4$$
или $$10^3<10^{10x}<10^4;$$
откуда $$3<10x<4$$
или $$0,3<x<0,4.$$

Здѣсь, 0,3 есть приближенное значеніе $lg_{10}2$ съ точностью до 0,1 съ недостаткомъ, а 0,4 — съ избыткомъ.

Свойство 4. **Безконечно малому приращенію логариѳма соотвѣтствуетъ безконечно малое приращеніе числа.**

Доказательство этого свойства основано на слѣдующей теоремѣ: **при безпредѣльномъ уменьшеніи числа α, a^α (a — положительное число, неравное 1) стремится къ предѣлу, равному 1.**

Докажемъ сначала справедливость этой теоремы для случая, когда $a > 1$. Пусть α безпредѣльно убываетъ, проходя черезъ раціональныя значенія вида $\frac{1}{n}$, гдѣ n — какъ угодно большое положительное цѣлое число.

Возьмемъ сумму членовъ геометрической прогрессіи:

$$\div\!\div 1,\ a^{\frac{1}{n}},\ a^{\frac{2}{n}}, \cdots\cdots a^{\frac{n-1}{n}}$$

$$1 + a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{2}{n}} + \cdots\cdots + a^{\frac{n-1}{n}} = \frac{a^{\frac{n-1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} - 1}{a^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

Такъ какъ, при $a > 1$, всѣ члены этой прогрессіи, кромѣ перваго, больше 1, то, замѣняя въ лѣвой части послѣдняго равенства всѣ слагаемыя единицею, мы эту часть равенства уменьшимъ и потому равенство обратится въ неравенство:

$$n < \frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}} - 1},$$

откуда

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

При безпредѣльномъ увеличеніи числа n, правая часть неравенства безпредѣльно уменьшается, т.-е. дѣлается менѣе всякаго произвольно малаго числа, а потому и лѣвая часть неравенства, т.-е. $a^{\frac{1}{n}} - 1$, дѣлается менѣе всякаго произвольно малаго числа; значитъ, $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Теперь покажемъ, что теорема остается справедливой, если α безпредѣльно уменьшается, проходя черезъ какія угодно положительныя раціональныя значенія.

Пусть

$$\alpha = \frac{p}{q}, \text{ при чемъ } \frac{p}{q} > 0.$$

$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p:p}{q:p}} = a^{\frac{1}{q:p}} = a^{\frac{1}{n+\frac{r}{p}}}$, гдѣ n есть частное, полученное при дѣленіи q на p, и r—остатокъ.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+\frac{r}{p}} > \frac{1}{n+1} \text{ или } \frac{1}{n} > \frac{p}{q} > \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда, согласно 3-му свойству, $a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{p}{q}} > a^{\frac{1}{n+1}}$

и

$$a^{\frac{p}{q}} - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Правая часть этого неравенства, при безпредѣльномъ увеличеніи n, безпредѣльно уменьшается, а потому безпредѣльно уменьшается и лѣвая часть неравенства; а это показываетъ, что $\lim a^{\frac{p}{q}} = 1$.

Предположимъ теперь, что α безпредѣльно уменьшается, проходя черезъ раціональныя отрицательныя значенія.

Пусть $\alpha = -\alpha'$, гдѣ $\alpha' > 0$.

$$a^{\alpha} = a^{-\alpha'} = \frac{1}{a^{\alpha'}}$$

$$\lim a^{\alpha} = \lim \frac{1}{a^{\alpha'}} = \frac{1}{\lim a^{\alpha'}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Наконецъ, докажемъ, что теорема остается справедливою и въ томъ случаѣ, если основаніе a будетъ меньше единицы.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $a = \frac{1}{b}$, гдѣ $b > 1$.

$$a^{\alpha} = \left(\frac{1}{b}\right)^{\alpha} = \frac{1}{b^{\alpha}};$$

слѣдовательно,

$$\lim a^{\alpha} = \lim \left(\frac{1}{b^{\alpha}}\right) = \frac{1}{\lim b^{\alpha}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Теперь мы можемъ обратиться къ доказательству 4-го свойства.

Пусть $lg_a N_1 = x_1$ и $lg_a N_2 = x_2$.

Предположимъ, что разность x_1-x_2 безконечно мала.

$$a^{x_1}-a^{x_2}=a^{x_2}(a^{x_1-x_2}-1)$$

a^{x_2} конечная величина, разность же: $a^{x_1-x_2}-1$, согласно доказанной теоремѣ, безконечно мала, а потому и произведеніе ихъ, т.-е. $a^{x_2}(a^{x_1-x_2}-1)$, безконечно мало. Значитъ, разность $a^{x_1}-a^{x_2}$ безконечно мала, что̀ и доказываетъ справедливость 4-го свойства.

Свойство 5. **При основаніи бо̀льшемъ единицы, безконечно большое число имѣетъ безконечно большой положительный логариѳмъ, а безконечно малое число имѣетъ безконечно большой, по абсолютной величинѣ, отрицательный логариѳмъ; при основаніи меньшемъ единицы, безконечно большое число имѣетъ безконечно большой, по абсолютной величинѣ, отрицательный логариѳмъ, а безконечно малое число имѣетъ безконечно большой положительный логариѳмъ.**

1) $a>1$.

Мы знаемъ, что a^x, при $a>1$ и x—цѣломъ положительномъ числѣ, безпредѣльно возрастаетъ при безпредѣльномъ возрастаніи числа x.

Покажемъ теперь, что a^x будетъ безпредѣльно возрастать и въ томъ случаѣ, если x будетъ безпредѣльно возрастать, проходя черезъ какія угодно положительныя раціональныя значенія.

Пусть $x=\frac{p}{q}$. Обозначимъ частное, получаемое при дѣленіи p на q, черезъ n; и остатокъ черезъ r; тогда $\frac{p}{q}=n+\frac{r}{q}$.

Такъ какъ $\frac{r}{q}$ правильная дробь, то

$$n<\frac{p}{q}<n+1,$$

откуда

$$a^n<a^{\frac{p}{q}}<a^{n+1}.$$

При безпредѣльномъ увеличеніи $\frac{p}{q}$, безпредѣльно увеличивается и n; но n цѣлое положительное число, поэтому, съ безпредѣльнымъ увеличеніемъ n, безпредѣльно увеличивается a^n, а вмѣстѣ съ тѣмъ и $a^{\frac{p}{q}}$, такъ какъ $a^{\frac{p}{q}}>a^n$.

Такимъ образомъ мы доказали, что, при основаніи большемъ единицы, безконечно большому положительному логариѳму соотвѣтствуетъ безконечно большое число.

Теперь предположимъ, что логариѳмъ будетъ безконечно большое, по абсолютной величинѣ, но отрицательное число; пусть $x = lg_a N = -x'$, гдѣ x'—положительное число.

Мы имѣемъ, $N = a^x = a^{-x'} = \frac{1}{a^{x'}}$.

При безпредѣльномъ увеличеніи абсолютной величины числа x, равной x', безпредѣльно увеличивается и $a^{x'}$; но если знаменатель дроби $\frac{1}{a^{x'}}$ безпредѣльно увеличивается, то сама дробь безпредѣльно уменьшается.

Такимъ образомъ мы доказали, что при безпредѣльномъ увеличеніи абсолютной величины отрицательнаго логариѳма соотвѣтствующее ему число безпредѣльно уменьшается.

2) $a < 1$.

Пусть $x = lg_a N > 0$
и пусть

$$a = \frac{1}{b},\ \text{гдѣ}\ b > 1,$$

тогда

$$N = a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}.$$

При безпредѣльномъ увеличеніи x, знаменатель дроби $\frac{1}{b^x}$ безпредѣльно увеличивается, а сама дробь безпредѣльно уменьшается; поэтому при безпредѣльномъ возрастаніи положительнаго логариѳма соотвѣтствующее ему число, при $a < 1$, безпредѣльно уменьшается.

Теперь пусть $x = lg_a N < 0$;
пусть

$$a = \frac{1}{b},\ \text{гдѣ}\ b > 1,$$

тогда

$$N = a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}.$$

При безпредѣльномъ увеличеніи абсолютной величины x, знаменатель дроби $\frac{1}{b^x}$ безпредѣльно уменьшается, а сама дробь безпредѣльно увеличивается; поэтому, при безпредѣльномъ возрастаніи абсолютной величины отрицательнаго логариѳма, соотвѣтствующее ему число, при $a<1$, безпредѣльно увеличивается.

§ 105. Распространеніе основныхъ свойствъ логариѳмовъ на ирраціональные логариѳмы.

Покажемъ, что всѣ разсмотрѣнныя свойства раціональныхъ логариѳмовъ распространяются на ирраціональные логариѳмы. Мы въ статьѣ объ ирраціональныхъ числахъ дали опредѣленіе ирраціональнаго числа, какъ числа, опредѣляемаго двумя рядами раціональныхъ чиселъ, представляющихъ приближенныя значенія этого ирраціональнаго числа. Теперь дадимъ опредѣленіе степени какого-либо положительнаго числа, показатель которой—число ирраціональное. **Подъ количествомъ a^x, гдѣ a—какое-либо положительное число, а x ирраціональное число, мы будемъ разумѣть число, опредѣляемое двумя рядами чиселъ, представляющихъ степени того же основанія, показатели которыхъ суть раціональныя числа, опредѣляющія ирраціональное число x.**

Такъ, напримѣръ, подъ $a^{\sqrt{2}}$ мы будемъ разумѣть число, опредѣляемое двумя рядами чиселъ:

$$\begin{cases} a; \ a^{1,4}; \ a^{1,41}; \dots \\ a^2; \ a^{1,5}; \ a^{1,42}; \dots \end{cases}$$

Покажемъ, основываясь на доказанныхъ свойствахъ раціональныхъ логариѳмовъ (§ 104, свойства 3 и 4), что эти два ряда чиселъ удовлетворяютъ условіямъ (A) § 76.

Въ самомъ дѣлѣ, при основаніи $a>1$, члены перваго ряда идутъ не уменьшаясь, а члены второго ряда—не увеличиваясь; каждый членъ перваго ряда меньше каждаго члена второго ряда и абсолютная величина разности соотвѣтственныхъ членовъ этихъ двухъ рядовъ безпредѣльно убываетъ.

При основаніи $a<1$, члены перваго ряда идутъ не увеличиваясь, а члены второго ряда—не уменьшаясь; каждый членъ перваго ряда больше каждаго члена второго ряда и абсолютная величина разности соотвѣтственныхъ членовъ этихъ двухъ рядовъ безпредѣльно убываетъ.

Такимъ образомъ мы можемъ опредѣлить a^x, гдѣ $a>0$ и x ирраціональное число, какъ предѣлъ ряда чиселъ, представляющихъ степени того же основанія, показатели которыхъ суть раціональныя числа, имѣющія своимъ предѣломъ ирраціональное число x.

Пусть $x = lg_a N$ есть ирраціональное число, опредѣляемое рядомъ раціональныхъ чиселъ: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k \ldots$; тогда число N, равное a^x, будетъ опредѣляться рядомъ чиселъ:

$$a^{x_1},\ a^{x_2},\ a^{x_3}, \ldots a^{x_k}, \ldots$$

Мы уже знаемъ, что каково бы ни было раціональное число x_k, a^{x_k}, при условіи придавать дробнымъ степенямъ лишь ариѳметическое значеніе, всегда число положительное. a^x при достаточно большомъ k отличается отъ a^{x_k} на величину какъ угодно малую, и потому a^{x_k} и a^x имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ [1]); слѣдовательно, $a^x > 0$.

Теперь обратимся къ разсмотрѣнію основныхъ свойствъ логариѳмовъ.

Свойство 1. **При основаніи бо̀льшемъ единицы, числа бо̀льшія единицы имѣютъ положительные логариѳмы, и числа меньшія единицы— отрицательные; при основаніи меньшемъ единицы—наоборотъ.**

Положимъ, $a > 1$; тогда $a^{x_k} > 1$ при $x_k > 0$ и $a^{x_k} < 1$ при $x_k < 0$.

Такъ какъ a^{x_k} и a^x, при достаточно большомъ k, отличаются другъ отъ друга на сколь угодно малую величину и a^{x_k} отличается отъ 1 на конечную величину, то

$$a^x > 1 \text{ при } x > 0 \text{ и } a^x < 1 \text{ при } x < 0.$$

Отсюда, обратно: $x > 0$, если $a^x > 1$ и $x < 0$, если $a^x < 1$.

Такимъ же образомъ доказывается, что, при $a < 1$,

$$a^x > 1 \text{ при } x < 0 \text{ и } a^x < 1 \text{ при } x > 0;$$

и, обратно, $x < 0$, если $a^x > 1$, и $x > 0$, если $a^x < 1$.

Свойство 2. **При основаніи бо̀льшемъ единицы, бо̀льшее число имѣетъ бо̀льшій логариѳмъ, а при основаніи меньшемъ единицы, бо̀льшее число имѣетъ меньшій логариѳмъ.**

Предварительно замѣтимъ, что дѣйствія надъ количествами съ ирраціональными показателями производятся по тѣмъ же правиламъ, какъ и дѣйствія надъ количествами съ раціональными показателями, а именно при умноженіи степеней одного

---

[1]) Только около 0 два числа, отличающіяся на безконечно малую величину, могутъ имѣть разные знаки; но a^{x_k} ни при какомъ конечномъ x_k не будетъ безконечно малою величиною.

того же количества съ ирраціональными показателями, эти показатели складываются, при дѣленіи вычитаются и т. д. [1]).

эиТеперь обратимся къ доказательству справедливости 2-го ойства.

Положимъ, $a>1$. Требуется доказать, что $a^{x_1}>a^{x_2}$, если в$_1>x_2$ (x_1 и x_2—ирраціональныя числа).

$$a^{x_1}-a^{x_2}=a^{x_2}(a^{x_1-x_2}-1)$$

$x_1-x_2>0$ и потому $a^{x_1-x_2}>1$; значитъ, $a^{x_1-x_2}-1>0$.

a^{x_2}также>0;слѣдовательно и ихъ произведеніе:$a^{x_2}(a^{x_1-x_2}-1)>0$.

Итакъ, при $x_1>x_2$, $a^{x_1}-a^{x_2}>0$, т.-е. $a^{x_1}>a^{x_2}$, и обратно $x_1>x_2$, если $a^{x_1}>a^{x_2}$, что́ и требовалось доказать.

Такимъ же образомъ доказывается, что, при $a<1$, $a^{x_1}>a^{x_2}$, если $x_1<x_2$, и обратно.

Свойство 3. **Безконечно малому приращенію логариѳма соотвѣтствуетъ безконечно малое приращеніе числа.**

Чтобы доказать справедливость этого свойства, когда логариѳмъ число ирраціональное, надо предварительно доказать, что $\lim a^\alpha$ равенъ 1 и въ томъ случаѣ, если α безпредѣльно убываетъ, проходя черезъ ирраціональныя значенія.

Безконечно малое ирраціональное число α опредѣляется рядомъ раціональныхъ чиселъ: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, \ldots$ При достаточно большомъ k, α_k какъ угодно мало отличается отъ α, а потому будетъ тоже число безконечно малое; слѣдовательно, $\lim a^{\alpha_k}=1$.

---

[1]) Пусть a^x и a^y—количества съ ирраціональными показателями, опредѣляемыя рядами:

$$\begin{cases} a^{x_1}\leqq a^{x_2}\leqq\ldots\leqq a^{x_k}\leqq \\ a^{x'_1}\geqq a^{x'_2}\geqq\ldots\geqq a^{x'_k}\geqq \end{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots a^x$$

$$\begin{cases} a^{y_1}\leqq a^{y_2}\leqq\ldots\leqq a^{y_k}\leqq \\ a^{y'_1}\geqq a^{y'_2}\geqq\ldots\geqq a^{y'_k}\geqq \end{cases}\ldots\ldots a^y$$

Тогда, произведеніе этихъ количествъ: $a^x \cdot a^y$ опредѣлится двумя рядами:

$$\begin{cases} a^{x_1+y_1}\leqq a^{x_2+y_2}\leqq\ldots\leqq a^{x_k+y_k}\leqq \\ a^{x'_1+y'_1}\geqq a^{x'_2+y'_2}\geqq\ldots\geqq a^{x'_k+y'_k}\geqq \end{cases}\ldots\ldots a^{x+y},$$

такъ какъ $x+y$ опредѣляется рядами:

$$\begin{cases} x_1+y_1\leqq x_2+y_2\leqq\ldots\leqq x_k+y_k\leqq \\ x'_1+y'_1\geqq x'_2+y'_2\geqq\ldots\geqq x'_k+y'_k\geqq \end{cases}\ldots\ldots\ldots x+y$$

Отсюда, $a^x \cdot a^y=a^{x+y}$.

Такимъ образомъ можно доказать, что $a^x:a^y=a^{x-y}$ и въ случаѣ ирраціональныхъ показателей.

a^α опредѣляется рядомъ чиселъ: a^{α_1}, a^{α_2}, ... a^{α_k}, ... и потому, при достаточно большомъ k, $a^{\alpha k}$ какъ угодно мало отличается отъ a^α; но $\lim a^{\alpha k}=1$, значитъ и $\lim a^\alpha=1$ (§ 74, теор. 2).

Теперь докажемъ, что разность $a^{x_1}-a^{x_2}$ безконечно мала, если разность x_1-x_2 безконечно мала.

$a^{x_1}-a^{x_2}=a^{x_2}(a^{x_1-x_2}-1)$; но a^{x_2}—конечное число, а разность $(a^{x_1-x_2}-1)$—безконечно мала, поэтому и произведеніе ихъ $a^{x_2}(a^{x_1-x_2}-1)$—безконечно мало.

Такимъ образомъ, мы доказали, что безконечно малому приращенію логариѳма соотвѣтствуетъ безконечно малое приращеніе числа и въ томъ случаѣ, когда логариѳмъ число ирраціональное. Это свойство, распространенное на ирраціональные логариѳмы, иначе выражается такъ: **непрерывному измѣненію логариѳма числа соотвѣтствуетъ непрерывное измѣненіе самого числа**.

Кромѣ того, мы доказали, что число $N=a^x$, при постоянномъ возрастаніи своего логариѳма x, постоянно возрастаетъ при $a>1$ и постоянно убываетъ при $a<1$.

Отсюда мы выводимъ весьма важное слѣдствіе, а именно, что **каждое положительное число имѣетъ логариѳмъ и только одинъ**. Существованіе логариѳма для всякаго положительнаго числа опредѣляется тѣмъ, что **непрерывному** измѣненію логариѳма, отъ безконечно большого отрицательнаго значенія до без конечно большого положительнаго значенія, соотвѣтствуетъ **непрерывное** измѣненіе числа отъ 0 до безконечно большого положительнаго значенія.

Всякое число при опредѣленномъ основаніи имѣетъ **только одинъ** логариѳмъ; это слѣдуетъ изъ того, что, съ возрастаніемъ $x=lg_a N$, $N=a^x$ постоянно возрастаетъ или постоянно убываетъ.

Разсуждая подобнымъ образомъ, мы легко приходимъ къ обратному заключенію, что **всякому логариѳму при опредѣленномъ основаніи соотвѣтствуетъ одно опредѣленное число**.

§ 105а. Графическое изображеніе измѣненія степени a^x съ измѣненіемъ ея показателя x.

Возьмемъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя (такъ называемыя оси), $X'X$ и YY' (черт. 5) и будемъ откладывать на одной изъ нихъ ($X'X$) отъ точки O ихъ пересѣченія отрѣзки, пропорціональные значеніямъ показателя x, а на другой прямой (YY'), отъ той же точки O, отрѣзки, пропорціональные соотвѣтственнымъ значеніямъ степени a^x (при той же единицѣ масштаба). При этомъ условимся отрѣзки, пропорціональные положительнымъ значеніямъ x, откладывать вправо отъ точки O, а пропорціональные отрицательнымъ значеніямъ x, влѣво (точнѣе, пропорціональные абсолютнымъ величинамъ положительныхъ значеній x, вправо, а отрицательныхъ значеній—влѣво отъ точки O); равнымъ образомъ, отрѣзки, пропорціональные положительнымъ значеніямъ степени a^x, мы будемъ откладывать вверхъ отъ точки O, а пропорціональные отрицательнымъ значеніямъ—внизъ.

Въ концахъ отложенныхъ отрѣзковъ мы будемъ возстанавливать перпендикуляры, и тогда каждой совокупности соотвѣтственныхъ значеній x и a^x будетъ на плоскости чертежа соотвѣтствовать опредѣленная точка пересѣченія соотвѣтственныхъ перпендикуляровъ. Если мы возьмемъ цѣлый рядъ совокупныхъ значеній x и a^x, то мы получимъ цѣлый рядъ точекъ, послѣдовательное соединеніе которыхъ даетъ намъ ломаную линію. Это ломаная линія въ предѣлѣ, при безпредѣльномъ увеличеніи числа точекъ, обращается въ кривую линію, видъ и положеніе которой и дастъ намъ наглядное представленіе о ходѣ измѣненія степени a^x съ измѣненіемъ ея показателя x.

Вмѣсто того, чтобы возстанавливать перпендикуляры въ концахъ обоихъ отрѣзковъ, можно возстановить перпендикуляръ въ концѣ одного изъ нихъ (на оси $X'X$) и на этомъ перпендикулярѣ откладывать, въ соотвѣтствующую сторону, отрѣзки, пропорціональные соотвѣтственнымъ значеніямъ a^x.

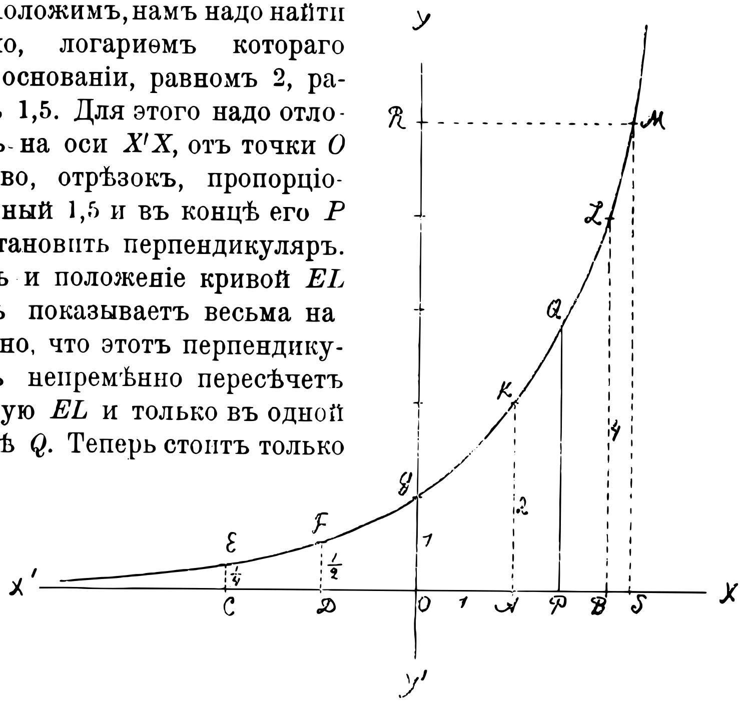
Построимъ такую кривую (черт. 5) при основаніи a, равномъ 2.

На оси $X'X$ отложимъ отрѣзки, пропорціональные значеніямъ x, т.-е. значеніямъ логариѳма числа $N=a^x$, равнымъ: —2, —1, 0, 1, 2 и т. д.; на перпендикулярахъ, возстановленныхъ въ точкахъ C, D, O, A, B и т. д., отложимъ отрѣзки, пропорціональные соотвѣтственнымъ значеніямъ числа N, равнымъ: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 и т. д.

Соединивъ точки E, F, G, K, L, мы получимъ ломаную линію, которая въ предѣлѣ обращается въ кривую EL, представляющую графически ходъ измѣненія числа съ измѣненіемъ его логариѳма при основаніи, равномъ 2.

Имѣя такую кривую, мы можемъ найти графически значеніе числа, соотвѣтствующее данному значенію его логариѳма, и наоборотъ.

Положимъ, намъ надо найти число, логариѳмъ котораго при основаніи, равномъ 2, равенъ 1,5. Для этого надо отложить на оси $X'X$, отъ точки O вправо, отрѣзокъ, пропорціональный 1,5 и въ концѣ его P возстановить перпендикуляръ. Видъ и положеніе кривой EL намъ показываетъ весьма наглядно, что этотъ перпендикуляръ непремѣнно пересѣчетъ кривую EL и только въ одной точкѣ Q. Теперь стоитъ только



Черт. 5.

измѣрить отрѣзокъ PQ въ единицѣ масштаба, и мы получимъ единственное число, логариѳмъ котораго равенъ 1,5.

Теперь рѣшимъ обратную задачу: пусть намъ надо найти графически логариѳмъ 5 при основаніи, равномъ 2.

Отложимъ на оси YY', отъ точки O вверхъ, отрѣзокъ, равный 5 единицамъ масштаба, и черезъ конецъ этого отрѣзка R проведемъ прямую, къ ней перпендикулярную, которая непремѣнно пересѣчетъ кривую EL и въ одной только точкѣ M. Изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MS на ось $X'X$, измѣримъ отрѣзокъ OS въ единицѣ масштаба и получимъ единственный логариѳмъ 5 при основаніи, равномъ 2.

§ 106. **Основныя теоремы логариѳмическаго вычисленія.**

Логариѳмическія вычисленія, т.-е. вычисленія при помощи логариѳмовъ, основаны на слѣдующихъ теоремахъ.

Теорема 1. **Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ сомножителей.**

Возьмемъ числа N, N_1, N_2.

Обозначимъ основаніе системы логариѳмовъ черезъ a. Тогда, по опредѣленію логариѳма, имѣемъ слѣдующія равенства:

$$N=a^x, \text{ гдѣ } x=lg_aN$$
$$N_1=a^{x_1}, \text{ гдѣ } x_1=lg_aN_1$$
$$N_2=a^{x_2}, \text{ гдѣ } x_2=lg_aN_2.$$

Перемножаемъ эти равенства и получаемъ:

$$NN_1N_2=a^{x+x_1+x_2};$$

отсюда

$$lg_a(N.N_1.N_2)=x+x_1+x_2.$$

Такъ какъ выводъ не зависитъ отъ того, каково будетъ положительное число a, то вообще

$$lg(N.N_1.N_2)=lg\,N+lg\,N_1+lg\,N_2.$$

Теорема 2. **Логариѳмъ частнаго равенъ разности логариѳмовъ дѣлимаго и дѣлителя.**

Возьмемъ числа N и N_1 и пусть основаніе системы логариѳмовъ равно a.

Тогда, согласно опредѣленію, имѣемъ равенства

$$N=a^x, \text{ гдѣ } x=lg_aN$$
$$N_1=a^{x_1}, \text{ гдѣ } x_1=lg_aN_1.$$

Раздѣливъ первое равенство на второе, получимъ:

$$\frac{N}{N_1}=a^{x-x_1},$$

откуда

$$lg_a\frac{N}{N_1}=x-x_1.$$

Слѣдовательно,

$$lg\frac{N}{N_1}=lg\,N-lgN_1.$$

Эту теорему можно выразить еще такъ: **логариѳмъ дроби равенъ разности логариѳмовъ числителя и знаменателя.**

Теорема 3. **Логариѳмъ степени равенъ произведенію показателя степени на логариѳмъ основанія степени**

Возьмемъ число N и пусть основаніе системы логариөмовъ равно a.

Тогда, согласно опредѣленію, имѣемъ равенство:

$$N=a^x,\text{ гдѣ } x=lg_aN.$$

Возвысимъ обѣ части этого равенства въ степень p; получимъ

$$N^p=a^{px},$$

откуда

$$lg_aN^p=px;$$

слѣдовательно,

$$lgN^p=p\ .\ lgN.$$

Теорема 4. **Логариөмъ корня равенъ логариөму подкоренного числа, раздѣленному на показатель корня.**

Возьмемъ число N и пусть основаніе системы логариөмовъ равно a.

Тогда, согласно опредѣленію, имѣемъ равенство:

$$N=a^x,\text{ гдѣ } x=lg_aN.$$

Извлечемъ корень степени p изъ обѣихъ частей этого равенства; получимъ:

$$\sqrt[p]{N}=\sqrt[p]{a^x}$$

или

$$\sqrt[p]{N}=a^{\frac{x}{p}};$$

откуда

$$lg_a\sqrt[p]{N}=\frac{x}{p};$$

слѣдовательно,

$$lg\sqrt[p]{N}=\frac{lgN}{p}=\frac{1}{p}\cdot lgN.$$

Теорему 4-ую мы можемъ, замѣнивъ извлеченіе корня возвышеніемъ въ дробную степень, разсматривать, какъ слѣдствіе теоремы 3-ей.

§ 107. **Логариөмированіе формулъ.** Логариөмировать формулу значитъ выразить логариөмъ количества, представленнаго этою формулою, при помощи логариөмовъ чиселъ, входящихъ въ формулу.

Логариөмированіе формулъ дѣлается на основаніи четырехъ теоремъ § 106.

Примѣры.

1) $lg 3ab = lg 3 + lg a + lg b$.

2) $lg 5a^3b^2 = lg 5 + lg a^3 + lg b^2 = lg 5 + 3 lg a + 2 lg b$.

3) $lg \dfrac{a^3}{b^2c^4} = lg a^3 - lg b^2c^4 = lg a^3 - (lg b^2 + lg c^4) = 3 lg a - 2 lg b - 4 lg c$.

4) $lg a^2\sqrt[3]{ab^2} = lg a^2 + lg\sqrt[3]{ab^2} = 2 lg a + \dfrac{lg ab^2}{3} = 2 lg a + \dfrac{lg a + 2 lg b}{3} =$

$$= \frac{6 lg a + lg a + 2 lg b}{3} = \frac{7 lg a + 2 lg b}{3}.$$

Обратная задача [1]). По данному выраженію логариѳма найти формулу, отъ логариѳмированія которой получилось данное выраженіе.

Примѣры.

1) Дано: $lg x = lg a + lg b + lg c$.

Логариѳмъ произведенія нѣсколькихъ чиселъ равенъ суммѣ ихъ логариѳмовъ. Отсюда обратно—сумма логариѳмовъ нѣсколькихъ чиселъ равна логариѳму произведенія этихъ чиселъ.

Поэтому, если $lg x = lg a + lg b + lg c$, то $x = abc$.

2) $lg x = 3 lg a + 2 lg b - 4 lg c - \dfrac{1}{3} lg m$.

$$lg x = lg a^3 + lg b^2 - (lg c^4 + lg\sqrt[3]{m})$$

$$lg x = lg a^3b^2 - lg c^4\sqrt[3]{m}$$

$$lg x = lg \frac{a^3b^2}{c^4\sqrt[3]{m}},$$

откуда

$$x = \frac{a^3b^2}{c^4\sqrt[3]{m}}.$$

§ 108. Свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

Десятичными или обыкновенными логариѳмами называются логариѳмы чиселъ при основаніи 10.

Слѣдовательно, всѣ свойства десятичныхъ логариѳмовъ выводятся изъ равенства:

$$N = 10^x \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ

$$x = lg_{10} N.$$

---

[1]) Эту задачу иногда называютъ потенцированіемъ.

Свойство 1. **Логариѳмы цѣлыхъ чиселъ, изображенныхъ единицею съ нулями, суть цѣлыя положительныя числа, которыя содержатъ столько единицъ, сколько нулей въ соотвѣтствующемъ числѣ.**

Для того, чтобы убѣдиться въ справедливости этого свойства, положимъ въ уравненіи (1)

$$x=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots p \text{ и т. д.};$$

получимъ

$$N=10,\ 100,\ 1000,\cdots\cdots 10^p \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно,

$$lg10=1;\ lg100=2;\ lg1000=3, \text{ и т. д.}$$

$$lg10^p=lg\underbrace{100\cdots\cdots 0}_{p\text{ нулей}}=p.$$

Свойство 2. **Логариѳмы десятичныхъ дробей, имѣющихъ числителемъ единицу, суть цѣлыя отрицательныя числа, которыя содержатъ столько единицъ, сколько нулей въ знаменателѣ десятичной дроби.**

Для того, чтобы убѣдиться въ справедливости этого свойства, положимъ въ уравненіи (1)

$$x=-1,\ -2,\ -3,\cdots\cdots,-p \text{ и т. д.};$$

получимъ

$$N=0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\cdots\cdots 0,\underbrace{0\cdots\cdots 1}_{p\text{ десят. знаковъ}} \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно,

$$lg0{,}1=-1;\ lg0{,}01=-2;\ lg0{,}001=-3 \text{ и т. д.}$$

$$lg0,\underbrace{00\cdots\cdots 01}_{p\text{ десят. знаковъ}}=-p.$$

Свойство 3. **Десятичный логариѳмъ цѣлаго числа, не изображеннаго единицею съ нулями, есть число ирраціональное.**

Для примѣра положимъ $N=15$.

Тогда равенство (1) напишется такъ:

$$15=10^x.$$

Покажемъ, что

а) x не можетъ быть цѣлымъ числомъ.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$10^1<15<10^2$$
$$10^1<10^x<10^2$$
$$1<x<2.$$

Слѣдовательно,

$$1<lg15<2.$$

Итакъ, $lg15$, заключаясь между 1 и 2, не можетъ быть цѣлымъ числомъ.

b) x не можетъ быть и дробнымъ числомъ.

Положимъ, $x=\frac{m}{n}$.

Тогда равенство (1) напишется такъ:

$$15=10^{\frac{m}{n}}.$$

Возвысимъ обѣ части этого равенства въ степень n; получимъ:

$$15^n=10^m.$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ въ обѣихъ частяхъ его входятъ неодинаковые первоначальные множители.

Слѣдовательно, x, т.-е. $lg15$, не можетъ быть также и дробнымъ числомъ.

Итакъ, $lg15$ есть ирраціональное число.

Теперь докажемъ это свойство десятичныхъ логариѳмовъ въ общемъ видѣ.

Пусть N цѣлое число, не представляющее цѣлой степени 10.

Тогда lgN не можетъ быть цѣлымъ числомъ, такъ какъ цѣлый логариѳмъ соотвѣтствуетъ только числу, представляющему цѣлую степень 10; но lgN не можетъ быть и дробью, такъ какъ, допустивъ, что $lgN=\frac{p}{q}$, гдѣ p и q—цѣлыя числа, мы приходимъ къ равенству $10^{\frac{p}{q}}=N$ или $10^p=N^q$, очевидно возможному только въ томъ случаѣ, если N есть цѣлая степень 10, что противорѣчитъ условію.

Значитъ, lgN есть число ирраціональное.

Ирраціональные логариѳмы вычисляются приближенно и выражаются въ десятичныхъ дробяхъ; мы будемъ пользоваться таблицами, въ которыхъ логариѳмы вычислены съ точностью до 0,00001.

Цѣлая часть десятичной дроби, выражающей логариѳмъ, называется **характеристикою** логариѳма, а дробная его часть **мантиссою**.

Свойство 4. **Характеристика логариѳма цѣлаго числа или цѣлаго числа съ дробью равна числу цифръ этого цѣлаго числа или числу цифръ цѣлой части числа, уменьшенному въ томъ и другомъ случаѣ на единицу.**

Примѣры.

1) $lg523$.

$$100<523<1000$$
$$lg100<lg523<lg1000$$
$$2<lg523<3.$$

Слѣдовательно, $lg523=2+m$, гдѣ m правильная положительная дробь; такимъ образомъ, характеристика логариѳма числа 523, имѣющаго 3 цифры, равна 2.

2) $lg27,348$.

$$10<27,348<100$$
$$lg10<lg27,348<lg100$$
$$1<lg27,348<2.$$

Слѣдовательно, $lg27,348=1+m$, гдѣ m правильная положительная дробь; такимъ образомъ, характеристика логариѳма числа 27,348, цѣлая часть котораго содержитъ двѣ цифры, равна 1.

Докажемъ свойство 4-ое въ общемъ видѣ.

Положимъ, N цѣлое число, имѣющее p цифръ и не представляющее цѣлой степени 10 или смѣшанное число, цѣлая часть котораго содержитъ p цифръ; тогда

$$\underbrace{100\cdot\cdot\cdot0}_{p-1\text{ нулей}}<N<\underbrace{100\cdot\cdot\cdot0}_{p\text{ нулей}}.$$

Отсюда (§ 105, свойство 2)

$$lg\underbrace{100\cdot\cdot\cdot0}_{p-1\text{ нулей}}<lgN<lg\underbrace{100\cdot\cdot\cdot0}_{p\text{ нулей}}$$

или

$$p-1<lgN<p;$$

слѣдовательно, $lgN=(p-1)+m$, гдѣ m нѣкоторая правильная положительная дробь.

Такимъ образомъ, характеристика логариѳма числа N равна $p-1$.

Свойство 5. **Характеристика логариѳма правильной десятичной дроби есть отрицательное число, содержащее столько единицъ, сколько ихъ въ числѣ, показывающемъ, на какомъ мѣстѣ послѣ запятой стоитъ первая значащая цифра.**

Десятичные логариѳмы чиселъ, меньшихъ единицы, суть числа отрицательныя; ихъ можно всегда преобразовать такъ, чтобы мантиссы были положительныя.

1) $-0{,}37856=-0{,}37856+1-1=-1+(1-0{,}37856)=-1+$ $+0{,}62144=\bar{1}{,}62144$.

2) $-2{,}12345=-2-0{,}12345+1-1=-3+0{,}87655=\bar{3}{,}87655$.

Обратно, логариѳмъ, имѣющій отрицательную характеристику и положительную мантиссу, можно преобразовать въ отрицательное число.

1) $\bar{2}{,}57381=-2+0{,}57381=-1{,}42619$.

2) $\bar{1}{,}90658=-1+0{,}90658=-0{,}09342$.

Такимъ образомъ, логариѳмъ десятичной дроби, меньшей единицы, можно всегда представить въ такомъ видѣ, при которомъ онъ будетъ имѣть отрицательную характеристику и положительную мантиссу.

Обращаясь къ свойству 5-му, разсмотримъ его сначала на частныхъ примѣрахъ:

Примѣры.

1) Найти характеристику $lg0{,}37$.

$$1>0{,}37>0{,}1;$$

отсюда

$$lg1>lg0{,}37>lg0{,}1,$$

т.-е.

$$0>lg0{,}37>-1.$$

Слѣдовательно, $lg0{,}37=-1+m$, гдѣ m правильная положительная дробь.

Такимъ образомъ, искомая характеристика равна -1.

2) Найти характеристику $lg0{,}00358$.

$$0{,}01>0{,}00358>0{,}001;$$

отсюда

$$lg0{,}01>lg0{,}00358>lg0{,}001$$

или

$$-2>lg0{,}00358>-3.$$

Слѣдовательно, $lg0{,}00358=-3+m$, гдѣ m правильная положительная дробь.

Такимъ образомъ, искомая характеристика равна -3.

Теперь выведемъ свойство 5-ое въ общемъ видѣ.

Пусть $N=0{,}\underbrace{0.\ .\ .}_{p\text{ десятичн. знаковъ}}\alpha\beta\gamma$, гдѣ α, β, γ обозначаютъ цифры; при чемъ α не 0.

Очевидно,

$$0{,}\underbrace{00.\ .\ .1}_{(p-1)\text{ десят. знаковъ}}>0{,}\underbrace{0.\ .\ .\alpha}_{p\text{ десятичн. знаковъ}}\beta\gamma>0{,}\underbrace{0.\ .\ .1}_{p\text{ десятичн. знаковъ}};$$

откуда (§ 105, свойство 2)

$$lg0{,}\underbrace{00.\ .\ .1}_{(p-1)\text{ десят. знаковъ}}>lg0{,}\underbrace{0.\ .\ .\alpha}_{p\text{ десятичн. знаковъ}}\beta\gamma>lg0{,}\underbrace{0.\ .\ .1}_{p\text{ десятичн. знаковъ}}$$

т.-е.

$$-(p-1)>lg0{,}\underbrace{0.\ .\ .\alpha}_{p\text{ десятичн. знаковъ.}}\beta\gamma>-p.$$

Слѣдовательно, $lg0{,}\underbrace{00.\ .\ .\alpha}_{p\text{ десятичн. знаковъ}}\beta\gamma=-p+m$, гдѣ m нѣкоторая правильная положительная дробь.

Свойства 4-ое и 5-ое показываютъ, какъ по данному числу находить цѣлую часть его логариѳма, т.-е. характеристику; мантисса же логариѳма находится при помощи логариѳмическихъ таблицъ, изложеніе устройства и употребленія которыхъ составитъ содержаніе слѣдующаго §.

***Свойство 6.* От умноженія или дѣленія числа на цѣлую степень 10, мантисса его логариѳма не измѣняется, а характеристика соотвѣтственно увеличивается или уменьшается на столько единицъ, сколько ихъ въ показателѣ степени.**

Пусть $lgN=c+m$, гдѣ c—цѣлое число и m—правильная положительная дробь, т.-е. c характеристика, а m мантисса.

1) Умножимъ число N на 10^q, гдѣ q цѣлое положительное число; находимъ

$$lg(N \,.\, 10^q) = lgN + lg10^q = c + m + q = (c+q) + m,$$

чтó и доказываетъ справедливость свойства 6-го для случая умноженія.

2) Раздѣлимъ число N на 10^q, гдѣ q цѣлое положительное число; находимъ

$$lg\frac{N}{10^q} = lgN - lg10^q = c + m - q = (c-q) + m,$$

чтó доказываетъ справедливость свойства 6-го для случая дѣленія.

Мы можемъ оба случая соединить въ одинъ, если будемъ предполагать q цѣлымъ числомъ, положительнымъ или отрицательнымъ.

Изъ этого свойства слѣдуетъ, что мантиссы логариѳмовъ десятичныхъ дробей будутъ тѣ же, чтó и цѣлыхъ чиселъ, изображенныхъ тѣми же самыми цифрами.

Напримѣръ, для чиселъ: 2368; 2,368; 23,68; 236,8; 0,2368 и т. д. мантиссы логариѳмовъ будутъ однѣ и тѣ же.

Устройство и употребленіе таблицъ логариѳмовъ Houel'я и проф. Глазенапа.

§ 109. **Устройство и употребленіе таблицъ логариѳмовъ.**

Въ таблицѣ I со 2-й до 37-й страницы даны логариѳмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 10800. Каждая страница раздѣлена широкими вертикальными полосками на пять отдѣленій, а каждое отдѣленіе—на три столбца.

Въ первомъ столбцѣ каждаго отдѣленія подъ буквою N (Numerus) помѣщено 60 цѣлыхъ чиселъ въ послѣдовательномъ порядкѣ. Во второмъ столбцѣ, подъ знакомъ *Log*, противъ каждаго числа помѣщена пятизначная мантисса его логариѳма. Въ третьемъ столбцѣ, подъ буквою D (differentia) помѣщены разности между двумя рядомъ стоящими логариѳмами. Эти разности даны, начиная съ 5-й страницы.

Задача 1. **Дано число, найти его логариѳмъ.**

Если данное число одно-, двух-, трех- или четырехзначное, то мантисса его логариѳма прямо выписывается изъ таблицы;

напримѣръ, для числа 1642 въ таблицѣ противъ этого числа находимъ мантиссу 21537; слѣдовательно,

$$mlg1642=0,21537.$$

Если требуется пріискать логариѳмъ числа, содержащаго болѣе четырехъ цифръ, напр., 39677, то въ этомъ числѣ отдѣляютъ первыя четыре цифры запятою и получаютъ число 3967,7; теперь пріисканіе мантиссы логариѳма даннаго числа приведется къ пріисканію мантиссы логариѳма четырехзначнаго числа съ дробью (§ 108, свойство 6). Очевидно, мантисса искомаго логариѳма заключается между мантиссами логариѳмовъ ближайшихъ цѣлыхъ чиселъ, а именно, между

$$\begin{array}{l} mlg3967=0,59846 \\ mlg3868=0,59857 \end{array} \quad d=11 \text{ (стотысячныхъ).}$$

и

Допускаютъ, что для чиселъ большихъ 1000 разность логариѳмовъ чиселъ, различающихся не болѣе, какъ на единицу, пропорціональна [1]) разности соотвѣтствующихъ чиселъ, а потому разность x (стотысячныхъ) между искомымъ логариѳмомъ и ближайшимъ меньшимъ (или разность мантиссъ этихъ логариѳмовъ) опредѣлится изъ пропорціи:

$x:11=0,7:1$, откуда $x=11\,.\,0,7=7,7$ или, приблизительно, 8 (стотысячнымъ).

Поэтому искомый логариѳмъ получится слѣдующимъ образомъ:

$$mlg39677=59846+8=59854 \text{ (стотысячныхъ)}$$

и

$$lg39677=4,59854.$$

Величину x можно опредѣлить также при помощи столбца *pp* (partes proportionales): помѣщенныя въ этомъ столбцѣ таблички составлены слѣдующимъ образомъ:

въ первомъ столбцѣ помѣщены цѣлыя числа отъ 1 до 9, выражающія число десятыхъ долей, а во второмъ—произве-

[1]) На самомъ дѣлѣ, какъ мы знаемъ, приращеніе логариѳма не пропорціонально приращенію соотвѣтствующаго ему числа, но ошибка, которая происходитъ отъ допущенія пропорціональности, настолько мала, что не сказывается при пользованіи пятизначными таблицами логариѳмовъ, тѣмъ болѣе, что при употребленіи этихъ таблицъ для опредѣленія числа по его логариѳму вообще не слѣдуетъ по табличной разности опредѣлять болѣе одной цифры, какъ это доказывается въ теоріи приближенныхъ вычисленій.

денія табличной разности, помѣщенной въ заголовкѣ таблички, на соотвѣтствующее число десятыхъ.

Дѣйствіе располагаютъ обыкновенно такъ:

Число	Мантисса		
3967 —	59846	+	$d=11$
0,7—	8		
$lg39677=4,59854$			

Возьмемъ еще примѣръ.

Найти $lg0,527687$.

Число	Мантисса		
5276	72230		
0,8	7,2	+	$d=9$.
0,07	0,63		
5276,87	72238		

Отсюда $lg0,527687=\bar{1},72238$.

Задача 2. **По данному логариѳму найти число.**

1) Если данная мантисса находится въ таблицѣ, то пріисканіе соотвѣтствующаго числа сводится къ простому выписыванію числа изъ таблицы. Напримѣръ,

если $lgx=3,59494$, то $x=3935$

$lgx=1,59494$ $\quad x=39,35$ и т. д.

Вообще, при отысканіи числа по данному его логариѳму слѣдуетъ пріискать по таблицѣ число и въ немъ поставить запятую на мѣстѣ, опредѣляемомъ характеристикою даннаго логариѳма.

2) Если данная мантисса не находится въ таблицѣ, то поступаютъ слѣдующимъ образомъ:

Примѣры.

1) $lgx=2,42628$; требуется найти число x.

	Мантисса	Число
ближайшая бо́льшая	42635	2669
данная	42628	x'
ближайшая меньшая	42619	2668

Вычитаемъ нижнюю строку послѣдовательно изъ верхней и средней строки; получаемъ

$$\left.\begin{matrix} 16 & 1 \\ 9 & y \end{matrix}\right\}$$

Эти числа принимаются пропорціональными [1]); слѣдовательно

$$16:9=1:y,$$

откуда

$$y=\frac{9}{16}=0{,}6 \text{ (вм. } 0{,}5625).$$

Значитъ,

$$x'=2668+0{,}6=2668{,}6.$$

Но такъ какъ характеристика даннаго логариѳма равна 2, то

$$x=266{,}86.$$

При пользованіи табличками *pp* рѣшеніе располагается такъ:

	Мантисса	Число	
данная мантисса	42628	x'	$d=16$
ближайшая меньшая мантисса	42619	2668	
	9		
	8 —	0,5	
	1		
	0,96 —	0,06	
	$x'=$	2668,56	

Слѣдовательно, $x=266{,}86$.

2) $lgx=0{,}46142$; найти x

46142	x'	
46135	— 2893	$d=15$
7		
6	— 0,4	
1		
1,05	— 0,07	
$x'=$	2893,47	

Слѣдовательно,

$$x=2{,}8935.$$

[1]) См. примѣчаніе на стр. 264.

Кромѣ разсмотрѣнныхъ таблицъ логариѳмовъ часто употребляютъ семизначныя таблицы барона Веги, обработанныя Бремикеромъ; ихъ расположеніе и употребленіе изложены въ самихъ таблицахъ.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ на вычисленія при помощи логариѳмовъ. § 110. **Вычисленіе выраженій при помощи логариѳмовъ.**

Примѣры.

1) Вычислить $(1,055)^{10}$

$$x=(1,055)^{10};\quad lgx=10lg1,055=10\ .\ 0,02325=0,2325$$

$$lgx=0,23250$$

$$\left.\begin{array}{lcl} 23274 & \text{———} & 1709 \\ 23250 & \text{———} & x' \\ 23249 & \text{———} & 1708 \end{array}\right| d=25$$

$$1 \text{ ——— } \frac{1}{25}=0,04$$

$$x=1,7080;$$

слѣдовательно,

$$(1,055)^{10}=1,708.$$

2) Вычислить $\sqrt[5]{23}$.

$$x=\sqrt[5]{23};\quad lgx=\frac{lg23}{5}=\frac{1,36173}{5}=0,27235$$

$$\left.\begin{array}{lcl} 27254 & \text{———} & 1873 \\ 27235 & \text{———} & x' \\ 27231 & \text{———} & 1872 \end{array}\right| d=23$$

$$\begin{array}{lcl} 4 & \text{———} & \\ 2,3 & \text{———} & 0,1 \\ \overline{1,7} & \text{———} & \\ 1,61 & \text{———} & 0,07 \\ \hline & x'=1872,2 & \end{array}$$

слѣдовательно,

$$x=\sqrt[5]{23}=1,8722.$$

Дѣйствія надъ логариѳмами съ отрицательною характеристикою и положительною мантиссою.

Сдѣлаемъ нѣсколько примѣровъ, показывающихъ какъ производить дѣйствія надъ логариѳмами, имѣющими отрицательную характеристику и положительную мантиссу.

Сложеніе и вычитаніе. При сложеніи и вычитаніи, мантиссы и характеристики складываются и вычитаются непосредственно.

$$1)\ \begin{array}{r} \bar{2},79543 \\ \bar{1},83651 \\ \hline \bar{2},63194 \end{array} \Big| + \qquad 2)\ \begin{array}{r} \bar{1},75483 \\ \bar{2},35241 \\ \hline 1,40242 \end{array} \Big| - \qquad 3)\ \begin{array}{r} \overset{-1+1,}{\bar{2}}\ ,35623 \\ \bar{1}\ ,96385 \\ \hline \bar{2}\ ,39238 \end{array} \ -$$

Умноженіе. a) Умноженіе на цѣлое положительное число.

При умноженіи на цѣлое положительное число характеристика и мантисса логариѳма умножаются непосредственно на это цѣлое число.

$$1)\ \begin{array}{r} \bar{1},63854 \\ \times 5 \\ \hline \bar{2},19270 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} \bar{1},39548 \\ \times 12 \\ \hline \bar{2},79096 \\ \bar{7},9548 \\ \hline \bar{8},74576 \end{array}$$

b) Умноженіе на цѣлое отрицательное число.

Въ этомъ случаѣ данный логариѳмъ представляютъ въ видѣ суммы и дѣлаютъ умноженіе по правилу умноженія двучлена на одночленъ.

$$\bar{1},65438\ .\ -3=(-1+0,65438)\,.-3=3-1,96314=1,03686.$$

Это умноженіе можно сдѣлать и иначе, а именно, преобразовавъ предварительно логариѳмъ съ отрицательною характеристикою и положительною мантиссою въ отрицательный логариѳмъ:

$$\bar{1},65438\,.-3=-0,34562\ .\ -3=1,03686.$$

Дѣленіе. Разсмотримъ три случая дѣленія логариѳма съ отрицательною характеристикою и положительною мантиссою на цѣлое число.

a) Дѣленіе на цѣлое положительное число въ томъ случаѣ, когда отрицательная характеристика дѣлится на это число.

Въ такомъ случаѣ дѣлятъ характеристику и мантиссу непосредственно.

$$\overline{4},26538 : 2 = \overline{2},13269.$$

b) Дѣленіе на цѣлое положительное число въ томъ случаѣ, когда отрицательная характеристика не дѣлится на это число. Въ такомъ случаѣ представляютъ данный логариѳмъ въ видѣ суммы, прибавляютъ къ отрицательной характеристикѣ столько отрицательныхъ единицъ, сколько нужно, чтобы получилось отрицательное число, дѣлящееся на даннаго дѣлителя, къ мантиссѣ прибавляютъ столько же положительныхъ единицъ и затѣмъ поступаютъ такъ же, какъ въ первомъ случаѣ.

$$\overline{1},38465 : 3 = (-1 + 0,38465) : 3 = (-3 + 2,38465) : 3 = -1 + \\ + 0,79488 = \overline{1},79488.$$

c) Дѣленіе на цѣлое отрицательное число.

Въ этомъ случаѣ обращаютъ данный логариѳмъ въ отрицательное число и дѣлятъ это число на даннаго дѣлителя.

$$\overline{1},75432 : -3 = (-1 + 0,75432) : -3 = -0,24568 : -3 = 0,08189.$$

Умноженіе и дѣленіе логариѳма съ отрицательною характеристикою и положительною мантиссою на дробное число приводятся къ послѣдовательному умноженію и дѣленію на цѣлое число.

§ 111.

Переходъ отъ одной системы логариѳмовъ къ другой.

Системою логариѳмовъ при данномъ основаніи называется совокупность логариѳмовъ всѣхъ положительныхъ чиселъ при этомъ основаніи.

Если мы имѣемъ логариѳмъ какого-либо положительнаго числа при какомъ-нибудь основаніи a, то легко найти логариѳмъ того же числа при всякомъ другомъ основаніи b.

Положимъ, $lg_a N = p$, гдѣ N какое угодно положительное число, и надо найти $x = lg_b N$.

Мы имѣемъ слѣдующія равенства:

$$N = a^p$$
$$N = b^x$$

откуда

$$a^p = b^x.$$

Логариѳмируя обѣ части этого равенства по извѣстной намъ системѣ, основаніе которой равно a, получаемъ

$$plg_a a = xlg_a b \text{ или, такъ какъ } lg_a a = 1,$$
$$p = x \cdot lg_a b;$$

отсюда

$$x = lg_b N = \frac{p}{lg_a b} = p \cdot \frac{1}{lg_a b},$$

т.-е.

$$lg_b N = lg_a N \cdot \frac{1}{lg_a b}.$$

Послѣднее равенство показываетъ, что для перехода отъ логариѳма числа при основаніи a къ логариѳму того же числа при основаніи b достаточно умножить первый логариѳмъ на постоянное число $\frac{1}{lg_a b}$.

Это постоянное число называется **модулемъ** системы логариѳмовъ съ основаніемъ b.

Примѣры.

При основаніи, равномъ 10, мы имѣемъ: $lg2 = 0{,}30103$; $lg3 = 0{,}47712$ и т. д.; $lg10 = 1$; $lg100 = 2$; $lg1000 = 3$ и т. д.

Найдемъ логариѳмы этихъ чиселъ при основаніи 100.

Модуль новой системы равенъ $\frac{1}{lg_{10}100} = \frac{1}{2}$.

Слѣдовательно,

$$lg_{100}2 = 0{,}30103 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}15051$$

$$lg_{100}3 = 0{,}47712 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}23856$$

$$lg_{100}10 = 1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$lg_{100}100 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$lg_{100}1000 = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5$$

и т. д.

§ 112. **Рѣшеніе показательныхъ уравненій.**

Показательнымъ уравненіемъ называется уравненіе, въ которомъ неизвѣстная величина входитъ показателемъ степени.

Разсмотримъ главные виды такихъ уравненій.

1. Рѣшеніе уравненія вида: $a^x=b$.

Логариѳмируемъ данное уравненіе; получаемъ

$$lga^x=lgb$$
$$xlga=lgb;$$

откуда

$$x=\frac{lgb}{lga}.$$

Пусть, напр., дано уравненіе:

$$2^x=3$$
$$lg2^x=lg3$$
$$x\,.\,lg2=lg3;$$

откуда

$$x=\frac{lg3}{lg2}=\frac{0,47712}{0,30103}=1,58\ldots$$

Если a и b степени одного и того же числа, то показательное уравненіе можно рѣшить безъ помощи таблицъ логариѳмовъ.

Положимъ, $a=c^m$ и $b=c^n$.

Тогда данное уравненіе приметъ видъ:

$$(c^m)^x=c^n$$

или

$$c^{mx}=c^n,$$

откуда

$$mx=n \text{ и } x=\frac{n}{m}.$$

Примѣры.

1) Рѣшить уравненіе $5^{x+2}=125$

$$5^{x+2}=5^3;$$

откуда

$$x+2=3 \text{ и } x=1.$$

2) Рѣшить уравненіе $\sqrt[3]{3^{4x-5}}=\frac{1}{27}$.

$$3^{\frac{4x-5}{3}}=3^{-3};$$

откуда

$$\frac{4x-5}{3}=-3 \text{ или } 4x-5=-9;$$

слѣдовательно,

$$4x=-4 \text{ и } x=-1.$$

2. Рѣшеніе многочленнаго уравненія вида:

$$A \,.\, a^{x+p}+B \,.\, a^x=C.$$

Выведемъ въ лѣвой части уравненія за скобки a^x; получимъ

$$a^x(A \,.\, a^p+B)=C.$$

Вычисливъ выраженіе, помѣщенное внутри скобокъ, обозначимъ полученный результатъ буквою D.

Тогда

$$a^x \,.\, D=C;$$

откуда

$$a^x=\frac{C}{D}.$$

Такимъ образомъ, рѣшеніе даннаго уравненія приводится къ рѣшенію показательнаго уравненія перваго вида.

Примѣръ.

Рѣшить уравненіе $3 \,.\, 2^{x+5}-7 \,.\, 2^{x+2}=272.$

$$2^{x+2}(3 \,.\, 2^3-7)=272$$

$$2^{x+2} \,.\, 17=272 \text{ или } 2^{x+2}=16;$$

откуда

$$x+2=4 \text{ и } x=2.$$

3. Рѣшеніе трехчленнаго показательнаго уравненія.

Трехчленнымъ показательнымъ уравненіемъ называется уравненіе вида:

$$Aa^{2x}+Ba^x+C=0.$$

Положимъ $a^x=y$, тогда $a^{2x}=y^2$.

Подставивъ въ данное уравненіе, вмѣсто a^x и a^{2x}, y и y^2, получимъ квадратное уравненіе:

$$Ay^2+By+C=0.$$

Рѣшимъ это квадратное уравненіе, и пусть корни его будутъ y_1 и y_2. Тогда для опредѣленія x будемъ имѣть уравненія:

$$1)\ a^x=y_1 \text{ и } 2)\ a^x=y_2.$$

Эти уравненія суть показательныя уравненія перваго вида, рѣшеніе которыхъ намъ извѣстно.

Примѣръ.

Рѣшить уравненіе $8 \cdot 2^{2x}-9 \cdot 2^x+1=0$.

Положимъ $2^x=y$; тогда $2^{2x}=y^2$.

Подставивъ въ данное уравненіе, вмѣсто 2^x и 2^{2x}, y и y^2, получаемъ квадратное уравненіе: $8y^2-9y+1=0$.

Рѣшивъ это уравненіе, находимъ его корни:

$$y_1=1 \text{ и } y_2=\frac{1}{8},$$

т.-е.

$$2^x=1 \text{ и } 2^x=\frac{1}{8};$$

откуда

$$x_1=1 \text{ и } x_2=-3.$$

§ 113. Рѣшеніе логариѳмическихъ уравненій.

Логариѳмическимъ уравненіемъ называется такое уравненіе, въ которомъ неизвѣстная входитъ подъ знакомъ lg.

Логариѳмическія уравненія можно рѣшать однимъ изъ слѣдующихъ способовъ:

а) Опредѣливъ, если это возможно, изъ даннаго уравненія логариѳмъ неизвѣстнаго числа, находятъ по этому логариѳму соотвѣтствующее ему число.

Примѣръ.

Рѣшить уравненіе $lg_2x(2lg_2x-5)=-2$.

$$2lg_2{}^2x-5lg_2x+2=0.$$

Положимъ $lg_2x=y$; тогда $lg_2{}^2x=y^2$.

Подставивъ въ данное уравненіе, вмѣсто lg_2x и $lg_2{}^2x$, y и y^2, получимъ уравненіе

$$2y^2-5y+2=0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, находимъ корни

$$y_1=\frac{1}{2} \text{ и } y_2=2,$$

т.-е.

$$lg_2 x=\frac{1}{2} \text{ и } lg_2 x=2;$$

откуда

$$x_1=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2};\ x_2=2^2=4.$$

b) Иногда уравненіе содержитъ логариѳмы такихъ выраженій, въ которыя входятъ неизвѣстныя и которыя нельзя логариѳмировать; въ такихъ случаяхъ, на основаніи теоремъ § 106 (логариѳмъ произведенія, степени, частнаго и корня), освобождаютъ уравненіе отъ знака логариѳма и рѣшаютъ полученное обыкновенное уравненіе.

Примѣры.

1) Рѣшить уравненіе $lg_{10}(x+4)-lg_{10}(x-5)=1$.

$$lg_{10}(x+4)-lg_{10}(x-5)=lg_{10}10$$

$$lg_{10}\frac{x+4}{x-5}=lg_{10}10.$$

Если равны логариѳмы чиселъ, то равны и самыя числа. Поэтому,

$$\frac{x+4}{x-5}=10;$$

откуда

$$x+4=10x-50.$$

Слѣдовательно,

$$x=6.$$

2) Рѣшить уравненіе:

$$\frac{1}{2}lg_{10}(x-9)+lg_{10}\sqrt{2x-1}=1 \text{ [1]}.$$

$$lg_{10}(x-9)^{\frac{1}{2}}+lg_{10}(2x-1)^{\frac{1}{2}}=lg_{10}10$$

$$lg_{10}[(x-9)(2x-1)]^{\frac{1}{2}}=lg_{10}10;$$

[1]) Этотъ примѣръ, равнымъ образомъ, какъ и нѣсколько примѣровъ въ предшествующихъ главахъ, взяты изъ «Сборника примѣровъ и задачъ» Бычкова.

отсюда

$$[(x-9)(2x-1)]^{\frac{1}{2}}=10$$

и

$$(x-9)(2x-1)=100$$

или

$$2x^2-19x-91=0;$$

откуда

$$x_1=13 \text{ и } x_2=-\frac{7}{2}.$$

Подставивъ найденные корни въ данное уравненіе, мы находимъ, что корень, равный $-\frac{7}{2}$, ему не удовлетворяетъ.

Сложные проценты.

§ 114.

Опредѣленіе. Основная формула сложныхъ процентовъ.

Опредѣленіе. Говорятъ, что капиталъ отданъ по сложнымъ процентамъ, если причитающіяся на него процентныя деньги не берутся изъ банка, а присоединяются въ концѣ каждаго года къ капиталу для нарощенія ихъ процентами.

Задача. Въ какую сумму обратится черезъ n лѣтъ капиталъ въ a руб., отданный въ ростъ по p сложнымъ процентамъ?

1) Опредѣлимъ сперва, во что обратится капиталъ по прошествіи одного года.

Обозначимъ искомое значеніе капитала черезъ x.

со 100 руб.	получится	p	руб.
„ 1 „	„	$\frac{p}{100}$	„
„ a „	„	$\frac{ap}{100}$	„

Слѣдовательно,

$$x=a+\frac{ap}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Обозначимъ для краткости $1+\frac{p}{100}$ черезъ q; тогда равенство (1) приметъ видъ $x=aq$.

Обозначимъ значенія капитала по прошествіи $1, 2, 3, 4 \ldots n$ лѣтъ черезъ $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$.

На основаніи формулы (1) получаемъ слѣдующія равенства:

$$x_1=aq$$
$$x_2=x_1q$$
$$x_3=x_2q$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_n=x_{n-1}q.$$

Перемноживъ написанныя равенства, получаемъ

$$x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_n=a . x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_{n-1}q^n.$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на произведеніе

$$x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_{n-1},$$

находимъ

$$x_n=aq^n, \text{ гдѣ } q=1+\frac{p}{100} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Это и есть основная формула, по которой рѣшаются задачи на сложные проценты.

Виды задачъ на сложные проценты.

Въ равенство (2) входятъ 4 величины: a, x_n, q (или p) и n; поэтому мы имѣемъ 4 задачи на сложные проценты.

Задача I. Дано: a, n и p; найти x_n.

$$x_n=aq^n$$
$$lgx_n=lga+nlgq$$

Примѣръ.

$$a=200,\ n=21,\ p=5; \text{ найти } x_n$$
$$lgx_n=lg200+21lg1,05$$
$$lg200=2,30103$$
$$lg1,05=0,02119$$
$$21lg1,05=0,02119.21=0,44499$$
$$lgx_n=2,30103+0,44499=2,74602;$$

откуда

$$x_n=557,21.$$

Задача 2. Дано: x_n, n и p; найти a.

$$x_n=aq^n;$$

откуда

$$a=\frac{x_n}{q^n}$$

и

$$lga=lgx_n-nlgq.$$

Задача 3. Дано: a, x_n и p; найти n, при чемъ искомое значенiе n должно быть цѣлымъ.

$$x_n=aq^n;$$

откуда

$$q^n=\frac{x_n}{a}$$

и

$$nlgq=lgx_n-lga;$$

слѣдовательно,

$$n=\frac{lgx_n-lga}{lgq}.$$

Задача 4. Дано: a, x_n и n; найти p.

$$x_n=aq^n;$$

откуда

$$q^n=\frac{x_n}{a}$$

и

$$nlgq=lgx_n-lga;$$

слѣдовательно,

$$lgq=\frac{lgx_n-lga}{n}.$$

По этой формулѣ найдемъ lgq и затѣмъ по логариѳму найдемъ соотвѣтствующее ему число; тогда мы имѣемъ уравненiе:

$$1+\frac{p}{100}=q,$$

рѣшивъ которое, находимъ:

$$p=100\,(q-1).$$

Срочные вклады.

§ 115.

Задача. Нѣкто вноситъ въ банкъ въ началѣ каждаго года a рублей. Опредѣлить, какой капиталъ образуется изъ этихъ ежегодныхъ взносовъ по прошествiи n лѣтъ, если банкъ платитъ p процентовъ.

Выводъ формулы срочныхъ вкладовъ.

Обозначимъ для краткости, какъ и въ предыдущемъ §, $1+\frac{p}{100}$ черезъ q.

Вкладъ 1-го года черезъ n лѣтъ обратится въ aq^n.
„ 2-го „ „ $(n-1)$ лѣтъ обратится въ aq^{n-1}
„ 3-го „ „ $(n-2)$ „ „ „ aq^{n-2}

. . . .

Вкладъ $(n-2)$-го года черезъ 3 года обратится въ aq^3
„ $(n-1)$ „ „ „ 2 „ „ „ aq^2
„ n-го „ „ 1 годъ „ „ aq.

Обозначимъ искомый капиталъ черезъ b. Тогда мы будемъ имѣть:

$$b=aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}+aq^n$$

или

$$b=aq(1+q+q^2+\ldots+q^{n-2}+q^{n-1}).$$

Многочленъ, стоящій въ скобкахъ, есть сумма членовъ геометрической прогрессіи, которой первый членъ есть единица, послѣдній членъ q^{n-1}, а знаменатель прогрессіи q.

По извѣстной формулѣ (§ 100) имѣемъ:

$$S=\frac{u_n\cdot q-u_1}{q-1}=\frac{q^{n-1}q-1}{q-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Подставивъ это значеніе S въ выраженіе b, получимъ:

$$b=aq\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Виды задачъ на срочные вклады.

Въ равенство (1) входятъ 4 величины: a, b, q (или p) и n; поэтому мы имѣемъ 4 задачи на срочные вклады.

Задача 1. Дано: a, p, n; найти b.

$$b=aq\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

При вычисленіи этой формулы опредѣляютъ отдѣльно, при помощи логариѳмовъ, численное значеніе q^n, подставляютъ его въ формулу и оканчиваютъ вычисленіе ариѳметически.

Примѣръ.

$$a=200;\ p=5;\ n=20$$

$$q=1+\frac{p}{100}=1{,}05$$

$$q^n=(1{,}05)^n=(1{,}05)^{20}$$

$$lgq^n=20lg1{,}05=20\ .\ 0{,}02119=0{,}42380.$$

Слѣдовательно,

$$q^n=2{,}6534$$

$$b=200\ .\ 1{,}05\ .\ \frac{2{,}6534-1}{1{,}05-1}=2\ .\ 105\ .\ \frac{165{,}34}{5}=2\ .\ 21\ .\ 165{,}34=$$

$$=42\ .\ 165{,}34=6944{,}28.$$

Задача 2. Дано: b, p, n; найти a.

$$b=aq\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

$$b(q-1)=aq(q^n-1);$$

откуда

$$a=\frac{b(q-1)}{q(q^n-1)}.$$

Эта формула вычисляется такъ же, какъ формула первой задачи.

Задача 3. Дано: a, b, p; найти n, при чемъ искомое значеніе n должно быть цѣлымъ.

$$b=aq\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

$$(q-1)b=aq(q^n-1)$$

$$bq-b=aq^{n+1}-aq$$

$$bq-b+aq=aq^{n+1}$$

$$q^{n+1}=\frac{bq-b+aq}{a};$$

откуда

$$(n+1)lgq=lg(bq-b+aq)-lga$$

$$n+1=\frac{lg(bq-b+aq)-lga}{lgq};$$

слѣдовательно,

$$n=\frac{lg(bq-b+aq)-lga}{lgq}-1.$$

Задача 4. Дано: a, b, n; найти p.

$$b=aq\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

$$b(q-1)=aq(q^n-1)$$

$$bq-b=aq^{n+1}-aq$$

$$aq^{n+1}-aq-bq+b=0.$$

Такъ какъ послѣднее уравненіе степени, относительно q, (при $n\geqq2$) выше второй, то этотъ видъ задачъ вообще не можетъ быть рѣшенъ элементарной алгеброй.

§ 116. Срочныя уплаты.

Выводъ формулы срочныхъ уплатъ.

Задача. Нѣкто занялъ капиталъ a рублей по p процентовъ съ условіемъ погасить долгъ вмѣстѣ съ причитающимися на него процентами въ n лѣтъ, внося въ концѣ каждаго года одну и ту же сумму. Опредѣлить сумму ежегодныхъ взносовъ.

Обозначимъ искомую сумму буквою b.

Эта сумма b, вносимая ежегодно при вышеупомянутыхъ условіяхъ, называется срочною уплатою.

Обозначимъ остатокъ долга по прошествіи 1, 2, 3 . . . n лѣтъ черезъ r_1, r_2, r_3 . . . r_n.

Тогда мы имѣемъ, согласно условію задачи, слѣдующій рядъ равенствъ:

$$r_1=aq-b$$
$$r_2=(aq-b)q-b=aq^2-bq-b$$
$$r_3=(aq^2-bq-b)q-b=aq^3-bq^2-bq-b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_n=aq^n-bq^{n-1}-bq^{n-2}-\ldots-bq-b.$$

Согласно условію задачи, r_n должно быть равно 0, и потому мы имѣемъ уравненіе:

$$aq^n-bq^{n-1}-bq^{n-2}-\ldots-bq-b=0,$$

или

$$aq^n=b+bq+bq^2+\ldots+bq^{n-1},$$

или

$$aq^n=b(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}),$$

но

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1};$$

слѣдовательно,

$$aq^n=b\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right);$$

откуда

$$b=aq^n:\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{aq^n(q-1)}{q^n-1}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

Если въ условіи задачи не оговорено, что въ теченіе n лѣтъ долгъ долженъ быть погашенъ, то для опредѣленія остающагося по истеченіи n лѣтъ долга мы имѣемъ равенство:

$$r_n=aq^n-bq^{n-1}-bq^{n-2}-\ldots-bq-b,$$
$$r_n=aq^n-b(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1),$$

или

$$r_n=aq^n-b\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right).$$

Виды задачъ на срочныя уплаты.

Въ равенство (1) входятъ 4 величины: a, b, q (или p) и n; поэтому мы имѣемъ четыре задачи на срочныя уплаты.

Задача 1. Дано: a, n, p; найти b.

$$b=\frac{aq^n(q-1)}{q^n-1}$$

Для вычисленія этой формулы мы отдѣльно опредѣляемъ при помощи логариѳмовъ численное значеніе q^n, подставляемъ его въ формулу и оканчиваемъ вычисленіе ариѳметически.

Примѣръ.

Нѣкто занялъ 15000 руб. по 7% и обязался погасить этотъ долгъ въ 5 лѣтъ. Опредѣлить срочную уплату.

$a=15000$; $n=5$, $p=7$; найти b

$$q=1+\frac{p}{100}=1{,}07$$

$$q^n=(1{,}07)^n=(1{,}07)^5$$

$$lgq^n=5lg1{,}07=0{,}02938\,.\,5=0{,}14690;$$

слѣдовательно,

$$q^n=1,4025.$$

$$b=\frac{15000 \, . \, 1,4025\,(1,07-1)}{1,4025-1}=\frac{15000 \, . \, 1,4025 \, . \, 0,07}{0,4025}=$$

$$=\frac{150 \, . \, 14025 \, . \, 7}{4025}=3658,7.$$

Задача 2. Дано: b, n, p; найти a.

$$b=\frac{aq^n(q-1)}{q^n-1}$$

$$b(q^n-1)=aq^n(q-1);$$

откуда

$$a=\frac{b(q^n-1)}{q^n(q-1)}.$$

Эта формула вычисляется такъ же, какъ и предыдущая.

Задача 3. Дано: a, b и p; найти n, при чемъ искомое значеніе n должно быть цѣлымъ.

$$b=\frac{aq^n(q-1)}{q^n-1}$$

Опредѣляемъ изъ этого уравненія q^n:

$$b(q^n-1)=aq^n(q-1)$$

$$bq^n-b=aq^{n+1}-aq^n$$

$$bq^n-aq^{n+1}+aq^n=b$$

$$q^n(b-aq+a)=b$$

$$q^n=\frac{b}{b-aq+a};$$

откуда

$$n\lg q=\lg b-\lg(b-aq+a);$$

слѣдовательно,

$$n=\frac{\lg b-\lg(b-aq+a)}{\lg q}.$$

Задача 4. Дано: a, b и n; найти p.

$$b=\frac{aq^n(q-1)}{q^n-1}$$

$$b(q^n-1)=aq^n(q-1)$$

$$bq^n-b=aq^{n+1}-aq^n$$

$$bq^n-aq^{n+1}+aq^n-b=0.$$

Это уравненіе степени, относительно неизвѣстной q, (при $n\geqq 2$) выше второй и, слѣдовательно, вообще не можетъ быть рѣшено пріемами элементарной алгебры.

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ.

Соединенія.

---

§ 117. **Соединеніями** называются различныя группировки предметовъ, составленныя по опредѣленному закону.

О соединеніяхъ вообще.

Предметы, изъ которыхъ составляются соединенія, называются **элементами** и обозначаются буквами a, b, c . . . . . . или a_1, a_2, a_3 . . . .

Соединенія бываютъ троякаго рода: перестановки (permutations), размѣщенія (arrangements) и сочетанія (combinaisons).

1. **Перестановками** называются соединенія, для составленія которыхъ берутъ каждый разъ всѣ данные элементы. Слѣдовательно, перестановки различаются между собой только порядкомъ элементовъ.

2. **Размѣщеніями** называются такія соединенія, въ составъ которыхъ входятъ не всѣ данные элементы, а опредѣленное число ихъ; напр. составляютъ размѣщенія по 2, по 3, по 4 элемента и т. д., при чемъ размѣщенія различаются между собою или самими элементами, или ихъ порядкомъ, или-же тѣмъ и другимъ.

3. **Сочетаніями** называются соединенія, въ составъ которыхъ входятъ не всѣ данные элементы, а опредѣленное число ихъ; напр. составляютъ сочетанія по 2, по 3, по 4 и т. д. элемента, при чемъ сочетанія различаются между собою только самими элементами, порядокъ же ихъ расположенія остается произвольнымъ.

§ 118. **Задача.** Изъ m элементовъ: a, b, c, d . . . k, l составить всѣ размѣщенія по n элементовъ и опредѣлить число ихъ.

Размѣщенія.

Размѣщенія, содержащія только по одному элементу, называются размѣщеніями перваго порядка, содержащія по два элемента—размѣщеніями второго порядка и т. д.; вообще размѣщеніями порядка n называются размѣщенія, содержащія по n элементовъ въ каждомъ размѣщеніи.

Число размѣщеній изъ m элементовъ порядка n обозначаютъ A_n^m.

Положимъ

1) $n=1$.

Очевидно, размѣщенія будутъ:

$$a,\ b,\ c,\ d\ .\ .\ .\ .\ .\ k,\ l;$$

слѣдовательно,

$$A_1{}^m=m.$$

2) $n=2$.

Чтобы составить всѣ размѣщенія по два элемента, надо къ каждому размѣщенію перваго порядка приписать, по одному, всѣ элементы, не входящіе въ это размѣщеніе.

Число строкъ равно $A_1{}^m=m$

a	$ab,\ ac,\ ad\ .\ .\ .\ .\ ak,\ al$
b	$ba,\ bc,\ bd\ .\ .\ .\ .\ bk,\ bl$
c	$ca,\ cb,\ cd\ .\ .\ .\ .\ ck,\ cl$
d	$da,\ db,\ dc\ .\ .\ .\ .\ dk,\ dl$
. . .	и т. д.
k	$ka,\ kb,\ kc\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ kl$
l	$la,\ lb,\ lc\ .\ .\ \ \ .\ .\ lk$

Число размѣщеній въ каждой строкѣ равно $m-1$.

Очевидно,

$$A_2{}^m=m(m-1).$$

3) $n=3$.

Чтобы составить всѣ размѣщенія третьяго порядка, расположимъ всѣ размѣщенія второго порядка въ одномъ столбцѣ и къ каждому изъ нихъ будемъ приписывать, по одному, всѣ элементы, не входящіе въ это размѣщеніе.

Число строкъ равно $A_2^m=m(m-1)$.

ab; abc, abd . . . . abl
ac; acb, acd . . . . acl
. . . .
al; alb, alc . . . . . alk

ba; bac, bad . . . . . . bal
bc; bca, bcd . . . . . . bcl
bd; bda, bdc . . . . . . bdl
. . . .
bl; bla, blc . . . . . blk

. . . .
la; lab, lac . . . . . . lak
lb; lba, lbc . . . . . . lbk
. . . .
lk; lka, lkb . . . .

Число размѣщеній въ каждой строкѣ равно $m-2$.

откуда

$$A_3^m=A_2^m(m-2)=m(m-1)(m-2).$$

4. Вообще, чтобы составить всѣ размѣщенія изъ m элементовъ порядка n, надо всѣ размѣщенія изъ m элементовъ порядка $(n-1)$ расположить въ одинъ столбецъ и къ каждому изъ нихъ приписать, по одному, всѣ элементы, не входящіе въ это размѣщеніе, число такихъ элементовъ будетъ

$$m-(n-1)=m-n+1.$$

Такимъ образомъ, въ каждой строкѣ будетъ $m-n+1$ размѣщеній, а число строкъ будетъ A_{n-1}^m.

Слѣдовательно, мы будемъ имѣть равенство:

$$A_n^m=(m-n+1)A_{n-1}^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Чтобы вывести формулу, выражающую число размѣщеній изъ m элементовъ порядка n, будемъ подставлять въ выраженіе (1), вмѣсто n, послѣдовательно, числа ряда: 2, 3, 4, ... n; получимъ слѣдующія равенства:

$$A_2^m=(m-1)A_1^m$$
$$A_3^m=(m-2)A_2^m$$
$$A_4^m=(m-3)A_3^m$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_n^m=(m-n+1)A_{n-1}^m$$

Перемноживъ почленно эти равенства, получимъ:

$$A_2^m \,.\, A_3^m \,.\, A_4^m \,...\, A_n^m=$$
$$=(m-1)(m-2)\,...\,(m-n+1)A_1^m \,.\, A_2^m \,...\, A_{n-1}^m$$

Раздѣливъ обѣ части равенства на произведеніе

$$A_2^m \,.\, A_3^m \,.\, A_4^m \,...\, A_{n-1}^m,$$

получимъ:

$$A_n^m=(m-1)(m-2)(m-3)\,...\,(m-n+1)\,.\,A_1^m.$$

Но мы нашли, что $A_1^m=m$; слѣдовательно, окончательно, получаемъ:

$$A_n^m=m(m-1)(m-2)(m-3)\,...\,(m-n+1) \quad .\ .\ .\ .\ (2)$$

Эта формула читается такъ: **число размѣщеній изъ m элементовъ порядка n равно произведенію n послѣдовательныхъ убывающихъ цѣлыхъ чиселъ, начиная съ m.**

Примѣръ.

Опредѣлить, сколькими способами можно составить расписаніе уроковъ на данный день, если въ этотъ день 3 урока, а всѣхъ предметовъ 8.

Въ этой задачѣ мы имѣемъ дѣло съ размѣщеніями, и потому отвѣтъ будетъ выражаться формулою числа размѣщеній изъ 8 элементовъ по 3.

$$A_3^8=8\,.\,7\,.\,6=336.$$

§ 119. Перестановки.

Задача. Изъ m элементовъ: $a, b, c, d, \ldots k, l$ составить всѣ перестановки и опредѣлить число ихъ.

Число перестановокъ изъ m элементовъ обозначаютъ P_m.

Положимъ

1) $m=1$.

Пусть данъ одинъ элементъ a.

Очевидно, изъ одного элемента можно сдѣлать только одну перестановку: a

Слѣдовательно,

$$P_1=1.$$

2) $m=2$.

Пусть даны два элемента: a и b.

Очевидно, изъ двухъ элементовъ можно составить двѣ перестановки: ab и ba.

Слѣдовательно,

$$P_2=2.$$

3) $m=3$.

Пусть даны 3 элемента: a, b, c.

Мы получимъ всѣ перестановки по 3 элемента, взявъ каждый элементъ и приписавъ къ нему перестановки изъ двухъ остальныхъ элементовъ.

$$\begin{array}{ccc|}
abc, & bac, & cab \\
acb, & bca, & cba \\
\hline
\end{array}$$
$$P_2+P_2+P_2=P_3$$

Слѣдовательно,

$$P_3=3P_2=6.$$

4) $m=4$.

Пусть даны 4 элемента: a, b, c, d.

Чтобы составить всѣ перестановки изъ 4 элементовъ, возьмемъ каждый элементъ и будемъ приписывать къ нему всѣ перестановки изъ 3 элементовъ.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
abcd & bacd & cabd & dabc \\
abdc & badc & cadb & dacb \\
acbd & bcad & cbad & dbac \\
acdb & bcda & cbda & dbca \\
adbc & bdac & cdab & dcab \\
adcb & bdca & cdba & dcba \\
\hline
\end{array}$$
$$P_3+P_3+P_3+P_3=P_4$$

Слѣдовательно,

$$P_4=4P_3=4\,.\,6=24.$$

Вообще, чтобы составить всѣ перестановки изъ m элементовъ, можно поступать слѣдующимъ образомъ: отдѣливъ поочередно каждый изъ данныхъ элементовъ, составить изъ остальныхъ $m-1$ элементовъ всѣ перестановки и расположить ихъ въ одинъ столбецъ; затѣмъ, взявъ m такихъ столбцовъ, въ каждомъ столбцѣ къ каждой изъ перестановокъ приписать въ началѣ тотъ элементъ, который мы сперва удалили. Такимъ образомъ мы получимъ m столбцовъ и въ каждомъ изъ нихъ будетъ P_{m-1} перестановокъ. Вся же таблица представитъ P_m перестановокъ изъ m элементовъ.

Отсюда мы получаемъ равенство

$$P_m = m \cdot P_{m-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

Изъ равенства (1) выводится формула, выражающая число перестановокъ. Для этого въ равенство (1) будемъ подставлять вмѣсто m, послѣдовательно числа: $2, 3, 4 \cdots m$.

Получимъ слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned} P_2 &= 2P_1 \\ P_3 &= 3P_2 \\ P_4 &= 4P_3 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ P_m &= mP_{m-1} \end{aligned}$$

Перемноживъ почленно эти равенства, находимъ:

$$P_2 \,.\, P_3 \,.\, P_4 \,.\,.\,.\, P_m = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\,.\,.\, m \,.\, P_1 \,.\, P_2 \,.\, P_3 \,.\,.\,.\, P_{m-1} \,.$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на произведенiе

$$P_2 \,.\, P_3 \,.\, P_4 \,.\,.\,.\, P_{m-1},$$

получимъ:

$$P_m = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\,.\,.\, m \,.\, P_1.$$

Но $P_1 = 1$; слѣдовательно,

$$P_m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\,.\,.\, m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

т.-е. **число перестановокъ изъ m элементовъ равно произведенiю m послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, начиная съ 1.**

Примѣръ.

Опредѣлить, сколькими способами можно разставить въ одну шеренгу 7 человѣкъ.

Въ этой задачѣ мы имѣемъ дѣло съ перестановками, и потому отвѣтъ выразится формулою числа перестановокъ изъ 7 элементовъ, т.-е.

$$P_7=1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7=5040.$$

Формулу числа перестановокъ можно вывести еще иначе.

Если въ формулѣ числа размѣщеній изъ m элементовъ, порядка n, предположимъ $n=m$, то, очевидно, формула числа размѣщеній представитъ вмѣстѣ съ тѣмъ формулу числа перестановокъ изъ m элементовъ; слѣдовательно,

$$P_m=A_m^m.$$

Возьмемъ формулу, выражающую A_n^m: $A_n^m=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+3)(m-n+2)(m-n+1)$, и положимъ въ этомъ равенствѣ $n=m$. Тогда получимъ:

$$A_m^m=P_m=m(m-1)(m-2)\ldots3\,.\,2\,.\,1.$$

Такимъ образомъ мы получили ту же формулу (2).

§ 120. **Сочетанія.**

Задача. Изъ m элементовъ составить сочетанія 1-го, 2-го, 3-го и вообще n-го порядка и опредѣлить число ихъ; при чемъ порядокъ сочетаній такъ же, какъ и порядокъ размѣщеній, опредѣляется числомъ элементовъ, входящихъ въ каждое сочетаніе.

Пусть данные элементы будутъ:

$$a,\ b,\ c,\ d\ \ldots\ldots\ k,\ l\ (m\ \text{элементовъ}).$$

Тогда

1) Сочетанія 1-го порядка будутъ:

$$a,\ b,\ c,\ d\ \ldots\ldots\ k,\ l.$$

2) Чтобы составить сочетанія 2-го порядка, надо къ каждому элементу приписать, по одному, всѣ слѣдующіе за

нимъ элементы; поэтому сочетанія 2-го порядка представятся слѣдующею таблицею:

a	$ab, ac, ad \ldots \ldots ak, al$
b	$bc, bd \ldots \ldots bk, bl$
c	$cd \ldots \ldots ck, cl$
.	. . . .
.	. . . .
.	
k	kl
l	—

3) Чтобы составить сочетанія 3-го порядка, надо къ каждому изъ сочетаній 2-го порядка приписать, по одному, всѣ элементы, слѣдующіе за послѣднимъ, входящимъ въ это сочетаніе, элементомъ. Слѣдовательно, сочетанія 3 го порядка изобразятся такою таблицею:

ab	$abc, abd \ldots \ldots abk, abl$
ac	$acd \ldots \ldots ack, acl$
ad	$\ldots \ldots adk, adl$
.	. . . .
ak	akl
al	— [1])
bc	$bcd \ldots \ldots bck, bcl$
bd	$\ldots \ldots bdk, bdl$
.	. . . .
bk	bkl
bl	—
cd	$cde \ldots \ldots cdk, cdl$
ce	$\ldots \ldots cek, cel$
.	. . . .
ck	ckl
cl	—

. . . .

Точно также можно составить сочетанія 4-го, 5-го и вообще n-го порядка.

Примѣръ.

Изъ четырехъ элементовъ a, b, c, d составить сочетанія 1-го, 2-го, 3-го и 4-го порядка.

---

[1]) Черточки поставлены тамъ, гдѣ нельзя составить новыхъ сочетаній.

1) Сочетанія перваго порядка будутъ

$$a,\ b,\ c,\ d.$$

2) Сочетанія второго порядка:

a	$ab,\ ac,\ ad$
b	$bc,\ bd$
c	cd
d	—

3) Сочетанія третьяго порядка:

ab	$abc,\ abd$
ac	acd
ad	—[1])
bc	bcd
bd	—
cd	—

4) Сочетанія четвертаго порядка: $abcd$.

Теорема. **Если изъ m элементовъ составить всѣ сочетанія порядка n и изъ каждаго изъ нихъ составить всѣ перестановки, то получатся всѣ размѣщенія изъ m элементовъ порядка n.**

Объяснимъ эту теорему на примѣрѣ сочетаній третьяго порядка изъ четырехъ элементовъ.

	строка сочетаній			
столбцы перестановокъ	abc	abd	acd	bcd
	acb	adb	adc	bdc
	bac	bad	cad	cbd
	bca	bda	cda	cdb
	cab	dab	dac	dbc
	cba	dba	dca	dcb

Разсматривая эту таблицу, мы видимъ, что 1) здѣсь нѣтъ одинаковыхъ размѣщеній; 2) какое бы размѣщеніе изъ 4 элементовъ по 3 мы ни придумали, мы непремѣнно нашли-бы его въ нашей таблицѣ: составъ элементовъ размѣщенія намъ указалъ-бы столбецъ, а такъ какъ въ этомъ столбцѣ

[1]) См. примѣчаніе на стр. 291.

сдѣланы всѣ перестановки изъ данныхъ элементовъ, то тамъ непремѣнно найдется и наше размѣщеніе. Это показываетъ, что составленная нами таблица содержитъ всѣ размѣщенія третьяго порядка изъ четырехъ элементовъ.

Подобныя разсужденія можно примѣнить къ какимъ угодно сочетаніямъ; слѣдовательно, теорема доказана.

Выводъ формулы числа сочетаній.

Число сочетаній изъ m элементовъ порядка n обозначается

$$C_n^m.$$

Разсматривая предыдущую таблицу, мы видимъ, что въ ней число столбцовъ равно C_3^4; число размѣщеній въ каждомъ столбцѣ равно P_3; число же размѣщеній во всей таблицѣ равно A_3^4.

Слѣдовательно, мы имѣемъ такое равенство:

$$C_3^4 \,.\, P_3 = A_3^4.$$

Вообще, подобнымъ же образомъ получается равенство:

$$C_n^m \,.\, P_n = A_n^m;$$

откуда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n}.$$

Подставивъ въ правую часть равенства, вмѣсто A_n^m и P_n, извѣстныя намъ формулы, получаемъ:

$$C_n^m = \frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} \quad \ldots \quad (1)$$

Эта формула читается такъ:

Число сочетаній изъ m элементовъ порядка n равно произведенію n послѣдовательныхъ убывающихъ цѣлыхъ чиселъ, начиная съ m, раздѣленному на произведеніе n послѣдовательныхъ возрастающихъ цѣлыхъ чиселъ, начиная съ 1.

Примѣръ.

Въ обществѣ 20 лицъ. Опредѣлить, сколькими способами, въ смыслѣ состава, можно избрать правленіе, состоящее изъ трехъ лицъ. Въ этой задачѣ мы имѣемъ дѣло съ сочетаніями и потому отвѣтъ будетъ выражаться формулою числа сочетаній изъ 20 элементовъ по 3.

$$C_3^{20}=\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3}=1140.$$

Другая формула, выражающая число сочетаній. Умноживъ числитель и знаменатель формулы, выражающей C_n^m, на произведеніе: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (m-n)$, мы получимъ:

$$C_n^m=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (m-n)}.$$

Очевидно, числитель этой формулы есть P_m, а знаменатель $P_n \cdot P_{m-n}$ и, слѣдовательно,

$$C_n^m=\frac{P_m}{P_n \cdot P_{m-n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

напримѣръ:

$$C_4^7=\frac{P_7}{P_4 \cdot P_3}=\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}=35.$$

Теорема. **Число сочетаній изъ m элементовъ порядка n равно числу сочетаній изъ m элементовъ порядка $m-n$.**

Такимъ образомъ, надо доказать, что $C_n^m=C_{m-n}^m$.

1. Составляя сочетанія изъ m элементовъ порядка n, мы для каждаго изъ нихъ беремъ n элементовъ; остающіяся $m-n$ элементовъ, очевидно, составятъ одно изъ сочетаній порядка $m-n$. Такимъ образомъ, каждому сочетанію порядка n будетъ соотвѣтствовать одно сочетаніе порядка $m-n$ и обратно.

Слѣдовательно,

$$C_n^m=C_{m-n}^m.$$

2. Это равенство можно еще вывести слѣдующимъ образомъ:

Напишемъ выраженія: C_n^m и C_{m-n}^m, пользуясь формулою (2) настоящаго §,

$$C_n^m = \frac{P_m}{P_n \,.\, P_{m-n}};$$

$$C_{m-n}^m = \frac{P_m}{P_{m-n} \,.\, P_{[m-(m-n)]}} = \frac{P_m}{P_{m-n}\; P_n}.$$

Вторыя части этихъ равенствъ одинаковы; слѣдовательно,

$$C_n^m = C_{m-n}^m,$$

напримѣръ:

$$C_8^{10} = C_{10-8}^{10} = C_2^{10} = \frac{10 \,.\, 9}{1 \,.\, 2} = 45.$$

ГЛАВА ДВАДЦАТАЯ.

Биномъ Ньютона.

§ 121.

Опредѣленіе. Законъ составленія произведенія биномовъ, имѣющихъ одинаковые первые члены.

Биномомъ Ньютона называется формула, выражающая степень двучлена. Мы ограничимся только тѣмъ случаемъ, когда показатель степени бинома цѣлое положительное число.

Мы получимъ формулу бинома Ньютона, какъ слѣдствіе болѣе общей формулы произведенія биномовъ, имѣющихъ одинаковые первые члены, къ выводу которой мы теперь и обратимся.

Возьмемъ произведенія 2-хъ, 3-хъ и 4-хъ биномовъ, имѣющихъ одинаковые первые члены.

$$1)\ (x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

$$2)\ (x+a)(x+b)(x+c)=(x^2+ax+bx+ab)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+ \\ +(ab+bc+ac)x+abc$$

$$3)\ (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c)x^3+(ab+bc+ac)x^2+ \\ +abcx+dx^3+(a+b+c)dx^2+(ab+bc+ac)dx+abcd=x^4+ \\ +(a+b+c+d)x^3+(ab+bc+ac+ad+bd+cd)x^2+ \\ +(abc+abd+bcd+acd)x+abcd.$$

Разсматривая полученные многочлены, замѣчаемъ слѣдующее:

1) Каждый изъ полученныхъ многочленовъ представляетъ многочленъ, расположенный по убывающимъ степенямъ x, и степень каждаго многочлена равна числу перемноженныхъ биномовъ.

2) Коэффиціентъ перваго члена во всѣхъ трехъ многочленахъ равенъ единицѣ; коэффиціентъ второго члена равенъ суммѣ вторыхъ членовъ перемноженныхъ биномовъ; коэффиціентъ 3-го члена равенъ суммѣ произведеній вторыхъ

членовъ биномовъ, взятыхъ по два; наконецъ, послѣднiй членъ есть произведенiе всѣхъ вторыхъ членовъ биномовъ.

Чтобы показать, что подмѣченный законъ составленiя произведенiя 2-хъ, 3-хъ и 4-хъ биномовъ, имѣющихъ равные первые члены, справедливъ для какого угодно числа биномовъ, докажемъ, что найденный законъ справедливъ для $(m+1)$ биномовъ, если онъ справедливъ для m биномовъ.

Итакъ, допустимъ, что произведенiе m биномовъ выражается слѣдующею формулою:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ldots+S_m,$$

гдѣ S_1 представляетъ сумму вторыхъ членовъ биномовъ,

$$S_2,\ S_3\ \ldots\ldots\ S_{m-1}$$

сумму всѣхъ произведенiй вторыхъ членовъ биномовъ, взятыхъ по 2, по 3 и т. д. и, наконецъ, S_m произведенiе всѣхъ вторыхъ членовъ.

Умноживъ обѣ части этого равенства на $(x+l)$, получимъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)(x+l)=x^{m+1}+S_1x^m+S_2x^{m-1}+\ldots$$
$$\ldots+S_mx+lx^m+lS_1x^{m-1}+lS_2x^{m-2}+\ldots+lS_m=x^{m+1}+(S_1+l)x^m+$$
$$+(S_2+lS_1)x^{m-1}+(S_3+lS_2)x^{m-2}+\ldots\ldots+lS_m.$$

Разсматривая полученное произведенiе, мы замѣчаемъ слѣдующее:

Полученное произведенiе представляетъ многочленъ $(m+1)$-ой степени относительно x, расположенный по убывающимъ степенямъ x.

Коэффицiентъ перваго члена въ полученномъ произведенiи равенъ единицѣ.

Коэффицiентъ второго члена (S_1+l) равенъ суммѣ вторыхъ членовъ биномовъ.

Коэффицiентъ 3-го члена (S_2+lS_1) равенъ суммѣ произведенiй вторыхъ членовъ биномовъ, взятыхъ по два (S_2—сумма произведенiй всѣхъ вторыхъ членовъ, кромѣ l, а lS_1—сумма произведенiй вторыхъ членовъ, содержащихъ l).

Коэффицiентъ 4-го члена (S_3+lS_2) равенъ суммѣ произведенiй вторыхъ членовъ биномовъ, взятыхъ по 3; и т. д.

Наконецъ, послѣдній членъ полученнаго произведенія, равный $lS_m = abc \; . \; . \; . \; . \; . \; kl$, есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ биномовъ.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что произведеніе $(m+1)$ биномовъ, имѣющихъ равные первые члены, составляется по тому же закону, какъ произведеніе m биномовъ. Такъ какъ мы непосредственно нашли этотъ законъ для произведенія двухъ, трехъ и четырехъ биномовъ, то на основаніи доказаннаго заключаемъ, что этотъ законъ будетъ справедливъ и для 5-ти биномовъ; будучи справедливъ для 5-ти биномовъ, онъ будетъ справедливъ для 6-ти биномовъ и т. д., т.-е. будетъ справедливъ для какого угодно числа биномовъ.

Примѣръ.

Вычислить произведеніе: $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$.

$$
\begin{array}{r|lr|lr|l}
(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = x^4 + 1 & x^3 & -2 & x^2 & -6 & x + 24 \\
-2 & & +3 & & -12 & \\
+3 & & -4 & & +8 & \\
-4 & & -6 & & +24 & \\
 & & +8 & & & \\
 & & -12 & & & \\
\hline
\multicolumn{6}{r}{x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24}
\end{array}
$$

§ 122. **Формула бинома Ньютона.**

На основаніи доказанной теоремы, мы имѣемъ слѣдующее равенство:

$$\underbrace{(x+a)(x+b) \; . \; . \; . \; . \; (x+k)}_{m \text{ биномовъ}} = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \; . \; . \; . \; . \; + S_m \; .$$

Положимъ въ этомъ равенствѣ $a = b = c = \; . \; . \; . \; . \; = k$; получимъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c) \; . \; . \; . \; (x+k) = (x+a)^m$$

$$S_1 = a + b + c + \; . \; . \; . \; . \; + k = a + a + \; . \; . \; . \; . + a = ma = C_1^m a$$

$$S_2 = ab + ac + ad + \; . \; . \; . \; = a^2 + a^2 + a^2 + \; . \; . \; . \; = C_2^m a^2 = \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} a^2$$

$$S_3 = abc + abd + \; . \; . \; . = a^3 + a^3 + a^3 + \; . \; . \; . = C_3^m a^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} a^3$$

и т. д.

Наконецъ

$$S_m = abcd \ldots = a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots = a^m.$$

Подставивъ найденныя выраженія въ предыдущее равенство, получимъ:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \ldots\ldots + a^m.$$

Эта формула и называется формулой бинома Ньютона.

Различныя свойства формулы бинома Ньютона.

1. Формула бинома Ньютона представляетъ полный многочленъ степени m (т.-е. содержащій всѣ степени отъ m до 0), какъ относительно x, такъ и относительно a, расположенный по убывающимъ степенямъ x и по возрастающимъ степенямъ a. Слѣдовательно, всѣхъ членовъ въ многочленѣ будетъ $m+1$.

2. Показатель у a въ каждомъ членѣ равенъ числу предшествующихъ членовъ; сумма же показателей у a и x равна показателю бинома, т.-е. m.

Слѣдовательно, зная въ каждомъ членѣ показатель у a, мы можемъ опредѣлить въ этомъ членѣ показатель у x.

3. Коэффиціентъ 1-го члена равенъ единицѣ; коэффиціенты 2-го, 3-го и т. д. членовъ суть числа сочетаній: C_1^m, C_2^m, C_3^m...... Вообще, въ каждомъ членѣ коэффиціентъ равенъ числу сочетаній изъ m элементовъ порядка n, гдѣ m есть показатель бинома, а n число предшествующихъ членовъ.

4. Обозначивъ $(n+1)$-ый членъ въ формулѣ бинома Ньютона черезъ T_{n+1}, мы, на основаніи предыдущихъ свойствъ, можемъ написать слѣдующее равенство:

$$T_{n+1} = C_n^m\, a^n\, x^{m-n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ldots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} a^n x^{m-n}.$$

Эта формула называется формулой общаго члена бинома Ньютона.

5. Написавъ два послѣдовательныхъ члена бинома Ньютона, напр., T_{n+1} и T_{n+2}, и раздѣливъ второй изъ нихъ на первый, получимъ:

$$\frac{T_{n+2}}{T_{n+1}} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)\,1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n \cdot (n+1) m(m-1)\ldots(m-n+1)} \cdot \frac{a^{n+1} x^{m-n-1}}{a^n \cdot x^{m-n}};$$

или

$$\frac{T_{n+2}}{T_{n+1}}=\frac{m-n}{n+1}\cdot\frac{a}{x};$$

откуда

$$T_{n+2}=T_{n+1}\cdot\frac{m-n}{n+1}\cdot\frac{a}{x}.$$

Это равенство даетъ слѣдующее правило. Чтобы перейти отъ какого-нибудь члена разложенія къ слѣдующему, надо коэффиціентъ этого члена умножить на показатель у x въ этомъ членѣ и раздѣлить на число уже написанныхъ членовъ; затѣмъ показатель у x уменьшить на единицу, а показатель у a увеличить на единицу.

На основаніи этого правила, можно прямо писать разложеніе по формулѣ бинома Ньютона.

Примѣръ.

$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6.$$

6. Биноміальные коэффиціенты, т.-е. коэффиціенты въ формулѣ бинома Ньютона у членовъ, равностоящихъ отъ начала и конца разложенія, равны между собою.

Разсмотримъ коэффиціенты $(n+1)$-го члена отъ начала и $(n+1)$-го члена отъ конца.

Обозначимъ первый коэффиціентъ черезъ k, а второй черезъ k'.

По третьему свойству $k=C_n^m$.

Чтобы написать выраженіе коэффиціента $(n+1)$-го члена отъ конца, т.-е. k', надо узнать, какимъ членомъ этотъ членъ будетъ отъ начала разложенія.—Такъ какъ всѣхъ членовъ разложенія $m+1$, а за $(n+1)$-ымъ членомъ отъ конца слѣдуютъ n членовъ, то, очевидно, $(n+1)$-ый членъ отъ конца будетъ $(m+1-n)$-ымъ членомъ отъ начала.

Слѣдовательно, $k'=C_{m-n}^m$; но раньше (§ 120) было доказано, что $C_n^m=C_{m-n}^m$ и потому

$$k=k'.$$

7. Такъ какъ коэффиціенты отъ начала формулы возрастаютъ [1]), то, принимая во вниманіе предыдущее свойство, заключаемъ, что коэффиціенты членовъ къ концу разложенія должны уменьшаться. Слѣдовательно:

a) если показатель бинома m число четное, то средній членъ имѣетъ наибольшій коэффиціентъ;

b) если показатель бинома m число нечетное, то два среднихъ члена будутъ имѣть равные и притомъ наибольшіе коэффиціенты.

8. Выведемъ формулу, по которой возвышается въ цѣлую положительную степень разность двухъ количествъ.

Мы можемъ написать:

$$(x-a)^m=[x+(-a)]^m;\text{ но}$$

$$[x+(-a)]^m=x^m+m(-a)x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(-a)^2x^{m-2}+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(-a)^3x^{m-3}+\ldots+(-a)^m$$

и потому

$$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}-$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3}+\ldots+(-a)^m.$$

Такимъ образомъ, формула бинома Ньютона для разности двухъ количествъ отличается отъ формулы, по которой возвышается въ цѣлую положительную степень сумма двухъ количествъ, только тѣмъ, что въ первой формулѣ всѣ члены четнаго порядка имѣютъ знакъ (—).

---

[1]) Возрастаніе коэффиціентовъ въ формулѣ бинома Ньютона въ первой ея половинѣ является непремѣннымъ слѣдствіемъ равенства:

$$T_{n+2}=T_{n+1}\frac{m-n}{n+1}\cdot\frac{a}{x},\text{ гдѣ}$$

$$\frac{m-n}{n+1}>1\text{ для всѣхъ }n<\frac{m-1}{2}.$$

9. Сумма всѣхъ биноміальныхъ коэффиціентовъ равна 2^m. Чтобы вывести это свойство, возьмемъ формулу:

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3}+\ldots+a^m$$

и положимъ въ ней $x=a=1$.

Тогда получимъ:

$$(1+1)^m=2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+$$
$$+\ldots+1,$$

что̀ и доказываетъ справедливость 9-го свойства.

10. Сумма биноміальныхъ коэффиціентовъ четнаго порядка равна суммѣ биноміальныхъ коэффиціентовъ нечетнаго порядка, и каждая изъ нихъ равна 2^{m-1}.

Возьмемъ формулу:

$$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}-$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3}+\ldots+(-a)^m$$

и положимъ

$$x=a=1;$$

получимъ:

$$(1-1)^m=0=1-m+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+$$
$$+\ldots+(-1)^m.$$

Перенеся всѣ отрицательные коэффиціенты въ первую часть, получимъ:

$$m+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots=1+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}+\ldots$$

Обозначимъ каждую изъ этихъ суммъ черезъ S; тогда, по 9-му свойству, получимъ:

$$S+S=2^m \text{ или } 2S=2^m.$$

Слѣдовательно,

$$S=2^m:2=2^{m-1}.$$

Примѣры.

1) Возвысить по формулѣ бинома Ньютона въ 4-ю степень двучленъ

$$\left(2a^3b+\frac{1}{2}ab^2\right)$$

коэффиціенты . . .	1	4	6	4	1
степени 1-го члена	$16a^{12}b^4$	$8a^9b^3$	$4a^6b^2$	$2a^3b$	1
степени 2-го члена	1	$\frac{1}{2}ab^2$	$\frac{1}{4}a^2b^4$	$\frac{1}{8}a^3b^6$	$\frac{1}{16}a^4b^8$

$$\left(2a^3b+\frac{1}{2}ab^2\right)^4=16a^{12}b^4+16a^{10}b^5+6a^8b^6+a^6b^7+\frac{1}{16}a^4b^8.$$

2) Найти 4-й членъ формулы бинома Ньютона, представляющей 6-ую степень двучлена $(3ab^2-2a^2b)$.

$$T_4=C_3^6\,.\,(-2a^2b)^3\,.\,(3ab^2)^{6-3}=20\,.\,(-8a^6b^3)\,.\,27a^3b^6=-4320a^9b^9.$$

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ.

Непрерывныя дроби.

§ 123. **Опредѣленія. Обращеніе обыкновенной дроби въ непрерывную и обратно.**

Непрерывною дробью называется выраженіе вида:

$$a_1+\cfrac{m}{a_2+\cfrac{n}{a_3+\cfrac{p}{a_4+\ldots}}}$$

Мы будемъ разсматривать только такія непрерывныя дроби, въ которыхъ числители $m, n, p \ldots$ равны единицѣ, а знаменатели $a_2, a_3, a_4 \ldots$ цѣлыя положительныя числа, т.-е. будемъ разсматривать непрерывныя дроби вида:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ldots}}}$$

Цѣлая часть непрерывной дроби a_1 и дроби $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ и т. д. называются **составляющими дробями** или **звеньями** непрерывной дроби.

Если число составляющихъ дробей ограничено, то непрерывная дробь называется **конечною**, въ противномъ же случаѣ непрерывная дробь называется **безконечною**.

Когда въ безконечной непрерывной дроби знаменатели повторяются въ одномъ и томъ же порядкѣ, то непрерывная дробь называется **періодическою**.

Всякую конечную непрерывную дробь можно выразить черезъ обыкновенную дробь; чтобы сдѣлать это, надо выполнить дѣйствія, указанныя непрерывною дробью, начиная съ конца ея.

Примѣръ.

Возьмемъ непрерывную дробь $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}$.

1) $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$; 2) $1:\frac{5}{4}=\frac{4}{5}$

3) $3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5}$; 4) $1:\frac{19}{5}=\frac{5}{19}$

5) $2+\frac{5}{19}=2\frac{5}{19}$.

Слѣдовательно, $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5}}=2+\frac{5}{19}=2\frac{5}{19}$.

Обратно, всякую обыкновенную дробь можно представить въ видѣ непрерывной дроби.

Примѣры.

1. Обратить дробь $\frac{43}{19}$ въ непрерывную.

$$\frac{43}{19}=2+\frac{5}{19}=2+\frac{1}{19:5}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5:4}}=$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}.$$

Произведенныя дѣйствія можно выразить слѣдующею таблицею:

частныя		2	3	1	4
	43	19	5	4	1
	38	15	4	4	
остатки	5	4	1	0	

2. Обратить дробь $\frac{63}{23}$ въ непрерывную.

Составимъ таблицу:

частныя		2	1	2	1	5
	63	23	17	6	5	1
	46	17	12	5	5	
остатки	17	6	5	1	0	

Слѣдовательно, $$\frac{63}{23}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}.$$

Изъ этихъ примѣровъ можно вывести слѣдующее правило: чтобы обратить обыкновенную дробь въ непрерывную, надо послѣдовательно дѣлить числитель ея на знаменатель, знаменатель на 1-й остатокъ, 1-й остатокъ на второй и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получимъ въ остаткѣ 0. Первое частное будетъ цѣлою частью непрерывной дроби, а остальныя частныя знаменателями звеньевъ.

§ 124. **Подходящія дроби. Законъ составленія подходящихъ дробей.**

Если мы возьмемъ нѣсколько первыхъ звеньевъ непрерывной дроби, отбросивъ всѣ остальныя, и взятую часть непрерывной дроби обратимъ въ обыкновенную дробь, то получимъ, такъ называемую, **подходящую дробь.**

Очевидно, въ конечной непрерывной дроби можно составить столько подходящихъ дробей, сколько звеньевъ имѣетъ непрерывная дробь.

Возьмемъ непрерывную дробь:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}+\cdots}}}}}}$$

Обозначимъ подходящія дроби черезъ

$$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3}\ldots\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\ \frac{p_n}{q_n},\ \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\ldots$$

и составимъ первыя три подходящія дроби:

$$\frac{p_1}{q_1}=a_1=\frac{a_1}{1}$$

$$\frac{p_2}{q_2}=a_1+\frac{1}{a_2}=\frac{a_1a_2+1}{a_2}$$

$$\frac{p_3}{q_3}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}.$$

Чтобы получить выраженіе 3-й подходящей дроби, достаточно въ формулѣ, выражающей 2-ю подходящую дробь, замѣнить a_2 двучленомъ $a_2+\frac{1}{a_3}$. Получимъ:

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{a_1\left(a_2+\frac{1}{a_3}\right)+1}{a_2+\frac{1}{a_3}}=\frac{a_1a_2+\frac{a_1}{a_3}+1}{\frac{a_2a_3+1}{a_3}}=\frac{a_1a_2a_3+a_1+a_3}{a_2a_3+1}=$$

$$=\frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_2a_3+1}=\frac{p_2a_3+p_1}{q_2a_3+q_1}.$$

Слѣдовательно, $\frac{p_3}{q_3}$ составляется изъ $\frac{p_2}{q_2}$ черезъ умноженіе числителя и знаменателя ея на знаменатель 3-го звена и прибавленіе къ этимъ произведеніямъ соотвѣтственно числителя и знаменателя первой подходящей дроби $\frac{p_1}{q_1}$.

Чтобы показать, что законъ, выражаемый послѣднею формулою, справедливъ для какихъ угодно подходящихъ дробей, докажемъ, что, если этотъ законъ справедливъ для n-ой подходящей дроби, то онъ будетъ справедливъ также и для $n+1$-ой подходящей дроби.

Итакъ, допустимъ, что

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-1}a_n+p_{n-2}}{q_{n-1}a_n+q_{n-2}}.$$

Чтобы получить выраженіе $n+1$-ой подходящей дроби, достаточно въ этой формулѣ замѣнить a_n черезъ $a_n+\frac{1}{a_{n+1}}$.

Получимъ:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_{n-1}\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+p_{n-2}}{q_{n-1}\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+q_{n-2}}=\frac{p_{n-1}\cdot a_n+\frac{p_{n-1}}{a_{n+1}}+p_{n-2}}{q_{n-1}\cdot a_n+\frac{q_{n-1}}{a_{n+1}}+q_{n-2}}=$$

$$=\frac{p_{n-1}\cdot a_n\cdot a_{n+1}+p_{n-1}+p_{n-2}a_{n+1}}{q_{n-1}\cdot a_n\cdot a_{n+1}+q_{n-1}+q_{n-2}a_{n+1}}=$$

$$=\frac{(p_{n-1}a_n+p_{n-2})a_{n+1}+p_{n-1}}{(q_{n-1}a_n+q_{n-2})a_{n+1}+q_{n-1}}=\frac{p_n\cdot a_{n+1}+p_{n-1}}{q_n\cdot a_{n+1}+q_{n-1}}.$$

Сравнивая послѣднюю формулу съ выраженіемъ подходящей дроби $\frac{p_n}{q_n}$, видимъ, что оба эти выраженія составлены по одному и тому же закону. Такъ какъ мы нашли законъ непосредственно для $\frac{p_3}{q_3}$, то на основаніи доказаннаго заключаемъ, что этотъ законъ справедливъ и для всѣхъ послѣдующихъ подходящихъ дробей: $\frac{p_4}{q_4}$, $\frac{p_5}{q_5}$ и т. д.

Примѣръ.

1) Дана непрерывная дробь: $1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}}$.

Найти всѣ подходящія ея дроби.

Первыя двѣ подходящія дроби вычисляемъ непосредственно, а остальныя подходящія дроби, начиная съ 3-ей, по выведенному нами закону.

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{1}=1;\quad \frac{p_2}{q_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2};$$

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{3.3+1}{2.3+1}=\frac{10}{7};\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{10.2+3}{7.2+2}=\frac{23}{16};$$

$$\frac{p_5}{q_5}=\frac{23.4+10}{16.4+7}=\frac{102}{71}.$$

2) Дана непрерывная дробь: $\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}}$.

Найти всѣ подходящія ея дроби.

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{0}{1}=0;\quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{3};$$

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{1\;.\;1+0}{3\;.\;1+1}=\frac{1}{4};\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{1\;.\;2+1}{4\;.\;2+3}=\frac{3}{11};$$

$$\frac{p_5}{q_5}=\frac{3\;.\;3+1}{11\;.\;3+4}=\frac{10}{37}.$$

Теорема 1. **Точное значеніе непрерывной дроби заключается между двумя послѣдовательными подходящими дробями, при чемъ оно ближе къ послѣдующей, чѣмъ къ предыдущей.** § 125.

Обозначимъ точное значеніе непрерывной дроби чрезъ A, т.-е. положимъ:

$$A=a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\cdots+\frac{1}{a_n+\frac{1}{a_{n+1}+\frac{1}{a_{n+2}+\cdots}}}}}$$

Напишемъ выраженіе $n+1$-ой подходящей дроби

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_na_{n+1}+p_{n-1}}{q_na_{n+1}+q_{n-1}}.$$

Обозначимъ часть данной непрерывной дроби, начиная съ a_{n+1}, через b, т.-е. положимъ:

$$b=a_{n+1}+\frac{1}{a_{n+2}+\cdots}$$

Чтобы получить величину A, достаточно въ выраженіи подходящей дроби $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ замѣнить a_{n+1} черезъ b, и тогда получимъ:

$$A=\frac{p_nb+p_{n-1}}{q_nb+q_{n-1}};$$

откуда $$Aq_nb + Aq_{n-1} = p_nb + p_{n-1}$$

или $$Aq_nb - p_nb = p_{n-1} - Aq_{n-1}.$$

Раздѣливъ обѣ части равенства на q_nq_{n-1}, получаемъ:

$$\frac{b(Aq_n - p_n)}{q_nq_{n-1}} = \frac{p_{n-1} - Aq_{n-1}}{q_nq_{n-1}}$$

или $$\frac{b}{q_{n-1}}\left(A - \frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{1}{q_n}\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - A\right);$$

откуда $$\frac{bq_n}{q_{n-1}} = \frac{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - A}{A - \frac{p_n}{q_n}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1).$$

Равенство (1) приводитъ насъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) Такъ какъ $\frac{bq_n}{q_{n-1}} > 0$ (b, q_n и q_{n-1} — положительныя числа), то числитель и знаменатель правой части равенства (1) должны имѣть одинаковые знаки.

Слѣдовательно,

$$\begin{cases} \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - A > 0 \\ A - \frac{p_n}{q_n} > 0 \end{cases} \quad \text{т.-е.} \quad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} > A > \frac{p_n}{q_n}$$

или $$\begin{cases} \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - A < 0 \\ A - \frac{p_n}{q_n} < 0 \end{cases} \quad \text{т.-е.} \quad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < A < \frac{p_n}{q_n},$$

а потому въ обоихъ случаяхъ A заключается между двумя послѣдовательными подходящими дробями $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ и $\frac{p_n}{q_n}$.

2) Такъ какъ $b>1$ и $q_n>q_{n-1}$, то абсолютная величина разности $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-A$ больше абсолютной величины разности $A-\frac{p_n}{q_n}$, т.-е. A ближе къ $\frac{p_n}{q_n}$, чѣмъ къ $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.

Слѣдствіе. Возьмемъ непрерывную дробь:

$$A=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ldots}}}$$

и обозначимъ подходящія дроби черезъ $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_3}{q_3}$ и т. д.

Такъ какъ $\frac{p_1}{q_1}=a_1$, то, очевидно, $\frac{p_1}{q_1}<A$.

Отсюда, на основаніи сейчасъ доказанной теоремы, заключаемъ, что

$$\frac{p_2}{q_2}>A;\ \frac{p_3}{q_3}<A;\ \frac{p_4}{q_4}>A, \text{ и т. д.};$$

т.-е. всѣ подходящія дроби нечетнаго порядка меньше точнаго значенія непрерывной дроби, а всѣ подходящія дроби четнаго порядка больше точнаго значенія ея.

На основаніи теоремы 1-ой этого § и сейчасъ выведеннаго слѣдствія, мы заключаемъ, что подходящія дроби нечетнаго порядка составляютъ рядъ возрастающій, а подходящія дроби четнаго порядка—рядъ убывающій, т.-е.

дроби $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_3}{q_3}$, $\frac{p_5}{q_5}$ . . . представляютъ рядъ возрастающихъ чиселъ, а дроби $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_4}{q_4}$, $\frac{p_6}{q_6}$ . . . представляютъ рядъ убывающихъ чиселъ, при чемъ всѣ члены перваго ряда меньше A, а всѣ члены второго ряда больше A.

Теорема 2. **Абсолютная величина разности между двумя послѣдовательными подходящими дробями равна дроби, числитель которой есть единица, а знаменатель произведеніе знаменателей этихъ подходящихъ дробей.**

Возьмемъ непрерывную дробь $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots}}$ и составимъ подходящія дроби $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}\dots$

Сначала убѣдимся въ справедливости теоремы на 3-ей и 4-ой подходящихъ дробяхъ [1]).

Возьмемъ разность между ними

$$\frac{p_4}{q_4}-\frac{p_3}{q_3}=\frac{p_4q_3-p_3q_4}{q_3q_4}=\frac{(p_3a_4+p_2)q_3-p_3(q_3a_4+q_2)}{q_3q_4}=$$

$$=\frac{\cancel{p_3a_4q_3}+p_2q_3-\cancel{p_3a_4q_3}-p_3q_2}{q_3q_4}=\frac{p_2(q_2a_3+q_1)-(p_2a_3+p_1)q_2}{q_3q_4}=$$

$$=\frac{p_2q_2a_3+p_2q_1-p_2q_2a_3-p_1q_2}{q_3q_4}=\frac{p_2q_1-p_1q_2}{q_3q_4},$$

такъ какъ $p_1=a_1$, $q_1=1$, $p_2=a_1a_2+1$, $q_2=a_2$,

то $p_2q_1-p_1q_2=a_1a_2+1-a_1a_2=1$

и

$$\frac{p_4}{q_4}-\frac{p_3}{q_3}=\frac{1}{q_3q_4}.$$

Теперь возьмемъ три послѣдовательныя подходящія дроби: $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ и составимъ разности: $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}$

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}}$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}}{q_nq_{n+1}}=$$

$$=\frac{(p_na_{n+1}+p_{n-1})q_n-p_n(q_na_{n+1}+q_{n-1})}{q_nq_{n+1}}=$$

$$=\frac{p_nq_na_{n+1}+p_{n-1}q_n-p_nq_na_{n+1}-p_nq_{n-1}}{q_nq_{n+1}}=\frac{-(p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n)}{q_nq_{n+1}}$$

---

[1]) 1-ую и 2-ую подходящія дроби брать для доказательства нельзя, такъ какъ онѣ не составлены по закону составленія подходящихъ дробей, хотя теорема остается справедливою и для этихъ подходящихъ дробей, въ чемъ можно убѣдиться непосредственно.

Сравнивая полученныя выраженія для этихъ двухъ разностей, мы приходимъ къ заключенію, что числители ихъ отличаются только знакомъ и потому имѣютъ одну и ту же абсолютную величину, знаменатели же представляютъ произведенія знаменателей подходящихъ дробей.

Такимъ образомъ, какія бы двѣ послѣдовательныя подходящія дроби мы ни взяли, абсолютная величина числителя ихъ разности будетъ всегда одно и то же число, знаменатель же ея будетъ равенъ произведенію знаменателей взятыхъ дробей. Но мы уже доказали, что абсолютная величина числителя разности 3-й и 4-й подходящихъ дробей равна 1; слѣдовательно, равна единицѣ абсолютная величина числителя разности какихъ угодно послѣдовательныхъ подходящихъ дробей.

Такимъ образомъ, мы доказали справедливость теоремы для какихъ угодно 2-хъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей. Что касается знака, который надо поставить при разности, то надо руководствоваться слѣдующимъ соображеніемъ: мы знаемъ, что подходящія дроби четнаго порядка больше подходящихъ дробей нечетнаго порядка; поэтому, если составлять разность такъ, что уменьшаемое будетъ дробь четнаго порядка, то передъ разностью надо поставить знакъ $+$; въ противномъ случаѣ надо поставить знакъ $-$.

Это правило выражается слѣдующимъ равенствомъ:

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=(-1)^n\cdot\frac{1}{q_{n-1}\cdot q_n}\,.$$

Теперь разсмотримъ нѣкоторыя слѣдствія предыдущихъ теоремъ.

Слѣдствіе 1. **Всякая подходящая дробь есть дробь несократимая.**

Возьмемъ подходящую дробь $\frac{p_n}{q_n}$ и докажемъ, что p_n и q_n взаимно-простыя числа.

Согласно теоремѣ 2-ой, мы имѣемъ равенство:

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\pm\frac{1}{q_nq_{n-1}}\,.$$

Освободивъ это равенство отъ знаменателей, получаемъ:

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1.$$

Обозначимъ общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ p_n и q_n черезъ d. Тогда

1) $p_n q_{n-1}$ должно дѣлиться на d, такъ какъ p_n дѣлится на d;

2) $q_n p_{n-1}$ должно дѣлиться на d, такъ какъ q_n дѣлится на d, а потому и разность $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$, равная ± 1, должна дѣлиться на d; слѣдовательно, $d=1$.

Итакъ, p_n и q_n, имѣя общимъ наибольшимъ дѣлителемъ единицу, суть числа взаимно-простыя.

Слѣдствіе 2. **Если несократимая дробь $\frac{a}{b}$ ближе къ точному значенію непрерывной дроби, чѣмъ подходящая дробь $\frac{p_n}{q_n}$, то $b > q_n$.**

Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{a}{b}$ ближе къ A, чѣмъ $\frac{p_n}{q_n}$, то тѣмъ болѣе $\frac{a}{b}$ ближе къ A, чѣмъ $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, и потому дробь $\frac{a}{b}$ заключается между подходящими дробями $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.

Значитъ,

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

или

$$\left|\frac{a q_{n-1} - b p_{n-1}}{b q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_n q_{n-1}};$$

откуда

$$\left|a q_{n-1} - b p_{n-1}\right| < \frac{b}{q_n}.$$

Такъ какъ a, b, p_{n-1} и q_{n-1}—цѣлыя числа, то лѣвая часть послѣдняго неравенства—либо цѣлое число, либо 0;

но, если $\quad |a q_{n-1} - b p_{n-1}| = 0$, то

$a q_{n-1} = b p_{n-1}$ или $\frac{a}{b} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, что противорѣчитъ условію.

Значитъ,

$$|aq_{n-1}-bp_{n-1}| \text{ — цѣлое число,}$$

и потому

$$\frac{b}{q_n} > 1 \text{ или } b > q_n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что подходящая дробь ближе къ точному значенію непрерывной дроби, чѣмъ всякая другая дробь съ меньшимъ или равнымъ знаменателемъ.

Слѣдствіе 3. **Если вмѣсто точнаго значенія непрерывной дроби возьмемъ подходящую дробь $\frac{p_n}{q_n}$, то сдѣлаемъ ошибку, меньшую каждой изъ слѣдующихъ дробей:**

$$\frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}}; \quad \frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}; \quad \frac{1}{q_n^2}.$$

a) Было доказано, что A заключается между двумя послѣдовательными подходящими дробями;
слѣдовательно:

$$\left|A-\frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|$$

или

$$\left|A-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

b) Такъ какъ

$$q_{n+1}=q_n \cdot a_{n+1}+q_{n-1} \text{ и } a_{n+1} \geqq 1,$$

то

$$q_{n+1} \geqq q_n+q_{n-1}$$

или

$$q_n \cdot q_{n+1} \geqq q_n(q_n+q_{n-1}).$$

Слѣдовательно,

$$\frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}} \leqq \frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}.$$

Поэтому,

$$\left|A-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

c) Очевидно,

$$q_n < q_n + q_{n-1};$$

слѣдовательно,

$$q_n^2 < q_n\ (q_n + q_{n-1}).$$

Воспользовавшись этимъ соотношеніемъ, мы изъ неравенства (2) находимъ:

$$\left| A - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}. \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

§ 126. **Примѣненіе непрерывныхъ дробей къ рѣшенію неопредѣленныхъ уравненій.**

При помощи непрерывныхъ дробей можно найти частное рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія:

$$ax + by = c.$$

Для этого надо изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ составить дробь $\frac{a}{b}$, обратить ее въ непрерывную и составить подходящія дроби.

Положимъ, предпослѣдняя подходящая дробь будетъ $\frac{p}{q}$, послѣдняя же подходящая дробь будетъ, очевидно, $\frac{a}{b}$.

Затѣмъ беремъ разность этихъ подходящихъ дробей

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \pm \frac{1}{b\,.\,q}.$$

Освободивъ это равенство отъ знаменателей, получимъ:

$$aq - bp = \pm 1.$$

Разсмотримъ оба случая отдѣльно:

1) Положимъ, что въ послѣднемъ равенствѣ при **1** надо взять знакъ $+$.

$$aq - bp = +1.$$

Умноживъ обѣ части равенства на c, получимъ:

$$aqc - bpc = c$$

или

$$a(cq) + b(-cp) = c.$$

Сравнивъ это равенство съ даннымъ неопредѣленнымъ уравненіемъ, находимъ частное его рѣшеніе:

$$\begin{cases} x=cq \\ y=-cp. \end{cases}$$

2) Положимъ, что

$$aq-bp=-1.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на $-c$, получимъ

$$-acq+bcp=c$$

или

$$a(-cq)+b(cp)=c.$$

Сравнивъ это равенство съ даннымъ неопредѣленнымъ уравненіемъ, находимъ частное его рѣшеніе:

$$\begin{cases} x=-cq \\ y=cp. \end{cases}$$

Зная одно частное рѣшеніе, можно по формуламъ § 50 найти и общее рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія.

Примѣръ.

Найти цѣлыя рѣшенія неопредѣленнаго уравненія $37x-29y=7$.

Обратимъ $\frac{37}{29}$ въ непрерывную дробь:

частныя		1	3	1	1	1	2
	37	29	8	5	3	2	1
	29	24	5	3	2	2	
остатки	8	5	3	2	1	0	

откуда

$$\frac{37}{29}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}.$$

Составимъ подходящія дроби:

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{1} \qquad \frac{p_4}{q_4}=\frac{5.1+4}{4.1+3}=\frac{9}{7}$$

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{4}{3} \qquad \frac{p_5}{q_5}=\frac{9.1+5}{7.1+4}=\frac{14}{11}$$

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{4.1+1}{3.1+1}=\frac{5}{4} \qquad \frac{p_6}{q_6}=\frac{a}{b}=\frac{14.2+9}{11.2+7}=\frac{37}{29}$$

$$\frac{37}{29}-\frac{14}{11}=+\frac{1}{11.29}$$

$$\begin{array}{r|l} 37.11-29.14=1 & .7 \\ 37x-29.\,y=7 & \\ \hline 37(11.7)-29\,(14.7)=7 & \end{array}$$

Сравнивая послѣднее равенство съ даннымъ уравненіемъ находимъ одно частное его рѣшеніе:

$$\begin{cases} x=11.7=77 \\ y=14.7=98 \end{cases}$$

Отсюда общее рѣшеніе будетъ:

$$x=77+29t$$
$$y=98+37t$$

§ 127. **Выраженіе количествъ при помощи непрерывныхъ дробей.**

Всякое раціональное число обращается въ конечную непрерывную дробь и, наоборотъ, всякая конечная непрерывная дробь можетъ быть обращена въ обыкновенную дробь, т.-е. представляетъ раціональное количество.

Возьмемъ дробь $\frac{A}{B}$ и положимъ $A>B$.

Будемъ послѣдовательно дѣлить A на B; получимъ:

частныя	a_1	a_2	a_3	$a_4 \ldots\ldots$	a_{n-1}	a_n
A	B	r_1	r_2	$r_3 \ldots\ldots$	r_{n-2}	r_{n-1}
остатки r_1	r_2	r_3	r_4	$r_5 \ldots\ldots$	0	

Отсюда мы имѣемъ равенства:

$$A = Ba_1 + r_1, \text{ откуда } \frac{A}{B} = a_1 + \frac{r_1}{B} = a_1 + \frac{1}{\left(\frac{B}{r_1}\right)}$$

$$B = r_1 a_2 + r_2, \quad \text{»} \quad \frac{B}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} = a_2 + \frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

$$r_1 = r_2 a_3 + r_3, \quad \text{»} \quad \frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2} = a_3 + \frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)}$$

$$r_2 = r_3 a_4 + r_4, \quad \text{»} \quad \frac{r_2}{r_3} = a_4 + \frac{r_4}{r_3} = a_4 + \frac{1}{\left(\frac{r_3}{r_4}\right)}$$

. . . .

$$r_{n-2} = r_{n-1} a_n, \text{ откуда } \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n.$$

Изъ этихъ равенствъ черезъ послѣдовательную подстановку мы получаемъ:

$$\frac{A}{B} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Чтобы изъ конечной непрерывной дроби получить обыкновенную дробь, достаточно только выполнить указанныя въ ней дѣйствія.

Изъ такого соотношенія между раціональнымъ числомъ и конечной непрерывной дробью мы заключаемъ, что ирраціональное число можетъ быть обращено только въ безконечную непрерывную дробь и, наоборотъ, безконечная непрерывная дробь представляетъ ирраціональное количество.

Положимъ, мы имѣемъ безконечную непрерывную дробь. Мы можемъ составить неограниченный рядъ подходящихъ дробей; изъ этихъ подходящихъ дробей составимъ два ряда чиселъ: возрастающій, взявъ подходящія дроби нечетнаго порядка, и убывающій, взявъ подходящія дроби четнаго порядка, т.-е.

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_5}{q_5} < \cdots$$

и

$$\frac{p_2}{q_2} > \frac{p_4}{q_4} > \frac{p_6}{q_6} > \ldots$$

Каждый изъ членовъ перваго ряда меньше каждаго изъ членовъ второго ряда, и разность между соотвѣтственными членами этихъ рядовъ безпредѣльно уменьшается, по мѣрѣ удаленія этихъ членовъ отъ начала ряда; слѣдовательно, эти два ряда удовлетворяютъ условіямъ (A) § 76 и потому опредѣляютъ нѣкоторое ирраціональное число, такъ какъ раціональное число, будучи обращено въ непрерывную дробь, дало-бы конечную дробь, а намъ дана безконечная дробь.

Общій пріемъ разложенія ирраціональныхъ чиселъ въ непрерывную дробь заключается въ слѣдующемъ.

Положимъ, дано ирраціональное число A. По свойствамъ этого числа опредѣляемъ два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, между которыми заключается число A.

Положимъ,

$$a+1>A>a.$$

Тогда

$A=a+\frac{1}{x}$, гдѣ x—ирраціональное число, большее единицы

Отсюда мы имѣемъ

$$\frac{1}{x}=A-a;$$

слѣдовательно,

$$x=\frac{1}{A-a}.$$

Теперь узнаемъ, между какими цѣлыми числами заключается x.

Положимъ,

$$b<x<b+1;$$

слѣдовательно,

$$x=b+\frac{1}{y}.$$

Отсюда найдемъ y и опредѣлимъ, между какими цѣлыми числами заключается y.

Положимъ,

$$c<y<c+1;$$

слѣдовательно,

$$y=c+\frac{1}{z} \text{ и т. д.}$$

Отсюда черезъ послѣдовательную подстановку получаемъ для A слѣдующую непрерывную дробь:

$$A=a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\ldots}}$$

Обратный вопросъ, т.-е. нахожденіе по данной безконечной непрерывной дроби соотвѣтствующаго ирраціональнаго числа A, не можетъ быть рѣшенъ въ элементарной алгебрѣ, кромѣ того случая, когда дана безконечная періодическая непрерывная дробь (см. § 129). Однако можно вычислить ирраціональное количество A при помощи подходящихъ дробей приближенно, съ желаемою степенью точности.

§ 128. **Вычисленіе квадратнаго корня при помощи непрерывныхъ дробей.**

Примѣнимъ общій пріемъ обращенія ирраціональныхъ чиселъ въ непрерывную дробь къ извлеченію квадратнаго корня.

Примѣръ.

Вычислить $\sqrt{3}$ при помощи непрерывныхъ дробей.

Опредѣлимъ сперва, между какими цѣлыми числами заключается $\sqrt{3}$

$$1^2<3<2^2;$$

слѣдовательно,

$$1<\sqrt{3}<2,$$

откуда

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Теперь опредѣлимъ изъ уравненія (1) x_1 и узнаемъ, между какими цѣлыми числами заключается x_1:

$$\frac{1}{x_1}=\sqrt{3}-1,$$

откуда

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\frac{1+1}{2}<x_1<\frac{2+1}{2}$$

$$1<x_1<2;$$

слѣдовательно,

$$x_1=1+\frac{1}{x_2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Подставивъ въ это уравненіе, вмѣсто x_1, найденное для него выраженіе, получимъ уравненіе, изъ котораго опредѣляемъ x_2 и затѣмъ узнаемъ, между какими цѣлыми числами заключается x_2.

$$\frac{1}{x_2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

откуда

$$x_2=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1.$$

$$1+1<x_2<2+1$$
$$2<x_2<3;$$

слѣдовательно,

$$x_2=2+\frac{1}{x_3}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3).$$

Подставивъ въ равенство (3) значеніе x_2, получимъ уравненіе, изъ котораго найдемъ x_3 и затѣмъ опредѣлимъ, между какими цѣлыми числами заключается x_3.

$$\sqrt{3}+1=2+\frac{1}{x_3}$$

$$\frac{1}{x_3}=\sqrt{3}+1-2=\sqrt{3}-1,$$

откуда

$$x_3=\frac{1}{\sqrt{3}-1}.$$

Сравнивъ выраженіе x_3 съ выраженіемъ x_1, заключаемъ, что

$$x_3=x_1;$$

слѣдовательно,

$$x_4=x_2;\ x_5=x_3=x_1;\ x_6=x_4=x_2\ \text{и т. д.}$$

Теперь мы можемъ изъ равенствъ (1), (2) и (3) составить непрерывную дробь, выражающую $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}$$

Пусть требуется вычислить значеніе $\sqrt{3}$ съ точностью до 0,001; будемъ составлять подходящія дроби и опредѣлять предѣлъ ошибки, которую мы дѣлаемъ, взявъ подходящую дробь вмѣсто истиннаго значенія непрерывной дроби:

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{1}$$

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{2}{1}$$

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{2.2+1}{1.2+1}=\frac{5}{3};\ \text{предѣлъ ошибки}\ \frac{1}{3.4}$$

$$\frac{p_4}{q_4}=\frac{5.1+2}{3.1+1}=\frac{7}{4};\quad "\quad \frac{1}{4.11}$$

$$\frac{p_5}{q_5}=\frac{7.2+5}{4.2+3}=\frac{19}{11};\quad "\quad \frac{1}{11.15}$$

$$\frac{p_6}{q_6}=\frac{19.1+7}{11.1+4}=\frac{26}{15};\quad "\quad \frac{1}{15.41}$$

$$\frac{p_7}{q_7}=\frac{26.2+19}{15.2+11}=\frac{71}{41};\quad "\quad \frac{1}{41.56}=\frac{1}{2296}$$

$$\frac{p_8}{q_8}=\frac{71.1+26}{41.1+15}=\frac{97}{56}.$$

Слѣдовательно, взявъ приближенное значеніе $\sqrt{3}$, равное $\frac{71}{41}$, мы сдѣлаемъ ошибку менѣе $\frac{1}{2296}$, а потому и подавно менѣе 0,001.

Всякій ирраціональный квадратный корень выражается безконечною періодическою непрерывною дробью. § 129.

Обратно, всякая безконечная періодическая непрерывная дробь представляетъ корень нѣкотораго квадратнаго уравненія. Въ послѣднемъ мы можемъ убѣдиться на слѣдующихъ примѣрахъ:

Примѣры.

1) Возьмемъ чистую періодическую непрерывную дробь, т.-е. такую, у которой періодъ начинается съ перваго звена. Обозначимъ искомое значеніе такой дроби черезъ x.

Положимъ, напримѣръ,

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}}$$

Такъ какъ часть непрерывной дроби, начинающаяся со второго періода, представляетъ ту же самую безконечную періодическую дробь, какъ и данная дробь, то ее можно обозначить также черезъ x, и мы получаемъ:

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}.$$

Составимъ подходящія дроби:

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{1};$$

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{3}{2};$$

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{3.3+1}{2.3+1}=\frac{10}{7};$$

$$\frac{p_4}{q_4}=\frac{10.x+3}{7.x+2}=\frac{10x+3}{7x+2}.$$

Эта послѣдняя подходящая дробь выражаетъ величину числа x; слѣдовательно, мы имѣемъ уравненіе:

$$x=\frac{10x+3}{7x+2}$$

$$x(7x+2)=10x+3$$

$$7x^2+2x=10x+3$$

$$7x^2-8x-3=0.$$

Это и есть искомое квадратное уравненіе, положительный корень котораго выражается данною непрерывною періодическою дробью:

$$x=\frac{8+\sqrt{8^2-4.7(-3)}}{2.7}=\frac{8+\sqrt{148}}{14}=\frac{4+\sqrt{37}}{7}\ldots$$

2) Возьмемъ смѣшанную періодическую непрерывную дробь. Положимъ,

$$x = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}}}$$

Обозначимъ періодическую часть этой дроби черезъ y, т.-е. положимъ:

$$y = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}$$

Слѣдовательно, данная дробь можетъ быть написана такъ:

$$x = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{y}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

Опредѣлимъ y:

$$y = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}};$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{1};$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{4}{1};$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{4\,.\,2+3}{1\,.\,2+1} = \frac{11}{3};$$

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{11\,.\,y+4}{3\,.\,y+1}.$$

Слѣдовательно,

$$y = \frac{11y+4}{3y+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Составляемъ подходящія дроби непрерывной дроби (*):

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{2}{1};$$
$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{9}{4};$$
$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{9y+2}{4y+1}.$$

Слѣдовательно,

$$x=\frac{9y+2}{4y+1}\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ уравненія (2) опредѣляемъ y:

$$x(4y+1)=9y+2$$
$$4xy+x=9y+2$$
$$4xy-9y=2-x$$
$$y=\frac{2-x}{4x-9}.$$

Это выраженіе подставимъ въ уравненіе (1); получимъ:

$$\frac{2-x}{4x-9}=\frac{11\left(\frac{2-x}{4x-9}\right)+4}{3\left(\frac{2-x}{4x-9}\right)+1}$$

или

$$\frac{2-x}{4x-9}=\frac{11(2-x)+4(4x-9)}{3(2-x)+(4x-9)}.$$

Упростивъ это выраженіе, получимъ искомое квадратное уравненіе:

$$\frac{2-x}{4x-9}=\frac{22-11x+16x-36}{6-3x+4x-9}=\frac{5x-14}{x-3}$$
$$(2-x)(x-3)=(5x-14)(4x-9)$$
$$2x-x^2-6+3x=20x^2-56x-45x+126$$
$$5x-x^2-6=20x^2-101x+126$$
$$21x^2-106x+132=0.$$

Корень этого уравненія, равный $\frac{53-\sqrt{37}}{21}$, выражается данною непрерывною дробью.

§ 130. **Вычисленіе логариѳмовъ при помощи непрерывныхъ дробей.**

Пусть дано вычислить $lg_2 3$.

По опредѣленію логариѳма, имѣемъ слѣдующее уравненіе:

$$3=2^x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

гдѣ

$$x=lg_2 3.$$

Узнаемъ, между какими цѣлыми числами заключается x.

Такъ какъ $\qquad 2^1<3<2^2,$

то $\qquad 2^1<2^x<2^2;$

слѣдовательно,

$$1<x<2,$$

откуда

$$x=1+\frac{1}{y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1').$$

Подставивъ это выраженіе x въ данное уравненіе, получаемъ:

$$3=2^{1+\frac{1}{y}}$$

или

$$3=2 \, . \, 2^{\frac{1}{y}},$$

откуда

$$2^{\frac{1}{y}}=\frac{3}{2};$$

слѣдовательно, $\qquad 2=\left(\frac{3}{2}\right)^y. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$

Опредѣляемъ, между какими цѣлыми числами заключается y.

Такъ какъ

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1<2<\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

то $\qquad \left(\frac{3}{2}\right)^1<\left(\frac{3}{2}\right)^y<\left(\frac{3}{2}\right)^2;$

слѣдовательно,

$$1<y<2,$$

откуда

$$y = 1 + \frac{1}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2').$$

Теперь подставляемъ это выраженіе y въ уравненіе (2) и преобразовываемъ его.

$$2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{z}}$$

$$2 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}},$$

откуда $$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}} = 2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$$

или $$\frac{3}{2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Опредѣляемъ, между какими цѣлыми числами заключается z.

Такъ какъ

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1} < \frac{3}{2} < \left(\frac{4}{3}\right)^{2},$$

то

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1} < \left(\frac{4}{3}\right)^{z} < \left(\frac{4}{3}\right)^{2};$$

слѣдовательно,

$$1 < z < 2,$$

откуда

$$z = 1 + \frac{1}{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3').$$

Подставляемъ это выраженіе z въ уравненіе (3) и преобразовываемъ его:

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{u}}$$

или

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}},$$

откуда

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{8}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8};$$

слѣдовательно,

$$\frac{4}{3} = \left(\frac{9}{8}\right)^{u} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Опредѣляемъ, между какими цѣлыми числами заключается u.

Такъ какъ

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2} < \frac{4}{3} < \left(\frac{9}{8}\right)^{3},$$

то

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2} < \left(\frac{9}{8}\right)^{u} < \left(\frac{9}{8}\right)^{3},$$

откуда

$$2 < u < 3;$$

слѣдовательно,

$$u = 2 + \frac{1}{t} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

и т. д.

Изъ равенствъ (1′), (2′), (3′), (4′) и т. д. составляемъ непрерывную дробь: $x = lg_2 3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$

Вычисляемъ подходящія дроби:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{2 \,.\, 1 + 1}{1 \,.\, 1 + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{3 \,.\, 2 + 2}{2 \,.\, 2 + 1} = \frac{8}{5} \text{ и т. д.}$$

и получаемъ послѣдовательныя приближенныя значенія $lg_2 3$.

Подобнымъ же образомъ можно вычислить логариѳмъ какого угодно положительнаго числа при всякомъ положительномъ основаніи.

ДОПОЛНЕНІЯ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Мнимыя числа и комплексныя выраженія.

1. Мнимыя числа.

§ 1. Мнимыя числа. Мы опредѣлили (§ 58, стр. 134) мнимое число, какъ корень четной степени изъ отрицательнаго числа. Простѣйшимъ мнимымъ числомъ является квадратный корень изъ отрицательнаго числа.

Вещественныя и мнимыя числа суть величины разнородныя, и потому распространеніе свойствъ и правилъ дѣйствій надъ вещественными количествами на мнимыя количества требуетъ особыхъ соглашеній.

Основныя соглашенія. 1) Условились правило извлеченія вещественнаго корня изъ произведенія распространить на мнимый корень: такимъ образомъ, допускаютъ преобразованіе:

$$\sqrt{-A} = \sqrt{A\,.\,(-1)} = \sqrt{A}\cdot\sqrt{-1},$$

при чемъ $\sqrt{-1}$ обыкновенно обозначаютъ знакомъ i.

Вещественный множитель $\sqrt{A}$ въ выраженіи $\sqrt{A}\,.\,i$ условились называть коэффиціентомъ при мнимомъ числѣ i.

Распространяя на мнимое число опредѣленіе квадратнаго корня, какъ такого числа, квадратъ котораго равенъ подкоренной величинѣ, находимъ, что $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

2) Условились надъ выраженіями, содержащими мнимое число i, производить дѣйствія такъ же, какъ если-бы i было вещественное число.

Покажемъ теперь, какъ производить дѣйствія надъ мнимыми числами, исходя изъ сдѣланныхъ соглашеній.

Дѣйствія надъ мнимыми числами.

1) **Сложеніе и вычитаніе.**

$$ai + bi = (a + b)\ i.$$

Напримѣръ:

$$\sqrt{-9} + \sqrt{-4} = 3i + 2i = 5i.$$

$$ai - bi = (a - b)\ i.$$

Напримѣръ:

$$\sqrt{-25} - \sqrt{-9} = 5i - 3i = 2i.$$

2) **Умноженіе.**

$$ai\ .\ bi = ab\ .\ i^2 = ab\ .\ -1 = -ab.$$

Напримѣръ:

$$\sqrt{-9}\ .\ \sqrt{-4} = 3i\ .\ 2i = 6i^2 = -6\ ^1).$$

3) **Дѣленіе.**

$$ai : bi = \frac{ai}{bi} = \frac{a}{b}.$$

Напримѣръ:

$$\sqrt{-36} : \sqrt{-9} = \frac{6i}{3i} = 2\ ^1).$$

4) **Возвышеніе въ степень.**

$$(ai)^n = a^n\ .\ i^n.$$

Степени i.

Посмотримъ, какія значенія можетъ имѣть i^n при различныхъ цѣлыхъ положительныхъ значеніяхъ числа n.

Разсмотримъ первыя четыре степени i.

$$i^1 = i \qquad i^3 = i^2\ .\ i = -i$$

$$i^2 = -1 \qquad i^4 = i^3\ .\ i^2 = -1\ .\ -1 = +1.$$

Всякая другая цѣлая положительная степень i выражается однимъ изъ этихъ четырехъ значеній. Чтобы объяснить это, за-

[1]) Въ этихъ примѣрахъ предполагаются ариѳметическія значенія $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ и $\sqrt{36}$.

мѣтимъ, что показатель степени n по отношенію къ дѣлимости на 4, можетъ представить четыре различныхъ случая:

a) Показатель n дѣлится на 4.

Пусть частное будетъ p; слѣдовательно, $n=4p$.

Тогда

$$i^n=i^{4p}=(i^4)^p=(+1)^p=+1.$$

b) Показатель n при дѣленіи на 4 даетъ частное p и остатокъ 1; слѣдовательно, $n=4p+1$.

Тогда

$$i^n=i^{4p+1}=i^{4p}.i=+1\,.\,i=i.$$

c) Показатель n при дѣленіи на 4 даетъ частное p и остатокъ 2; слѣдовательно, $n=4p+2$.

Тогда

$$i^n=i^{4p+2}=i^{4p}.i^2=+1\,.\,i^2=+1\,.\,-1=-1.$$

d) Показатель n при дѣленіи на 4 даетъ частное p и остатокъ 3; слѣдовательно, $n=4p+3$.

Тогда

$$i^n=i^{4p+3}=i^{4p}.i^3=+1\,.\,-i=-i.$$

Слѣдовательно, для опредѣленія значенія i^n надо показатель n раздѣлить на 4, опредѣлить остатокъ, полученный при этомъ дѣленіи, и взять значеніе степени i, соотвѣтствующее этому остатку.

Примѣры.

$$i^{22}=i^2=-1 \qquad i^{40}=i^4=+1$$
$$i^{15}=i^3=-i \qquad i^{21}=i^1=+i.$$

2. Комплексныя выраженія.

§ 2. Комплексныя выраженія. Опредѣленія.

Комплекснымъ выраженіемъ называется выраженіе вида $a+bi$, представляющее совокупность двухъ количествъ: вещественнаго a и мнимаго bi.

Комплексное выраженіе не есть сумма двухъ количествъ, такъ какъ вещественное число a и мнимое bi, какъ величины разнородныя, складывать нельзя; знакъ $(+)$, соединяющій эти два числа, показываетъ только, что числа a и bi разсматриваются **совмѣстно**.

Вещественныя и мнимыя числа суть частные случаи комплекснаго выраженія.

Такъ,

1) если $a=0$, то комплексное выраженіе $a+bi$ обращается въ мнимое число bi.

2) если $b=0$, то комплексное выраженіе $a+bi$ обращается въ вещественное число a.

Абсолютная величина $\sqrt{a^2+b^2}$ называется **модулемъ** комплекснаго выраженія $a+bi$; такъ, для выраженія $3+4i$ модуль равенъ $\sqrt{3^2+4^2}=5$, для выраженія $(-2-3i)$ модуль равенъ $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

Два комплексныхъ выраженія, различающіяся только знаками при мнимыхъ членахъ, называются **сопряженными комплексными выраженіями**, напримѣръ:

$$a+bi \text{ и } a-bi, \quad 2+3i \text{ и } 2-3i.$$

Мнимые корни полнаго квадратнаго уравненія суть сопряженныя комплексныя выраженія.

Возьмемъ уравненіе $x^2+px+q=0$;
корни его будутъ:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Если $\frac{p^2}{4}<q$, то корни x_1 и x_2 будутъ мнимые.

Легко показать, что x_1 и x_2 приводятся къ сопряженнымъ комплекснымъ выраженіямъ. Преобразуемъ формулы, выражающія x_1 и x_2; результатъ преобразованія выразится въ такомъ видѣ:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-\frac{p}{2}+\sqrt{-\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$
$$=-\frac{p}{2}+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,i.$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-\frac{p}{2}-\sqrt{-\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$
$$=-\frac{p}{2}-\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,i.$$

Обозначивъ теперь $-\frac{p}{2}$ черезъ a, $\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ черезъ b, получаемъ:

$$x_1=a+bi, \qquad x_2=a-bi.$$

Основныя свойства комплексныхъ выраженій.

1) Для того, чтобы комплексное выраженіе $a+bi$ было равно 0, необходимо и достаточно, чтобы a и b были отдѣльно равны 0.

2) Для того, чтобы комплексныя выраженія $a+bi$ и a_1+b_1i были равны, необходимо и достаточно, чтобы a было равно a_1 и b было равно b_1.

Оба эти свойства комплексныхъ выраженій вытекаютъ непосредственно изъ опредѣленія комплекснаго выраженія, какъ совокупности двухъ разнородныхъ величинъ.

§ 3. **Дѣйствія надъ комплексными выраженіями.**

Всѣ дѣйствія надъ комплексными выраженіями производятъ по общимъ правиламъ дѣйствій надъ многочленами, разсматривая i какъ обыкновенное количество.

При этомъ обнаруживается, что **результатъ всякаго дѣйствія надъ комплексными выраженіями есть вообще также комплексное выраженіе.**

1) Сложеніе.

$$(a+bi)+(a_1+b_1i)=a+bi+a_1+b_1i=\underbrace{(a+a_1)}_{A}+\underbrace{(b+b_1)}_{B}i=A+Bi.$$

Въ частности, сумма сопряженныхъ комплексныхъ выраженій есть число вещественное:

$$(a+bi)+(a-bi)=a+bi+a-bi=2a.$$

2) Вычитаніе.

$$(a+bi)-(a_1+b_1i)=a+bi-a_1-b_1i=\underbrace{(a-a_1)}_{A}+\underbrace{(b-b_1)}_{B}i=A+Bi.$$

3) Умноженіе.

$$(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=aa_1+a_1bi+ab_1i-bb_1=$$
$$=\underbrace{(aa_1-bb_1)}_{A}+\underbrace{(a_1b+ab_1)}_{B}i=A+Bi.$$

Въ частности, произведеніе сопряженныхъ комплексныхъ выраженій есть число вещественное.

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

Отсюда слѣдуетъ, что сумма квадратовъ двухъ чиселъ разлагается на два сопряженныхъ комплексныхъ множителя.

4) **Возвышеніе въ цѣлую положительную степень.**

$$(a+bi)^m=a^m+ma^{m-1}\,bi+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,a^{m-2}(bi)^2+$$
$$+\frac{m(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{m-3}\,(bi)^3+\ldots$$

откуда, принимая во вниманіе различныя значенія цѣлыхъ положительныхъ степеней i, получаемъ

$$(a+bi)^m=\underbrace{\left(a^m-\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,a^{m-2}b^2+\,\ldots\right)}_{A}+$$
$$+\underbrace{\left(ma^{m-1}\,b-\frac{m(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{m-3}b^3+\,\ldots\right)}_{B}i=A+Bi.$$

Примѣръ.

$$(1-\sqrt{3}i)^4=1^4-4\,.\,1^3.\sqrt{3}i+6\,.\,1^2.(\sqrt{3}i)^2-4\,.\,1\,.\,(\sqrt{3}i)^3+(\sqrt{3}i)^4=$$
$$=1-4\,\sqrt{3}i-18+12\,\sqrt{3}i+9=-8+8\sqrt{3}i.$$

5) **Дѣленіе.**

$$(a+bi):(a_1+b_1i)=\frac{a+bi}{a_1+b_1i}.$$

Чтобы привести частное къ комплексному виду, умножимъ дѣлимое и дѣлитель на комплексное выраженіе, сопряженное съ дѣлителемъ, т. е. на a_1-b_1i; получимъ

$$(a+bi):(a_1+b_1i)=\frac{(a+bi)\,(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)\,(a_1-b_1i)}=\frac{aa_1+a_1bi-ab_1i-bb_1i^2}{a_1^2-b_1^2i^2}=$$
$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}\,i=A+Bi.$$

Примѣръ.

$$(3+2i):(1+i)=\frac{(3+2i)\,\,(1-i)}{(1+i)\,\,(1-i)}=\frac{3+2i-3i-2i^2}{2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\,i.$$

6) **Извлеченіе квадратнаго корня.**

Извлечь квадратный корень изъ комплекснаго выраженія значитъ найти новое комплексное выраженіе, квадратъ котораго былъ-бы равенъ данному комплексному выраженію.

Положимъ, требуется извлечь квадратный корень изъ комплекснаго выраженія $a+bi$. Обозначимъ искомое комплексное выраженіе черезъ $x+yi$, т.-е. положимъ $\sqrt{a+bi}=x+yi$.

Надо найти x и y подъ условіемъ, чтобы это были числа вещественныя.

Согласно опредѣленію, имѣемъ

$$(x+yi)^2=a+bi$$

или

$$x^2+2xyi+y^2i^2=a+bi$$

или

$$(x^2-y^2)+2xyi=a+bi.$$

Отсюда, по свойству равныхъ комплексныхъ выраженій, имѣемъ уравненія:

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b. \end{cases} \qquad (*).$$

Простѣйшій способъ рѣшенія этой системы уравненій заключается въ слѣдующемъ: возвысимъ каждое изъ этихъ уравненій въ квадратъ и полученныя уравненія сложимъ; получимъ

$$\begin{array}{r|l} x^4-2x^2y^2+y^4=a^2 & \\ 4x^2y^2 \quad =b^2 & + \\ \hline x^4+2x^2y^2+y^4=a^2+b^2 & \end{array}$$

или

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2,$$

откуда

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Такъ какъ x и y должны быть вещественныя числа, то x^2 и y^2 числа положительныя, а потому и сумма x^2+y^2 число положительное; слѣдовательно, въ послѣднемъ равенствѣ, при квадратномъ корнѣ, надо взять только знакъ плюсъ.

Итакъ, для опредѣленія x и y мы имѣемъ слѣдующую систему уравненій:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2=a \end{cases}$$

слѣдовательно,

$$2x^2=a+\sqrt{a^2+b^2};\ 2y^2=-a+\sqrt{a^2+b^2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}};\ y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

при чемъ, такъ какъ $xy=\frac{b}{2}$, то, при $b>0$, x и y должны быть взяты съ одинаковыми знаками, а при $b<0$, съ различными знаками.

По этимъ формуламъ мы найдемъ x и y [1]).

Такъ какъ $\sqrt{a^2+b^2}$ число положительное и абсолютная величина этого корня больше абсолютной величины числа a, то опредѣляемыя по этимъ формуламъ значенія x и y числа вещественныя, и потому квадратный корень изъ комплекснаго выраженія будетъ также комплексное выраженіе, а именно

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,i\right)$$

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,i\right).$$

§ 4. Преобразованіе $\sqrt[2n]{-a}$.

Покажемъ, что корень какой угодно четной степени изъ отрицательнаго числа можетъ быть выраженъ въ $\sqrt{-1}$.

Пусть $2n=2^p(2q+1)$; тогда

$$\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[2^p(2q+1)]{-a}=\sqrt[2^p]{\sqrt[2q+1]{-a}}=\sqrt[2^p]{-b},$$

если мы отрицательное число, представляющее $\sqrt[2q+1]{-a}$, обозначимъ черезъ $-b$.

Далѣе,

$$\sqrt[2^p]{-b}=\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{}}}}_{p}\!\!\!\!-b=\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{}}}}_{p}\!\!\!\!bi=\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{}}}}_{p-1}\!\!\!\!ci,$$

если
$$c=\sqrt{b};\quad \sqrt{ci}=\sqrt{0+ci}=\sqrt{\frac{c}{2}}+\sqrt{\frac{c}{2}}\,i,$$

а потому, обозначивъ $\sqrt{\frac{c}{2}}$ одною буквою ∂, получимъ

$$\sqrt[2^p]{-b}=\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{}}}}_{p-2}\!\!\!\!\partial+\partial i.$$

[1]) Подставивъ найденныя значенія x и y въ систему уравненій (*), мы убѣждаемся непосредственно въ томъ, что найденные корни ей удовлетворяютъ.

Такимъ образомъ, дѣло приводится къ (p—2)-кратному извлеченію квадратнаго корня изъ комплекснаго выраженія; каждое извлеченіе приводитъ насъ къ комплексному выраженію, а потому и въ результатѣ (p—2)-кратнаго извлеченія квадратнаго корня мы приходимъ къ комплексному выраженію.

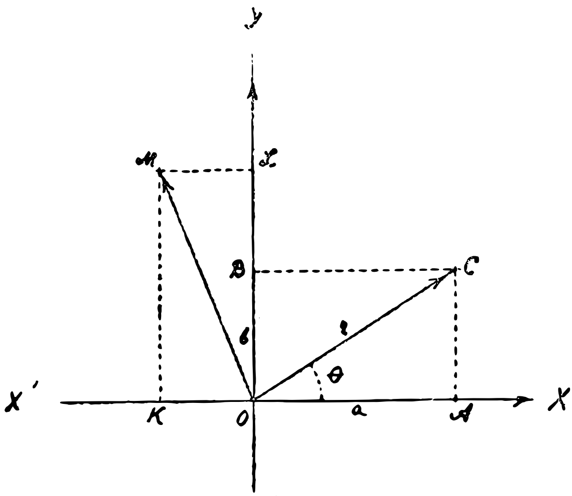
Итакъ, $\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[2^p]{-b}=k+li$, гдѣ k и l—нѣкоторыя вещественныя числа.

Примѣръ.

$$\sqrt[4]{-4}=\sqrt{\sqrt{-4}}=\sqrt{2i}=\sqrt{0+2i}=\sqrt{\frac{2}{2}}+\sqrt{\frac{2}{2}}i=1+i.$$

§ 4a. **Комплексныя выраженія въ тригонометрическомъ видѣ.**

Возьмемъ двѣ взаимноперпендикулярныя прямыя $X'X$ и YY' (черт. 6) и будемъ на одной изъ нихъ, $X'X$ (оси абсциссъ), откладывать отъ точки O пересѣченія этихъ прямыхъ отрѣзки, пропорціональные абсолютнымъ величинамъ вещественныхъ частей комплексныхъ выраженій, при чемъ условимся отрѣзки откладывать



Черт. 6.

вправо отъ точки O въ томъ случаѣ, если вещественныя части комплексныхъ выраженій будутъ положительныя числа—и въ обратную сторону, если вещественныя части будутъ числа отрицательныя. На другой прямой YY' (оси ординатъ) мы будемъ откладывать также отъ точки O отрѣзки, пропорціональные абсолютнымъ величинамъ коэффиціентовъ при мнимомъ знакѣ, при чемъ условимся откладывать отрѣзки вверхъ отъ оси абсциссъ въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты при мнимомъ знакѣ будутъ положительныя числа, и внизъ, когда коэффиціенты при мнимомъ знакѣ будутъ числа отрицательныя.

Мы будемъ говорить, что точка A, представляющая конецъ отрѣзка, пропорціональнаго вещественной части комплекснаго выраженія, соотвѣтствуетъ этому числу и его опредѣляетъ, такъ какъ каждая точка на оси абсциссъ соотвѣтствуетъ одному вполнѣ опредѣленному числу. Равнымъ образомъ, точка B, находящаяся на оси ординатъ и представляющая конецъ отрѣзка, пропорціональнаго коэффиціенту при мнимомъ знакѣ, будетъ соотвѣтственно опредѣлять мнимую часть комплекснаго выраженія.

Теперь покажемъ, что всякая точка, лежащая въ плоскости осей $X'X$ и YY', внѣ этихъ прямыхъ, будетъ соотвѣтствовать нѣкоторому комплексному выраженію и вполнѣ его опредѣлять, такъ какъ каждая точка будетъ соотвѣтствовать одному вполнѣ опредѣленному комплексному выраженію, и, обратно, каждому комплексному выраженію будетъ соотвѣтствовать одна опредѣленная точка на плоскости XOY.

Возставимъ въ точкѣ A перпендикуляръ къ оси $X'X$ въ соотвѣтствующую сторону (т.-е. сообразно знаку коэффиціента при мнимомъ знакѣ) и отложимъ на ней отрѣзокъ, равный OB; тогда конецъ этого перпендикуляра, точка C, и будетъ точкою, соотвѣтствующею данному комплексному выраженію, вещественная часть котораго выражается отрѣзкомъ OA, а мнимая—отрѣзкомъ AC, равнымъ отрѣзку OB. Какъ мы видимъ, заданіе комплекснаго выраженія вполнѣ опредѣляетъ точку C. Обратно, всякая точка M, лежащая въ плоскости XOY, опредѣляетъ комплексное выраженіе, вещественная часть котораго пропорціональна отрѣзку OK, а коэффиціентъ при мнимомъ знакѣ пропорціоналенъ отрѣзку KM, равному отрѣзку OL (конечно, оба отрѣзка OK и OL измѣряются въ опредѣленной единицѣ масштаба).

Точки C и M являются также концами отрѣзковъ OC и OM, которые называются векторами комплекснаго выраженія. Векторы имѣютъ только положительное направленіе, отъ точки O къ точкѣ, опредѣляющей комплексное выраженіе, и потому пропорціональныя имъ числа будутъ также положительныя.

Легко видѣть, что положительное число, пропорціональное вектору комплекснаго выраженія (при условіи, конечно, что векторъ выраженъ въ той же единицѣ масштаба), есть ничто иное, какъ модуль этого комплекснаго выраженія. Въ самомъ дѣлѣ, OC есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника OAC, одинъ катетъ котораго пропорціоналенъ вещественной части a, а другой коэффиціенту при мнимомъ знакѣ b комплекснаго выраженія $a+bi$ и потому r (число, пропорціональное вектору OC), равное $\sqrt{a^2+b^2}$, есть модуль этого комплекснаго выраженія.

Уголъ $\theta = \angle COA$, который векторъ составляетъ съ положительнымъ направленіемъ оси OX, называется аргументомъ комплекснаго выраженія.

Изъ треугольника AOC имѣемъ:

$$a = r\, Cos\, \theta \text{ и } b = r\, Sin\, \theta.$$

Подставляя въ комплексное выраженіе $a+bi$, вмѣсто a и b, ихъ выраженія въ r и θ, мы получаемъ новый видъ комплекснаго выраженія: $r\ Cos\ \theta + ri\ Sin\ \theta$
или

$$r\ (Cos\ \theta + i\ Sin\ \theta).$$

Дѣйствія надъ комплексными выраженіями въ тригонометрическомъ видѣ. Сложеніе и вычитаніе.

Теорема. **Модуль суммы или разности двухъ комплексныхъ выраженій меньше или равенъ суммѣ ихъ модулей и больше или равенъ разности этихъ модулей.**

Даны два комплексныя выраженія:

$$r_1\ (Cos\ \theta_1 + i\ Sin\ \theta_1) \text{ и } r_2\ (Cos\ \theta_2 + i\ Sin\ \theta_2).$$

Обозначимъ модуль ихъ суммы или разности черезъ R.
Тогда

$$R = \sqrt{(r_1\ Cos\ \theta_1 \pm r_2\ Cos\ \theta_2)^2 + (r_1\ Sin\ \theta_1 \pm r_2\ Sin\ \theta_2)^2} =$$
$$= \sqrt{(r_1^2\ Cos^2\ \theta_1 \pm 2\, r_1\, r_2\ Cos\ \theta_1\ Cos\ \theta_2 + r_2^2\ Cos^2\ \theta_2 + r_1^2\ Sin^2\ \theta_1 \pm \pm 2\, r_1\, r_2\ Sin\ \theta_1\ Sin\ \theta_2 + r_2^2\ Sin^2\ \theta_2} =$$
$$= \sqrt{r_1^2\,(Cos^2\ \theta_1 + Sin^2\ \theta_1) + r_2^2\,(Cos^2\ \theta_2 + Sin^2\ \theta_2) \pm 2r_1\, r_2\,(Cos\ \theta_1\ Cos\ \theta_2 + + Sin\ \theta_1\ Sin\ \theta_2)} =$$
$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 \pm 2r_1\, r_2\, Cos\, (\theta_1 - \theta_2)}.$$

Такъ какъ

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2} \geqq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 \pm 2r_1\, r_2\ Cos\,(\theta_1 - \theta_2)} \geqq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1\, r_2}$$

то

$$r_1 + r_2 \geqq R \geqq r_1 - r_2;$$

что́ и доказываетъ теорему.

Умноженіе и возвышеніе въ степень. Формула Моавра.

Даны два комплексныя выраженія:

$$r_1\ (Cos\ \theta_1 + i\ Sin\ \theta_1) \text{ и } r_2\ (Cos\ \theta_2 + i\ Sin\ \theta_2).$$

Перемноживъ ихъ по правилу умноженія комплексныхъ выраженій, имѣемъ:

$$[r_1(Cos\ \theta_1 + i\ Sin\ \theta_1)]\ [r_2\ (Cos\ \theta_2 + i\ Sin\ \theta_2)] =$$
$$= r_1 r_2\,[(Cos\ \theta_1\ Cos\ \theta_2 - Sin\ \theta_1\ Sin\ \theta_2) + i\ (Sin\ \theta_1\ Cos\ \theta_2 + Sin\ \theta_2\ Cos\ \theta_1)] =$$
$$= r_1\, r_2\ [Cos\ (\theta_1 + \theta_2) + i\ Sin\ (\theta_1 + \theta_2)].$$

Распространяя эту формулу на произвольное число комплексныхъ множителей, имѣемъ:

$$[r_1 (Cos\ \theta_1 + i\ Sin\ \theta_1)] \ldots [r_n (Cos\ \theta_n + i\ Sin\ \theta_n)] =$$
$$= r_1 r_2 \ldots r_n [Cos\ (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\ Sin\ (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta^n)].$$

Эта формула въ частномъ случаѣ, когда всѣ сомножители равны, обращается въ слѣдующую:

$$[r\ (Cos\ \theta + i\ Sin\ \theta)]^n = r^n\ (Cos\ n\theta + i\ Sin\ n\theta),$$

которая носитъ названіе формулы Моавра.

Дѣленіе и извлеченіе корня.

Обозначимъ частное отъ дѣленія комплекснаго выраженія $r_1\ (Cos\ \theta_1 + i\ Sin\ \theta_1)$ на комплексное выраженіе $r_2\ (Cos\ \theta_2 + i\ Sin\ \theta_2)$ черезъ $r_3\ (Cos\ \theta_3 + i\ Sin\ \theta_3)$.

Тогда, по опредѣленію дѣйствія дѣленія, имѣемъ:

$$[r_2\ (Cos\ \theta_2 + i\ Sin\ \theta_2)] \cdot [r_3\ (Cos\ \theta_3 + i\ Sin\ \theta_3)] = r_1\ (Cos\ \theta_1 + i\ Sin\ \theta_1);$$

откуда

$$r_1 = r_2\ r_3 \text{ и } \theta_1 = \theta_2 + \theta_3$$

или

$$r_3 = \frac{r_1}{r_2} \text{ и } \theta_3 = \theta_1 - \theta_2.$$

Значитъ,

$$\frac{r_1\ (Cos\ \theta_1 + i\ Sin\ \theta_1)}{r_2\ (Cos\ \theta_2 + i\ Sin\ \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [Cos\ (\theta_1 - \theta_2) + i\ Sin\ (\theta_1 - \theta_2)].$$

Обозначимъ корень n-ой степени изъ комплекснаго выраженія, $r\ (Cos\ \theta + i\ Sin\ \theta)$ черезъ $\rho\ (Cos\ \varphi + i\ Sin\ \varphi)$, т.-е.

$$\sqrt[n]{r\ (Cos\ \theta + i\ Sin\ \theta)} = \rho\ (Cos\ \varphi + i\ Sin\ \varphi) \ldots\ldots\ldots (1)$$

или

$$r\ (Cos\ \theta + i\ Sin\ \theta) = \rho^n\ (Cos\ n\varphi + i\ Sin\ n\varphi);$$

откуда

$$r = \rho^n;\ Cos\ \theta = Cos\ n\varphi \text{ и } Sin\ \theta = Sin\ n\varphi.$$

Какъ извѣстно изъ тригонометріи, для того, чтобы *Cosinus* и *Sinus* двухъ дугъ были равны одновременно, необходимо и достаточно, чтобы эти дуги отличались другъ отъ друга на цѣлое число окружностей; поэтому

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \text{ гдѣ } k \text{ цѣлое число}$$

или

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Подставляя въ формулу (1) вмѣсто ρ и φ ихъ значенія, имѣемъ:

$$\sqrt[n]{r\ (Cos\ \theta + i\ Sin\ \theta)} = \sqrt[n]{r} \left[Cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\ Sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

Давая k значенія, равныя: 0, 1, 2, . . . $(n-1)$, мы будемъ получать различныя значенія корня n-ой степени изъ комплекснаго выраженія; при дальнѣйшихъ значеніяхъ k, значенія корня будутъ повторяться, такъ какъ аргументы будутъ отличаться на цѣлое число окружностей: такъ, при $k=n$ повторится первое значеніе корня, при $k=n+1$, второе и т. д.

Такимъ образомъ, корень n-ой степени изъ комплекснаго выраженія имѣетъ n различныхъ значеній.

Вещественное число выражается отрѣзкомъ на оси $X'X$, для него аргументъ θ равенъ 0 или π, въ зависимости отъ того, будетъ-ли вещественное число положительнымъ или отрицательнымъ; его модуль будетъ совпадать съ абсолютною величиною.

Такимъ образомъ, положительное вещественное число можетъ быть представлено въ тригонометрическомъ видѣ формулою $r\,(Cos\ 0 + i\ Sin\ 0)$, а отрицательное формулою: $r\,(Cos\ \pi + i\ Sin\ \pi)$.

Корень n-ой степени изъ положительнаго числа выразится формулою: $\sqrt[n]{r}\left(Cos\,\frac{2k\pi}{n} + i\ Sin\,\frac{2k\pi}{n}\right)$, а изъ отрицательнаго числа формулою: $\sqrt[n]{r}\left(Cos\,\frac{(2k+1)\,\pi}{n} + i\ Sin\,\frac{(2k+1)\,\pi}{n}\right)$.

Отсюда мы заключаемъ, что корень n-ой степени изъ вещественнаго числа имѣетъ n значеній (ср. Дополненія § 10).

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Нѣкоторыя свойства цѣлой функціи.

Многочленъ вида **§ 5.**

Цѣлая функція. Опредѣленія.

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdot \cdot \cdot + A_{n-1}x + A_n,$$

гдѣ A_0, A_1, A_2, $\cdot \cdot \cdot A_{n-1}$, A_n нѣкоторыя постоянныя числа или выраженія, называется цѣлою функціею [1]) отъ x степени n; кромѣ A_0, всѣ количества A_1, A_2, $\cdot \cdot \cdot A_n$ могутъ, въ частности, имѣть значенія, равныя 0. Многочленъ указаннаго вида мы, для сокращенія, будемъ обозначать $f(x)$.

Если въ многочленѣ $f(x)$ мы будемъ вмѣсто x подставлять различныя значенія x, то многочленъ будетъ также получать различныя значенія, соотвѣтствующія значеніямъ x.

Результатъ подстановки въ $f(x)$ какого угодно числа a, вмѣсто x, обозначаютъ черезъ $f(a)$.

Напримѣръ, если

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,$$

то

$$f(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 11 \cdot (-2) - 6 = -60.$$

Значеніе x, обращающее многочленъ $f(x)$ въ нуль, называется корнемъ функціи $f(x)$.

Напримѣръ, для функціи $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ имѣемъ

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0;$$

слѣдовательно, значеніе x, равное 1, есть корень данной функціи.

---

[1]) Если значенія одной величины опредѣляются значеніями другой, то первая называется функціею второй. Цѣлая функція есть одинъ изъ видовъ функцій.

§ 6. *Теорема 1.* **Остатокъ отъ дѣленія цѣлой функціи $f(x)$ на двучленъ, представляющій разность между x и какимъ-нибудь числомъ a, равенъ $f(a)$, т.-е. равенъ результату, получаемому отъ подстановки въ $f(x)$ числа a, вмѣсто x.**

Раздѣлимъ многочленъ $f(x)$ на $x—a$, гдѣ a какое-либо постоянное число

$$\begin{array}{l|l} f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+A_{n-1}x+A_n & x-a \\ \quad -A_0x^n\mp A_0ax^{n-1} & A_0x^{n-1}+\cdot\cdot\cdot\cdot=f_1(x). \\ \quad\quad (A_1+A_0a)x^{n-1} & \\ \quad\quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \end{array}$$

Въ частномъ мы получаемъ цѣлую функцію $f_1(x)$, степень которой на единицу ниже степени данной функціи $f(x)$, при чемъ коэффиціентъ высшаго члена въ частномъ равенъ коэффиціенту высшаго члена дѣлимаго; послѣдній остатокъ, т.-е. остатокъ, не зависящій отъ x, обозначимъ черезъ R.

Тогда, по опредѣленію дѣйствія дѣленія, имѣемъ тождество

$$f(x)=(x—a)f_1(x)+R \text{ [1]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Какія бы значенія x мы ни подставляли вмѣсто x въ тождество **(1)**, R, какъ количество, независящее отъ x, будетъ имѣть одно и то же значеніе.

---

[1]) Тождество (1) можно получить и иначе.

Покажемъ, что разность $f(x)—f(a)$, гдѣ $f(x)$—цѣлая функція и a какое-нибудь число, дѣлится безъ остатка на $(x—a)$

$$\begin{array}{rl} & f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n \\ - & f(a)=A_0a^n+A_1a^{n-1}+\ldots+A_{n-1}a+A_n \\ \hline \end{array}$$

тогда $f(x)—f(a)=A_0(x^n—a^n)+A_1(x^{n-1}—a^{n-1})+\ldots+A_{n-1}(x—a)$.

Такъ какъ каждое слагаемое второй части этого равенства дѣлится на $(x—a)$ (см. прим. стр. 42), то и сумма ихъ, т.-е. $f(x)—f(a)$ раздѣлится на $(x—a)$, при чемъ въ частномъ получится цѣлая функція $f_1(x)$ $n—1$-ой степени, у которой коэффиціентъ при x^{n-1} будетъ A_0.

Такимъ образомъ, мы получаемъ равенство

$$f(x)—f(a)=(x—a)f_1(x);$$

откуда
$$f(x)=(x—a)f_1(x)+f(a).$$

Тождество (1) въ этомъ видѣ непосредственно доказываетъ и самую теорему.

Подставимъ въ тождество (1), вмѣсто x, значеніе x, равное a; получимъ

$$f(a)=0\cdot f_1(a)+R,$$

гдѣ $f(a)$ есть значеніе, которое получаетъ $f(x)$ при $x=a$.

Отсюда, $R=f(a)$, что и доказываетъ теорему.

Примѣры.

1) Найти остатокъ отъ дѣленія многочлена

$$x^3-2x^2+3x-5 \text{ на } x-2.$$

Согласно теоремѣ 1-ой, имѣемъ

$$R=2^3-2\cdot 2^2+3\cdot 2-5=1.$$

2) Найти остатокъ отъ дѣленія многочлена

$$x^3-2x^2+3x-5 \text{ на } x+2.$$

Представимъ дѣлитель въ видѣ разности: $x+2=x-(-2)$. Согласно теоремѣ 1-ой, имѣемъ

$$R=(-2)^3-2(-2)^2+3(-2)-5=-27.$$

Слѣдствіе. Если a есть корень функціи $f(x)$, то, согласно опредѣленію,

$$R=f(a)=0.$$

Значитъ, **цѣлая функція $f(x)$ дѣлится нацѣло на разность между x и корнемъ этой функціи.**

Теорема 2. **Если a, b, c, . . . различные корни цѣлой функціи $f(x)$, то эта функція дѣлится на произведеніе $(x-a)(x-b)(x-c)$ . . .** § 7.

Такъ какъ a есть корень цѣлой функціи $f(x)$, то, согласно слѣдствію теоремы 1-ой, заключаемъ, что $f(x)$ дѣлится на $(x-a)$.

Обозначивъ частное, полученное отъ дѣленія $f(x)$ на $(x-a)$, черезъ $f_1(x)$, имѣемъ тождество

$$f(x)=(x-a)\,.\,f_1(x)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Подставимъ въ это равенство значеніе x, равное b; получимъ

$$f(b)=(b-a)\,.\,f_1(b).$$

Такъ какъ b, по заданію, есть корень функціи $f(x)$, то $f(b)=0$ и предыдущее равенство принимаетъ видъ:

$$0=(b-a)\,.\,f_1(b).$$

Для того, чтобы произведеніе было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ его сомножителей былъ равенъ нулю. Но $(b-a)$ не равно нулю; слѣдовательно, $f_1(b)=0$.

Этотъ выводъ показываетъ, что b есть корень функціи $f_1(x)$.

Слѣдовательно, $f_1(x)$ дѣлится на $x-b$.

Обозначивъ частное, полученное отъ дѣленія $f_1(x)$ на $(x-b)$ черезъ $f_2(x)$, имѣемъ тождество

$$f_1(x)=(x-b)\,.\,f_2(x).$$

Подставивъ выраженіе $f_1(x)$ въ равенство (1), находимъ

$$f(x)=(x-a)(x-b)\,.\,f_2(x)\quad\ldots\ldots\quad(2).$$

Подставивъ въ равенство (2) значеніе x, равное c, получаемъ

$$f(c)=(c-a)(c-b)\,.\,f_2(c).$$

Такъ какъ c по заданію есть корень многочлена $f(x)$, то $f(c)=0$, и предыдущее равенство принимаетъ видъ

$$0=(c-a)(c-b)\,.\,f_2(c).$$

Отсюда мы заключаемъ, что $f_2(c)=0$; слѣдовательно, c есть корень многочлена $f_2(x)$, а потому этотъ многочленъ дѣлится на $x-c$.

Обозначивъ частное, полученное отъ дѣленія $f_2(x)$ на $(x-c)$ черезъ $f_3(x)$, имѣемъ тождество

$$f_2(x)=(x-c)\,.\,f_3(x).$$

Подставляя это выраженіе $f_2(x)$ въ равенство (2), находимъ

$$f(x)=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,.\,f_3(x)\quad\ldots\ldots\quad(3).$$

Равенство (3) доказываетъ справедливость теоремы 2-ой.

Слѣдствіе 1. Если цѣлая функція $f(x)$ степени n обращается въ 0 при n различныхъ значеніяхъ x:

$$x=a_1,\ x=a_2,\ x=a_3,\ \ldots,\ x=a_n,$$

при чемъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ всѣ различны между собою, то

$$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n),$$

гдѣ A_0 есть коэффиціентъ при x^n въ выраженіи

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n.$$

Мы знаемъ (§ 5), что частное, полученное при дѣленіи цѣлой функціи отъ x на разность $(x-a)$, есть также цѣлая функція отъ x, степени на единицу ниже степени данной функціи, съ коэффиціентомъ у высшаго члена, равнымъ коэффиціенту высшаго члена данной функціи.

Поэтому $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и т. д. суть цѣлыя функціи, степень которыхъ постепенно понижается на единицу и у которыхъ коэффиціентъ при высшемъ членѣ есть A_0.

Слѣдовательно, послѣ $(n-1)$ дѣленій мы найдемъ:

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1})f_{n-1}(x),$$

гдѣ $f_{n-1}(x)$ есть цѣлая функція первой степени вида A_0x+B, которая должна обратиться въ 0 при $x=a_n$, т.-е.

$$A_0a_n+B=0.$$

откуда

$$B=-A_0a_n.$$

Слѣдовательно, $f_{n-1}(x)=A_0x-A_0a_n=A_0(x-a_n)$
и

$$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n).$$

Слѣдствіе 2. Пусть данное уравненіе приведено къ виду: **Пониженіе степени уравненія.**

$$f(x)=0,$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція n-ой степени.

Если мы какимъ-нибудь образомъ найдемъ одинъ корень этого уравненія, напр., a, то a будетъ корнемъ функціи $f(x)$, и потому первая часть уравненія будетъ дѣлиться на $x-a$, и данное уравненіе приметъ видъ

$$(x-a)\,.\,f_1(x)=0,$$

гдѣ $f_1(x)$ есть частное, полученное отъ дѣленія $f(x)$ на $(x-a)$, и потому есть цѣлая функція $(n-1)$-ой степени.

Слѣдовательно, данное уравненіе $f(x)=0$ можетъ быть замѣнено двумя уравненіями:

1) $x-a=0$, которое даетъ извѣстный корень a.

2) $f_1(x)=0$, степень котораго на единицу ниже степени даннаго уравненія и рѣшивъ которое мы найдемъ остальные корни даннаго уравненія.

Такъ, если $f(x)=0$ есть уравненіе 3-ей степени, то зная одинъ корень этого уравненія, мы, для отысканія другихъ корней, будемъ имѣть уравненіе второй степени $f_1(x)=0$.

Такимъ образомъ, вообще, сколько мы знаемъ корней уравненія $f(x)=0$, на столько единицъ можетъ быть понижена степень даннаго уравненія.

§ 8. **Теорема Безу.**

Теорема 3. (Теорема Безу). Эта теорема выражаетъ необходимое и достаточное условіе дѣлимости двучленовъ вида x^n-a^n и x^n+a^n на двучлены $x-a$ и $x+a$.

Очевидно, двучлены x^n-a^n и x^n+a^n суть частные случаи цѣлой функціи степени n, въ которой

$$A_1=A_2=A_3=\ldots=A_{n-1}=0,\ A_0=1 \text{ и } A_n=\mp a^n.$$

На основаніи этого замѣчанія, заключаемъ, что обѣ предыдущія теоремы справедливы и для этихъ двучленовъ.

1-й случай Найдемъ остатокъ отъ дѣленія двучлена (x^n-a^n) на $(x-a)$.

По теоремѣ 1-ой получаемъ

$$R=a^n-a^n=0.$$

Слѣдовательно, **разность одинаковыхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на разность первыхъ степеней этихъ количествъ.**

Произведемъ дѣленіе на самомъ дѣлѣ, чтобы найти правило, по которому составляется частное.

$$\begin{array}{l|l}
x^n-a^n & x-a \\ \cline{2-2}
\underline{\pm x^n \mp ax^{n-1}} & x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1} \\
\quad +ax^{n-1}-a^n & \\
\underline{\pm ax^{n-1}\mp a^2x^{n-2}} & \\
\quad\quad +a^2x^{n-2}-a^n & \\
\underline{\pm a^2x^{n-2}\mp a^3x^{n-3}} & \\
\quad\quad\quad +a^3x^{n-3}-a^n &
\end{array}$$

и т. д.

Очевидно, частное есть полный многочленъ $(n-1)$-ой степени, расположенный по убывающимъ степенямъ буквы x и по возрастающимъ степенямъ буквы a, при чемъ всѣ члены частнаго имѣютъ знакъ плюсъ $(+)$.

2-й случай. Найдемъ остатокъ отъ дѣленія двучлена $x^n - a^n$ на $x+a$. Преобразуемъ дѣлитель такъ, чтобы онъ представлялъ разность: $x+a=x-(-a)$.

Тогда, по 1-ой теоремѣ, получаемъ

$$R=(-a)^n-a^n.$$

Если n число четное, то $R=a^n-a^n=0$.

Если n число нечетное, то $R=-a^n-a^n=-2a^n$.

Слѣдовательно, **разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на сумму первыхъ степеней этихъ количествъ, а разность одинаковыхъ нечетныхъ степеней не дѣлится на сумму первыхъ степеней тѣхъ же количествъ.**

Частное въ этомъ случаѣ получится изъ частнаго предыдущаго случая черезъ замѣну a на $(-a)$.

Итакъ, при n четномъ частное будетъ

$$x^{n-1}+(-a)x^{n-2}+(-a)^2x^{n-3}+(-a)^3x^{n-4}+\cdot\cdot\cdot+(-a)^{n-1}=$$
$$=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-a^3x^{n-4}+\cdot\cdot\cdot-a^{n-1}.$$

3-й случай. Найдемъ остатокъ отъ дѣленія двучлена x^n+a на $x+a$.

$x+a=x-(-a)$; слѣдовательно, по 1-ой теоремѣ, имѣемъ

$$R=(-a)^n+a^n.$$

Если n четное, то $R=a^n+a^n=2a^n$.

Если n нечетное, то $R=-a^n+a^n=0$.

Слѣдовательно, **сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на сумму первыхъ степеней этихъ количествъ, а сумма одинаковыхъ четныхъ степеней не дѣлится на сумму первыхъ степеней тѣхъ же количествъ.**

Частное мы получимъ изъ 1-го случая, замѣнивъ a на $(-a)$; такимъ образомъ, при n нечетномъ частное будетъ

$$x^{n-1}+(-a)x^{n-2}+(-a)^2x^{n-3}+(-a)^3x^{n-4}+\cdot\cdot\cdot+(-a)^{n-1}=$$
$$=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-a^3x^{n-4}+\cdot\cdot\cdot-a^{n-2}x+a^{n-1}.$$

4-й случай. Найдемъ остатокъ отъ дѣленія двучлена x^n+a^n на $x-a$.

По 1-ой теоремѣ имѣемъ

$$R=a^n+a^n=2a^n.$$

Слѣдовательно, **сумма одинаковыхъ степеней двухъ количествъ не дѣлится на разность первыхъ степеней этихъ количествъ.**

Примѣнимъ теорему Безу къ слѣдующимъ случаямъ освобожденія знаменателей дробей отъ ирраціональности.

1) $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{c}}$.

Положимъ

$$\sqrt[n]{b}=p \text{ и } \sqrt[n]{c}=q;$$

тогда

$$b=p^n \text{ и } c=q^n.$$

По 1-му случаю теоремы Безу имѣемъ

$$p^n-q^n=(p-q)(p^{n-1}+p^{n-2}q+p^{n-3}q^2+\cdot\cdot\cdot+q^{n-1}).$$

Подставляя, вмѣсто p и q, ихъ значенія, получаемъ:

$$b-c=(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{c})(\sqrt[n]{b^{n-1}}+\sqrt[n]{b^{n-2}c}+\sqrt[n]{b^{n-3}c^2}+\ldots+\sqrt[n]{c^{n-1}}).$$

Слѣдовательно,

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{c}}=\frac{a(\sqrt[n]{b^{n-1}}+\sqrt[n]{b^{n-2}c}+\sqrt[n]{b^{n-3}c^2}+\ldots+\sqrt[n]{c^{n-1}})}{b-c}$$

2) $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}$.

Положимъ

$$\sqrt[n]{b}=p \text{ и } \sqrt[n]{c}=q;$$

тогда

$$b=p^n \text{ и } c=q^n.$$

Если n число четное, то по 2-му случаю теоремы Безу будемъ имѣть

$$p^n-q^n=(p+q)\,(p^{n-1}-p^{n-2}q+p^{n-3}q^2-\ldots-q^{n-1}).$$

Слѣдовательно,

$$b-c=(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c})\,(\sqrt[n]{b^{n-1}}-\sqrt[n]{b^{n-2}c}+\sqrt[n]{b^{n-3}c^2}-\ldots-\sqrt[n]{c^{n-1}}).$$

Итакъ,

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}=\frac{a\,(\sqrt[n]{b^{n-1}}-\sqrt[n]{b^{n-2}c}+\sqrt[n]{b^{n-3}c^2}-\ldots-\sqrt[n]{c^{n-1}})}{b-c}.$$

Если n есть число нечетное, то по 3-му случаю теоремы Безу будемъ имѣть

$$p^n+q^n=(p+q)\,(p^{n-1}-p^{n-2}q+p^{n-3}q^2-\ldots+q^{n-1}).$$

Слѣдовательно,

$$b+c=(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c})(\sqrt[n]{b^{n-1}}-\sqrt[n]{b^{n-2}c}+\sqrt[n]{b^{n-3}c^2}-\ldots+\sqrt[n]{c^{n-1}}).$$

Итакъ,

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}=\frac{a\,(\sqrt[n]{b^{n-1}}-\sqrt[n]{b^{n-2}c}+\sqrt[n]{b^{n-3}c^2}-\ldots+\sqrt[n]{c^{n-1}})}{b+c}.$$

§ 9. **Число корней цѣлой функціи.**

Теорема 4. **Всякая цѣлая функція n-ой степени имѣетъ n корней.**

Доказывая теорему 2-ую, мы предполагали, что всѣ извѣстные корни цѣлой функціи $f(x)$ различны. Теперь покажемъ, что функція $f(x)$ можетъ имѣть и равные корни, и вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ теорему 4-ую, которая говоритъ что **всякая цѣлая функція n-ой степени, а стало быть и всякое уравненіе, которое можетъ быть приведено къ виду $f(x)=0$, гдѣ $f(x)$—цѣлая функція n-ой степени, имѣетъ n корней.**

Существуетъ теорема (теорема д'Аламбера, доказательство которой лежитъ внѣ курса элементарной алгебры), по которой всякая цѣлая функція имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень.

Пусть намъ дана цѣлая функція n-ой степени $f(x)$. На основаніи только что упомянутой теоремы, мы можемъ утверждать, что данная функція имѣетъ корень; пусть этотъ корень будетъ a. Тогда мы можемъ написать $f(x)=(x-a)f_1(x)$, гдѣ $f_1(x)$ есть, какъ извѣстно, цѣлая функція $(n-1)$-ой степени. Значитъ, къ ней также примѣнима теорема д'Аламбера.

Положимъ, что a будетъ также корнемъ функціи $f_1(x)$; тогда $f_1(x)=(x-a)f_2(x)$.

Допустимъ далѣе, что a будетъ также корнемъ и функціи $f_2(x)$; тогда $f_2(x)=(x-a)f_3(x)$.

Подставимъ теперь значеніе x, равное a, въ функцію $f_3(x)$ и предположимъ, что эту функцію a въ 0 обращать уже не будетъ; но функція $f_3(x)$ также должна имѣть, по теоремѣ д'Аламбера, по крайней мѣрѣ, одинъ корень; пусть онъ будетъ b; тогда $f_3(x)=(x-b)f_4(x)$.

Допустимъ, что b будетъ также корнемъ функціи $f_4(x)$, функціи же $f_5(x)$ уже удовлетворять не будетъ; обозначимъ корень функціи $f_5(x)$ черезъ c и будемъ поступать такъ же и далѣе, до тѣхъ поръ, пока мы, послѣ $(n-1)$ дѣленій, не придемъ къ функціи первой степени, которая, на основаніи предыдущаго, приметъ видъ $A_0(x-m)$, гдѣ A_0 коэффиціентъ высшаго члена данной функціи $f(x)$.

Замѣняя послѣдовательно $f_1(x)$ черезъ $f_2(x)$, $f_2(x)$ черезъ $f_3(x)$ и т. д., получимъ

$$f(x)=A_0(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-c).....(x-m) \quad \ldots \quad (1).$$

Изъ этого тождества слѣдуетъ, что функція $f(x)$ имѣетъ 3 корня, равныхъ a, 2 корня, равныхъ b, корень c и т. д. всего n корней. Корень a, который кромѣ функціи $f(x)$ удовлетворяетъ также функціямъ $f_1(x)$ и $f_2(x)$, называется трехкратнымъ корнемъ функціи $f(x)$; корень b называется двукратнымъ корнемъ функціи $f(x)$.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что всякая цѣлая функція n-ой степени имѣетъ не менѣе n корней (считая трехкратный корень за 3 равныхъ корня и т. д.).

Теперь докажемъ, что цѣлая функція n-ой степени не можетъ имѣть болѣе n корней.

Допустимъ противное: пусть $f(x)$ имѣетъ еще одинъ корень $(n+1)$-ый, который не равенъ ни одному изъ остальныхъ n корней. Обозначимъ этотъ корень черезъ p и подставимъ его, вмѣсто x, въ выраженіе (1), которое согласно условію, должно обратиться въ 0.

Поэтому имѣемъ

$$f(p)=A_0(p-a)(p-a)(p-a)(p-b)(p-b)(p-c)\ldots(p-m)=0.$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ если ни одинъ изъ множителей не равенъ 0, то и произведеніе не можетъ быть равно 0.

Остается еще допустить, что предполагаемый $(n+1)$-ый корень p равенъ одному изъ прежнихъ корней, напр. a; но тогда было бы 4 корня равныхъ a, т.-е. a было бы четырехкратнымъ корнемъ, чтó противорѣчило бы условію, такъ какъ тогда a должно было бы быть также корнемъ функціи $f_3(x)$.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся въ томъ, что цѣлая функція n-ой степени не можетъ имѣть болѣе n корней; значитъ, она имѣетъ ровно n корней, чтó и требовалось доказать.

Отсюда, какъ слѣдствіе, мы получаемъ слѣдующую общую формулу разложенія цѣлой функціи n-ой степени на множители.

$f(x)=A_0(x-a)^p(x-b)^q\ldots(x-k)^s$, гдѣ a есть p-кратный корень, b есть q-кратный и т. д. и $p+q+\ldots+s=n$.

§ 9а. Свойство комплексныхъ корней цѣлой функціи съ вещественными коэффиціентами.

Теорема. Всякая цѣлая функція съ вещественными коэффиціентами, имѣющая комплексный корень, имѣетъ и сопряженный съ нимъ корень.

Пусть цѣлая функція съ вещественными коэффиціентами

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdot\;\cdot\;\cdot+A_{n-1}x+A_n$$

имѣетъ комплексный корень $(a+bi)$; тогда

$$f(a+bi)=A_0(a+bi)^n+A_1(a+bi)^{n-1}+\ldots+A_{n-1}(a+bi)+A_n=0$$

Согласно § 3 п. 4 (стр. 335) цѣлая степень комплекснаго выраженія будетъ комплексное выраженіе того же вида; пусть

$$(a+bi)^n=M_0+N_0i;\ (a+bi)^{n-1}=M_1+N_1i \text{ и т. д.}$$

Тогда

$$f(a+bi)=A_0(M_0+N_0i)+A_1(M_1+N_1i)+\cdot\;\cdot\;\cdot+A_{n-1}(a+bi)+A_n=0$$

или

$$f(a+bi)=\underbrace{(A_0M_0+A_1M_1+\cdot\;\cdot\;\cdot+A_{n-1}a+A_n)}_{P}+$$

$$+\underbrace{(A_0N_0+A_1N_1+\cdot\;\cdot\;\cdot+A_{n-1}b)}_{Q}i=0,$$

т.-е. $f(a+bi)=P+Qi=0$, гдѣ P и Q вещественныя числа.

Но мы знаемъ, что, если комплексное выраженіе равно 0, то отдѣльно равны 0: вещественная часть его и коэффиціентъ при мнимомъ знакѣ;

значитъ,

$$P=0 \text{ и } Q=0.$$

Теперь подставимъ въ $f(x)$, вмѣсто x, $(a-bi)$; мы получаемъ равенство:

$$f(a-bi)=A_0(a-bi)^n+A_1(a-bi)^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+A_{n-1}(a-bi)+A_n.$$

Но $(a-bi)^n=M_0-N_0i$, въ чемъ легко убѣдиться, возвысивъ $(a-bi)$ въ степень n по формулѣ бинома Ньютона; такимъ же образомъ мы убѣждаемся въ томъ, что $(a-bi)^{n-1}=M_1-N_1\ i$ и т. д.

Подставляя значеніе степеней $(a-bi)$ въ $f(a-bi)$, получаемъ:

$$f(a-bi)=A_0(M_0-N_0i)+A_1(M_1-N_1i)+\cdot\cdot\cdot+A_{n-1}(a-bi)+A_n$$

или

$$f(a-bi)=(A_0M_0+A_1M_1+\cdot\cdot\cdot+A_{n-1}a+A_n)-(A_0N_0+ \\ +A_1N_1+\cdot\cdot\cdot+A_{n-1}b)\ i$$

т. е.

$$f(a-bi)=P-Qi;$$

но

$$P=Q=0$$

значитъ

$$f(a-bi)=0.$$

Такимъ образомъ, комплексное выраженіе $(a-bi)$, сопряженное съ комплекснымъ корнемъ $(a+bi)$, является также корнемъ функціи $f(x)$.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ:

1) что число комплексныхъ корней цѣлой функціи съ вещественными коэффиціентами всегда четное

и 2) что всякая цѣлая функція, съ вещественными коэффиціентами, нечетной степени имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень.

§ 10.

Нахожденіе всѣхъ значеній $\sqrt[n]{A}$.

Нахожденіе всѣхъ значеній $\sqrt[n]{A}$ можетъ быть приведено къ рѣшенію двучленнаго уравненія.

Обозначимъ искомое значеніе корня буквой x, т.-е. положимъ $\sqrt[n]{A}=x$.

Тогда, по опредѣленію корня, будемъ имѣть

$$x^n=A \text{ или } x^n-A=0.$$

Такимъ образомъ, всѣ значенія $\sqrt[n]{A}$ являются корнями двучленнаго уравненія n-ой степени. А такъ какъ двучленное уравненіе степени n, какъ частный случай уравненія вида $f(x)=0$, гдѣ $f(x)$ цѣлая функція, имѣетъ n корней, то значитъ и $\sqrt[n]{A}$ **имѣетъ n значеній.**

Всѣ значенія $\sqrt[n]{A}$ находятъ слѣдующимъ образомъ: мы знаемъ (§ 96, стр. 220), что двучленное уравненіе $x^n-A=0$ при помощи формулы $x=z\sqrt[n]{A}$, гдѣ $\sqrt[n]{A}$ есть ариѳметическое значеніе корня, можетъ быть приведено къ уравненію $z^n-1=0$; поэтому **для опредѣленія всѣхъ значеній $\sqrt[n]{A}$, т.-е. x, надо всѣ значенія z, т.-е. $\sqrt[n]{1}$, умножить на ариѳметическое значеніе $\sqrt[n]{A}$.**

Примѣръ.

Найти всѣ значенія $\sqrt[12]{4096}$.

Ариѳметическое значеніе $\sqrt[12]{4096}=\sqrt[12]{2^{12}}$ равно 2; поэтому, чтобы получить всѣ значенія $\sqrt[12]{4096}$, надо умножить всѣ значенія $\sqrt[12]{1}$ на 2.

$\sqrt[12]{1}$ имѣетъ 12 значеній, представляющихъ корни двучленнаго уравненія $x^{12}-1=0$.

Мы показали (§ 96, стр. 221), что рѣшеніе уравненія $x^{12}-1=0$ приводится къ рѣшенію слѣдующихъ 6-ти уравненій:

1) $x^2+1=0$;	2) $x^4-x^2+1=0$;	3) $x-1=0$;
4) $x^2+x+1=0$;	5) $x+1=0$;	6) $x^2-x+1=0$.

1-ое уравненіе даетъ два корня: $x_1=\sqrt{-1}$ и $x_2=-\sqrt{-1}$.

2-ое уравненіе даетъ четыре корня:

$$x_3=\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2}\ [1]$$

[1]) Преобразованіе сдѣлано по формулѣ извлеченія квадратнаго корня изъ комплекснаго выраженія.

$$x_4 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2}$$

$$x_5 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2}$$

$$x_6 = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2}.$$

3-е уравненіе даетъ одинъ корень:

$x_7=1$ (ариѳметическое значеніе корня).

4-ое уравненіе даетъ два корня:

$$x_8 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ и } x_9 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

5-ое уравненіе даетъ одинъ корень:

$$x_{10} = -1$$

6-ое уравненіе даетъ два корня:

$$x_{11} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \text{ и } x_{12} = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Такимъ образомъ $\sqrt[12]{4096}$ имѣетъ 12 значеній:

1) 2; 2) -2; 3) $\sqrt{3}+\sqrt{-1}$; 4) $-\sqrt{3}-\sqrt{-1}$; 5) $\sqrt{3}-\sqrt{-1}$; 6) $\sqrt{-1}-\sqrt{3}$; 7) $2\sqrt{-1}$ 8) $-2\sqrt{-1}$; 9) $-1+\sqrt{-3}$; 10) $-1-\sqrt{-3}$; 11) $1+\sqrt{-3}$; 12) $1-\sqrt{-3}$.

§ 11. **Рѣшеніе дробныхъ раціональныхъ уравненій.**

Всякое дробное раціональное уравненіе можетъ быть, послѣ перенесенія всѣхъ членовъ въ лѣвую часть и приведенія ихъ къ общему знаменателю, приведено къ виду $\frac{A}{B} = 0$, гдѣ A и B цѣлыя функціи.

Пусть, напримѣръ, дано уравненіе $2=\frac{1}{x}+x-1+\frac{3}{x+1}$.

Перенесемъ всѣ члены этого уравненія въ лѣвую часть и приведемъ ихъ къ общему знаменателю; получимъ уравненіе:

$$\frac{2x(x+1)-(x+1)-x^2(x+1)+x(x+1)-3x}{x(x+1)}=0,$$

которое послѣ упрощенія числителя приводится къ виду:

$$\frac{-x^3+2x^2-x-1}{x(x+1)}=0,$$

т.-е. къ виду $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$, гдѣ $f_1(x)$ и $f_2(x)$ цѣлыя функціи.

Въ § 32 (стр. 67) было указано, что отбрасываніе въ уравненіи общаго знаменателя, содержащаго неизвѣстныя, т.-е. умноженіе обѣихъ частей уравненія на общаго знаменателя всѣхъ его членовъ, можетъ привести, если общій знаменатель содержитъ неизвѣстныя, къ введенію постороннихъ рѣшеній. Изслѣдуемъ этотъ вопросъ на уравненіяхъ съ одною неизвѣстною.

Мы показали, что всякое дробное раціональное уравненіе можетъ быть приведено къ виду $\frac{A}{B}=0$, гдѣ A и B цѣлыя функціи; поэтому всякое дробное раціональное уравненіе съ одною неизвѣстною можетъ быть приведено къ виду $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$, гдѣ $f_1(x)$ и $f_2(x)$ цѣлыя функціи.

Здѣсь могутъ встрѣтиться два случая: 1) когда функціи $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не имѣютъ общихъ корней и 2) когда функціи $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имѣютъ общіе корни.

1) Если функціи $f_1(x)$ и $f_2(x)$ общихъ корней не имѣютъ, то уравненіе $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$ и $f_1(x)=0$ равносильны, такъ какъ первое уравненіе удовлетворяется всѣми тѣми значеніями x, которыя обращаютъ въ 0 функцію $f_1(x)$, и никакихъ другихъ корней имѣть не можетъ. Дѣйствительно, дробная функція $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ обращается въ 0 только при тѣхъ значеніяхъ x, которыя обращаютъ въ 0 ея числитель и не обращаютъ при этомъ въ 0 знаменатель, но такъ какъ по условію $f_1(x)$ и $f_2(x)$ общихъ корней не имѣютъ, значитъ, тѣ значенія x, которыя обращаютъ въ 0 числитель, знаменателя въ 0 не обращаютъ.

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ въ уравненіи $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$ можно безпрепятственно отбросить знаменатель, т.-е. замѣнить рѣшеніе уравненія $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$ рѣшеніемъ уравненія $f_1(x)=0$.

2) Если функціи $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имѣютъ общіе корни, то уравненія $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$ и $f_1(x)=0$ уже не будутъ равносильны.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имѣютъ общій корень a; тогда $f_1(x)=$ $=(x-a)f_3(x)$ и $f_2(x)=(x-a)f_4(x)$, гдѣ $f_3(x)$ и $f_4(x)$ также цѣлыя функціи отъ x. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ другихъ общихъ корней не имѣютъ, то функціи $f_3(x)$ и $f_4(x)$ будутъ взаимно простыми, т.-е. общихъ корней имѣть не будутъ.

Подставивъ въ данное уравненіе $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$, вмѣсто $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $(x-a)\,f_3(x)$ и $(x-a)\,f_4(x)$, получимъ уравненіе $\frac{(x-a)f_3(x)}{(x-a)f_4(x)}=0$, которое послѣ сокращенія числителя и знаменателя лѣвой части уравненія на $x-a$, принимаетъ видъ $\frac{f_3(x)}{f_4(x)}=0$.

Уравненіе $\frac{f_3(x)}{f_4(x)}=0$ равносильно уравненію $f_3(x)=0$, такъ какъ $f_3(x)$ и $f_4(x)$ общихъ корней не имѣютъ; уравненіе же $f_3(x)=0$ не равносильно уравненію $f_1(x)=0$, которое, кромѣ корней уравненія $f_3(x)=0$, имѣетъ еще корень a.

Поэтому, отбросивъ въ этомъ случаѣ знаменатель въ уравненіи $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$ и замѣнивъ такимъ образомъ данное уравненіе уравненіемъ $f_1(x)=0$, мы введемъ постороннее рѣшеніе, именно корень a, который данному уравненію не удовлетворяетъ.

Итакъ, при отбрасываніи знаменателя въ уравненіи вида $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$, гдѣ $f_1(x)$ и $f_2(x)$ цѣлыя функціи, весь вопросъ заключается въ томъ, имѣютъ функціи $f_1(x)$ и $f_2(x)$ общіе корни или нѣтъ.

Поэтому при рѣшеніи дробныхъ уравненій надо, приведя ихъ къ виду $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$, приравнять нулю числитель и, рѣшивъ полученное уравненіе, подставить найденные корни въ знаменатель, и тѣ изъ нихъ, которые удовлетворяютъ также знаменателю, отбросить; остальные же корни и будутъ корнями даннаго уравненія [1].

[1]) Это правило предполагаетъ, что общіе корни въ функціяхъ $f_1(x)$ и $f_2(x)$ простые или, если кратные, то съ кратностью у $f_2(x)$ не ниже, чѣмъ у $f_1(x)$; въ противномъ случаѣ нужно не отбрасывать общій корень, а лишь понизить его кратность на столько единицъ, какова кратность этого корня у функціи $f_2(x)$.

Если корни знаменателя опредѣляются легко, то можно сначала опредѣлить корни знаменателя и подставить ихъ въ числитель, и если какой-нибудь корень знаменателя a обращаетъ въ 0 числитель, то надо сначала сократить числитель и знаменатель лѣвой части даннаго уравненія на $(x-a)$ и затѣмъ уже, приравнявъ нулю числитель, найти его корни, которые будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ корнями даннаго уравненія.

Примѣры.

1) Дано уравненіе $\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+x}=0$.

Приравнявъ нулю функцію $3x^2-2x-1$, получаемъ уравненіе $3x^2-2x-1=0$, которое имѣетъ два корня: $x_1=1$ и $x_2=-\dfrac{1}{3}$.

Подставивъ найденные корни въ функцію x^2+x, мы убѣждаемся въ томъ, что эти корни въ 0 ее не обращаютъ.

Поэтому оба найденные корня удовлетворяютъ данному уравненію.

2) Дано уравненіе $1-\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{1-x}-6$.

Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, мы приведемъ данное уравненіе къ виду

$$\frac{x^2-7x+6}{x-1}=0.$$

Приравнявъ нулю числитель x^2-7x+6, получаемъ уравненіе $x^2-7x+6=0$, которое имѣетъ два корня: $x_1=6$ и $x_2=1$.

Подставивъ найденные корни въ знаменатель $x-1$, мы убѣждаемся въ томъ, что значеніе x, равное 1, обращаетъ знаменатель въ 0.

Поэтому изъ двухъ найденныхъ значеній x только первое значеніе, равное 6, удовлетворяетъ данному уравненію; второй же корень, $x_2=1$, является для него постороннимъ корнемъ.

Мы могли бы поступить иначе, а именно сначала приравнять нулю знаменатель; тогда мы получили-бы уравненіе $x-1=0$, которое имѣетъ корень, равный 1. Значеніе x, равное 1, обращаетъ въ 0 также и числитель; поэтому мы можемъ функцію x^2-7x+6 представить въ видѣ $(x-1)(x-6)$, и тогда данное уравненіе приметъ видъ

$$\frac{(x-1)(x-6)}{x-1}=0$$

или, послѣ сокращенія числителя и знаменателя лѣвой части уравненія на $x-1$,

$$x-6=0.$$

Такимъ образомъ, данное уравненіе имѣетъ одинъ корень, равный 6.