Книгоиздательство Т-ва И. Д. СЫТИНА.
ОТДѢЛЪ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ.
Подъ редакціей: Д. Д. Волкова, Д. Н. Егорова, Е. Н. Ефимова, Б. М. Житкова, П. Н. Сакулина и А. В. Цингера.

С. П. Виноградовъ.

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЙ КУРСЪ
АЛГЕБРЫ.

(Для старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній).

Мин. Нар. Пр. **признана** заслуживающей вниманія при пополненіи ученическихъ библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній (28/II 1914 г., № 11486).
Главн. Упр. военно-учебн. заведеній **рекомендована** въ фундаментальныя библіотеки кадетскихъ корпусовъ и ротныя библіотеки V—VII классовъ.

Типографія Т-ва И. Д. Сытина, Пятницкая улица, свой домъ.
Москва.— 1914.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Ознакомленіе учащихся съ тремя основными математическими понятіями — *числомъ, уравненіемъ и функціей* — происходитъ въ элементарныхъ курсахъ ариѳметики и алгебры.

Періодъ прохожденія этихъ курсовъ можно назвать періодомъ *накопленія* свѣдѣній о числѣ, уравненіи и функціи, и притомъ свѣдѣній по преимуществу практическаго характера.

Первоначальное обученіе ариѳметикѣ и алгебрѣ сводится, главнымъ образомъ, къ выработкѣ въ учащихся *умѣнія* правильно производить *вычисленія* и *преобразованія*. Характеръ изложенія отдѣльныхъ главъ ученія о числѣ и ученія объ уравненіи мѣняется въ зависимости отъ возраста и общаго развитія учащихся. Результатомъ этого является то, что весь курсъ ариѳметики и алгебры представляется учащимся состоящимъ изъ отдѣльныхъ статей, не имѣющихъ внутренней связи.

Для приведенія свѣдѣній, полученныхъ въ элементарныхъ курсахъ ариѳметики и алгебры, въ надлежащій порядокъ необходимъ повторительный курсъ.

Первая и главная задача его заключается, по моему мнѣнію, въ томъ, чтобы объединить отдѣльныя главы ученій объ одномъ и томъ же понятіи и выяснить связь между ними.

Вторая задача повторительнаго курса состоитъ въ нѣкоторомъ расширеніи тѣхъ свѣдѣній, которыя пріобрѣтаются учащимися въ элементарномъ курсѣ.

Настоящая книга представляетъ попытку составить курсъ, соотвѣтствующій указаннымъ задачамъ.

Для объединенія тѣхъ главъ элементарнаго курса, въ которыхъ содержится ученіе о числѣ, выясняется роль обратныхъ дѣйствій и основныхъ законовъ дѣйствій въ постановкѣ и рѣшеніи задачи о расширеніи понятія числа. Введеніе отрицательныхъ, дробныхъ и комплексныхъ чиселъ дѣлается посредствомъ *«паръ»*, а введеніе ирраціональныхъ чиселъ — посредствомъ *«сѣченій»*.

Свѣдѣнія о числѣ дополняются теоріей соединеній съ указаніемъ нѣкоторыхъ ея приложеній и теоріей непрерывныхъ дробей.

Въ ученіи объ уравненіяхъ выдвигается на первый планъ понятіе о равносильныхъ уравненіяхъ и равносильныхъ системахъ уравненій. Рѣшеніе уравненій первой и второй степеней съ однимъ неизвѣстнымъ приведено въ связь съ изученіемъ цѣлыхъ, раціональныхъ функцій первой и второй степеней. При разсмотрѣніи этихъ функцій вводится понятіе о производной функціи.

Въ дальнѣйшемъ это понятіе распространяется на цѣлыя и дробныя раціональныя функціи, указывается способъ нахожденія производныхъ этихъ функцій и ихъ примѣненіе при изслѣдованіи измѣненія функціи.

Показательная и логариѳмическая функціи разсматриваются съ необходимыми въ элементарномъ курсѣ ограниченіями.

Для геометрическихъ иллюстрацій приводятся нужныя свѣдѣнія изъ аналитической геометріи.

При составленіи настоящей книги я не имѣлъ въ виду предлагать *программу* повторительнаго курса алгебры. Моя цѣль заключалась въ томъ, чтобы указать *характеръ*, который, по моему мнѣнію, нужно придать повторительному курсу алгебры, и собрать *матеріалъ* для него.

Въ средней школѣ повторительный курсъ алгебры не можетъ и не долженъ быть такимъ обширнымъ, какимъ онъ является въ настоящей книгѣ. Преслѣдуя указанную выше главную цѣль (выясненіе идеи, связывающей отдѣльныя статьи одного и того же ученія), можно опустить подробности.

Это замѣчаніе въ особенности относится къ тѣмъ главамъ курса, въ которыхъ излагается ученіе о числѣ (гл. I—IV). Учащіеся, приступающіе къ повторительному курсу, уже имѣютъ практическое знакомство съ вещественными числами. Для того, чтобы подготовить ихъ къ введенію комплексныхъ чиселъ, достаточно напомнить законы дѣйствій, выяснить роль обратныхъ дѣйствій въ постановкѣ задачи о расширеніи понятія числа и указать значеніе основныхъ законовъ въ рѣшеніи этой задачи. Послѣ такого введенія можно прямо приступить къ главѣ о комплексныхъ числахъ.

Опущенные параграфы и главы могутъ служить для удовлетворенія любознательности учениковъ, особенно интересующихся математикой.

Считаю своимъ долгомъ выразить глубокую благодарность А. А. Волкову за помощь при чтеніи корректуръ и сдѣланныя имъ цѣнныя указанія.

С. Виноградовъ.

Ноябрь 1913 г.

Списокъ книгъ, служившихъ главными пособіями при составленіи повторительнаго курса алгебры.

1. **Chrystal. Algebra.** An elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges. Parts I and II. London. 1898. (4-th edition).

2. **Todhunter. Algebra for the use of colleges and schools.** London. 1870. (5-th edition).

3. **Hall and Knight. Higher Algebra.** London. 1910. (4-th edition).

4. **Niewenglowski. Cours d'algèbre** à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'Ecole normale supérieure et à l'Ecole polytechnique. T. I et II. Paris. 1902. (5-me édition).

5. **Bourlet. Leçons d' algèbre élémentaire.** Paris. 1902. (2-me édition).

6. **J. Tannery. Leçons d' algèbre et d' analyse** à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales. T. I et II. Paris. 1906.

7. **J. Tannery. Leçons d' arithmétique théorique et pratique.** Paris. 1900. (2-me édition).

8. **E. Cesàro. Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung.** Leipzig. 1904. (Есть русскій переводъ первыхъ 6 книгъ этого учебника).

9. **F. Klein. Elementarmathematik vom höheren Standpunkteaus.** Teil I: **Arithmetik, Algebra, Analysis.** Leipzig. 1908. (Есть русскій переводъ).

10. **Веберъ и Вельштейнъ.** Энциклопедія элементарной математики. Томъ I. Элементарная алгебра и анализъ. Одесса, изд. Mathesis, 1911. (2-е изданіе).

11. **Проф. А. В. Васильевъ.** Введеніе въ анализъ. Вып. I и II. Казань. 1904, 1910.

12. **Stolz und Gmeiner.** Theoretische Arithmetik. Leipzig. 1902. (2 Auflage).

13. **Barnard and Child.** A new Algebra. Vol. I and II. London. 1909, 1912.

14. **К. Ферберъ.** Ариөметика (развитіе понятія числа). Москва. 1914.

15. **Bourlet.** Leçons de Trigonométrie rectiligne. Paris. 1905. (2-me edition).

ГЛАВА I.

Натуральныя числа. Дѣйствія надъ ними.

§ 1. **Натуральный рядъ чиселъ.** Въ элементарныхъ курсахъ ариѳметики и алгебры главное мѣсто занимаетъ изученіе *числа.*

Прежде всего разсматривается *счетъ* и результатъ его — *натуральный рядъ чиселъ:*

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ldots \qquad (N)$$

Онъ обладаетъ слѣдующими свойствами:

1) *натуральный рядъ чиселъ безграниченъ,* т.-е. за каждымъ числомъ ряда слѣдуетъ новое число этого ряда;

2) *каждое число этого ряда называется равнымъ самому себѣ;*

3) *числа этого ряда не повторяются,* т.-е. въ рядѣ (N) нѣтъ числа, равнаго числу a этого ряда, кромѣ самого числа a;

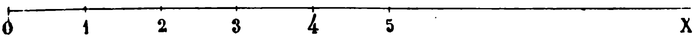
4) *число a ряда (N) называется бо́льшимъ каждаго изъ чиселъ, предшествующихъ ему въ рядѣ (N), и меньшимъ каждаго изъ чиселъ, слѣдующихъ за нимъ въ рядѣ (N).*

Знаками это свойство выражается такъ:

$$b > a;\ a < b,$$

гдѣ a есть одно изъ чиселъ, предшествующихъ b въ рядѣ (N). Изъ этого опредѣленія понятій «*больше*» и «*меньше*» слѣдуетъ, что, если $c > b$ и $b > a$, то $c > a$. Въ настоящей главѣ подъ буквами разумѣются числа ряда (N).

§ 2. **Геометрическое представленіе натуральныхъ чиселъ.** Числа натуральнаго ряда могутъ быть представлены геометрически. Возьмемъ полупрямую Ox (черт. 1) и отложимъ на ней отрѣзокъ $O1$, равный *единицѣ* масштаба. Конецъ его (точка 1)



Черт. 1.

принимается за изображеніе числа 1. Конецъ отрѣзка $O2$ (точка 2), равнаго двумъ единицамъ масштаба, есть изображеніе числа 2 и т. д. Отрѣзки $O1$, $O2$, ... или числа 1, 2, ..., выражающія ихъ длину въ опредѣленномъ масштабѣ, называются *абсциссами* точекъ 1, 2, ..., которыя служатъ концами этихъ отрѣзковъ. Полупрямая Ox называется осью абсциссъ.

§ 3. **Сложеніе натуральныхъ чиселъ.** *Сложить a съ b, гдѣ a и b обозначаютъ произвольныя натуральныя числа, значитъ перейти по ряду (N) отъ числа a къ b-му изъ слѣдующихъ за нимъ.*

Результатъ дѣйствія называется *суммою* числа a и числа b и обозначается символомъ $a+b$.

Такъ какъ рядъ (N) безконеченъ (§ 2), то сложеніе натуральныхъ чиселъ возможно всегда, т.-е. при произвольныхъ числахъ a и b ряда (N) существуетъ въ томъ же рядѣ число $a+b$, представляющее ихъ сумму.

Такъ какъ въ рядѣ (N) нѣтъ повторяющихся чиселъ (§ 2), то сложеніе чиселъ a и b приводитъ къ единственному числу $a+b$, т.-е. сложеніе есть дѣйствіе *однозначное*.

Опредѣленіе сложенія можно выразить слѣдующими двумя равенствами:

$$a+1 = \text{слѣдующему за } a \text{ числу въ рядѣ } (N) \quad \dots \quad (1)$$
$$a+(b+1)=(a+b)+1, \quad \dots \quad (2)$$

гдѣ a и b суть два произвольныхъ натуральныхъ числа.

Суммою трехъ чиселъ a, b, c называется сумма числа $a+b$ и числа c; она обозначается символомъ $a+b+c$.

Суммою четырехъ чиселъ a, b, c, и d, называется сумма числа $a+b+c$ и числа d; она обозначается символомъ $a+b+c+d$.

Легко распространить устанавливаемое такимъ образомъ понятіе суммы на случай произвольнаго числа чиселъ.

§ 4. **Свойства суммы.** Сумма чиселъ, какъ результатъ опредѣленнаго въ § 3 дѣйствія, обладаетъ свойствами, которыя можно выразить слѣдующими равенствами и неравенствами:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$
$$a+b \quad =b+a \quad \ldots\ldots \quad (4)$$
$$a+b>a'+b, \text{ если } a>a' \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

§ 5. **Ассоціативность суммы.** Чтобы доказать справедливость равенства (3), прежде всего сравнимъ его съ равенствомъ (2), которое принято за опредѣленіе сложенія. Легко видѣть, что равенство (3) переходитъ въ равенство (2), если $c=1$. Слѣд., равенство (3) справедливо для $c=1$. Допустимъ, что оно справедливо для *нѣкотораго* числа c, и докажемъ, что въ такомъ случаѣ оно справедливо и для слѣдующаго числа $c+1$. Дѣйствительно, по предположенію

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

По равенству (2) имѣемъ:

$$(a+b)+(c+1)=[(a+b)+c]+1;$$

отсюда по равенству (3) находимъ:

$$(a+b)+(c+1)=[a+(b+c)]+1.$$

Но по равенству (2)

$$[a+(b+c)]+1=a+[(b+c)+1]=a+[b+(c+1)].$$

Слѣд.,

$$(a+b)+(c+1)=a+[b+(c+1)].$$

Но это равенство есть не что иное, какъ равенство (3) для числа $c+1$. Желаемое такимъ образомъ доказано. Такъ какъ равенство (3) справедливо для $c=1$, то, по доказанному, оно справедливо для $c=2$; такъ какъ оно справедливо для $c=2$, то оно справедливо для $c=3$ и т. д.

Равенство (3) справедливо для произвольныхъ натуральныхъ чиселъ.

Оно выражаетъ свойство *собирательности* или *ассоціативности* суммы трехъ чиселъ. Пользуясь опредѣленіемъ суммы произвольнаго числа чиселъ, нетрудно убѣдиться въ томъ, что свойство ассоціативности принадлежитъ и суммѣ произвольнаго числа чиселъ.

§ 6. **Коммутативность суммы.** Разсмотримъ равенство (4). Чтобы показать его справедливость, замѣтимъ прежде всего, что оно справедливо при $a=1$ и $b=1$, такъ какъ при этихъ значеніяхъ a и b правая и лѣвая части равенства представляютъ *тождественныя* выраженія.

Допустимъ справедливость равенства

$$1+b=b+1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4')$$

для нѣкотораго числа b и докажемъ, что оно въ такомъ случаѣ справедливо и для числа $b+1$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства (2) при $a=1$ имѣемъ:

$$1+(b+1)=(1+b)+1.$$

По предположенію $1+b=b+1$; слѣд.,

$$1+(b+1)=(b+1)+1,$$

т.-е. равенство (4'), справедливое для числа b, справедливо и для числа $b+1$. Но такъ какъ оно справедливо для $b=1$, то оно справедливо и для $b=2$ и т. д. Итакъ, равенство (4') справедливо для произвольнаго числа b и, слѣд., равенство (4) справедливо для $a=1$.

Допустимъ, что для нѣкотораго числа a равенство (4) справедливо, и докажемъ, что въ такомъ случаѣ оно справедливо и для числа $a+1$. Дѣйствительно,

$$\begin{aligned}(a+1)+b &= a+(1+b) \text{ (равен. 3, свойство ассоціативности)}\\ &= a+(b+1) \text{ (равен. 4')}\\ &= (a+b)+1 \text{ (равен. 3, свойство ассоціативности)}\\ &= (b+a)+1 \text{ (по допущенію)}\\ &= b+(a+1) \text{ (равен. 3, свойство ассоціативности).}\end{aligned}$$

Итакъ,

$$(a+1)+b=b+(a+1).$$

Это равенство есть не что иное, какъ равенство (4) для числа $a+1$. Оно показываетъ, что если равенство (4) справедливо для числа a, то оно справедливо и для числа $a+1$ А такъ какъ выше была установлена его справедливость для

$a=1$, то отсюда мы выводимъ заключенiе о справедливости его для произвольнаго натуральнаго числа.

Справедливость равенства (4) такимъ образомъ доказана для произвольныхъ натуральныхъ чиселъ. Оно выражаетъ свойство *перемѣстительности* или *коммутативности* суммы двухъ чиселъ.

Пользуясь опредѣленiемъ суммы произвольнаго числа чиселъ (§ 3) и свойствомъ ассоцiативности (§ 5), легко убѣдиться въ томъ, что свойствомъ коммутативности обладаетъ и сумма произвольнаго числа чиселъ.

Равенство (4), какъ простѣйшее выраженiе свойства коммутативности суммы, указываетъ на *равноправность* чиселъ, подлежащихъ сложенiю. Поэтому числа, данныя для сложенiя, получили одно названiе: «*слагаемыя*».

§ 7. **Свойство монотонности.** Для доказательства справедливости неравенства (5) замѣтимъ прежде всего, что по опредѣленiю понятiя «больше» для натуральныхъ чиселъ (§ 2) и и опредѣленiю сложенiя (§ 3) имѣютъ при $a>a'$ мѣсто неравенства:

$$a+1>a;\ a\geqslant a'+1$$
$$a+1>a'+1 \qquad \ldots\ldots\ (5')$$

Послѣднее неравенство показываетъ, что неравенство (5) справедливо для $b=1$.

Допустимъ, что оно справедливо для нѣкотораго числа b, и докажемъ, что при этомъ предположенiи оно справедливо и для числа $b+1$.

Дѣйствительно,

$$a+(b+1)=(a+b)+1 \text{ (равен. 2)}$$
$$a'+(b+1)=(a'+b)+1 \text{ (равен. 2)}.$$

По предположенiю $a+b>a'+b$; поэтому по равенству (5')

$$(a+b)+1>(a'+b)+1,$$

или

$$a+(b+1)>a'+(b+1).$$

Послѣднее неравенство показываетъ, что неравенство (5), въ случаѣ его справедливости для числа b, справедливо и для числа $b+1$. А такъ какъ оно справедливо для $b=1$, то оно справедливо и для произвольнаго натуральнаго числа.

Свойство, выражаемое неравенствомъ (5), называется свойствомъ *монотонности*.

§ 8. **Вычитаніе натуральныхъ чиселъ.** Вычитаніемъ называется дѣйствіе, обратное сложенію; посредствомъ его по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному изъ нихъ находится другое.

Данная сумма двухъ слагаемыхъ называется *уменьшаемымъ*, данное слагаемое — *вычитаемымъ*, искомое слагаемое, т.-е. результатъ вычитанія—*разностью*.

Изъ a вычесть b значитъ найти такое число x, что

$$b+x=a.$$

Такъ какъ сумма двухъ натуральныхъ чиселъ больше каждаго изъ нихъ (§§ 2, 3), то дѣйствіе возможно только при условіи:

$$a>b.$$

Слово «возможно» обозначаетъ то, что при двухъ данныхъ натуральныхъ числахъ a и b, удовлетворяющихъ условію $a>b$, существуетъ третье натуральное число x, сумма котораго съ b равна a. Это число обозначается символомъ $a-b$.

Если число $x=a-b$ существуетъ, то оно *единственное*. Дѣйствительно, если бы въ рядѣ натуральныхъ чиселъ существовало еще число x', не равное x, но удовлетворяющее условію $b+x'=a$, то мы имѣли бы:

$$b+x=b+x' \text{ при } x\neq x',$$

что противорѣчитъ неравенству (5).

Опредѣленіе вычитанія можно выразить равенствомъ:

$$a-b+b=a\,(a>b) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Кромѣ того легко убѣдиться въ справедливости равенства

$$a+b-b=a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6')$$

Дѣйствительно, лѣвая часть его есть разность числа $a+b$ и числа b; обозначивъ ее черезъ c, по опредѣленію вычитанія находимъ:

$$a+b=c+b;$$

отсюда заключаемъ (неравен. 5), что $c=a$.

При помощи равенствъ (6) и (6′) легко показать, что свойства коммутативности и ассоціативности принадлежатъ выраженіямъ, представляющимъ результатъ ряда сложеній и вычитаній, при томъ условіи, что всѣ встрѣчающіяся въ нихъ вычитанія возможны. Допуская, что это условіе выполнено, докажемъ справедливость равенствъ

$$a+b-c=a-c+b, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$
$$a-b-c=a-c-b, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

выражающихъ свойство коммутативности ряда сложеній и вычитаній.

Доказательство сводится къ формальнымъ преобразованіямъ. Преобразуемъ выраженіе $a+b-c$, гдѣ $a>c$:

$a+b-c=(a-c+c)+b-c$ (по равен. 6)
$\quad =a-c+(c+b)-c$ (по равен. 3, ассоціативность суммы)
$\quad =a-c+(b+c)-c$ (по равен. 4, коммутативность суммы)
$\quad =a-c+b+c-c$ (по равен. 3, ассоціативность суммы)
$\quad =a-c+b$ (по равен. 6′).

Итакъ, равенство (7) справедливо.

Преобразуемъ теперь выраженіе $a-b-c$, предполагая, что $a>b$, $a>c$, $a-b>c$, $a-c>b$;

$a-b-c=a-c+c-b-c$ (по равен. 6)
$\quad =a-c-b+c-c$ (по равен. 7)
$\quad =a-c-b$ (по равен. 6′).

Справедливость равенства (8) такимъ образомъ доказана. Равенства (7) и (8) устанавливаютъ свойства коммутативности ряда сложеній и вычитаній.

Свойства ассоціативности устанавливаются равенствами:

$$a+(b-c)=a+b-c \quad (b>c) \quad \ldots\ldots \quad (9)$$
$$a-(b+c)=a-b-c \quad (a>b+c) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$
$$a-(b-c)=a-b+c \quad (b>c,\ a>b) \quad \ldots \quad (11)$$

Преобразуемъ выраженіе $a+(b-c)$:

$$\begin{aligned} a+(b-c) &= a+(b-c)+c-c && \text{(по равен. 6')} \\ &= a+[(b-c)+c]-c && \text{(по равен. 3)} \\ &= a+b-c && \text{(по равен. 6).} \end{aligned}$$

Справедливость равенства (9) обнаружена.

Преобразуемъ выраженіе $a-(b+c)$:

$$\begin{aligned} a-(b+c) &= a-b+b-(b+c) && \text{(по равен. 6)} \\ &= a-b-c+c+b-(b+c) && \text{(по равен. 6)} \\ &= a-b-c+(c+b)-(b+c) && \text{(по равен. 3)} \\ &= a-b-c+(b+c)-(b+c) && \text{(по равен. 4)} \\ &= a-b-c && \text{(по равен. 6').} \end{aligned}$$

Итакъ, равенство (10) справедливо.

Наконецъ, справедливость равенства (11) обнаруживается слѣдующими преобразованіями:

$$\begin{aligned} a-(b-c) &= a-b+b-(b-c) && \text{(по равен. 6)} \\ &= a-b+c-c+b-(b-c) && \text{(по равен. 6')} \\ &= a-b+c+b-c-(b-c) && \text{(по равен. 7)} \\ &= a-b+c+(b-c)-(b-c) && \text{(по равен. 9)} \\ &= a-b+c && \text{(по равен. 6').} \end{aligned}$$

§ 9. **Умноженіе натуральныхъ чиселъ.** *Умножить натуральное число a на натуральное число b значитъ составить сумму b слагаемыхъ, равныхъ a.*

Число a называется *множимымъ*, число b—*множителемъ*, результатъ умноженія—*произведеніемъ* числа a на число b.

Произведеніе a на b обозначается однимъ изъ символовъ:

$$a \times b,\ a \,.\, b,\ ab.$$

Изъ опредѣленія умноженія имѣемъ слѣдующее равенство:

$$ab = a + a + \ldots + a \text{ (} b \text{ слагаемыхъ)} \quad . \; . \; . \quad (12)$$

Это равенство мы распространяемъ и на случай $b = 1$, такъ что

$$\left.\begin{array}{l} a\,.\,1 = a \\ a\,.\,2 = a\,.\,1 + a \\ a\,.\,3 = a\,.\,2 + a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a\,.\,(b+1) = ab + a \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Первое изъ равенствъ (13) указываетъ особенность умноженія на 1: *отъ умноженія на 1 число не измѣняется.*

Умноженіе двухъ натуральныхъ чиселъ всегда возможно и есть дѣйствіе однозначное, такъ какъ, по опредѣленію, приводится къ составленію суммы равныхъ слагаемыхъ (§ 3).

Произведеніемъ трехъ чиселъ a, b и c называется произведеніе числа ab на c. Оно обозначается символомъ: abc. Произведеніемъ чиселъ a, b, c, d, ..., k, l называется результатъ слѣдующихъ дѣйствій: a умножается на b; произведеніе ab умножается на c; произведеніе abc умножается на d и т. д., и, наконецъ, произведеніе $abcd \ldots k$ умножается на l. Результатъ указаннаго ряда умноженій обозначается символомъ $abcd \ldots kl$.

§ 10. **Свойства произведенія.** Произведеніе обладаетъ свойствами, которыя выражаются слѣдующими равенствами и неравенствомъ:

$$\left.\begin{array}{l} (a+b)c = ac + bc \\ a(b+c) = ab + ac \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

$$(ab)\,.\,c = a\,.\,(bc) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

$$ab = ba \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

$$ab > a'b, \text{ если } a > a' \quad . \; . \; . \; . \quad (17)$$

§ 11. **Свойство дистрибутивности.** Для доказательства справедливости равенствъ (14) обратимъ прежде всего вниманіе на то, что первое изъ нихъ справедливо для $c = 1$ въ силу перваго изъ равенствъ (13). Допустимъ, что оно справедливо для нѣкотораго числа c, и докажемъ, что въ такомъ случаѣ оно справедливо и для числа $c+1$. Для этого преобразуемъ произведенiе $(a+b)(c+1)$ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+1) &= (a+b)c+a+b && \text{(равен. 13)}\\ &= ac+bc+a+b && \text{(по предположенiю)}\\ &= ac+a+bc+b && \text{(равен. 4, коммутативность суммы)}\\ &= a(c+1)+b(c+1) && \text{(равен. 13).}\end{aligned}$$

Итакъ,

$$(a+b)(c+1) = a(c+1)+b(c+1).$$

Это равенство есть не что иное, какъ первое равенство (14) для числа $c+1$.

Такъ какъ равенство (14) справедливо для $c=1$, то оно справедливо для $c=2$, для $c=3$ и т. д.; оно справедливо для произвольнаго натуральнаго числа c.

Аналогично устанавливается справедливость второго изъ равенствъ (14).

Равенства (14) выражаютъ свойство *распредѣлительности* или *дистрибутивности* умноженiя и указываютъ связь между сложенiемъ и умноженiемъ.

§ 12. **Свойство ассоцiативности.** Для доказательства справедливости равенства (15) замѣтимъ, что оно справедливо для $c=1$. Дѣйствительно, по равенствамъ (13),

$$(ab)\,.\,1 = ab \quad \text{и} \quad b\,.\,1 = b;$$

слѣдовательно,

$$(ab)\,.\,1 = a\,.\,(b\,.\,1).$$

Предположимъ, что равенство (15) справедливо для нѣкотораго числа c, и докажемъ, что въ такомъ случаѣ оно справедливо и для числа $c+1$. Для этого преобразуемъ произведенiе $(ab)\,.\,(c+1)$ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned}(ab)\,.\,(c+1) &= (ab)\,.\,c+ab && \text{(по равен. 13)}\\ &= a\,.\,(bc)+ab && \text{(по предположенiю)}\\ &= a\,.\,(bc+b) && \text{(по равен. 14, дистриб. произв.)}\\ &= a\,.\,[b(c+1)] && \text{(по равен. 13).}\end{aligned}$$

Итакъ,

$$(ab) \cdot (c+1) = a \cdot [b(c+1)].$$

Это равенство есть не что иное, какъ равенство (15) для числа $c+1$.

Такъ какъ равенство (15) справедливо для $c=1$, то оно справедливо для $c=2$, для $c=3$ и т. д.; оно справедливо для произвольнаго натуральнаго числа c.

Равенство (15) выражаетъ свойство *собирательности* или *ассоціативности* произведенія трехъ чиселъ.

§ 13. **Свойство коммутативности.** Равенство (16) справедливо при $a=1$ и $b=1$. Допустимъ, что оно справедливо для нѣкотораго числа a и $b=1$, т.-е. что существуетъ равенство

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16')$$

и докажемъ, что въ такомъ случаѣ оно справедливо и для числа $a+1$,

Произведеніе $(a+1) \cdot 1$ можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} (a+1) \cdot 1 &= a \cdot 1 + 1 \cdot 1 && \text{(по равен. 14)} \\ &= 1 \cdot a + 1 \cdot 1 && \text{(по предположенію)} \\ &= 1 \cdot (a+1) && \text{(по равен. 14).} \end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ, что равенство (16'), справедливое для $a=1$, справедливо для произвольнаго натуральнаго числа a, а равенство (16) справедливо для $b=1$.

Допустимъ, что равенство (16) справедливо для нѣкотораго числа b, и докажемъ, что въ такомъ случаѣ оно справедливо и для числа $b+1$. Дѣйствительно,

$$\begin{aligned} a \cdot (b+1) &= ab + a && \text{(по равен. 14)} \\ &= ba + a && \text{(по предположенію)} \\ &= (b+1) \cdot a && \text{(по равен. 14)} \end{aligned}$$

Итакъ,

$$a \cdot (b+1) = (b+1)a.$$

Это равенство есть не что иное, какъ равенство (16) для числа $b+1$. Такъ какъ равенство (16) справедливо для $b=1$, то оно справедливо для $b=2$ и т. д.

Равенство (16) справедливо для произвольныхъ натуральныхъ чиселъ. Оно выражаетъ свойство *перемѣстительности* или *коммутативности* произведенія двухъ чиселъ и показываетъ, что множимое и множитель суть *равноправные* факторы умноженія. Поэтому они получаютъ одно названіе: *«множители»* или *«сомножители»*.

§ 14. **Свойство монотонности.** Легко видѣть, что неравенство (17) справедливо для $b=1$, такъ какъ на основаніи перваго изъ равенствъ (13) оно приводится къ условію: $a>a'$.

Допустивъ, что неравенство (17) справедливо для нѣкотораго числа b, докажемъ, что оно справедливо и для числа $b+1$. Для этого замѣтимъ, что

$$\left.\begin{aligned} a\,.\,(b+1)&=ab+a \\ a'\,.\,(b+1)&=a'b+a' \end{aligned}\right\}\text{ (по равен. 13).}$$

Но по предположенію $ab>a'b$; слѣд., по неравенству (5)

$$ab+a>a'b+a.$$

Кромѣ того по тому же неравенству (5) имѣемъ при $a>a'$:

$$a'b+a>a'b+a';$$

слѣд.,

$$ab+a>a'b+a'$$

или, по равенству (13),

$$a(b+1)>a'(b+1),$$

что и требовалось доказать.

Такъ какъ неравенство (17) справедливо для $b=1$, то оно справедливо и для $b=2$, и т. д.

Неравенство (17) справедливо для произвольнаго натуральнаго числа b.

Оно выражаетъ свойство *монотонности* произведенія двухъ чиселъ.

§ 15. **Слѣдствія равенствъ (14), (15), (16).** Укажемъ рядъ слѣдствій изъ равенствъ (14), (15) и (16), представляющихъ распространеніе свойствъ дистрибутивности, ассоціативности и коммутативности произведенія на случай умноженія суммъ, разностей и произведеній.

Слѣдствіе 1. $$(a+b+..+k).m=m(a+b+..+k)=$$
$$=am+bm+..+km \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Слѣдствіе 2. $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$;
$$(a+b+..+k).(a'+b'+..l')=aa'+ba'+\ldots+ka'+ab'+$$
$$+bb'+\ldots+kl' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Слѣдствіе 3. Если $a>b$, то
$$(a-b).c=c.(a-b)=ac-bc \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Дѣйствительно, изъ условія $a>b$, слѣдуетъ, что $a=b+d$ (§§ 2 и 8). Поэтому

$ac=(b+d)c=bc+dc$, (по равен. 14)

$\left.\begin{array}{l} ac-bc=dc, \\ d=a-b, \end{array}\right\}$ (опред. вычитанія, § 8)

$(a-b)c=ac-bc$.

Слѣдствіе 4. $(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd, (c>d) \quad \ldots \quad (21)$
$$(a-b)(c-d)=ac+bd-ad-bc \ (a>b,\ c>d) \ldots (22)$$

Равенства (19) — (22) вмѣстѣ съ равенствомъ (14) выражаютъ свойство *дистрибутивности* умноженія и даютъ правила для умноженія суммъ и разностей на число и на сумму и разность чиселъ.

Слѣдствіе 5. *Произведеніе произвольнаго числа чиселъ не зависитъ отъ порядка этихъ чиселъ.*

а) Разсмотримъ сначала произведеніе abc трехъ чиселъ и докажемъ, что въ этомъ произведеніи, не измѣняя его, можно переставить два первыхъ числа и два послѣднихъ, т.-е. докажемъ справедливость равенствъ:

$$abc=bac \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$
$$abc=acb \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Справедливость ихъ доказывается слѣдующими преобразованіями:

$abc = (ab) . c$ (по опред. произведенія трехъ чиселъ)
$= (ba) . c$ (по равен. 16)
$= bac$ (по опред. произведенія трехъ чиселъ).
$abc = a . (bc)$ (по равен. 15)
$= a . (cb)$ (по равен. 16)
$= acb$ (по равен. 15).

б) Въ произведеніи произвольнаго числа чиселъ можно, не измѣняя его, переставить два первыхъ числа.

Это свойство произведенія вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія умноженія нѣсколькихъ чиселъ и равенства (16).

в) Въ произведеніи произвольнаго числа чиселъ можно, не измѣняя его, переставить два послѣднихъ числа.

Возьмемъ произведеніе $ab \ldots klm$ и покажемъ, что

$$ab \ldots klm = ab \ldots kml.$$

Дѣйствительно,

$ab \ldots klm = (ab \ldots k) . l . m$ (по опред. произв.)
$= (ab \ldots . k) . m . l$ (по равен. 24)
$= ab \ldots \ldots kml$ (по опред. произв.). .(24′)

г) Въ произведеніи произвольнаго числа чиселъ можно, не измѣняя его, переставить два сосѣднихъ числа. Дѣйствительно,

$ab \ldots . efgh \ldots k = [(ab \ldots . e) . f . g]h \ldots k$ (по опредѣленію)
$= [(ab \ldots . e) . g . f]h \ldots k$ (по равен. 24′)
$= ab \ldots \ldots egfh \, . . \, k$ (по опред.).

д) Въ произведеніи произвольнаго числа чиселъ можно, не измѣняя его, переставить два любыя числа.

Это ясно изъ того, что осуществить перестановку двухъ произвольныхъ чиселъ, входящихъ въ произведеніе, можно послѣдовательными перестановками двухъ сосѣднихъ чиселъ. Предложеніе, содержащееся въ слѣдствіи 5, такимъ образомъ доказано. Изъ него вытекаетъ равноправность чиселъ, входящихъ въ составъ произведенія; поэтому имъ присвоено общее названіе *множителей*.

Слѣдствіе 5 можно формулировать такъ: *произведеніе не зависитъ отъ порядка множителей.*

Слѣдствіе 6. *Въ произведеніи произвольнаго числа множителей можно соединять множители въ группы.*

Напр., $abcd = a\,.\,(bc)\,.\,d = (ab)\,.\,(cd) = (ad)\,.\,(bc)$ и т. д.

Слѣдствіе 7. Если $a > a'$ и $b > b'$, то $ab > a'b'$. Дѣйствительно, если $a > a'$ $b > b'$, то

$$\left.\begin{array}{l} ab > a'b \\ a'b > a'b'; \end{array}\right\} \text{(по неравен. 17')}$$

отсюда $ab > a'b'$.

§ 16. **Дѣленіе натуральныхъ чиселъ.** *Подъ дѣленіемъ разумѣется дѣйствіе, обратное умноженію; посредствомъ его по данному произведенію двухъ множителей и одному изъ нихъ находится другой.*

Произведеніе двухъ чиселъ при дѣленіи называется *дѣлимымъ*, данный множитель—*дѣлителемъ*, а искомый—*частнымъ*.

Частное отъ дѣленія a на b обозначается символомъ $a : b$.

Раздѣлить число a на число b значитъ найти такое число x, что

$$bx = a.$$

Подобно вычитанію дѣленіе не всегда возможно, т.-е. при данныхъ натуральныхъ числахъ a и b не всегда существуетъ третье натуральное число x, удовлетворяющее написанному выше равенству.

Если такое число x существуетъ, то оно *единственное* (неравен. 17; сравн. § 8).

Въ слѣдующихъ формулахъ настоящаго § подъ символомъ $a:b$ разумѣется результатъ *возможнаго* въ указанномъ смыслѣ дѣленія.

Данное выше опредѣленіе дѣленія можно выразить равенствомъ:

$$(a:b).b = a \text{ или } a:b\,.\,b = a \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Кромѣ того не трудно убѣдиться въ справедливости равенствъ:

$$(a.b):b=a \text{ или } a.b:b=a \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

$$a.b:c=a:c.b; \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

$$a:b:c=a:c:b; \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

$$a.(b:c)=a.b:c; \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

$$a:(b.c)=a:b:c; \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

$$a:(b:c)=a:b.c \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Справедливость равенствъ (26) — (31) доказывается тѣмъ же пріемомъ, которымъ мы пользовались для доказательства равенствъ (6′), (7), (8), (9), (10), (11).

Равенства (27) и (28) суть выраженія свойства коммутативности ряда умноженій и дѣленій; равенства (29), (30) и (31) выражають свойство ассоціативности ряда умноженій и дѣленій.

Кромѣ указанныхъ свойствъ, дѣленіе обладаетъ еще свойствомъ дистрибутивности по отношенію къ дѣлимому. Оно выражается слѣдующими равенствами:

$$(a+b):c=a:c+b:c \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

$$(a-b):c=a:c-b:c \quad (a>b) \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Для доказательства справедливости перваго изъ этихъ равенствъ замѣтимъ, что по равенству (25)

$$(a+b):c.c=a+b.$$

Съ другой стороны по равенствамъ (14) и (25) имѣемъ:

$$(a:c+b:c).c=a:c.c+b:c.c=a+b;$$

слѣд.,

$$(a+b):c.c=(a:c+b:c).c.$$

Отсюда, пользуясь неравенствомъ (17), заключаемъ о справедливости равенства (32).

Аналогично устанавливается справедливость равенства (33).

§ 17. **Прямыя и обратныя дѣйствія.** Изъ разсмотрѣнія четырехъ основныхъ дѣйствій надъ натуральными числами обнаруживается рѣзкое различіе между дѣйствіями *прямыми* (сложеніе и умноженіе) и дѣйствіями *обратными* (вычитаніе и дѣленіе). Это различіе заключается въ томъ, что результатъ сложенія и умноженія натуральныхъ чиселъ есть *всегда* натуральное число, между тѣмъ какъ выполненіе вычитанія и дѣленія двухъ натуральныхъ чиселъ при помощи натуральныхъ чиселъ оказывается возможнымъ только при извѣстныхъ условіяхъ. Напр., нельзя вычесть 5 изъ 5, 5 изъ 3, раздѣлить 5 на 2, пользуясь натуральными числами.

Система натуральныхъ чиселъ является такимъ образомъ достаточной или *замкнутой* системой только для двухъ дѣйствій: сложенія и умноженія.

Для того, чтобы устранить невозможность выполненія въ нѣкоторыхъ случаяхъ обратныхъ дѣйствій (вычитанія и дѣленія), нужно расширить понятіе числа введеніемъ новыхъ чиселъ; вмѣстѣ съ натуральными эти новыя числа должны представить расширенную систему, въ которой оказалось бы возможнымъ выполненіе всѣхъ четырехъ дѣйствій, или, другими словами, систему, замкнутую по отношенію къ четыремъ дѣйствіямъ.

Итакъ, изученіе обратныхъ дѣйствій приводитъ къ постановкѣ задачи о введеніи новыхъ чиселъ.

§ 18. **Законы дѣйствій.** Приведенныя въ §§ 4 и 10 свойства суммы и произведенія лежатъ въ основѣ правилъ сложенія и умноженія натуральныхъ чиселъ, при чемъ свойство монотонности суммы и произведенія является руководящимъ при такъ называемыхъ «*приближенныхъ вычисленіяхъ*».

Но, кромѣ практическаго значенія, эти свойства (за исключеніемъ свойства монотонности) играютъ выдающуюся роль въ рѣшеніи задачи о расширеніи понятія числа. Теоретическое значеніе свойствъ сложенія и умноженія выяснилось только въ первой половинѣ XIX столѣтія и оказалось на столько важнымъ, что свойства ассоціативности, коммутативности и дистрибутивности получили названіе «*основныхъ законовъ*».

Ассоціативный и коммутативный законы являются характеристичными для дѣйствія, которому дается названіе: «*сложеніе*».

Дистрибутивный, ассоціативный и коммутативный законы являются характеристичными для дѣйствія, которому дается названіе: «*умноженіе*».

Изученіе основныхъ законовъ ариѳметическихъ дѣйствій сдѣлало возможнымъ расширить понятіе числа чисто *логическимъ* путемъ.

Основною мыслью при введеніи *новыхъ* чиселъ является допущеніе *«принципа постоянства (перманентности) основныхъ законовъ»*.

Руководствуясь этимъ принципомъ, къ новымъ числамъ предъявляютъ не только требованіе удовлетворять той спеціальной цѣли, для которой они вводятся, но еще и требованіе подчиняться при дѣйствіяхъ надъ ними основнымъ законамъ, установленнымъ при изученіи дѣйствій надъ натуральными числами.

ГЛАВА II.

Нуль и отрицательныя числа.

§ 19. **Нуль.** Первымъ расширеніемъ понятія числа является пополненіе натуральнаго ряда *нулемъ*, который разсматривается, какъ число, предшествующее 1, и обозначается знакомъ 0. Такимъ образомъ получается слѣдующій рядъ чиселъ:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, \qquad (N')$$

Свойства нуля опредѣляются слѣдующими соотношеніями:

$$\begin{aligned}
&a > 0;\\
&a + 0 = 0 + a = a;\\
&a - a = 0;\\
&a - 0 = a;\\
&a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0,
\end{aligned}$$

при чемъ подъ буквой a разумѣется произвольное число натуральнаго ряда.

Введеніе *нуля* устраняетъ невозможность вычитанія натуральнаго числа a изъ того же числа a.

На оси абсциссъ (§ 2) *нулю* соотвѣтствуетъ точка O, или, другими словами, абсцисса точки O равна нулю.

Изъ указанныхъ свойствъ *нуля* слѣдуетъ, что частное отъ дѣленія нуля на натуральное число равно *нулю,* и что *дѣленіе на нуль невозможно.*

Въ настоящей главѣ подъ буквами разумѣются числа ряда (N').

§ 20. **„Пара чиселъ“.** Совокупность двухъ чиселъ a и b ряда (N'), взятыхъ въ *опредѣленномъ* порядкѣ, будемъ называть *«парой»* и обозначать символомъ (a, b).

Изъ каждыхъ двухъ чиселъ a и b можно составить двѣ различныя пары: (a, b) и (b, a).

Пара (a, b) представляетъ *новую вещь,* которую можно принять за *число, указавъ условія равенства и неравенства паръ, опредѣливъ для нихъ сложеніе и умноженіе, какъ два основныя дѣйствія, и установивъ соотношеніе между парами и числами ряда* (N').

Эти условія и опредѣленія произвольны, но при ихъ выборѣ нужно имѣть въ виду цѣль, съ которою вводятся новыя числа, изображаемыя парами, и то обстоятельство, что новыя числа вмѣстѣ съ числами (N') должны составить *одну* расширенную систему чиселъ. Поэтому новыя опредѣленія должны переходить въ старыя, разъ дѣло идетъ о числахъ ряда (N') (см. § 18).

§ 21. **Пары первой ступени.** Сложеніе и обратное ему дѣйствіе — вычитаніе — называются дѣйствіями *первой ступени.*

Вычисленіе разности $a - b$ возможно лишь при условіи $a \geqq b$ (§§ 8 и 19).

Введемъ *новыя* числа съ цѣлью устранить это ограниченіе и сдѣлать выполнимымъ вычисленіе разности $a - b$ и въ случаѣ $a < b$.

Для этого будемъ разсматривать пары (a, b) какъ числа, для которыхъ укажемъ въ формѣ *опредѣленій* условія равенства и неравенства, правила сложенія и умноженія и, наконецъ, связь съ числами (N').

Опредѣленіе I. $(a, b) = (a', b')$, *если* $a + b' = a' + b$.

Напримѣръ, $(3, 7) = (7, 11)$, потому что $3 + 11 = 7 + 7$.

Слѣдствіе 1. $(a + k, b + k) = (a, b)$.

Слѣдствіе 2. $(a, b) = (a - b, 0)$, *если* $a > b$;
$(a, b) = (0, b - a)$, *если* $a < b$;
$(a, a) = (0, 0)$.

Опредѣленіе II. $(a, b) > (a', b')$, *если* $a + b' > a' + b$.

Напримѣръ, $(3, 7) > (2, 9)$, потому что $3 + 9 > 2 + 7$.

Слѣдствіе 1. *Если* $(a, b) > (a', b')$ *и* $(a', b') > (a'', b'')$, *то* $(a, b) > (a'', b'')$.

Дѣйствительно, по опредѣленію 2 имѣемъ:

$$a + b' > a' + b; \quad a' + b'' > a'' + b';$$

отсюда по неравенству (5);

$$a + b' + a' + b'' > a' + b + a'' + b',$$

и по тому же неравенству

$$a + b'' > a'' + b;$$

это неравенство показываетъ, что $(a, b) > (a'', b'')$.

Слѣдствіе 2. $(a, 0) > (b, 0)$, *если* $a > b$;
$(0, a) > (0, b)$, *если* $a < b$;
$(a, 0) > (0, b)$, *если* a *и* b *не равны нулю одновременно.*

Частные случаи послѣдняго неравенства:

$$(a, 0) > (0, 0); \quad (0, 0) > (0, b),$$

при чемъ $a \neq 0$, $b \neq 0$.

§ 22. **Сложеніе паръ 1-й ступени. Опредѣленіе III.** *Суммою двухъ паръ* (a, b) *и* (a', b') *называется число* $(a + a', b + b')$; *сумма обозначается символомъ* $(a, b) + (a', b')$, *такъ что*

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

Для суммы трехъ, четырехъ и т. д. паръ сохраняются опредѣленія § 3.

При указанномъ опредѣленіи сумма обладаетъ всѣми свойствами суммы чиселъ ряда (N').

a) Составленіе ея всегда возможно, потому что сводится къ составленію суммъ $a + a'$ и $b + b'$ чиселъ a и a', b и b' ряда (N') (§§ 3 и 19).

б) Дѣйствіе, устанавливаемое опредѣленіемъ III, однозначно въ томъ смыслѣ, что если

$$(a,\ b) = (c,\ d) \text{ и } (a',\ b') = (c',\ d'),$$

то

$$(a,\ b) + (a',\ b') = (c,\ d) + (c',\ d').$$

Дѣйствительно, по опредѣленію I:

$$a + d = b + c, \quad a' + d' = b' + c';$$

слѣд.,

$$a + a' + d + d' = b + b' + c + c'.$$

Отсюда заключаемъ, что пары $(a + a', b + b')$ и $(c + c', d + d')$ равны. Но эти пары, по опредѣленію III, суть не что иное, какъ суммы соотвѣтственно чиселъ $(a,\ b)$ и $(a',\ b')$, $(c,\ d)$ и $(c',\ d')$.

в) Сложеніе паръ, какъ дѣйствіе, установленное опредѣленіемъ III, подчиняется закону *ассоціативному* (равенство 3), какъ это видно изъ слѣдующихъ преобразованій:

$$[(a,\ b) + (a',\ b')] + (a'',\ b'') = (a + a',\ b + b') + (a'', b'') =$$
$$= (a + a' + a'',\ b + b' + b'');$$
$$(a,\ b) + [(a',\ b') + (a'',\ b'')] = (a,\ b) + (a' + a'',\ b' + b'') =$$
$$= (a + a' + a'',\ b + b' + b'').$$

г) При опредѣленіи III сохраняется *коммутативный законъ* (равенство 4). Это обнаруживается слѣдующими преобразованіями:

$$(a,\ b) + (a',\ b') = (a + a',\ b + b') \text{ (опредѣленіе III)};$$
$$= (a' + a,\ b' + b) \text{ (равенство 4)};$$
$$= (a',\ b') + (a,\ b) \text{ (опредѣленіе III)}.$$

д) Наконецъ законъ монотонности (неравенство 5) также остается справедливымъ при данныхъ выше опредѣленіяхъ.

Дѣйствительно, пусть $(a',\ b') > (a'',\ b'')$. По опредѣленію II имѣемъ неравенство:

$$a' + b'' > a'' + b';$$

отсюда черезъ прибавленіе къ обѣимъ частямъ неравенства по $a + b$, находимъ (неравенство 5):

$$a + a' + b + b'' > a + a'' + b + b'.$$

Отсюда по опредѣленію II заключаемъ, что

$$(a + a',\ b + b') > (a + a'',\ b + b''),$$

и по опредѣленію III

$$(a,\ b) + (a',\ b') > (a,\ b) + (a'',\ b'').$$

Итакъ, дѣйствіе, устанавливаемое опредѣленіемъ III, при условіяхъ равенства и неравенства паръ, данныхъ въ опредѣленіяхъ I и II, обладаетъ всѣми формальными свойствами сложенія чиселъ ряда *(N')*. Этимъ оправдывается присвоеніе этому дѣйствію названія сложенія и результату его названія суммы.

§ 23. **Вычитаніе паръ 1-й ступени.** Вычесть изъ числа $(a,\ b)$ число $(a',\ b')$ значитъ найти число $(x,\ y)$, удовлетворяющее условію (сравн. § 8):

$$(a',\ b') + (x,\ y) = (a,\ b).$$

Это требованіе, пользуясь опредѣленіями III и I, можно свести къ слѣдующему:

$$a' + x + b = a + b' + y.$$

Легко видѣть, что это равенство удовлетворяется, если мы положимъ

$$x = a + b' + k,\quad y = a' + b + k,$$

гдѣ k есть произвольное число ряда *(N')*. Слѣд.,

$$(x,\ y) = (a + b' + k,\ a' + b + k).$$

Но по слѣдствію 1 опредѣленія I вторая часть этого равенства равна числу $(a + b',\ a' + b)$. Слѣд., число $(a + b',\ a' + b)$ есть то число, которое нужно сложить съ числомъ $(a',\ b')$, чтобы получить число $(a,\ b)$. Оно называется разностью чиселъ $(a,\ b)$ и $(a',\ b')$ и обозначается символомъ $(a,\ b) - (a',\ b')$.

Такимъ образомъ мы получаемъ правило вычитанія паръ первой ступени въ слѣдующемъ видѣ:

$$(a,\ b) - (a',\ b') = (a + b',\ a' + b).$$

Изъ этого правила слѣдуетъ, что вычитаніе чиселъ вида $(a,\ b)$ *всегда возможно*, такъ какъ оно сводится къ составленію двухъ суммъ чиселъ ряда (N'), и что оно *однозначно*.

§ 24. **Связь чиселъ (a, b) съ числами ряда (N').** Приложимъ данныя выше опредѣленія равенства, неравенства и сложенія къ числамъ вида $(a, 0)$:

$$(a, 0) = (b, 0), \text{ если } a = b;$$
$$(a, 0) > (b, 0), \text{ если } a > b;$$
$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0).$$

Изъ этихъ соотношеній видно, что для сравненія и сложенія чиселъ вида $(a, 0)$ приходится производить соотвѣтственно сравненіе и сложеніе ихъ первыхъ элементовъ. Поэтому не можетъ возникнуть никакихъ недоразумѣній, если мы примемъ, какъ новое опредѣленіе, равенство числа $(a, 0)$ числу a.

Опредѣленіе IV. $(a, 0) = a$.

Слѣдствіе 1. *Если* $a > b$, *то* (опред. I, слѣд. 2)

$$(a, b) = (a - b, 0) = a - b.$$

Слѣдствіе 2. $(0, 0) = 0$.

По этому опредѣленію числа ряда (N') являются частнымъ случаемъ чиселъ вида (a, b).

Опредѣленіе IV позволяетъ выяснить значеніе числа (a, b) и въ томъ случаѣ, когда $a < b$.

Для этого составимъ сумму чиселъ (a, b) и числа b:

$$\begin{aligned}(a, b) + b &= (a, b) + (b, 0) \text{ (опред. IV)}\\ &= (a + b, b) \text{ (опред. III, § 19)}\\ &= (a, 0) \text{ (опред. I, слѣд. 1)}\\ &= a \text{ (опред. IV)}.\end{aligned}$$

Итакъ, $(a, b) + b = a$, т.-е. (a, b) есть то число, которое при сложеніи съ b даетъ въ суммѣ a, или, другими словами, *число* (a, b) *есть разность чиселъ* a *и* b.

Поэтому вмѣсто обозначенія (a, b) теперь можно пользоваться обычнымъ обозначеніемъ разности и полагать $(a, b) = a - b$ при произвольныхъ числахъ a и b.

§ 25. **Упрощеніе обозначенія чиселъ (a, b).** Слѣдствіе 2 опредѣленія I показываетъ, что всѣ числа вида (a, b) сводятся къ тремъ типамъ: $(0, 0)$, $(m, 0)$ и $(0, m)$, гдѣ m есть натуральное число.

По опредѣленію IV' число $(0, 0) = 0$ и число $(m, 0) = m$. Числа третьяго типа суть разности $0 - m$ (§ 24). Принимая во вниманіе свойства числа «нуль» (§ 19), число m можно замѣнить суммой $0 + m$, такъ что числа втораго и третьяго типа будутъ соотвѣтственно вида: $0 + m$ и $0 - m$. Для дальнѣйшаго упрощенія въ обозначеніи чиселъ этихъ двухъ типовъ условимся въ выраженіяхъ $0 \mp m$ не писать нуля; другими словами, для числа $(m, 0)$ мы вводимъ символъ $+m$, а для числа $(0, m)$ символъ $-m$.

§ 26. **Положительныя и отрицательныя числа.** Изъ предыдущаго § слѣдуетъ, что каждому натуральному числу m соотвѣтствуютъ два числа: $+m$ и $-m$. Эти два числа обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что *ихъ сумма равна нулю*. Дѣйствительно (§§ 25, 22, 21),

$$(+m) + (-m) = (m, 0) + (0, m) = (m, m) = (0, 0) = 0.$$

Числа $+m$ и $-m$ называются *противоположными;* число $+m$ *положительнымъ*, а число $-m$ *отрицательнымъ*.

Число m называется *абсолютнымъ значеніемъ* или *абсолютнымъ содержаніемъ* чиселъ $+m$ и $-m$. Абсолютное значеніе числа $\mp m$ обозначается знакомъ $|\mp m|$. Напримѣръ, $|+3| = 3$; $|-4| = 4$.

Указанныя выше *опредѣленія* даютъ слѣдующія *свойства* положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ и *правила сложенія и вычитанія* ихъ:

1) *положительное число больше нуля* (опред. IV', слѣд., опред. II);

2) *отрицательное число меньше нуля* (§ 25; опред. II);

3) *положительное число больше отрицательнаго* (опред. IV', слѣд., § 25; опред. II);

4) *изъ двухъ положительныхъ чиселъ то больше, у котораго абсолютное значеніе больше* (опред. IV' и II);

5) *изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ то больше, у котораго абсолютное значеніе меньше* (§ 25; опред. II);

6) *чтобы сложить два положительныхъ или два отрицательныхъ числа, достаточно сложить ихъ абсолютныя значенія и удержать ихъ общій знакъ* (опред. IV'; § 25; опред. III);

7) *чтобы сложить два числа съ разными знаками, достаточно изъ большаго абсолютнаго значенія вычесть меньшее и удержать знакъ большаго по абсолютному значенію числа* (опред. IV; § 25; опред. III);

8) *чтобы вычесть изъ одного числа другое, достаточно сложить первое число съ противоположнымъ второго.*

Дѣйствительно,

$$\begin{aligned}(a,\ b)-(a',\ b') &= (a+b',\ a'+b)\ (\S\ 23)\\ &= (a,\ b)+(b',\ a')\ (\text{опред. III});\end{aligned}$$

но $(b',\ a')$ есть число, противоположное $(a',\ b')$, такъ какъ

$$\begin{aligned}(a',\ b')+(b',\ a') &= (a'+b',\ a'+b')\ (\text{опред. III})\\ &= (0,\ 0)\ (\text{опред. I, слѣд. 2})\\ &= 0\ (\text{опред. IV, слѣд.}).\end{aligned}$$

Изъ правила 8) слѣдуетъ, что выраженіе, содержащее рядъ сложеній и вычитаній, всегда можно представить въ видѣ суммы. Такое выраженіе называется *алгебраической суммой.*

Наприм., $+3-5+1$ есть алгебраическая сумма, слагаемыя которой суть $+3$, -5 и $+1$.

Алгебраическая сумма подчиняется законамъ ассоціативному и коммутативному (§ 22).

Абсолютное значеніе алгебраической суммы не болѣе суммы абсолютныхъ значеній слагаемыхъ (прав. 6 и 7).

§ 27. **Умноженіе положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ. Опредѣленіе V.** *Произведеніемъ двухъ чиселъ называется число, абсолютное значеніе котораго равно произведенію абсолютныхъ значеній данныхъ чиселъ и котораго знакъ есть +, если оба данныя числа имѣютъ одинаковые знаки, и —, если они имѣютъ разные знаки. Дѣйствіе, результатомъ котораго является произведеніе, называется умноженіемъ.*

Въ символахъ это опредѣленіе выразится такъ:

$$\begin{aligned}(+a).(+b) &= +ab,\quad (-a).(-b)=+ab,\\ (-a).(+b) &= -ab,\quad (+a).(-b)=-ab,\end{aligned}$$

гдѣ a и b суть числа ряда (N').

Слѣдствіе 1. *Произведеніе нуля на произвольное положительное или отрицательное число и произведеніе произвольнаго положительнаго или отрицательнаго числа на нуль равно нулю* (§ 19).

Слѣдствіе 2. $a.1=a$, *гдѣ a есть произвольное положительное или отрицательное число* (ср. первое изъ равенствъ 13).

Для произведенія трехъ, четырехъ и т. д. чиселъ удерживаются опредѣленія § 9.

Легко убѣдиться, что дѣйствіе, устанавливаемое опредѣленіемъ V, всегда возможно и однозначно (§ 9, 19), и что оно подчиняется законамъ дистрибутивному, ассоціативному и коммутативному (равен. 14, 15, 16).

Законъ монотонности (равен. 17) имѣетъ мѣсто для произвольнаго числа b при положительныхъ числахъ a и a'.

Подчиненіе дѣйствія, даннаго опредѣленіемъ V, дистрибутивному, ассоціативному и коммутативному законамъ оправдываетъ присвоеніе этому дѣйствію названіе умноженія (§ 18).

§ 28. **Дѣленіе положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ** опредѣляется, какъ дѣйствіе, обратное умноженію, и совершается по слѣдующимъ правиламъ:

$$(+a):(+b)=+(a:b),\quad (-a):(-b)=+(a:b),$$
$$(-a):(+b)=-(a:b),\quad (+a):(-b)=-(a:b),$$

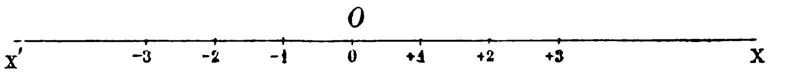
при чемъ a и b суть числа ряда (N'), а подъ символомъ $a:b$ разумѣется результатъ выполнимаго дѣленія (§ 16).

§ 29. **Геометрическое представленіе положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ.** Черезъ введеніе отрицательныхъ чиселъ мы получаемъ слѣдующій рядъ чиселъ:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots \quad (N'')$$

Разсматривая числа этого ряда, легко замѣтить, что *знакъ* числа характеризуетъ направленіе движенія отъ нуля въ этомъ рядѣ: движеніе *направо* приводитъ къ *положительнымъ* числамъ, движеніе *налѣво* — къ *отрицательнымъ*.

Возьмемъ прямую $X'X$ (черт. 2), на ней произвольную точку O, которую примемъ за изображеніе нуля, и будемъ на ней отъ точки O откладывать отрѣзки, равные единицѣ масштаба, 2 единицамъ масштаба, 3 единицамъ масштаба и т. д. Чтобы



Черт. 2.

различить направленія, въ которыхъ откладываются отрѣзки, назовемъ *положительными* отрѣзки, откладываемые *вправо* отъ O, и *отрицательными* отрѣзки, откладываемые *влѣво* отъ O. Конецъ, отрѣзка $+Om$, гдѣ m натуральное число, есть изображеніе числа $+m$, а конецъ отрѣзка $-Om$ есть изображеніе числа $-m$. При этомъ каждому числу ряда (N'') будетъ соотвѣтствовать только одна точка данной прямой, и относительное расположеніе изображеній чиселъ этого ряда оказывается такимъ же, какъ расположеніе самыхъ чиселъ въ рядѣ (N'').

Прямая $X'X$ называется осью *абсциссъ*, точка O — *началомъ* абсциссъ, числа $+m$ или $-m$ — *абсциссами* соотвѣтствующихъ имъ точекъ (сравн. § 2).

Положительныя и отрицательныя числа характеризуютъ положеніе соотвѣтствующихъ имъ точекъ оси относительно начала. Поэтому они называются также *относительными* числами.

Изображенія чиселъ $+m$ и $-m$ расположены симметрично относительно начала. Поэтому числамъ $+m$ и $-m$ можно присвоить названіе *симметричныхъ*.

§ 30. **Заключеніе**. Пары первой ступени были введены съ цѣлью устранить невозможность выполнить вычитаніе $a-b$ въ случаѣ $a<b$. Опредѣленія, при помощи которыхъ было сдѣлано это расширеніе понятія числа, суть не что иное, какъ распространеніе свойствъ разности $a-b$ при $a>b$ на символъ $a-b$ при $a<b$ (§ 24), т.-е. на символъ, не имѣющій смысла при пользованіи только числами ряда (N').

Дѣйствія надъ введенными такимъ образомъ отрицательными числами подчиняются тѣмъ же законамъ, какъ и дѣйствія надъ натуральными числами. Поэтому и слѣдствія этихъ законовъ остаются справедливыми. Отсюда мы заключаемъ, что всѣ равенства §§ 4, 8, 10, 15 и 16 остаются справедливыми и въ томъ случаѣ, когда подъ буквами, входящими въ нихъ, будемъ разумѣть произвольныя числа ряда (N''). При этомъ, конечно, отпадаютъ ограниченія годности нѣкоторыхъ изъ этихъ равенствъ, выраженныя неравенствами, и остаются лишь тѣ ограниченія, которыя относятся къ выполненію дѣленія.

ГЛАВА III.

Дробныя числа.

§ 31. **Пары второй ступени.** Умноженіе и обратное ему дѣйствіе, дѣленіе, называются дѣйствіями *второй ступени.*

Пользуясь числами ряда (N''), нельзя выполнить дѣленія числа a этого ряда на число b того же ряда въ двухъ случаяхъ: 1) когда $b = 0$; 2) когда при a и b, отличныхъ отъ нуля, $|a|$ не представляетъ суммы слагаемыхъ, равныхъ $|b|$.

Что касается до перваго случая, то мы ограничимся признаніемъ его невозможности, а для устраненія втораго сдѣлаемъ новое расширеніе понятія числа.

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ невозможность дѣленія зависитъ только отъ абсолютныхъ значеній данныхъ для дѣленія чиселъ, то въ дальнѣйшемъ будемъ разумѣть подъ буквами числа ряда (N'):

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (N')$$

Число a, являющееся суммой q слагаемыхъ равныхъ b $(a = bq)$, называется числомъ, *кратнымъ* b.

Если a не есть число кратное b, то дѣленіе $a:b$ выполнить съ помощію чиселъ ряда (N') нельзя.

Введемъ новыя числа въ видѣ паръ $[a, b]$, въ которыхъ a есть произвольное число ряда (N'), а b есть какое-нибудь число этого ряда, *отличное отъ нуля* $(b \neq o)$.

Эти пары назовемъ парами *второй ступени.*

Относительно чиселъ, изображаемыхъ этими парами, примемъ рядъ *опредѣленій.*

Опредѣленіе I. $[a, b]=[a', b']$, *если* $ab'=a'b$.

Наприм., $[3, 4]=[6, 8]$, потому что $3.8=6.4$.

Слѣдствіе 1. Если $[a, b]=[a', b']$ и $[a', b']=[a'', b'']$, то $[a, b]=[a'', b'']$.

Дѣйствительно, изъ условій находимъ:

$$ab'=a'b,\ a'b''=a''b'.$$

Отсюда черезъ почленное умноженіе получимъ равенство

$$aa'b'b''=a'a''bb',$$

изъ котораго заключаемъ (нерав. 17), что $ab''=a''b$ и, по опред. I, $[a, b]=[a'', b'']$.

Слѣдствіе 2. $[am, bm]=[a, b]$, такъ какъ $amb=abm$.

Это слѣдствіе позволяетъ *упрощать* пары второй ступени дѣленіемъ обоихъ элементовъ пары на ихъ общій дѣлитель и замѣнять пары съ различными элементами соотвѣтственно равными имъ парами, имѣющими одинаковые первые или вторые элементы.

Указанное упрощеніе будемъ называть *сокращеніемъ* паръ, а замѣну паръ, имѣющихъ различные первые и вторые элементы, парами, имъ соотвѣтственно равными и имѣющими одинаковые первые или вторые элементы, *приведеніемъ паръ къ одному первому или второму элементу.*

Напримѣръ, $[16, 32]=[1, 2]$; пары $[1, 2]$, $[2, 3]$ и $[3, 4]$ можно замѣнить соотвѣтственно парами $[6, 12]$, $[6, 9]$ и $[6, 8]$, имѣющими одинаковые первые элементы, или парами $[6, 12]$, $[8, 12]$ и $[9, 12]$, имѣющими одинаковые вторые элементы.

Опредѣленіе II. $[a, b]>[a', b']$, *если* $ab'>a'b$.

Слѣдствіе 1. $[a, b]>[a', b]$, *если* $a>a'$.

Слѣдствіе 2. $[a, b]>[a, b']$, *если* $b<b'$.

Слѣдствіе 3. Если $[a, b]>[a', b']$ и $[a', b']>[a'', b'']$, то $[a, b]>[a'', b'']$.

Дѣйствительно, изъ условій имѣемъ:

$$ab'>a'b;\ a'b''>a''b'.$$

Отсюда черезъ почленное умноженіе получаемъ неравенство (§ 15, слѣд. 7):

$$ab''.a'b'>a''b.a'b',$$

изъ котораго заключаемъ (нерав. 14), что

$$ab'' > a''b,$$

и, слѣд., $[a, b] > [a'', b'']$.

§ 32. **Сложеніе паръ второй ступени.** Такъ какъ данныя пары второй ступени можно привести къ одинаковому второму элементу, то достаточно дать опредѣленіе сложенія только для чиселъ, изображаемыхъ парами съ одинаковыми вторыми элементами.

Опредѣленіе III. *Сложить два числа* $[a, b]$ и $[a', b]$ *значить составить число* $[a + a', b]$, *которое называется суммою двухъ данныхъ.*

Это опредѣленіе выражается равенствомъ:

$$[a, b] + [a', b] = [a + a', b].$$

Для суммы трехъ, четырехъ и т. д. чиселъ, изображаемыхъ парами второй ступени, удерживаются опредѣленія § 3.

Не трудно убѣдиться, что дѣйствіе, устанавливаемое опредѣленіемъ III, обладаетъ всѣми свойствами сложенія, т.-е. всегда выполнимо, однозначно въ смыслѣ, указаннымъ въ § 22, *б.* и подчиняется законамъ ассоціативному, коммутативному и монотонности.

§ 33. **Вычитаніе паръ второй ступени** опредѣляется, какъ дѣйствіе, обратное сложенію. Вычесть изъ числа $[a, b]$ число $[a', b]$ значитъ найти такое число $[x, b]$, что

$$[a', b] + [x, b] = [a, b].$$

Этому условію удовлетворяетъ число $x = a - a'$.

Правило вычитанія выражается равенствомъ:

$$[a, b] - [a', b] = [a - a', b].$$

Такъ какъ для составленія паръ второй ступени мы пользуемся лишь числами ряда (N'), то вычитаніе пары $[a', b]$ изъ пары $[a, b]$ возможно лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда $a \geqslant a'$.

§ 34. **Умноженіе паръ второй ступени. Опредѣленіе IV.** *Умножить число* $[a, b]$ *на число* $[a', b']$ *значитъ составить число* $[aa', bb']$, *которое называется произведеніемъ числа* $[a, b]$ *на число* $[a', b']$ *и обозначается символомъ* $[a, b].[a', b']$, *такъ что*

$$[a, b].[a', b'] = [aa', bb'].$$

Для произведенія трехъ, четырехъ и т. д. чиселъ удерживаются опредѣленія § 9.

Дѣйствіе, устанавливаемое опредѣленіемъ IV, обладаетъ всѣми свойствами умноженія чиселъ ряда (N'), т.-е. оно всегда выполнимо, однозначно (§ 22, *б*) и подчиняется законамъ дистрибутивному, ассоціативному, коммутативному и монотонности. Въ этомъ можно убѣдиться простыми преобразованіями. Въ видѣ примѣра приведемъ преобразованія, показывающія справедливость дистрибутивнаго закона.

Нужно показать, что

$$([a, b] + [a' b]).[m, n] = [a, b].[m, n] + [a' b].[m, n] \ldots (\alpha)$$

По опредѣленіямъ III и IV для первой части этого равенства находимъ:

$$[a, b] + [a' b] = [a + a', b];$$
$$[a + a', b] . [m, n] = [(a + a') m, bn] = [am + a'm, bn].$$

По тѣмъ же опредѣленіямъ для второй части равенства (α) получимъ:

$$[a, b].[m, n] + [a', b].[m, n] = [am, bn] + [a'm, bn] =$$
$$= [am + a'm, bn].$$

Сравненіе чиселъ, полученныхъ для первой и второй части равенства (α), показываетъ справедливость этого равенства.

§ 35. **Дѣленіе паръ второй ступени** опредѣляется, какъ дѣйствіе, обратное умноженію. Раздѣлить число $[a, b]$ на число $[a', b']$, значитъ найти число $[x, y]$ такъ, чтобы

$$[a', b'].[x, y] = [a, b].$$

Это условіе на основаніи опредѣленій IV и I приводится къ слѣдующему:

$$a'x . b = a . b'y;$$

послѣднее же удовлетворяется при

$$x = ab', \ y = a'b.$$

Число $[ab', a'b]$ называется *частнымъ* отъ дѣленія числа $[a, b]$ на число $[a' b']$ и обозначается символомъ: $[a, b]:[a', b']$, такъ что

$$[a, b]:[a' b'] = [ab', a'b].$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что *дѣленіе чиселъ, изображаемыхъ парами второй ступени, выполнимо всегда за исключеніемъ случая* $a' = 0$ (§ 31).

§ 36. **Связь чиселъ** $[a, b]$ **съ числами ряда** *(N')*. Разсмотримъ числа вида $[a, 1]$. Прилагая къ нимъ опредѣленія I—IV, находимъ

$$\begin{aligned}
&[a, 1] = [a', 1], \text{ если } a = a';\\
&[a, 1] > [a', 1], \text{ если } a > a';\\
&[a, 1] \pm [a', 1] = [a \pm a', 1];\\
&[a, 1] \,.\, [a', 1] = [aa', 1].
\end{aligned}$$

Эти равенства показываютъ, что при сужденіи о равенствѣ или неравенствѣ чиселъ вида $[a, 1]$ и при выполненіи надъ ними сложенія, вычитанія и умноженія приходится имѣть дѣло только съ ихъ первыми элементами. Поэтому можно принять равенство $[a, 1] = a$, какъ новое опредѣленіе (ср. § 24).

Опредѣленіе V. $[a, 1] = a$.

По этому опредѣленію числа ряда *(N')* являются частнымъ случаемъ паръ второй ступени.

Слѣдствіе 1. $[a, b] . b = a$.

Дѣйствительно,

$$\begin{aligned}
[a, b] . b &= [a, b] . [b, 1] &&\text{(опред. V)}\\
&= [ab, b] &&\text{(опред. IV)}\\
&= [a, 1] &&\text{(опред. I, слѣд. 2)}\\
&= a. &&\text{(опред. V)}.
\end{aligned}$$

Это слѣдствіе показываетъ, что число $[a, b]$ есть не что иное, какъ *частное отъ дѣленія числа a на число b*, при чемъ на числа a и b налагается только *одно* условіе, а именно, что $b \neq 0$.

Слѣдствіе 2. $[1, 1] = 1$.

Слѣдствіе 3. $[a, b] . 1 = [a, b] . [1, 1] = [a, b]$ *(ср. первое изъ равенствъ. 13)*.

§ 37. **Дробныя числа.** Частное отъ дѣленія a на b обозначается символомъ a/b и называется *дробью* или *дробнымъ числомъ*. Натуральныя числа получаютъ названіе цѣлыхъ чиселъ.

Въ дроби a/b число a называется *числителемъ*, а число b — *знаменателемъ*.

При этомъ обозначеніи дроби опредѣленія и правила §§ 31—36 получаютъ слѣдующій видъ:

Опредѣленіе I. $a/b = a'/b'$, если $ab' = a'b$.

Слѣдствіе 1. Если $a/b = a'/b'$ и $a'/b' = a''/b''$, то $a/b = a''/b''$.
Слѣдствіе 2. $am/bm = a/b$.

Опредѣленіе II. $a/b > a'/b'$, если $ab' > a'b$.

Слѣдствіе 1. $a/b > a'/b$, если $a > a'$.
Слѣдствіе 2. $a/b > a/b'$, если $b < b'$.
Слѣдствіе 3. Если $a/b > a'/b'$ и $a'/b' > a''/b''$, то $a/b > a''/b''$.

Опредѣленіе III (сложенія). $a/b + a'/b = (a + a')/b$.

Правило вычитанія. $a/b - a'/b = (a - a')/b$, $(a \geqslant a')$.

Опредѣленіе IV (умноженія). $a/b \,.\, a'/b' = aa'/bb'$.

Правило дѣленія. $a/b : a'/b' = ab'/a'b$, $(a' \neq 0)$.

Опредѣленіе V. $a/1 = a$.

Слѣдствіе 1. $a/b \,.\, b = a$.
Слѣдствіе 2. $1/1 = 1$.
Слѣдствіе 3. $a/b \,.\, 1 = a/b$.

Установленныя выше дѣйствія надъ дробными числами подчиняются тѣмъ же основнымъ законамъ, которые имѣютъ мѣсто при дѣйствіяхъ надъ натуральными числами. Поэтому всѣ равенства §§ 4, 8, 10, 15, 16, какъ слѣдствія этихъ законовъ, остаются справедливыми и въ томъ случаѣ, когда подъ буквами, въ нихъ входящими, будемъ разумѣть произвольныя цѣлыя или дробныя числа.

Для того, чтобы выяснить конкретное значеніе дробныхъ чиселъ, достаточно замѣтить, что, по слѣдствію 1 опредѣленія V, сумма b слагаемыхъ, равныхъ a/b, равна a; поэтому дробь a/b есть *b-ая часть числа a.*

По опредѣленію умноженія (§ 34) имѣемъ:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{bn}.$$

Такъ какъ

$$\frac{a}{bn}\cdot n=\frac{a}{bn}+\frac{a}{bn}+\ldots+\frac{a}{bn}\ (n\ \text{слагаемыхъ})$$

$$=\frac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{n\ \text{слагаемыхъ}}}{bn}\ (\text{опред. III})$$

$$=\frac{an}{bn}=\frac{a}{b}\ (\text{опред. I, слѣд. 2}),$$

то a/bn есть *n-ая* часть числа a/b. Отсюда заключаемъ, что умноженіе числа на дробь $1/n$ равносильно нахожденію *n-ой* части этого числа.

Разсмотримъ умноженіе числа a/b на число m/n.

По опредѣленію умноженія (§ 34) находимъ:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{am}{bn}=\frac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{m\ \text{слагаемыхъ}}}{bn}=$$

$$=\overbrace{\frac{a}{bn}+\frac{a}{bn}+\ldots\frac{a}{bn}}^{m\ \text{слагаемыхъ}}\ (\text{дистриб. зак. при дѣленіи}).$$

Такъ какъ дробь a/bn представляетъ *n-ую* часть числа a/b, то дробь am/bn представляетъ *m. n-ыхъ* частей этого числа. Отсюда заключаемъ, что умноженіе числа на дробь m/n равносильно нахожденію m *n-ыхъ* частей этого числа.

Съ цѣлью устранить ограниченіе при выполненіи вычитанія дробей (§ 33) вводятся *отрицательныя* дробныя числа. Способъ ихъ введенія остается тотъ же, какой былъ употребленъ при введеніи цѣлыхъ отрицательныхъ чиселъ (глава II).

Способъ геометрическаго изображенія цѣлыхъ чиселъ (§§ 2, 29) легко распространить и на дробныя числа. Для этого достаточно замѣтить, что, по предыдущему, дробь a/b представляетъ a *b-хъ* частей *единицы*, такъ какъ (§ 34)

$$1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

Изображеніемъ числа a/b на оси абсциссъ служитъ точка, отстоящая отъ начала на a *b-ыхъ* частей единицы масштаба и лежащая *вправо* отъ него, если дробь a/b *положительна*, и *влѣво*, если эта дробь *отрицательна*.

§ 38. **Раціональныя числа.** Совокупность положительныхъ и отрицательныхъ (цѣлыхъ и дробныхъ) чиселъ и нуля составляетъ систему *раціональныхъ* чиселъ. Сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе (за исключеніемъ дѣленія на нуль) раціональныхъ чиселъ приводятъ къ раціональнымъ числамъ. Изображеніями раціональныхъ чиселъ являются точки оси абсциссъ; способъ ихъ построенія указанъ въ §§ 2, 29, 37; каждому числу соотвѣтствуетъ *одна* только точка оси; относительное положеніе ихъ одинаково съ положеніемъ раціональныхъ чиселъ, расположенныхъ въ рядъ въ порядкѣ ихъ возрастанія.

ГЛАВА IV.

Ирраціональныя числа.

§ 39. **Степень.** *Произведеніе n множителей, равныхъ числу a, называется n-й степенью числа a.*

n-я степень числа a обозначается символомъ a^n; натуральное число n называется *показателемъ* степени и указываетъ число *равныхъ* множителей въ произведеніи $aa\ldots a$.

Опредѣленіе степени распространяется и на тотъ случай, когда $n=1$, при чемъ подъ a^1 разумѣется самое число a.

Вторая степень числа называется его *квадратомъ*; третья степень числа—его *кубомъ*. Остальныя степени особыхъ названій не имѣютъ.

Вычисленіе n-ой степени числа называется *возведеніемъ этого числа въ n-ую степень*.

Возведеніе въ степень является *прямымъ дѣйствіемъ третьей ступени*. Изъ опредѣленія степени и правилъ умноженія раціональныхъ чиселъ (§§ 9, 19, 27, 34) вытекаютъ слѣдующія заключенія:

1) *возведеніе въ степень есть дѣйствіе, всегда возможное и однозначное;*

2) $0^n = 0$;

3) $1^n = 1$;

4) $a^n > 0$, если $a > 0$;

5) $a^{2n} > 0$ и $a^{2n+1} < 0$, если $a < 0$;

6) $|a^n| > |a|$, если $|a| > 1$, и $|a^n| < |a|$, если $|a| < 1$;

7) $(abc \ldots.)^n = a^n b^n c^n \ldots.$;
8) $(a/b)^n = a^n/b^n$; $\Big\}$ *(дистрибутивный законъ при возведеніи въ степень)*;

9) $a^m . a^n = a^{m+n}$ *(правило умноженія степеней одного числа)*;

10) $(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$ *(коммутативный законъ при возведеніи въ степень)*;

11) если $a > b > 0$, то $a^n > b^n$.

Во всѣхъ этихъ равенствахъ и неравенствахъ буквы a, b, c, ... обозначаютъ произвольныя *раціональныя* числа, а буквы m, n—*натуральныя* числа.

Изъ правила умноженія степеней одного числа (равен. 9) легко получить правило ихъ дѣленія. Дѣйствительно, если $m > n$, то $m - n$ есть натуральное число, и въ равенствѣ 9) число m можно замѣнить числомъ $m - n$. Сдѣлавъ это, получимъ равенство

$$a^{m-n} . a^n = a^{m-n+n} = a^m,$$

которое показываетъ, что a^{m-n} есть частное отъ дѣленія a^m на a^n (§§ 16, 28, 35).

Поэтому правило дѣленія степеней какого-нибудь числа a выражается равенствомъ:

12) $$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a \neq 0, \ m > n).$$

Въ случаѣ $m < n$ частное $a^m : a^n$ можетъ быть преобразовано слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} a^m : a^n &= 1 . a^m : a^n = 1 : a^n . a^m && \text{(равен. 27)} \\ &= 1 : (a^n : a^m) && \text{(равен. 31)} \\ &= 1 : a^{n-m} && \text{(равен. 12 § 39)} \\ &= 1 / a^{n-m} && \text{(§ 37).} \end{aligned}$$

Если $m = n$, то $a^m : a^n = 1$.

§ 40. Расширеніе понятія степени. Нулевая степень. Степени съ отрицательнымъ показателемъ. Правило дѣленія степеней нѣкотораго числа (равен. 12 § 39) можно освободить отъ ограниченій, зависящихъ отъ опредѣленія степени, посредствомъ введенія двухъ новыхъ символовъ: a^0 $(a \neq 0)$ и a^{-p}, гдѣ p есть натуральное число. Указанные символы вводятся посредствомъ слѣдующихъ *опредѣленій:*

$$a^0 = 1,\ a \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

$$a^{-p} = 1 / a^p,\ (p\text{—натуральное число}) \quad . \quad . \quad (35)$$

При этихъ опредѣленіяхъ, расширяющихъ понятіе степени введеніемъ нулевой и отрицательныхъ степеней, равенство (12) § 39 имѣетъ мѣсто для произвольныхъ натуральныхъ чиселъ m и n.

Пользуясь опредѣленіями (34) и (35), легко показать, что равенства 9) 12) и 10) предыдущаго параграфа остаются справедливыми и въ томъ случаѣ, когда подъ буквами m и n разумѣются произвольныя цѣлыя положительныя и отрицательныя числа или нуль, т.-е. что правила умноженія, дѣленія и возведенія въ степень, данныя для цѣлыхъ и положительныхъ степеней, сохраняются и для нулевой и отрицательныхъ степеней.

Для того, чтобы дать понятіе о пріемѣ, который употребляется для этой цѣли, покажемъ, что равенство 9) остается справедливымъ, если n есть отрицательное число.

Пусть $n = -n'$, гдѣ n' — натуральное число. Пользуясь опредѣленіемъ (35) находимъ: $a^n = 1/a^{n'}$; поэтому

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-n'} = a^m \cdot \frac{1}{a^{n'}} &= \\ &= a^m / a^{n'} \ (\S\ 37) \\ &= a^m : a^{n'} \\ &= a^{m-n'} \ (\S\ 39,\ \text{равен. } 11) \\ &= a^{m+(-n')} \ (\S\ 26,\ \text{прав. } 8,\ \text{слѣдст.}) \\ &= a^{m+n}, \end{aligned}$$

т.-е. равенство 9) справедливо для отрицательныхъ значеній n. Тѣмъ же способомъ устанавливается справедливость равенствъ

9), 12) и 10) для произвольныхъ цѣлыхъ (положительныхъ и отрицательныхъ) и нулевыхъ значеній буквъ m и n.

§ 41. **Соотношеніе между прямыми дѣйствіями трехъ ступеней.** Разсматривая первоначальныя опредѣленія произведенія (§ 9) и степени (§ 39), легко замѣтить, что возведеніе въ степень находится въ такомъ же отношеніи къ умноженію, какъ умноженіе къ сложенію.

Равенства 7), 8), 9) и 10) § 39 получаются соотвѣтственно изъ равенствъ

$(a+b+c+\dots).n = an+bn+cn+\dots$, (см. рав. 18)

$(a-b).n = an-bn$, (см. рав. 20)

$am+an = a\,(m+n)$ . . . . (см. рав. 18)

$an\,.\,m = am\,.\,n = a\,.\,mn$ (см. рав. 15 и 24)

черезъ замѣну сложенія умноженіемъ и умноженія возведеніемъ въ степень. Но при этой замѣнѣ слѣдуетъ помнить, что въ выраженіи a^n числа a и n не равноправны, т.-е. что $a^n \neq n^a$, и что поэтому въ произведеніяхъ, которыя встрѣчаются въ равенствахъ, написанныхъ выше, нужно различать множимое отъ множителя.

§ 42. **Корень.** Обратное дѣйствіе третьей ступени, т.-е. дѣйствіе, обратное возведенію въ *n-ую* степень (*n—натуральное* число) называется *извлеченіемъ n-го корня.*

Извлечь n-ый корень изъ числа a значитъ найти такое число, n-ая степень котораго равна a.

n-ый корень изъ числа a обозначается знакомъ $\sqrt[n]{a}$; n называется *показателемъ* корня, *a—подкореннымъ числомъ*; самый знакъ корня ($\sqrt{\ }$) есть испорченное латинское *r*, начальная буква слова: «*radix*», что значитъ *корень.*

1-й корень изъ числа a есть, очевидно, число a; поэтому простѣйшимъ корнемъ является 2-й корень, который называется *квадратнымъ.* Показатель 2 квадратнаго корня не пишется: $\sqrt{a}$ обозначаетъ квадратный корень изъ числа a.

3-й корень называется *кубическимъ* корнемъ. Корни съ высшими показателями особыхъ названій не имѣютъ (ср. § 39).

Подобно обратнымъ дѣйствіямъ первыхъ двухъ ступеней извлеченіе корня не всегда оказывается возможнымъ, т.-е. въ рядѣ раціональныхъ чиселъ не всегда можно найти число, представляющее корень съ *даннымъ* показателемъ изъ *даннаго* числа.

Напримѣръ, нѣтъ ни цѣлаго, ни дробнаго числа, квадратъ котораго равнялся бы 2 (§ 44); слѣд., нельзя при помощи раціональныхъ чиселъ извлечь квадратный корень изъ 2. Точно также нѣтъ числа, представляющаго $\sqrt{-1}$, потому что квадраты и положительныхъ, и отрицательныхъ чиселъ суть положительныя числа (§ 39, неравен. 4) и 5)).

Эти примѣры показываютъ, что при извлеченіи корня изъ раціональныхъ чиселъ невозможность выполненія дѣйствія зависитъ либо отъ абсолютнаго значенія подкоренного числа ($\sqrt{2}$), либо отъ его знака ($\sqrt{-1}$).

Для устраненія невозможности извлеченія корня, зависящей отъ абсолютнаго значенія подкоренного числа, вводятся *ирраціональныя* числа, а для устраненія невозможности, зависящей отъ знака подкоренного числа,—*комплексныя* числа.

§ 43. **Нѣкоторыя свойства раціональныхъ положительныхъ чиселъ.** Введеніе ирраціональныхъ чиселъ имѣетъ цѣлью, какъ было указано въ предыдущемъ §, устранить невозможность извлеченія корня въ томъ случаѣ, когда она зависитъ отъ абсолютнаго значенія даннаго числа. Поэтому при рѣшеніи задачи о новомъ расширеніи понятія числа достаточно пользоваться рядомъ, составленнымъ изъ нуля и положительныхъ чиселъ. Этотъ рядъ будемъ называть *областью* положительныхъ раціональныхъ чиселъ и обозначать его черезъ R.

Укажемъ нѣкоторыя простыя свойства чиселъ области R.
1-е *свойство. Въ области R нѣтъ наибольшаго числа,* т.-е. числа, бóльшаго всѣхъ другихъ чиселъ этой области.

Дѣйствительно, если a есть число области R, то и $a+1$ есть число той же области (§§ 3, 32).

Но $a+1>a$; слѣд., число a не можетъ быть наибольшимъ числомъ области R.

2-е *свойство. Между двумя числами a и b ($b>a$) области R находится безчисленное множество чиселъ той же области.*
Это видно изъ того, что числа

$$a+(b-a)/n,\ a+2(b-a)/n,\ \ldots,\ a+(n-1)(b-a)/n,$$

гдѣ n есть произвольное раціональное число, большее 1, заключены между a и b.

3-е *свойство. Если a есть число области R, отличное отъ нуля, и ε есть произвольное число этой области, ме́ньшее a, то въ области R существуетъ безчисленное множество чиселъ, отличающихся отъ a менѣе, чѣмъ на ε.*

Это слѣдуетъ изъ того, что въ области R существуютъ числа $a-\varepsilon$ и $a+\varepsilon$ (§§ 8, 33, 3, 32). Между числами $a-\varepsilon$ и a и между числами a и $a+\varepsilon$, по свойству 2, находится безчисленное множество раціональныхъ чиселъ. Ясно, что всѣ эти числа отличаются отъ числа a менѣе, чѣмъ на ε.

Изъ этого свойства слѣдуетъ, что *каждое раціональное число a, отличное отъ нуля, можно поставить между двумя числами съ произвольной разностью ε, при условіи, что $\varepsilon/2 < a$.*

Дѣйствительно,

$$a-\frac{1}{2}\varepsilon < a < a+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

4-е *свойство. Если a и b суть раціональныя числа, удовлетворяющія условіямъ $0 < a < b$, то можно найти такое натуральное число n, что $na > b$ и, слѣд., $b/n < a$.* Это предложеніе извѣстно подъ названіемъ *аксіомы Архимеда.*

§ 44. **Сѣченіе въ области** R. Кромѣ указанныхъ въ предыдущемъ § свойствъ, каждое раціональное число a, отличное отъ нуля, обладаетъ еще свойствомъ дѣлить числа этой области на *два* класса. Къ *первому* принадлежатъ всѣ числа, *ме́ньшія a*, а ко *второму* — всѣ числа, *бо́льшія a*. Число a можетъ быть отнесено и къ первому, и ко второму классу. Отнесемъ его къ первому классу.

Числа этихъ двухъ классовъ обладаютъ слѣдующими свойствами: a) *каждое число перваго класса меньше каждаго числа второго класса;*

b) *въ первомъ классѣ есть число наибольшее; это число есть a;*

c) *во второмъ классѣ нѣтъ числа наименьшаго*; дѣйствительно, если b_1 есть число второго класса, то $b_1 > a$ по свойству a).

Но въ такомъ случаѣ, существуетъ (§ 43, 2-е свойство) такое число b'_1, которое удовлетворяетъ неравенствамъ:

$$a < b'_1 < b_1;$$

это число b'_1 принадлежитъ ко второму классу, но оно меньше b_1; слѣд., число b_1 наименьшимъ быть не можетъ.

d) *Существуютъ числа, одно въ первомъ классѣ, другое во второмъ, разность между которыми меньше произвольно малаго числа* (§ 43, 3-е свойство).

Нуль дѣлитъ область R также на два класса: къ первому принадлежитъ только одно число нуль, а ко второму всѣ остальныя.

Распредѣленіе всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса такъ, чтобы каждое число перваго класса было меньше каждаго числа второго класса, называется *сѣченіемъ въ области раціональныхъ чиселъ* *).

Описанное выше сѣченіе области R числомъ a, которое является наибольшимъ числомъ перваго класса, называется *раціональнымъ* сѣченіемъ.

Возможны и такія сѣченія, при которыхъ въ первомъ классѣ не оказывается *наибольшаго* числа, а во второмъ классѣ— *наименьшаго* числа.

Разсмотримъ, въ видѣ примѣра, слѣдующее распредѣленіе раціональныхъ чиселъ на два класса: *къ первому классу отнесены всѣ числа, квадраты которыхъ меньше 2, а ко второму всѣ числа, квадраты которыхъ больше 2.*

При такомъ способѣ распредѣленія раціональныхъ чиселъ *каждое* изъ нихъ окажется или въ первомъ классѣ, или во второмъ. Это слѣдуетъ изъ того, что нѣтъ ни цѣлаго, ни дробнаго числа, квадратъ котораго равняется 2. Дѣйствительно, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, а квадраты слѣдующихъ цѣлыхъ чиселъ больше 4; поэтому нѣтъ цѣлаго числа, квадратъ котораго равенъ 2. Если бы существовала *несократимая* дробь m/n, квадратъ которой равнялся бы 2, то мы имѣли бы равенство

$$\frac{m^2}{n^2} = 2;$$

*) Названіе: *«сѣченіе»* (*Schnitt*) принадлежитъ *Dedekind'у*.

но это равенство невозможно, такъ какъ лѣвая часть его есть несократимая дробь, а правая—цѣлое число.

Числа двухъ классовъ обладаютъ слѣдующими свойствами:

a) *каждое число перваго класса меньше каждаго числа второго класса;*

b) *въ первомъ классѣ нѣтъ числа наибольшаго, а во второмъ классѣ нѣтъ числа наименьшаго;*

c) *есть пары чиселъ съ разностью, меньшей произвольнаго числа* ε, *изъ которыхъ одно принадлежитъ къ первому классу, а другое ко второму.*

Свойство a) есть слѣдствіе неравенства 11) § 39.

Разсмотримъ свойство b). Пусть a есть число перваго класса, такъ что $a^2 < 2$. Нужно показать, что въ первомъ классѣ есть числа *бóльшія* a. Для этого возьмемъ число $a + 1/n$ и покажемъ, что можно найти такое цѣлое число n, что

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Раскрывая скобки, находимъ

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Отсюда

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Такъ какъ $n \geqslant 1$, то $1/n^2 \leqslant 1/n$ (§ 39, 3, 6); поэтому

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} \text{ (равен. 5; § 37).}$$

Слѣд., неравенство (α) удовлетворится, если выбрать n такъ, чтобы

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 2 - a^2, \text{ или } \frac{2a+1}{n} < 2 - a^2,$$

а для этого достаточно взять $n > (2a+1)/(2 - a^2)$ (§ 43, свойство 4). При выполненіи послѣдняго условія число $a + 1/n$ окажется принадлежащимъ къ первому классу; а такъ какъ $a + 1/n > a$, то число a, т.-е. произвольное число перваго класса, не можетъ быть наибольшимъ въ этомъ классѣ.

Аналогично можно доказать, что во второмъ классѣ нѣтъ числа наименьшаго.

Свойство c) есть прямое слѣдствіе свойства b). Пусть a и b суть числа соотвѣтственно перваго и второго классовъ. Раздѣлимъ разность $b-a$ на n (n — цѣлое число) равныхъ частей и составимъ рядъ чиселъ:

$$a,\ a+\frac{b-a}{n},\ a+2\frac{b-a}{n},\ldots,a+k\frac{b-a}{n},\ a+(k+1)\frac{b-a}{n},\ldots,\ b,$$

гдѣ k есть цѣлое число, меньшее n.

Одна часть этихъ чиселъ принадлежитъ къ первому классу, другая—ко второму. Пусть первое изъ чиселъ этого ряда, принадлежащихъ ко второму классу, есть $a+(k+1)(b-a)/n$; въ такомъ случаѣ число $a+k(b-a)/n$ есть число перваго класса. Разность между ними равна $(b-a)/n$. Пользуясь произволомъ въ выборѣ цѣлаго числа n, можно взять его настолько большимъ, что бы указанная разность оказалась меньше произвольнаго числа ε.

Сѣченія въ области R, подобныя разсмотрѣнному, т.-е. обладающія тѣмъ свойствомъ, что *въ первомъ классѣ не существуетъ числа наибольшаго,* а во второмъ — *наименьшаго* называются *ирраціональными.*

Для обозначенія сѣченія будемъ пользоваться символомъ $(a \mid a')$, въ которомъ a обозначаетъ числа перваго класса и a' — числа второго класса.

§ **45. Соотвѣтствіе между числами и сѣченіями.** Между раціональными сѣченіями въ области R (§ 44) и раціональными числами можно установить соотвѣтствіе, назвавъ то сѣченіе, въ которомъ число a является либо *наибольшимъ* числомъ перваго класса, либо *наименьшимъ* числомъ второго класса, *соотвѣтствующимъ* числу a.

Каждое раціональное сѣченіе соотвѣтствуетъ *единственному* раціональному числу; зная сѣченіе, мы знаемъ и число. Поэтому можно сказать, что *раціональное сѣченіе опредѣляетъ раціональное число.* Напр., сѣченіе $(a \leqslant 2 \mid a' > 2)$ опредѣляетъ число 2.

Каждое раціональное число $a > 0$ соотвѣтствуетъ *двумъ* сѣченіямъ, отличающимся другъ отъ друга только тѣмъ, что въ одномъ изъ нихъ a служитъ *наибольшимъ* числомъ перваго класса, а въ другомъ—*наименьшимъ* числомъ второго класса.

Для удобства въ дальнѣйшемъ изложеніи условимся изъ этихъ двухъ сѣченій разсматривать только то, въ которомъ a является наибольшимъ числомъ перваго класса; этимъ условіемъ устраняются изъ разсмотрѣнія раціональныя сѣченія, въ которыхъ существуетъ наименьшее число второго класса.

Для ирраціональнаго сѣченія нѣтъ въ области R числа, ему соотвѣтствующаго въ указанномъ выше смыслѣ. Ирраціональное сѣченіе есть, по англійскому выраженію *), *empty section (пустое сѣченіе)*.

Понятіе числа расширяется введеніемъ новыхъ чиселъ, опредѣляемыхъ ирраціональными сѣченіями. Эти новыя числа называются *ирраціональными.*

Опредѣленіе ирраціональнаго числа сводится къ двумъ слѣдующимъ положеніямъ:

Каждое ирраціональное сѣченіе въ области R опредѣляетъ единственное ирраціональное число.

Каждому ирраціональному числу соотвѣтствуетъ единственное сѣченіе въ области R.

Опредѣлить ирраціональное число значитъ *указать способъ такого распредѣленія всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса, при которомъ имѣютъ мѣсто слѣдующія три свойства: 1) каждое число перваго класса меньше каждаго числа второго класса; 2) въ первомъ классѣ нѣтъ числа наибольшаго, а во второмъ нѣтъ числа наименьшаго; 3) существуютъ пары чиселъ съ разностью, меньшей произвольно малаго напередъ заданнаго числа, изъ которыхъ одно принадлежитъ къ первому классу, а другое ко второму.*

Сѣченіе $(a \mid a')$, гдѣ $a^2 < 2$, $a'^2 > 2$, разсмотрѣнное въ § 44, опредѣляетъ ирраціональное число, для обозначенія котораго пользуются символомъ $\sqrt{2}$. Слѣдуетъ замѣтить, что до опредѣленія дѣйствій надъ ирраціональными числами подъ этимъ

*) См. *Chrystal, Text-book of Algebra, part II, ch. XXV, § 31.*

символомъ нельзя разумѣть число, квадратъ котораго равенъ 2 (см. § 55).

Числа, опредѣляемыя сѣченіями, будемъ обозначать греческими буквами α, β, $\gamma, \ldots$ Если число α опредѣляется сѣченіемъ $(a \mid a')$, то мы будемъ писать: $\alpha = (a \mid a')$.

§ 46. **Равенство и неравенство чиселъ. Опредѣленіе I.** *Два числа $\alpha = (a \mid a')$ и $\beta = (b \mid b')$ называются равными, если первый и второй классъ сѣченія α совпадаютъ соотвѣтственно съ первымъ и вторымъ классомъ сѣченія β.*

Равенство чиселъ α и β обозначается такъ же, какъ и равенство раціональныхъ чиселъ: $\alpha = \beta$.

Слѣдствіе 1. *Если $\alpha = \beta$ и $\beta = \gamma$, то $\alpha = \gamma$.*

Слѣдствіе 2. *Не можетъ существовать равенства между раціональнымъ и ирраціональнымъ числами* (§ 45).

Опредѣленіе II. *Если существуетъ такое раціональное число, которое принадлежитъ къ первому классу сѣченія $(a \mid a')$ и ко второму классу сѣченія $(b \mid b')$, то число α, опредѣляемое первымъ сѣченіемъ, называется бо́льшимъ числа β, опредѣляемаго вторымъ сѣченіемъ, а число β—меньшимъ числа α. Знаками эти соотношенія между числами α и β выражаются такъ:*

$$\alpha > \beta; \ \beta < \alpha.$$

Слѣдствіе 1. *Ирраціональное число $\alpha = (a \mid a')$ больше каждаго изъ чиселъ перваго класса и меньше каждаго изъ чиселъ второго класса: $a < \alpha < a'$.*

Слѣдствіе 2. *Если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$ то $\alpha > \gamma$.*

§ 47. **Сложеніе. Опредѣленіе III.** *Сложить два числа $\alpha = (a \mid a')$ и $\beta = (b \mid b')$ значитъ составить такое новое число, называемое ихъ суммою и обозначаемое символомъ $\alpha + \beta$, которое больше суммы каждыхъ двухъ раціональныхъ чиселъ, соотвѣтственно меньшихъ α и β, и меньше суммы каждыхъ двухъ раціональныхъ чиселъ, соотвѣтственно большихъ α и β.*

Покажемъ, что дѣйствіе, опредѣленное такимъ образомъ, всегда возможно и однозначно.

Распредѣлимъ раціональныя числа на два класса, отнеся къ первому классу числа $c \leqslant a + b$ и ко второму — числа $c' \geqslant a' + b'$.

При такомъ распредѣленіи числа перваго и второго классовъ обладаютъ всѣми свойствами, указанными въ концѣ § 45.

1) Каждое изъ чиселъ c перваго класса меньше каждаго изъ чиселъ c' второго класса, такъ какъ $a < a'$ и $b < b'$.

2) Въ первомъ классѣ, если по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ α и β ирраціонально, нѣтъ числа наибольшаго.

Дѣйствительно, допустимъ, что число α ирраціонально, т.-е. между числами a нѣтъ наибольшаго. Число $c = a + b$ перваго класса не можетъ быть наибольшимъ, потому что существуетъ число $a_1 > a$ въ первомъ классѣ сѣченія α и число $a_1 + b > a + b$ въ первомъ классѣ разсматриваемаго новаго сѣченія.

Подобнымъ же разсужденіемъ можно убѣдиться въ томъ, что во второмъ классѣ этого сѣченія нѣтъ числа наименьшаго.

3) Разность между числомъ $a' + b'$ второго класса и числомъ $a + b$ перваго класса можетъ быть сдѣлана меньше произвольнаго малаго числа ε. Дѣйствительно,

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b).$$

Можно (§ 45) взять числа a', a, b', b такъ, чтобы

$$a' - a < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ и } b' - b < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

При такомъ выборѣ указанныхъ чиселъ разность $(a' + b') - (a + b)$ окажется меньше ε.

Докажемъ, наконецъ, что при разсматриваемомъ распредѣленіи раціональныхъ чиселъ на два класса можетъ оказаться *только одно* раціональное число, не нашедшее себѣ мѣста ни въ первомъ, ни во второмъ классѣ.

Замѣтимъ, прежде всего, что раціональное число r, котораго при указанномъ распредѣленіи нельзя отнести ни къ первому, ни ко второму классу, должно удовлетворять неравенствамъ:

$$a + b < r < a' + b'.$$

Пусть существуютъ два такихъ числа: r и r' $(r' > r)$.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ неравенства

$$a + b < r < r' < a' + b',$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что

$$(a'+b')-(a+b)>r'-r,$$

т.-е. разность $(a'+b')-(a+b)$ должна быть *больше* опредѣленнаго числа $r'-r$. Этотъ выводъ противорѣчитъ свойству 3) чиселъ $a+b$ и $a'+b'$. Поэтому мы должны признать возможнымъ существованіе *только одного* раціональнаго числа r, не попадающаго ни въ первый, ни во второй классъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что указаннымъ способомъ распредѣляются на два класса либо всѣ раціональныя числа, либо всѣ за исключеніемъ *одного* числа r. Въ первомъ случаѣ мы имѣемъ ирраціональное сѣченіе $(a+b\,|\,a'+b')$, опредѣляющее *единственное* ирраціональное число γ. Во второмъ случаѣ число r отнесемъ, въ качествѣ наибольшаго, къ первому классу и получимъ раціональное сѣченіе, опредѣляющее число r (§ 45).

Итакъ, всегда существуетъ единственное число γ, раціональное или ирраціональное, которое въ опредѣленіи III названо суммой чиселъ α и β.

Для суммы трехъ, четырехъ и т. д. чиселъ удерживаются опредѣленія § 3.

§ 48. **Свойства суммы.** 1. $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$.

2. *Ассоціативный законъ:* $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

Если $\alpha=(a\,|\,a')$, $\beta=(b\,|\,b')$, $\gamma=(c\,|\,c')$, то, по опредѣленію III,
$\alpha+\beta=(a+b\,|\,a'+b')$; $(\alpha+\beta)+\gamma=\big((a+b)+c\,|\,(a'+b')+c'\big)$;
$\beta+\gamma=(b+c\,|\,b'+c)$; $\alpha+(\beta+\gamma)=\big(a+(b+c)\,|\,a'+(b+c')\big)$.

Но сумма раціональныхъ чиселъ обладаетъ свойствомъ ассоціативности (§§ 5, 32). Поэтому

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$
$$(a'+b')+c'=a'+(b'+c').$$

Отсюда на основаніи опредѣленія равенства (§ 46, опред. I) заключаемъ, что

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

3. *Коммутативный законъ:* $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

Дѣйствительно:

$$\alpha+\beta=(a+b\mid a'+b');$$
$$\beta+\alpha=(b+a\mid b'+a').$$

Но $a+b=b+a$, $a'+b'=b'+a'$ по коммутативному закону при сложеніи раціональныхъ чиселъ (§§ 6, 32). Слѣд. (§ 46, опред. I) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

4. *Законъ монотонности.* $\alpha+\beta>\gamma+\beta$, *если* $\alpha>\gamma$.

Дѣйствительно, если $\alpha>\gamma$, то можно найти такія раціональныя числа a и c', что $\alpha>a>c'>\gamma$ (§ 46, опред. II).

Кромѣ того можно (§ 45) найти такія два раціональныхъ числа b и b', что $b<\beta<b'$ и $b'-b<a-c'$, или $a+b>b'+c'$.

Но, по опредѣленію суммы, $\alpha+\beta>a+b$ и $\gamma+\beta<c'+b'$; слѣд., $\alpha+\beta>a+b>b'+c'>\gamma+\beta$ и $\alpha+\beta>\gamma+\beta$.

§ 49. **Вычитаніе.** Вычитаніе чиселъ, опредѣляемыхъ сѣченіями, опредѣляется, какъ дѣйствіе обратное сложенію. *Вычесть изъ числа* $\alpha=(a\mid a')$ *число* $\beta=(b\mid b')$ *значитъ найти такое число* γ, *что* $\beta+\gamma=\alpha$.

При пользованіи положительными раціональными числами и нулемъ опредѣленіе числа γ возможно лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда $\alpha\geqslant\beta$.

Дѣйствительно, если $\alpha<\beta$, то $\alpha<\beta+\gamma$, гдѣ $\gamma\geqslant 0$ (§ 48, свойство 4 и 1). Слѣд., нѣтъ числа γ, удовлетворяющаго равенству: $\alpha=\beta+\gamma$.

Если $\alpha=\beta$, то $\gamma=0$ (§ 48, свойство 1).

Разсмотримъ случай, когда $\alpha>\beta$.

Распредѣлимъ раціональныя числа на два класса, отнеся числа $c\leqslant a-b'$ ($a\geqslant b'$, § 46, опред. II) къ первому классу и числа $c'\geqslant a'-b$ ко второму классу.

Не трудно убѣдиться, что при такомъ распредѣленіи числа перваго и второго классовъ обладаютъ слѣдующими свойствами:

1) *каждое число перваго класса меньше каждаго числа второго класса;*

2) *въ первомъ классѣ нѣтъ числа наибольшаго, а во второмъ— наименьшаго;*

3) *разность* $c'-c$ *надлежащимъ выборомъ чиселъ* c *и* c' *можно сдѣлать меньше произвольнаго числа.*

Изъ послѣдняго свойства вытекаетъ заключеніе, что можетъ существовать *только одно* раціональное число, которое при указанномъ распредѣленіи не попадетъ ни въ первый, ни во второй классъ. Если такое число существуетъ, мы причислимъ его къ первому классу въ качествѣ числа наибольшаго (сравн. § 47).

Такимъ образомъ указанное распредѣленіе раціональныхъ чиселъ опредѣляетъ сѣченіе $(c \mid c')$, раціональное или ирраціональное, которому соотвѣтствуетъ единственное число γ.

Остается показать, что $\beta + \gamma = \alpha$.

Такъ какъ $\beta = (b \mid b')$ и $\gamma = (c \mid c') = (a - b' \mid a' - b)$, то (§ 47), $\beta + \gamma = (b + c \mid b' + c') = (b + a - b' \mid b' + a' - b)$.

Кромѣ того (§ 46, опред. II, слѣд. 1)

$$b + a - b' < \beta + \gamma < b' + a' - b;$$
$$a < \alpha < a'.$$

Но $b + a - b' = a - (b' - b) < a$; $b' + a' - b = a' + (b' - b) > a'$; слѣд. всѣ числа, ме́ньшія $\beta + \gamma$, меньше α и всѣ числа, бо́льшія $\beta + \gamma$, больше α, т.-е., по опредѣленію I § 46, $\alpha = \beta + \gamma$.

Число γ называется *разностью* чиселъ α и β и обозначается символомъ $\alpha - \beta$, такъ что $\gamma = \alpha - \beta$.

§ 50. **Умноженіе. Опредѣленіе IV.** *Умножить число $\alpha = (a \mid a')$ на число $\beta = (b \mid b')$ значитъ составить такое число, называемое произведеніемъ α на β и обозначаемое символомъ $\alpha . \beta$ или $\alpha\beta$, которое больше произведенія каждыхъ двухъ раціональныхъ чиселъ, соотвѣтственно меньшихъ α и β, и меньше произведенія каждыхъ двухъ раціональныхъ чиселъ, соотвѣтственно бо́льшихъ чиселъ α и β.*

Покажемъ, что дѣйствіе, опредѣленное такимъ образомъ, всегда возможно и однозначно.

Распредѣлимъ раціональныя числа на два класса, отнеся къ первому классу числа $c \leqslant ab$ и ко второму числа $c' \geqslant a'b'$.

При такомъ распредѣленіи числа перваго и второго классовъ обладаютъ слѣдующими свойствами:

1) *каждое число перваго класса меньше каждаго числа второго класса;*

2) *въ первомъ классѣ нѣтъ числа наибольшаго, а во второмъ— наименьшаго;*

3) *разность $c'-c$ между парой чиселъ, изъ которыхъ одно принадлежитъ къ первому классу, а другое ко второму, можетъ быть сдѣлана меньше любого даннаго числа.*

Первыя два свойства обнаруживаются безъ затрудненій. Остановимся на третьемъ свойствѣ.

Если $c'=a'b'$ и $c=ab$, то $c'-c=a'b'-ab$. Обозначивъ разности $a'-a$ и $b'-b$ соотвѣтственно черезъ h и k, находимъ:

$$c'-c=(a+h)(b+k)-ab=ak+bh+hk.$$

Полагая $h>k$ и замѣнивъ во-второй части этого равенства k черезъ h, получимъ неравенство

$$c'-c<h(a+b+h),$$

которое усилится, если въ суммѣ $a+b+h$ каждое слагаемое замѣнимъ наибольшимъ изъ нихъ. Пусть наибольшее изъ трехъ чиселъ a, b и h есть a. Въ такомъ случаѣ

$$c'-c<h\,.\,3a.$$

Пользуясь тѣмъ, что разность h чиселъ a' и a можно сдѣлать меньше произвольнаго числа, положимъ $h<\varepsilon/3a$, гдѣ ε есть произвольное малое число. При такомъ выборѣ h получимъ: $c'-c<\varepsilon$.

Случай $c'>a'b'$ и $c<ab$ легко привести къ предыдущему, замѣтивъ, что число $a_1'=c'/b'>a'$ принадлежитъ ко второму классу въ сѣченіи $(a\,|\,a')$; поэтому $c'=c'/b'.b'=a_1'.b'$. Точно также вмѣсто неравенства $c<ab$ можно взять равенство $c=a_1\,b$, гдѣ число $a_1=c/b$ принадлежитъ къ первому классу сѣченія $(a\,|\,a')$.

Изъ свойства 3 слѣдуетъ, что при разсматриваемомъ распредѣленіи *только одно* раціональное число можетъ не найти себѣ мѣста ни въ первомъ, ни во второмъ классѣ (ср. §§ 47, 49).

Если такое число существуетъ, мы отнесемъ его къ первому классу въ качествѣ наибольшаго.

Такимъ образомъ получается сѣченіе $(ab \mid a'b')$, опредѣляющее *единственное* число γ, раціональное или ирраціональное, удовлетворяющее неравенствамъ:

$$ab < \gamma < a'b'.$$

Слѣд., дѣйствіе, устанавливаемое опредѣленіемъ IV, всегда возможно и однозначно; число $\gamma = (ab \mid a'b')$ есть произведеніе числа α на число β: $\gamma = \alpha\beta$.

Для произведенія трехъ, четырехъ, и т. д. чиселъ удерживаются опредѣленія § 9.

§ 51. **Свойства произведенія.** 1. $\alpha . 0 = 0 . \alpha = 0$.

2. Такъ какъ произведеніе чиселъ, данныхъ сѣченіями, опредѣляется произведеніями раціональныхъ чиселъ, то всѣ законы, имѣющіе мѣсто при умноженіи раціональныхъ чиселъ, остаются справедливыми и при умноженіи ирраціональныхъ чиселъ.

Эти законы выражаются слѣдующими равенствами и неравенствами, (см. §§ 10, 15):

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \\ \alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \\ (\alpha-\beta).\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma, \ \alpha > \beta\end{array}\right\} \text{(\textit{дистрибутивный законъ});}$$

$(\alpha\beta).\gamma = \alpha.(\beta\gamma)$ (*ассоціативный законъ*);

$\alpha\beta = \beta\alpha$ (*коммутативный законъ*);

$\alpha\beta > \gamma\beta$, если $\alpha > \gamma > 0$, $\beta > 0$ (*законъ монотонности*).

3. $\alpha . 1 = 1 . \alpha = \alpha$.

4. *Произведеніе нѣсколькихъ чиселъ равно нулю только въ томъ случаѣ, когда по крайней мѣрѣ одно изъ нихъ равно нулю.*

§ 52. **Обратное число.** Пусть число $\alpha > 0$ опредѣляется сѣченіемъ $(a \mid a')$. Составимъ числа $1/a$ и $1/a'$, называемыя числами *обратными* соотвѣтственно раціональныхъ чиселъ a и a'.

Распредѣлимъ раціональныя числа на два класса, отнеся къ первому числа $1/a'$ и ко второму числа $1/a$. При этомъ распредѣленіи каждое число перваго класса меньше каждаго числа второго класса (§ 37, опред. II, слѣд. 2); въ первомъ классѣ нѣтъ числа наибольшаго, а во-второмъ нѣтъ числа наименьшаго, такъ какъ нѣтъ наименьшаго и наибольшаго чиселъ соотвѣтственно во второмъ и первомъ классахъ сѣченія

$(a \mid a')$; разность $1/a - 1/a'$ можетъ быть сдѣлана меньше произвольно малаго числа, потому что этимъ свойствомъ обладаетъ разность $a' - a$. Слѣд. (§ 45) мы имѣемъ сѣченіе $(1/a' \mid 1/a)$. Число, опредѣляемое этимъ сѣченіемъ, называется *обратнымъ* числомъ числа α и обозначается символомъ $1/\alpha$.

Произведеніе числа α на обратное число $1/\alpha$ равно 1.

Дѣйствительно, по опредѣленію умноженія (§ 50) имѣемъ:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = \left(\frac{a}{a'} \middle| \frac{a'}{a}\right).$$

Въ первомъ классѣ сѣченія $(a/a' \mid a'/a)$ находятся числа, мéньшія 1, а во-второмъ—бóльшія 1. Слѣд. (§§ 44, 45), это сѣченіе опредѣляетъ число 1.

Символъ $1/\alpha$ въ случаѣ $\alpha = 0$ не имѣетъ смысла.

§ 53. **Дѣленіе.** Дѣленіе опредѣляется, какъ дѣйствіе, обратное умноженію (§ 16): по даннымъ числамъ α и $\beta > 0$ требуется найти третье число γ такъ, чтобы $\alpha = \beta\gamma$.

Докажемъ, что при $\beta > 0$ существуетъ одно число, удовлетворяющее этому требованію.

По свойству умноженія имѣемъ равенство:

$$\left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right) \cdot \beta = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot \beta\right).$$

Но $1/\beta . \beta = 1$ (§ 52); слѣд.

$$\left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right) \cdot \beta = \alpha.$$

Равенство $\alpha = \beta\gamma$ удовлетворяется, если положимъ $\gamma = \alpha . 1/\beta$. По закону монотонности при умноженіи не существуетъ другого числа, удовлетворяющаго этому равенству.

Число γ называется частнымъ отъ дѣленія α (дѣлимое) на β (дѣлитель) и обозначается символомъ $\alpha : \beta$ или символомъ α/β. Эти символы не имѣютъ смысла при $\beta = 0$, т.-е. дѣленіе на нуль невозможно.

§ 54. **Возведеніе въ степень**. Для чиселъ, опредѣляемыхъ сѣченіями, удерживается опредѣленіе степени, данное для раціональныхъ чиселъ. Такъ какъ возведеніе въ степень съ цѣлымъ и положительнымъ показателемъ есть частный случай умноженія, а умноженіе ирраціональныхъ чиселъ подчиняется тѣмъ же законамъ, которые имѣютъ мѣсто при умноженіи раціональныхъ чиселъ, то все, сказанное о степеняхъ раціональныхъ чиселъ, а также и о расширеніи понятія степени (§§ 39—41), относится и къ степенямъ ирраціональныхъ чиселъ.

§ 55. **Извлеченіе корня**. *Извлечь n-ый корень изъ числа α ($\alpha > 0$) значитъ найти такое число β, что $\beta^n = \alpha$ (n—натуральное число).*

Рѣшеніе этой задачи приводитъ, вообще, къ ирраціональнымъ числамъ.

Пусть $\alpha = (a \mid a')$. Для того, чтобы доказать существованіе *единственнаго* числа β, удовлетворяющаго равенству $\beta^n = \alpha$, распредѣлимъ раціональныя числа на два класса, отнеся къ первому числа b, *n-ая* степень которыхъ меньше α ($b^n < \alpha$), а ко второму числа b', *n-ая* степень которыхъ больше α ($b'^n > \alpha$).

При указанномъ распредѣленіи числа перваго и второго классовъ обладаютъ слѣдующими свойствами:

1) *каждое число перваго класса меньше каждаго числа второго класса;*

2) *въ первомъ классѣ нѣтъ числа наибольшаго, а во второмъ нѣтъ числа наименьшаго;*

3) *разность $b' - b$ между парой чиселъ, изъ которыхъ одно принадлежитъ къ первому классу, а другое ко второму, можетъ быть сдѣлана меньше любого даннаго числа.*

Первое свойство есть слѣдствіе неравенства 11) § 39.

Для того, чтобы обнаружить второе свойство, установимъ сначала два неравенства.

Пусть $d > 0$. Существуютъ слѣдующія неравенства:

$$(1 + d)^n > 1 + nd; \quad \ldots\ldots \quad (\pi)$$
$$(1 + d)^n < 1 + nd(1 + d)^n \quad \ldots\ldots \quad (\rho)$$

Неравенство (π) справедливо для $n = 2$. Допустимъ, что оно справедливо для нѣкотораго натуральнаго числа n, и докажемъ, что въ такомъ случаѣ оно справедливо и для числа $n + 1$. Умноживъ обѣ части неравенства (π) на число $1 + d$, находимъ:

$$(1 + d)^{n+1} > (1 + nd)(1 + d)$$

или

$$(1+d)^{n+1} > 1 + (n+1)d + nd^2.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$(1+d)^{n+1} > 1 + (n+1)d.$$

Но это есть не что иное, какъ неравенство (π) для числа $n+1$. Слѣд., неравенство (π), справедливое для $n=2$, справедливо для $n=3$ и вообще для произвольнаго натуральнаго числа $n \geqslant 2$. Тѣмъ же способомъ легко убѣдиться въ справедливости неравенства:

$$(1-d)^n > 1 - nd \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\pi')$$

при условіяхъ, что $0 < d < 1$. Неравенство (π') получается изъ неравенства (π) замѣною d черезъ $-d$ и присоединеніемъ условія $d < 1$.

Неравенство (ρ) справедливо для $n=1$. Допустимъ, что оно справедливо для нѣкотораго натуральнаго числа n, и докажемъ, что въ такомъ случаѣ оно справедливо и для числа $n+1$. Умноживъ обѣ части неравенства (ρ) на $1+d$, находимъ:

$$(1+d)^{n+1} < (1+d) + nd(1+d)^{n+1}.$$

Но $(1+d) + nd(1+d)^{n+1} = 1 + d[1 + n(1+d)^{n+1}]$. Такъ какъ $1+d > 1$, то $(1+d)^{n+1} > 1$; поэтому $1 + n(1+d)^{n+1} < (1+d)^{n+1} + n(1+d)^{n+1}$ или $1 + n(1+d)^{n+1} < (n+1)(1+d)^{n+1}$. Изъ этого слѣдуетъ, что

$$(1+d) + nd(1+d)^{n+1} < 1 + (n+1)d(1+d)^{n+1}$$

и

$$(1+d)^{n+1} < 1 + (n+1)d(1+d)^{n+1}.$$

Но это неравенство есть не что иное, какъ неравенство (ρ) для числа $n+1$. Слѣд., неравенство (ρ), справедливое для $n=1$, справедливо для $n=2$ и вообще для произвольнаго натуральнаго числа.

Изъ неравенства (ρ) слѣдуетъ, что

$$(1+d)^n - nd(1+d)^n < 1$$

или

$$(1+d)^n(1-nd) < 1;$$

отсюда находимъ:

$$(1+d)^n < \frac{1}{1-nd}, \text{ если } nd < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\sigma)$$

Обратимся теперь ко второму свойству чиселъ перваго и второго классовъ въ разсматриваемомъ распредѣленіи.

Пусть b есть одно изъ чиселъ перваго класса, такъ что $b^n < a$. Докажемъ, что можно найти такое положительное раціональное число h, что $b+h$, бóльшее b, окажется числомъ перваго класса. Для этого нужно, чтобы

$$(b+h)^n < a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\tau)$$

Но $(b+h)^n = [b(1+h/b)]^n = b^n(1+h/b)^n$. По неравенству (σ)

$$(1+h/b)^n < 1/(1-nh/b).$$

Поэтому неравенство (τ) удовлетворится, если выбрать h такъ, чтобы удовлетворилось неравенство:

$$b^n/(1-nh/b) < a.$$

Изъ этого неравенства получаемъ послѣдовательно слѣдующія:

$$a(1-nh/b) > b^n;$$
$$a - anh/b > b^n;$$
$$anh/b < a - b^n;$$
$$h < \frac{(a-b^n)b}{na}.$$

Итакъ, взявъ за h число, удовлетворяющее послѣднему неравенству, мы получимъ число $b+h > b$, принадлежащее въ разсматриваемомъ распредѣленіи къ первому классу; слѣд., b не можетъ быть наибольшимъ числомъ этого класса, т.-е. наибольшаго числа въ этомъ классѣ нѣтъ.

Пусть b' есть одно изъ чиселъ второго класса. Докажемъ, что можно найти такое положительное раціональное число h', мéньшее b' $(0 < h' < b')$, что число $b' - h'$ окажется принадлежащимъ въ разсматриваемомъ распредѣленіи раціональныхъ чиселъ къ второму классу. Для этого нужно, чтобы

$$(b'-h')^n > a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\upsilon)$$

Но $(b'-h')^n = b^{n'}(1-h'/b')^n$. По неравенству (π') имѣемъ

$$(1-h'/b')^n > 1 - nh'/b'.$$

Поэтому неравенство (α) удовлетворится, если выберемъ h' такъ, чтобы удовлетворилось неравенство

$$b'^n(1 - nh'/b') > a.$$

Изъ этого неравенства выводимъ послѣдовательно слѣдующія:

$$b'^n - nh'b'^{n-1} > a;$$
$$nh'b'^{n-1} < b'^n - a;$$
$$h' < (b'^n - a)/nb'^{n-1}.$$

Итакъ, взявъ за h' число, удовлетворяющее послѣднему неравенству, мы получимъ число $b' - h' < b'$, принадлежащее въ разсматриваемомъ распредѣленіи раціональныхъ чиселъ ко второму классу; слѣд., b' не можетъ быть наименьшимъ числомъ этого класса, т.-е. наименьшаго числа въ этомъ классѣ нѣтъ. Третье свойство обнаруживается способомъ, указаннымъ въ § 44 при разсмотрѣніи сѣченія $(a \mid a')$, въ которомъ $a^2 < 2$ и $a'^2 > 2$.

При указанномъ распредѣленіи или *всѣ* раціональныя числа находятъ себѣ мѣсто въ первомъ или во-второмъ классѣ, или всѣ кромѣ *одного* (ср. §§ 47, 49, 50). Въ послѣднемъ случаѣ отнесемъ это раціональное число къ первому классу въ качествѣ наибольшаго.

Такимъ образомъ получается раціональное или ирраціональное сѣченіе $(b \mid b')$, въ которомъ $b^n < a$ и $b'^n > a$. Это сѣченіе опредѣляетъ *единственное* раціональное или ирраціональное положительное число β.

Докажемъ, что $\beta^n = a$.

По опредѣленію степени имѣемъ

$$\beta^n = (b_1\ b_2 \ldots b_n \mid b'_1\ b'_2 \ldots b'_n),$$

гдѣ b и b' съ индексами обозначаютъ числа соотвѣтственно перваго и второго классовъ въ сѣченіи $(b \mid b')$. Если b есть наибольшее изъ чиселъ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и b' наименьшее изъ чиселъ $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$, то

$$b_1\ b_2 \ldots b_n \leqslant b^n; \quad b'_1\ b'_2 \ldots b'_n \geqslant b'^n.$$

Такъ какъ по способу распредѣленія чиселъ на классы

$$b^n < a \text{ и } b'^n > a,$$

то всѣ числа, меньшія β^n, меньше a и всѣ числа, большія β^n, больше a. Слѣд. (§ 46, опред. I)

$$\beta^n = a,$$

т.-е. число β есть n-ый корень изъ числа a: $\beta = \sqrt[n]{a}$.

Сѣченіе $(a \mid a')$, въ которомъ $a^2 < 2$ и $a'^2 > 2$, опредѣляетъ число $\sqrt{2}$, квадратъ котораго равенъ 2 (см. §§ 44 и 45).

§ 56. **Отрицательныя ирраціональныя числа.** Введеніемъ ирраціональныхъ чиселъ расширяется область положительныхъ чиселъ. Систему чиселъ, состоящую изъ нуля и раціональныхъ и ирраціональныхъ положительныхъ чиселъ, будемъ называть областью положительныхъ чиселъ и обозначать ее черезъ R'.

Дѣйствія надъ числами области R' опредѣлены такъ, что законы дѣйствій для чиселъ областей R и R' одинаковы. Постоянство законовъ дѣйствій позволяетъ устранить указанное въ § 49 ограниченіе при вычитаніи тѣмъ же путемъ, какимъ это ограниченіе было устранено для чиселъ области R, т.-е. введеніемъ ирраціональныхъ *отрицательныхъ* чиселъ (гл. II; § 37).

Отрицательныя ирраціональныя числа обладаютъ всѣми свойствами отрицательныхъ раціональныхъ чиселъ (§§ 26, 27, 28, 39).

Подъ $(2n+1)$-ымъ *(нечетнымъ)* корнемъ изъ отрицательнаго числа $-a$ разумѣется число $-\sqrt[2n+1]{a}$, такъ какъ (§ 39, нерав. 5 и § 55).

$$\left(-\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1} = -a.$$

Числа, выражающаго *четный* корень изъ отрицательнаго числа $-a$, въ области R' не существуетъ (§ 39, неравен. 5).

§ 57. **Геометрическое изображеніе ирраціональныхъ чиселъ.** Подобно раціональнымъ числамъ (§§ 2, 29, 37) ирраціональныя числа можно изображать графически. Изображеніемъ ирраціональнаго числа a служитъ точка, дѣлящая ось абсциссъ на двѣ части такъ, что *налѣво* отъ нея лежатъ изображенія всѣхъ раціональныхъ чиселъ, меньшихъ a, а *направо*— изображенія всѣхъ раціональныхъ чиселъ, большихъ a.

Существованіе точки, соотвѣтствующей ирраціональному числу α, равно какъ и существованіе числа, соотвѣтствующаго данной точкѣ оси, принимается за аксіому (аксіома Кантора).

§ 58. **Приближенныя значенія числа.** Пусть дано число $\alpha = (a \mid a')$. Возьмемъ произвольное положительное число ε и составимъ рядъ чиселъ

$$0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon, \ldots, k\varepsilon,\ (k+1)\varepsilon, \ldots$$

кратныхъ ε (k — натуральное число).

Написанный рядъ чиселъ представляетъ, по аксіомѣ Архимеда (§ 43), рядъ неограниченно возрастающихъ чиселъ. Поэтому, начиная съ извѣстнаго мѣста, числа этого ряда принадлежатъ ко второму классу въ сѣченіи α.

Пусть $k\varepsilon$ есть послѣднее изъ написанныхъ чиселъ, принадлежащее къ первому классу сѣченія α, и, слѣд., $(k+1)\,\varepsilon$ — первое изъ этихъ чиселъ, принадлежащее ко второму классу. По опредѣленію неравенства между числами (§ 46) имѣемъ:

$$k\varepsilon < \alpha < (k+1)\varepsilon.$$

Число α оказывается, такимъ образомъ, заключеннымъ между двумя раціональными числами $k\varepsilon$ и $(k+1)\varepsilon$, разность которыхъ есть произвольное число ε.

Числа $k\varepsilon$ и $(k+1)\varepsilon$ называются *приближенными значеніями числа α съ точностью до ε*, первое—*съ недостаткомъ,* а второе—*съ избыткомъ.*

Примѣръ. $\sqrt[3]{2}$ опредѣляется сѣченіемъ $(a \mid a')$, въ которомъ $a^3 < 2$ и $a'^3 > 2$. Чтобы опредѣлить приближенныя значенія этого числа съ точностью до 0,1, составляемъ рядъ чиселъ:

$$0;\ 0{,}1;\ \ldots;\ 1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3; \ldots$$

Такъ какъ $(1{,}2)^3 = 1{,}728 < 2$ и $(1{,}3)^3 = 2{,}197 > 2$, то искомыя приближенныя значенія суть 1,2 и 1,3.

§ 59. **Извлеченіе корней изъ произведенія, частнаго и степени.** Въ § 55 было доказано, что существуетъ *единственное положительное* число β, представляющее n-ый корень изъ *положительнаго* числа α. Изъ этого предложенія вытекаютъ правила извлеченія корней изъ произведенія, частнаго и степеней положительныхъ чиселъ.

Пусть α, β,... суть положительныя числа; n—натуральное число; $\sqrt[n]{\alpha}$ обозначаетъ единственное положительное число, удовлетворяющее равенству: $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$.

1. *n-ый корень изъ произведенія чиселъ α, β, γ,... равенъ произведенію n-ыхъ корней изъ этихъ чиселъ:*

$$\sqrt[n]{\alpha\beta\gamma\ldots} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} \cdot \sqrt[n]{\gamma} \ldots \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

2. *n-ый корень изъ частнаго чиселъ α и β равенъ частному n-ыхъ корней изъ чиселъ α и β:*

$$\sqrt[n]{\alpha/\beta} = \sqrt[n]{\alpha} / \sqrt[n]{\beta} \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

3. *Если m есть число кратное n, т.-е. если $m = np$, гдѣ p есть натуральное число, то*

$$\sqrt[n]{\alpha^m} = \alpha^p \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Пріемъ, употребляемый для того, чтобы показать справедливость равенствъ (36), (37) и (38), одинъ и тотъ же, поэтому достаточно разсмотрѣть одно изъ этихъ равенствъ.

Докажемъ справедливость равенства (37). По опредѣленію корня имѣемъ:

$$(\sqrt[n]{\alpha/\beta})^n = \alpha/\beta.$$

Съ другой стороны

$$(\sqrt[n]{\alpha} / \sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{\alpha})^n / (\sqrt[n]{\beta})^n \qquad \text{(§ 39, рав. 8)}$$
$$= \alpha/\beta \qquad \text{(по опред. корня).}$$

Слѣд., лѣвая и правая части равенства суть положительныя числа, представляющія *n-ый* корень изъ α/β. А такъ какъ существуетъ только одно положительное число, выражающее *n-ый* корень изъ положительнаго числа (§ 55), то числа $\sqrt[n]{\alpha/\beta}$ и $\sqrt[n]{\alpha} / \sqrt[n]{\beta}$ равны, т.-е. равенство (37) справедливо.

Слѣдствіе. На основаніи равенствъ (36), (37) и (38) можно выносить изъ-подъ знака корня и вносить подъ знакъ корня раціональные множители. Наприм.,

$$\sqrt{243}=\sqrt{81.3}=\sqrt{81}.\sqrt{3}=9\sqrt{3};$$
$$\sqrt{3/4}=\sqrt{3}/\sqrt{4}=\sqrt{3}/2=\frac{1}{2}\sqrt{3};$$
$$\sqrt[3]{\frac{2}{9}}=\sqrt[3]{\frac{2.3}{9.3}}=\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{6};$$
$$2\sqrt{3}=\sqrt{4}\,.\sqrt{3}=\sqrt{12}.$$

§ 60. **Дѣйствія надъ корнями.** 1. *Произведеніе корней съ одинаковыми показателями равно корню съ тѣмъ же показателемъ изъ произведенія подкоренныхъ чиселъ* (см. равен. 36).

2. *Для возведенія корня въ степень достаточно возвести въ эту степень подкоренное число:*

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Это предложеніе есть слѣдствіе предыдущаго.

3. *Частное корней съ одинаковыми показателями равно корню съ тѣмъ же показателемъ изъ частнаго подкоренныхъ чиселъ* (см. равен. 37).

4. *m-ый корень изъ n-аго корня изъ числа a равенъ mn-ому корню изъ этого числа:*

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Дѣйствительно,

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n \quad (\text{§ 39, равен. 10})$$
$$=(\sqrt[n]{a})^n=a \quad (\text{по опред. корня}).$$

Съ другой стороны

$$(\sqrt[mn]{a})^{mn}=a \text{ (по опред. корня)}.$$

Эти два равенства показываютъ, что числа, стоящія въ лѣвой и правой части равенства (40), представляютъ mn-ый корень изъ a.

Слѣд. (§ 55), они равны, и равенство (40) справедливо.

§ 61. **Основное свойство корня.** Изъ равенствъ (39) и (40) слѣдуетъ, что

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}. \quad (41)$$

гдѣ n и p натуральныя числа. Дѣйствительно,

$$\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^p}} \qquad \text{(равен. 40)}$$
$$=\sqrt[n]{a} \qquad \text{(равен. 39).}$$

Равенство (41) выражаетъ основное свойство корня, заключающееся въ томъ, что *значеніе его не измѣняется отъ умноженія или дѣленія показателей корня и подкоренного числа на одно и то же натуральное число.* Относительно дѣленія нужно замѣтить, что здѣсь разумѣется дѣленіе *безъ остатка.*

На этомъ свойствѣ корня основаны *сокращеніе корней и приведеніе корней къ одному показателю.*

Подъ сокращеніемъ корней разумѣется упрощеніе, состоящее въ дѣленіи показателя корня и подкоренного числа на ихъ общій дѣлитель. Наприм., $\sqrt[12]{a^8}=\sqrt[3]{a^2}$.

Приведеніе корней къ одному показателю состоитъ въ замѣнѣ данныхъ корней съ различными показателями соотвѣтственно равными имъ корнями съ однимъ показателемъ. Напр., корни $\sqrt{a}$ и $\sqrt[3]{a}$ можно замѣнить соотвѣтственно корнями: $\sqrt[6]{a^3}$ и $\sqrt[6]{a^2}$.

Указанныя преобразованія корней аналогичны сокращенію дробей и приведенію дробей къ одному знаменателю.

Приведеніе корней къ одному показателю даетъ возможность при помощи равенствъ (36) и (37) установить правило для умноженія и дѣленія корней съ различными показателями. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\sqrt[n]{\alpha}\cdot\sqrt[m]{\beta}=\sqrt[nm]{\alpha^m}\cdot\sqrt[nm]{\beta^n}=\sqrt[nm]{\alpha^m\cdot\beta^n};$$
$$\sqrt[n]{\alpha}\,/\,\sqrt[m]{\beta}=\sqrt[nm]{\alpha^m}\,/\,\sqrt[nm]{\beta^n}=\sqrt[nm]{\alpha^m/\beta^n}.$$

§ 62. **Степени съ дробными показателями.** Правило извлеченія корня изъ степени (равен. 38) можно освободить отъ ограниченія, вытекающаго изъ первоначальнаго понятія о степени, введеніемъ для обозначенія $\sqrt[q]{a^p}$ символа $a^{p/q}$:

$$a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p} \qquad \dots \quad (42)$$

Въ этомъ равенствѣ, выражающемъ *опредѣленіе* степени съ дробнымъ показателемъ, a есть произвольное положительное число или нуль, q—натуральное число, p—натуральное число или нуль. Въ тѣхъ случаяхъ, когда дробь p/q приводится къ цѣлому числу или нулю, опредѣленіе (42) не противорѣчитъ установленному ранѣе понятію корня (§ 42 и равен. 34).

Въ самомъ дѣлѣ, если $p=q$, то $a^{p/q}=\sqrt[1]{a^1}=a$ (§§ 60 и 42); если $q=1$, то $a^{p/q}=\sqrt[1]{a^p}=a^p$ (§ 42); если $p=0$, то $a^{p/q}=$ $=\sqrt[q]{a^0}=1$ (рав. 34). Кромѣ того, вводимый опредѣленіемъ (42) символъ $a^{p/q}$ сохраняетъ одно и то же значеніе при замѣнѣ дроби p/q равными ей дробями. Докажемъ, что

$$a^{p/q}=a^{p'/q'}, \text{ если } p/q=p'/q'.$$

По равенствамъ (42) и (41) имѣемъ:

$$a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[qq']{a^{pq'}};$$
$$a^{p'/q'}=\sqrt[q']{a^{p'}}=\sqrt[qq']{a^{p'q}}.$$

Но изъ равенства $p/q=p'/q'$ слѣдуетъ, что $pq'=p'q$ (§ 37); слѣд.,

$$\sqrt[qq']{a^{pq'}}=\sqrt[qq']{a^{p'q}} \text{ или } a^{p/q}=a^{p'/q'}, \text{ если } p/q=p'/q'.$$

Правила дѣйствій надъ степенями съ дробными показателями остаются тѣ же, какія установлены для степеней съ цѣлыми показателями (§ 39). Приведемъ преобразованія, которыя это обнаруживаютъ.

Умноженіе. $a^{p/q}\,.\,a^{p'/q'}=\sqrt[q]{a^p}\,.\,\sqrt[q']{a^{p'}}$ (по равен. 42)

$=\sqrt[qq']{a^{pq'}}\,.\,\sqrt[qq']{a^{p'q}}$ (по равен. 41)

$=\sqrt[qq']{a^{pq'+p'q}}$ (§§ 60, 39, 54)

$=a^{(pq'+p'q)/qq'}$ (по равен. 42)

$=a^{p/q+p'/q'}$ (§ 37)

Слѣд., равенство (§ 39, рав. 9 и § 54)

$$a^m\,.\,a^n=a^{m+n}$$

справедливо для дробныхъ значеній m и n.

Дѣленіе. $a^{p/q} : a^{p'/q'} = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[q']{a^{p'}}$ (по равен. 42)

$= \sqrt[qq']{a^{pq'}} : \sqrt[qq']{a^{p'q}}$ (по равен. 41)

$= \sqrt[qq']{a^{pq'-p'q}}$ (§§ 60, 39, 54)

$= a^{(pq'-p'q)/qq'}$ (по равен. 42)

$= a^{p/q - p'/q'}$ (§ 37)

Условимся распространять опредѣленіе (35) на дробныя значенія p, т.-е. примемъ, что

$$a^{-p/q} = 1/a^{p/q}.$$

Сдѣланныя выше вычисленія для преобразованія частнаго степеней съ дробными показателями обнаруживаютъ, что равенство (§ 39, равен. 12, § 54)

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

справедливо и для дробныхъ значеній m и n.

Возведеніе въ степень. $(a^{p/q})^{p'/q'} =$

$= \sqrt[q']{(\sqrt[q]{a^p})^{p'}}$ (по равен. 42)

$= \sqrt[q']{\sqrt[q]{a^{pp'}}}$ (по равен. 39)

$= \sqrt[qq']{a^{pp'}}$ (по равен. 40)

$= a^{pp'/qq'}$ (по равен. 42)

$= a^{p/q \cdot p'/q'}$ (§ 37).

Эти преобразованія показываютъ, что равенство (§ 39, рав. 10 и § 54)

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

справедливо и для дробныхъ значеній m и n.

ГЛАВА V.

Комплексныя числа.

§ 63. **Вещественныя числа**. Нуль, положительныя и отрицательныя (раціональныя и ирраціональныя) числа называются *вещественными* или *дѣйствительными* числами.

Въ области вещественныхъ чиселъ возможны дѣйствія трехъ ступеней за слѣдующими исключеніями: невозможно дѣленіе на *нуль* и невозможно извлеченіе четнаго корня изъ отрицательнаго числа (§§ 53, 55).

Всѣ дѣйствія *однозначны*, кромѣ извлеченія *четнаго* корня изъ положительнаго числа, такъ какъ при $a > 0$, равенству $b^{2n} = a$, гдѣ n натуральное число, можно удовлетворить *двумя* числами:

$$b = +\sqrt[2n]{a} \text{ и } b = -\sqrt[2n]{a} \text{ (§§ 39 и 55).}$$

Для устраненія невозможности извлеченія четнаго корня изъ отрицательнаго числа понятіе числа расширяется введеніемъ новыхъ чиселъ, которыя получили названіе *комплексныхъ*. Введеніе ихъ можно сдѣлать при помощи метода *паръ*, которымъ мы уже пользовались при введеніи отрицательныхъ и дробныхъ чиселъ.

§ 64. **Пары третьей ступени**. Совокупность двухъ вещественныхъ чиселъ a и b, взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ, будемъ называть *парой третьей ступени* и обозначать временно символомъ $\{a, b\}$. Разсматривая эти пары, какъ числа, установимъ опредѣленія ихъ равенства и основныхъ дѣйствій надъ ними.

Опредѣленіе I. $\{a, b\} = \{a', b'\}$, *если* $a = a'$, $a = b'$.

Слѣдствіе. *Если* $\{a, b\} = \{a', b'\}$ и $\{a', b'\} = \{a'', b''\}$, то $\{a, b\} = \{a'', b''\}$.

Опредѣленіе II. *Сложить два числа* $\{a, b\}$ и $\{a', b'\}$ *значитъ составить число* $\{a + a', b + b'\}$, *называемое ихъ суммой и обозначаемое символомъ* $\{a, b\} + \{a', b'\}$:

$$\{a, b\} + \{a', b'\} = \{a + a', b + b'\}.$$

Для суммы трехъ, четырехъ и т. д. чиселъ удерживаются опредѣленія § 3.

Не трудно убѣдиться, что дѣйствіе, устанавливаемое опредѣленіемъ II и приводящееся къ сложенію вещественныхъ чиселъ, обладаетъ свойствами сложенія вещественныхъ чиселъ, т.-е. оно всегда возможно, однозначно и подчиняется законамъ *ассоціативному* и *коммутативному* (см. § 22). О законѣ монотонности здѣсь не можетъ быть рѣчи потому, что понятія: «больше» и «меньше» для новыхъ чиселъ не установлены.

Вычитаніе опредѣляется, какъ дѣйствіе, обратное сложенію. Вычесть число $\{a', b'\}$ изъ числа $\{a, b\}$ значитъ найти число $\{x, y\}$, удовлетворяющее условію:

$$\{a', b'\} + \{x, y\} = \{a, b\}.$$

Преобразуя по опредѣленію суммы первую часть этого равенства, находимъ:

$$\{a' + x, b' + y\} = \{a, b\}.$$

Отсюда по опредѣленію I заключаемъ, что $a' + x = a$, $b' + y = b$ и что $x = a - a'$, $y = b - b'$. Результатъ вычитанія числа $\{a', b'\}$ изъ числа $\{a, b\}$ называется *разностью* чиселъ $\{a, b\}$ и $\{a', b'\}$ и обозначается символомъ $\{a, b\} - \{a', b'\}$, такъ что .

$$\{a, b\} - \{a', b'\} = \{a - a', b - b'\}.$$

Вычитаніе новыхъ чиселъ всегда возможно и однозначно.

§ 65. **Умноженіе паръ третьей ступени. Опредѣленіе III** *). *Умножить число* $\{a, b\}$ *на число* $\{a', b'\}$ *значитъ составить число* $\{aa' - bb', ab' + ba'\}$, *которое называется произведеніемъ этихъ чиселъ и обозначается символомъ* $\{a, b\} . \{a', b'\}$, *такъ что*

$$\{a, b\} . \{a', b'\} \doteq \{aa' - bb', ab' + ba'\}.$$

---

*) Опредѣленіе умноженія кажется, на первый взглядъ, сложнымъ и искусственнымъ. Его происхожденіе и цѣлесообразность выясняются послѣ введенія числа i и перехода къ новому обозначенію комплекснаго числа (§§ 69 и 70).

Подробности о томъ пути, который привелъ къ указанному опредѣленію, можно найти въ «Ариѳметикѣ» Фербера (стр. 375 и слѣд.).

Для произведенія трехъ, четырехъ и т. д. чиселъ удерживаются опредѣленія § 9.

Дѣйствіе, устанавливаемое опредѣленіемъ III, всегда возможно, однозначно и подчиняется законамъ *дистрибутивному*, *ассоціативному* и *коммутативному* (§ 10). Разсужденія и преобразованія, приводящія къ этому заключенію, весьма просты. Въ видѣ примѣра обнаружимъ существованіе дистрибутивнаго закона при умноженіи паръ третьей ступени.

Нужно показать, что

$$[\{a, b\}+\{a', b'\}].\{a'', b''\}=\{a, b\}.\{a'', b''\}+\{a', b'\}.\{a'', b''\} \ldots . (\alpha)$$

Преобразуемъ лѣвую часть этого равенства:

$$[\{a, b\}+\{a', b'\}].\{a'', b''\}=\{a+a', b+b'\}.\{a'', b''\} \text{ (по опред. II)}$$
$$=\{(a+a')a''-(b+b')b'', (a+a')b''+(b+b')a''\} \text{ (по опред. III)}$$
$$=\{aa''+a'a''-bb''-b'b'', ab''+a'b''+ba''+b'a''\}.$$

Преобразуемъ теперь правую часть:

$$\{a, b\}.\{a'', b''\}+\{a', b'\}.\{a'', b''\}=\{aa''-bb'', ab''+ba''\}+$$
$$+\{a'a''-b'b'', a'b''+b'a''\} \text{ (по опред. III)}$$
$$=\{aa''-bb''+a'a''-b'b'', ab''+ba''+a'b''+b'a''\} \text{ (по опред. II)}.$$

Сравнивая результаты преобразованій и пользуясь опредѣленіемъ I, заключаемъ, что равенство (α) справедливо.

§ 66. **Дѣленіе паръ третьей ступени.** Дѣленіе опредѣляется, какъ дѣйствіе, обратное умноженію. Раздѣлить число $\{a, b\}$ на число $\{a', b'\}$ значитъ найти число $\{x, y\}$, удовлетворяющее условію:

$$\{a', b'\}\cdot\{x, y\}=\{a, b\}.$$

Преобразуя по опредѣленію III первую часть этого равенства, находимъ:

$$\{a'x-b'y, a'y+b'x\}=\{a, b\}.$$

Отсюда по опредѣленію I имѣемъ систему уравненій

$$a'x-b'y=a, \quad a'y+b'x=b.$$

Рѣшивъ ее, получимъ для x и y слѣдующія значенія:

$$x=(aa'+bb')/(a'^2+b'^2); \quad y=(a'b-ab')/(a'^2+b'^2).$$

Изъ этихъ формулъ видно, что опредѣленіе чиселъ x и y возможно всегда, за исключеніемъ случая, когда $a'^2+b'^2=0$ (§ 53), т.-е. когда $a'=b'=0$.

Результатъ дѣленія числа $\{a,\ b\}$ на число $\{a',\ b'\}$ называется *частнымъ* и обозначается символомъ $\{a,\ b\}:\{a',\ b'\}$ или символомъ $\{a,\ b\}/\{a',\ b'\}$. Такимъ образомъ правило дѣленія чиселъ, изображаемыхъ парами третьей ступени, при условіи, что по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ a' и b' отлично отъ нуля, выражается равенствомъ:

$$\{a,\ b\}/\{a',\ b'\}=\{(aa'+bb')/(a'^2+b'^2),\ (a'b-ab')/(a'^2+b'^2)\}.$$

§ 67. **Дѣйствія третьей ступени.** Для возведенія въ степень чиселъ вида $\{a,\ b\}$ и для извлеченія изъ нихъ корней удерживаются опредѣленія и обозначенія, указанныя въ §§ 39, 40, 42, 62.

§ 68. **Пары вида** $\{a,\ 0\}$. Приложимъ указанныя выше опредѣленія и правила къ числамъ вида $\{a,\ 0\}$.

$\{a,\ 0\}=\{a',\ 0\}$, если $a=a'$ по опред. I;
$\{a,\ 0\}+\{a',\ 0\}=\{a+a',\ 0\}$ по опред. II;
$\{a,\ 0\}-\{a',\ 0\}=\{a-a',\ 0\}$ по правилу вычитанія;
$\{a,\ 0\}\ .\ \{a',\ 0\}=\{aa',\ 0\}$ по опред. III;
$\{a, 0\}/\{a', 0\}=\{a/a', 0\}$ при условіи $a'\neq 0$ по правилу дѣленія.

Изъ этихъ формулъ видно, что при рѣшеніи вопроса о равенствѣ паръ вида $\{a,\ 0\}$ приходится обращать вниманіе только на первые элементы паръ, а при выполненіи 4 дѣйствій надъ ними производить соотвѣтственныя дѣйствія только надъ первыми элементами. Это обстоятельство позволяетъ разсматривать вещественныя числа, какъ частный случай чиселъ, изображаемыхъ парами третьей ступени, принявъ

опредѣленіе IV: $\{a,\ 0\}=a$.

Слѣдствіе 1. $\{a,\ b\}=c$, если $a=c$ и $b=0$ (опред. IV и I).
Слѣдствіе 2. $\{a,\ b\}=0$, если $a=0$ и $b=0$ (опред. IV и I).
Слѣдствіе 3. $\{a,\ b\}+\{-a, -b\}=0$ (опред. II и IV).
Слѣдствіе 4. $\{a,\ b\}.c=\{ac,\ bc\}$ (опред. IV и III).

Слѣдствіе 5. $\{a, b\} = \{a, 0\} + \{0, b\}$ (опред. II)
$= \{1,0\}.a + \{0,1\}.b$ (опред. IV, слѣд. 4)
$= a + \{0,1\}.b$ (опред. IV).

§ 69. **Число** i. Послѣднее слѣдствіе, указанное въ предыдущемъ §, позволяетъ разсматривать число $\{a, b\}$, какъ сумму вещественнаго числа a съ произведеніемъ новаго числа $\{0,1\}$, которое обозначается буквой i на вещественное число b:

$$\{a, b\} = a + ib; \quad i = \{0,1\}.$$

Съ цѣлью выяснить значеніе числа i разсмотримъ квадратъ его:

$$i^2 = ii = \{0,1\}.\{0,1\} = \{-1,0\} \text{ (по опредѣл. III)}$$
$$= -1. \quad \text{(по опред. IV).}$$

Итакъ, i есть то число, квадратъ котораго равенъ -1, или i есть квадратный корень изъ -1: $i = \sqrt{-1}$.

Число i называется *мнимой единицей* *).

Изъ опредѣленій IV и III слѣдуетъ, что

$$i.0 = 0.i = 0; \quad i.1 = 1.i = i.$$

Произведеніе i на -1 обозначается черезъ $-i$.

Принимая во вниманіе ассоціативность умноженія, легко вычислить третью и четвертую степени числа i:

$$i^3 = i.i.i = i^2.i = -1.i = -i;$$
$$i^4 = i.i.i.i = i^3.i = -i.i = -i^2 = +1.$$

Итакъ, $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$. $i^4 = +1$. Изъ этихъ формулъ легко вывести слѣдующія заключенія о степеняхъ числа i:

$$i^{4k} = 1, \; i^{4k+1} = i; \; i^{4k+2} = -1; \; i^{4k+3} = -i \,.\,.\,. \quad (43)$$

гдѣ k обозначаетъ *натуральное число* или *нуль*.

§ 70. **Комплексныя числа.** Числа вида $a + ib$, гдѣ a и b произвольныя вещественныя числа, а $i = \sqrt{-1}$, называются *комплексными* числами; число a называется его вещественной или дѣйствительной частью, число ib — его мнимой частью, а

*) i есть начальная буква французскаго слова *imaginaire* (мнимый).

число b — коэффиціентомъ мнимой части. Вещественныя числа представляютъ частный случай комплексныхъ при $b=0$; числа вида ib, гдѣ b вещественное число, называются *мнимыми* числами и представляютъ частный случай комплексныхъ при $a=0$.

Опредѣленія равенства комплексныхъ чиселъ и правила дѣйствій надъ ними, данныя въ §§ 64, 65 и 66, представляются въ слѣдующемъ видѣ:

Опредѣленіе I. $a+ib=a'+ib'$, если $a=a'$, $b=b'$.

Опредѣленіе II (*сложенія*). $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+$ $+i(b+b')$.

Правило вычитанія. $(a+ib)-(a'+ib')=(a-a')+i(b-b')$.

Опредѣленіе III (*умноженія*) *). $(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+$ $+i(ab'+a'b)$.

Правило дѣленія. $(a+ib)/(a'+ib')=(aa'+bb')/(a'^2+b'^2)+$ $+i(a'b-ab')/(a'^2+b'^2)$, при условіи, что по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ a' и b' не равно нулю.

Изъ этого правила слѣдуетъ, что невозможно дѣленіе на *нуль* (опред. IV, слѣд. 2).

§ 71. **Модуль комплекснаго числа.** Модулемъ комплекснаго числа $a+ib$ называется число $+\sqrt{a^2+b^2}$. Для обозначенія его употребляется символъ $|a+ib|$:

$$|a+ib|=+\sqrt{a^2+b^2}. \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

Модуль вещественнаго числа равенъ его абсолютному значенію (§§ 70, 26).

Модуль комплекснаго числа $a+ib$ равенъ нулю только въ томъ случаѣ, когда $a=b=0$, т.-е. когда это число равно нулю (опред. IV, слѣд. 2).

§ 72. **Сопряженныя комплексныя числа.** Два числа $a+ib$ и $a-ib$, отличающіяся только знаками мнимыхъ частей, на-

*) Эта формула, въ связи съ формулой $i^2=-1$, показываетъ, что при опредѣленіи III (§ 65) умноженіе комплексныхъ чиселъ производится такъ же, какъ и умноженіе многочленовъ. Указанное обстоятельство объясняетъ происхожденіе опредѣленія III (ср. примѣч. § 65).

зываются *сопряженными. Модули сопряженныхъ чиселъ равны,* такъ какъ

$$+\sqrt{a^2+b^2}=+\sqrt{a^2+(-b)^2}.$$

Сумма двухъ сопряженныхъ чиселъ равна ихъ удвоенной вещественной части:

$$(a+ib)+(a-ib)=2a.$$

Произведенiе двухъ сопряженныхъ чиселъ равно квадрату ихъ модуля:

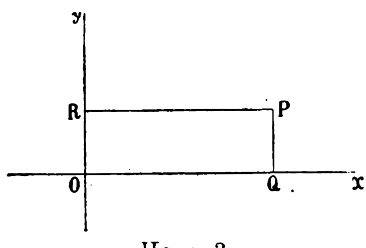
$$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2. \text{*)}$$

Въ связи съ послѣднимъ свойствомъ пары сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ слѣдуетъ замѣтить, что правило дѣленiя, приведенное въ §§ 66 и 70, есть не что иное, какъ результатъ слѣдующаго преобразованiя:

$$\frac{a+ib}{a'+ib'}=\frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')}=(a+ib)(a'-ib')/(a'^2+b'^2).$$

§ 73. **Прямоугольныя координаты точки на плоскости.** Вещественныя числа изображаются, какъ мы видѣли (§§ 2, 29, 37, 57), точками прямой, называемой *осью абсциссъ*. Для того, чтобы можно было изображать геометрически комплексныя числа, нужно установить соотвѣтствiе между парой вещественныхъ чиселъ, которыя служатъ элементами комплекснаго числа, и нѣкоторымъ геометрическимъ образомъ. Для этого разсмотримъ вопросъ объ опредѣленiи положенiя точки *на плоскости*.

Возьмемъ на плоскости двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя *(оси)*, пересѣкающiяся въ точкѣ O (черт. 3). На каждой изъ нихъ укажемъ то направленiе, которое принимается за *положительное*. Пусть эти направленiя суть Ox и Oy. Отрѣзки, откладываемые въ этихъ направленiяхъ какъ на самыхъ осяхъ, такъ и на прямыхъ, имъ па-



Черт. 3.

*) Число a^2+b^2 называется *нормой* числа $a+ib$.

раллельныхъ, принимаются за *положительные,* а откладываемые въ противоположныхъ направленіяхъ—за *отрицательные.*

Чтобы опредѣлить положеніе точки P плоскости, опустимъ изъ нея перпендикуляры PQ и PR соотвѣтственно на оси Ox и Oy. Отрѣзокъ RP есть разстояніе *отъ* оси Oy *до* точки P, а отрѣзокъ QP — разстояніе *отъ* оси Ox *до* точки P. Измѣривъ эти отрѣзки опредѣленной единицей длины и приписавъ къ результатамъ надлежащіе знаки, мы получимъ *пару* чиселъ, соотвѣтствующихъ точкѣ P. Эта пара чиселъ называется *координатами* точки P. Число, выражающее мѣру отрѣзка RP, параллельнаго оси Ox, называется *абсциссой,* а число, выражающее мѣру отрѣзка QP, параллельнаго оси Oy, — *ординатой* точки P. Оси Ox и Oy называются осями *координатъ,* точка O ихъ пересѣченія — *началомъ координатъ.* Абсцисса и ордината точки обозначаются соотвѣтственно буквами x и y. Ось Ox называется осью *x-овъ* или *абсциссъ,* Oy — осью *y-овъ* или *ординатъ.*

Точка P съ координатами $x = a$ и $y = b$ обозначается символомъ $P(a, b)$.

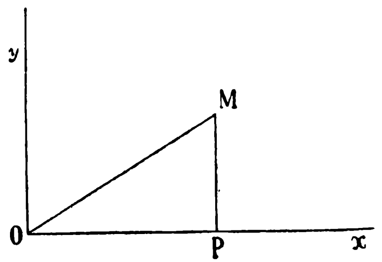
Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что каждой точкѣ плоскости соотвѣтствуетъ *единственная* пара чиселъ. Справедливо и обратное: *каждой парѣ чиселъ соотвѣтствуетъ единственная точка плоскости.* Если данная пара есть a, b, при чемъ a обозначаетъ *абсциссу* и b — *ординату,* то точка, ей соотвѣтствующая, лежитъ на пересѣченіи двухъ прямыхъ, изъ которыхъ одна параллельна оси *y-овъ* и отстоитъ отъ нея на разстояніи a, а другая параллельна оси *x-овъ* и отстоитъ отъ нея на разстояніи b.

Оси Ox и Oy образуютъ *систему* осей координатъ. Описанная система называется *прямоугольной,* такъ какъ уголъ между осями *прямой.*

Легко видѣть, что ординаты точекъ, лежащихъ на оси x, равны нулю, и что, обратно, точки съ ординатой, равной нулю, лежатъ на оси абсциссъ. Точно также, абсциссы точекъ оси y равны нулю и, обратно, точки, абсциссы которыхъ равны нулю, лежатъ на оси ординатъ. Обѣ координаты начала O равны нулю.

§ 74. **Полярныя координаты точки на плоскости.** Положеніе точки на плоскости можно опредѣлить еще и другимъ способомъ.

Возьмемъ на плоскости точку O и прямую Ox, черезъ нее проходящую. Точку O назовемъ *полюсомъ*, а прямую Ox — *полярной осью* (черт. 4). Положеніе точки M можно опредѣлить, если дано разстояніе OM точки M отъ полюса и уголъ $\widehat{xOM}$, образуемый прямой OM съ полярной осью. Разстояніе OM называется *радіусомъ-векторомъ* точки M, а уголъ $\widehat{xOM}$ — ея *амплитудой* или *аргументомъ*. Обозначимъ радіусъ векторъ черезъ r и аргументъ черезъ φ. Числа r и φ называются *полярными координатами* точки M. Радіусъ векторъ r считается *положительнымъ*, а аргументъ отсчитывается *отъ* полярной оси, при чемъ положительнымъ считается направленіе, *противоположное* направленію движенія часовой стрѣлки.



Черт. 4.

Если полюсъ и полярная ось совпадаютъ соотвѣтственно съ началомъ и осью x прямоугольной системы координатъ, которой ось y получается вращеніемъ оси x на прямой уголъ въ положительномъ направленіи, то между полярными координатами r и φ точки M и ея прямоугольными координатами x и y существуютъ соотношенія:

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (45)$$

которыя получаются изъ треугольника OPM (черт. 4).

Изъ этихъ соотношеній легко найти значенія r и φ черезъ x и y:

$$r = +\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi = arctan\frac{y}{x} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (46)$$

§ 75. **Геометрическое представленіе комплексныхъ чиселъ.** Комплексное число $x+iy$ изображается на плоскости точкой, абсцисса которой есть x и ордината y (на черт. 4 точка M).

Каждому комплексному числу соотвѣтствуетъ *одна* точка плоскости, каждой точкѣ плоскости соотвѣтствуетъ *одно* комплексное число (§ 73). Изображеніями *вещественныхъ* чиселъ служатъ точки оси x, а изображеніями *мнимыхъ* чиселъ—точки оси y. Начало координатъ есть изображеніе числа *нуль* (§ 73).

Радіусъ векторъ $r = OM$ точки M, равный $+\sqrt{x^2+y^2}$ (§ 74) представляетъ модуль комплекснаго числа $x+iy$ (§ 71). Аргументъ φ точки M, опредѣляемый равенствами (45), называется *аргументомъ комплекснаго числа* $x+iy$.

Аргументы вещественныхъ чиселъ суть 0 или π, аргументы мнимыхъ чиселъ суть $\pm\pi/2$.

Указанное выше взаимное однозначное соотвѣтствіе между комплексными числами и точками плоскости можно выразить въ другой формѣ, которая въ нѣкоторыхъ случаяхъ является болѣе удобной. Дѣло въ томъ, что точка M, изображающая комплексное число $x+iy$, вмѣстѣ съ началомъ координатъ O, опредѣляетъ отрѣзокъ OM *по величинѣ* и *по направленію*.

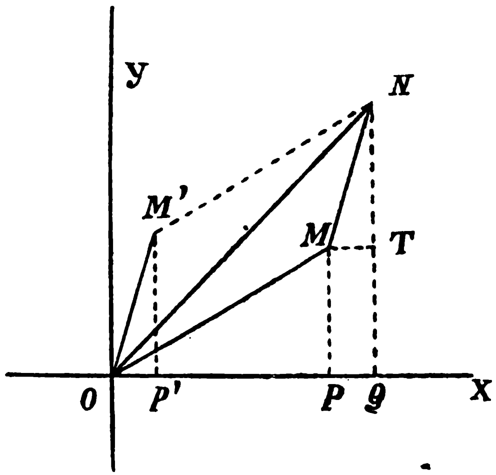
Отрѣзокъ, опредѣленный по величинѣ и по направленію, называется *векторомъ*. Каждому комплексному числу соотвѣтствуетъ *одинъ* векторъ, началомъ котораго служитъ начало координатъ, и, обратно, каждому вектору съ началомъ въ началѣ координатъ соотвѣтствуетъ *одно* комплексное число.

§ 76. **Тригонометрическая форма комплекснаго числа.** Изъ формулъ (45) перехода отъ прямоугольныхъ координатъ къ полярнымъ слѣдуетъ, что

$$x+iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

Вторая часть этого равенства даетъ *тригонометрическую форму* комплекснаго числа. Она содержитъ числа r и φ, опредѣляющія *векторъ* OM, длина котораго есть r, а направленіе указывается угломъ φ.

§ 77. **Построеніе суммы и разности комплексныхъ чиселъ.** Пусть точки M и M' (черт. 5) служатъ изображеніями соотвѣтственно чиселъ $z = x+iy$ и $z' = x'+iy'$. Требуется построить точку, изображающую ихъ сумму $z+z'$. Координаты этой точки суть $x+x'$, $y+y'$ (§ 70, опред. II). Для построенія ея проведемъ изъ точки M прямую, параллельную OM',



Черт. 5.

и отложимъ на ней отрѣзокъ MN, равный OM' и одинаково съ нимъ направленный. Точка N есть искомая точка.

Дѣйствительно, построивъ координаты точекъ M, M' и N и проведя прямую $MT \parallel Ox$, легко усмотрѣть изъ чертежа, что координаты OQ и QN точки N выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$OQ = OP + PQ = OP + MT;\quad QN = QT + TN = PM + TN.$$

Но $\triangle OP'M' = \triangle MTN$; поэтому $MT = OP'$, $TN = P'M'$. Слѣд.,

$$OQ = OP + OP' = x + x';\quad QN = PM + P'M' = y + y'.$$

Соединивъ O съ N, получимъ треугольникъ OMN; длины сторонъ OM, MN и ON этого треугольника равны соотвѣтственно модулямъ чиселъ z и z' и ихъ суммы $z + z'$. По извѣстному свойству сторонъ треугольника имѣемъ неравенства:

$$\pm(OM - MN) \leqslant ON \leqslant OM + MN.$$

Замѣнивъ OM, MN и ON числами, выражающими ихъ длину, получимъ:

$$\pm(|z| - |z'|) \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|,$$

т.-е. *модуль суммы двухъ чиселъ не болѣе суммы и не менѣе разности ихъ модулей.*

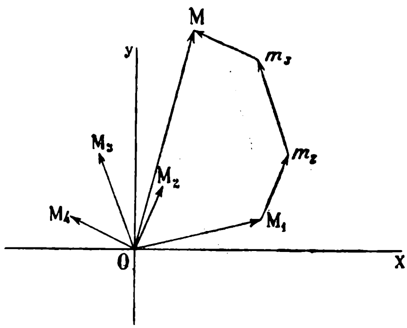
Принявъ во вниманіе соотвѣтствіе между комплексными числами и векторами (§ 75), можно весьма просто формулировать правило построенія суммы двухъ комплексныхъ чиселъ. Въ построенномъ выше треугольникѣ OMN сторона OM (начало въ точкѣ O, конецъ въ точкѣ M) есть векторъ, соотвѣтствующій числу z, а сторона MN есть векторъ OM', соотвѣтствующій числу z' и перенесенный параллельно самому себѣ такъ, что начало его совпадаетъ съ концомъ вектора OM. Ломаную OMN будемъ называть *ломаной, построенной на векторахъ, соотвѣтствующихъ числамъ* z *и* z'.

Эта ломаная, вообще говоря, *разомкнутая*, т.-е. ея начало и конецъ (точки O и N) не совпадаютъ. Векторъ ON называется ея *замыкающей* и представляетъ сумму (*геометрическую*) векторовъ OM и MN.

Правило построенія суммы $z+z'$ двухъ комплексныхъ чиселъ z и z' можно формулировать такъ: *для построенія суммы* $z+z'$ *достаточно построить замыкающую ломаной линіи, построенной на векторахъ, соотвѣтствующихъ числамъ* z *и* z'. *Эта замыкающая есть векторъ, соотвѣтствующій числу* $z+z'$.

Способъ построенія суммы двухъ чиселъ легко распространить на случай произвольнаго числа слагаемыхъ. Пусть, напр., требуется построить сумму четырехъ чиселъ: z_1, z_2, z_3, и z_4.

Положимъ, что векторы, соотвѣтствующіе этимъ числамъ суть OM_1, OM_2, OM_3 и OM_4 (черт. 6). Построимъ по указанному выше способу векторъ Om_2, соотвѣтствующій суммѣ z_1+z_2, затѣмъ векторъ Om_3, соотвѣтствующій суммѣ $(z_1+z_2)+$ $+z_3$, и, наконецъ, векторъ OM, соотвѣтствующій суммѣ $[(z_1+$ $+z_2)+z_3]+z_4$ или суммѣ $z_1+z_2+z_3+z_4$. Изъ построенія видно, что векторъ OM есть замыкающая ломаной $OM_1m_2m_3M$, построенной на векторахъ, соотвѣтствующихъ числамъ z_1, z_2, z_3 и z_4.



Черт. 6.

Сравнивая длину ломаной, построенной на векторахъ, соотвѣтствующихъ слагаемымъ, съ длиной прямой, которая служитъ ея замыкающей, мы получаемъ соотношеніе между модулемъ суммы произвольнаго числа слагаемыхъ и суммой ихъ модулей: *модуль суммы не больше суммы модулей слагаемыхъ.*

Построеніе разности $z - z'$ чиселъ $z = x + iy$ и $z' = x' + iy'$ приводится къ построенію суммы $z + (-z')$ чиселъ $z = x + iy$ и $-z' = -x' - iy'$.

§ 78. **Модуль и аргументъ произведенія.** Составляя произведеніе чиселъ

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

находимъ (§ 70, опред. III):

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)],$$

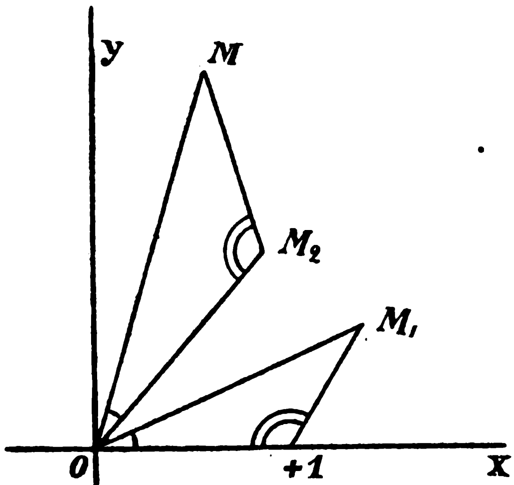
или, по извѣстнымъ формуламъ тригонометріи,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad . \quad . \quad (48)$$

Эта формула показываетъ, что *модуль произведенія двухъ чиселъ равенъ произведенію ихъ модулей, а аргументъ произведенія двухъ чиселъ равенъ суммѣ ихъ аргументовъ.*

Прилагая формулу (48) послѣдовательно къ вычисленію $z_1 z_2$, $(z_1 z_2) . z_3, \ldots$, $(z_1 z \ldots z_{n-1}) . z_n$, гдѣ n есть натуральное число, а $z_1, z_2, \ldots, z_n$ суть комплексныя числа, модули и аргументы которыхъ суть соотвѣтственно r_1 и φ_1, r_2 и $\varphi_2, \ldots,$ r_n и φ_n, получимъ:

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)] \ldots (49)$$



Черт. 7.

Эта формула есть не что иное, какъ распространеніе формулы (48) на случай произвольнаго числа множителей. Она показываетъ, что *модуль произведенія равенъ произведенію модулей множителей, а аргументъ произведенія равенъ суммѣ аргументовъ множителей.*

Изъ формулы (49) слѣдуетъ, что *произведеніе комплексныхъ чи-*

селъ равно нулю только въ томъ случаѣ, когда по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей равенъ нулю (§ 68, опред. IV; слѣд. 2; § 71).

§ 79. **Построеніе произведенія двухъ комплексныхъ чиселъ.** Пусть M_1 и M_2 (черт. 7) суть точки, изображающія соотвѣтственно числа: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + + i\sin\varphi_2)$. Для построенія точки M, изображающей произведеніе z_1z_2, отложимъ на оси x отрѣзокъ $O1 = +1$ и соединимъ точку 1 съ точкой M_1; затѣмъ на отрѣзкѣ OM_2 построимъ треугольникъ $OM_2\,M$, подобный треугольнику $O1M_1$, принявъ OM_2 и $O1$ за сходственныя стороны. Вершина M этого треугольника есть точка, изображающая произведеніе z_1z_2.

Дѣйствительно, изъ построенія слѣдуетъ, что

$$\angle M_2OM = \angle 1OM_1;\ \angle 1OM = \angle M_2OM + \angle 1OM_2 = \varphi_1 + \varphi_2;$$
$$OM : OM_1 = OM_2 : O1 \text{ или } OM : r_1 = r_2 : 1,$$

откуда $OM = r_1r_2$. Слѣд., точка M изображаетъ произведеніе z_1z_2 (см. формулу 48).

Указанное построеніе показываетъ, что векторъ OM, соотвѣтствующій произведенію z_1z_2, получается изъ вектора OM_1, соотвѣтствующаго z_1, посредствомъ соединенія двухъ операцій:

1) поворота этого вектора на уголъ φ_2, представляющій аргументъ вектора OM_2, соотвѣтствующаго числу z_2, и 2) измѣненія длины r_1 вектора OM_1 въ отношеніи $r_2 : 1$.

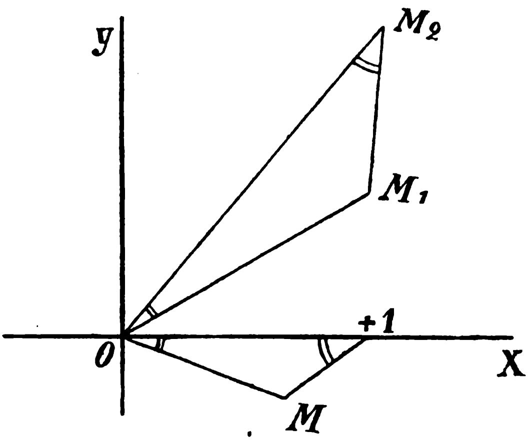
§ 80. **Модуль и аргументъ частнаго.** Частное z_1/z_2 двухъ комплексныхъ чиселъ $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ выражается слѣдующимъ образомъ (§§ 72, 70):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\Big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\Big],$$

или, по извѣстнымъ формуламъ тригонометріи,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big] \quad . \; . \; . \quad (50)$$

Эта формула показываетъ, что *модуль частнаго двухъ чиселъ равенъ частному модулей дѣлимаго и дѣлителя, а аргументъ частнаго равенъ разности аргументовъ дѣлимаго и дѣлителя.*



Черт. 8.

§ 81. **Построеніе частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ.** Пусть точки M_1 и M_2 (черт. 8) изображаютъ соотвѣтственно числа z_1 и z_2. Для построенія точки, изображающей число z_1/z_2, отложимъ на оси x отрѣзокъ $01 = +1$ и на этомъ отрѣзкѣ построимъ треугольникъ $01M$, подобный треугольнику OM_1M_2, принявъ за сходственныя стороны отрѣзки 01 и OM_2. Вершина M этого треугольника есть искомое изображеніе числа z_1/z_2.

Дѣйствительно, изъ построенія слѣдуетъ, что

$$\angle 1OM = \angle M_1OM_2 = \angle 1OM_1 - \angle 1OM_2 = \varphi_1 - \varphi_2;$$
$$OM : OM_1 = 01 : OM_2 \text{ или } OM : r_1 = 1 : r_2,$$

откуда $OM = r_1/r_2$. Слѣд., точка M изображаетъ частное z_1/z_2 (см. форм. 50).

§ 82. **Возведеніе въ степень комплекснаго числа. Формула Moivre'а.** Полагая въ формулѣ (49) $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, получимъ выраженіе цѣлой и положительной степени комплекснаго числа:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

Вставляя вмѣсто z его значеніе $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и сокращая результатъ на r^n, находимъ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

Эта формула называется «формулой *Moivre'a*».

При выводѣ ея предполагалось, что n есть цѣлое и положительное число. Легко видѣть, что она справедлива и для $n = 0$ (§ 67).

Покажемъ, что она справедлива для цѣлыхъ отрицательныхъ показателей. Если n есть цѣлое положительное число, то (§ 67)

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = 1/(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$$
$$1/(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad \text{(по форм. 52)}$$
$$= \cos n\varphi - i\sin n\varphi \quad (\S\ 72).$$

Но изъ тригонометріи извѣстно, что $\cos(-n\varphi) = \cos n\varphi$ и $\sin(-n\varphi) = -\sin n\varphi$; поэтому предыдущее равенство можно замѣнить равенствомъ

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi),$$

которое показываетъ, что формула (52) справедлива при цѣлыхъ отрицательныхъ значеніяхъ показателя. Итакъ, формула (52) справедлива при нулевомъ и цѣлыхъ значеніяхъ показателя.

§ 83. **Извлеченіе корня изъ комплекснаго числа.** Извлечь n-ый корень изъ числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ значитъ найти такое число $\zeta = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, котораго n-ая степень равна z, при чемъ подъ n разумѣется натуральное число.

Для опредѣленія модуля и аргумента числа ζ имѣемъ равенство

$$[\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

которое по формуламъ (51) и (52) преобразуется въ слѣдующее:

$$\rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда находимъ (§ 70, опред. I):

$$\rho^n \cos n\vartheta = r\cos\varphi; \quad \rho^n \sin n\vartheta = r\sin\varphi.$$

Возводя каждое изъ этихъ равенствъ въ квадратъ и складывая почленно, получимъ

$$\rho^{2n} = r^2 \text{ и } \rho = \sqrt[n]{r};$$

подъ $\sqrt[n]{r}^{+}$ здѣсь разумѣется то единственное положительное число, n-я степень котораго равна положительному числу r (§ 55).

Опредѣливъ ρ, находимъ два уравненія для опредѣленія ϑ:

$$\cos n\vartheta = \cos\varphi; \quad \sin n\vartheta = \sin\varphi.$$

Углы съ равными синусами и косинусами равны между собою или отличаются другъ отъ друга числомъ, кратнымъ ихъ общаго періода 2π *). Поэтому

$$n\vartheta = \varphi + 2k\pi,$$

гдѣ k есть цѣлое число или нуль. Отсюда находимъ ϑ:

$$\vartheta = (\varphi + 2k\pi)/n.$$

Такимъ образомъ искомое число ζ или $\sqrt[n]{z}$ получается въ слѣдующемъ видѣ:

$$\zeta = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \ldots (53)$$

Эта формула содержитъ произвольное цѣлое число k и поэтому можетъ дать не одно значеніе $\sqrt[n]{z}$, а нѣсколько. Докажемъ, что число различныхъ значеній, доставляемыхъ второй частью формулы (53), равно n, и что эти значенія можно получить, подставляя вмѣсто k рядъ n послѣдовательныхъ чиселъ, напр., полагая $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пусть

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_0 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\\
\zeta_1 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right)\\
\zeta_2 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{n}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\zeta_{k'} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k'\pi}{n}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\zeta_{k''} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k''\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k''\pi}{n}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\zeta_{n-1} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Докажемъ, что *всѣ числа этой таблицы различны.*

---

*) См. курсы тригонометріи.

Предполагая $\zeta_{k'}=\zeta_{k''}$, гдѣ $k'\neq k''$ и $0\leqslant k'\leqslant n-1$, $0\leqslant k''\leqslant n-1$, мы имѣли бы равенство

$$\cos\frac{\varphi+2k'\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k'\pi}{2}=\cos\frac{\varphi+2k''\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k''\pi}{n},$$

которое распадается на два слѣдующихъ (§ 70, опред. I):

$$\cos\frac{\varphi+2k'\pi}{n}=\cos\frac{\varphi+2k''\pi}{n};\quad \sin\frac{\varphi+2k'\pi}{n}=\sin\frac{\varphi+2k''\pi}{n}.$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ:

$$(\varphi+2k'\pi)/n=(\varphi+2k''\pi)/n+2m\pi \text{ или } (k'-k'')/n=m,$$

гдѣ m есть цѣлое число или нуль.

Послѣднее равенство *невозможно,* такъ какъ по сдѣланнымъ нами предположеніямъ, число $k'-k''$ по абсолютному значенію меньше n и, слѣд., частное $(k'-k'')/n$ не можетъ равняться цѣлому числу.

Итакъ, между числами ζ_k таблицы (54) нѣтъ равныхъ. Покажемъ теперь, что число ζ_p, получаемое изъ формулы (53) замѣной числа k цѣлымъ числомъ p, не содержащимся въ рядѣ чиселъ $0, 1, 2, \ldots, n-1$, равно одному изъ чиселъ (54).

Посредствомъ дѣленія p на n можно представить p въ видѣ суммы $nq+h$, гдѣ q есть цѣлое частное отъ дѣленія p на n, а h — остатокъ. Если p число положительное, то q и h суть также числа положительныя и $h<n$. Если число p отрицательное, то непосредственное дѣленіе p на n приводитъ къ отрицательнымъ q и h, при чемъ $|h|<n$. Но въ этомъ случаѣ число p можно представить такъ: $p=(q-1)n+(n+h)$, и принять за остатокъ при дѣленіи положительное число $n+h$, меньшее n. Поэтому въ равенствѣ $p=nq+h$ подъ h всегда можно разумѣть цѣлое положительное число или нуль.

Подставивъ $p=nq+h$ вмѣсто k въ формулу (53), находимъ:

$$\begin{aligned}\zeta_p&=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2p\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2p\pi}{n}\right)=\\&=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2(nq+h)\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2(nq+h)\pi}{n}\right]=\\&=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(2q\pi+\frac{\varphi+2h\pi}{n}\right)+i\sin\left(2q\pi+\frac{\varphi+2h\pi}{n}\right)\right]=\\&=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2h\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2h\pi}{n}\right)=\zeta_h.\end{aligned}$$

Но h есть одно изъ чиселъ: 0, 1, 2,..., $n-1$; слѣд., ζ_h есть одно изъ чиселъ (54).

Изъ предыдущаго вытекаютъ слѣдующія заключенія:

1) *извлеченіе корня изъ комплекснаго числа есть дѣйствіе, всегда возможное;*

2) *извлеченіе корня изъ комплекснаго числа есть дѣйствіе многозначное;*

3) *формула (52) Moivre'а справедлива для дробныхъ показателей,* потому что по формуламъ (53) и (52) имѣемъ равенства:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{1/n} = \cos(\varphi/n) + i\sin(\varphi/n),$$
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{m/n} = \cos(m\varphi/n) + i\sin(m\varphi/n),$$

гдѣ m и n суть цѣлыя числа.

§ 84. **n-ый корень изъ 1.** Въ различныхъ вопросахъ математики весьма важную роль играютъ значенія n-аго корня изъ 1. Укажемъ здѣсь n значеній $\sqrt[n]{1}$ и отмѣтимъ нѣкоторыя свойства ихъ.

Такъ какъ $1 = \cos 0 + i\sin 0$ (§ 75), то, обозначая $\sqrt[n]{1}$ черезъ ω, изъ таблицы (54) получимъ слѣдующія n значеній ω:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_0 &= 1,\\
\omega_1 &= \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n),\\
\omega_2 &= \cos(4\pi/n) + i\sin(4\pi/n),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\omega_{n-1} &= \cos(2(n-1)\pi/n) + i\sin(2(n-1)\pi/n).
\end{aligned}\right\} \quad \dots (55)$$

Одно изъ этихъ значеній, именно ω_0, есть вещественное число для произвольнаго натуральнаго числа n. Если n есть число четное, то $\omega_{n/2}$ есть также вещественное число. Дѣйствительно,

$$\omega_{n/2} = \cos(2\,.\,n/2\,.\,\pi/n) + i\sin(2\,.\,n/2\,.\,\pi/n) = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Остальныя значенія $\sqrt[n]{1}$ суть числа комплексныя.

Если n есть число нечетное, то кромѣ ω_0 вещественныхъ значеній $\sqrt[n]{1}$ нѣтъ.

Комплексныя значенія $\sqrt[n]{1}$ являются попарно сопряженными (§ 72). Покажемъ, что ω_k и ω_{n-k}, гдѣ k есть одно изъ чиселъ 1, 2,..., $n-1$ (число $n/2$, въ случаѣ n четнаго, изъ этого ряда исключается), суть числа сопряженныя. Для этого преобразуемъ ω_{n-k} слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned}\omega_{n-k} &= \cos 2(n-k)\pi/n + i\sin 2(n-k)\pi/n = \\ &= \cos(2\pi - 2k\pi/n) + i\sin(2\pi - 2k\pi/n) = \\ &= \cos(-2k\pi/n) + i\sin(-2k\pi/n) = \\ &= \cos(2k\pi/n) - i\sin(2k\pi/n).\end{aligned}$$

Но $\omega_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$; слѣд. ω_k и ω_{n-k} суть сопряженныя комплексныя числа.

Всѣ значенія $\sqrt[n]{1}$ *можно представить, какъ степени числа* ω_1. Дѣйствительно, по формулѣ Moivre'а имѣемъ:

$$\omega_1{}^m = [\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)]^m = \cos(2m\pi/n) + i\sin(2m\pi/n).$$

Полагая въ этой формулѣ $m = 1, 2, 3, \ldots, n$, получимъ:

$$\omega_1{}^1 = \omega_1,\ \omega_1{}^2 = \omega_2,\ \omega_1{}^3 = \omega_3, \ldots,\ \omega_1{}^{n-1} = \omega_{n-1},\ \omega_1{}^n = 1 = \omega_0.$$

ω_1 называется *первообразнымъ* n-ымъ корнемъ изъ 1.

Названіе первообразнаго присваивается каждому изъ чиселъ ω таблицы (55), если оно обладаетъ указаннымъ выше свойствомъ.

Разсмотримъ два примѣра.

Значенія $\sqrt[3]{1}$ суть:

$$\omega_0 = 1;\ \omega_1 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3);\ \omega_2 = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3).$$

Вычисляя первую, вторую и третью степени ω_1 и ω_2, находимъ:

$$\begin{aligned}&\omega_1 = \omega_1;\ \omega_1{}^2 = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3) = \omega_2;\ \omega_1{}^3 = 1 = \omega_0;\\ &\omega_2 = \omega_2;\ \omega_2{}^2 = \cos(8\pi/3) + i\sin(8\pi/3) = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = \\ &\qquad = \omega_1;\ \omega_2{}^3 = 1.\end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ, что ω_1 и ω_2 суть первообразные кубическіе корни изъ 1.

Значенія $\sqrt[6]{1}$ суть слѣдующія:

$$\begin{aligned}\omega_0 = 1;\ \omega_1 &= \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6);\\ \omega_2 &= \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3);\\ \omega_3 &= \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1;\\ \omega_4 &= \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3);\\ \omega_5 &= \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6).\end{aligned}$$

Легко убѣдиться, что ω_1 и ω_5 суть первообразные шестые корни изъ 1, а ω_2, ω_3, ω_4 — не первообразные. Не трудно также замѣтить свойство первообразныхъ корней, отличающихъ ихъ отъ остальныхъ: первообразный шестой корень изъ 1 не можетъ служить корнемъ съ низшимъ показателемъ, между тѣмъ какъ непервообразный шестой корень изъ 1 служитъ корнемъ низшей степени изъ 1.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ первыхъ шести степеней чиселъ ω_1 и ω_5, только 6 степени равны 1, между тѣмъ какъ $\omega_2{}^3 = \omega_4{}^3 = 1$, $\omega_3{}^2 = 1$, т.-е. ω_2 и ω_3 представляютъ два значенія $\sqrt[3]{1}$ и ω_3 одно изъ значеній $\sqrt{1}$. Это свойство можно принять за опредѣленіе первообразнаго корня.

Изображеніями чиселъ ω таблицы (55) являются вершины правильнаго n—угольника, вписаннаго въ кругъ радіуса 1 съ центромъ въ началѣ координатъ, при чемъ одна изъ вершинъ его лежитъ въ точкѣ $+1$.

Изъ формулы (53), дающей $\sqrt[n]{z}$, слѣдуетъ, что

$$\zeta = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).\,\omega_k,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

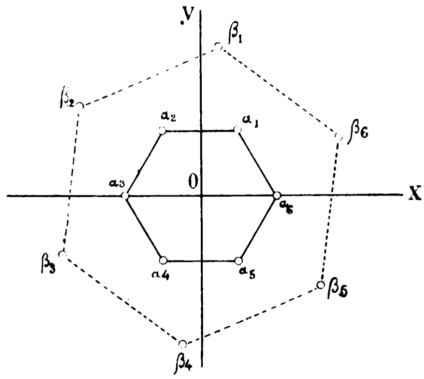
Эта формула показываетъ, что для построенія изображеній $\sqrt[n]{z}$ достаточно повернуть правильный n-угольникъ, вершины котораго служатъ изображеніями $\sqrt[n]{1}$, на уголъ φ/n около начала координатъ и измѣнить радіусъ описаннаго около него круга въ отношеніи $\sqrt[n]{r}:1$ (§ 79).

На чертежѣ 9 изображены два шестиугольника: вершины одного (a_1, a_2, $a_3, \ldots,$ a_6) служатъ изображеніями $\sqrt[6]{1}$, а вершины другого (β_1, β_2, $\beta_3, \ldots, \beta_6$)—изображеніями $\sqrt[6]{32\sqrt{2}(i-1)} = \sqrt[6]{32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}$.

§ 85. **Возможность новыхъ расширеній понятія числа.** Система комплексныхъ чиселъ является замкнутой системой по отношенію ко всѣмъ 6 основнымъ дѣйствіямъ: выполненіе ихъ въ области комплексныхъ чиселъ возможно за исключеніемъ дѣленія на нуль.

Такимъ образомъ та цѣль, которая ставилась при каждомъ новомъ расширеніи понятія числа, достигнута, и ариѳметика не нуждается въ какихъ-либо новыхъ числахъ.

Но изученіе паръ третьей ступени открыло возможность взглянуть на числа съ особой точки зрѣнія и указало путь къ новымъ расширеніямъ понятія числа.



Черт, 9.

Мы видѣли (§ 68), что пары третьей ступени могутъ быть представлены въ видѣ комплекса $\{1, 0\} . a + \{0, 1\} . b$, гдѣ a и b обозначаютъ вещественныя числа. Эта форма паръ третьей ступени позволяетъ разсматривать ихъ, какъ составленныя изъ двухъ основныхъ паръ: $\{1, 0\}$ и $\{0, 1\}$. Первая изъ нихъ, по опредѣленію IV § 68, есть 1, а вторая есть число i (§ 69). Числа 1 и i являются такимъ образомъ основными элементами системы комплексныхъ чиселъ и называются *основными единицами* этой системы. Главное свойство основныхъ единицъ по отношенію другъ къ другу заключается въ томъ, что не существуетъ вещественныхъ, отличныхъ отъ нуля чиселъ a и b, для которыхъ имѣло бы мѣсто равенство: $a . 1 = b . i$ (§ 68).

Въ этомъ смыслѣ основныя единицы называютъ *независимыми* другъ отъ друга.

Итакъ, система комплексныхъ чиселъ есть *система съ двумя независимыми единицами.*

При такомъ взглядѣ на систему комплексныхъ чиселъ естественно возникаетъ вопросъ о существованіи другихъ системъ чиселъ съ двумя или бóльшимъ числомъ независимыхъ основныхъ единицъ.

Построеніе такихъ системъ оказалось возможнымъ, но при этомъ выяснилось, что нельзя построить такую систему, отличную отъ системы комплексныхъ чиселъ, въ которой имѣли бы мѣсто *всѣ* основные законы. Послѣднее обстоятельство имѣло слѣдствіемъ пересмотръ и измѣненіе опредѣленій основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Такъ, напр., характеристикой умноженія остался только одинъ дистрибутивный законъ.

Числа новыхъ системъ получили названіе высшихъ комплексныхъ или *гиперкомплексныхъ* чиселъ.

Изъ системъ гиперкомплексныхъ чиселъ наиболѣе разработанной является система съ 4 основными единицами, извѣстная подъ названіемъ системы *кватерніоновъ* *).

ГЛАВА VI.

Алгебраическое выраженіе. Одночленъ. Многочленъ. Дѣйствія надъ одночленами и многочленами.

§ 86. **Алгебраическое выраженіе. Одночленъ. Многочленъ.** Соединеніе посредствомъ знаковъ дѣйствій чиселъ и буквъ, подъ которыми разумѣются числа, называется *алгебраическимъ выраженіемъ*.

Алгебраическое выраженіе, не содержащее въ себѣ ни сложенія, ни вычитанія, называется *одночленомъ* или *мономомъ*, а выраженіе, представляющее алгебраическую сумму нѣсколькихъ одночленовъ, называется *многочленомъ* или *полиномомъ*. Каждое изъ слагаемыхъ этой суммы называется *членомъ* многочлена.

Наприм., выраженія $5a^2b$, $4/a$, $5\sqrt{a}$ суть одночлены; выраженіе $2a - 3b + c^2/5d$ есть многочленъ, члены котораго суть: $2a$, $-3b$ и $c^2/5d$.

---

*) О гиперкомплексныхъ числахъ см. проф. *А. В. Васильевъ, Введеніе въ анализъ*, вып. II; *Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik*; *Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. I, vol. 1, fasc. 3.

Многочленъ съ двумя членами называется *двучленомъ* или *биномомъ;* многочленъ съ тремя членами—*трехчленомъ* или *триномомъ.* Числовой (т. е. обозначенный цифрами) множитель одночлена называется его *коэффиціентомъ* *).

Одночлены, отличающіеся другъ отъ друга только коэффиціентами, называются *подобными.*

Дѣйствія надъ одночленами и многочленами сводятся къ преобразованіямъ, которыя являются слѣдствіями основныхъ законовъ дѣйствій надъ числами. Эти законы лежатъ въ основѣ алгебраическихъ преобразованій и могутъ быть названы *основными законами алгебры.*

§ 87. **Таблица основныхъ законовъ алгебры.** Приведемъ таблицу равенствъ, которыя представляютъ простѣйшія выраженія основныхъ законовъ алгебры. Въ этихъ равенствахъ подъ буквами разумѣются произвольныя числа, вещественныя или комплексныя, съ тѣми только ограниченіями, что въ выраженіяхъ, содержащихъ дѣленіе, дѣлитель предполагается отличнымъ отъ нуля, а въ выраженіяхъ, содержащихъ степени, показатель есть раціональное число **).

А. Связь между прямыми и обратными дѣйствіями.

Дѣйствія 1-й ступени.	Дѣйствія 2-й ступени.	Дѣйствія 3-й ступени.
$a - b + b = a$	$a : b \,.\, b = a$	$(\sqrt[n]{a})^n = a;$
$a + b - b = a$	$a \,.\, b : b = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a.$

*) Понятіе о коэффиціентѣ будетъ въ послѣдующемъ расширено (§ 93).

**) Степени съ ирраціональными показателями будутъ разсмотрѣны въ статьѣ о логариѳмахъ, а степени съ комплексными показателями выходятъ изъ рамокъ элементарнаго курса.

B. Ассоціативный законъ.

Дѣйствія 1-й ступени.	Дѣйствія 2-й ступени.
$a+(b+c)=a+b+c;$	$a\,.\,(bc)=abc;$
$a+(b-c)=a+b-c;$	$a\,.\,(b:c)=ab:c;$
$a-(b+c)=a-b-c;$	$a:(bc)=a:b:c;$
$a-(b-c)=a-b+c;$	$a:(b:c)=a:b\,.\,c.$

C. Коммутативный законъ.

Дѣйствія 1-й ступени.	Дѣйствія 2-й ступени.
$a+b=b+a;$	$ab=ba;$
$a+b-c=a-c+b;$	$a\,.\,b:c=a:c\,.\,b;$
$a-b-c=a-c-b;$	$a:b:c=a:c:b.$

D. Дистрибутивный законъ.

Дѣйствія 2-й ступени.

Умноженіе.	Дѣленіе.
$(a\mp b)\,.\,c=ac\mp bc;$	$(a\mp b):c=a:c\mp b:c.$
$a\,.\,(b\mp c)=ab\mp ac;$	

E. Законы, относящіеся къ показателямъ.

a) $a^m\,.\,a^n=a^{m+n};$

$a^m:a^n=a^{m-n}.$

b) $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m.$

c) $(ab)^n=a^nb^n;$

$(a/b)^n=a^n/b^n.$

F. Свойства 0 (нуля).

$$a-a=0;\ a+0=0+a=a;\ a-0=a;\ a.0=0.a=0;$$
$$a^0=1\ (a\neq 0).$$

G. Свойства 1.

$a:a=1;\ a.1=1.a=a;\ a:1=a$ *).

§ 88. **Приведеніе подобныхъ членовъ.** Подобные члены (§ 86) многочлена можно соединить въ одинъ, пользуясь коммутативнымъ и ассоціативнымъ законами при сложеніи и дистрибутивнымъ при умноженіи.

Наприм.,

$4a^2b-7ab^2-3a^2b+0{,}2a^2b+2ab^2=$	(по коммутат. зак.
$=4a^2b-3a^2b+0{,}2a^2b-7ab^2+2ab^2$	при сложеніи)
$=(4a^2b-3a^2b+0{,}2a^2b)+(-7ab^2+2ab^2)$	(по ассоціац. зак.
	при сложеніи)
$=(4-3+0{,}2)a^2b+(-7+2)ab^2$	(по дистриб. зак.
$=1{,}2a^2b-5ab^2.$	при умноженіи).

Соединеніе въ одинъ подобныхъ членовъ называется *приведеніемъ* подобныхъ членовъ.

§ 89. **Сложеніе и вычитаніе одночленовъ и многочленовъ.** Сложеніе и вычитаніе одночленовъ лишь указывается знаками дѣйствій, которыя нужно произвести надъ одночленами. Результатъ можетъ быть упрощенъ приведеніемъ подобныхъ членовъ (§ 88), если таковые имѣются между данными одночленами.

Правила сложенія и вычитанія многочленовъ основаны на ассоціативномъ законѣ при сложеніи и вычитаніи (§ 87, *B*) и формулируются слѣдующимъ образомъ: *чтобы сложить многочлены, нужно къ одному изъ нихъ приписать всѣ члены другихъ, сохраняя знаки этихъ членовъ; чтобы вычесть одинъ многочленъ*

---

*) Числа *нуль* и *единица* называются *индифферентными* числами соотвѣтственно при *сложеніи* и *умноженіи*. Этимъ названіемъ указывается неизмѣняемость числа при сложеніи его съ 0 и при умноженіи его на 1.

изъ другого, нужно къ многочлену-уменьшаемому приписать всѣ члены многочлена-вычитаемаго, перемѣнивъ знаки всѣхъ его членовъ на обратные. Результаты могутъ быть упрощены приведеніемъ подобныхъ членовъ.

§ 90. **Умноженіе одночленовъ и многочленовъ.** Умноженіе одночленовъ основано на законахъ коммутативномъ и ассоціативномъ при умноженіи и законѣ показателей при умноженіи. Напримѣръ,

$$5a^2b\,.\,7abc = 5\,.\,a^2\,.\,b\,.\,7\,.\,a\,.\,b^2\,.\,c \qquad \text{(по ассоціат. зак.)}$$
$$= 5\,.\,7\,.\,a^2\,.\,a\,.\,b\,.\,b^2\,.\,c \qquad \text{(по коммут. зак.)}$$
$$= (5\,.\,7)\,.\,(a^2\,.\,a)\,.\,(b\,.\,b^2)\,.\,c \quad \text{(по ассоціат. зак.)}$$
$$= 35a^3b^3c \qquad \text{(по зак. показателей при умнож.)}$$

Умноженіе многочлена на одночленъ и многочлена на многочленъ основано на дистрибутивномъ законѣ при умноженіи (§ 87, *D*). Правила этихъ дѣйствій формулируютъ такъ: *чтобы умножить многочленъ на одночленъ, нужно каждый членъ многочлена умножить на одночленъ и полученные результаты сложить; чтобы умножить многочленъ на многочленъ, нужно каждый членъ многочлена-множимаго умножить на каждый членъ многочлена-множителя и полученные результаты сложить.*

Изъ послѣдняго правила слѣдуетъ, что произведеніе двухъ многочленовъ есть также многочленъ: число его членовъ, вообще, равно произведенію чиселъ членовъ множимаго и множителя. Если множимое и множитель содержатъ одинаковыя буквы, то въ произведеніи могутъ оказаться подобные члены, и послѣ ихъ приведенія число членовъ произведенія уменьшится.

§ 91. **Измѣреніе одночлена.** Сумма показателей буквъ, являющихся множителями въ одночленѣ, называется его *измѣреніемъ*. Наприм., $3ab^2c^3$ есть одночленъ шестого измѣренія, потому что сумма показателей буквъ a, b и c равна $1+2+3=6$; измѣреніе одночлена ab^{-1} равно нулю, измѣреніе одночлена $5ab^{2/3}$ равно $5/3$.

Измѣреніе множителя, обозначеннаго цифрами, равно нулю (опред. 34).

Измѣреніе произведенія одночленовъ равно суммѣ измѣреній множителей (§ 90).

§ 92. **Однородный и неоднородный многочлены.** Измѣренія членовъ многочлена, вообще, различны между собою, но могутъ быть и одинаковы. Въ послѣднемъ случаѣ многочленъ называется *однороднымъ*. Напр., многочленъ $a^2+2ab+b^2$ есть однородный многочленъ, потому что всѣ члены его второго измѣренія; многочленъ $3x^2+2x+1$ есть неоднородный многочленъ, такъ какъ измѣренія трехъ членовъ его суть соотвѣтственно 2, 1 и 0.

Число, выражающее измѣреніе каждаго члена однороднаго многочлена, называется показателемъ *однородности*.

§ 93. **Постоянныя и перемѣнныя числа**. Буквамъ, входящимъ въ алгебраическое выраженіе, можно приписывать или опредѣленное, хотя и произвольное значеніе, или неопредѣленное значеніе; другими словами, подъ буквами можно разумѣть числа, неизмѣняющіяся при рѣшеніи извѣстнаго вопроса, и числа, способныя принимать различныя значенія.

Числа перваго рода называются *постоянными*, числа второго рода — *перемѣнными*.

Въ одночленѣ, представляющемъ произведеніе постоянныхъ и перемѣнныхъ множителей, подъ коэффиціентомъ обыкновенно разумѣется произведеніе всѣхъ постоянныхъ множителей, выраженныхъ какъ явно (числами), такъ и неявно (буквами).

Наприм., въ одночленѣ $3ax$, гдѣ a обозначаетъ постоянное число, а x — перемѣнное, коэффиціентомъ называется произведеніе $3a$.

Такимъ образомъ первоначальное понятіе о коэффиціентѣ (§ 86) расширяется введеніемъ такъ называемыхъ *буквенныхъ коэффиціентовъ*. При рѣшеніи вопроса объ измѣреніи одночлена съ буквеннымъ коэффиціентомъ измѣреніе этого коэффиціента въ разсчетъ не принимается.

Наприм., объ одночленѣ $3ax$ говорятъ, что онъ перваго измѣренія, при чемъ прибавляютъ иногда слова: «относительно x». Точно также о многочленѣ $ax^2+bxy+cy^2$ говорятъ, что онъ однородный многочленъ относительно x и y.

§ 94. **Степень многочлена. Расположеніе членовъ многочлена.** Число, выражающее наибольшее изъ измѣреній членовъ многочлена, называется *степенью* многочлена относительно тѣхъ буквъ, которыя принимаются во вниманіе при вычисленіи измѣреній отдѣльныхъ членовъ.

Наприм., многочленъ $2x+1$ есть многочленъ первой степени относительно x, многочленъ ax^2+bx+c есть многочленъ второй степени относительно x, $2a^2b-3ab^2+b^3$ есть однородный многочленъ третьей степени относительно буквъ a и b.

Выдѣливъ какую-нибудь букву, какъ такую, относительно которой мы разсматриваемъ степень многочлена, можно (§ 87, C) расположить члены многочлена такъ, чтобы ихъ степени шли либо въ возрастающемъ, либо въ убывающемъ порядкѣ.

Если это сдѣлано, то многочленъ называется *расположеннымъ по возрастающимъ или убывающимъ степенямъ главной буквы.*

Наприм., многочленъ $3a^3-2a^2+a+1$ расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы a; многочленъ $a+bx+cx^2$ расположенъ по возрастающимъ степенямъ буквы x. Членъ многочлена, содержащій *высшую* степень главной буквы, называется *старшимъ* членомъ многочлена, а членъ, содержащій *низшую* степень этой буквы, называется *младшимъ* членомъ его.

Наприм., въ многочленѣ $3a^3-2a^2+a+1$ старшій и младшій члены суть соотвѣтственно $3a^3$ и 1; въ многочленѣ $a+bx+cx^2$ старшій и младшій члены суть соотвѣтственно cx^2 и a. Степень старшаго члена есть степень многочлена.

§ 95. **Цѣлый раціональный многочленъ.** Многочленъ, содержащій цѣлыя и положительныя степени главной буквы, называется *цѣлымъ раціональнымъ многочленомъ* относительно этой буквы.

Общій видъ цѣлаго раціональнаго многочлена относительно x степени n (n — натуральное число) таковъ:

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n,$$

гдѣ p съ индексами обозначаютъ коэффиціенты, не содержащіе буквы x.

§ 96. **Произведеніе двухъ цѣлыхъ раціональныхъ многочленовъ.** Пусть P и Q обозначаютъ два цѣлыхъ раціональныхъ относительно x многочлена соотвѣтственно степеней n и m:

$$P = p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n;$$
$$Q = q_0x^m + q_1x^{m-1} + q_2x^{m-2} + \ldots + q_{m-1}x + q_m.$$

Число членовъ многочлена P равно $n+1$, а число членовъ многочлена Q равно $m+1$.

Произведеніе PQ этихъ многочленовъ содержитъ $(n+1)(m+1)$ членовъ (§ 90). Но легко видѣть, что въ произведеніи PQ есть подобные члены, приведеніе которыхъ понижаетъ число членовъ произведенія PQ. Отъ умноженія старшаго члена многочлена P на старшій членъ многочлена Q получимъ произведеніе $p_0q_0x^{n+m}$, представляющее старшій членъ произведенія PQ, а отъ умноженія младшихъ членовъ многочленовъ P и Q получимъ произведеніе $p_n\, q_m$, представляющее младшій членъ произведенія PQ. Эти два члена *не имѣютъ себѣ подобныхъ*. Такъ какъ остальные члены могутъ исчезнуть при приведеніи подобныхъ членовъ, то изъ сказаннаго слѣдуетъ, что *наименьшее число членовъ въ произведеніи двухъ многочленовъ равно 2, и что степень произведенія PQ равна суммѣ степеней P и Q.*

§ 97. **Нѣкоторые частные случаи умноженія многочленовъ.** Приведемъ нѣсколько важныхъ формулъ, которыя получаются непосредственнымъ умноженіемъ многочленовъ (§ 90), и которыя полезно помнить.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab; \quad \ldots\ldots \quad (56)$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad \ldots\ldots \quad (57)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad \ldots\ldots \quad (58)$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2; \quad \ldots\ldots \quad (59)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad \ldots\ldots \quad (60)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \quad \ldots\ldots \quad (61)$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \quad \ldots \quad (62)$$

Формула (56) даетъ произведеніе двухъ биномовъ первой степени относительно x (*линейныхъ* биномовъ). Изъ нея выясняется способъ составленія коэффиціентовъ этого произведенія.

Формулы (57) и (58) доставляютъ выраженія квадратовъ соотвѣтственно суммы и разности двухъ чиселъ.

Формула (59) даетъ выраженіе произведенія суммы двухъ чиселъ на ихъ разность.

Формулы (60) и (61) даютъ выраженія кубовъ соотвѣтственно суммы и разности двухъ чиселъ.

Формула (62) даетъ выраженіе квадрата суммы трехъ чиселъ и легко можетъ быть расширена на случай суммы произвольнаго числа чиселъ.

§ 98. **Дѣленіе одночленовъ.** Дѣленіе одночлена на одночленъ, вообще, только обозначается однимъ изъ знаковъ дѣленія (§§ 16 и 37). Но въ томъ случаѣ, когда въ дѣлимое и дѣлитель входятъ одинаковыя буквы, возможны упрощенія частнаго. Эти упрощенія основаны на коммутативномъ и ассоціативномъ законахъ для ряда умноженій и дѣленій (§ 87, *C* и *B*) и на законѣ показателей (§ 87, *E*).

Наприм.,
$$\begin{aligned} 15a^3b^4c : 3a^3b^2 &= 15 . a^3b^4c : 3 : a^3 : b^2 && (\S\ 87,\ B) \\ &= 15 : 3 . a^3 : a^3 . b^4 : b^2 . c && (\S\ 87,\ C) \\ &= (15 : 3) . (a^3 : a^3) \cdot (b^4 : b^2) . c && (\S\ 87,\ B) \\ &= 5 . 1 . b^2 . c && (\S\ 87,\ E) \\ &= 5b^2c && (\S\ 87,\ G). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3ab^2 : 5b^3c &= 3 . a . b^2 : 5 : b^3 : c && (\S\ 87,\ B) \\ &= 3 . a : b^3 . b^2 : 5 : c && (\S\ 87,\ C) \\ &= (3a) : (b^3 : b^2) : (5c) && (\S\ 87,\ B) \\ &= 3a : b : (5c) && (\S\ 87,\ E) \\ &= 3a : (b . 5c) && (\S\ 87,\ B) \\ &= 3a : 5bc && (\S\ 87,\ C) \\ &= 3a/5bc. \end{aligned}$$

§ 99. **Дѣленіе многочлена на одночленъ.** Частнымъ отъ дѣленія многочлена на одночленъ служитъ многочленъ, члены котораго получаются черезъ дѣленіе членовъ даннаго многочлена на одночленъ. Это предложеніе есть слѣдствіе дистрибутивнаго закона при дѣленіи (§ 87, *D*).

§ 100. **Дѣленіе многочлена на многочленъ.** Въ общемъ случаѣ дѣленіе многочлена на многочленъ можно только обозначить однимъ изъ знаковъ дѣленія (§§ 16 и 37). Наприм., выраженіе $(a+b):(c+d)$ или $(a+b)/(c+d)$ есть частное отъ дѣленія многочлена $a+b$ на многочленъ $c+d$.

Но въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣлимое и дѣлитель суть цѣлые многочлены относительно одной и той же буквы, задачу дѣленія можно поставить аналогично тому, какъ это дѣлается въ ариѳметикѣ при дѣленіи цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ.

Въ ариѳметикѣ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ подъ дѣленіемъ разумѣется или дѣйствіе, обратное умноженію, или дѣйствіе, состоящее изъ ряда послѣдовательныхъ вычитаній дѣлителя изъ дѣлимаго до тѣхъ поръ, пока эти вычитанія не приведутъ къ числу, меньшему дѣлителя. Число, показывающее, сколько разъ изъ дѣлимаго можно вычесть дѣлитель, называется *цѣлымъ частнымъ*, а число, меньшее дѣлителя, получаемое въ концѣ процесса, называется *остаткомъ*.

Если a, b, q и r суть цѣлыя числа, представляющія соотвѣтственно дѣлимое, дѣлитель, частное и остатокъ, то

$$a = bq + r.$$

Если $r = 0$, то о дѣленіи a на b говорятъ, что оно совершается безъ остатка. То же самое свойство чиселъ a и b выражаютъ еще такъ: *„a дѣлится на b безъ остатка“, „a дѣлится на b“; „b есть дѣлитель a“; „a есть кратное b“.*

Пусть A и B суть цѣлые относительно x многочлены соотвѣтственно степеней m и n (m и n — натуральныя числа):

$$A = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m;$$
$$B = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n,$$

гдѣ a и b съ индексами суть коэффиціенты, не содержащіе буквы x.

Задача того преобразованія, которое называется дѣленіемъ многочлена A на многочленъ B, заключается въ нахожденіи двухъ новыхъ многочленовъ Q и R, связанныхъ съ данными соотношеніемъ:

$$A = BQ + R;$$

Q называется *частнымъ* или *цѣлымъ частнымъ*, а R — *остаткомъ*.

Эта задача аналогична указанной выше задачѣ о дѣленіи цѣлыхъ чиселъ.

Укажемъ сначала процессъ, посредствомъ котораго можно найти многочленъ Q, удовлетворяющій условію: $A = BQ$, *предполагая, что такой многочленъ существуетъ*.

Обозначивъ степень многочлена Q черезъ q, найдемъ, что степень произведенія BQ равна $n + q$ (§ 96). Слѣд., $m = n + q$ и $q = m - n$, т.-е. степень многочлена-частнаго равна разности степеней многочлена-дѣлимаго и многочлена-дѣлителя. Такъ какъ рѣчь идетъ о цѣлыхъ многочленахъ, то многочленъ Q можетъ существовать только при условіи: $m \geqslant n$.

Нахожденіе многочлена Q, если онъ существуетъ, основано на слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ:

1) *старшій и младшій члены произведенія двухъ многочленовъ равны произведеніямъ соотвѣтственно старшихъ и младшихъ членовъ множителей* (§ 96);

2) *если найдена часть Q' многочлена Q, то остальная часть Q'' найдется черезъ дѣленіе $A - BQ'$ на Q.*

Дѣйствительно, по предположенію $Q = Q' + Q''$, гдѣ Q' есть извѣстная часть искомаго многочлена, а Q''—его неизвѣстная часть, т.-е. сумма членовъ, подлежащихъ опредѣленію. Такъ какъ, по предположенію, $A = BQ$, то $A = B(Q' + Q'') = BQ' + BQ''$; отсюда заключаемъ, что $A - BQ' = BQ''$, т.-е. что Q'' есть частное отъ дѣленія $A - BQ'$ на B.

Изъ этихъ двухъ предложеній вытекаетъ правило дѣленія многочленовъ, содержащихъ одну и ту же главную букву.

Правило. *Дѣлимъ старшій (младшій) членъ дѣлимаго на старшій (младшій) членъ дѣлителя и получаемъ такимъ образомъ старшій (младшій) членъ частнаго. Умножаемъ дѣлитель на найденный членъ частнаго и результатъ вычитаемъ изъ дѣлимаго. Получаемъ первый остатокъ. Старшій (младшій) членъ перваго остатка дѣлимъ на старшій (младшій) членъ дѣлителя и получаемъ такимъ образомъ второй членъ частнаго. Умножаемъ дѣлитель на найденный второй членъ частнаго и результатъ вычитаемъ изъ перваго остатка. Получаемъ второй остатокъ, съ ко-*

торымъ поступаемъ такъ же, какъ съ первымъ, и т. д. до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ остатку, равному нулю.

Для удобства вычисленій *полезно* располагать дѣлимое и дѣлитель по возрастающимъ или убывающимъ степенямъ главной буквы.

Примѣръ. Раздѣлить многочленъ $2x^5-2x^4+x^3+4x^2-4x+3$ на многочленъ $2x^3-x+3$. Вычисленіе можно расположить слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{array}{lr|l}
(\textit{дѣлимое}) & 2x^5-2x^4+x^3+4x^2-4x+3 & 2x^3-x+3 \ (\textit{дѣлитель}) \\
 & \mp 2x^5 \qquad \pm x^3 \mp 3x^2 \qquad\qquad & \overline{x^2-x+1 \ (\textit{частное})} \\
\hline
(\textit{первый остатокъ}) & -2x^4+2x^3+x^3-4x+3 & \\
 & \pm 2x^4 \qquad \mp x^2 \pm 3x & \\
\hline
(\textit{второй остатокъ}) & 2x^3 \qquad -x+3 & \\
 & \mp 2x^3 \qquad \pm x \mp 3 & \\
\hline
 & 0 \qquad\qquad &
\end{array}
$$

Описанный выше процессъ можно употреблять и въ тѣхъ случаяхъ, когда существованіе многочлена Q заранѣе неизвѣстно. Положимъ, что $m \geqslant n$ и что процессъ начинается дѣленіемъ *старшаго* члена дѣлимаго на *старшій* членъ дѣлителя. При этомъ могутъ встрѣтиться два случая: 1) одинъ изъ послѣдовательныхъ остатковъ есть нуль; это—разсмотрѣнный выше случай; 2) одинъ изъ послѣдовательныхъ остатковъ окажется многочленомъ степени низшей, чѣмъ дѣлитель, и, слѣд., продолженіе процесса невозможно.

Въ первомъ случаѣ говорятъ, что многочленъ A дѣлится на многочленъ B безъ остатка; многочленъ Q есть частное отъ дѣленія A на B. Во второмъ случаѣ разсматриваемый процессъ приводитъ къ двумъ многочленамъ Q и R, связаннымъ съ данными соотношеніемъ:

$$A = BQ + R.$$

Q называется *цѣлымъ частнымъ* при дѣленіи A на B; степень его равна разности степеней A и B.

R называется *остаткомъ* при дѣленіи A на B; степень его *меньше* степени дѣлителя B.

Если при дѣленіи многочлена на многочленъ мы будемъ пользоваться указаннымъ выше процессомъ, начиная его съ дѣленія младшихъ членовъ, то при дѣленіи съ остаткомъ могутъ встрѣтиться два случая: 1) процесса нельзя начать и 2) процессъ оказывается безконечнымъ.

Наприм., нельзя начать разсматриваемаго процесса съ дѣленія младшихъ членовъ, когда дѣлится многочленъ $1+x+x^2+x^3$ на $x-3x^2$.

Въ случаѣ дѣленія $2+x^3$ на $1-x$ этотъ процессъ, начинаемый съ дѣленія младшихъ членовъ, не можетъ быть законченъ, какъ это видно изъ слѣдующаго:

$$\begin{array}{lrrrr|l}
 & 2 & & & +x^3 & 1-x \\
\cline{6-6}
 & \mp 2 & \pm 2x & & & 2+2x+2x^2+3x^3+\ldots \\
\cline{2-5}
\textit{(1-й остатокъ)} & & +2x & & +x^3 & \\
 & & \mp 2x & \pm 2x^2 & & \\
\cline{2-5}
\textit{(2-й остатокъ)} & & & +2x^2 & +x^3 & \\
 & & & \mp 2x^2 & \pm 2x^3 & \\
\cline{2-5}
\textit{(3-й остатокъ)} & & & & +3x^3 & \\
 & & & & \mp 3x^3 & \pm 3x^4 \\
\cline{2-6}
\textit{(4-й остатокъ)} & & & & & +3x^4
\end{array}$$

За остатокъ при дѣленіи можно въ этомъ случаѣ принять любой изъ получаемыхъ остатковъ. Можно взять за частное 2 и за остатокъ $2x+x^3$, можно взять за частное $2+2x$ и за остатокъ $2x^2+x^3$ и т. д., потому что при этомъ удовлетворяется соотношеніе между дѣлимымъ, дѣлителемъ, частнымъ и остаткомъ:

$$2+x^3=2(1-x)+(2x+x^3);$$
$$2+x^3=(2+2x)(1-x)+(2x^2+x^3);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

§ 101. **Алгебраическія дроби.** Алгебраической дробью называется частное отъ дѣленія двухъ алгебраическихъ выраженій, если дѣленіе не выполнено.

Дѣлимое и дѣлитель называются соотвѣтственно *числителемъ* и *знаменателемъ* дроби.

Понятіе объ алгебраической дроби есть не что иное, какъ расширеніе понятія о дробномъ числѣ. Поэтому преобразованія алгебраическихъ дробей и дѣйствія надъ ними совершаются по правиламъ, установленнымъ для дробныхъ чиселъ (гл. III).

Дробь, которой числитель и знаменатель суть цѣлые раціональные многочлены, называется раціональной дробью.

ГЛАВА VII.

Теорія соединеній. Формула бинома Ньютона.

§ 102. **Типы соединеній.** Изъ данныхъ предметовъ можно составлять различныя группы или *соединенія*.

Соединенія могутъ отличаться другъ отъ друга *числомъ* предметовъ, въ нихъ входящихъ, самыми *предметами* и, наконецъ, *порядкомъ*, въ которомъ мы беремъ предметы для образованія соединенія.

Предметы, изъ которыхъ образуются соединенія, будемъ называть *элементами* и обозначать ихъ буквами a, b, c,.....

Различаются *три* типа соединеній.

1) Соединенія, содержащія одно и то же число элементовъ и отличающіяся другъ отъ друга или *порядкомъ*, или самыми *элементами*, называются *размѣщеніями* (*arrangements*).

2) Соединенія, содержащія одни и тѣ же элементы и отличающіяся другъ отъ друга только ихъ *порядкомъ*, называются *перестановками* (*permutations*).

3) Соединенія, содержащія одинаковое число элементовъ и отличающіяся другъ отъ друга входящими въ нихъ *элементами*, называются сочетаніями (*combinaisons*).

Въ теоріи соединеній (*analyse combinatoire*, *Kombinatorik*, *комбинаторика*) разсматриваются два вопроса: 1) вопросъ о *способѣ* составленія *всѣхъ* соединеній извѣстнаго типа изъ данныхъ элементовъ и 2) вопросъ о *числѣ* соединеній извѣстнаго тип изъ данныхъ элементовъ.

§ 103. **Размѣщенія.** Пусть изъ n элементовъ

$$a, b, c, \ldots\ldots, k, l \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

требуется составить размѣщенія по p элементовъ, при чемъ каждый изъ нихъ можетъ входить въ размѣщеніе только одинъ разъ. При этомъ условіи $p \leqslant n$.

Очевидно, что рядъ (α) представляетъ размѣщенія изъ n элементовъ *по одному*.

Приписывая къ каждому изъ этихъ размѣщеній послѣдовательно каждый изъ элементовъ, не входящихъ въ него, получимъ всѣ размѣщенія *по два*:

$$\left.\begin{array}{l} ab,\ ac, \ldots\ldots, ak,\ al, \\ ba,\ bc, \ldots\ldots, bk,\ bl, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ la,\ lb, \ldots\ldots\ldots, lk. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Присоединяя къ каждому изъ размѣщеній (β) послѣдовательно каждый изъ элементовъ, не входящихъ въ него, получимъ всѣ размѣщенія *по три*:

$$\left.\begin{array}{l} abc, \ldots\ldots, abk,\ abl, \\ acb, \ldots\ldots, ack,\ acl, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ lka,\ lkb,\ lkc, \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Имѣя всѣ размѣщенія по три легко тѣмъ же способомъ составить размѣщенія *по четыре*, затѣмъ *по пяти* и т. д., пока не получимъ требуемыхъ размѣщеній изъ n элементовъ по p.

Примѣръ. Напишемъ всѣ трехзначныя числа, въ изображеніе которыхъ входятъ цифры 1, 2, 3 и 4, при чемъ ни одна изъ нихъ не можетъ повторяться.

Задача сводится къ составленію размѣщеній изъ 4 элементовъ (1, 2, 3, 4) по три. Прилагая указанный выше способъ, находимъ:

α) размѣщенія по одному: 1, 2, 3, 4;

β) размѣщенія по два: 12, 13, 14; 21, 23, 24; 31, 32, 34; 41, 42, 43;

γ) размѣщенія по три: 123, 124; 132, 134; 142, 143; 213, 214; 231, 234; 241, 243; 312, 314; 321, 324; 341, 342; 412, 413; 421, 423; 431, 432.

§ 104. **Число размѣщеній.** Зная способъ составленія размѣщеній, легко найти число ихъ. Число размѣщеній изъ n элементовъ по p обозначается символомъ A_n^p.

Изъ способа, указаннаго въ § 103 для составленія размѣщеній, слѣдуетъ, что каждое размѣщеніе изъ n элементовъ по $p-1$ элементовъ черезъ присоединеніе къ нему тѣхъ элементовъ, которыхъ въ немъ нѣтъ, даетъ группу размѣщеній изъ n элементовъ по p. Легко сосчитать, сколько размѣщеній содержитъ эта группа. Въ размѣщеніе изъ n элементовъ по $p-1$ входитъ $p-1$ элементовъ; слѣд., не входитъ въ него $n-(p-1)$ или $n-p+1$ элементовъ. Присоединеніе каждаго изъ нихъ къ выбранному размѣщенію изъ n элементовъ по $p-1$ даетъ одно размѣщеніе изъ n элементовъ по p. Слѣд., изъ каждаго размѣщенія изъ n элементовъ по $p-1$ получается $n-p+1$ размѣщеній изъ n элементовъ по p. Но число всѣхъ размѣщеній изъ n элементовъ по $p-1$ есть A_n^{p-1}; поэтому число A_n^p размѣщеній изъ n элементовъ по p равно $(n-p+1)\ A_n^{p-1}$. Итакъ,

$$A_n^p=(n-p+1)A_n^{p-1}.$$

Замѣняя въ этой формулѣ p послѣдовательно черезъ $p-1$, $p-2, \ldots, 3, 2, 1$ и замѣчая что $A_n^1=n$, находимъ рядъ равенствъ:

$$\begin{aligned}
A_n^p&=(n-p+1)A_n^{p-1};\\
A_n^{p-1}&=(n-p+2)A_n^{p-2};\\
&\cdots\cdots\\
A_n^3&=(n-2)A_n^2,\\
A_n^2&=(n-1)A_n^1,\\
A_n^1&=n.
\end{aligned}$$

Перемноживъ почленно эти равенства и сократив результатъ на произведеніе $A_n^1 \cdot A_n^2 \ldots A_n^{p-1}$, получимъ:

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Эта формула показываетъ, что *число размѣщеній изъ n элементовъ по p равно произведенію p послѣдовательныхъ убывающихъ цѣлыхъ чиселъ, начиная съ n.*

Въ примѣрѣ предыдущаго § число трехзначныхъ чиселъ равно $4.3 \cdot 2 = 24$.

§ 105. **Перестановки.** Перестановки изъ n элементовъ, какъ соединенія, отличающіяся только порядкомъ элементовъ, суть не что иное, какъ размѣщенія изъ n элементовъ по n. Поэтому составленіе ихъ производится по способу, указанному въ § 103, а ихъ число, обозначаемое символомъ P_n, получается изъ формулы (63) замѣною p черезъ n. Сдѣлавъ эту замѣну, получимъ формулу

$$P_n = A_n^n = 1.2.3\ldots n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

которая показываетъ, что *число перестановокъ изъ n элементовъ равно произведенію n первыхъ натуральныхъ чиселъ.*

Произведеніе $1.2\ldots n$ сокращенно обозначается символомъ: $n!$.

Примѣръ. Сколько девятизначныхъ и десятизначныхъ чиселъ можно изобразить цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, употребляя каждую изъ нихъ только одинъ разъ?

Легко видѣть, что вопросъ сводится къ счету перестановокъ изъ 10 элементовъ. Искомое число равно $10! = 3\,628\,800$.

§ 106. **Сочетанія.** Способъ составленія сочетаній аналогиченъ способу составленія размѣщеній (§ 103).

Пусть даны n элементовъ:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,\ k,\ l,\ \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Требуется составить сочетанія изъ n элементовъ по p, при чемъ каждый элементъ можетъ входить въ сочетаніе только одинъ разъ, такъ что $p \leqslant n$.

Очевидно, что рядъ (α) представляетъ собою сочетанія по *одному* элементу.

Чтобы составить сочетанія по два элемента, будемъ приписывать къ каждому изъ сочетаній (α) послѣдовательно каждый изъ элементовъ, слѣдующихъ за выбраннымъ въ рядѣ (α). Получимъ сочетанія *по два*:

$$\left.\begin{array}{r} ab,\ ac,\ ad,\ \ldots\ldots,\ ak,\ al; \\ bc,\ bd,\ \ldots\ldots,\ bk,\ bl; \\ cd,\ \ldots\ldots,\ ck,\ cl; \\ \ldots\ldots \\ kl. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Приписывая къ каждому изъ сочетаній (β) послѣдовательно каждый изъ элементовъ, слѣдующихъ въ рядѣ (α) за тѣмъ, которымъ оканчивается взятое сочетаніе, получимъ сочетанія *по три*:

$$\left.\begin{array}{r} abc,\ abd,\ \ldots\ldots,\ abk,\ abl; \\ acd,\ \ldots\ldots,\ ack,\ acl; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ bcd,\ \ldots\ldots,\ bck,\ bcl; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Имѣя сочетанія по три, тѣмъ же способомъ можно составить сочетанія *по четыре*, затѣмъ *по пяти* и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получимъ требуемыхъ сочетаній по p элементовъ.

Примѣръ. Изъ 5 различныхъ чиселъ a, b, c, d, e составить всѣ различныя между собою произведенія, изъ которыхъ каждое содержитъ три различныхъ множителя.

Такъ какъ произведеніе не зависитъ отъ порядка множителей, то различными являются произведенія, отличающіяся по крайней мѣрѣ однимъ множителемъ. Слѣд., вопросъ сводится къ составленію сочетаній изъ 5 элементовъ по 3.

Сочетанія по одному элементу суть a, b, c, d, e.

Сочетанія по два элемента суть ab, ac, ad, ae; bc, bd, be; cd, ce; de.

Искомыя произведенія суть abc, abd, abe; acd, ace; ade; bcd, bce; bde; cde.

§ 107. **Число сочетаній.** Число сочетаній изъ n элементовъ по p обозначается символомъ C_n^p. Чтобы найти это число, предположимъ, что всѣ C_n^p сочетаній изъ n элементовъ по p составлены, и сдѣлаемъ въ каждомъ изъ нихъ всѣ перестановки. Такимъ образомъ мы получимъ всѣ соединенія изъ n элементовъ по p, которыя отличаются другъ отъ друга или самыми элементами, или ихъ порядкомъ, т.-е. мы получимъ *размѣщенія* изъ n элементовъ по p (§ 102).

Число ихъ равно A_n^p. Съ другой стороны, изъ каждаго сочетанія перестановками элементовъ получаются P_p размѣщеній, а изъ C_n^p сочетаній получимъ $P_p \cdot C_n^p$ размѣщеній. Сравнивая два выраженія одного и того же числа, находимъ:

$$P_p \cdot C_n^p = A_n^p.$$

Отсюда получимъ:

$$C_n^p = A_n^p / P_p,$$

или, по формуламъ (63) и (64),

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p} \quad . \; . \; . \; . \quad (65)$$

Для числа C_n^p полезно запомнить еще другое выраженіе, которое весьма просто получается изъ формулы (65). Умноживъ числитель и знаменатель второй части этой формулы на произведеніе $1.2\ldots(n-p)$, находимъ:

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1).(n-p)(n-p-1)\ldots 2.1}{1.2.3\ldots p.1.2\ldots(n-p)},$$

или (§ 105)

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (66)$$

Изъ формулы (65) слѣдуетъ, что *произведеніе p послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ дѣлится безъ остатка на произведеніе p первыхъ натуральныхъ чиселъ.*

§ 108. **Нѣкоторыя свойства чиселъ C_n^p.** Числа, обозначаемыя символомъ C_n^p встрѣчаются весьма часто въ различныхъ вопросахъ математики. Поэтому мы приведемъ здѣсь нѣкоторыя изъ ихъ свойствъ.

Теорема 1. $C_n^p = C_n^{n-p}$ . . . . (67)

Доказательство. По формулѣ (66) имѣемъ:

$$C_n^p = n!/p!(n-p)! = C_n^{n-p}.$$

Справедливость формулы (67) легко обнаружить и безъ вычисленiй. Въ самомъ дѣлѣ, лѣвая часть ея представляетъ число сочетанiй изъ n элементовъ по p. Чтобы составить одно такое сочетанiе, нужно взять p элементовъ изъ n элементовъ. Не взятые $n-p$ элементовъ образуютъ при этомъ одно сочетанiе изъ n элементовъ по $n-p$. Слѣд., числа сочетанiй изъ n элементовъ по p и изъ n элементовъ по $n-p$ равны между собою.

Если ввести опредѣленiе $C_n^0 = 1$, то разсматриваемая теорема имѣетъ мѣсто и для $p = n$.

Теорема 2. $C_n^p > C_n^{p-1}$, *если* $p < (n+1)/2$.

Доказательство. По формулѣ (65) имѣемъ:

$$C_n^p = C_n^{p-1}(n-p+1)/p.$$

Для того, чтобы C_n^p было больше C_n^{p-1}, необходимо, чтобы множитель при C_n^{p-1} во второй части этой формулы былъ больше 1, т.-е.

$$(n-p+1)/p > 1.$$

Отсюда находимъ: $n-p+1 > p$; $n+1 > 2p$; $p < (n+1)/2$, что и требовалось доказать.

Та же формула показываетъ, что $C_n^p = C_n^{p-1}$, если n есть *нечетное* число и $p = (n+1)/2$.

Слѣдствiе. Составимъ рядъ чиселъ

$$C_n^0 = 1,\ C_n^1,\ C_n^2, \ldots, C_n^{p-1},\ C_n^p, \ldots, C_n^{n-2},\ C_n^{n-1},\ C_n^n.$$

Число написанныхъ чиселъ равно $n+1$. По теоремѣ 1 числа, равно удаленныя отъ концовъ ряда, равны между собою. По теоремѣ 2 числа ряда увеличиваются до средины ряда, при чемъ въ случаѣ n четнаго имѣется въ срединѣ ряда число $C_n^{n/2}$, большее всѣхъ остальныхъ, а въ случаѣ n нечетнаго въ срединѣ ряда имѣются два числа $C_n^{(n-1)/2}$ и $C_n^{(n+1)/2}$, равныя между собою и большія всѣхъ остальныхъ чиселъ.

Теорема 3. $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ . . . . (68)

Доказательство. По формулѣ (66) имѣемъ:

$$C_{n-1}^{p-1} = (n-1)!/(p-1)!(n-p)!;\quad C_{n-1}^p = (n-1)!/p!(n-p-1)!$$

Складывая почленно эти равенства, находимъ:

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = (n-1)!\left\{\frac{1}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{1}{p!(n-p-1)!}\right\} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}\left\{\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p}\right\} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}\cdot\frac{n}{p(n-p)} =$$

$$= n!/p!(n-p)! = C_n^p.$$

Справедливость формулы (68) можно доказать и безъ вычисленій. Всѣ C_n^p сочетаній изъ n элементовъ по p можно раздѣлить на двѣ группы, помѣстивъ въ одну сочетанія, содержащія опредѣленный элементъ, а въ другую сочетанія, этого элемента не содержащія. Сочетанія первой группы можно получить слѣдующимъ образомъ: изъ данныхъ n элементовъ удалимъ опредѣленный элементъ, затѣмъ изъ оставшихся $n-1$ элементовъ составимъ сочетанія по $p-1$ элементовъ и, наконецъ, къ каждому изъ нихъ присоединимъ исключенный элементъ. Число полученныхъ такимъ образомъ сочетаній равно C_{n-1}^{p-1}.

Сочетанія второй группы получимъ, если, исключивъ тотъ же самый опредѣленный элементъ, составимъ изъ оставшихся $n-1$ элементовъ сочетанія по p элементовъ. Число ихъ равно C_{n-1}^p.

Такъ какъ эти двѣ группы сочетаній исчерпываютъ всѣ сочетанія изъ n элементовъ по p, то $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

Слѣдствіе. Замѣняя n въ формулѣ (68) послѣдовательно черезъ n, $n-1$, $n-2$, ..., $p+2$, $p+1$, получимъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$
\begin{aligned}
C_n^p &= C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p,\\
C_{n-1}^p &= C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p,\\
C_{n-2}^p &= C_{n-3}^{p-1} + C_{n-3}^p;\\
&\dots\dots\dots\dots\\
C_{p+2}^p &= C_{p+1}^{p-1} + C_{p+1}^p,\\
C_{p+1}^p &= C_p^{p-1} + C_p^p.
\end{aligned}
$$

Сложивъ почленно эти равенства и сдѣлавъ въ результатѣ упрощенія, найдемъ:

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-3}^{p-1} + \cdots + C_{p+1}^{p-1} + C_p^{p-1} + C_p^p,$$

или, такъ какъ

$$C_p^p = 1 = C_{p-1}^{p-1}.$$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-3}^{p-1} + \cdots + C_{p+1}^{p-1} + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1} \dots (69)$$

Эта формула показываетъ, что *число сочетаній изъ n элементовъ по p равно суммѣ чиселъ сочетаній по $p-1$ элементовъ изъ $p-1$, p, $p+1$, ..., $n-1$ элементовъ* *).

§ 109. **Размѣщенія съ повтореніями.** Кромѣ разсмотрѣнныхъ въ предыдущихъ §§ соединеній, въ которыхъ каждый элементъ входитъ не болѣе одного раза, существуютъ еще такія соединенія, которыя могутъ содержать одинъ и тотъ же элементъ нѣсколько разъ. Такія соединенія носятъ названіе *соединеній съ повтореніями.*

Разсмотримъ способъ составленія размѣщеній съ повтореніями.

Пусть даны n элементовъ:

$$a, b, c, \dots, k, l \quad \dots\dots\dots \quad (\alpha)$$

---

*) Формула (69) примѣняется при рѣшеніи вопроса о числѣ ядеръ, образующихъ треугольную кучу.

Требуется составить изъ нихъ размѣщенія по p въ предположеніи, что каждый изъ элементовъ можетъ повторяться нѣсколько разъ.

Составимъ сначала размѣщеній *по два*; для этого къ каждому изъ элементовъ (α) приписываемъ каждый изъ нихъ; получаемъ слѣдующую таблицу размѣщеній съ повтореніями по два:

$$\left.\begin{array}{l} aa,\ ab,\ ac, \ldots,\ ak,\ al; \\ ba,\ bb,\ bc, \ldots,\ bk,\ bl; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ la,\ lb,\ lc, \ldots,\ lk,\ ll. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Для полученія размѣщеній съ повтореніями по три достаточно къ каждому изъ размѣщеній (β) приписать каждый изъ элементовъ (α). Такимъ образомъ получаемъ таблицу размѣщеній съ повтореніями по 3:

$$\left.\begin{array}{l} aaa,\ aab,\ aac, \ldots,\ aak,\ aal; \\ aba,\ abb,\ abc, \ldots,\ abk,\ abl; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ lla,\ llb,\ llc, \ldots,\ llk,\ lll. \end{array}\right\} \ldots\ldots (\gamma)$$

Отъ размѣщеній (γ) тѣмъ же способомъ переходимъ къ размѣщеніямъ съ повтореніями *по четыре*, затѣмъ *по пяти* и т. д.

Число размѣщеній (β) равно n^2; число размѣщеній (γ) равно n^3; вообще, число размѣщеній съ повтореніями изъ n элементовъ по p равно n^p.

§ 110. **Перестановки съ повтореніями**. Въ § 104 дано число P_n перестановокъ изъ n элементовъ, при чемъ элементы считались отличными другъ отъ друга. Предположимъ теперь, что въ числѣ данныхъ n элементовъ находятся α элементовъ, равныхъ a, β элементовъ, равныхъ b, γ элементовъ, равныхъ $c, \ldots, \lambda$ элементовъ равныхъ l. Такъ какъ число всѣхъ элементовъ есть n, то

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = n.$$

Найдемъ число *различныхъ* перестановокъ въ этомъ случаѣ. Обозначимъ это число черезъ x. Возьмемъ одну изъ x перестановокъ и, замѣнивъ въ ней α элементовъ, равныхъ a, различными элементами a_1 $a_2, \ldots, a_\alpha$, сдѣлаемъ всѣ перестановки этихъ элементовъ. Такимъ образомъ мы получимъ P_α перестановокъ, въ которыхъ нѣтъ одинаковыхъ элементовъ, равныхъ a. Прилагая указанный пріемъ въ каждой изъ x перестановокъ, мы найдемъ $x.P_\alpha$ перестановокъ, въ которыхъ имѣются одинаковые элементы, равные $b, c, \ldots, l$. Въ каждой изъ нихъ замѣнимъ β элементовъ, равныхъ b, различными элементами $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ и сдѣлаемъ всѣ перестановки изъ этихъ элементовъ. Такимъ образомъ изъ $x.P_\alpha$ перестановокъ мы получимъ $x.P_\alpha.P_\beta$ перестановокъ, въ которыхъ нѣтъ одинаковыхъ элементовъ, равныхъ a, и нѣтъ одинаковыхъ элементовъ, равныхъ b. Продолжая поступать описаннымъ способомъ относительно каждой группы одинаковыхъ элементовъ, мы въ концѣ концовъ, получимъ $x.P_\alpha.P_\beta.P_\gamma \ldots P_\lambda$ перестановокъ изъ n элементовъ, между которыми нѣтъ одинаковыхъ. Но число ихъ, по § 105, равно P_n; слѣд. $x.P_\alpha P_\beta P_\gamma \ldots P_\lambda = P_n$. Отсюда находимъ:

$$x = P_n/P_\alpha P_\beta \ldots P_\lambda \text{ или } x = n!/\alpha!\beta! \ldots \lambda! \quad . \quad . \quad (70)$$

Примѣръ. Сколько различныхъ словъ *) можно написать буквами, входящими въ составъ слова: *параллелограмм*?

14 буквъ, составляющихъ данное слово, распадаются на слѣдующія группы: 3 буквы *а*, 1 буква *г*, 1 буква *е*, 3 буквы *л*, 2 буквы *м*, 1 буква *о*, 1 буква *п* и 2 буквы *р*. По формулѣ (70) искомое число равно $14!/3!3!2!2! = 605\ 404\ 800$.

§ 111. **Сочетанія съ повтореніями.** Даны n элементовъ

$$a, b, c, \ldots, k, l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Требуется составить изъ нихъ сочетанія по p при условіи, что каждый изъ элементовъ можетъ повторяться. Очевидно, что при этомъ условіи p можетъ быть больше n (сравн. § 106).

Способъ составленія сочетаній съ повтореніями аналогиченъ указанному въ § 106.

Рядъ (α) представляетъ сочетанія по *одному*.

---

*) Подъ словомъ разумѣется *только* соединеніе буквъ.

Припишемъ къ элементу a всѣ элементы ряда (α), къ элементу b—всѣ элементы, кромѣ a, къ элементу c—всѣ элементы, кромѣ a, b и т. д. Такимъ образомъ мы получимъ всѣ сочетанія съ повтореніями *по два элемента:*

$$\left.\begin{array}{r} aa,\ ab,\ ac, \ldots,\ ak,\ al; \\ bb,\ bc, \ldots,\ bk,\ bl; \\ cc, \ldots,\ ck,\ cl; \\ \cdots\cdots\cdots \\ kk,\ kl; \\ ll. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Для полученія сочетаній съ повтореніями *по три* припишемъ къ каждому изъ сочетаній (β) всѣ элементы (α), начиная съ того, которымъ оканчивается взятое сочетаніе. Получимъ слѣдующія сочетанія:

$$\left.\begin{array}{r} aaa,\ aab,\ aac, \ldots,\ aak,\ aal; \\ abb,\ abc, \ldots,\ abk,\ abl; \\ acc, \ldots,\ ack,\ acl; \\ \cdots\cdots\cdots \\ bbb,\ bbc, \ldots,\ bbk,\ bbl; \\ bcc, \ldots,\ bck,\ bcl; \\ \cdots\cdots\cdots \\ kkk,\ kkl; \\ lll. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Имѣя таблицу (γ) сочетаній по три, тѣмъ же способомъ можно составить всѣ сочетанія *по четыре*, затѣмъ *по пяти* и т. д.

Примѣръ. Составить сочетанія по три изъ двухъ элементовъ a и b.

Сочетанія по одному суть a, b; сочетанія по два суть aa, ab; bb. Сочетанія по три суть aaa, aab; abb; bbb.

§ 112. **Число сочетаній съ повтореніями.** Число сочетаній съ повтореніями изъ n элементовъ по p обозначимъ черезъ K_n^p и выведемъ связь между K_n^p и K_n^{p-1}. Для этого сосчитаемъ двумя способами, сколько разъ опредѣленный элементъ, напр., a, входитъ во всѣ K_n^p сочетаній, и сравнимъ результаты.

Въ каждое изъ K_n^p сочетаній входитъ p элементовъ, слѣд., во всѣхъ K_n^p сочетаніяхъ содержится $p.K_n^p$ элементовъ. Но данные n элементовъ равноправны; слѣд., каждый изъ нихъ, въ томъ числѣ и a, входитъ $p.K_n^p/n$ разъ.

Число, показывающее, сколько разъ данный элементъ a входитъ въ K_n^p сочетаній, можно получить иначе. Выдѣлимъ изъ K_n^p сочетаній всѣ тѣ, которыя содержатъ элементъ a по крайней мѣрѣ *одинъ* разъ. Вычеркнувъ элементъ a одинъ разъ изъ каждаго такого сочетанія, мы получимъ сочетанія изъ n элементовъ по $p-1$ элементовъ, при чемъ каждый элементъ можетъ повторяться не болѣе $p-1$ разъ, т.-е. получимъ K_n^{p-1} сочетаній съ повтореніями изъ тѣхъ же n элементовъ по $p-1$ элементовъ. Въ нихъ элементъ a встрѣчается $(p-1)K_n^{p-1}/n$ разъ. Кромѣ того элементъ a былъ вычеркнутъ по одному разу изъ каждаго изъ этихъ сочетаній, т.-е. вычеркнуть K_n^{p-1} разъ. Поэтому въ K_n^p сочетаніяхъ онъ встрѣчается $(p-1)K_n^{p-1}/n + K_n^{p-1}$ разъ. Сравнивая два выраженія, полученныхъ для одного и того же числа, находимъ:

$$\frac{p}{n}\cdot K_n^p = \frac{p-1}{n}\cdot K_n^{p-1} + K_n^{p-1}.$$

Изъ этого равенства получаемъ слѣдующую связь между числами K_n^p и K_n^{p-1}:

$$K_n^p = \frac{n+p-1}{p}\cdot K_n^{p-1}.$$

Подставляя въ эту формулу вмѣсто p послѣдовательно $2, 3, \ldots p$, находимъ рядъ равенствъ:

$$K_n^2 = \frac{n+1}{2} K_n^1;$$

$$K_n^3 = \frac{n+2}{3} K_n^2;$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$K_n^p = \frac{n+p-1}{p} K_n^{p-2}.$$

Перемноживъ почленно эти равенства, упростивъ результатъ и принявъ во вниманіе, что $K_n^1 = n$, получимъ:

$$K_n^p = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p} \quad . \;. \;. \;. \quad (71)$$

Эта формула показываетъ что *число сочетаній съ повтореніями изъ n элементовъ по p равно произведенію p послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ, начиная съ n, дѣленному на произведеніе p первыхъ натуральныхъ чиселъ.*

Формулу (71) можно преобразовать такъ, чтобы выяснилось соотношеніе между числами сочетаній безъ повтореній и сочетаній съ повтореніями. Такъ какъ

$$\frac{n(n+1)\,(n+2)\ldots(n+p-1)}{1 \,.\, 2 \ldots p} = \frac{1 \,.\, 2 \ldots (n-1) \,.\, n(n+1) \ldots (n+p-1)}{1 \,.\, 2 \ldots p \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots (n-1)} =$$

$$= \frac{(n+p-1)!}{p!\;[(n+p-1)-p]!},$$

то, по формулѣ (66), заключаемъ, что

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p \quad . \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \quad (72)$$

Сочетанія съ повтореніями называютъ также *полными сочетаніями.*

§ 113. **Произведеніе биномовъ.** Въ § 97 были приведены формулы квадрата и куба бинома (форм. 57, 58, 60, 61). Онѣ представляютъ частные случаи формулы, извѣстной подъ названіемъ «*формулы бинома Ньютона*». Для вывода этой формулы разсмотримъ сначала произведеніе n биномовъ: $x+a_1$, $x+a_2, \ldots$, $x+a_n$.

Непосредственнымъ умноженіемъ находимъ слѣдующія произведенія:

$$(x+a_1)(x+a_2)=x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2, \text{ (форм. 56)}$$
$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)=x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_1a_3+$$
$$+a_2a_3)x+a_1a_2a_3.$$

Разсматривая эти равенства, легко замѣтить, что многочлены, стоящіе во вторыхъ частяхъ, составлены по одному и тому же закону, а именно: число членовъ въ каждомъ многочленѣ равно числу перемножаемыхъ биномовъ, увеличенному на единицу; степень каждаго многочлена равна числу биномовъ; коэффиціентъ старшаго члена равенъ 1; коэффиціентъ второго члена (при расположеніи по убывающимъ степенямъ x) равенъ суммѣ вторыхъ членовъ биномовъ, коэффиціентъ третьяго члена равенъ суммѣ парныхъ произведеній вторыхъ членовъ биномовъ; послѣдній членъ равенъ произведенію вторыхъ членовъ перемножаемыхъ биномовъ.

Докажемъ, что по этому же закону составляется произведеніе произвольнаго числа биномовъ.

Для этого допустимъ, что указанный законъ справедливъ для произведенія n биномовъ, и покажемъ, что въ такомъ случаѣ онъ справедливъ и для произведенія $n+1$ биномовъ. Пусть

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\cdots+$$
$$+S_{k-1}x^{n-k+1}+S_kx^{n-k}+\cdots+S_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

гдѣ S_k обозначаетъ сумму произведеній вторыхъ членовъ данныхъ биномовъ по k множителей въ каждомъ:

$$S_1=a_1+a_2+\cdots+a_n;$$
$$S_2=a_1a_2+a_1a_3+\cdots;$$
$$S_3=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots;$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$S_n=a_1a_2a_3\ldots a_n.$$

Умноживъ обѣ части равенства (α) на биномъ $x+a_{n+1}$, получимъ: $(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)(x+a_{n+1})=$

$$=x^{n+1}+\left.\begin{matrix}S_1\\+a_{n+1}\end{matrix}\right|x^n+\left.\begin{matrix}S_2\\+a_{n+1}S_1\end{matrix}\right|x^{n-1}+\cdots+\left.\begin{matrix}S_k\\+a_{n+1}S_{k-1}\end{matrix}\right|x^{n-k+1}+\cdots+a_{n+1}S_n.$$

Многочленъ, представляющій вторую часть этого равенства, составленъ по тому же закону, по которому составленъ многочленъ, стоящій во второй части равенства (α). Дѣйствительно, число его членовъ равно $n+2$, т.-е. числу перемножаемыхъ биномовъ, увеличенному на 1; степень его равна $n+1$, т.-е. числу перемножаемыхъ биномовъ; коэффиціентъ $(k+1)$-аго члена равенъ суммѣ произведеній вторыхъ членовъ данныхъ биномовъ по k множителей въ каждомъ, какъ это видно изъ слѣдующаго:

$$S_k + a_{n+1}S_{k-1} = (a_1a_2\cdots a_k + \cdots) + a_{n+1}(a_1a_2\cdots a_{k-1} + \cdots);$$

наконецъ, послѣдній членъ представляетъ произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ данныхъ биномовъ.

Итакъ, если формула (α) справедлива для n биномовъ, то она справедлива и для $n+1$ биномовъ. Но непосредственнымъ умноженіемъ мы убѣдились, что она справедлива для $n=2$ и $n=3$; слѣд., она справедлива для $n=4$, для $n=5$ и т. д., т.-е. она справедлива для произвольнаго натуральнаго числа n.

§ 114. **Формула бинома Ньютона**. Положивъ въ формулѣ (α) предыдущаго параграфа $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$, мы получимъ въ лѣвой части ея $(x+a)^n$.

Разсмотримъ коэффиціенты правой части. Коэффиціентъ S_1 представляетъ въ разсматриваемомъ случаѣ сумму n слагаемыхъ, равныхъ a; поэтому $S_1 = na$. Коэффиціентъ S_2 есть сумма слагаемыхъ, равныхъ a^2; число ихъ равно числу различныхъ парныхъ произведеній, которыя можно составить изъ n чиселъ $a_1, a_2, \cdots, a_n$, т.-е. равно числу C_n^2 сочетаній изъ n элементовъ по 2. Коэффиціентъ S_k есть сумма слагаемыхъ, равныхъ a^k; число ихъ равно числу C_n^k сочетаній изъ n элементовъ по k. Принявъ во вниманіе, что $n = C_n^1$ и $C_n^n = 1$, изъ формулы (α) § 113 получимъ:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^k a^k x^{n-k} + \cdots +$$
$$+ C_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n \quad \ldots \ldots \quad (73)$$

Эта формула даетъ разложеніе n-ой (n—натуральное число) степени бинома и извѣстна подъ названіемъ *«формулы бинома Ньютона»*.

Число членовъ второй части формулы (73) равно $n+1$. Сумма показателей буквъ x и a въ каждомъ членѣ равна n, т.-е. показателю степени бинома.

Числа $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ называются *биноміальными коэффиціентами.*

Биноміальный коэффиціентъ C_n^k часто обозначается символомъ: $\binom{n}{k}$, который можно читать такъ: n надъ k.

Обозначимъ k-ый членъ второй части формулы (73) черезъ u_k. Имѣемъ:

$$u_k = C_n^{k-1} a^{k-1} x^{n-k+1}; \quad u_{k+1} = C_n^k a^k x^{n-k}.$$

Такъ какъ $C_n^k = C_n^{k-1}(n-k+1)/k$ (форм. 65), то

$$u_{k+1} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x} u_k$$

Эта формула даетъ законъ составленія послѣдующаго числа разложенія n-ой степени бинома изъ предыдущаго.

§ 115. **Свойства биноміальныхъ коэффиціентовъ.** Основныя свойства биноміальныхъ коэффиціентовъ указаны въ § 108 при изученіи чиселъ C_n^p. Къ перечисленнымъ тамъ добавимъ еще два свойства, касающіяся суммы всѣхъ коэффиціентовъ второй части формулы (73) и суммы коэффиціентовъ членовъ, стоящихъ на четныхъ или на нечетныхъ мѣстахъ (коэффиціентовъ четнаго или нечетнаго порядка). Такъ какъ при выводѣ формулы (73) не было поставлено никакихъ ограниченій относительно значенія буквъ x и a, то можно положить $x = a = 1$. Сдѣлавъ это, получимъ:

$$2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n,$$

т.-е. *сумма всѣхъ биноміальныхъ коэффиціентовъ разложенія n-ой степени бинома равна 2^n.*

Полагая въ формулѣ (73) $x=1$ и $a=-1$; находимъ:

$$0=1-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^n C_n^n;$$

отсюда заключаемъ, что

$$1+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots,$$

т.-е. *сумма биноміальныхъ коэффиціентовъ четнаго порядка равна суммѣ коэффиціентовъ нечетнаго порядка.*

§ 116. **Вычисленіе суммы** $1^n+2^n+3^n+\cdots m^n$. Воспользуемся формулой (73) для указанія способа вычисленія суммъ одинаковыхъ степеней натуральныхъ чиселъ.

Пусть $s_n=1^n+2^n+\cdots+m^n$, гдѣ m и n натуральныя числа. По формулѣ (73) имѣемъ:

$$(a+1)^{n+1}=a^{n+1}+C_{n+1}^1 a^n+C_{n+1}^2 a^{n-1}+\cdots+$$
$$+C_{n+1}^{n-1}a^2+C_{n+1}^n a+1.$$

Подставляя въ эту формулу вмѣсто a послѣдовательно числа $0, 1, 2, \ldots, m$, находимъ рядъ равенствъ:

$$1^{n+1}= \qquad\qquad 1;$$
$$2^{n+1}=1^{n+1}+C_{n+1}^1\cdot 1^n+C_{n+1}^2\cdot 1^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}\cdot 1^2+C_{n+1}^n\cdot 1+1;$$
$$3^{n+1}=2^{n+1}+C_{n+1}^1\cdot 2^n+C_{n+1}^2\cdot 2^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}\cdot 2^2+C_{n+1}^n\cdot 2+1;$$
$$4^{n+1}=3^{n+1}+C_{n+1}^1\cdot 3^n+C_{n+1}^2\cdot 3^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}\cdot 3^2+C_{n+1}^n\cdot 3+1;$$

. . . .

$$(m+1)^{n+1}=m^{n+1}+C_{n+1}^1 m^n+C_{n+1}^2 m^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}m^2+C_{n+1}^n m+1.$$

Сложивъ почленно эти равенства и упростивъ результатъ, получимъ формулу:

$$(m+1)^{n+1}=C_{n+1}^1\cdot s_n+C_{n+1}^2\cdot s_{n-1}+\cdots+$$
$$+C_{n+1}^{n-1}\cdot s_2+C_{n+1}^n\cdot s_1+(m+1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

показывающую связь между числами $s_1, s_2, \ldots$ и позволяющую вычислять послѣдовательно эти числа.

Приложимъ ее къ вычисленію s_1, s_2 и s_3, т.-е. къ опредѣленію суммы m первыхъ натуральныхъ чиселъ, суммы ихъ квадратовъ и суммы ихъ кубовъ.

Полагая въ формулѣ (α) $n=1$, находимъ:

$$(m+1)^2 = C_2^1 s_1 + (m+1) \text{ или } (m+1)^2 = 2s_1 + (m+1);$$

отсюда для s_1 получимъ:

$$s_1 = m(m+1)/2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (74)$$

Полагая въ формулѣ (α) $n=2$, находимъ:

$$(m+1)^3 = C_3^1 \cdot s_2 + C_3^2 s_1 + (m+1),$$

или $$(m+1)^3 = 3s_2 + 3m(m+1)/2 + (m+1).$$

Отсюда

$$s_2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = m(m+1)(2m+1)/6 \quad . \; . \quad (75)$$

При $n=3$ формула (α) даетъ равенство:

$$(m+1)^4 = C_4^1 s_3 + C_4^2 s_2 + C_4^3 s_1 + (m+1),$$

или

$$(m+1)^4 = 4s_3 + m(m+1)(2m+1) + 2m(m+1) + (m+1).$$

Отсюда

$$s_3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2 = s_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (76)$$

§ 117. **Возвышеніе въ степень многочлена.** Формула (73), дающая разложеніе n-ой степени бинома, представляетъ частный случай формулы, доставляющей разложеніе n-ой степени полинома.

Пусть требуется найти разложеніе $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n$, гдѣ a съ индексами обозначаютъ произвольныя числа, а m и n—натуральныя числа. Такъ какъ $(a_1 + a_2 \cdots + a_m)^n$ представляетъ (§ 39) произведеніе n множителей, равныхъ $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$, то для полученія искомой формулы разложенія, достаточно раскрыть указанное произведеніе. Легко видѣть, что въ раскрытой формѣ это произведеніе до приведенія подобныхъ членовъ представляетъ сумму членовъ вида $a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_m^{p_m}$, гдѣ p суть нули или натуральныя числа и удовлетворяютъ условію:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = n.$$

Но членовъ, равныхъ написанному, можетъ оказаться не одинъ, а нѣсколько. Такъ какъ коэффиціенты всѣхъ членовъ суть единицы, то для приведенія подобныхъ членовъ нужно сосчитать ихъ число.

Произведеніе $a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_m^{p_m}$ можно разсматривать, какъ одну изъ перестановокъ, образованную изъ n элементовъ

$$a_1, a_1, \ldots, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_2, \ldots, a_m, a_m, \ldots, a_m,$$

между которыми находятся p_1 элементовъ, равныхъ a_1, p_2 элементовъ, равныхъ $a_2, \ldots, p_m$ элементовъ, равныхъ a_m. Такъ какъ всѣ такія перестановки соотвѣтствуютъ одному и тому же произведенію $a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_m^{p_m}$, то число членовъ разложенія, равныхъ разсматриваемому, равно числу указанныхъ перестановокъ т.-е. равно $n!/p_1! \cdots p_m!$ (§ 110).

Итакъ, общій членъ искомаго разложенія есть

$$\frac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_m!}\, a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_m^{p_m},$$

а самое разложеніе можно представить формулой:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{p_1!\; p_2! \ldots p_m!}\, a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_m^{p_m}, \ldots (77)$$

гдѣ Σ обозначаетъ сумму членовъ указаннаго вида при всѣхъ возможныхъ нулевыхъ и цѣлыхъ положительныхъ значеніяхъ $p_1, p_2, \ldots, p_m$, удовлетворяющихъ условію.

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = n, \quad \ldots \ldots \ldots (78)$$

при чемъ символъ $0!$ принимается равнымъ 1.

При $m = 2$ формула (77) переходитъ въ формулу (73).

Примѣръ. $(a_1 + a_2 + a_3)^3 = \sum \frac{3!}{p_1!\, p_2!\, p_3!}\, a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3}$, $p_1 + p_2 + p_3 = 3$.

Приведемъ таблицу всѣхъ значеній p_1, p_2 и p_3, удовлетворяющихъ послѣднему равенству, помѣстивъ ихъ соотвѣтственныя значенія въ одномъ вертикальномъ столбцѣ:

$$\begin{aligned} p_1 &= 3;\ 0;\ 0;\ 2;\ 2;\ 1;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1, \\ p_2 &= 0;\ 3;\ 0;\ 1;\ 0;\ 2;\ 2;\ 0;\ 1;\ 1, \\ p_3 &= 0;\ 0;\ 3;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 2;\ 1. \end{aligned}$$

Вычисливъ соотвѣтствующіе этимъ значеніямъ p коэффиціенты, получимъ слѣдующее разложеніе:

$$(a_1 + a_2 + a_3)^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 3a_1^2a_2 + 3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2 + 3a_2^2a_3 + \\ + 3a_1a_3^2 + 3a_2a_3^2 + 6a_1a_2a_3.$$

§ 118. **Разложеніе** $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m)^n$. Разложеніе n-ой (n натуральное число) степени многочлена, расположеннаго по степенямъ x, совершается при помощи формулы (77). Общій членъ разложенія, по предыдущему §, равенъ:

$$\frac{n!}{p_0!\,p_1!\cdots p_m!}\,a_0^{p_0}a_1^{p_1}\cdots a_m^{p_m}\cdot x^{p_1+2p_2+\cdots+mp_m}.$$

Если требуется найти коэффиціентъ того члена разложенія, который содержитъ x^r, то нужно вычислить сумму

$$\sum \frac{n!}{p_0!\,p_1!\cdots p_m!}\,a_0^{p_0}a_1^{p_1}\cdots a_m^{p_m},$$

распространенную на всѣ цѣлыя и положительныя или нулевыя значенія p, удовлетворяющія условіямъ

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_m = n,\quad p_1 + 2p_2 + \cdots + mp_m = r.$$

Примѣръ. Найти коэффиціентъ при x^7 въ разложеніи $(1 - x + x^2)^5$.

Общій членъ разложенія таковъ:

$$\frac{5!}{p_0!\,p_1!\,p_2!}\cdot(+1)^{p_0}(-1)^{p_1}(+1)^{p_2}\,x^{p_1+2p_2}.$$

Искомый коэффиціентъ представляется суммой

$$\sum \frac{5!}{p_0!\,p_1!\,p_2!}(+1)^{p_0}(-1)^{p_2}(+1)^{p_2},$$

распространенной на всѣ нулевыя и цѣлыя и положительныя значенія p_0, p_1 и p_2, удовлетворяющія условіямъ:

$$p_0+p_1+p_2=5;\ p_1+2p_2=7.$$

Не трудно убѣдиться, что только двѣ системы значеній p_0, p_1 и p_2 удовлетворяютъ этимъ требованіямъ, а именно:

$$p_0=0,\ p_1=3,\ p_2=2;\ p_0=1;\ p_1=1,\ p_2=3.$$

Соотвѣтствующія этимъ системамъ слагаемыя искомаго коэффиціента суть

$$\frac{5!}{0!\ 3!\ 2!}1.-1\,.\,1=-10,$$

$$\frac{5!}{1!\ 1!\ 3!}\ 1.-1\,.\,1=-20.$$

Слѣд., искомый коэффиціентъ равенъ—30.

ГЛАВА VIII.

Тождественныя выраженія. Понятіе о функціи. Измѣненія перемѣннаго и функціи. Графикъ функціи. Простѣйшія функціи перемѣннаго x. Цѣлая раціональная функція. Нѣкоторыя свойства цѣлой раціональной функціи. Дробная раціональная функція.

§ 119. **Тождественныя выраженія.** Два буквенныхъ выраженія, имѣющія одинаковое числовое значеніе при *всѣхъ* значеніяхъ буквъ, которыя въ нихъ входятъ, называются *тождественными* (эквивалентными, равносильными).

Напр., правая и лѣвая части равенствъ (56)—(62) суть тождественныя выраженія; выраженія a^2+1 и a^3+1, имѣющія одинаковыя числовыя значенія при $a=0$ и 1, принимаютъ различныя значенія при $a=2$; слѣд., эти выраженія не тождественныя.

Для обозначенія тождественности двухъ выраженій употребляется иногда знакъ $\equiv$, который ставится между ними;

напр., $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$. Этотъ знакъ называется знакомъ тождества и читается словами: *„тождественно равно“*.

§ 120. **Понятіе о функціи.** Пусть x и y два перемѣнныя числа (§ 93), связанныя между собою такъ, что каждому произвольно взятому значенію x соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе y.

Перемѣнное x называется *независимымъ* перемѣннымъ, перемѣнное y — его *функціей*, а зависимость перемѣннаго y отъ перемѣннаго x называется *функціональной зависимостью*.

Для обозначенія функціональной зависимости въ общемъ видѣ употребляется равенство: $y=f(x)$, читаемое такъ: *y равняется функціи f отъ x.*

Для обозначенія различныхъ функцій употребляются вмѣсто f другія буквы, такъ что $F(x)$, $\varphi(x)$, $P(x)$ суть обозначенія различныхъ функцій перемѣннаго x.

Примѣромъ функціи перемѣннаго x можетъ служить любое алгебраическое выраженіе (§ 86), въ составъ котораго входитъ x. Напр., $2x-1$, x^2, $\sqrt{x}$ суть функціи перемѣннаго x.

Опредѣленіе функціи легко распространить на случай двухъ, трехъ и, вообще, многихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Пусть x, y, ... обозначаютъ перемѣнныя, каждому изъ которыхъ можно дать произвольное значеніе, и u — перемѣнное, имѣющее опредѣленное значеніе для каждой произвольно взятой системы значеній перемѣнныхъ x, y, ...

Перемѣнныя x, y, ... называются независимыми перемѣнными, а u ихъ функціей. Существованіе функціональной зависимости между x, y, ... и u обозначается равенствомъ: $u=f(x,\ y, \ldots.)$; u называется функціей многихъ перемѣнныхъ.

Напр., $u=3x+2y$ есть функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, $u=xyz$ есть функція трехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y и z.

§ 121. **Измѣненіе независимаго перемѣннаго.** Если x обозначаетъ перемѣнное число, способное принимать только *вещественныя* или *дѣйствительныя* значенія, то оно называется *дѣйствительнымъ перемѣннымъ.*

Совокупность вещественныхъ чиселъ, заключенныхъ между числами a и b, называется *интерваломъ*, а числа a и b — его *границами*.

Интервалъ, ограниченный числами a и b, будемъ обозначать символомъ (a, b).

Способы измѣненія перемѣннаго x въ интервалѣ (a, b) могутъ быть весьма различны, но всѣ они сводятся къ двумъ: измѣненію *прерывному* и измѣненію *непрерывному*. Подъ прерывнымъ разумѣется такое измѣненіе, при которомъ значеніями x могутъ служить только нѣкоторыя изъ чиселъ, содержащихся въ данномъ интервалѣ (a, b).

Непрерывнымъ называется такое измѣненіе, при которомъ *послѣдовательными* значеніями перемѣннаго x могутъ служить всѣ числа, раціональныя и ирраціональныя, заключенныя между a и b и расположенныя въ порядкѣ ихъ возрастанія или убыванія.

Если мы будемъ перемѣнное x изображать точкой на оси абсциссъ (§§ 2, 29, 37, 57), то геометрическимъ образомъ непрерывнаго измѣненія явится движеніе точки M, опредѣляемой абсциссой x и описывающей отрѣзокъ AB, концы котораго A и B имѣютъ абсциссами соотвѣтственно числа a и b.

§ 122. **Понятіе о предѣлѣ.** Пусть перемѣнное x измѣняется такъ, что послѣдовательныя значенія его выражаются числами:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$$

Если можно найти такое натуральное число p, что для всѣхъ натуральныхъ чиселъ n, не меньшихъ p $(n \geqslant p)$, абсолютное значеніе разности $x_n - a$ значеній перемѣннаго x и нѣкотораго постояннаго числа a будетъ меньше произвольнаго, напередъ заданнаго, какъ угодно малаго положительнаго числа ε, то постоянное число a называется *предѣломъ* перемѣннаго x, измѣняющагося по данному закону.

Предѣлъ обозначается символомъ lim, поставленнымъ передъ перемѣннымъ: $\lim x = a$. Символъ lim представляетъ три начальныя буквы латинскаго слова *limes* или французскаго *limite*, обозначающихъ предѣлъ.

Разсмотримъ примѣръ. Пусть перемѣнное x измѣняется такъ, что послѣдовательными значеніями его служатъ числа:

$$x_1 = 0{,}1;\ x_2 = 0{,}11;\ x_3 = 0{,}111;\ldots;\ x_n = 0{,}\overbrace{11\ldots1}^{n\text{ цифръ}};\ldots$$

Покажемъ, что при указанномъ законѣ измѣненія перемѣнное x приближается къ предѣлу $a = 1/9$.

Для этого замѣтимъ, что

$$1/9 - x_n = \frac{1}{9} - \frac{\overbrace{11\ldots1}^{n\text{ цифръ}}}{10^n} = \frac{1}{9\,.\,10^n} < 1/10^n.$$

Чтобы сдѣлать разность $1/9 - x_n$ меньше заданнаго положительнаго числа ε, достаточно замѣнить ε десятичной дробью вида $1/10^p$, меньшею ε; тогда разности $1/9 - x_p$, $1/9 - x_{p+1}, \ldots$ окажутся меньше ε.

Пусть, напр., $\varepsilon = 3/500$; такъ какъ $3/500 > 0{,}001$, то

$$1/9 - x_n < 0{,}001 < \varepsilon \text{ для } n \geqslant 3.$$

Слѣд., по опредѣленію предѣла число $1/9$ есть предѣлъ, къ которому стремится перемѣнное x или послѣдовательность чиселъ:

$$0{,}1;\ 0{,}11;\ 0{,}111;\ 0{,}1111;\ldots$$

§ 123. **Безконечно малыя числа.** Перемѣнное число, имѣющее предѣломъ *нуль*, называется числомъ *безконечно малымъ*.

Изъ опредѣленія предѣла (§ 122) слѣдуетъ, что *абсолютное значеніе безконечно малаго числа можетъ сдѣлаться меньше произвольнаго, какъ угодно малаго, постояннаго положительнаго числа* ε.

Дѣйствительно, если $\lim x = 0$, то $|x - 0| < \varepsilon$ или $|x| < \varepsilon$.

§ 124. **Безконечно большія числа. Конечныя числа.** Перемѣнное, измѣняющееся такъ, что абсолютное значеніе его можетъ сдѣлаться больше произвольно большаго, напередъ заданнаго положительнаго числа, называется *безконечно большимъ числомъ*.

О такомъ числѣ говорятъ, что оно стремится при своемъ измѣненіи къ *безконечности*, или что *предѣломъ* его служитъ *безконечность*.

Безконечность обозначается знакомъ ∞. Къ этому знаку присоединяется $+$ или $-$, смотря по тому, будутъ ли значенія перемѣннаго съ безгранично возрастающимъ абсолютнымъ значеніемъ числами положительными или числами отрицательными.

Постоянныя числа, неравныя нулю, и перемѣнныя, которыхъ предѣлы отличны отъ нуля и безконечности, называются *конечными*.

§ 125. **Измѣненія функціи.** При изученіи измѣненія функціи $f(x)$ перемѣннаго x принимаются во вниманіе не только ея измѣненія, но и измѣненія независимаго перемѣннаго.

Пусть (a, b) есть интервалъ измѣненія перемѣннаго x, и x_1 одно изъ его значеній, содержащихся въ этомъ интервалѣ.

Функцію этого перемѣннаго обозначимъ черезъ y, а ея значеніе при $x = x_1$ черезъ y_1. Переходя отъ значенія x_1 къ значенію $x_1 + h$, также содержащемуся въ разсматриваемомъ интервалѣ, мы даемъ перемѣнному x *приращеніе* h. Новому значенію (т.-е. $x_1 + h$) перемѣннаго соотвѣтствуетъ новое значеніе функціи, которое мы обозначимъ черезъ $y_1 + k$; k есть приращеніе функціи, соотвѣтствующее приращенію h перемѣннаго x при переходѣ его отъ значенія x_1 къ значенію $x_1 + h$.

Если можно выбрать h настолько малымъ по абсолютному значенію, что абсолютное значеніе k окажется меньше произвольнаго, заранѣе даннаго, малаго положительнаго числа ε, то функція называется *непрерывной* при $x = x_1$.

Если же окажется, что функція обладаетъ свойствомъ непрерывности для всѣхъ значеній перемѣннаго x, заключенныхъ въ интервалѣ (a, b), то она называется непрерывной въ этомъ интервалѣ.

§ 126. **Примѣры 1.** Покажемъ, что функція $y = 2x - 1$ непрерывна при $x = 1$.

Для даннаго случая имѣемъ:

$$x_1 = 1;\ y_1 = 2.1 - 1 = 1;\ y_1 + k = 2(1 + h) - 1 = 1 + 2h;\ k = 2h.$$

Для того, чтобы $|k|$ было меньше произвольно малаго положительнаго числа ε, достаточно взять $|h| < \varepsilon/2$.

Легко видѣть, что данная функція непрерывна для всѣхъ значеній x.

2. Показать, что функція $y = x^2/4$ непрерывна при всякомъ значеніи x.

Такъ какъ $y = x^2/4$, $y + k = (x + h)^2/4 = (x^2 + 2xh + h^2)/4$, то $k = (2xh + h^2)/4$ и $|k| = |2xh + h^2|/4$.

Нужно показать, что надлежащимъ выборомъ h можно сдѣлать $|k|$ меньше произвольнаго, малаго, положительнаго числа ε. Замѣтивъ, что дѣло идетъ о малыхъ измѣненіяхъ перемѣннаго, можно положить $|h| < 1$ и, слѣд., $h^2 < |h|$ (§ 39, 6).

Такъ какъ (§ 26):

$$|2xh + h^2| \leqslant |2xh| + h^2 < |h| \{ 2|x| + 1 \},$$

то при $|h| < 4\varepsilon / \{ 2|x| + 1 \}$ приращеніе k функціи будетъ по абсолютному значенію меньше ε.

3. Показать, что функція $y = 1/x$ непрерывна при $x = 1$.

Въ этомъ случаѣ:

$$x_1 = 1;\ y_1 = 1;\ y_1 + k = 1/(1+h);\ k = 1/(1+h) - 1 = -h/(1+h).$$

Для того, чтобы $|k| < \varepsilon$, нужно найти значенія h, удовлетворяющія неравенству:

$$\left| \frac{h}{1+h} \right| < \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Принимая, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, $|h| < 1$ и замѣчая, что (§ 26):

$$|1 + h| \geqslant 1 - |h| \text{ и } \left| \frac{h}{1+h} \right| \leqslant \frac{|h|}{1 - |h|},$$

заключаемъ, что значенія h, удовлетворяющія неравенству

$$\frac{|h|}{1 - |h|} < \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

удовлетворяютъ и неравенству (α). Изъ неравенства (β) слѣдуетъ, что $|h| < \varepsilon(1 - |h|)$, $|h| < \varepsilon - \varepsilon|h|$, $|h|(1 + \varepsilon) < \varepsilon$, $|h| < \varepsilon/(1 + \varepsilon)$.

Указанное разсужденіе можно примѣнить при всѣхъ значеніяхъ x, кромѣ $x = 0$. Слѣд., разсматриваемая функція непрерывна при всѣхъ значеніяхъ x, отличныхъ отъ нуля.

Что же касается до значенія функціи при $x = 0$, то нужно замѣтить, что ея значенія получаются дѣленіемъ единицы на значенія перемѣннаго. Такъ какъ дѣленіе на нуль невозможно (§ 63), то функція не имѣетъ значенія при $x = 0$.

Но самый вопросъ о нулевомъ значеніи независимаго перемѣннаго, какъ представляющемъ нѣкоторую особенность для данной функціи, можно поставить иначе: зная, что для $x = 0$ функція не имѣетъ значенія, прослѣдимъ *измѣненія* ея значеній при *приближеніи* перемѣннаго x къ *нулю.*

При стремленіи x къ нулю, какъ къ предѣлу, абсолютное значеніе его безгранично убываетъ (§ 123).

Когда x принимаетъ послѣдовательно значенія 0,1; 0,01; 0,001;...., функція y получаетъ значенія 10, 100, 1000,.... Когда x принимаетъ послѣдовательно значенія — 0,1; — 0,01; — 0,001;...., то функція получаетъ значенія — 10, — 100, — 1000,....

Въ томъ и другомъ случаѣ абсолютное значеніе функціи *возрастаетъ.*

Кромѣ того легко видѣть, что указанное возрастаніе *неограничено*, т.-е. въ процессѣ приближенія x къ нулю можно указать такое значеніе $|x|$, начиная съ котораго соотвѣтственныя значенія $|y|$ будутъ больше произвольно выбраннаго большаго положительнаго числа A.

Напр., для того, чтобы $|y| > 10^6$, достаточно взять такія значенія x, для которыхъ $|x| < 10^{-6}$.

Такой способъ измѣненія функціи кратко характеризуется словами: *„функція стремится къ безконечности“*, или *при $x = 0$ функція получаетъ безконечно большое значеніе“*, или *„при $x = 0$ функція равна безконечности“*. Знаками это свойство функціи выражается такъ:

$$\lim_{x=0} y = \lim_{x=0} 1/x = \infty.$$

При непрерывномъ измѣненіи x отъ $-\infty$ до 0 функція $y = 1/x$ *отрицательна* и безгранично возрастаетъ по абсолютному значенію, т.-е. стремится къ $-\infty$, а при измѣненіи x отъ $+\infty$ до 0 функція положительна и безгранично возрастаетъ, т.-е. стремится къ $+\infty$. Поэтому предѣльнымъ значеніемъ функціи при $x=0$ будетъ $-\infty$ или $+\infty$ въ зависимости отъ того, совершается ли приближеніе x къ нулю черезъ *возрастаніе отрицательныхъ* значеній или черезъ *убываніе положительныхъ*.

При непрерывномъ измѣненіи перемѣннаго x отъ $-\infty$ до $+\infty$ переходъ его черезъ нуль (т.-е. черезъ значеніе $x=0$) сопровождается перемѣной знака значеній функціи, которая *скачкомъ* переходитъ отъ безконечно большого *отрицательнаго* значенія къ безконечно большому *положительному* значенію (отъ $-\infty$ къ $+\infty$). Такимъ образомъ нарушается ея *непрерывность*; значеніе $x=0$ называется мѣстомъ *разрыва* функціи.

§ 127. **Изученіе совмѣстныхъ значеній перемѣннаго и функціи. Таблицы. Графикъ функціи.** Разсматривая различныя значенія перемѣннаго x и соотвѣтственныя значенія функціи мы получаемъ два ряда чиселъ, которыя можно расположить въ таблицѣ.

Изученіе подобнаго рода таблицъ позволитъ вывести нѣкоторыя заключенія о *совмѣстныхъ измѣненіяхъ* перемѣннаго и функціи для извѣстнаго интервала.

Найдемъ, напр., значенія приведенныхъ въ предыдущемъ § функцій для $x=1,\ 1^1/_2,\ 2,\ 2^1/_2$ и 3 и расположимъ результаты въ слѣдующихъ таблицахъ:

a) $y=2x-1$

Значенія x.	Значенія y.
1	1
$1^1/_2$	2
2	3
$2^1/_2$	4
3	5

b) $y=x^2/4$

Значенія x.	Значенія y.
1	$^1/_4$
$1^1/_2$	$^9/_{16}$
2	1
$2^1/_2$	$1^9/_{16}$
3	$2^1/_4$

c) $y=\,^1/x$

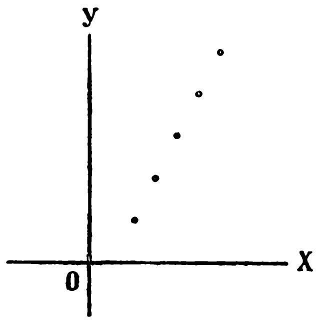
Значенія x.	Значенія y.
1	1
$1^1/_2$	$^2/_3$
2	$^1/_2$
$2^1/_2$	$^2/_5$
3	$^1/_3$

Таблица a) показываетъ, что функція $y=2x-1$ возрастаетъ вмѣстѣ съ x, при чемъ *одинаковымъ приращеніямъ перемѣннаго* (равнымъ въ разсматриваемомъ случаѣ $^1/_2$) соотвѣтствуютъ *одинаковыя приращенія функціи* (равныя 1).

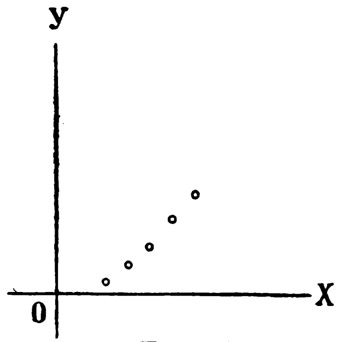
Таблица b) показываетъ, что функція $y=x^2/4$ также возрастаетъ вмѣстѣ съ x, но *равнымъ* приращеніямъ перемѣннаго сотвѣтствуютъ *неравныя* приращенія функціи.

Таблица c) показываетъ, что функція $y=1/x$ убываетъ съ возрастаніемъ x, и что *равнымъ положительнымъ* приращеніямъ перемѣннаго соотвѣтствуютъ *неравныя отрицательныя* приращенія функціи.

Всѣ эти заключенія относятся къ тому интервалу, для котораго составлены таблицы, т.-е. въ данномъ случаѣ къ интервалу (1, 3).



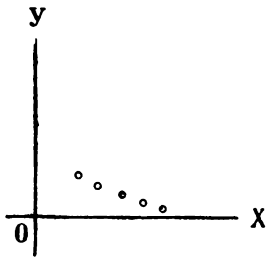
Черт. 10.



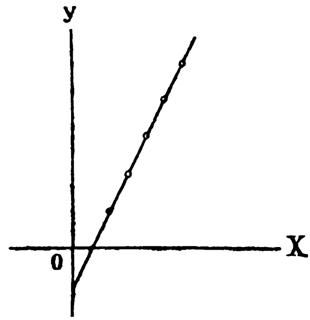
Черт. 11.

Принимая x и y за прямоугольныя координаты точки на плоскости (§ 73), можно при помощи этихъ таблицъ для каждой функціи построить по 5 точекъ, относительное расположеніе которыхъ иллюстрируетъ приведенныя выше заключенія (черт. 10, 11, 12).

Уменьшая скачекъ при переходѣ отъ одного значенія x къ слѣдующему, дѣлая его, наприм., равнымъ $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{10}$ и т. д., мы удлиняемъ таблицы и увеличиваемъ число *отдѣльныхъ* точекъ, которыя располагаются все болѣе и болѣе густымъ рядомъ. Это вызываетъ въ насъ представленіе о *линіи*, какъ



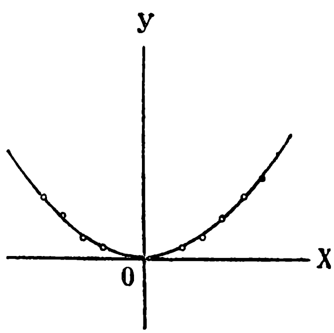
Черт. 12.



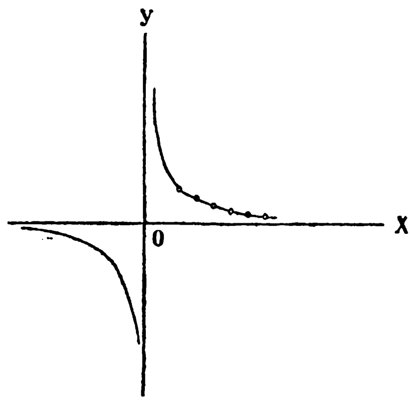
Черт. 13.

геометрическомъ образѣ, способномъ дать иллюстрацію совмѣстныхъ измѣненій независимаго перемѣннаго x и его функціи y. Указанныя выше отдѣльныя точки лежатъ на линіи, каждая точка которой даетъ своей абсциссой значеніе независимаго перемѣннаго x, а своей ординатой—соотвѣтственное значеніе функціи y. Эта линія называется *графикомъ* функціи. Измѣненіе ординатъ графика даетъ наглядное представленіе объ измѣненіи функціи.

На чертежахъ 13, 14, 15 изображены соотвѣтственно графики функцій $y = 2x - 1$ *(прямая)*, $y = x^2/4$ *(парабола)* и $y = 1/x$ *(гипербола)*.



Черт. 14.



Черт. 15.

§ 128. **Корни функціи.** Тѣ значенія перемѣннаго, при которыхъ функція обращается въ *нуль*, называются ея *корнями*. Корни функціи могутъ быть *вещественные* и *комплексные*.

Напр., корнями функціи x^2-1 служатъ числа ± 1, потому что $(\pm 1)^2-1=0$; корнями функціи x^2+1 служатъ числа $\pm i$, такъ какъ $(\pm i)^2+1=0$; число $(-1+i\sqrt{3})/2$ есть корень функціи x^3-1, потому что $\{(-1+i\sqrt{3})/2\}^3-1=(-1+$ $+3i\sqrt{3}+3.3-3i\sqrt{3})/8-1=0$; числа 2 и 5 служатъ корнями функціи $x^2-7x+10$.

Вещественные корни функціи геометрически изображаются точками пересѣченія графика функціи съ осью x, такъ какъ для этихъ точекъ ордината равна нулю (§ 73).

§ 129. **Алгебраическія функціи и ихъ виды.** Конечный рядъ шести алгебраическихъ дѣйствій, т.-е. сложеній, вычитаній, умноженій, дѣленій, возвышеній въ степень, извлеченій корней съ цѣлымъ и положительнымъ показателемъ, совершенныхъ надъ перемѣнными, приводитъ къ выраженію, которое называется *алгебраической функціей* этихъ перемѣнныхъ.

Алгебраическая функція, представляющая результатъ конечнаго ряда первыхъ *пяти* изъ указанныхъ выше дѣйствій, называется *раціональной* функціей. Функція, содержащая извлеченіе корней изъ перемѣнныхъ, называется *ирраціональной*.

Напр., $x^2+axy+by^2-c/(x+y)$, гдѣ a, b, c суть постоянныя, есть раціональная функція двухъ перемѣнныхъ x и y; $\sqrt{x}-2\sqrt{y}+\sqrt{z}$ есть ирраціональная функція трехъ перемѣнныхъ x, y и z; $x-\sqrt{3}$ есть раціональная функція перемѣннаго x, такъ какъ входящее въ нее извлеченіе корня совершается надъ постояннымъ числомъ 3.

Алгебраическая функція, представляющая результатъ конечнаго ряда всѣхъ шести дѣйствій за исключеніемъ *дѣленія* на перемѣнныя, называется *цѣлой* функціей перемѣнныхъ. Функція, содержащая дѣленіе на перемѣнныя, называется *дробной*.

Напримѣръ, x^2-axy, $x^2+0{,}3xy$, $\sqrt{xy}-z$ суть функціи *цѣлыя*; $x^2-a/(x^2+y^2)$, $(\sqrt{x}+\sqrt{y})/z$ — суть функціи *дробныя*.

Конечный рядъ сложеній, вычитаній, умноженій и возвышеній въ цѣлую и положительную степень, произведенныхъ надъ перемѣннымъ x, приводитъ къ цѣлому, раціональному относительно x многочлену (§ 95), который называется *цѣлой, раціональной функціей перемѣннаго x.*

Общій видъ ея слѣдующій (§ 95):

$$f(x) \equiv p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1} x + p_n,$$

гдѣ n есть натуральное число, называемое *степенью* функціи, а буквы p съ индексами обозначаютъ постоянныя относительно x числа и называются ея *коэффиціентами*.

Цѣлая раціональная функція *первой* степени называется *линейной*.

Частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій перемѣннаго x называется *дробной раціональной функціей* этого перемѣннаго. Общій видъ ея таковъ:

$$\frac{p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n}{q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m},$$

гдѣ n и m суть натуральныя числа, а p и q съ индексами суть постоянныя относительно x числа, при чемъ нѣкоторыя изъ нихъ могутъ быть нулями.

При $n < m$ написанная выше дробь называется *правильной*, а при $n \geqslant m$ — *неправильной*. Въ послѣднемъ случаѣ посредствомъ дѣленія числителя на знаменатель можно изъ данной дроби исключить цѣлое выраженіе и данную дробную функцію представить въ видѣ суммы цѣлой раціональной функціи и правильной дроби (§ 100).

§ 130. **Непрерывность цѣлой раціональной функціи.** Для того, чтобы показать непрерывность цѣлой раціональной функціи перемѣнннаго x, приведемъ сначала двѣ общихъ теоремы, касающіяся непрерывныхъ функцій.

Теорема 1. *Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ суть непрерывныя въ данномъ интервалѣ функціи x, то сумма $\varphi_1(x)$* и *$\varphi_2(x)$ и разность $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ этихъ функцій суть также непрерывныя функціи въ томъ же интервалѣ.*

Дѣйствительно, обозначимъ черезъ h приращеніе перемѣннаго x и черезъ k_1 и k_2 соотвѣтственныя приращенія функцій $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Изъ опредѣленія непрерывности функціи (§ 125) и условій теоремы слѣдуетъ, что для каждаго значенія x, лежащаго въ интервалѣ непрерывности, можно выбрать $|h|$ настолько малымъ, чтобы

$$|k_1| < \varepsilon/2; \ |k_2| < \varepsilon/2.$$

Но приращенія функцій $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ и $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, соотвѣтствующія приращенію h перемѣннаго x, суть k_1+k_2 и k_1-k_2.

По свойству алгебраической суммы (§ 26) имѣемъ неравенства:

$$|k_1+k_2| \leqslant |k_1|+|k_2|; \ |k_1-k_2| \leqslant |k_1|+|k_2|.$$

Принимая во вниманіе указанный выше выборъ h, находимъ

$$|k_1+k_2| < \varepsilon; \ |k_1-k_2| < \varepsilon;$$

эти неравенства и доказываютъ справедливость теоремы (§ 125).

Теорему легко распространить на алгебраическую сумму произвольнаго конечнаго числа непрерывныхъ функцій

Теорема 2. *Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ суть непрерывныя въ данномъ интервалѣ функціи x, то произведеніе $\varphi_1(x).\varphi_2(x)$ этихъ функцій есть функція x, также непрерывная въ томъ же интервалѣ.*

Такъ какъ

$$\varphi_1(x+h)=\varphi_1(x)+k_1, \ \varphi_2(x+h)=\varphi_2(x)+k_2,$$

то

$$\varphi_1(x+h)\cdot\varphi_2(x+h)-\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)=k_1\varphi_2(x)+k_2\varphi_1(x)+k_1k_2.$$

Это равенство даетъ выраженіе приращенія функціи $\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)$, соотвѣтствующее приращенію h перемѣннаго x, черезъ приращенія k_1 и k_2 функцій $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Такъ какъ, по условію, функціи $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны въ разсматриваемомъ интервалѣ, то приращеніе h можно взять настолько малымъ по абсолютному значенію, что абсолютныя значенія каждаго изъ слагаемыхъ второй части послѣдняго равенства окажутся меньше произвольно малаго положительнаго числа $\varepsilon/3$. При такомъ выборѣ h абсолютное значеніе приращенія функціи $\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)$ будетъ меньше ε. Отсюда вытекаетъ заключеніе о справедливости теоремы *).

Легко распространить доказанную теорему на случай произведенія произвольнаго конечнаго числа непрерывныхъ функцій.

Слѣдствіе 1. *Произведеніе $a.\varphi(x)$ непрерывной въ данномъ интервалѣ функціи $\varphi(x)$ на постоянное число есть функція, непрерывная въ томъ же интервалѣ.*

Слѣдствіе 2. *Произведеніе px^m, гдѣ m есть натуральное число, а p — постоянное, есть непрерывная функція x для всѣхъ значеній x.*

Дѣйствительно, произведеніе $px^m = p.x.x....x$ (m множителей); каждый изъ перемѣнныхъ множителей представляетъ непрерывную функцію x; поэтому, по теоремѣ 2 и слѣдствію 1, px^m есть непрерывная функція x.

Теорема I. *Цѣлая раціональная функція x непрерывна для всѣхъ значеній x.*

Эта теорема вытекаетъ непосредственно изъ слѣдствія 2 теоремы 2 и теоремы 1.

Слѣдуетъ замѣтить, что слова теоремы: *„при всѣхъ значеніяхъ x"* относятся къ *конечнымъ* (§ 124) и *нулевому* значеніямъ перемѣннаго. Изъ нея слѣдуетъ, что при приближеніи x къ предѣлу a, гдѣ a есть конечное число или нуль, функція

$$f(x) \equiv p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n$$

стремится къ предѣлу $f(a)$.

Дѣйствительно, при приближеніи x къ a значенія x можно представить въ видѣ суммы $a+h$, гдѣ h есть безконечно малое число (§ 123). По утверждаемому теоремой свойству непрерывности функціи $f(x)$ при $x=a$ можно выбрать h такъ, чтобы осуществилось неравенство:

$$|f(a) - f(a+h)| < \varepsilon,$$

гдѣ ε есть произвольно малое положительно число (§ 125).

Но это же неравенство показываетъ, что $\lim\limits_{x=a} f(x) = f(a)$ (§ 122).

*) Значенія функцій $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ предполагаются конечными.

При безграничномъ возрастаніи перемѣннаго x (§ 126) функція $f(x)$ безгранично возрастаетъ.

Дѣйствительно, функцію $f(x)$ можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$f(x) \equiv x^n \{p_0 + p_1/x + p_2/x^2 + \cdots + p_n/x^n\}.$$

Множитель x^n второй части этой формулы при безграничномъ возрастаніи x безгранично возрастаетъ (§ 39, 6), а многочленъ, представляющій второй множитель, представляетъ сумму слагаемыхъ, изъ которыхъ первое есть постоянное число p_0, а остальныя при возрастаніи x приближаются къ нулю, такъ какъ каждое изъ нихъ есть дробь съ постояннымъ числителемъ и безгранично возрастающимъ по абсолютному значенію знаменателемъ (§ 37, опр. II, слѣд. 2). Поэтому предѣломъ второго множителя при безграничномъ возрастаніи x служитъ p_0.

Слѣд., абсолютное значеніе $f(x)$ безгранично возрастаетъ вмѣстѣ съ абсолютнымъ значеніемъ x, т.-е. (§ 124):

$$\lim_{|x| = \infty} f(x) = \infty.$$

§ 131. **Теорема II (Bézout).** *Остатокъ отъ дѣленія цѣлой раціональной функціи $f(x)$ на $x - a$, гдѣ a есть постоянное относительно x число, равенъ результату $f(a)$ подстановки въ функцію $f(x)$ числа a вмѣсто x.*

Пусть $f(x) \equiv p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n$. Обозначимъ частное отъ дѣленія $f(x)$ на $x - a$ черезъ $Q(x)$ и остатокъ черезъ R.

Частное $Q(x)$ есть цѣлая раціональная функція степени $n - 1$, остатокъ R есть цѣлая раціональная функція *нулевой* степени, т.-е. число, не зависящее отъ x (§ 100). По свойству дѣленія имѣемъ соотношеніе (§ 100):

$$f(x) = (x - a)\,Q(x) + R.$$

Лѣвая и правая части этого равенства суть выраженія тождественныя (§§ 119, 100), т.-е. написанное равенство имѣетъ мѣсто при произвольномъ значеніи перемѣннаго x. Полагая въ немъ $x = a$, находимъ:

$$f(a) = R,$$

или, въ раскрытой формѣ,

$$R = p_0 a^n + p_1 a^{n-1} + \cdots + p_{n-1} a + p_n,$$

что и доказываетъ справедливость теоремы.

Примѣры. 1) Остатокъ отъ дѣленія функціи $x^4 - 3x + 1$ на $x - 2$ равенъ $2^4 - 3.2 + 1 = 11$.

2) Остатокъ отъ дѣленія той же функціи на $x + 2$ равенъ $(-2)^4 - 3 \, . \, (-2) + 1 = 23$.

3) Остатокъ отъ дѣленія $5x^5 - 4x^3 - 1$ на $x - 1$ равенъ $5.1^5 - 4.1^3 - 1 = 0$.

§ 132. **Теорема III.** *Если a есть корень цѣлой, раціональной функціи $f(x)$, то $f(x)$ дѣлится безъ остатка на $x - a$.*

Это слѣдуетъ изъ того, что, по теоремѣ *Bézout*, остатокъ при указанномъ дѣленіи равенъ $f(a)$, а по опредѣленію корня (§ 128) $f(a) = 0$.

§ 133. **Теорема IV. Цѣлая раціональная функція имѣетъ корень.** Эта теорема есть *основная теорема алгебры*, но доказательство ея выходитъ изъ рамокъ элементарной алгебры. Поэтому мы примемъ ее безъ доказательства. Въ послѣдующемъ представится возможность убѣдиться въ ея справедливости для многихъ частныхъ случаевъ. Замѣтимъ только, что теорема относится къ области *комплексныхъ* чиселъ, т.-е. утверждаетъ существованіе въ общемъ случаѣ комплекснаго числа, обращающаго данную цѣлую раціональную функцію въ нуль.

§ 134. **Теорема V.** *Цѣлая раціональная функція n-ой степени имѣетъ n корней.*

Пусть $f_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1} x + p_n$; индексъ n при буквѣ f поставленъ для указанія ея степени.

По теоремѣ IV функція $f_n(x)$ имѣетъ корень. Обозначимъ его черезъ a_1. По теоремѣ III имѣемъ равенство:

$$f_n(x) = (x - a_1) f_{n-1}(x),$$

гдѣ $f_{n-1}(x)$ обозначаетъ цѣлую раціональную функцію степени $n-1$ (§ 100). По теоремѣ IV функція $f_{n-1}(x)$ имѣетъ корень; обозначимъ его черезъ a_2. По теоремѣ III имѣемъ равенство:

$$f_{n-1}(x)=(x-a_2)f_{n-2}(x).$$

гдѣ $f_{n-2}(x)$ обозначаетъ цѣлую раціональную функцію степени $n-2$. Изъ написанныхъ равенствъ слѣдуетъ, что

$$f_n(x)=(x-a_1)(x-a_2)f_{n-2}(x).$$

Повторяя указанное разсужденіе n разъ, мы приходимъ къ заключенію, что

$$f_n(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)f_0(x) \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Функція $f_0(x)$, какъ функція нулевой степени, есть постоянное число, т.-е. не содержитъ x (§ 94). Послѣднее равенство показываетъ, что $f_n(x)$ обращается въ нуль *только* при n слѣдующихъ значеніяхъ x: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Слѣд., функція $f_n(x)$ имѣетъ n корней.

Слѣдствіе 1. *Если* $a_1, a_2, \ldots, a_r$ $(r\leqslant n)$ *суть корни функціи* $f_n(x)$, *то* $f_n(x)$ *дѣлится безъ остатка на произведеніе*

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_r).$$

Слѣдствіе 2. *Цѣлую раціональную функцію* $f_n(x)$ *n-ой степени можно представить въ видѣ произведенія n линейныхъ множителей* $x-a_1, x-a_2, \ldots, x-a_n$, *гдѣ* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *суть корни функціи умноженнаго на коэффиціентъ* p_0 *старшаго члена функціи, такъ что*

$$f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Для того, чтобы установить справедливость этой формулы, достаточно доказать, что въ формулѣ (α) настоящаго § функція $f_0(x)$ равна p_0. Формула (α) показываетъ, что $f_0(x)$ есть частное отъ дѣленія $f_n(x)$ на произведеніе $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Но $f_n(x)$ есть цѣлый раціональный многочленъ степени n относительно x, а произведеніе $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ въ раскрытомъ видѣ есть также цѣлый раціональный многочленъ степени n относительно x (§ 113). Частное отъ дѣленія перваго изъ нихъ на второй равно частному отъ дѣленія ихъ старшихъ членовъ, т.-е. равно $p_0x^n : x^n = p_0$ (§§ 100, 113). Слѣд., $f_0(x) = p_0$.

Формула (79) принимаетъ иной видъ, если мы предположимъ, что нѣкоторые изъ двучленныхъ множителей второй части ея равны между собою. Предположимъ, что вторая часть разсматриваемой формулы содержитъ α множителей равныхъ $x - a$, β множителей, равныхъ $x - b, \ldots$, λ множителей, равныхъ $x - l$, при чемъ $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = n$. Въ такомъ случаѣ формула (79) приводится къ слѣдующей:

$$f_n(x) = p_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Корнями функціи служатъ числа $a, b, \ldots\ldots, l$.

Корень a называется α-кратнымъ корнемъ функціи, b—β-кратнымъ и т. д. Числа $\alpha, \beta, \ldots$ суть показатели степеней кратности соотвѣтственно корней $a, b, \ldots$

Если $\alpha = 1$, то корень a называется *простымъ*.

Слѣдствіе 3. *Если цѣлая раціональная функція $f_n(x)$ обращается въ нуль при большемъ, чѣмъ n, числѣ различныхъ значеній перемѣннаго x, то она тождественно равна нулю, т.-е коэффиціенты всѣхъ ея членовъ суть нули.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ суть $n+1$ различныхъ между собою значеній перемѣннаго, при которыхъ разсматриваемая функція обращается въ нуль. По формулѣ (79) имѣемъ:

$$f_n(x) = p_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Подставивъ a_{n+1} вмѣсто x, находимъ:

$$f_n(a_{n+1}) = p_0(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\ldots(a_{n+1}-a_n).$$

По условію $f_n(a_{n+1}) = 0$. Слѣд., произведеніе, стоящее во второй части этого равенства, должно обратиться въ нуль, а для этого необходимо, чтобы по крайней мѣрѣ одинъ изъ его множителей обратился въ нуль (§ 78). Но каждый изъ множителей $a_{n+1} - a_1, a_{n+1} - a_2, \ldots, a_{n+1} - a_n$ представляетъ, по условію, число, отличное отъ нуля; слѣд., $p_0 = 0$, и функція $f_n(x) = p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n$. Эта функція

$(n-1)$-ой степени, по условію, обращается въ нуль для n различныхъ между собою значеній перемѣннаго, а именно, для $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$. Слѣд., $p_1 = 0$.

Повторяя указанное разсужденіе, мы придемъ къ заключенію, что всѣ коэффиціенты данной функціи суть нули.

Слѣдствіе 4. *Если двѣ цѣлыхъ раціональныхъ функціи $f_n(x)$ и $F_n(x)$ степени n имѣютъ одинаковыя значенія при большемъ, чѣмъ n, числѣ различныхъ значеній перемѣннаго x, то въ этихъ функціяхъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ перемѣннаго равны.*

Пусть:

$$f_n(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n;$$
$$F_n(x) = q_0x^n + q_1x^{n-1} + \cdots + q_{n-1}x + q_n.$$

Составивъ разность

$$f_n(x) - F_n(x) = (p_0 - q_0)x^n + (p_1 - q_1)x^{n-1} + \cdots +$$
$$+ (p_{n-1} - q_{n-1})x + (p_n - q_n),$$

мы получаемъ новую функцію n-ой степени, которая, по условію, обращается въ нуль при большемъ, чѣмъ n, числѣ различныхъ значеній перемѣннаго.

Поэтому, по слѣдствію 3, ея коэффиціенты суть нули:

$$p_0 - q_0 = 0;\ p_1 - q_1 = 0; \ldots;\ p_n - q_n = 0.$$

Отсюда получаемъ:

$$p_0 = q_0;\ p_1 = q_1; \ldots;\ p_n = q_n.$$

Слѣдствіе 5. *Если двѣ цѣлыхъ раціональныхъ функціи $f_n(x)$ и $F_n(x)$ степени n имѣютъ равныя значенія при всякомъ значеніи перемѣннаго, т.-е. если эти функціи тождественно равны, то въ нихъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ перемѣннаго равны.*

§ 135. **Цѣлая раціональная функція съ вещественными коэффиціентами.** Въ предыдущихъ §§ были указаны свойства цѣлыхъ раціональныхъ функцій, не зависящія отъ характера ихъ коэффиціентовъ. Остановимся еще на одномъ свойствѣ корней цѣлой раціональной функціи съ *вещественными* коэффиціентами.

Извѣстно (глава V), что рядъ алгебраическихъ дѣйствій надъ комплекснымъ числомъ выражается, вообще, комплекснымъ числомъ.

Поэтому результатъ подстановки въ цѣлую раціональную функцію $f(x)$ вмѣсто x комплекснаго числа $a+ib$ выражается комплекснымъ числомъ, такъ что

$$f(a+ib)=P+iQ,$$

гдѣ P и Q суть вещественныя числа.

Если функція $f(x)$ имѣетъ *вещественные* коэффиціенты, то появленіе мнимаго числа i въ выраженіи $f(a+ib)$ зависитъ *исключительно* отъ того, что i входитъ въ составъ того числа, которое подставляется вмѣсто x.

Отсюда слѣдуетъ, что подстановка $x=a-ib$ въ функцію $f(x)$ съ вещественными коэффиціентами приводитъ къ числу $f(a-ib)$, отличающемуся отъ $f(a+ib)$ только знакомъ при i, такъ какъ подставляемыя вмѣсто x числа $a+ib$ и $a-ib$ отличаются только знаками числа i.

Итакъ, *если $f(x)$ есть цѣлая раціональная функція съ вещественными коэффиціентами и $f(a+ib)=P+iQ$, то $f(a-ib)=P-iQ$.*

Теорема VI. *Если цѣлая раціональная функція $f(x)$ съ вещественными коэффиціентами имѣетъ корень $a+ib$, то она имѣетъ корень $a-ib$, сопряженный съ даннымъ.*

Дѣйствительно, если $f(a+ib)=P+iQ=0$, то $P=0$ и $Q=0$ (§ 68).

Но $f(a-ib)=P-iQ$; слѣд., $f(a-ib)=0$, т.-е. $a-ib$ есть корень данной функціи.

Слѣдствіе. Такъ какъ (§ 132) каждому корню цѣлой раціональной функціи соотвѣтствуетъ въ ея разложеніи на множители линейный множитель, представляющій разность между перемѣннымъ и этимъ корнемъ, то парѣ сопряженныхъ корней $a+ib$ и $a-ib$ соотвѣтствуетъ пара сопряженныхъ множителей: $x-a-ib$ и $x-a+ib$.

Перемножая ихъ, получимъ:

$$(x-a-ib)(x-a+ib)=(x-a)^2+b^2=x^2+px+q,$$

гдѣ $p=-2a$, $q=a^2+b^2$.

Опредѣленная форма чиселъ p и q устанавливаетъ между ними нѣкоторую зависимость. Чтобы обнаружить ее, замѣтимъ, что

$$p^2-4q=4a^2-4(a^2+b^2)=-4b^2.$$

Вторая часть этого равенства есть отрицательное число. Поэтому числа p и q таковы, что

$$p^2-4q<0.$$

Отсюда заключаемъ, что разложеніе на множители цѣлой раціональной функціи съ вещественными коэффиціентами представляется произведеніемъ линейныхъ множителей вида $x-a$ и квадратныхъ множителей вида x^2+px+q, гдѣ a, p и q суть вещественныя числа, при чемъ p и q связаны указаннымъ выше соотношеніемъ. Каждый изъ линейныхъ множителей соотвѣтствуетъ вещественному корню функціи, а каждый квадратный — парѣ сопряженныхъ комплексныхъ корней.

§ 136. **Соотношенія между корнями и коэффиціентами цѣлой раціональной функціи.** Формула (79) позволяетъ установить связь между корнями и коэффиціентами цѣлой раціональной функціи.

Выполнивъ перемноженіе n биномовъ, входящихъ во вторую часть, мы получимъ слѣдующую цѣлую раціональную функцію степени n:

$$p_0x^n-p_0S_1x^{n-1}+p_0S_2x^{n-2}-p_0S_3x^{n-3}+\cdots\mp p_0S_{n-1}x\pm p_0S_n,$$

гдѣ S съ индексами имѣютъ значенія, указанныя въ § 113.

Такъ какъ лѣвая и правая части равенства (79) представляютъ *тождественныя* выраженія, то, по слѣдствію 5 теоремы V (§ 134), черезъ сравненіе въ этихъ выраженіяхъ коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ x находимъ слѣдующія соотношенія:

$$S_1 = -p_1/p_0;\ S_2 = p_2/p_0;\ S_3 = -p_3/p_0; \ldots;\ S_n = (-1)^n p_n/p_0,$$

или въ раскрытомъ видѣ:

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 + a_2 + \cdots + a_n & = -p_1/p_0; \\ a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots & = +p_2/p_0; \\ a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \ldots & = -p_3/p_0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_1a_2a_3\ldots a_n & = (-1)^n p_n/p_0. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

Лѣвыя части этихъ равенствъ суть функціи корней функціи $f_n(x)$. Легко видѣть, что эти функціи не измѣняютъ своего значенія при взаимной перестановкѣ *(транспозиціи)* двухъ произвольныхъ корней. Функціи, обладающія такимъ свойствомъ, называются *симметрическими*. Лѣвыя части формулъ (81) суть простѣйшія симметрическія функціи корней функціи, представляющія сумму корней, произведеніе корней и суммы всѣхъ произведеній корней, взятыхъ группами по k корней въ каждой, при чемъ $k \leqslant n$.

§ 137. **Дѣлимость** $x^n \pm a^n$ **на** $x \pm a$. Въ видѣ примѣра приложенія теоремы *Bézout* и ея слѣдствій (§§ 131 и слѣд.) разсмотримъ вопросъ о дѣлимости суммы и разности $x^n \pm a^n$ одинаковыхъ цѣлыхъ и положительныхъ степеней двухъ чиселъ x и a на сумму или разность ихъ первыхъ степеней.

a) *Разность* $x^n - a^n$ *дѣлится на разность* $x - a$.

Дѣйствительно, остатокъ при дѣленіи равняется, по теоремѣ *Bézout*, $a^n - a^n = 0$. Найдемъ частное отъ дѣленія $x^n - a^n$ на $x - a$. Такъ какъ дѣлимое есть цѣлый раціональный многочленъ степени n, а дѣлитель—цѣлый раціональный многочленъ первой степени, то частное есть цѣлый раціональный многочленъ $n-1$ степени (§ 100). Пусть этотъ многочленъ есть $p_0x^{n-1} + p_1x^{n-2} + p_2x^{n-3} + \cdots + p_{n-2}x + p_{n-1}$.

По свойству дѣленія (100) имѣемъ:

$$x^n - a^n = (x-a)(p_0x^{n-1} + p_1x^{n-2} + p_2x^{n-3} + \cdots + p_{n-2}x + p_{n-1}) =$$
$$= p_0x^n + (p_1 - ap_0)x^{n-1} + (p_2 - ap_1)x^{n-2} + \cdots + (p_{n-1} - ap_{n-2})x -$$
$$- ap_{n-1}.$$

Сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ въ лѣвой и правой части (§ 134, теор. V, слѣд. 5), находимъ:

$$p_0=1;\ p_1-ap_0=0,\ p_2-ap_1=0,\ldots;\ p_{n-1}-ap_{n-2}=0;\ ap_{n-1}=a^n.$$

Отсюда получаемъ значенія коэффиціентовъ p:

$$p_0=1;\ p_1=a,\ p_2=a^2,\ldots,\ p_{n-1}=a^{n-1}.$$

Поэтому

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}\ .\ .\ (82)$$

b) Сумма x^n+a^n *не дѣлится на разность* $x-a$.

Дѣйствительно, остатокъ при дѣленіи равняется $a^n+a^n=2a^n$.

Для вычисленія цѣлаго частнаго замѣтимъ, что

$$\frac{x^n+a^n}{x-a}=\frac{x^n+a^n-2a^n+2a^n}{x-a}=\frac{x^n-a^n}{x-a}+\frac{2a^n}{x-a};$$

отсюда видно, что цѣлое частное въ разсматриваемомъ дѣленіи дается формулой (82).

c) Разность x^n-a^n *дѣлится на сумму* $x+a$ *при* n *четномъ и не дѣлится при* n *нечетномъ.*

Дѣйствительно, остатокъ при дѣленіи равенъ $(-a)^n-a^n$. При n четномъ $(-a)^n=+a^n$; слѣд., остатокъ равенъ нулю.

Для вычисленія частнаго можно воспользоваться формулой (82):

$$\frac{x^n-a^n}{x+a}=\frac{x^n-(-a)^n}{x-(-a)}=$$

$$=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\ldots+a^{n-2}x-a^{n-1},\ (n\text{—четное}).$$

При n *нечетномъ* остатокъ отъ дѣленія равенъ $-2a^n$.

d) Сумма x^n+a^n *дѣлится на сумму* $x+a$ *при* n *нечетномъ.*

Дѣйствительно, остатокъ при дѣленіи равенъ $(-a)^n+a^n$. При n нечетномъ $(-a)^n=-a^n$; слѣд., остатокъ равенъ нулю.

Для вычисленія частнаго можно опять воспользоваться формулой (82):

$$\frac{x^n+a^n}{x+a}=\frac{x^n-(-a)^n}{x-(-a)}=$$

$$=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\ldots-a^{n-2}x+a^{n-1},\ (n\text{ — нечетное}).$$

При n четномъ остатокъ равенъ $2a^n$.

Слѣдующія преобразованія указываютъ пріемъ для нахожденія частнаго $(x^n - a^n)/(x+a)$ при *n нечетномъ* и $(x^n + a^n)/(x+a)$ при *n четномъ*:

$$n\text{—нечетное; } \frac{x^n - a^n}{x+a} = \frac{x^n - a^n + 2a^n - 2a^n}{x+a} = \frac{x^n + a^n}{x+a} - \frac{2a^n}{x+a} =$$
$$\frac{x^n - (-a)^n}{x-(-a)} - \frac{2a^n}{x+a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-2}x +$$
$$+ a^{n-1} - 2a^n/(x+a);$$
$$n\text{—четное; } \frac{x^n + a^n}{x+a} = \frac{x^n + a^n - 2a^n + 2a^n}{x+a} = \frac{x^n - a^n}{x+a} + \frac{2a^n}{x+a} =$$
$$\frac{x^n - (-a)^n}{x-(-a)} + \frac{2a^n}{x+a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots +$$
$$+ a^{n-2}x - a^{n-1} + 2a^n/(x+a).$$

§ 138. **Непрерывность дробной раціональной функціи.** Въ § 129 былъ указанъ общій видъ дробной раціональной функціи перемѣннаго x. Разсмотримъ теперь нѣкоторыя ея свойства.

Теорема VII. *Дробная раціональная функція перемѣннаго x непрерывна для всѣхъ значеній x за исключеніемъ тѣхъ, которыя служатъ корнями ея знаменателя.*

Обозначимъ дробную функцію черезъ $P(x)/Q(x)$ или, короче, черезъ P/Q, гдѣ

$$P(x) \equiv p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n,$$
$$Q(x) \equiv q_0x^m + q_1x^{m-1} + \cdots + q_{m-1}x + q_m.$$

Пусть значеніе $Q(a)$ знаменателя Q этой функціи при $x = a$ отлично отъ нуля. Найдемъ приращеніе k функціи P/Q при переходѣ отъ $x = a$ къ $x = a + h$. Обозначая приращенія функцій P и Q при этомъ переходѣ соотвѣтственно черезъ k_1 и k_2, находимъ:

$$k = \frac{P(a+h)}{Q(a+h)} - \frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{P(a)+k_1}{Q(a)+k_2} - \frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{k_1Q(a) - k_2P(a)}{Q(a)[Q(a)+k_2]}.$$

Такъ какъ функціи P и Q непрерывны при $x = a$ (§ 130, теор. I), то надлежащимъ выборомъ h можно сдѣлать какъ угодно малыми по абсолютному значенію числа k_1 и k_2 и, кромѣ того, числитель $k_1 Q(a) - k_2 P(a)$ дроби, выражающей приращеніе k дроби P/Q. Но знаменатель этой дроби есть, по условію, конечное число; слѣд., дробь, выражающая k, можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой по абсолютному значенію, т.-е. функція P/Q непрерывна при всякомъ конечномъ значеніи $x = a$, не обращающемъ въ нуль ея знаменателя (§ 125).

Слѣдствіе 1. $\lim\limits_{x=a} P(x)/Q(x) = P(a)/Q(a)$, если $Q(a) \neq 0$ (сравн. § 130, теор. I).

Слѣдствіе 2. *Корнями дробной раціональной функціи служатъ тѣ корни ея числителя, при которыхъ знаменатель ея получаетъ значенія, отличныя отъ нуля.*

§ 139. **Особенности дробной раціональной функціи.** Теорема VII выдѣляетъ корни знаменателя дробной функціи изъ общаго разсмотрѣнія. Это объясняется тѣмъ, что для корней знаменателя функція P/Q *не имѣетъ значеній*, такъ какъ дѣленіе на нуль невозможно.

Для этихъ особенныхъ по отношенію къ функціи P/Q значеній перемѣннаго x можно поставить вопросъ о *предѣлѣ*, къ которому стремится функція, когда перемѣнное x приближается къ a.

Если $x = a$ есть одинъ изъ корней знаменателя Q функціи P/Q, то $\lim\limits_{x=a} P/Q$ называется *предѣльнымъ значеніемъ* функціи при $x = a$.

Числитель $P(x)$ функціи P/Q при $x = a$ можетъ быть числомъ конечнымъ и можетъ быть нулемъ.

Въ случаѣ $P(a) = \alpha$ $(\alpha \neq 0)$ абсолютное значеніе дроби P/Q безгранично возрастаетъ при приближеніи x къ a. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ, по предположенію, $\lim\limits_{x=a} P(x) = \alpha \neq 0$, то при достаточно близкихъ къ a значеніяхъ x абсолютное значеніе $P(x)$ остается больше нѣкотораго конечнаго положительнаго числа A; другими словами, можно найти настолько малыя значенія $|h|$, что при $x = a + h$ осуществится неравенство: $|P(a+h)| > A$.

Съ другой стороны, такъ какъ $\lim\limits_{x=a} Q(x) = 0$ (§ 130, теор. I), то можно найти настолько малое значеніе $|h|$, что $|Q(a+h)| < \varepsilon$, гдѣ ε есть произвольно малое положительное число. При тѣхъ значеніяхъ h, для которыхъ выполняются оба указанныя неравенства, существуетъ неравенство

$$\left|\frac{P(a+h)}{Q(a+h)}\right| > \frac{A}{\varepsilon},$$

относящееся къ абсолютному значенію разсматриваемой дроби.

Пользуясь произволомъ въ выборѣ ε, можно взять его меньшимъ A/N, гдѣ N есть произвольное, какъ угодно большое положительное число.

Въ такомъ случаѣ получимъ неравенство

$$\left|\frac{P(a+h)}{Q(a+h)}\right| > N,$$

которое и доказываетъ, что $\lim\limits_{x=a} P(x)/Q(x) = \infty$, если $Q(a) = 0$, $P(a) \neq 0$ (§ 124).

Краткимъ выраженіемъ этого факта служитъ равенство: $a/0 = \infty$ при $a \neq 0$.

Если $P(a)$ и $Q(a)$ обращаются въ нули, то предѣломъ дроби P/Q можетъ быть и конечное число, и нуль, и безконечность.

Примѣръ 1. Показать, что приближеніемъ x къ 1 можно сдѣлать абсолютное значеніе дроби $x/(x-1)(x+2)$ больше 1000.

Пусть $x = 1 + h$. Поставленное требованіе выражается неравенствомъ:

$$\left|\frac{1+h}{h(3+h)}\right| > 1000.$$

Такъ какъ $|1+h| \geqslant 1 - |h|$ и $|h(3+h)| \leqslant |3h| + |h^2| < 4|h|$, при чемъ предполагается, что $|h| < 1$, то

$$\left|\frac{1+h}{h(3+h)}\right| > \frac{1-|h|}{4|h|}.$$

Выбравъ абсолютное значеніе h такъ, чтобы

$$(1-|h|)/4|h| > 1000,$$

мы, очевидно, удовлетворимъ требованію. Для этого достаточно, чтобы $1 - |h| > 4000|h|$ или $|h| < 1/4001$.

Пусть, напр., $h = 1/4002$ и, слѣд., $x = 4003/4002$. Значеніе данной дроби при этомъ значеніи x равно $4003 . 4002/12007 = 16020006/12007 > 1000$.

При $h = -1/4002$ и $x = 4001/4002$ значеніе дроби равно $-16012002/12005$. Абсолютное значеніе этого числа больше 1000.

Примѣръ 2. Найти $lim\ (x^2 - 3x + 2)/(x^2 - 1)$ при $x = 1$.

Такъ какъ $x^2 - 3x + 2 \equiv (x-1)(x-2)$ и $x^2 - 1 \equiv (x-1)(x+1)$, то при всѣхъ значеніяхъ x, отличныхъ отъ 1, данную дробь можно сократить на $x - 1$:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{x-2}{x+1}.$$

Поэтому при отысканіи ея предѣла при $x = 1$ можно ее замѣнить дробью $(x-2)/(x+1)$, такъ что

$$\lim_{x=1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x=1} \frac{x-2}{x+2} = -\frac{1}{3} \text{ (§ 138, теор. VII).}$$

Примѣръ 3. Найти $lim\ (x^2 - 2x + 1)/(x^2 - 1)$ при $x = 1$.

$$\lim_{x=1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x=1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x=1} \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

Примѣръ 4. Найти $lim\ (x^2 - 1)/(x^2 - 2x + 1)$ при $x = 1$.

$$\lim_{x=1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x=1} \frac{x+1}{x-1} = \infty.$$

§ 140. **Выраженія вида** $0/0$. Если въ дроби, указанныя въ примѣрахъ 2, 3 и 4 предыдущаго §, мы подставимъ 1 вмѣсто x, то получимъ выраженіе $0/0$, которое называется *неопредѣленнымъ*. Говорить о *вычисленіи* такого выраженія нельзя, потому что дѣленіе на нуль невозможно.

Полученіе неопредѣленнаго выраженія есть признакъ того, что разсматриваемая функція *не опредѣлена* для того значенія перемѣннаго, при которомъ оно появляется. Если мы введемъ, какъ новое, требованіе непрерывности функціи P/Q при $x = a$, гдѣ a есть общій корень числителя и знаменателя, то вмѣсто задачи объ опредѣленіи *значенія* функціи при $x = a$, мы можемъ поставить задачу о нахожденіи ея *предѣльнаго значенія* при приближеніи x къ предѣлу a (§ 139).

Практически способъ вычисленія предѣльныхъ значеній раціональной дроби сводится, какъ это видно изъ примѣровъ 2, 3 и 4, къ сокращенію данной дроби на тотъ множитель, который соотвѣтствуетъ корню a числителя и знаменателя, и къ опредѣленію значенія полученной дроби при $x = a$.

ГЛАВА IX.

Уравненія. Общія теоремы объ уравненіяхъ.

§ 141. **Тождество и уравненіе.** Соединеніе двухъ алгебраическихъ выраженій посредствомъ знака равенства называется *алгебраическимъ равенствомъ*.

Алгебраическое равенство, справедливое при всѣхъ значеніяхъ буквъ, въ него входящихъ, называется *алгебраическимъ тождествомъ* (сравн. § 119).

Алгебраическое равенство, первая и вторая части котораго получаютъ равныя значенія только при извѣстныхъ значеніяхъ нѣкототорыхъ буквъ, входящихъ въ нихъ, называется *алгебраическимъ уравненіемъ*. Уравненіе есть *условное* равенство.

Напримѣръ, равенство $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ есть тождество, потому что оно справедливо при всѣхъ значеніяхъ буквъ x и y, а равенство $x+y=4$ есть уравненіе, такъ какъ при $x=2$ и $y=3$ лѣвая часть его не равна правой.

Въ уравненіяхъ тѣ буквы, которымъ нужно приписывать особое значеніе для полученія равенства лѣвой и правой частей его, называются неизвѣстными.

Уравненія раздѣляются по числу содержащихся въ нихъ неизвѣстныхъ на уравненія съ *однимъ* и *многими* неизвѣстными.

Для уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ тѣ значенія неизвѣстнаго, которыя даютъ для первой и второй части уравненія одинаковыя значенія, называются *корнями* или *рѣшеніями* уравненія.

Напр., корнями $x^2+10=7x$ служатъ числа 2 и 5.

Рѣшеніемъ уравненія со многими неизвѣстными называется та система значеній всѣхъ входящихъ въ него неизвѣстныхъ, при которой первая и вторая части уравненія имѣютъ одинаковыя значенія.

Напр., одно изъ рѣшеній уравненія $x+y=2z$ есть система чиселъ $x=3$, $y=5$, $z=4$.

Найти корни уравненія значитъ *рѣшить* его.

§ 142. **Равносильныя уравненія.** *Два уравненія называются равносильными, если всѣ рѣшенія перваго служатъ рѣшеніями второго и всѣ рѣшенія второго служатъ рѣшеніями перваго.*

Наприм., уравненія $5x+2=12$ и $7x-3=11$ суть уравненія равносильныя, такъ какъ каждое изъ нихъ имѣетъ единственный корень $x=2$; уравненія $5x+2=12$ и $x^2=4$ суть уравненія неравносильныя, такъ какъ второе изъ нихъ имѣетъ еще корень $x=-2$, неудовлетворяющій первому уравненію.

Изъ опредѣленія равносильныхъ уравненій слѣдуетъ, что *при рѣшеніи уравненія* можно замѣнять его уравненіемъ, ему равносильнымъ, или другими словами, можно дѣлать надъ даннымъ уравненіемъ такія преобразованія, которыя *не измѣняютъ ни его корней, ни числа ихъ.*

§ 143. **Преобразованія уравненія въ равносильное ему. Теорема I.** *Прибавляя къ той и другой части уравненія или вычитая изъ нихъ одно и тоже число, мы получаемъ уравненіе, равносильное данному.*

Пусть данное уравненіе есть

$$A=B, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

гдѣ A и B суть функціи неизвѣстныхъ. Прибавивъ къ обѣимъ частямъ его число C, получилъ *новое* уравненіе

$$A+C=B+C; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

C можетъ быть постояннымъ числомъ и функціей перемѣнныхъ.

Нужно доказать, что уравненія (α) и (β) равносильны.

Прежде всего замѣтимъ, что послѣдующія разсужденія относятся только къ тѣмъ значеніямъ перемѣнныхъ, при которыхъ функціи A, B, C,.... не обращаются въ безконечность.

Для тѣхъ значеній неизвѣстныхъ, при которыхъ значенія функціи A и B дѣлаются равными, равны и значенія суммъ $A+C$ и $B+C$. Поэтому всѣ рѣшенія уравненія (α) служатъ рѣшеніями уравненія (β).

Съ другой стороны, для тѣхъ значеній неизвѣстныхъ, при которыхъ значенія функціи $A+C$ и $B+C$ дѣлаются равными, равны и значенія функцій A и B, такъ какъ эти значенія получаются черезъ вычитаніе изъ равныхъ суммъ $A+C$ и $B+C$ значенія C при разсматриваемыхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ. Поэтому всѣ рѣшенія уравненія (β) служатъ рѣшеніями уравненія (α). Слѣд., уравненія (α) и (β) равносильны.

Подобнымъ же образомъ доказывается и вторая часть теоремы.

Слѣдствіе 1. *Можно переносить члены одной части уравненія въ другую, перемѣняя ихъ знаки.*

Пусть дано уравненіе $A+B-C=D$, гдѣ буквы A, B, C и D обозначаютъ функціи неизвѣстныхъ. Прибавляя по C къ обѣимъ частямъ уравненія, получимъ уравненіе $A+B=D+C$, равносильное данному по только что доказанной теоремѣ и отличающееся отъ него тѣмъ, что членъ $-C$, бывшій въ первой части перенесенъ съ обратнымъ знакомъ во вторую часть.

Слѣдствіе 2. *Всякое уравненіе можетъ быть приведено къ виду $P=0$, гдѣ P есть функція неизвѣстныхъ.*

Дѣйствительно, уравненіе $A=B$ равносильно уравненію $A-B=0$, имѣющему указанный видъ.

Въ связи съ послѣднимъ слѣдствіемъ находится классификація алгебраическихъ уравненій, основаніемъ которой служитъ видъ функціи P въ уравненіи $P=0$. Этому уравненію присвоивается названіе, относящееся къ функціи P (§ 129).

Напр., $x+2y-3=0$ называется цѣлымъ раціональнымъ уравненіемъ съ двумя неизвѣстными, потому что первая часть его есть цѣлая раціональная функція перемѣнныхъ x и y; $x+(x-1)/x=0$ называется дробнымъ раціональнымъ уравненіемъ съ однимъ неизвѣстнымъ x, потому что первая часть его представляетъ дробную функцію перемѣннаго x; $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}-5=0$ называется ирраціональнымъ уравненіемъ съ однимъ неизвѣстнымъ x, потому что первая часть есть ирраціональная функція перемѣннаго x.

Теорема II. *Умножая или дѣля обѣ части уравненія на число постоянное или перемѣнное, не способное обратиться ни въ нуль, ни въ безконечность, мы получаемъ уравненіе, равносильное данному.*

Пусть дано уравненіе:

$$A=B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Умноживъ обѣ части его на число C, получимъ уравненіе:

$$AC=BC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Нужно доказать, что, при условіяхъ $C\neq 0$, $C\neq\infty$, уравненія (α) и (γ) равносильны.

Уравненія (α) и (γ) можно, по теоремѣ I, замѣнить соотвѣтственно равносильными имъ уравненіями:

$$A-B=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha')$$
$$AC-BC=0 \text{ или } C(A-B)=0 \quad \ldots\ldots \quad (\gamma')$$

Тѣ значенія неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ въ нуль разность $A-B$, обращаютъ въ нуль и произведеніе $C(A-B)$, такъ какъ, по условію, $C\neq\infty$. Поэтому всѣ рѣшенія уравненія (α') или уравненія (α) суть рѣшенія уравненія (γ') или уравненія (γ).

Тѣ значенія неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ въ нуль произведеніе $C(A-B)$, обращаютъ въ нуль разность $A-B$, такъ какъ, по условію, $C\neq 0$. Поэтому всѣ рѣшенія уравненія (γ') или уравненія (γ) суть вмѣстѣ съ тѣмъ и рѣшенія уравненія (α') или уравненія (α). Слѣд., уравненія (α) и (γ) равносильны.

Дѣленіе на C можно замѣнить умноженіемъ на $1/C$. Это число, по условіямъ, наложеннымъ на C, не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность. Поэтому при умноженіи обѣихъ частей уравненія (α) на $1/C$ получается уравненіе, равносильное данному.

Теорема III. *Возведеніе той и другой части уравненія въ цѣлую и положительную степень приводитъ къ уравненію, не равносильному съ даннымъ.*

Пусть дано уравненіе:

$$A = B \quad \dots\dots\dots \quad (\alpha)$$

Возведя обѣ части его въ степень n (n — натуральное число), получимъ уравненіе:

$$A^n = B^n \quad \dots\dots\dots\dots \quad (\delta)$$

Нужно доказать, что уравненія (α) и (δ) не равносильны. Замѣнимъ уравненія (α) и (δ) уравненіями

$$A - B = 0 \dots (\alpha') \text{ и } A^n - B^n = 0 \dots\dots (\delta'),$$

соотвѣтственно равносильными уравненіямъ (α) и (δ).

Уравненіе (δ') можно переписать слѣдующимъ образомъ (форм. 82):

$$(A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}) = 0 \dots (\delta')$$

Уравненіе (δ') удовлетворяется тѣми значеніями неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ въ нуль который-нибудь изъ двухъ множителей его первой части, т.-е. корнями уравненія (δ') служатъ корни двухъ уравненій:

$$A - B = 0 \text{ и } A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1} = 0.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что корни уравненія (α') или (α) служатъ корнями уравненія (δ) или (δ'), но не всѣ корни уравненія (δ) или (δ') суть корни уравненія (α') или (α), т.-е. уравненія (α) и (δ) не равносильны.

§ 144. **Дополненія къ теоремѣ II.** Въ дополненіе къ теоремѣ II слѣдуетъ замѣтить, что умноженіе обѣихъ частей уравненія на функцію неизвѣстныхъ приводитъ, въ общемъ случаѣ, или къ появленію новыхъ рѣшеній, или къ потерѣ нѣкоторыхъ рѣшеній.

Разсмотримъ два примѣра.

Примѣръ 1. Уравненіе $3x+2=2x+3$ имѣетъ одинъ корень $x=1$. Умноживъ обѣ части его на $x-3$, получимъ уравненіе $(x-3)(3x+2)=(2x+3)(x-3)$, неравносильное данному, такъ какъ, кромѣ корня $x=1$, оно имѣетъ еще корень $x=3$. Причиной появленія новаго корня служитъ умноженіе обѣихъ частей уравненія на функцію $x-3$, которая обращается въ нуль при $x=3$.

Примѣръ 2. Уравненіе $(x-1)(x+2)=3(x+2)$ имѣетъ два корня: $x=-2$, $x=4$. Раздѣливъ обѣ части на $x+2$ или, что все равно, умноживъ на $1/(x+2)$, получимъ уравненіе $x-1=3$, имѣющее только одинъ корень $x=4$. Потеря корня произошла вслѣдствіе умноженія обѣихъ частей уравненія на функцію $1/(x+2)$, обращающуюся въ ∞ при $x=-2$ (§ 139).

Эти примѣры показываютъ, что умноженіе обѣихъ частей уравненія на функцію неизвѣстныхъ приводитъ къ уравненію, которое *не* равносильно данному. Но есть одинъ случай, когда отъ умноженія обѣихъ частей уравненія на функцію неизвѣстныхъ получается уравненіе, равносильное данному.

Пусть дано уравненіе, содержащее раціональныя дроби. Приводя ихъ къ одному знаменателю и перенося всѣ члены въ первую часть, получаемъ уравненіе вида $P/Q=0$, гдѣ P и Q суть цѣлыя раціональныя функціи неизвѣстныхъ. Умноживъ обѣ части этого уравненія на Q, находимъ уравненіе $P=0$. Если P и Q не обращаются въ нуль для одинаковыхъ значеній неизвѣстныхъ, то уравненія $P/Q=0$ и $P=0$ равносильны. Дѣйствительно, уравненіе $P/Q=0$ удовлетворяется только тѣми значеніями неизвѣстныхъ, для которыхъ $P=0$, потому что частное, равное нулю, получается только отъ дѣленія нуля (сравн. § 138, теор. VII, слѣд. 2).

Примѣръ 1. Уравненіе $2x+1/x=5/(x+2)$ приведеніемъ содержащихся въ немъ дробей къ одному знаменателю и перенесеніемъ всѣхъ членовъ въ первую часть преобразуется въ уравненіе

$$\frac{2x^2(x+2)+x+2-5x}{x(x+2)}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Значенія $x=0$ и $x=-2$, обращающія въ нуль знаменатель первой части, не обращаютъ въ нуль ея числителя; поэтому уравненіе (α) равносильно уравненію

$$2x^2(x+2)+(x+2)-5x=0.$$

Примѣръ 2. Уравненіе

$$x+\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=4x+3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

равносильно уравненію

$$\frac{x(x^2-1)+x^2+x-2-(x^2-1)(4x+3)}{x^2-1}=0; \; . \; . \; . \; (\beta)$$

но уравненіе (β) не равносильно уравненію

$$x(x^2-1)+x^2+x-2-(x^2-1)(4x+3)=0,$$

потому что одно изъ двухъ значеній, обращающихъ въ нуль знаменатель первой части уравненія (β), а именно $x=1$, обращаетъ въ нуль и числитель ея.

Одновременное обращеніе въ нуль при $x=1$ числителя и знаменателя первой части уравненія (β) объясняется тѣмъ, что въ данное уравненіе входитъ сократимая дробь $(x^2+x-2)/(x^2-1)$. Сокративъ ее на $x-1$, мы вмѣсто даннаго уравненія получимъ слѣдующее:

$$x+\frac{x+2}{x+1}=4x+3.$$

Это послѣднее уравненіе равносильно цѣлому уравненію:

$$x(x+1)+x+2-(x+1)(4x+3)=0.$$

§ 145. **Системы уравненій. Равносильныя системы уравненій.** Уравненія, разсматриваемыя совмѣстно, составляютъ *систему уравненій.*

Рѣшеніемъ системы уравненій называется *система значеній всѣхъ неизвѣстныхъ, удовлетворяющая всѣмъ уравненіямъ системы.*

Напримѣръ, система $x=1$, $y=2$, $z=3$ представляетъ одно изъ рѣшеній системы уравненій: $x+y+z=6$; $2x-y+3z=9$.

Системы уравненій съ одинаковыми рѣшеніями называются *равносильными.*

§ 146. **Преобразованіе системы въ равносильную ей. Теорема IV.** *Система уравненій*

$$x=f(y, z, \ldots);\ F_1(x, y, z, \ldots)=0;\ F_2(x, y, z, \ldots)=0; \ldots, \quad (\alpha)$$

въ которой f, F_1, $F_2, \ldots$ *суть функціи неизвѣстныхъ* $x, y, z, \ldots$, *равносильна системѣ:*

$$x=f(y, z, \ldots);\ F_1[f(y, z, \ldots), y, z, \ldots]=0;$$
$$F_2[f(y, z, \ldots), y, z, \ldots]=0; \ldots \ldots \quad (\beta)$$

Для доказательства теоремы замѣтимъ, что въ обѣихъ системахъ первыя части всѣхъ уравненій, начиная со второго, суть выраженія *тождественныя* относительно неизвѣстныхъ $y, z, \ldots$, такъ какъ различіе ихъ заключается лишь въ обозначеніи неизвѣстнаго x, опредѣляемаго первымъ уравненіемъ: въ указанныхъ уравненіяхъ первой системы удержано обозначеніе одной буквой x, а въ соотвѣтственныхъ уравненіяхъ второй системы введена функція $f(y, z, \ldots)$, которая по уравненіямъ первымъ той и другой системы при всѣхъ значеніяхъ $y, z, \ldots$ представляетъ соотвѣтственное значеніе x. Если система чиселъ $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0, \ldots$ есть рѣшеніе системы (α), то имѣемъ тождества:

$$x_0=f(y_0, z_0, \ldots);\ F_1(x_0, y_0, z_0, \ldots)=0;$$
$$F_2(x_0, y_0, z_0, \ldots)=0; \ldots$$

Но $F_1(x_0, y_0, z_0, \ldots)=F_1[f(y_0, z_0, \ldots), y_0, z_0, \ldots]$, $F_2(x_0, y_0, z_0, \ldots)=F_2[f(y_0, z_0, \ldots), y_0, z_0, \ldots]$ и т. д. Слѣд., имѣютъ также мѣсто и слѣдующія тождества:

$$x_0=f(y_0, z_0, \ldots);\ F_1[f(y_0, z_0, \ldots), y_0, z_0, \ldots]=0;$$
$$F_2[f(y_0, z_0, \ldots), y_0, z_0, \ldots]=0; \ldots,$$

т.-е. система (β) имѣетъ рѣшеніемъ систему чиселъ $x_0, y_0, z_0, \ldots$

Итакъ, каждое рѣшеніе системы (α) служитъ рѣшеніемъ системы (β).

Подобнымъ же образомъ доказывается и то, что каждое рѣшеніе системы (β) служитъ рѣшеніемъ системы (α). Слѣд., системы (α) и (β) равносильны.

Доказанная теорема устанавливаетъ *принципъ подстановки*, т.-е. замѣны неизвѣстнаго его выраженіемъ черезъ другія неизвѣстныя.

Теорема V. *Система двухъ уравненій*

$$F_1(x, y, z, \ldots) = 0, \ F_2(x, y, z, \ldots) = 0 \ . \qquad (\gamma)$$

равносильна системѣ

$$\left.\begin{aligned} \lambda F_1(x, y, z, \ldots) + \mu F_2(x, y, z, \ldots) = 0, \\ F_2(x, y, z, \ldots) = 0. \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ (\delta)$$

гдѣ λ *и* μ *суть постоянныя числа и* $\lambda \neq 0$.

Тѣ значенія неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ въ нуль функціи F_1 и F_2, обращаютъ въ нуль и сумму $\lambda F_1 + \mu F_2$. Поэтому каждое рѣшеніе системы (γ) служитъ рѣшеніемъ системы (δ). Обратно, тѣ значенія неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ въ нуль функціи $\lambda F_1 + \mu F_2$ и F_2, обращаютъ въ нуль и функцію λF_1; а такъ какъ λ, по условію, отлично отъ нуля, то при тѣхъ же значеніяхъ обращается въ нуль и функція F_1. Отсюда слѣдуетъ, что каждое рѣшеніе системы (δ) служитъ рѣшеніемъ системы (γ). Слѣд., эти системы равносильны.

Теорема VI. *Система*

$$F_1(x, y, z, \ldots) = 0, \ F_2(x, y, z, \ldots), \ldots, \ F_n(x, y, z, \ldots) = 0$$

равносильна системѣ

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_n F_n = 0, \ F_2 = 0, \ldots \ F_n = 0,$$

гдѣ λ *суть постоянныя числа и* $\lambda_1 \neq 0$.

Эта теорема есть расширеніе теоремы V; доказательство ея аналогично доказательству теоремы V.

Указанныя въ настоящей главѣ теоремы являются основой тѣхъ преобразованій уравненія или системы уравненій, которыми пользуются при ихъ рѣшеніи.

ГЛАВА X.

Уравненія первой степени. Линейная функція одного перемѣннаго. Уравненіе прямой.

§ 147. **Рѣшеніе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.** Уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ можетъ быть приведено (§ 143, теор. I, слѣд. 2) къ виду

$$ax + b = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (\alpha)$$

гдѣ a и b, коэффиціенты уравненія, суть постоянныя относительно x. Уравненіе (α) равносильно уравненію (§ 143, теор. I)

$$ax = -b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (\beta)$$

Если $a \neq 0$, то уравненіе (β) равносильно уравненію (§ 143, теор. II)

$$x = -b/a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (\gamma)$$

Послѣднее уравненіе, какъ прямо указывающее то значеніе, которое нужно дать неизвѣстному, можно назвать *очевиднымъ*. Описанный процессъ рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ сводится къ послѣдовательному преобразованію даннаго уравненія въ равносильныя ему до тѣхъ поръ, пока не получится уравненіе очевидное.

§ 148. **Изслѣдованіе рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.** Изъ разсужденій предыдущаго § видно, что уравненіе (α) при $a \neq 0$ имѣетъ *одинъ* корень, а именно: $x = -b/a$.

Если $a = 0$, то первая часть уравненія (α) равна b при всѣхъ значеніяхъ x. Поэтому, если $b \neq 0$, то не существуетъ такого значенія x, которое удовлетворяло бы уравненію, т.-е. уравненіе (α) не имѣетъ корня. Если же $b = 0$, то уравненіе (α) обращается въ тождество, т.-е. удовлетворяется произвольнымъ значеніемъ x.

Формула (γ) въ случаѣ $a = 0$ и $b \neq 0$ приводитъ къ выраженію $-b/0$, а въ случаѣ $a = 0$ и $b = 0$ къ выраженію $0/0$.

Первое изъ этихъ выраженій показываетъ, что, если a есть *перемѣнное* число, стремящееся къ *нулю*, а b сохраняетъ конечное значеніе, то абсолютное значеніе дроби $-b/a$ безгранично возрастаетъ (§ 139). Кратко этотъ фактъ выражается словами: «при $a = 0$ и $b \neq 0$ уравненіе (α) имѣетъ безконечный корень» и знаками: $-b/0 = \infty$.

Выраженіе $0/0$ показываетъ, что уравненіе удовлетворяется произвольнымъ значеніемъ x, и называется *неопредѣленнымъ* рѣшеніемъ.

§ 149. **Линейная функція перемѣннаго** x. Рѣшеніе уравненія $ax + b = 0$ представляетъ частный вопросъ, входящій въ задачу объ изслѣдованіи измѣненія линейной функціи $ax + b$ перемѣннаго x при измѣненіи этого перемѣннаго.

Обозначая эту функцію черезъ y и соотвѣтственныя приращенія x и y черезъ Δx и Δy, имѣемъ слѣдующія равенства:

$$y = ax + b, \quad y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b.$$

Вычитая почленно первое равенство изъ второго, находимъ:

$$\Delta y = a\Delta x.$$

Это равенство приводитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) *если* $a > 0$, *то приращенія* Δx *и* Δy *одного знака, т.-е. при возрастаніи перемѣннаго* x ($\Delta x > 0$) *функція* y *возрастаетъ* ($\Delta y > 0$), *а при убываніи* x ($\Delta x < 0$) *функція* y *убываетъ* ($\Delta y < 0$);

2) *если* $a < 0$, *то приращенія* Δx *и* Δy *противоположныхъ знаковъ, т.-е. при возрастаніи перемѣннаго* x *функція* y *убываетъ, а при убываніи перемѣннаго* x *функція* y *возрастаетъ;*

3) *равнымъ приращеніямъ перемѣннаго* x *соотвѣтствуютъ равныя приращенія функціи* y; такое измѣненіе функціи называется равномѣрнымъ.

Кромѣ того мы знаемъ еще слѣдующее свойство функціи y (§ 130):

4) *функція* y *непрерывна при всѣхъ значеніяхъ* x.

Отношеніе $\Delta y/\Delta x$ соотвѣтственныхъ приращеній функціи y и перемѣннаго x называется *скоростью* измѣненія функціи y.

11*

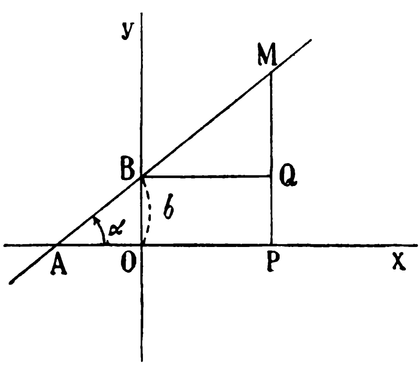
Изъ соотношенія $\Delta y = a\Delta x$ слѣдуетъ, что скорость измѣненія линейной функціи *постоянна* и равна a.

Терминъ: „*скорость*" заимствованъ изъ ученія о равномѣрномъ движеніи.

§ 150. **Уравненіе прямой.** Выводы §§ 147—149 можно иллюстрировать геометрически посредствомъ графика функціи $ax + b$. Для построенія его мы покажемъ, что каждой *прямой* соотвѣтствуетъ уравненіе вида $y = ax + b$, въ которомъ x и y обозначаютъ координаты точки, лежащей на прямой, а коэффиціенты a и b суть числа, опредѣляющія положеніе прямой относительно прямоугольныхъ осей координатъ.

Одинъ изъ способовъ, которыми можно опредѣлить положеніе прямой относительно осей, заключается въ указаніи *угла, который она образуетъ съ положительнымъ направленіемъ оси x, и отрѣзка, отсѣкаемаго ею на оси y, при чемъ началомъ этого отрѣзка считается начало координатъ.*

Пусть прямая образуетъ съ положительнымъ направленіемъ оси x уголъ α и отсѣкаетъ на оси y отрѣзокъ $OB = b$ (черт. 16). Возьмемъ на прямой произвольную точку M, координаты которой обозначимъ черезъ x и y, такъ что $OP = x$ и $PM = y$. Проведя черезъ точку B прямую BQ параллельно оси x до встрѣчи въ точкѣ Q съ прямой PM, получимъ прямоугольный треугольникъ BQM, катеты котораго суть $BQ = OP = x$ и $QM = PM - PQ = PM - OB = y - b$, а $\angle QBM = \angle xAM = \alpha$. По извѣстному изъ тригонометріи соотношенію между элементами прямоугольнаго треугольника имѣемъ: $y - b = x \cdot tan\, \alpha$. Отсюда, положивъ $tan\, \alpha = a$, находимъ уравненіе



Черт. 16.

$$y = ax + b. \qquad (83)$$

связывающее координаты произвольной точки прямой, положеніе которой относительно осей, опредѣляется числами a и b. Изъ этого слѣдуетъ, что координаты *всѣхъ* точекъ данной прямой удовлетворяютъ этому уравненію. Легко видѣть, что координаты точекъ, не лежащихъ на данной прямой, этому уравненію не удовлетворяютъ.

Каждой прямой соотвѣтствуетъ одно уравненіе вида (83) и, обратно, каждому уравненію вида (83) соотвѣтствуетъ одна прямая.

Послѣднее заключеніе вытекаетъ изъ того, что уравненіе (83) содержитъ два вещественныхъ числа a и b; первое изъ нихъ всегда можно принять за тангенсъ нѣкотораго угла, такъ какъ тангенсъ можетъ имѣть значеніе, равное произвольному числу, а второе — за отрѣзокъ на оси y, и по этимъ даннымъ построить единственную прямую. Поэтому уравненіе (83) называется *уравненіемъ прямой*. Координаты x и y произвольной точки, входящія въ это уравненіе, называются *текущими* координатами. Постоянныя a и b, которыя для различныхъ прямыхъ имѣютъ различныя значенія, называются *параметрами*; постоянное a, представляющее тангенсъ угла прямой съ осью x, называется *угловымъ коэффиціентомъ*.

Уравненіе (83) есть уравненіе первой степени относительно текущихъ координатъ.

Общій видъ уравненія первой степени относительно x и y таковъ:

$$Ax + By + C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

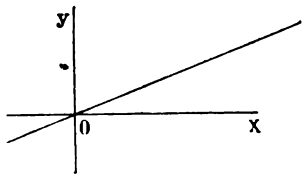
Докажемъ, что это уравненіе есть уравненіе прямой. Уравненіе (84) равносильно (§ 143) слѣдующимъ уравненіямъ ($B \neq 0$):

$$By = -Ax - C; \; y = -Ax/B - C/B.$$

Послѣднее изъ нихъ имѣетъ такой же видъ, какъ и уравненіе (83), которое есть уравненіе прямой. Слѣд., уравненіе (84) есть уравненіе прямой. Оно называется *общимъ* уравненіемъ прямой.

§ 151. **Частные случаи уравненія (84).** Разсмотримъ уравненіе (84) при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ A, B и C.

a) Пусть $C=0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$. Уравненіе (84) обращается въ этомъ случаѣ въ уравненіе $Ax+By=0$, которое удовлетворяется системой: $x=0$, $y=0$. Изъ этого слѣдуетъ, что на прямой, опредѣляемой уравненіемъ $Ax+By=0$, лежитъ точка, обѣ координаты которой суть нули. Эта точка есть начало координатъ. Слѣд., $Ax+By=0$ есть уравненіе прямой, проходящей черезъ начало координатъ (черт. 17).



Черт. 17.

b) Пусть $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$. Уравненіе (84) принимаетъ видъ: $By+C=0$. Рѣшая это уравненіе относительно y, находимъ: $y=-C/B$, т.-е. ординаты всѣхъ точекъ прямой одинаковы; прямая, обладающая этимъ свойствомъ, параллельна оси x. Слѣд., $By+C=0$ есть уравненіе прямой, параллельной оси x.

Точно также найдемъ, что $Ax+C=0$ есть уравненіе прямой, параллельной оси y.

c) Пусть $A=0$, $B\neq 0$, $C=0$. Этотъ случай есть комбинація двухъ предыдущихъ. Уравненіе (84) обращается въ уравненіе $By=0$, которое можно замѣнить равносильнымъ ему уравненіемъ (§ 143) $y=0$. Это—уравненіе оси x.

Точно также найдемъ, что $x=0$ есть уравненіе оси y.

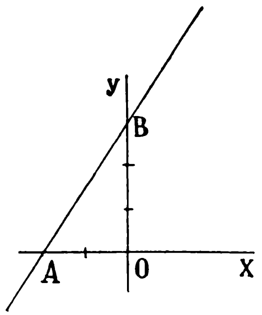
§ 152. **Построеніе прямой, данной уравненіемъ.** Извѣстно, что для построенія прямой достаточно знать двѣ ея точки. Если прямая дана уравненіемъ, то координаты точки ея легко найти, задаваясь значеніемъ одной координаты и опредѣляя изъ даннаго уравненія соотвѣтственное значеніе другой.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

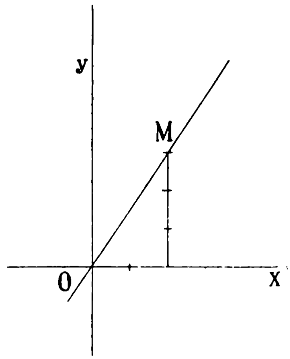
Примѣръ 1. Построить прямую, данную уравненіемъ:

$$3x-2y+6=0.$$

Полагая $x=0$, находимъ изъ этого уравненія, что $y=3$. Слѣд., на прямой лежитъ точка $B(0,3)$.



Черт. 18.



Черт. 19.

Полагая $y = 0$, изъ даннаго уравненія находимъ, что $x = -2$. Слѣд., на прямой лежитъ точка $A(-2{,}0)$. Прямая AB есть искомая (черт. 18).

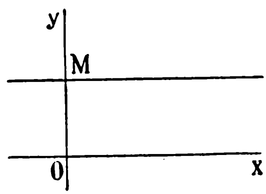
Примѣръ 2. Построить прямую, данную уравненіемъ:

$$3x - 2y = 0.$$

Прямая проходитъ черезъ начало координатъ (§ 151). Слѣд., для ея построенія нужно знать еще одну точку ея. Полагая въ данномъ уравненіи $x = 2$ и опредѣляя соотвѣтственное значеніе y, находимъ: $y = 3$. Поэтому точка $M(2{,}3)$ лежитъ на прямой. Прямая OM есть искомая (черт. 19).

Примѣръ 3. Построить прямую, данную уравненіемъ $y = 2$. Вопросъ сводится къ построенію прямой, параллельной оси x (§ 151) и находящейся отъ нея на разстояніи $OM = 2$ (черт. 20).

§ 153. **Параллельныя прямыя.** Параллельныя прямыя образуютъ съ осью x равные углы. Равные углы имѣютъ равные тангенсы. Тангенсъ угла наклоненія прямой къ оси x есть угловой коеффиціентъ a въ уравненіи вида (83). Слѣд., въ уравненіяхъ параллельныхъ прямыхъ угловые коэффиціенты равны.



Черт. 20.

Легко видѣть, что справедливо и обратное предложеніе: если угловые коэффиціенты въ уравненіяхъ двухъ прямыхъ равны, то прямыя параллельны.

Найдемъ условіе параллельности двухъ прямыхъ, данныхъ уравненіями:

$$Ax + By + C = 0,\ A'x + B'y + C' = 0.$$

Замѣняя эти уравненія соотвѣтственно равносильными имъ уравненіями

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},\quad y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'},$$

находимъ, что угловые коэффиціенты данныхъ прямыхъ суть $a = -A/B$ и $a' = -A'/B'$, Условіе параллельности прямыхъ выразится равенствомъ: $A/B = A'/B'$, показывающимъ, что въ уравненіяхъ двухъ параллельныхъ прямыхъ коэффиціенты при одноименныхъ координатахъ пропорціональны.

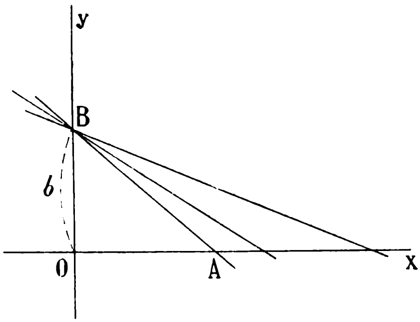
То же самое условіе можно еще выразить равенствомъ: $AB' - A'B = 0$.

§ 154. **Рѣшеніе уравненія $ax + b = 0$ съ геометрической точки зрѣнія.** Рѣшить уравненіе $ax + b = 0$ съ геометрической точки зрѣнія значитъ найти на прямой, опредѣляемой уравненіемъ $y = ax + b$, такую точку, для которой ордината y равна нулю. Но всѣ точки съ ординатами, равными нулю, лежатъ на оси x (§§ 73, 151). Слѣд., вопросъ о рѣшеніи уравненія $ax + b = 0$ равносиленъ вопросу о нахожденіи точки пересѣченія прямой $y = ax + b$ съ осью x, опредѣляемой уравненіемъ: $y = 0$. Если прямая $y = ax + b$ не параллельна оси x, т.-е. если $a \neq 0$ (§ 153), то существуетъ *одна* точка пересѣченія. Уравненіе $ax + b = 0$ имѣетъ одинъ корень.

Если прямая $y = ax + b$ параллельна оси x, но не совпадаетъ съ нею, т.-е. если $a = 0$ и $b \neq 0$ (§ 151), то точки пересѣченія не существуетъ. Уравненіе $ax + b = 0$ не имѣетъ въ этомъ случаѣ корня.

Для того же факта существуетъ иная форма выраженія. Пусть въ уравненіи $y = ax + b$ угловой коэффиціентъ a есть перемѣнная, стремящаяся къ нулю, а коэффиціентъ b остается постояннымъ.

При различныхъ значеніяхъ a и постоянномъ b уравненіе $y = ax + b$ представляетъ различныя прямыя, каждая изъ которыхъ отсѣкаетъ на оси y одинъ и тотъ же отрѣзокъ b (черт. 21), такъ что процессъ измѣненія a соотвѣтствуетъ вращенію прямой около точки $B(0,b)$.



Черт. 21.

При приближеніи a къ предѣлу, равному нулю, уголъ прямой съ положительнымъ направленіемъ оси x стремится или къ 0 или къ π (на черт. 21 онъ стремится къ π), а отрѣзокъ OA, образуемый ею на оси x безгранично увеличивается по абсолютному значенію.

Но отрѣзокъ OA есть абсцисса точки A пересѣченія разсматриваемой прямой съ осью x. При безграничномъ возрастаніи абсолютнаго значенія абсциссы точка A безгранично удаляется отъ начала координатъ. Это обстоятельство кратко выражаютъ такъ: «если прямая $y = ax + b$ параллельна оси x, но не совпадаетъ съ нею, т.-е. если $a = 0$ и $b \neq 0$ (§ 151), то точкой пересѣченія прямой съ осью x служитъ безконечно удаленная точка». Уравненіе $ax + b = 0$ имѣетъ въ этомъ случаѣ безконечный корень.

Если прямая $y = ax + b$ совпадаетъ съ осью x, т.-е. если $a = 0$, $b = 0$ (§ 151), то за точку пересѣченія прямой и оси x можно взять каждую точку оси x. Уравненіе $ax + b = 0$ имѣетъ въ этомъ случаѣ *неопредѣленное* рѣшеніе (сравн. § 148).

§ 155. **Уравненія первой степени съ 2 неизвѣстными.** Уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными можетъ быть приведено къ виду

$$ax + by = c, \qquad \dots\dots\dots \quad (a)$$

гдѣ a, b и c суть постоянныя числа, называемыя коэффиціентами уравненія, а x и y неизвѣстныя.

Для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ одного уравненія недостаточно. Дѣйствительно, принимая въ уравненіи (α) y за извѣстное число и предполагая, что $a \neq 0$, мы можемъ рѣшить это уравненіе относительно x (§ 147); сдѣлавъ это, получимъ выраженіе x черезъ y:

$$x = (c - by)/a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

Въ уравненіи (β) значеніе y совершенно произвольно; каждому значенію y соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе x; слѣд., существуетъ безконечное число паръ чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію (α). Въ этомъ смыслѣ одно уравненіе съ двумя неизвѣстными называется *неопредѣленнымъ*.

Два уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными составляютъ, въ общемъ случаѣ, систему *опредѣленную*, т.-е. удовлетворяются только *одной* системой значеній двухъ неизвѣстныхъ.

Это обнаруживается изъ разсмотрѣнія способовъ рѣшенія системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

§ 156. **Рѣшеніе системы двухъ уравненій 1-й степени съ двумя неизвѣстными.** Дана система уравненій:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\gamma)$$

гдѣ a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 суть числа, не зависящія отъ x и y.

Требуется найти значенія x и y, удовлетворяющія уравненіямъ (γ). Разсмотримъ три способа рѣшенія этой задачи.

a) **Способъ подстановки.** Предполагая, что $a_1 \neq 0$, можно (§ 143) замѣнить систему (γ) равносильной ей системой:

$$\left.\begin{aligned} x &= (c_1 - b_1y)/a_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta)$$

Эта система равносильна (§ 146, теор. IV) системѣ:

$$\left.\begin{aligned} x &= (c_1 - b_1y)/a_1, \\ a_2(c_1 - b_1y)/a_1 + b_2y &= c_2. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\varepsilon)$$

Второе уравненіе системы (ε) содержитъ только одно неизвѣстное y. Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то, рѣшая его, находимъ

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Подставляя это значеніе y въ первое уравненіе системы (ε), получимъ:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Такимъ образомъ систему (ε) можно замѣнить (§ 146, теор. IV) равносильной ей системой

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad \ldots\ldots \quad (\zeta)$$

каждое уравненіе которой есть уравненіе очевидное (§ 147). Уравненія (ζ) даютъ единственную систему значеній x и y, удовлетворяющихъ системѣ (α).

b) **Способъ сложенія.** Пусть въ уравненіяхъ (α) коэффиціенты a_1, a_2 и разность $a_1b_2 - a_2b_1$ отличны отъ нуля. Умноживъ первое изъ уравненій (α) на a_2, а второе на a_1, получимъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} a_1a_2x + a_2b_1y &= a_2c_1, \\ a_1a_2x + a_1b_2y &= a_1c_2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\eta)$$

равносильныя (§ 143, теор. II) соотвѣтственно первому и второму уравненіямъ системы (α); поэтому система (η) равносильна системѣ (α). Но система (η) равносильна (§ 146, теор. V) системѣ

$$\left.\begin{aligned} (a_1b_2 - a_2b_1)y &= a_1c_2 - a_2c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\vartheta)$$

Первое изъ уравненій этой системы содержитъ только одно неизвѣстное y. Рѣшивъ его относительно y, получимъ второе изъ уравненій (ζ); подстановка же найденнаго значенія y во второе уравненіе системы (ϑ) и рѣшеніе полученнаго уравненія относительно x приводитъ къ первому уравненію системы (ζ).

Такимъ образомъ отъ системы (ϑ) можно перейти къ равносильной ей системѣ (ζ), доставляющей рѣшеніе системы (α).

c) **Способъ сравненія неизвѣстныхъ.** Предполагая, что $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, систему (*a*) можно замѣнить равносильной (§ 143, теор. II) ей системой слѣдующихъ уравненій:

$$x = (c_1 - b_1 y)/a_1, \quad x = (c_2 - b_2 y)/a_2.$$

Эта система равносильна слѣдующей (§ 146, теор. IV):

$$x = (c_1 - b_1 y)/a_1, \quad (c_1 - b_1 y)/a_1 = (c_2 - b_2 y)/a_2.$$

Второе уравненіе послѣдней системы содержитъ только одно неизвѣстное y. Рѣшеніе его относительно y и подстановка найденнаго значенія y въ первое уравненіе послѣдней системы приводитъ къ системѣ (ζ), равносильной послѣдней изъ написанныхъ системъ.

Разсматривая указанные выше способы рѣшенія системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными, мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) всѣ способы рѣшенія системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными состоятъ въ преобразованіи данной системы въ системы, равносильныя ей;

2) одно изъ уравненій предпослѣдней изъ такихъ системъ содержитъ одно только неизвѣстное;

3) послѣдняя система содержитъ два очевидныхъ уравненія.

Заключеніе 2) показываетъ, что цѣль указанныхъ преобразованій состоитъ въ полученіи уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Полученіе такого уравненія носитъ названіе *исключенія* одного изъ неизвѣстныхъ.

§ 157. **Система n уравненій.** Примѣняя тѣ разсужденія, которыя приведены въ § 155 относительно уравненій съ двумя неизвѣстными, не трудно убѣдиться въ томъ, что для опредѣленія n неизвѣстныхъ (n — натуральное число) нужно имѣть n уравненій.

Для рѣшенія системы n уравненій первой степени съ n неизвѣстными употребляются способы, указанные въ § 156.

§ 158. **Условныя системы.** m уравненій съ n неизвѣстными при $m > n$ представляютъ такъ называемую *условную* систему уравненій. Это значитъ, что всѣ m уравненій имѣютъ одинаковое рѣшеніе только при извѣстныхъ соотношеніяхъ между коэффиціентами уравненій, входящихъ въ систему.

Разсмотримъ два примѣра.

Примѣръ 1. При какомъ условіи уравненія

$$ax + b = 0 \text{ и } a'x + b' = 0$$

совмѣстны, т.-е имѣютъ общій корень?

Корни перваго и второго уравненій выражаются соотвѣтственно числами $-b/a$ и $-b'/a'$. Для того, чтобы корни этихъ уравненій были одинаковы, необходимо и достаточно выполненіе равенства.

$$b/a = b'/a'.$$

Это равенство можно замѣнить равенствомъ

$$a/a' = b'/b',$$

которое показываетъ, что искомое условіе заключается въ пропорціональности соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ двухъ уравненій. Дѣйствительно, при выполненіи этого условія два данныхъ уравненія равносильны (§ 143, теор. II).

Примѣръ 2. *При какомъ условіи совмѣстна система уравненій:*

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0,\ a_3x + b_3y + c_3 = 0?$$

Предположимъ, что каждая пара уравненій изъ этихъ трехъ имѣетъ рѣшеніе, т.-е. что ни одна изъ разностей $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1b_3 - a_3b_1$ и $a_2b_3 - a_3b_2$ не обращается въ нуль (§ 156). Рѣшивъ систему двухъ первыхъ уравненій и подставивъ найденныя значенія x и y въ третье, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій получимъ искомое условіе въ формѣ равенства:

$$a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

Упражненіе. *Иллюстрировать геометрически разобранные выше примѣры.*

§ 159. **Изслѣдованіе рѣшеній системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.** Рѣшая систему уравненій

$$a_1x + b_1y = c_1,\ a_2x + b_2y = c_2. \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

мы получили (§ 156) для x и y слѣдующія формулы:

$$x=(c_1b_2-c_2b_1)/(a_1b_2-a_2b_1), \quad y=(a_1c_2-a_2c_1)/(a_1b_2-a_2b_1) \ldots (\beta)$$

При этомъ предполагалось, что $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$.

Слѣд., *при* $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ *система* (α) *имѣетъ единственное рѣшеніе, даваемое формулами* (β). Система (α) называется въ этомъ случаѣ *опредѣленной*.

Разсмотримъ тотъ случай, когда $a_1b_2-a_2b_1=0$.

1) Пусть $a_1b_2-a_2b_1=0$ и который-нибудь изъ четырехъ коэффиціентовъ a_1, b_1, a_2, b_2 отличенъ отъ нуля. Пусть $a_1 \neq 0$. При этомъ предположеніи система (α) равносильна (§§ 143 и 146) слѣдующей:

$$x=(c_1-b_1y)/a_1, \quad (a_1b_2-a_2b_1)\, y=a_1c_2-a_2c_1 \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Первая часть второго уравненія этой системы равна нулю при всѣхъ значеніяхъ y. Поэтому, если $a_1c_2-a_2c_1 \neq 0$, то *не существуетъ* такого значенія y, которое удовлетворяло бы ему. Если же $a_1c_2-a_2c_1=0$, то второе уравненіе системы (γ) удовлетворяется произвольнымъ значеніемъ y, а первое уравненіе этой системы служитъ для опредѣленія соотвѣтственнаго значенія x.

Итакъ, *если* $a_1b_2-a_2b_1=0$, $a_1 \neq 0$, $a_1c_2-a_2c_1 \neq 0$, *то система* (α) *не имѣетъ рѣшеній, а ея уравненія называются несовмѣстными; если же* $a_1b_2-a_2b_1=0$, $a_1 \neq 0$ и $a_1c_2-a_2c_1=0$, *то система* (α) *имѣетъ безчисленное множество рѣшеній и называется неопредѣленной*.

Легко видѣть, что въ послѣднемъ случаѣ уравненія системы (α) равносильны. Дѣйствительно, изъ условій

$$a_1b_2-a_2b_1=0, \quad a_1c_2-a_2c_1=0$$

слѣдуетъ, что $a_2/a_1=b_2/b_1=c_2/c_1$, т.-е. что коэффиціенты данныхъ уравненій пропорціональны; поэтому

$$a_2=ka_1, \quad b_2=kb_1, \quad c_2=kc_1,$$

гдѣ k есть постоянное число (коэффиціентъ пропорціональности), и второе уравненіе системы (α) можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ $k(a_1x+b_1y+c_1)=0$. Отсюда вытекаетъ заключеніе о равносильности двухъ уравненій системы (α) (§ 143, теор. II).

2) Пусть $a_1b_2-a_2b_1=0$ и $a_1=0$, $b_1=0$, $a_2=0$, $b_2=0$. Уравненія системы (α) приводятся къ равенствамъ: $0=c_1$, $0=c_2$.

Если одно изъ чиселъ c_1 и c_2 или оба вмѣстѣ не равны нулю, то система (α) не имѣетъ рѣшеній; если же c_1 и c_2 равны нулю, то любая пара чиселъ, принимаемыхъ за значенія x и y, удовлетворяетъ уравненіямъ системы.

§ 160. **Геометрическія иллюстраціи.** Укажемъ геометрическое значеніе результатовъ, полученныхъ въ предыдущемъ §.

Каждое изъ уравненій системы

$$a_1x+b_1y=c_1,\ a_2x+b_2y=c_2\ \ldots\ldots\ (\alpha)$$

представляетъ уравненіе прямой, если подъ x и y разумѣть координаты точки на плоскости (§ 150) и подъ a, b и c вещественныя числа. Найти значенія x и y, удовлетворяющія каждому изъ этихъ уравненій, значитъ найти *общую* точку прямыхъ, опредѣляемыхъ первымъ и вторымъ уравненіемъ, или, иначе, найти *точку пересѣченія двухъ прямыхъ.*

Если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то двѣ прямыя, опредѣляемыя первымъ и вторымъ уравненіемъ системы (α), *не параллельны.* Дѣйствительно, при параллельности двухъ разсматриваемыхъ прямыхъ мы имѣли бы равенство: $a_1b_2-a_2b_1=0$ (§ 153), которое противорѣчитъ условію. Двѣ непараллельныя прямыя пересѣкаются въ *одной* точкѣ. Она опредѣляется координатами:

$$x=(c_1b_2-c_2b_1)/(a_1b_2-a_2b_1),\ y=(a_1c_2-a_2c_1)/(a_1b_2-a_2b_1)\ \ldots\ (\beta)$$

Итакъ, рѣшеніе *опредѣленной* системы двухъ линейныхъ уравненій съ двумя неизвѣстными соотвѣтствуетъ геометрической задачѣ объ опредѣленіи точки пересѣченія двухъ не параллельныхъ прямыхъ.

Если $a_1b_2-a_2b_1=0$, то прямыя, опредѣляемыя уравненіями (α), параллельны (§ 153).

Допустимъ сначала, что эти параллельныя прямыя не параллельны которой-нибудь изъ осей координатъ. Въ такомъ случаѣ всѣ коэффиціенты a_1, a_2, b_1 и b_2 отличны отъ нуля (§ 151).

Если при выполненіи условія $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ число $a_1c_2 - a_2c_1$ отлично отъ нуля, то двѣ разсматриваемыя параллельныя прямыя различны и общей точки не имѣютъ.

Непосредственное примѣненіе формулъ (β) къ вычисленію координатъ точки пересѣченія приводитъ въ этомъ случаѣ къ выраженіямъ вида $m/0$, гдѣ $m \neq 0$, т.-е. даетъ *безконечныя* значенія для x и для y (сравн. § 154).

Если же при выполненіи условія $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ имѣетъ мѣсто равенство $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, то двѣ параллельныя прямыя совпадаютъ, такъ какъ изъ указанныхъ условій слѣдуетъ равносильность самыхъ уравненій (§ 159).

За точку пересѣченія двухъ совпадающихъ прямыхъ можно взять ея любую точку. Непосредственное примѣненіе формулъ (β) къ вычисленію координатъ x и y точки пересѣченія приводитъ въ этомъ случаѣ къ неопредѣленнымъ выраженіямъ вида $0/0$.

Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда данныя параллельныя прямыя параллельны одной изъ осей координатъ, напр., оси y. Въ такомъ случаѣ $b_1 = b_2 = 0$ (§ 151) и данная система приводится къ слѣдующей:

$$a_1x + c_1 = 0; \quad a_2x + c_2 = 0.$$

Если $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$, эта система несовмѣстна, т.-е. прямыя, опредѣленныя ея уравненіями, общей точки не имѣютъ. Если же $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, то уравненія системы равносильны, и прямыя, ими опредѣляемыя, сливаются въ одну. За точку ихъ пересѣченія можно взять любую ихъ точку.

Непосредственное приложеніе формулъ (β) даетъ въ первомъ случаѣ ($a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$) для y выраженіе вида $m/0$, гдѣ $m \neq 0$, и для x выраженіе $0/0$, а во второмъ ($a_1c_2 - a_2c_1 = 0$) и для x, и для y выраженіе вида $0/0$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что рѣшеніе системы двухъ *несовмѣстныхъ* уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными соотвѣтствуетъ геометрической задачѣ о нахожденіи точки пересѣченія двухъ *несовпадающихъ параллельныхъ* прямыхъ, а рѣшеніе *неопредѣленной* системы (§ 159) соотвѣтствуетъ задачѣ о нахожденіи точки пересѣченія двухъ *совпадающихъ параллельныхъ* прямыхъ.

§ 161. **Система однородныхъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.** *Однороднымъ* называется уравненіе $f(x, y, z, \ldots) = 0$, въ которомъ f есть однородная функція перемѣнныхъ (§§ 92, 143).

Система однородныхъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными x и y имѣетъ видъ:

$$a_1x + b_1y = 0,\ a_2x + b_2y = 0 \ \ldots\ldots \quad (\alpha')$$

Она получается изъ системы (α) § 160 при $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$.

Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то формулы (β) того же § приводятъ къ единственному рѣшенію системы: $x = 0$, $y = 0$.

Если же $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то указанныя формулы приводятъ къ выраженіямъ вида $0/0$. Въ этомъ случаѣ соотвѣтственные коэффиціенты уравненій (α') пропорціональны, а самыя уравненія равносильны (§ 159). Поэтому система (α') есть система неопредѣленная, имѣющая кромѣ нулевого рѣшенія (т.-е. $x=0$, $y = 0$) безконечное множество рѣшеній. Для полученія одного изъ нихъ достаточно дать которому-нибудь изъ неизвѣстныхъ опредѣленное значеніе и вычислить при помощи одного изъ уравненій (α') соотвѣтственное значеніе другого.

Не трудно видѣть, что въ случаѣ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ система (α') опредѣляетъ не значенія неизвѣстныхъ x и y, а *отношеніе* ихъ соотвѣтственныхъ значеній. Дѣйствительно, положивъ въ одномъ изъ уравненій (α') $x = zy$, гдѣ z есть новое неизвѣстное, получимъ уравненіе

$$y(a_1z + b_1) = 0,$$

которое приводится къ уравненію $a_1z + b_1 = 0$, если $y \neq 0$. Изъ уравненія $a_1z + b_1 = 0$ опредѣляется $z = x/y$, т.-е. отношеніе неизвѣстныхъ x и y.

Съ геометрической точки зрѣнія каждое изъ уравненій (α') опредѣляетъ прямую, проходящую черезъ начало координатъ (§ 151). Если уравненія (α) не равносильны ($a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$), то мы имѣемъ двѣ различныя прямыя, точкой пересѣченія которыхъ служитъ начало координатъ, т.-е. точка съ координатами $x=0$, $y=0$. Если же уравненія (α') равносильны ($a_1b_2-a_2b_1=0$), то мы имѣемъ двѣ совпадающія прямыя; за точку ихъ пересѣченія можно взять произвольную точку ихъ.

§ 162. **Примѣры.** *1. Рѣшить систему уравненій*

$$\lambda x+y=2,\ x+\lambda y=\lambda, \ldots\ldots \qquad (\alpha)$$

гдѣ λ *есть перемѣнный параметръ, и изслѣдовать рѣшеніе.*

Пользуясь однимъ изъ способовъ, указанныхъ въ § 156. находимъ для x и y слѣдующія значенія:

$$x=\lambda/(\lambda^2-1),\ y=(\lambda^2-2)/(\lambda^2-1). \qquad (\beta)$$

Если $\lambda^2-1\neq 0$, то эти формулы даютъ опредѣленныя значенія для x и y. Но $\lambda^2-1\neq 0$, если $\lambda\neq\mp 1$. Слѣд., данная система есть система *опредѣленная* при значеніяхъ λ, отличныхъ отъ ∓ 1.

При $\lambda=1$ формулы (β) приводятъ къ выраженіямъ $1/0$ и $-1/0$. Чтобы выяснить этотъ случай, положимъ въ уравненіяхъ (α) $\lambda=1$. Получимъ систему уравненій

$$x+y=2,\ x+y=1,$$

изъ которыхъ первое требуетъ, чтобы сумма неизвѣстныхъ была равна 2, а второе требуетъ, чтобы та же сумма была равна 1. Требованія несовмѣстимы, поэтому при $\lambda=1$ система (α) состоитъ изъ двухъ несовмѣстныхъ уравненій и рѣшенія не имѣетъ.

При $\lambda=-1$ получаемъ систему уравненій

$$-x+y=2,\ x-y=-1,$$

также противорѣчащихъ другъ другу.

2. *Рѣшить систему уравненій*

$$\lambda x+y=2,\ x+\lambda y=\lambda-1,\ \ldots \qquad (\gamma)$$

гдѣ λ *есть перемѣнный параметръ, и изслѣдовать рѣшеніе.*

Для опредѣленія значеній x и y, удовлетворяющихъ уравненіямъ (γ), имѣемъ слѣдующія формулы:

$$x=(\lambda+1)/(\lambda^2-1);\ y=(\lambda^2-\lambda-2)/(\lambda^2-1). \qquad (\delta)$$

При $\lambda \neq \mp 1$ формулы (δ) даютъ опредѣленныя значенія для x и y. Слѣд., система (γ) есть опредѣленная система для всѣхъ значеній λ, отличныхъ отъ ∓ 1.

При $\lambda = 1$ формулы (δ) приводятъ къ выраженіямъ $2/0$ и $-2/0$. Полагая $\lambda = 1$ въ уравненіяхъ (α), находимъ *несовмѣстныя* уравненія:

$$x + y = 2,\ x + y = 0.$$

Въ этомъ случаѣ система (α) не имѣетъ рѣшенія.

При $\lambda = -1$ формулы (δ) приводятъ къ выраженіямъ вида $0/0$. Полагая $\lambda = -1$ въ уравненіяхъ (α), находимъ *равносильныя* уравненія:

$$-x + y = 2,\ x - y = -2.$$

Въ этомъ случаѣ система (α) есть *неопредѣленная* система.

3. *Рѣшить систему уравненій*

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 2\lambda + 1, \\ \lambda x + (2-\lambda)y - z &= \lambda + 3, \\ 2x + (2-\lambda)y + (\lambda - 2)z &= 2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

гдѣ λ есть перемѣнный параметръ, и изслѣдовать рѣшеніе.

Для системы трехъ уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными общія формулы, дающія значенія неизвѣстныхъ, не были выведены. Поэтому мы опредѣлимъ значенія x, y и z непосредственнымъ примѣненіемъ одного изъ способовъ, указанныхъ въ § 156, къ системѣ (ε).

Умноживъ обѣ части перваго изъ уравненій системы на $\lambda - 2$ и сложивъ почленно съ третьимъ, получимъ уравненіе

$$\lambda x = \lambda(2\lambda - 3).$$

Это уравненіе позволяетъ опредѣлить значеніе x для всѣхъ значеній параметра λ, кромѣ $\lambda = 0$. Предполагая, что $\lambda \neq 0$, находимъ:

$$x = 2\lambda - 3.$$

Подставляя это значеніе x въ первое и второе уравненія системы (ε), получимъ систему двухъ уравненій съ неизвѣстными y и z:

$$y - z = 4,\ (2-\lambda)y - z = -2\lambda^2 + 4\lambda + 3.$$

Черезъ вычитаніе второго уравненія изъ перваго, находимъ уравненіе:

$$(\lambda - 1)y = 2\lambda^2 - 4\lambda + 1.$$

Отсюда получаемъ: $y = (2\lambda^2 - 4\lambda + 1)/(\lambda - 1)$ для всѣхъ значеній λ, отличныхъ отъ 1. Подставляя найденныя значенія x и y въ первое уравненіе системы и рѣшая полученное уравненіе относительно z, получимъ

$$z = (2\lambda^2 - 8\lambda + 5)/(\lambda - 1).$$

Найденныя значенія x, y и z представляютъ рѣшеніе системы (ε) при всѣхъ значеніяхъ параметра λ, кромѣ $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$.

При $\lambda = 0$ система обращается въ слѣдующую:

$$x + y - z = 1,\ 2y - z = 3,\ 2x + 2y - 2z = 2.$$

Первое и послѣднее уравненія этой системы равносильны. Поэтому для опредѣленія x, y и z мы имѣемъ въ этомъ случаѣ только два уравненія, т.-е. систему неопредѣленную.

При $\lambda = 1$ система (ε) обращается въ систему

$$x + y - z = 3,\ x + y - z = 4,\ 2x + y - z = 2,$$

которой два первыя уравненія несовмѣстны. Слѣд., при $\lambda = 1$ система (ε) не имѣетъ рѣшенія.

ГЛАВА XI.

Общія теоремы о неравенствахъ. Неравенства первой степени.

§ 163. **Виды неравенствъ.** Изъ опредѣленій понятій: *„больше“* и *„меньше“* въ области чиселъ натуральныхъ (§ 1), дробныхъ (§ 37), отрицательныхъ (§ 26) и ирраціональныхъ (§ 46) слѣдуетъ, что вещественное число a больше вещественнаго числа b, если разность $a - b$ есть число положительное, и число a меньше числа b, если разность $a-b$ есть число отрицательное, такъ что (§ 26)

$$a>b, \text{ если } a-b>0; \quad a<b, \text{ если } a-b<0.$$

Соединеніе двухъ алгебраическихъ выраженій посредствомъ знака неравенства ($>$ или $<$) называется алгебраическимъ неравенствомъ.

Обозначимъ черезъ A и B два алгебраическія выраженія.

Неравенство $A>B$ называется *безусловнымъ*, если оно справедливо при всѣхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ составъ A и B, и *условнымъ*, если оно оказывается справедливымъ лишь при нѣкоторыхъ значеніяхъ этихъ буквъ.

Напримѣръ, $x+1>x$ есть неравенство безусловное, потому что оно справедливо при всѣхъ значеніяхъ x; неравенство $x+1>3$ есть условное, потому что оно справедливо лишь для тѣхъ значеній x, которыя больше 2.

Раздѣленіе неравенствъ на безусловныя и условныя аналогично раздѣленію равенствъ на тождества и уравненія (§ 141).

§ 164. **Преобразованіе неравенствъ.** Разсмотримъ теоремы, на которыхъ основаны преобразованія неравенствъ. Подъ буквами A, B, C,.... будемъ разумѣть алгебраическія выраженія, зависящія отъ нѣкоторыхъ перемѣнныхъ вещественныхъ чиселъ.

Теорема I. *Если* $A>B$ *и* $B>C$, *то* $A>C$.

По предыдущему § имѣемъ: $A-B>0$ и $B-C>0$; отсюда заключаемъ, что $(A-B)+(B-C)>0$ или $A-C>0$, что и доказываетъ теорему.

Теорема II. *Если* $A>B$, *то* $A\mp C>B\mp C$.

Дѣйствительно, если $A>B$, то $A-B>0$. Но $A-B=(A\mp C)-(B\mp C)$; слѣд., $(A\mp C)-(B\mp C)>0$; отсюда получаемъ: $A\mp C>B\mp C$.

Слѣдствіе 1. *Можно переносить члены одной части неравенства въ другую, перемѣняя ихъ знаки на обратные.*

Слѣдствіе 2. *Каждое неравенство можно привести къ одному изъ двухъ видовъ:* $A>0$ *или* $A<0$.

Теорема II показываетъ, что къ обѣимъ частямъ неравенства можно прибавлять по одному и тому же выраженію, не измѣняя смысла неравенства. Если данное неравенство было безусловное, то эта теорема даетъ возможность выводить изъ него слѣдствія въ формѣ неравенствъ, также безусловныхъ; если же было дано неравенство условное, то она позволяетъ переходить отъ одного неравенства къ другому, которое удовлетворяется тѣми же значеніями буквъ, что и первое.

Условныя неравенства, удовлетворяющіяся одними и тѣми же значеніями буквъ, въ нихъ входящихъ, называются, по аналогіи съ уравненіями (§ 142), *равносильными*.

По отношенію къ условнымъ неравенствамъ теорема II и ея слѣдствія представляютъ полную аналогію съ теоремой I § 143 и ея слѣдствіями.

Слѣдствіе 2 даетъ основаніе классификаціи неравенствъ по виду функціи A, представляющей первую часть неравенства $A > 0$ или неравенства $A < 0$. Этимъ неравенствамъ присвоивается названіе функціи A. Такъ, напр., $x + 2 > 0$ есть цѣлое раціональное неравенство первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; $x + (x - 1)/x > 0$ есть дробное раціональное неравенство, $x - \sqrt{x} < 0$ есть ирраціональное неравенство.

Теорема III. *Если*

$$A_1 > B_1,\ A_2 > B_2, \ldots,\ A_n > B_n,$$

то

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n > B_1 + B_2 + \cdots + B_n.$$

Дѣйствительно, разность

$$(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) - (B_1 + B_2 + \cdots + B_n) \equiv (A_1 - B_1) + \\ + (A_2 - B_2) + \cdots + (A_n - B_n)$$

положительна, какъ сумма положительныхъ разностей $A_1 - B_1$, $A_2 - B_2$, ... Слѣд. (§ 163), $A_1 + A_2 + \cdots + A_n > B_1 + B_2 + \cdots + B_n$.

Въ примѣненіи къ безусловнымъ неравенствамъ эта теорема показываетъ, что при почленномъ сложеніи неравенствъ *одинаковаго смысла* получается неравенство того же смысла. По отношенію же къ условнымъ неравенствамъ она аналогична теоремѣ VI § 145 о равносильныхъ системахъ уравненій.

Теорема IV. *Если* $A > B$ *и* $C > 0$, *то* $AC > BC$; *если* $A > B$ *и* $C < 0$, *то* $AC < BC$.

Для доказательства теоремы замѣтимъ, что разность $AC-BC$ можно представить въ видѣ произведенія $(A-B)C$, первый множитель котораго, по условію, положителенъ; поэтому знакъ произведенія $(A-B)C$ или разности $AC-BC$ совпадаетъ со знакомъ C, такъ что, если $C>0$, то $AC-BC>0$ и $AC>BC$, если $C<0$, то $AC-BC<0$ и $AC<BC$.

Эта теорема показываетъ, что умноженіе обѣихъ частей неравенства на положительное число приводитъ къ неравенству одинаковаго смысла съ даннымъ, а умноженіе на отрицательное число—къ неравенству противоположнаго смысла.

Подъ буквой C можно разумѣть какъ постоянное число, такъ и перемѣнное, значенія котораго либо всегда положительны, либо всегда отрицательны.

По отношенію къ условнымъ неравенствамъ доказанная теорема аналогична теоремѣ II § 143.

Изъ теоремы IV вытекаетъ, какъ слѣдствіе, возможность сокращенія неравенствъ и освобожденія ихъ отъ дробныхъ коэффиціентовъ.

Теорема V. *Если A, B, C, D положительны и*

$$A>B,\quad C>D,$$

то $AC>BD$.

Дѣйствительно, изъ данныхъ неравенствъ по теоремѣ IV получаемъ:

$$AC>BC \text{ и } BC>BD.$$

Отсюда, по теоремѣ I, заключаемъ, что $AC>BD$.

Теорема VI. *Если* $A_1>0$, $A_2>0, \ldots$, $A_n>0$, $B_1>0$, $B_2>0, \ldots$ $B_n>0$ *и* $A_1>B_1$, $A_2>B_2, \ldots$ $A_n>B_n$, *то*

$$A_1A_2\ldots A_n>B_1B_2\ldots B_n.$$

Эта теорема представляетъ расширеніе предыдущей.

Слѣдствіе 1. *Если A и B положительны и $A>B$, то $A^n>B^n$, гдѣ n есть натуральное число.*

Слѣдствіе 2. *Если A и B положительны и $A>B$, то $A^{1/n}>B^{1/n}$, гдѣ n есть натуральное число и подъ n-ымъ корнемъ разумѣется его положительное значеніе.*

Допустивъ, что $A^{1/n} \leqslant B^{1/n}$, мы, по слѣдствію 1, должны были бы заключить, что $(A^{1/n})^n \leqslant (B^{1/n})^n$ или $A \leqslant B$, что противорѣчитъ условію.

Слѣдствіе 3. *Если A и B положительны и $A > B$, то $A^{m/n} > B^{m/n}$, гдѣ m и n суть натуральныя числа.*

Слѣдствіе 4. *Если A и B положительны и $A > B$, то $A^{-n} < B^{-n}$, гдѣ n есть натуральное число.*

Дѣйствительно, изъ неравенства $A > B$ черезъ почленное умноженіе на $1/AB$ находимъ по теоремѣ IV' неравенство: $1/B > 1/A$. Отсюда (теор. VI, слѣд. 1) заключаемъ, что $(1/B)^n > (1/A)^n$ или $A^{-n} < B^{-n}$.

§ 165. **Неравенство первой степени.** Общій видъ неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ таковъ:

$$ax + b > 0. \qquad (\alpha)$$

гдѣ a и b суть постоянныя числа, а x—неизвѣстное.

Рѣшить неравенство значитъ найти тѣ значенія неизвѣстнаго, которыми оно удовлетворяется.

По теоремѣ II предыдущаго параграфа неравенство (α) равносильно неравенству

$$ax > -b. \qquad (\beta)$$

а это послѣднее по теоремѣ IV' равносильно неравенству

$$x > -b/a, \qquad (\gamma)$$

если $a > 0$, и неравенству

$$x < -b/a. \qquad (\gamma')$$

если $a < 0$.

Неравенства вида (γ) и (γ') можно назвать *очевидными*. Они даютъ рѣшенія неравенства (α).

Если въ неравенствѣ (α) коэффиціентъ a обращается въ нуль, то при $b > 0$ оно удовлетворяется всякимъ значеніемъ x, а при $b < 0$ рѣшеній не имѣетъ.

Съ геометрической точки зрѣнія рѣшеніе неравенства (α) сводится къ нахожденію тѣхъ значеній абсциссы x, при которыхъ ордината y прямой, опредѣляемой уравненіемъ $y = ax + b$, имѣетъ положительныя значенія (сравн. § 154).

Если $a=0$, то указанная прямая параллельна оси x и находится отъ нея на разстояніи b (§ 151); при $b>0$ ординаты *всѣхъ* точекъ прямой положительны, а при $b<0$ ординаты *всѣхъ* точекъ прямой отрицательны.

§ 166. **Система двухъ неравенствъ первой степени.** Пусть даны два неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$ax+b>0,\ a'x+b'>0; \quad \ldots\ldots \quad (\delta)$$

требуется найти тѣ значенія x, которыя удовлетворяютъ тому и другому неравенству.

Рѣшая каждое изъ нихъ въ отдѣльности получимъ слѣдующія пары неравенствъ:

$$\begin{aligned}
&x>-b/a,\ x>-b'/a',\ \text{если } a>0 \text{ и } a'>0;\\
&x<-b/a,\ x>-b'/a',\ \text{если } a<0 \text{ и } a'>0;\\
&x>-b/a,\ x<-b'/a',\ \text{если } a>0 \text{ и } a'<0;\\
&x<-b/a,\ x<-b'/a',\ \text{если } a<0 \text{ и } a'<0.
\end{aligned}$$

Изъ этой таблицы видно, что въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты a и a' имѣютъ одинаковые знаки, искомыя значенія x должны удовлетворять двумъ неравенствамъ одинаковаго смысла, т.-е. неравенствамъ вида $x>m$, $x>n$ или неравенствамъ вида $x<m$, $x<n$. Предполагая, что $m>n$, пару неравенствъ: $x>m$, $x>n$ можно замѣнить однимъ неравенствомъ: $x>m$, а пару неравенствъ: $x<m$, $x<n$—неравенствомъ: $x<n$, такъ что искомыя значенія x опредѣляются въ первомъ случаѣ неравенствомъ $x>m$, а во второмъ — неравенствомъ $x<n$.

Если знаки a и a' противоположны, то искомыя значенія x должны удовлетворять двумъ неравенствамъ противоположнаго смысла, т.-е. неравенствомъ вида: $x<m$, $x>n$. Эти условія могутъ быть выполнены только въ томъ случаѣ, когда $m>n$. Поэтому неравенства (δ) не всегда имѣютъ рѣшеніе въ томъ случаѣ, когда a и a' имѣютъ противоположные знаки.

Примѣръ 1. *Рѣшить систему неравенствъ:*

$$3x-5>0,\ 5x+12>0.$$

Изъ перваго неравенства находимъ, что $x > 5/3$, а изъ второго, что $x > -12/5$. Такъ какъ $5/3 > -12/5$, то рѣшеніе данной системы представляется неравенствомъ: $x > 5/3$.

Построеніе прямыхъ, опредѣляемыхъ соотвѣтственно уравненіями

$$y = 3x - 5 \text{ и } y = 5x + 12,$$

даетъ геометрическую иллюстрацію полученнаго вывода и рекомендуется, какъ полезное упражненіе.

Примѣръ 2. *Рѣшить систему неравенствъ:*

$$3x - 5 > 0, \quad -4x + 9 > 0.$$

Изъ перваго неравенства находимъ, что $x > 5/3$, а изъ второго, что $x < 9/4$. Такъ какъ $9/4 > 5/3$, то данной системѣ удовлетворяютъ всѣ числа, заключенныя между 5/3 и 9/4. Рѣшеніе можно записать въ формѣ двойного неравенства:

$$5/3 < x < 9/4.$$

Примѣръ 3. *Рѣшить систему неравенствъ:*

$$3x - 5 > 0 \quad -4x - 9 > 0.$$

Изъ перваго неравенства находимъ, что $x > 5/3$, а изъ второго, что $x < -9/4$. Такъ какъ $-9/4 < 5/3$, то чиселъ, удовлетворяющихъ этимъ двумъ условіямъ, нѣтъ. Слѣд., данная система не имѣетъ рѣшеній.

Упражненіе. *Иллюстрировать геометрически второй и третій примѣры.*

ГЛАВА XII.

Квадратныя уравненія. Цѣлая раціональная функція второй степени. Уравненія высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ. Возвратныя уравненія. Двучленныя уравненія. Трехчленныя уравненія. Системы уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными.

§ 167. **Квадратное уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.** Общій видъ уравненія второй степени или квадратнаго съ однимъ неизвѣстнымъ таковъ (§ 143):

$$ax^2+bx+c=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Подъ a, b и c разумѣются постоянныя относительно x числа, вещественныя или комплексныя. Они называются *коэффиціентами* уравненія.

Рѣшить уравненіе (85) значитъ найти тѣ значенія неизвѣстнаго x, которыя обращаютъ въ нуль квадратный трехчленъ ax^2+bx+c. Эти значенія называются корнями указаннаго трехчлена (§ 128) или *корнями уравненія (85)*.

Рѣшеніе квадратнаго уравненія (85) сводится къ рѣшенію двухъ линейныхъ уравненій. Доказательство этого предложенія основано на томъ, что квадратный трехчленъ ax^2+bx+c можно представить въ видѣ произведенія *двухъ* линейныхъ относительно x множителей.

§ 168. **Разложеніе квадратнаго трехчлена на множители.** Предполагая, что коэффиціентъ a старшаго члена квадратнаго трехчлена отличенъ отъ нуля, можно сдѣлать надъ этимъ трехчленомъ слѣдующій рядъ преобразованій:

$$ax^2+bx+c\equiv a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\equiv a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right]\equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)^2\right]\equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]\equiv a\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right].$$

Отсюда, положивъ

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad \ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

находимъ слѣдующее разложеніе квадратнаго трехчлена:

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-x_1)(x-x_2),\quad a \neq 0\ \ldots \quad (87)$$

Это тождество показываетъ, что *квадратный трехчленъ* ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ *можно представить въ видѣ произведенія двухъ линейныхъ относительно* x *множителей.*

Примѣры. 1. $3x^2+5x-2 \equiv 3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right) \equiv 3\left[\left(x^2+\frac{5}{3}x+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{25}{36}\right)-\left(\frac{25}{36}+\frac{2}{3}\right)\right] \equiv 3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{49}{36}\right] \equiv 3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right) \equiv$ $\equiv (x+2)(3x-1)$.

2. $x^2+x+1 \equiv \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right) \equiv \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \equiv$ $\equiv \left(x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right),\ i=\sqrt{-1}.$

3. $ix^2+(2-i)x-(1+i) \equiv i\left\{x^2-(1+2i)x-(1-i)\right\} \equiv$ $\equiv i\left\{x^2-(1+2i)x+\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2+(1-i)\right]\right\} \equiv$

$$\equiv i\left\{\left(x-\frac{1+2i}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\} \equiv i(x-i)(x-1-i) \equiv$$

$$\equiv (x-i)(ix+1-i),\ i=\sqrt{-1}.$$

§ 169. **Рѣшеніе квадратнаго уравненія.** Тождество (87) показываетъ, что трехчленъ ax^2+bx+c обращается въ нуль при *двухъ* значеніяхъ x, а именно, при $x=x_1$ и $x=x_2$ (форм. 86). Слѣд., x_1 и x_2, опредѣляемыя формулами (86), суть корни уравненія (85). Формулы (86) можно соединить въ одну слѣдующую:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad \ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

Эта формула служитъ для вычисленія корней квадратнаго уравненія (85) при всѣхъ значеніяхъ коэффиціентовъ a, b, c, за исключеніемъ случая $a=0$.

Полезно замѣтить два видоизмѣненія этой формулы, зависящія отъ вида коэффиціентовъ квадратнаго уравненія.

Для уравненія вида $x^2+px+q=0$ формула (88) приводится къ одной изъ слѣдующихъ:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};\quad x=(-p\pm\sqrt{p^2-4q})/2.$$

Для уравненія вида $ax^2+2bx+c=0$, гдѣ a, b и c суть произвольныя числа съ тѣмъ только ограниченіемъ, что $a\neq 0$, формула (88) принимаетъ послѣ упрощеній слѣдующій видъ:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

§ 170. **Характеръ корней квадратнаго уравненія съ вещественными коэффиціентами. Дискриминантъ.** Положимъ, что коэффиціенты a, b, c ($a\neq 0$) уравненія (85) суть *вещественныя* числа. Корнями его могутъ быть какъ *вещественныя*, такъ и *комплексныя* числа. Изъ формулы (88) видно, что если разность b^2-4ac, изъ котораго при опредѣленіи корней приходится извлекать квадратный корень, есть число *положительное*, то оба корня квадратнаго уравненія — *вещественныя* числа; если же эта разность есть число *отрицательное*, то числитель правой части формулы (88) — *комплексное* число.

Такимъ образомъ мы видимъ, что характеръ корней квадратнаго уравненія съ вещественными коэффиціентами опредѣляется знакомъ числа b^2-4ac. Это число называется *дискриминантомъ* квадратнаго уравненія. Обозначимъ его черезъ D.

Если $D>0$, то корни уравненія (85) суть вещественныя и различныя числа.

Если $D<0$, то корни уравненія (85) суть сопряженныя комплексныя числа (§§ 72, 135).

Если $D=0$, то корни уравненія одинаковы и равны $-b/2a$. Въ этомъ случаѣ трехчленъ ax^2+bx+c есть квадратъ линейной функціи x. Дѣйствительно, изъ формулы (87) при $x_1=x_2=-b/2a$ слѣдуетъ, что

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_1)=(\sqrt{a}\,.x+b/2\sqrt{a})^2.$$

§ 171. Сумма и произведеніе корней квадратнаго уравненія. Изъ формулы (87) слѣдуетъ (§ 136), что

$$x_1 + x_2 = -b/a; \quad x_1 . x_2 = c/a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Въ случаѣ вещественныхъ корней эти формулы позволяютъ опредѣлять *знаки* корней безъ вычисленія ихъ. Дѣйствительно, если $c/a > 0$, то по второй изъ формулъ (89) корни x_1 и x_2 имѣютъ *одинаковый* знакъ, который является вмѣстѣ съ тѣмъ знакомъ ихъ суммы, т.-е. числа $-b/a$.

Если $c/a < 0$, то корни x_1 и x_2 имѣютъ *противоположные* знаки, при чемъ знакъ большаго по абсолютному значенію корня совпадаетъ со знакомъ ихъ суммы, т.-е. числа $-b/a$.

Зависимость между знаками коэффиціентовъ и корней квадратнаго уравненія можно представить слѣдующей таблицей:

$ax^2 + bx + c = 0$				
$b^2 - 4ac > 0$				
a	b	c	x_1	x_2
$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

Формулы (89) даютъ, кромѣ того, возможность составить квадратное уравненіе по даннымъ корнямъ его.

Примѣры. 1. *Опредѣлить характеръ корней слѣдующихъ уравненій:* α) $5x^2 + 2x + 1 = 0$; β) $5x^2 - 7x + 1 = 0$; γ) $5x^2 - 7x - 1 = 0$; δ) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Для α) дискриминантъ $D = 2^2 - 4.5.1 < 0$; корни уравненія — комплексныя числа.

Для β) дискриминантъ $D = (-7)^2 - 4.5.1 > 0$; корни уравненія — вещественныя числа; ихъ произведеніе равно $1/5$

слѣд., корни имѣютъ одинаковые знаки; ихъ сумма $= 7/5$; слѣд., оба корня положительны.

Для γ) дискриминантъ $D = (-7)^2 - 4.5.(-1) > 0$; корни уравненія вещественныя числа; ихъ произведеніе равно $-1/5$; слѣд., корни имѣютъ разные знаки; ихъ сумма равна $7/5$; слѣд., абсолютное значеніе положительнаго корня больше абсолютнаго значенія отрицательнаго корня.

Для δ) дискриминантъ $D = (-12)^2 - 4.4.9 = 0$; корни уравненія — вещественныя равныя числа.

2. *Составить квадратное уравненіе, зная что корни его суть* 3 *и* -5.

Если уравненіе съ данными корнями есть $x^2 + px + q = 0$, то по формуламъ (89) $p = -3 + 5 = 2$; $q = 3.(-5) = -15$. Слѣд., искомое уравненіе таково: $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Къ тому же результату приводитъ и то соображеніе, что разложеніе квадратнаго трехчлена съ данными корнями представляется произведеніемъ (§ 168): $(x-3)(x+5)$. Раскрывъ его и приравнявъ нулю, получимъ искомое уравненіе.

3. *Составить квадратное уравненіе съ вещественными коэффиціентами, зная, что одинъ изъ его корней есть* $1 + i$ $(i = \sqrt{-1})$.

Задача приводится къ предыдущей, если мы замѣтимъ, что вторымъ корнемъ уравненія служитъ число $1 - i$ (§ 170). Искомое уравненіе таково: $x^2 - 2x + 2 = 0$.

§ 172. **Сумма m-ыхъ степеней корней квадратнаго уравненія.** Сумма и произведеніе корней квадратнаго уравненія суть простѣйшія симметрическія функціи его корней (§ 136). Сумма $x_1^m + x_2^m$, гдѣ m есть натуральное число, также представляетъ симметрическую функцію корней x_1 и x_2 квадратнаго уравненія (85).

Покажемъ, что эта сумма выражается *раціонально* черезъ коэффиціенты уравненія (85).

Такъ какъ x_1 и x_2 суть корни уравненія (85), то имѣютъ мѣсто тождества:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0; \quad ax_2^2 + bx_2 + c = 0.$$

Умноживъ первое изъ нихъ на x_1^{m-2}, а второе на x_2^{m-2} и сложивъ почленно полученныя тождества, находимъ:

$$a\left(x_1^m + x_2^m\right) + b\left(x_1^{m-1} + x_2^{m-1}\right) + c\left(x_1^{m-2} + x_2^{m-2}\right) = 0,$$

причемъ $m \geqslant 2$. Обозначивъ сумму $x_1^m + x_2^m$ черезъ s_m, предыдущее равенство можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$as_m + bs_{m-1} + cs_{m-2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

Эта формула даетъ возможность выразить s_m черезъ s_{m-1} и s_{m-2}; такъ какъ извѣстно, что $s_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2$ и $s_1 = -b/a$ (§ 171), то, пользуясь уравненіемъ (90), можно послѣдовательно вычислить s_2, s_3, и т. д. Результаты вычисленій раціональны относительно a, b и c, такъ какъ уравненіе (90) есть уравненіе первой степени относительно s_m, а s_0 и s_1 выражаются раціонально черезъ эти коэффиціенты.

Приведемъ результаты вычисленій s_2, s_3 и s_4, полагая для краткости $b/a = p$, $c/a = q$:

$$s_2 = p^2 - 2q; \quad s_3 = -p^3 + 3pq; \quad s_4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2.$$

Вычисленіе суммъ одинаковыхъ отрицательныхъ степеней корней уравненія (85) приводится къ вычисленію суммъ ихъ одинаковыхъ положительныхъ степеней. Дѣйствительно, пусть $s_{-m} = x_1^{-m} + x_2^{-m}$, гдѣ m есть натуральное число. Такъ какъ $x^{-m} = 1/x^m$ (§ 40), то

$$s_{-m} = 1/x_1^m + 1/x_2^m = \left(x_1^m + x_2^m\right)/x_1^m x_2^m = s_m / q^m,$$

гдѣ $q = c/a$.

§ 173. **Неполныя квадратныя уравненія.** Неполными квадратными уравненіями называются уравненія слѣдующихъ видовъ:

$$\alpha) \ ax^2 + c = 0; \quad \beta) \ ax^2 + bx = 0; \quad \gamma) \ ax^2 = 0.$$

Эти уравненія представляютъ частные случаи уравненія (85) и получаются изъ него при обращеніи въ нуль одного или каждаго изъ коэффиціентовъ b и c. Общая формула (88) рѣшенія квадратнаго уравненія можетъ быть примѣнена къ рѣшенію каждаго изъ уравненій α), β) и γ). Но особая форма этихъ уравненій позволяетъ употреблять для ихъ рѣшенія частные пріемы.

Для рѣшенія уравненія α) замѣтимъ, что оно равносильно уравненію $x^2+c/a=0$, такъ какъ, по предположенію $a\neq 0$, или уравненію $x^2-(\sqrt{-c/a})^2=0$; послѣднее уравненіе распадается на два линейныхъ:

$$x+\sqrt{-c/a}=0; \quad x-\sqrt{-c/a}=0.$$

Рѣшенія этихъ уравненій служатъ корнями уравненія α).

Они выражаются формулой: $x=\pm\sqrt{-c/a}$.

Уравненіе β) можетъ быть представлено въ видѣ

$$x(ax+b)=0;$$

корни его суть $x_1=0$ и $x_2=-b/a$.

Уравненіе γ) приводится къ уравненію: $x^2=0$, оба корня котораго равны нулю.

§ 174. **Случай, когда въ уравненіи (85) коэффиціентъ** a **приближается къ предѣлу, равному нулю.** Всѣ выводы §§ 169—173 были сдѣланы въ предположеніи, что въ уравненіи (85) коэффиціентъ a отличенъ отъ нуля.

Разсмотримъ теперь вопросъ о корняхъ уравненія (85), предполагая *a перемѣннымъ и стремящимся къ нулю.*

Пусть въ уравненіи (85) коэффиціентъ $c\neq 0$. Въ такомъ случаѣ его корни отличны отъ нуля, и дѣленіе обѣихъ частей уравненія (85) на x^2 приводитъ къ уравненію

$$a+b.1/x+c.1/x^2=0,$$

которое равносильно уравненію (85) (§ 143, теор. II).

Полагая въ этомъ уравненіи $1/x=z$, получаемъ уравненіе

$$cz^2+bz+a=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

корнями котораго, по формуламъ (86), служатъ числа

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}; \quad z_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}.$$

При приближеніи a къ нулю, какъ къ предѣлу, число $b^2 - 4ac$ приближается къ b^2; поэтому корень z_1 приближается къ нулю, а корень z_2 къ числу $-b/c$. При $a = 0$ эти формулы даютъ: $z_1 = 0$, $z_2 = -b/c$.

Но корни уравненія (α) связаны съ корнями уравненія (85) соотношеніями:

$$z_1 = 1/x_1;\ z_2 = 1/x_2, \text{ или } x_1 = 1/z_1;\ x_2 = 1/z_2.$$

Два послѣднія равенства показываютъ, что при уменьшеніи абсолютнаго значенія z_1 до нуля абсолютное значеніе x_1 безгранично возрастаетъ, а при стремленіи z_2 къ $-b/c$ корень x_2 стремится къ числу $-c/b$.

Этотъ результатъ кратко формулируется слѣдующимъ образомъ: при $a = 0$ одинъ изъ корней уравненія (85) равенъ ∞ (сравн. § 148).

Если въ уравненіи (85) коэффиціенты a и b стремятся къ нулю, то оба корня его безгранично увеличиваются по абсолютному значенію. Этотъ фактъ выражается фразой: при $a = 0$ и $b = 0$ оба корня уравненія (85) равны ∞.

§ 175. **Функція $ax^2 + bx + c$ и скорость ея измѣненія.** Рѣшеніе квадратнаго уравненія (85) есть одинъ изъ вопросовъ, входящихъ въ задачу объ изслѣдованіи измѣненія цѣлой раціональной функціи второй степени перемѣннаго x при измѣненіи x. Обозначимъ эту функцію черезъ y, такъ что

$$y = ax^2 + bx + c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (91)$$

и ограничимся разсмотрѣніемъ того случая, когда коэффиціенты a, b и c суть вещественныя числа, причемъ $a \neq 0$.

Давая перемѣнному x приращеніе Δx и обозначая соотвѣтственное приращеніе y черезъ Δy, изъ уравненія (91) находимъ:

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c \quad \ldots \quad (91')$$

Почленное вычитаніе уравненія (91) изъ уравненія (91′) даетъ слѣдующее выраженіе для приращенія Δy:

$$\Delta y = 2ax\Delta x + b\Delta x + a(\Delta x)^2.$$

Это равенство показываетъ, что приращеніе Δy функціи y зависитъ не только отъ приращенія Δx перемѣннаго x, но и отъ начальнаго значенія перемѣннаго. Поэтому равнымъ приращеніямъ перемѣннаго x соотвѣтствуютъ, вообще, неравныя приращенія функціи, т.-е. функція y измѣняется *неравномѣрно* (сравн. § 149, 3).

Напримѣръ, функція $y=x^2+x+1$ при $x=0$, $x=1$ и $x=2$ имѣетъ соотвѣтственно значенія 1, 3 и 7. Приращеніе ея при переходѣ отъ $x=0$ къ $x=1$ равно 2, а при переходѣ отъ $x=1$ къ $x=2$ равно 4; приращенія же перемѣннаго въ томъ и другомъ случаѣ одинаковы и равны 1.

При изученіи измѣненій линейной функціи (§ 149) отношеніе $\Delta y/\Delta x$, сохраняющее постоянное значеніе, было названо скоростью измѣненія. Въ разсматриваемомъ случаѣ это отношеніе выражается формулой

$$\Delta y/\Delta x = 2ax + b + a\Delta x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

которая показываетъ, что оно различно при различныхъ значеніяхъ x и Δx. Поэтому нельзя говорить о скорости измѣненія функціи (91) въ томъ смыслѣ, который придавался этому понятію въ § 149, т.-е. о скорости, независящей отъ того значенія перемѣннаго, отъ котораго мы измѣняемъ перемѣнное.

Введемъ понятіе о скорости *при данномъ значеніи перемѣннаго. Скоростью измѣненія функціи при данномъ значеніи x перемѣннаго называется предѣлъ, къ которому стремится отношеніе $\Delta y/\Delta x$, когда приращеніе Δx стремится къ нулю.*

Для вычисленія этого предѣла замѣтимъ, что во второй части формулы (α) стоитъ сумма трехъ слагаемыхъ, изъ которыхъ только одно послѣднее ($a\Delta x$) зависитъ отъ Δx. При стремленіи Δx къ нулю абсолютное значеніе этого слагаемаго можетъ быть сдѣлано меньше произвольнаго, напередъ заданнаго, малаго числа ε. Дѣйствительно, взявъ $|\Delta x| < \varepsilon/|a|$, получимъ: $|a\Delta x| < \varepsilon$. Это значитъ, что при стремленіи Δx къ нулю произведеніе $a\Delta x$ имѣетъ предѣломъ нуль (§ 123) и что

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b.$$

Понятіе о скорости измѣненія функціи при данномъ значеніи перемѣннаго аналогично понятію о скорости въ данный моментъ, вводимому при изученіи неравномѣрнаго движенія.

Скорость измѣненія функціи y обозначается символомъ y'. состоящимъ въ повтореніи символа, обозначающаго функцію, съ присоединеніемъ къ нему значка $'$.

Скорость измѣненія разсматриваемой функціи y есть новая функція y' перемѣннаго x. По отношенію къ y функція y' называется ея *производной*, а y по отношенію къ y'—*первообразной*.

Итакъ, для функціи (91) имѣемъ слѣдующее выраженіе производной:

$$y' = 2ax + b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

§ 176. **Роль y' при изслѣдованіи измѣненій функціи y.** По опредѣленію, данному въ предыдущемъ параграфѣ, y' есть предѣлъ отношенія $\Delta y/\Delta x$ соотвѣтственныхъ приращеній функціи y и перемѣннаго x, когда приращеніе Δx перемѣннаго x стремится къ нулю. Изъ этого опредѣленія и опредѣленія предѣла (§ 122) слѣдуетъ, что значенія отношенія $\Delta y/\Delta x$ и значенія функціи y' при одномъ и томъ же значеніи перемѣннаго и достаточно малыхъ абсолютныхъ значеніяхъ Δx отличаются другъ отъ друга какъ угодно мало и, слѣд., имѣютъ одинаковый знакъ. Это заключеніе можно выразить равенствомъ

$$\Delta y/\Delta x = y' + \varepsilon,$$

гдѣ ε есть произвольное, какъ угодно малое число, не вліяющее на знакъ второй части равенства ($lim\ \varepsilon = 0$ при $\Delta x = 0$).

При *возрастаніи* перемѣннаго x отъ нѣкотораго значенія x_0 къ значенію $x_0 + \Delta x$ приращеніе Δx перемѣннаго положительно; слѣд., при $x = x_0$ знакъ отношенія $\Delta y/\Delta x$ совпадаетъ со знакомъ приращенія Δy функціи y. Съ другой стороны, знакъ отношенія $\Delta y/\Delta x$ при достаточно малыхъ значеніяхъ приращенія Δx совпадаетъ, какъ сказано, со знакомъ функціи y'. Слѣд., знаки Δy и y' одинаковы при $x = x_0$. Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе: *если при возрастаніи перемѣннаго x отъ значенія x_0 къ значенію $x_0 + \Delta x$ ($\Delta x > 0$) функція y возрастаетъ, т.-е. $\Delta y > 0$, то ея производная положительна при $x = x_0$; если* *же при указанномъ измѣненіи* x *функція* y *убываетъ, т.-е.* $\Delta y < 0$, *то ея производная отрицательна при* $x = x_0$ *).

Справедливо и обратное предложеніе: *если* $y' > 0$ *при* $x = x_0$, *то* y *возрастаетъ при возрастаніи* x *отъ значенія* $x = x_0$; *если* $y' < 0$ *при* $x = x_0$, *то* y *убываетъ при возрастаніи* x *отъ значенія* $x = x_0$.

Такимъ образомъ по знаку производной y' при $x = x_0$ мы можемъ судить о характерѣ измѣненія функціи y при возрастаніи x отъ значенія $x = x_0$.

Пусть, напр., требуется узнать, возрастаетъ или убываетъ функція $y = x^2 - x + 1$ при возрастаніи x отъ значенія $x = -2$. Составимъ по формулѣ (92) ея производную: $y' = 2x - 1$. Полагая $x = -2$, находимъ, что значеніе производной при $x = -2$ равно -5, т.-е. отрицательно.

Отсюда заключаемъ, что при возрастаніи x отъ $x = -2$ данная функція убываетъ.

Провѣримъ сдѣланное заключеніе непосредственными вычисленіями.

При $x = -2$ значеніе функціи равно 3. Увеличимъ значеніе x на 0,01, т.-е. положимъ $x = -2 + 0{,}01 = -1{,}99$. Сдѣлавъ вычисленія, найдемъ, что соотвѣтственное значеніе функціи y равно 2,9701, а приращеніе ея $= -0{,}0299$, т.-е. значеніе функціи уменьшилось.

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что при $x = 1$ функція y возрастаетъ, такъ какъ при этомъ значеніи x ея производная равна 1, т.-е. положительна.

§ 177. **Maximum и minimum функціи** y. Въ предыдущемъ § выяснилась связь, которая существуетъ между возрастаніемъ или убываніемъ функціи y при данномъ значеніи перемѣннаго и знакомъ значенія ея производной y' при томъ же значенія перемѣннаго. Размотримъ теперь, какъ ведетъ себя функція y при томъ значеніи перемѣннаго, для котораго ея производная y' равна *нулю*, т.-е. не имѣетъ знака.

Изъ формулы (92) мы видимъ, что $y' = 0$ для $x = -b/2a$.

---

*) Случай, когда производная y' обращается въ нуль, будетъ разсмотрѣнъ въ § 177.

Разсмотримъ возрастаніе x въ интервалѣ, границами котораго служатъ числа $-b/2a-\Delta x$ и $-b/2a+\Delta x$, при чемъ $\Delta x>0$. Число $-b/2a$ находится внутри этого интервала и дѣлитъ его на два слѣдующихъ: $(-b/2a-\Delta x, -b/2a)$ и $(-b/2a, -b/2a+\Delta x)$.

При $\Delta x>0$ числа, заключенныя *внутри* перваго интервала, всѣ меньше $-b/2a$, а числа, заключенныя *внутри* второго интервала, всѣ больше $-b/2a$.

Такъ какъ, по формулѣ (92), $y'=2ax+b=2a[x-(-b/2a)]$, то для чиселъ перваго интервала разность $x-(-b/2b)$ отрицательна, а для чиселъ второго интервала она положительна. Поэтому при $a>0$ значенія y' отрицательны для чиселъ, лежащихъ внутри перваго интервала, и положительны для чиселъ, лежащихъ внутри второго интервала, а при $a<0$, наоборотъ, значенія y' положительны для чиселъ, лежащихъ внутри перваго интервала, и отрицательны для чиселъ, лежащихъ внутри второго интервала.

Если $a>0$, то при непрерывномъ измѣненіи x отъ $-b/2a-\Delta x$ до $-b/2a+\Delta x$ функція y сначала (до $x=-b/2a$) убываетъ, а затѣмъ (послѣ $x=-b/2a$) возрастаетъ (§ 176).

При $x=-b/a$ она имѣетъ *наименьшее* значеніе изъ всѣхъ, которыя она получаетъ при измѣненіи x въ указанномъ интервалѣ, или достигаетъ своего *minimum*.

Если $a<0$, то при разсматриваемомъ измѣненіи x функція y сначала возрастаетъ (до $x=-b/2a$), а потомъ (послѣ $x=-b/2a$) убываетъ (§ 176). При $x=-b/2a$ она достигаетъ своего *наибольшаго* значенія или своего *maximum*.

Такимъ образомъ мы видимъ, что обращеніе въ нуль *производной*, сопровождаемое перемѣною ея знака, указываетъ на перемѣну характера ея измѣненія: возрастаніе замѣняется убываніемъ, или обратно. При томъ значеніи перемѣннаго, которое обращаетъ въ нуль производную y', функція y достигаетъ своего *maximum* или своего *minimum*.

Примѣръ. Для функціи $y=x^2+x+1$ имѣемъ: $y'=2x+1$. При $x=-1/2$ производная $y'=0$; при значеніяхъ x, меньшихъ $-1/2$, она принимаетъ отрицательная значенія, а при значеніяхъ x, большихъ $-1/2$, положительныя. Слѣд., при

$x=-1/2$ функція y имѣетъ наименьшее значеніе, которое равно $3/4$.

§ 178. **Измѣненіе функціи** $y=ax^2+bx+c$. Прослѣдимъ измѣненіе функціи

$$y=ax^2+bx+c,$$

гдѣ a, b и c суть вещественныя числа и $a\neq 0$, при непрерывномъ измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Разсматриваемая функція, какъ цѣлая и раціональная, *непрерывна* при всѣхъ значеніяхъ x (§ 130).

Изъ изслѣдованія ея производной (§§ 176 и 177) слѣдуетъ, что весь интервалъ $(-\infty, +\infty)$ можно разбить на два слѣдующихъ: $(-\infty, -b/2a)$ и $(-b/2a, +\infty)$. При возрастаніи x отъ $-\infty$ до $-b/2a$ функція y убываетъ, если $a>0$, и возрастаетъ, если $a<0$. При возрастаніи x отъ $-b/2a$ до $+\infty$, она возрастаетъ, если $a>0$, и убываетъ, если $a<0$.

При $x=-b/2a$ функція y достигаетъ своего *minimum*, если $a>0$, и своего *maximum*, если $a<0$.

Наибольшее или наименьшее значеніе функціи равно $(4ac-b^2)/4a$.

Дальнѣйшія подробности измѣненія функціи y мы разсмотримъ отдѣльно для случаевъ, когда дискриминантъ b^2-4ac больше нуля, равенъ нулю и меньше нуля.

1 случай: $b^2-4ac>0$. Въ этомъ случаѣ корни x_1 и x_2 функціи y вещественны и различны (§ 170). Пусть $x_1<x_2$.

Изъ тождества (87) легко вывести слѣдующія заключенія:

α) при $a>0$ значенія функціи y положительны для всѣхъ значеній $x<x_1$, такъ какъ для этихъ значеній $x-x_1<0$ и $x-x_2<0$; при $a<0$ значенія функціи y для $x<x_1$ отрицательны;

β) при $x=x_1$ функція y обращается въ нуль;

γ) при $x_1<x<x_2$ значенія функціи y отрицательны при $a>0$ и положительны при $a<0$;

δ) для $x=-b/2a$ функція y получаетъ значеніи $(4ac-b^2)/4a$; при $a>0$ это число отрицательно и представляетъ наименьшее значеніе функціи, а при $a<0$ оно положительно и представляетъ наибольшее значеніе функціи;

ε) при $x = x_2$ функція y обращается въ нуль;

ζ) при $x > x_2$ значенія функціи y положительны при $a > 0$ и отрицательны при $a < 0$, такъ какъ для этихъ значеній перемѣннаго $x - x_1 > 0$ и $x - x_2 > 0$.

Эти выводы можно резюмировать слѣдующимъ образомъ: при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $-b/2a$ функціи y представляетъ функцію убывающую, если $a > 0$, и возрастающую, если $a < 0$; при возрастаніи x отъ $-b/2a$ до $+\infty$ y есть функція возрастающая, если $a > 0$, и убывающая, если $a < 0$; въ томъ и другомъ случаѣ функція дважды обращается въ нуль, мѣняя при этомъ свой знакъ.

2 случай: $b^2 - 4ac = 0$. Въ этомъ случаѣ корни x_1 и x_2 функціи y равны $-b/2a$ (§ 170), и на основаніи тождества (87) функцію можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$y = a(x + b/2a)^2.$$

Изъ этой формулы видно, что знакъ функціи совпадаетъ со знакомъ коэффиціента a.

Если $a > 0$, то y есть функція убывающая при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $-b/2a$ и возрастающая при возрастаніи x отъ $-b/2a$ до $+\infty$. При $x = -b/2a$ она достигаетъ своего наименьшаго значенія, которое равно нулю.

Если $a < 0$, то y есть функція возрастающая при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $-b/2a$ и убывающая при возрастаніи x отъ $-b/2a$ до $+\infty$. При $x = -b/2a$ она достигаетъ своего наибольшаго значенія, которое равно нулю.

3 случай: $b^2 - 4ac < 0$. Въ этомъ случаѣ корни функціи y суть комплексныя числа (§ 170). Функціи y можно дать слѣдующій видъ (§ 168):

$$y = a[(x + b/2a)^2 + (4ac - b^2)/4a^2].$$

Второй множитель второй части этой формулы представляетъ сумму двухъ *положительныхъ* чиселъ и, слѣд., положителенъ при всѣхъ значеніяхъ x. Поэтому знакъ функціи y совпадаетъ со знакомъ коэффиціента a.

Если $a > 0$, то y есть функція убывающая при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $-b/2a$ и возрастающая при возрастаніи x

отъ $-b/2a$ до $+\infty$. При $x = -b/2a$ она достигаетъ своего наименьшаго значенія, которое равно *положительному* числу $(4ac - b^2)/4a$.

Если $a < 0$, то y есть функція возрастающая при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $-b/2a$ и убывающая при возрастаніи x отъ $-b/2a$ до $+\infty$. При $x = -b/2a$ она достигаетъ своего наибольшаго значенія, которое равно отрицательному числу $(4ac - b^2)/4a$.

Въ томъ и другомъ случаѣ функція не мѣняетъ своего знака при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

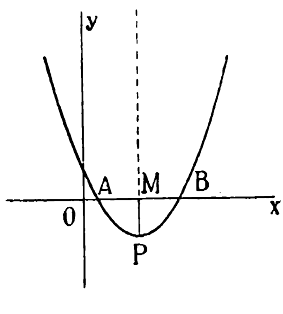
§ 179. **Графикъ функціи** $y = ax^2 + bx + c$. Принимая x и y за прямоугольныя координаты точки на плоскости, можно построить графикъ функціи $ax^2 + bx + c$ (§ 127), т.-е. линію, представляющую геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ связаны уравненіемъ:

$$y = ax^2 + bx + c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

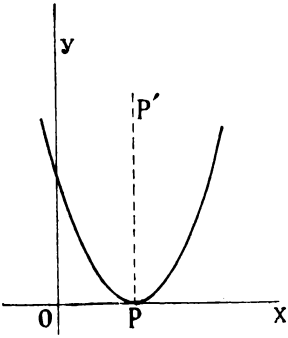
Эта линія называется *параболой второго порядка* или просто *параболой*.

Рѣшеніе квадратнаго уравненія $ax^2 + bx + c = 0$ равносильно опредѣленію точекъ пересѣченія параболы, опредѣляемой уравненіемъ (α), съ осью x.

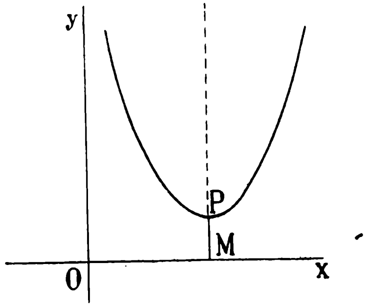
На чертежѣ 22 изображена парабола (α) въ предположеніи, что $a > 0$ и $b^2 - 4ac > 0$. Она пересѣкаетъ ось x въ точкахъ A и B, которыя опредѣляются корнями x_1 и x_2 функціи (α): $OA = x_1$, $OB = x_2$. Наименьшая ордината параболы есть MP и соотвѣтствуетъ значенію $x = OM = -b/2a$. Легко убѣдиться въ томъ, что парабола симметрична относительно прямой PM, опредѣляемой уравненіемъ $x = -b/2a$, т. - е. имѣетъ одинаковыя ординаты для точекъ съ абсциссами: $-b/2a - h$



Черт. 22.



Черт. 23.



Черт. 24.

и $-b/2a+h$, гдѣ h есть произвольное вещественное число. Дѣйствительно, изъ тождества (§ 168).

$$y=ax^2+bx+c\equiv a[(x+b/2a)^2+(4ac-b^2)/4a^2]$$

находимъ, что $y=a[h^2+(4ac-b^2)/4a^2]$ какъ для $x=-b/2a-h$, такъ и для $x=-b/2a+h$.

Прямая PM называется *осью* параболы, а точка P ея *вершиной*.

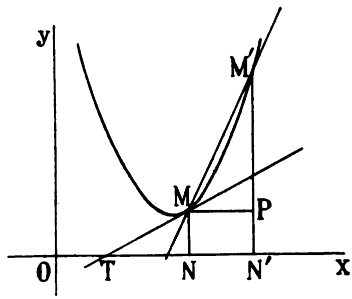
Чертежомъ 22 иллюстрируются выводы, сдѣланные въ предыдущемъ § относительно измѣненія функціи y въ случаѣ $a>0$ и $b^2-4ac>0$.

На чертежѣ 23 изображена парабола, опредѣляемая уравненіемъ (a), въ предположеніи, что $a>0$ и $b^2-4ac=0$. Въ расположеніи ея относительно осей координатъ замѣчается та особенность, что ординаты всѣхъ ея точекъ положительны, за исключеніемъ точки P съ абсциссой $-b/2a$; ордината этой точки равна нулю и представляетъ наименьшее значеніе функціи y. Равенство корней функціи выражается тѣмъ, что парабола *касается* оси x, а не пересѣкаетъ ея. Вершина параболы есть точка P, а осью параболы служитъ прямая PP', параллельная оси y.

Въ случаѣ $a>0$ и $b^2-4ac<0$ парабола (a) имѣетъ видъ, изображенный на чертежѣ 24. Всѣ точки этой параболы лежатъ выше оси x, т.-е. ординаты всѣхъ ея точекъ положительны. Отсутствіе вещественныхъ корней графически указывается тѣмъ, что парабола не пересѣкаетъ оси x.

Точка P есть низшая точка параболы; абсцисса ея $OM = -b/2a$, ордината MP равна положительному числу $(4ac - b^2)/4a$. Точка P есть вершина параболы, а прямая PM — ея ось.

Разсмотрѣніе расположенія параболы (α) въ случаѣ $a < 0$ можно рекомендовать, какъ полезное упражненіе въ примѣненіи указанныхъ выше пріемовъ.



Черт. 25.

§ 180. **Геометрическое значеніе функціи** y'. Чтобы выяснить геометрическое значеніе производной y' функціи y, припомнимъ (§ 175), что y' есть предѣлъ отношенія $\Delta y/\Delta x$, когда Δx стремится къ нулю. Пусть (черт. 25) $M(x, y)$ и $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ суть двѣ точки, лежащія на параболѣ, опредѣляемой уравненіемъ: $y = ax^2 + bx + c$.

Опустивъ изъ точекъ M и M' перпендикуляры MN и $M'N'$ на ось x и проведя черезъ точку M прямую, параллельную оси x, до встрѣчи въ точкѣ P съ прямой $N'M'$, находимъ слѣдующія значенія получившихся при этомъ отрѣзковъ:

$$ON = x;\ ON' = x + \Delta x;\ NN' = MP = \Delta x;\ NM = y = N'P;$$
$$N'M' = y + \Delta y;\ PM' = \Delta y.$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ MPM' катетами служатъ отрѣзки $MP = \Delta x$ и $PM' = \Delta y$. Изъ тригонометріи извѣстно, что $\Delta y/\Delta x = \tan \widehat{PMM'}$.

Стремленіе Δx къ нулю соотвѣтствуетъ перемѣщенію точки M' по параболѣ въ направленіи къ точкѣ M. При этомъ сѣкущая MM', вращаясь около точки M, стремится къ совпаденію съ касательной TM въ точкѣ M, а уголъ xKM, образуемый ею съ осью x, къ углу xTM касательной съ осью x. Но $\angle xKM = \angle PMM'$, потому что $MP \parallel Ox$. Слѣд., при стремленіи Δx къ нулю уголъ PMM' стремится къ углу xTM, а тангенсъ его, равный отношенію $\Delta y/\Delta x$, къ тангенсу угла xTM. Называя этотъ уголъ черезъ α, находимъ:

$$y' = \lim_{\Delta x = 0} \Delta y/\Delta x = \tan \alpha,$$

т.-е. *производная y' функціи y есть тангенсъ угла, образуемаго касательной къ кривой $y = ax^2 + bx + c$ въ точкѣ (x, y) съ положительнымъ направленіемъ оси x.*

Возрастанію функціи y при возрастаніи x соотвѣтствуетъ подъемъ кривой надъ осью x, а убыванію функціи y—паденіе кривой относительно оси x. Въ первомъ случаѣ уголъ α *острый*, а во второмъ—*тупой* (§ 176).

Maximum и minimum функціи y соотвѣтствуютъ *высшая* и *низшая* точки кривой относительно оси x. Въ этихъ точкахъ уголъ $\alpha = 0$, т.-е. касательная къ кривой параллельна оси x (§ 177) *).

§ 181. **Неравенство второй степени.** Неравенства видовъ

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ и } ax^2 + bx + c < 0$$

называются *неравенствами второй степени*. Рѣшеніе неравенства второй степени связано самымъ тѣснымъ образомъ съ изслѣдованіемъ измѣненія функціи $ax^2 + bx + c$, приведеннымъ въ § 178. Удерживая обозначенія этого параграфа, легко составить слѣдующую таблицу, въ которой указаны рѣшенія разсматриваемыхъ неравенствъ при различныхъ предположеніяхъ относительно коэффиціентовъ a, b и c:

	$ax^2+bx+c>0$		$ax^2+bx+c<0$		
	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$	
$b^2-4ac>0$	$x<x_1$; $x>x_2$	$x_1<x<x_2$	$x_1<x<x_2$	$x<x_1$; $x>x_2$	$b^2-4ac>0$
$b^2-4ac=0$	$x\neq-b/2a$	нѣтъ рѣш.	нѣтъ рѣш.	$x\neq-b/2a$	$b^2-4ac=0$
$b^2-4ac<0$	$x=$произв. веществ. ч.	нѣтъ рѣш.	нѣтъ рѣш.	$x=$произв. веществ. ч.	$b^2-4ac<0$

*) Рекомендуется сдѣлать чертежи для всѣхъ указанныхъ случаевъ.

§ 182. **Биквадратныя уравненія.** Изъ уравненій высшихъ степеней въ элементарной алгебрѣ разсматриваются уравненія, приводимыя къ квадратнымъ, и уравненія двучленныя. Простѣйшимъ изъ уравненій, приводимыхъ къ квадратнымъ, является *биквадратное* уравненіе, общій видъ котораго таковъ:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Биквадратное уравненіе есть неполное уравненіе 4-й степени, въ которомъ отсутствуютъ члены съ *нечетными* степенями неизвѣстнаго.

Съ помощью подстановки $x^2 = t$ оно приводится къ квадратному уравненію

$$at^2 + bt + c = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

которое называется *резольвентой* уравненія (α).

Опредѣляя изъ уравненія (β) значенія неизвѣстнаго t, находимъ:

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad t_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Подставивъ найденныя значенія t въ уравненіе $x^2 = t$, получимъ два квадратныхъ уравненія:

$$x^2 = t_1, \quad x^2 = t_2;$$

эти уравненія даютъ 4 корня уравненія (α):

$$x_1 = +\sqrt{t_1}, \quad x_2 = -\sqrt{t_1}; \quad x_3 = +\sqrt{t_2}; \quad x_4 = -\sqrt{t_2}.$$

Принимая во вниманіе значенія t_1 и t_2, можно соединить 4 послѣднія формулы въ одну слѣдующую:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Формула (γ) есть общая формула, дающая корни биквадратнаго уравненія (α).

Между корнями и коэффиціентами уравненія (α) существуютъ слѣдующія соотношенія (§ 136):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0;$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b/a;$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0;$$
$$x_1x_2x_3x_4 = c/a.$$

§ 183. **Изслѣдованіе корней биквадратнаго уравненія.** Изслѣдуемъ корни уравненія (α) предыдущаго § въ предположеніи, что коэффиціенты a, b и c суть вещественныя числа. Проще всего это можно сдѣлать при помощи резольвенты и уравненія $x^2 = t$, связывающаго корни биквадратнаго уравненія (α) съ корнями его резольвенты (β).

1) *Если корни резольвенты* (β) *суть вещественныя и положительныя числа, то всѣ корни уравненія* (α) *вещественны.*

Коэффиціенты a, b, c удовлетворяютъ въ этомъ случаѣ слѣдующимъ соотношеніямъ (§§ 170, 171):

$$b^2 - 4ac > 0;\ c/a > 0;\ b/a < 0.$$

2) *Если корни резольвенты* (β) *вещественны и различныхъ знаковъ, то два корня уравненія* (α) *суть вещественныя числа и два—мнимыя числа.*

Коэффиціенты a, b, c удовлетворяютъ въ этомъ случаѣ соотношеніямъ (§§ 170, 171):

$$b^2 - 4ac > 0,\ c/a < 0.$$

3) *Если корни резольвенты* (β) *равны и положительны, то корни уравненія* (α) *суть попарно равныя вещественныя числа.*

Коэффиціенты a, b, c въ этомъ случаѣ удовлетворяютъ соотношеніямъ:

$$b^2 - 4ac = 0,\ b/a < 0.$$

4) *Если корни резольвенты* (β) *вещественны и отрицательны, то корни уравненія* (α) *мнимы.*

Въ этомъ случаѣ имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$b^2 - 4ac > 0,\ c/a > 0,\ b/a > 0.$$

5) *Если корни резольвенты* (β) *равны и отрицательны, то корни уравненія* (α) *мнимы и попарно равны.*

Въ этомъ случаѣ имѣемъ соотношенія:

$$b^2 - 4ac = 0,\ b/a > 0.$$

6) *Если корни резольвенты* (β) *суть комплексныя числа, то и корни уравненія* (α) *суть комплексныя числа.*

Въ этомъ случаѣ $b^2-4ac<0$.

7) *При* $b=0$ *и* $c=0$ *всѣ корни уравненія* (α) *равны нулю.*

§ 184. **Преобразованіе выраженій вида $\sqrt{A\mp\sqrt{B}}$.** Формула (γ) § 182 даетъ для корней биквадратнаго уравненія выраженія вида $\sqrt{A\mp\sqrt{B}}$, гдѣ A и B суть раціональныя числа, если a, b и c раціональныя числа.

Замѣтивъ, что возведеніе въ квадратъ выраженія $\sqrt{m}\mp\sqrt{n}$, гдѣ m и n суть раціональныя положительныя числа, приводитъ къ выраженію $(m+n)\mp2\sqrt{mn}$, т.-е. къ выраженію вида $A\mp\sqrt{B}$, мы видимъ, что выраженіе вида $\sqrt{A\mp\sqrt{B}}$ можетъ быть *иногда* замѣнено выраженіемъ вида $\sqrt{m}\mp\sqrt{n}$, гдѣ m и n раціональныя положительныя числа.

Выяснимъ, какимъ условіямъ должны удовлетворять числа A и B, чтобы указанная замѣна была возможна.

Положимъ, что A и B раціональныя числа и B, кромѣ того, положительно и не представляетъ точнаго квадрата.

Требуется найти такія *раціональныя положительныя* числа m и n, что

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}.$$

Возводя это равенство въ квадратъ, находимъ:

$$A+\sqrt{B}=m+n+2\sqrt{mn}.$$

Отсюда получаемъ:

$$2\sqrt{mn}=(A-m-n)+\sqrt{B}.$$

Возведеніе въ квадратъ обѣихъ частей этого равенства приводитъ къ равенству

$$4mn=(A-m-n)^2+B+2(A-m-n)\sqrt{B},$$

первая часть котораго, по условію, есть раціональное число, а вторая въ послѣднемъ членѣ содержитъ ирраціональный множитель $\sqrt{B}$. Такъ какъ раціональное число можетъ быть равно только раціональному (§ 46, опред. I, слѣд. 2), то и вторая часть послѣдняго равенства должна представлять раціональное число, т.-е. долженъ исчезнуть тотъ членъ ея, который содержитъ $\sqrt{B}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффиціентъ при $\sqrt{B}$ обратился въ нуль, т.-е.

$$A - m - n = 0 \text{ или } A = m + n.$$

При этомъ условіи послѣднее равенство приводится къ слѣдующему: $4mn = B$. Итакъ, для опредѣленія раціональныхъ положительныхъ чиселъ m и n мы имѣемъ два уравненія:

$$m + n = A;\ 4mn = B \text{ или } mn = B/4.$$

Первое изъ нихъ показываетъ, что число A должно быть положительнымъ.

Зная сумму и произведеніе чиселъ m и n, можно составить квадратное уравненіе, корнями котораго служатъ эти числа (§ 171). Это уравненіе таково:

$$z^2 - Az + B/4 = 0.$$

Рѣшая его, находимъ:

$$z_1 = (A + \sqrt{A^2 - B})/2,\quad z_2 = (A - \sqrt{A^2 - B})/2.$$

Одинъ изъ корней можно взять за число m, а другой за число n. Но при этомъ должно быть выполнено еще одно требованіе: такъ какъ, по условію, m и n суть раціональныя положительныя числа, то число $A^2 - B$ должно быть точнымъ квадратомъ.

Къ тѣмъ же самымъ результатамъ приводитъ изслѣдованіе возможности равенства:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{m} - \sqrt{n}.$$

Итакъ, для того, чтобы выраженіе $\sqrt{A \mp \sqrt{B}}$, гдѣ A и B раціональныя положительныя числа, могло быть представлено въ видѣ $\sqrt{m} \mp \sqrt{n}$, необходимо и достаточно, чтобы число $A^2 - B$ представляло точный квадратъ.

Примѣръ. $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$ можно преобразовать въ выраженіе вида $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, потому что $A^2 - B = 25 - 24 = 1$. Вычисляя m и n, находимъ:

$$m = (5 + 1)/2 = 3,\quad n = (5 - 1)/2 = 2.$$

Слѣд., $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Приложимъ полученные результаты къ выясненію случаевъ возможности преобразованія общей формулы (§ 182, форм. (γ)), дающей значенія корней биквадратнаго уравненія $ax^4+bx^2+c=0$, котораго коэффиціенты и корни суть вещественныя числа.

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$A=-b/2a,\quad B=(b^2-4ac)/4a^2.$$

Числа A и B должны быть положительными. Это требованіе удовлетворяется, такъ какъ при вещественныхъ корняхъ имѣютъ мѣсто соотношенія (§ 182):

$$b^2-4ac>0,\ b/2a<0,\ c/a>0.$$

Кромѣ того число A^2-B, равное въ данномъ случаѣ c/a, должно быть точнымъ квадратомъ.

При выполненіи всѣхъ этихъ условій можно получить выраженія корней биквадратнаго уравненія прямо въ видѣ алгебраической суммы двухъ квадратныхъ корней, т.-е. въ видѣ $\mp\sqrt{m}\mp\sqrt{n}$, не прибѣгая къ общей формулѣ. Средствомъ для этого служитъ разложеніе первой части уравненія на множители.

Пусть, напримѣръ, требуется рѣшить уравненіе:

$$x^4-10x^2+1=0.$$

Для этого уравненія $b^2-4ac=100-4>0$, $b/2a=-5<0$, $c/a=1>0$, $c/a=1=1^2$.

Всѣ указанныя выше условія выполнены; слѣд., корни его имѣютъ видъ $\mp\sqrt{m}\mp\sqrt{n}$.

Такъ какъ

$$x^4-10x^2+1=(x^4+2x^2+1)-12x^2=(x^2+1)^2-12x^2=$$
$$=(x^2+x\sqrt{12}+1)(x^2-x\sqrt{12}+1),$$

то рѣшеніе биквадратнаго уравненія сводится къ рѣшенію двухъ слѣдующихъ квадратныхъ уравненій:

$$x^2+x\sqrt{12}+1=0 \text{ и } x^2-x\sqrt{12}+1=0.$$

Корни перваго суть числа:

$$x_1=-\sqrt{3}+\sqrt{2},\quad x_2=-\sqrt{3}-\sqrt{2};$$

корнями второго служатъ числа:

$$x_3 = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad x_4 = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Такимъ образомъ найдены всѣ четыре корня даннаго уравненія безъ помощи формулы (γ) § 182 и притомъ въ формѣ выраженій вида $\pm\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$.

§ 185. **Возвратныя уравненія.** Уравненіе

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1} x + p_n = 0 \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

называется *возвратнымъ*, если оно не измѣняется отъ замѣны неизвѣстнаго x черезъ $1/x$, т.-е. черезъ число обратное.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что если возвратное уравненіе (α) имѣетъ корень a, то оно имѣетъ и корень $1/a$.

Разсмотримъ тѣ условія, которымъ удовлетворяютъ коэффиціенты возвратнаго уравненія (α).

Подстановка $1/x$ вмѣсто x въ уравненіе (α) даетъ уравненіе

$$\frac{1}{x^n} + \frac{p_1}{x^{n-1}} + \frac{p_2}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{p_{n-1}}{x} + p_n = 0,$$

которое послѣ умноженія на x^n ($x \neq 0$) и дѣленія на p_n ($p_n \neq 0$) приводится къ уравненію:

$$x^n + \frac{p_{n-1}}{p_n} x^{n-1} + \frac{p_{n-2}}{p_n} x^{n-2} + \cdots + \frac{p_2}{p_n} x^2 + \frac{p_1}{p_n} x + \frac{1}{p_n} = 0 \ldots (\alpha')$$

Такъ какъ, по опредѣленію, сдѣланная подстановка не измѣняетъ уравненія (α), то первыя части уравненій (α) и (α') должны быть тождественно равны.

Слѣдовательно (§ 134, теор. V, слѣд. 5),

$$p_1 = p_{n-1}/p_n, \; p_2 = p_{n-2}/p_n; \; \ldots \; ; \; p_{n-1} = p_1/p_n; \; p_n = 1/p_n.$$

Послѣднее изъ этихъ соотношеній показываетъ, что $p_n = \mp 1$.

Если $p_n = +1$, то

$$p_1 = p_{n-1}, \; p_2 = p_{n-2}; \; \ldots \; ;$$

т.-е. *въ многочленѣ, представляющемъ первую часть уравненія* (α) *и расположенномъ по степенямъ* x, *коэффиціенты членовъ, равноудаленныхъ отъ начала и конца, равны между собою.*

Уравненія, обладающія этимъ свойствомъ, составляютъ одинъ классъ возвратныхъ уравненій.

Другой классъ мы получаемъ, предполагая, что $p_n = -1$. Въ этомъ случаѣ имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$p_1 = -p_{n-1}, \ p_2 = -p_{n-2}, \ldots,$$

т.-е. *въ многочленѣ, представляющемъ первую часть уравненія (α) и расположенномъ по степенямъ x, коэффиціенты членовъ, равноудаленныхъ отъ начала и конца, равны по абсолютному значенію и обратны по знаку.*

Въ уравненіяхъ *четной* степени этого класса коэффиціентъ средняго члена равенъ *нулю*. Дѣйствительно, если $n = 2m$, гдѣ m есть натуральное число, то членъ $p_m x$ является равноудаленнымъ отъ начала и отъ конца. Поэтому должно существовать равенство $p_m = -p_m$, изъ котораго находимъ, что $p_m = 0$.

Возвратныя уравненія перваго класса и *нечетной* степени имѣютъ корень $x = -1$.

Возвратныя уравненія второго класса и *нечетной* степени имѣютъ корень $x = +1$.

Возвратныя уравненія второго класса и четной степени имѣютъ корни: $x = +1$ и $x = -1$.

Въ справедливости этихъ теоремъ легко убѣдиться простой подстановкой въ уравненія ± 1 вмѣсто x.

§ 186. **Возвратныя уравненія 3-ьей степени.** 1) Возвратное уравненіе третьей степени и перваго класса имѣетъ видъ:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

Рѣшеніе его основано на возможности разложить первую часть на множители. Такъ какъ

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)[ax^2 + \\ + (b - a)x + a],$$

то рѣшеніе даннаго уравненія приводится къ рѣшенію двухъ уравненій:

$$x + 1 = 0 \text{ и } ax^2 + (b - a)x + a = 0.$$

Первое изъ нихъ первой степени и имѣетъ корень $x = -1$, а второе квадратное, доставляющее два остальныхъ корня даннаго уравненія.

2) Возвратное уравненіе третьей степени и второго класса имѣетъ видъ:

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$

Оно приводится къ уравненію

$$(x - 1)[ax^2 + (a + b)x + a] = 0,$$

которое распадается на два слѣдующихъ:

$$x - 1 = 0;\ ax^2 + (a + b)x + a = 0.$$

§ 187. **Возвратныя уравненія 4-ой степени.** 1) Возвратное уравненіе четвертой степени и перваго класса имѣетъ видъ:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Для рѣшенія его замѣтимъ, что $a \neq 0$, и что, слѣд., $x \neq 0$. Поэтому раздѣливъ уравненіе на x^2, мы получимъ слѣдующее уравненіе, равносильное данному (§ 143, теор. II):

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \text{ или } a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Пусть $x + 1/x = t$; отсюда находимъ $(x + 1/x)^2 = x^2 + 2 + 1/x^2 = t^2$ и $x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2$. Подставляя вмѣсто двучленовъ $x + 1/x$ и $x^2 + 1/x^2$ ихъ выраженія черезъ t въ послѣднее уравненіе, находимъ для опредѣленія t квадратное уравненіе:

$$at^2 + bt + (c - 2a) = 0.$$

Если t_1 и t_2 суть корни этого уравненія, то для опредѣленія x имѣемъ два слѣдующія уравненія:

$$x + 1/x = t_1;\ x + 1/x = t_2.$$

Эти уравненія приводятся къ квадратнымъ:

$$x^2 - t_1x + 1 = 0;\ x^2 - t_2x + 1 = 0.$$

2) Возвратное уравненіе четвертой степени и второго класса имѣетъ видъ:

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

Это уравненіе легко преобразуется въ слѣдующее:

$$(x^2-1)(ax^2+bx+a)=0.$$

Послѣднее уравненіе распадается на два квадратныхъ:

$$x^2-1=0,\ ax^2+bx+a=0,$$

рѣшеніе которыхъ даетъ корни даннаго уравненія.

§ 188. **Возвратныя уравненія 5-ой степени.** 1) Возвратное уравненіе пятой степени и перваго класса имѣетъ видъ:

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0.$$

Посредствомъ разложенія первой части на множители оно приводится къ уравненію

$$(x+1)[ax^4+(b-a)x^3+(a-b+c)x^2+(b-a)x+a]=0,$$

которое распадается на два уравненія:

$$x+1=0;\ ax^4+(b-a)x^3+(a-b+c)x^2+(b-a)x+a=0.$$

Первое изъ нихъ первой степени, а второе — возвратное уравненіе четвертой степени и перваго класса. Рѣшеніе этихъ уравненій даетъ пять корней даннаго уравненія.

2) Возвратное уравненіе пятой степени и второго класса имѣетъ видъ:

$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0.$$

Оно распадается на два уравненія:

$$x-1=0;\ ax^4+(b+a)x^3+(a+b+c)x^2+(b+a)x+a=0.$$

Первое изъ нихъ первой степени, а второе — возвратное уравненіе четвертой степени.

§ 189. **Замѣчаніе о возвратныхъ уравненіяхъ.** Указанныя въ §§ 186—188 преобразованія возвратныхъ уравненій 3-ьей, 4-ой и 5-ой степеней принадлежатъ къ двумъ типамъ: преобразованія перваго типа служатъ для выдѣленія корней ± 1, если уравненіе ихъ имѣетъ; преобразованіе второго типа заключается въ замѣнѣ неизвѣстнаго x новымъ неизвѣстнымъ t, связаннымъ съ x посредствомъ равенства: $x+1/x=t$.

Въ случаѣ уравненія 4-ой степени послѣднее преобразованіе привело насъ къ квадратному уравненію, т.-е. понизило степень уравненія *вдвое* (§ 187).

Имѣя возвратное сравненіе n-ой ($n > 5$) степени, мы можемъ 1) удалить корни ± 1, если данное уравненіе ихъ имѣетъ, и 2) понизить степень полученнаго такимъ образомъ уравненія вдвое.

Первое достигается дѣленіемъ первой части на $x \pm 1$, или на $x^2 - 1$ (§ 132), а второе подстановкой $x + 1/x = t$.

Дѣйствительно, по выдѣленіи корней, равныхъ ± 1, мы получимъ возвратное уравненіе *четной* степени и *перваго* класса (§ 185), т.-е. уравненіе вида:

$$ax^{2m} + bx^{2m-1} + cx^{2m-2} + \cdots + kx^m + \cdots + cx^2 + bx + a = 0.$$

Дѣленіе уравненія на x^m приводитъ къ уравненію

$$a(x^m + 1/x^m) + b(x^{m-1} + 1/x^{m-1}) + c(x^{m-2} + 1/x^{m-2}) + \cdots = 0.$$

Пусть $x + 1/x = t$. Вычисляя $x^2 + 1/x^2$, $x^3 + 1/x^3, \ldots,$ $x^m + 1/x^m$, находимъ:

$$x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2;$$
$$x^3 + 1/x^3 = (x^2 + 1/x^2)\cdot(x + 1/x) - (x + 1/x) = t^3 - 3t,$$
$$x^4 + 1/x^4 = (x^3 + 1/x^3)(x + 1/x) - (x^2 + 1/x^2) = t^4 - 4t^2 + 2.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^m - 1/x^m = (x^{m-1} + 1/x^{m-1})(x + 1/x) - (x^{m-2} + 1/x^{m-2}).$$

Эти формулы показываютъ, что двучленъ $x^m + 1/x^m$ выражается черезъ t цѣлымъ раціональнымъ многочленомъ степени m.

Слѣдовательно, преобразованіе возвратнаго уравненія четной степени и перваго класса посредствомъ подстановки $x + 1/x = t$ понижаетъ *вдвое* степень уравненія.

Все, сказанное о возвратныхъ уравненіяхъ, можно резюмировать слѣдующимъ образомъ: *рѣшеніе всякаго возвратнаго уравненія приводится къ рѣшенію уравненія, степень котораго по крайней мѣрѣ вдвое ниже степени даннаго.*

§ 190. **Двучленныя уравненія.** Двучленнымъ называется уравненіе вида:

$$z^n - a = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Покажемъ, что рѣшеніе этого уравненія приводится къ рѣшенію болѣе простого уравненія того же вида, а именно къ рѣшенію уравненія:

$$x^n - 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

Пусть ζ есть одно изъ значеній $\sqrt[n]{a}$ (§ 83), такъ что $\zeta^n = a$. Полагая въ уравненіи (α) $z = \zeta x$, находимъ $\zeta^n x^n - a = 0$ или $ax^n - a = 0$, откуда по сокращеніи на a получимъ уравненіе (β).

Рѣшеніе уравненія (β) есть не что иное, какъ опредѣленіе значеній n-аго корня изъ 1. Задача эта рѣшена въ § 84.

Корни уравненія (β) даются формулой:

$$x = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n),$$

гдѣ k принимаетъ n цѣлыхъ послѣдовательныхъ значеній, напр., 0, 1, 2,..., $n-1$. О свойствахъ корней уравненія (β) см. § 84.

§ 191. **Трехчленныя уравненія.** *Трехчленнымъ* называется уравненіе вида:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

гдѣ n есть натуральное число.

Полагая $x^n = t$, находимъ квадратное уравненіе

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Если t_1 и t_2 суть корни его, то корни даннаго получатся рѣшеніемъ двухъ двучленныхъ уравненій:

$$x^n = t_1, \; x^n = t_2.$$

(Сравн. § 182).

§ 192. **Системы второй степени.** Системы уравненій, изъ которыхъ одно *второй* степени, а остальныя *первой* или *второй* степени, называются *системами второй степени*.

Системы второй степени раздѣляются на двѣ категоріи.

Къ первой категоріи относятся тѣ системы, которыя содержатъ только *одно* уравненіе второй степени и нѣсколько уравненій первой степени.

Ко второй категоріи относятся тѣ системы, въ составъ которыхъ входятъ по крайней мѣрѣ *два* уравненія второй степени.

Разсмотримъ системы той и другой категоріи для простѣйшаго случая, когда число неизвѣстныхъ и число уравненій системы равно *двумъ*.

§ 193. **Система линейнаго и квадратнаго уравненій съ двумя неизвѣстными.** Цѣлая раціональная функція второй степени относительно перемѣнныхъ x и y можетъ содержать члены съ x^2, xy, y^2, x, y и членъ, постоянный относительно этихъ перемѣнныхъ. Общій видъ ея таковъ:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F,$$

гдѣ A, B, C, D, E и F суть числа, независящія отъ x и y.

Приравнявъ эту функцію нулю, получимъ *общее* уравненіе второй степени съ двумя неизвѣстными.

Пусть дана система уравненій:

$$\left.\begin{array}{r} ax+by=c, \\ Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (\alpha)$$

въ которыхъ a, b, c, A, B, C, D, E и F обозначаютъ постоянныя относительно x и y числа. Покажемъ, что рѣшеніе ея приводится къ рѣшенію квадратнаго уравненія и входитъ такимъ образомъ въ кругъ задачъ элементарной алгебры.

По теоремѣ IV § 146 система (α) равносильна системѣ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} y=(c-ax)/b, \\ Ax^2+Bx(c-ax)/b+C(c-ax)^2/b^2+Dx+ \\ +E(c-ax)/b+F=0. \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (\beta)$$

Второе изъ нихъ есть квадратное уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ x. Обозначивъ корни его черезъ x_1 и x_2, мы найдемъ соотвѣтственныя значенія y при помощи перваго уравненія системы (β):

$$y_1=(c-ax_1)/b, \quad y_2=(c-ax_2)/b \quad . \; . \; . \; . \quad (\gamma)$$

Пара чиселъ: $x=x_1$, $y=y_1$ представляетъ одно рѣшеніе системы (α), а пара чиселъ: $x=x_2$, $y=y_2$—другое рѣшеніе ея.

Итакъ, рѣшеніе системы (α) приводится къ рѣшенію одного квадратнаго уравненія (второе уравненіе системы (β)) и двухъ линейныхъ (уравненія (γ)).

Число рѣшеній системы равно двумъ.

Не трудно убѣдиться, что рѣшеніе системы n уравненій съ n неизвѣстными, состоящей изъ одного квадратнаго и $n-1$ линейныхъ, приводится къ рѣшенію одного квадратнаго уравненія и $2(n-1)$ линейныхъ, и что система имѣетъ два рѣшенія.

Въ качествѣ полезнаго упражненія предлагается доказать это предложеніе для случая трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными.

§ 194. **Система двухъ квадратныхъ уравненій съ двумя неизвѣстными.** Дана система уравненій

$$\left.\begin{aligned} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0, \\ a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (\alpha)$$

въ которыхъ a, b, c, d, e, f и тѣ же буквы со значками суть постоянныя относительно x и y числа.

Докажемъ, что рѣшеніе системы (α) приводится къ рѣшенію *полнаго* уравненія *четвертой* степени.

Располагая первыя части уравненій (α) по степенямъ y и полагая для краткости

$$\left.\begin{aligned} bx+e=p,\ ax^2+dx+f=q, \\ b'x+e'=p',\ a'x^2+d'x+f'=q', \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

мы переписываемъ систему (α) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} cy^2+py+q=0, \\ c'y^2+p'y+q'=0. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha')$$

Умножимъ первое изъ этихъ уравненій на c', а второе на c, и вычтемъ изъ перваго второе; получимъ уравненіе:

$$(c'p-cp')y+c'q-cq'=0.$$

Умноживъ первое уравненіе системы (α') на q', а второе на q, и вычтя почленно изъ перваго результата второй, получимъ уравненіе:

$$(cq'-c'q)y^2+(pq'-p'q)y=0.$$

Разсматривая *общую* систему второй степени, мы можемъ считать y отличнымъ отъ нуля. Поэтому послѣднее уравненіе равносильно (§ 143, II) уравненію

$$(cq'-c'q)y+(pq'-p'q)=0,$$

а система (α') или система (α) равносильна (§ 146, V) системѣ:

$$\left.\begin{array}{l}(c'p-cp')y+(c'q-cq')=0\\(cq'-c'q)y+(pq'-p'q)=0\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(\gamma)$$

Система (γ) состоитъ изъ двухъ уравненій первой степени относительно y. Для того, чтобы уравненія ея были совмѣстными, необходимо и достаточно выполненія условія (§ 158):

$$\frac{c'p-cp'}{cq'-c'q}=\frac{cq'-c'q}{p'q-pq'}.$$

Отсюда мы находимъ уравненіе

$$(cq'-c'q)^2=(c'p-cp')(p'q-pq'),\quad\ldots\ldots\quad(\delta)$$

содержащее только одно неизвѣстное x. Опредѣлимъ степень этого уравненія.

Изъ формулы (β) видно, что разность $cq'-c'q$ есть функція второй степени относительно x. Поэтому $(cq'-c'q)^2$, т.-е. первая часть уравненія (δ), есть функція четвертой степени относительно x. На основаніи тѣхъ же формулъ (β) легко видѣть, что произведеніе $(c'p-cp')(p'q-pq')$, т.-е, вторая часть уравненія (δ), есть также функція четвертой степени относительно x. Слѣд., уравненіе (δ) есть уравненіе четвертой степени, т.-е. приводится къ виду

$$p_0x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0\quad\ldots\ldots\quad(\delta')$$

Въ общемъ случаѣ въ этомъ уравненіи всѣ коэффиціенты p съ индексами отличны отъ нуля, т.-е. мы имѣемъ *полное* уравненіе четвертой степени. Въ частныхъ случаяхъ степень уравненія (δ) можетъ оказаться ниже 4. Желаемое такимъ образомъ доказано.

Въ элементарномъ курсѣ алгебры уравненія вида (δ) не разсматриваются. Поэтому рѣшеніе системы (α) въ общемъ случаѣ выходитъ изъ рамокъ этого курса. Но приведенное выше изслѣдованіе позволяетъ сдѣлать заключеніе о *числѣ* рѣшеній системы (α). Дѣйствительно, уравненіе (δ') имѣетъ 4 корня (§ 134); то или другое изъ уравненій (γ) даетъ для каждаго изъ этихъ корней одно значеніе для y. Слѣд., система (α) имѣетъ четыре рѣшенія.

Въ слѣдующихъ §§ приведены рѣшенія нѣкоторыхъ системъ второй степени съ двумя неизвѣстными какъ первой, такъ и второй категоріи въ связи съ ихъ геометрическимъ истолкованіемъ.

§ 195. **Система уравненій:** $px^2+qy^2=1$, $Ax+By+C=0$. Дана система второй степени:

$$px^2+qy^2=1,\ Ax+By+C=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

гдѣ p, q, A, B и C обозначаютъ вещественныя числа, постоянныя относительно x и y.

Для рѣшенія его опредѣляемъ y черезъ x изъ второго уравненія и подставляемъ найденное значеніе y въ первое уравненіе. Получимъ квадратное уравненіе относительно x:

$$Mx^2+Nx+P=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

гдѣ $M=pB^2+qA^2$, $N=2qAC$, $P=qC^2-B^2$.

Пусть x_1 и x_2 корни этого уравненія. Изъ второго уравненія данной системы находимъ соотвѣтственныя значенія y_1 и y_2 неизвѣстнаго y и такимъ образомъ получаемъ два рѣшенія системы: x_1, y_1 и x_2, y_2.

Эти рѣшенія могутъ быть или вещественными и различными, или вещественными и равными, или комплексными въ зависимости отъ характера корней уравненія (β).

Если $M=0$, то уравненіе (β) имѣетъ безконечный корень (§ 174), и система (α) имѣетъ безконечное рѣшеніе. Выяснимъ тѣ условія, при которыхъ система (α) допускаетъ безконечное рѣшеніе.

Такъ какъ $M=pB^2+qA^2$, т.-е. представляетъ сумму двухъ слагаемыхъ, то для обращенія M въ нуль необходимо и достаточно, чтобы эти слагаемыя были равны по абсолютному значенію и противоположны по знаку. Послѣднее возможно лишь тогда, когда p и q имѣютъ противоположные знаки, такъ какъ A^2 и B^2 суть положительныя числа.

Для геометрической интерпретаціи рѣшенія системы (α) нужно выяснить геометрическое значеніе ея перваго уравненія, такъ какъ геометрическое значеніе второго извѣстно (§ 150).

Различныя предположенія относительно коэффиціентовъ p и q можно свести къ слѣдующимъ: 1) p и q положительны и равны между собою; полагая $p = q = 1/a^2$, гдѣ $a > 0$, мы приводимъ первое уравненіе (α) къ виду

$$x^2 + y^2 = a^2; \tag{93}$$

2) p и q положительны и различны; въ этомъ случаѣ можно положить $p = 1/a^2$, $q = 1/b^2$, гдѣ $a > 0$, $b > 0$; будемъ кромѣ того предполагать, что $a > b$; первое уравненіе (α) принимаетъ видъ:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1; \tag{94}$$

3) p и q противоположныхъ знаковъ; будемъ предполагать, что $p > 0$ и $q < 0$: первое уравненіе (α) принимаетъ видъ

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, \tag{95}$$

если положимъ $p = 1/a^2$, и $q = -1/b^2$, гдѣ $a > 0$, $b > 0$;
4) p и q отрицательны; уравненіе $px^2 + qy^2 = 1$ въ этомъ случаѣ не имѣетъ *вещественныхъ* рѣшеній, такъ какъ для всѣхъ вещественныхъ значеній x и y лѣвая часть его есть число отрицательное, между тѣмъ какъ правая часть равна $+1$.

При разсмотрѣніи вопроса о геометрическомъ значеніи уравненія $px^2 + qy^2 = 1$ подъ x и y разумѣются координаты точки на плоскости, т.-е. *вещественныя* числа; поэтому случай $p < 0$, $q < 0$ слѣдуетъ исключить изъ разсмотрѣнія.

Каждое изъ уравненій (93), (94) и (95) разсмотримъ въ отдѣльности.

§ 196. **Геометрическое значеніе уравненія (93).** Первая часть уравненія (93) есть не что иное, какъ квадратъ разстоянія точки съ координатами x и y отъ начала координатъ

(§ 74). Поэтому уравненію (93) удовлетворяютъ координаты всѣхъ точекъ, которыя находятся на разстояніи a отъ начала координатъ. Извѣстно, что геометрическое мѣсто такихъ точекъ есть кругъ радіуса a съ центромъ въ началѣ координатъ. Слѣдовательно, *уравненіе (93) есть уравненіе круга радіуса a съ центромъ въ началѣ координатъ.*

Рѣшеніе системы уравненій

$$x^2+y^2=a^2,\quad Ax+By+C=0$$

съ геометрической точки зрѣнія представляетъ опредѣленіе тѣхъ точекъ, которыя лежатъ на кругѣ $x^2+y^2=a^2$ и на прямой $Ax+By+C=0$, т.-е. точекъ пересѣченія круга и прямой.

Существованіе только двухъ рѣшеній для данной системы соотвѣтствуетъ тому факту, что прямая пересѣкаетъ кругъ не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ.

Если два рѣшенія системы вещественны и различны, то прямая пересѣкаетъ кругъ въ двухъ различныхъ точкахъ и представляетъ по отношенію къ нему *сѣкущую.*

Если два рѣшенія одинаковы, то двѣ точки пересѣченія сливаются въ одну, и прямая представляетъ *касательную* къ кругу въ ихъ единственной общей точкѣ.

Если рѣшенія системы комплексны, то точекъ пересѣченія не существуетъ.

Упражненіе. *Рѣшить слѣдующія три системы:*

$$(a)\quad x^2+y^2=9,\quad x+y=2;$$
$$(b)\quad x^2+y^2=9,\quad 4x+3y=15;$$
$$(c)\quad x^2+y^2=9,\quad 5x+4x=20.$$

Сдѣлать чертежи, соотвѣтствующіе каждой системѣ.

§ 197. **Геометрическое значеніе уравненія (94).** Уравненіе (94) опредѣляетъ кривую линію, называемую *эллипсомъ.* Сравненіе уравненій (93) и (94) показываетъ, что первое изъ нихъ есть частный случай второго, когда $b=a$. Выяснимъ связь между эллипсомъ (94) и кругомъ (93).

Возьмемъ на кругѣ, опредѣляемомъ уравненіемъ (93), и на эллипсѣ, опредѣляемомъ уравненіемъ (94), точки съ одной и той же абсциссой x и сравнимъ ординаты этихъ точекъ.

Обозначая ординату точки круга черезъ Y, а ординату точки эллипса черезъ y, изъ уравненій (93) и (94) находимъ:

$$Y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

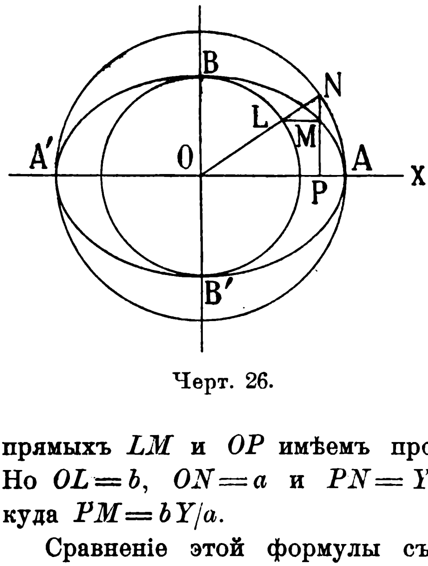
Сравненіе Y и y приводитъ къ заключенію, что

$$y = \frac{b}{a} Y, \qquad (\delta)$$

т.-е. при одной и той же абсциссѣ ордината точки эллипса (94) равна ординатѣ точки круга (93), уменьшенной въ отношеніи b/a. Поэтому эллипсъ (94) представляетъ кривую, получаемую такимъ преобразованіемъ круга (93), при которомъ всѣ ординаты его уменьшаются въ опредѣленномъ отношеніи. Такое преобразованіе можно назвать *сжатіемъ* круга по одному изъ его діаметровъ.

Изъ уравненія (δ) вытекаетъ весьма простое построеніе точекъ эллипса (94) по даннымъ a и b.

Возьмемъ два концентрическихъ круга радіусовъ a и b съ центромъ въ началѣ координатъ и какую-нибудь точку N на первомъ изъ нихъ (черт. 26). Построивъ ея ординату PN и соединивъ N съ центромъ O, проведемъ черезъ точку L пересѣченія прямой ON съ кругомъ радіуса b прямую, параллельную оси x. Точка M пересѣченія этой прямой съ PN есть точка эллипса (94). Въ самомъ дѣлѣ, по параллельности прямыхъ LM и OP имѣемъ пропорцію: $PM : PN = OL : ON$. Но $OL = b$, $ON = a$ и $PN = Y$; слѣдов., $PM : Y = b : a$, откуда $PM = bY/a$.



Черт. 26.

Сравненіе этой формулы съ формулой (δ) показываетъ, что $PM = y$; слѣд., M есть точка эллипса (94), которая имѣетъ абсциссу $OP = x$.

Эллипсъ (94) есть замкнутая кривая, симметрично расположенная относительно осей координатъ. Пересѣченія его съ осью x суть (см. вторую формулу γ) точки $A(a, 0)$ и $A'(-a, 0)$, а съ осью y — точки $B(0, b)$ и $B'(0, -b)$. Эти точки называются *вершинами* эллипса. Отрѣзокъ $A'A = 2a$ называется *большой осью* эллипса, а отрѣзокъ $B'B = 2b$ — его *малой* осью.

Эллипсъ съ равными осями есть кругъ.

Рѣшеніе системы уравненій

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad Ax + By + C = 0$$

соотвѣтствуетъ геометрической задачѣ о нахожденіи точекъ пересѣченія эллипса съ прямой.

Различіе въ характерѣ рѣшеній этой системы иллюстрируется различіемъ относительнаго расположенія эллипса и прямой (см. § 196).

Упражненіе. *Рѣшить слѣдующія три системы уравненій:*

$$(a) \quad x^2/25 + y^2 = 1, \quad x - y + 1 = 0;$$
$$(b) \quad x^2/25 + y^2 = 1, \quad 4x + 15y - 25 = 0;$$
$$(c) \quad x^2/25 + y^2 = 1, \quad x + 3y - 6 = 0.$$

Сдѣлать чертежи, соотвѣтствующіе каждой системѣ.

§ 198. **Геометрическое значеніе уравненія (95).** Уравненіе

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (95)$$

опредѣляетъ кривую линію, называемую *гиперболой*. Чтобы составить понятіе о формѣ гиперболы, рѣшимъ уравненіе (95) относительно y, т.-е. выразимъ y въ функціи x; получимъ уравненія:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \, .$$

Изъ разсмотрѣнія этой формулы вытекаютъ слѣдующія заключенія:

1) *Значенія y мнимы, если $x^2 < a^2$ или $|x| < a$; это значитъ, что гипербола не имѣетъ точекъ съ абсциссами, абсолютное значеніе которыхъ меньше a;*

2) $y = 0$ *при* $x = \pm a$, *т.-е. гипербола пересѣкаетъ ось x въ точкахъ $A(a, 0)$ и $A'(-a, 0)$;*

3) *y имѣетъ два значенія, противоположныхъ по знаку, для всякаго значенія x, абсолютное значеніе котораго больше a, т.-е. гипербола есть кривая симметричная относительно оси x;*

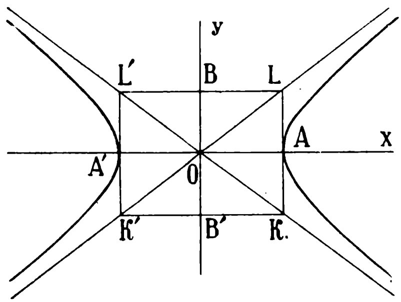
4) *значеніе y безгранично возрастаетъ при безграничномъ возрастаніи абсолютнаго значенія x.*

Рѣшая уравненіе (95) относительно x, находимъ, что

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}.$$

Эта формула показываетъ, что каждому значенію y соотвѣтствуютъ два отличающихся только знаками значенія x, т.-е., что гипербола *симметрична* относительно оси y.

Изъ этого обстоятельства и изъ того, что на гиперболѣ нѣтъ точекъ, абсциссы которыхъ были бы по абсолютному значенію меньше a, слѣдуетъ, что *гипербола состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ вѣтвей* (черт. 27).



Черт. 27.

Точки $A(a, 0)$ и $A'(-a, 0)$ называются *вершинами* гиперболами. Отрѣзокъ $A'A = 2a$ называется *дѣйствительной осью* гиперболы. Гипербола не пересѣкаетъ оси y, такъ какъ при $x = 0$ уравненіе (95) даетъ для y мнимыя значенія: $\pm bi$. Построивъ точки $B(0, b)$ и $B'(0, -b)$, мы получаемъ отрѣзокъ $B'B = 2b$, который называется *мнимой* осью гиперболы.

Гипербола съ равными дѣйствительной и мнимой осями ($a = b$) называется равносторонней; ея уравненіе таково:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Рѣшеніе системы уравненій

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, \quad Ax + By + C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (ζ)$$

соотвѣтствуетъ геометрической задачѣ о нахожденіи точекъ пересѣченія гиперболы и прямой.

Различіе въ характерѣ рѣшеній этой системы иллюстрируется различіемъ относительнаго положенія гиперболы и прямой (см. §§ 196 и 197).

Но система (ζ) имѣетъ ту особенность по сравненію съ системами, разсмотрѣнными въ §§ 196 и 197, что одно или оба рѣшенія ея могутъ быть безконечны.

Выведемъ условія, при которыхъ это обстоятельство имѣетъ мѣсто. Исключеніе y изъ уравненій (ζ) приводитъ къ слѣдующему квадратному относительно x уравненію:

$$(B^2/a^2 - A^2/b^2)x^2 - 2ACx/b^2 - C^2/b^2 - B^2 = 0 \quad . \quad . \quad (\eta)$$

Это уравненіе имѣетъ безконечный корень, если (§ 174)

$$B^2/a^2 - A^2/b^2 = 0.$$

Легко видѣть, что это условіе распадается на два слѣдующихъ

$$A/B = +b/a, \quad A/B = -b/a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\vartheta)$$

Уравненіе (η) имѣетъ два безконечныхъ корня, если при выполненіи одного изъ условій (ϑ) имѣемъ еще $C = 0$ (§ 174).

Изъ этого слѣдуетъ, что при $A/B = \pm b/a$ и $C \neq 0$ одно изъ рѣшеній системы (ζ) безконечно и другое конечно. Конечное рѣшеніе состоитъ изъ конечнаго корня уравненія (η) и соотвѣтствующаго ему значенія y.

При $A/B = \pm b/a$ и $C = 0$ оба рѣшенія системы (ζ) безконечны.

Обратимся къ выясненію геометрическаго значенія безконечныхъ рѣшеній системы (ζ).

Построимъ прямоугольникъ $KLL'K'$ со сторонами $K'K = 2a$ и $KL = 2b$ такъ, чтобы пересѣченіе его діагоналей было въ началѣ координатъ, стороны, равныя $2a$, были параллельны оси x, а стороны, равныя $2b$, параллельны оси y (черт. 27). Изъ треугольника LOA находимъ, что $\tan \widehat{AOL} = b/a$, а такъ какъ $\widehat{AOL'} = 180^0 - \widehat{L'OA'} = 180^0 - \widehat{AOL}$, то $\tan \widehat{AOL'} = -b/a$.

Изъ этого слѣдуетъ, что числа $+b/a$ и $-b/a$ суть угловые коэффиціенты соотвѣтственно прямыхъ $K'L$ и KL' (§ 150).

Съ другой стороны мы знаемъ, что угловой коэффиціентъ прямой $Ax+By+C=0$ равенъ $-A/B$, и что равенство угловыхъ коэффиціентовъ двухъ прямыхъ есть признакъ ихъ параллельности (§ 153).

Существованіе одного безконечнаго рѣшенія системы (ζ) соотвѣтствуетъ тому геометрическому факту, что одна изъ точекъ пересѣченія прямыхъ, параллельныхъ діагонали $K'L$ указаннаго выше прямоугольника, и прямыхъ, параллельныхъ второй его діагонали KL', есть безконечно удаленная точка. Такъ какъ на каждой прямой допускается существованіе только одной безконечно удаленной точки, и эта точка принимается за точку пересѣченія всѣхъ прямыхъ, ей параллельныхъ, то изъ сказаннаго вытекаетъ заключеніе, что гипербола имѣетъ *двѣ* безконечно удаленныя точки.

Въ случаѣ, когда оба рѣшенія системы (ζ) безконечны, прямая $Ax+By+C=0$ проходитъ черезъ начало координатъ, такъ какъ $C=0$ (§ 151) и параллельна одной изъ діагоналей прямоугольника $KLL'K'$; слѣд., она *совпадаетъ* съ одной изъ этихъ діагоналей.

Отсюда слѣдуетъ, что прямыя $K'L$ и KL' суть касательныя къ гиперболѣ въ ея безконечно удаленныхъ точкахъ.

Гипербола обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что при неограниченномъ возрастаніи x обѣ вѣтви гиперболы неограниченно приближаются къ прямымъ $K'L$ и KL', никогда ихъ не пересѣкая. Прямыя $K'L$ и KL' называются *асимптотами* гиперболы.

Упражненіе. *Рѣшить слѣдующія системы уравненій:*

$$
\begin{array}{ll}
(a) & x^2-y^2=9,\ \ 2x-y-6=0; \\
(b) & x^2-y^2=9,\ \ 5x-4y-9=0; \\
(c) & x^2-y^2=9,\ \ 3x-y-6=0; \\
(d) & x^2-y^2=9,\ \ x+y=0.
\end{array}
$$

Сдѣлать чертежи, соотвѣтствующіе каждой изъ этихъ системъ.

§ 199. **Система:** $x+y=m$, $xy=n^2$. Для рѣшенія системы уравненій:

$$x+y=m,\ xy=n^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\lambda)$$

можно примѣнить способъ подстановки подобно тому, какъ это было сдѣлано въ § 195 для системы (α).

Но можно также воспользоваться особымъ видомъ уравненій (λ) и указать болѣе быстрый способъ рѣшенія этой системы.

По уравненіямъ (λ) мы знаемъ сумму и произведеніе двухъ неизвѣстныхъ чиселъ x и y. Принявъ эти числа за корни квадратнаго уравненія, мы можемъ по этимъ даннымъ написать это уравненіе (§ 171). Обозначая черезъ t неизвѣстное этого уравненія, получимъ:

$$t^2-mt+n^2=0.$$

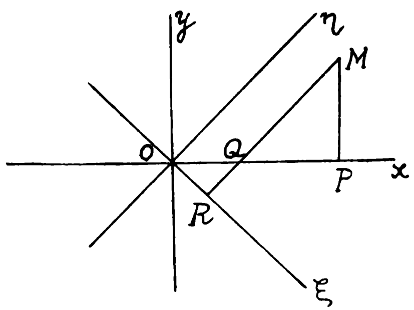
Если t_1 и t_2 суть его корни, то два рѣшенія системы (λ) представятся слѣдующими парами чиселъ: $x_1=t_1$, $y_1=t_2$; $x_2=t_2$, $y_2=t_1$.

Съ геометрической точки зрѣнія рѣшеніе системы (λ) есть рѣшеніе задачи о нахожденіи точекъ пересѣченія прямой, опредѣляемой первымъ изъ уравненій (λ), и кривой, опредѣляемой вторымъ изъ этихъ уравненій.

Покажемъ, что эта кривая есть равносторонняя гипербола, асимптотами которой служатъ оси координатъ.

Равносторонняя гипербола съ полуосями a опредѣляется, какъ мы видѣли въ § 198, уравненіемъ $x^2-y^2=a^2$, если за ось x принята дѣйствительная ось, а за ось y — мнимая ось гиперболы. Асимптотами гиперболы являются прямыя, наклоненныя къ оси x подъ углами въ 45^0 и 135^0 (§ 198) и, слѣд., пересѣкающіяся подъ прямымъ угломъ.

Примемъ эти прямыя за оси $O\xi$ и $O\eta$ новой системы координатъ, взявъ на нихъ за положительныя тѣ направленія, съ которыми совпадаютъ соотвѣтственно положительныя направленія осей x и y, если xOy повернуть около начала O на уголъ, равный -45^0 (черт. 28).



Черт. 28.

Возьмемъ на плоскости произвольную точку M, координаты которой относительно системы xOy суть $OP = x$ и $PM = y$, а относительно системы $\xi O \eta$ суть $OR = \xi$ и $RM = \eta$.

Обозначивъ черезъ точку Q пересѣченія RM съ осью x и принявъ во вниманіе, что, по построенію, треугольники ORQ и QPM прямоугольные и равнобедренные, находимъ изъ разсмотрѣнія чертежа слѣдующія соотношенія:

$$PM = QP = QM/\sqrt{2};\quad QM = RM - RQ = RM - OR;$$
$$\text{слѣд. } PM = (RM - OR)/\sqrt{2};$$
$$OP = OQ + QP = OR\sqrt{2} + (RM - OR)/\sqrt{2} = (RM + OR)/\sqrt{2}.$$

Подставляя въ выраженія OP и PM вмѣсто OP, PM, OR и RM соотвѣтственно x, y, ξ и η, находимъ:

$$x = (\xi + \eta)/\sqrt{2},\quad y = (\eta - \xi)/\sqrt{2}.$$

Эти формулы выражаютъ связь между координатами x, y точки M относительно системы xOy и координатами ξ, η той же точки относительно системы $\xi O \eta$.

Подставивъ въ уравненіе $x^2 - y^2 = a^2$ найденныя выраженія x и y получимъ уравненіе $(\xi + \eta)^2/2 - (\eta - \xi)^2/2 = a^2$, которое по упрощеніи приводится къ уравненію $2\xi\eta = a^2$ или $\xi\eta = a^2/2$.

Второе уравненіе системы (λ) отличается отъ полученнаго нами уравненія равносторонней гиперболы, отнесенной къ ея асимптотамъ, только обозначеніями. Слѣд., оно опредѣляетъ гиперболу, асимптотами которой служатъ оси координатъ (ср. §§ 126 и 127, прим. 3).

Упражненіе. *Рѣшить слѣдующія системы уравненій:*

$$(a)\quad x + y = 7,\quad xy = 12;$$
$$(b)\quad x + y = 6.\quad xy = 9;$$
$$(c)\quad x + y = 2;\quad xy = 2,$$

Сдѣлать чертежи, соотвѣтствующіе каждой изъ системъ.

§ 200. **Система:** $x^2 + y^2 = a^2$, $xy = b^2$. Для рѣшенія системы уравненій

$$x^2 + y^2 = a^2,\quad xy = b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mu)$$

можно употребить способъ подстановки, который въ данномъ случаѣ не представляетъ затрудненій потому, что второе изъ уравненій системы есть уравненіе первой степени относительно каждаго изъ неизвѣстныхъ, и, слѣд., одно неизвѣстное выражается *раціонально* черезъ другое.

Опредѣливъ y изъ второго уравненія и подставивъ найденное значеніе вмѣсто y въ первое, получимъ биквадратное уравненіе:

$$x^4 - a^2x^2 + b^4 = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ 4 корня (§ 182). Каждому корню соотвѣтствуетъ одно значеніе неизвѣстнаго y, получаемое изъ второго уравненія системы (μ).

Система (μ) имѣетъ 4 рѣшенія. Характеръ рѣшеній зависитъ отъ характера корней биквадратнаго уравненія (§ 183).

Укажемъ еще другой способъ рѣшенія системы (μ).

Система (μ) равносильна (§ 146) системѣ

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + 2b^2, \quad x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - b^2$$

или системѣ

$$(x + y)^2 = a^2 + 2b^2, \ (x - y)^2 = a^2 - 2b^2 \ . \ . \ . \quad (\nu)$$

Первое уравненіе этой системы распадается на два:

$$x + y = + \sqrt{a^2 + 2b^2}, \ x + y = - \sqrt{a^2 + 2b^2} \ . \ . \ . \quad (\pi)$$

Второе уравненіе системы (ν) также распадается на два:

$$x - y = + \sqrt{a^2 - 2b^2}, \ x - y = - \sqrt{a^2 - 2b^2} \ . \ . \ . \quad (\varsigma)$$

Совмѣстное существованіе уравненій системы (ν) равносильно существованію слѣдующихъ 4 системъ линейныхъ уравненій:

$$\text{I} \begin{cases} x + y = \sqrt{a^2 + 2b^2}, \\ x - y = \sqrt{a^2 - 2b^2}. \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} x + y = \sqrt{a^2 + 2b^2}, \\ x - y = - \sqrt{a^2 - 2b^2}. \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} x + y = - \sqrt{a^2 + 2b^2}, \\ x - y = \sqrt{a^2 - 2b^2}. \end{cases} \qquad \text{IV} \begin{cases} x + y = - \sqrt{a^2 + 2b^2}, \\ x - y = - \sqrt{a^2 - 2b^2}. \end{cases}$$

Рѣшая каждую изъ этихъ системъ, находимъ четыре рѣшенія системы (μ).

Съ геометрической точки зрѣнія рѣшенія системы (μ) представляетъ рѣшеніе задачи о нахожденіи точекъ пересѣченія круга, опредѣляемаго первымъ уравненіемъ системы (§ 196), съ гиперболой, опредѣляемой вторымъ ея уравненіемъ (§ 199).

Упражненіе 1. *Рѣшить слѣдующія системы уравненій:*

$$(a)\quad x^2+y^2=25,\quad xy=12;$$
$$(b)\quad x^2+y^2=25,\quad xy=12{,}5;$$
$$(c)\quad x^2+y^2=25,\quad xy=13.$$

Иллюстрировать рѣшеніе каждой системы чертежомъ.

Упражненіе 2. *Сравнить выраженія x и y, получаемыя при рѣшеніи системы (μ) способомъ подстановки, т.-е. при помощи биквадратнаго уравненія, съ выраженіями тѣхъ же неизвѣстныхъ, получаемыми при рѣшеніи системы I, II, III и IV (§ 184).*

ГЛАВА XIII.

Основныя теоремы теоріи предѣловъ. Производныя раціональныхъ функцій.

§ 201. **Задача главы XIII.** При изученіи цѣлой раціональной функціи второй степени была введена *производная* этой функціи и указана ея роль при изслѣдованіи вопроса объ измѣненіи функціи (§§ 175—177).

Задача настоящей главы заключается въ томъ, чтобы распространить пользованіе понятіемъ о производной на случай произвольной *раціональной* функціи, *цѣлой* или *дробной.*

Для этой цѣли нужно познакомиться съ основными положеніями теоріи предѣловъ.

§ 202. **Теоремы о безконечно малыхъ.** I. *Сумма конечнаго числа безконечно малыхъ есть безконечно малое число.*

Пусть имѣемъ n (n—произвольное натуральное число) безконечно малыхъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Нужно доказать, что ихъ сумма есть также безконечно малое число.

Обозначивъ черезъ ε произвольное, какъ угодно малое положительное число, мы имѣемъ по опредѣленію безконечно малыхъ (§ 123) слѣдующій рядъ неравенствъ:

$$|\alpha_1| < \varepsilon/n,\ |\alpha_2| < \varepsilon/n, \ldots, |\alpha_n| < \varepsilon/n.$$

Сложивъ почленно эти неравенства, получимъ (§ 164):

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Но по свойству алгебраической суммы (§ 26) имѣетъ мѣсто неравенство:

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|.$$

Сопоставленіе двухъ послѣднихъ неравенствъ приводитъ къ заключенію, что $|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| < \varepsilon$, т.-е., что сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ есть безконечно малое число (§ 123).

II. *Разность двухъ безконечно малыхъ есть число безконечно малое.* Удерживая обозначенія, указанныя въ предыдущей теоремѣ, имѣемъ неравенства (§ 123): $|\alpha_1| < \varepsilon/2$, $|\alpha_2| < \varepsilon/2$, откуда получаемъ: $|\alpha_1| + |\alpha_2| < \varepsilon$. Но $|\alpha_1 - \alpha_2| = |\alpha_1 + (-\alpha_2)| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|$; слѣд., $|\alpha_1 - \alpha_2| < \varepsilon$, т.-е. $\alpha_1 - \alpha_2$ есть безконечно малое число.

III. *Произведеніе конечнаго числа на безконечно малое есть число безконечно малое.*

Если α есть число безконечно малое, а m — конечное, то, по опредѣленію безконечно малаго числа, $|\alpha| < \varepsilon/|m|$, гдѣ ε есть произвольное, какъ угодно малое положительное число. Умножая обѣ части послѣдняго неравенства на $|m|$, получимъ неравенство (§ 164): $|\alpha m| < \varepsilon$, которое и доказываетъ теорему.

Слѣдствіе. *Произведеніе безконечно малыхъ есть число безконечно малое.*

IV. *Частное отъ дѣленія безконечно малаго числа на конечное есть число безконечно малое.*

Такъ какъ дѣленіе на m можно замѣнить умноженіемъ на $1/m$, то эта теорема является слѣдствіемъ предыдущей.

§ 203. **Предѣлъ суммы и разности.** *Предѣлъ суммы* **конечнаго** *числа перемѣнныхъ равенъ суммѣ ихъ предѣловъ. Предѣлъ разности двухъ перемѣнныхъ равенъ разности ихъ предѣловъ.*

Замѣтимъ прежде всего, что *перемѣнное число x, имѣющее предѣлъ a, можетъ быть представлено въ видѣ суммы $a+\alpha$, гдѣ α есть безконечно малое число.* Это непосредственно слѣдуетъ изъ опредѣленій предѣла и безконечно малаго числа (§§ 122, 123).

Обратимся теперь къ доказательству теоремъ о предѣлахъ суммы и разности.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ представляютъ n перемѣнныхъ, имѣющихъ предѣлами соотвѣтственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n есть натуральное число). Требуется доказать, что

$$1)\ \lim(x_1+x_2+\cdots+x_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n;$$

$$2)\ \lim(x_1-x_2)=a_1-a_2.$$

По сдѣланному выше замѣчанію имѣемъ:

$$x_1=a_1+\alpha_1,\ x_2=a_2+\alpha_2,\ldots,\ x_n=a_n+\alpha_n,$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ суть безконечно малыя числа.

Отсюда черезъ сложеніе находимъ:

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n).$$

Такъ какъ $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ есть безконечно малое число (§ 202, I), то

$$|(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)|<\varepsilon,$$

гдѣ ε есть произвольное, какъ угодно малое положительное число. Слѣд. (§ 122), $\lim(x_1+x_2+\cdots+x_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

Точно также изъ выраженій x_1 и x_2 черезъ ихъ предѣлы, находимъ, что $x_1-x_2=(a_1-a_2)+(\alpha_1-\alpha_2)$, откуда получимъ: $\lim(x_1-x_2)=a_1-a_2$.

§ 204. **Предѣлъ произведенія.** *Предѣлъ произведенія двухъ перемѣнныхъ равенъ произведенію ихъ предѣловъ.*

Нужно доказать, что $\lim(x_1x_2)=a_1a_2$ (обозначенія предыдущаго §).

Заключеніе вытекаетъ изъ того, что

$$x_1x_2=(a_1+\alpha_1)(a_2+\alpha_2)=a_1a_2+(a_1\alpha_2+a_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2),$$

и сумма $a_1\alpha_2+a_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2$ есть безконечно малое число (§ 202, III, I, § 122).

Теорему легко распространить послѣдовательно на случай трехъ, четырехъ и, вообще, конечнаго числа множителей.

Слѣдствіе. *Предѣлъ цѣлой и положительной степени перемѣннаго равенъ той же степени его предѣла:* $lim\, x^m = (lim\, x)^m$, гдѣ m есть натуральное число.

§ 205. **Предѣлъ частнаго.** *Предѣлъ частнаго двухъ перемѣнныхъ равенъ частному ихъ предѣловъ, если предѣлъ дѣлителя отличенъ отъ нуля.*

Нужно доказать, что $lim\,(x_1/x_2) = a_1/a_2$, при чемъ предполагается, что $a_2 \neq 0$ (обозначенія прежнія).

Такъ какъ $x_1 = a_1 + \alpha_1$, $x_2 = a_2 + \alpha_2$ (§ 203), то

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1 + \alpha_1}{a_2 + \alpha_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 + \alpha_1}{a_2 + \alpha_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2}{a_2(a_2 + \alpha_2)}.$$

Разность $a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2$ есть безконечно малое число (§ 202, III, II); произведеніе $a_2(a_2 + \alpha_2)$—конечное число. Слѣд., дробь $(a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2)/a_2(a_2 + \alpha_2)$ есть безконечно малое число (§ 202, IV). Поэтому изъ предыдущаго равенства слѣдуетъ, что

$$|x_1/x_2 - a_1/a_2| < \varepsilon, \text{ т. е. } lim\,(x_1/x_2) = a_1/a_2.$$

Слѣдствіе. *Предѣлъ цѣлой отрицательной степени перемѣннаго числа равенъ той же степени его предѣла.*

§ 206. **Производная функціи.** Пусть $y = f(x)$ есть *непрерывная* функція перемѣннаго x. Если Δx и Δy обозначаютъ соотвѣтственныя приращенія перемѣннаго и функціи, то отношеніе $\Delta y/\Delta x$ выражаетъ *среднюю скорость* измѣненія функціи при измѣненіи перемѣннаго отъ x до $x + \Delta x$. Когда $|\Delta x|$ уменьшается и стремится къ нулю, то и $|\Delta y|$, вслѣдствіе непрерывности функціи, также уменьшается и стремится къ нулю. Предѣлъ, къ которому стремится при этомъ отношеніи $\Delta y/\Delta x$, представляетъ скорость измѣненія функціи для даннаго значенія x перемѣннаго (срав. § 175).

Опредѣленіе. *Предѣлъ отношенія $\Delta y/\Delta x$ приращенія Δy функціи y къ приращенію Δx перемѣннаго x при $\Delta x = 0$ называется* **производной** *функціи y.*

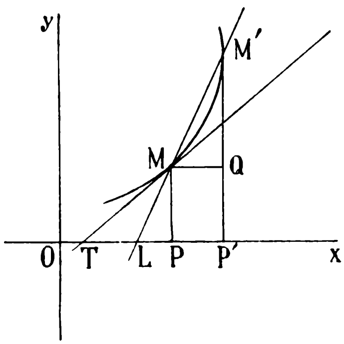
Производная функціи обозначается (срав. § 175) присоединеніемъ значка $'$ къ обозначенію функціи; напр., производная функціи y обозначается символомъ y', производная функціи $f(x)$ — символомъ $f'(x)$.

Данное выше опредѣленіе производной можно записать слѣдующимъ образомъ:

$$y' = \lim_{\Delta x = 0} (\Delta y / \Delta x) \text{ или } f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} (\Delta f(x) / \Delta x).$$

Изъ сказаннаго въ § 149 слѣдуетъ, что для линейной функціи $y = ax + b$ производная $y' = a$; для функціи $y = ax^2 + bx + c$ производная $y' = 2ax + b$ (§ 175).

§ 207. **Геометрическое значеніе производной.** Уравненіе $y = f(x)$, въ которомъ $f(x)$ есть непрерывная функція x, опредѣляетъ на плоскости кривую, если мы примемъ x и y за прямоугольныя координаты точки.



Черт. 29.

Построивъ эту кривую, возьмемъ на ней двѣ точки: точку M съ координатами x и y и точку M' съ координатами $x + \Delta x$ и $y + \Delta y$ (черт. 29). Опустивъ изъ точекъ M и M' перпендикуляры на ось x и проведя сѣкущую MM' и прямую $MQ \parallel Ox$ до встрѣчи съ перпендикуляромъ изъ точки M', получимъ прямоугольный треугольникъ MQM', изъ котораго имѣемъ: $\tan QMM' = QM'/MQ$. Но $QM' = P'M' - P'Q = P'M' - PM = (y + \Delta y) - y = \Delta y$ и $MQ = PP' = OP' - OP = (x + \Delta x) - x = \Delta x$.

Слѣдовательно

$$\tan \widehat{QMM'} = \Delta y / \Delta x.$$

Обозначая черезъ L точку пересѣченія сѣкущей MM' съ осью x, имѣемъ: $\widehat{QMM'} = \widehat{xLM}$. Поэтому

$$\tan \widehat{xLM} = \Delta y / \Delta x.$$

Будемъ точку M' перемѣщать по кривой такъ, чтобы она приближалась къ M; сѣкущая MM' будетъ при этомъ вращаться около точки M, приближаясь къ *касательной* къ кривой въ точкѣ M, а уголъ $\widehat{xLM}$ будетъ приближаться къ углу $\varphi = \widehat{xTM}$ между касательной и осью x. Въ предѣлѣ, когда точка M' совпадаетъ съ M, сѣкущая обратится въ касательную, а уголъ $\widehat{xLM}$ въ уголъ φ. Слѣдовательно,

$$\lim \tan \widehat{xLM} = \tan \varphi = \lim_{\Delta x = 0} \Delta y / \Delta x,$$

или $y' = \tan \varphi$.

Эта формула указываетъ геометрическое значеніе производной (сравн. § 180).

§ 208. **Основныя теоремы о производныхъ. Теорема I.** *Производная функціи, сохраняющей постоянное значеніе, равна нулю.*

Пусть $y = f(x)$ есть функція, сохраняющая одно и то же значеніе C при всѣхъ значеніяхъ x. Нужно доказать, что $y' = 0$.

Называя черезъ Δx и Δy соотвѣтственныя приращенія перемѣннаго и функціи, имѣемъ соотношеніе: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Но, по условію $f(x + \Delta x) = C$; слѣд., $y + \Delta y = C$. Вычитая почленно изъ этого равенства равенство $y = C$, находимъ $\Delta y = 0$. Поэтому отношеніе $\Delta y / \Delta x = 0$, а, слѣд., и предѣлъ его при $\Delta x = 0$ также равенъ нулю.

Итакъ, $\lim\limits_{\Delta x = 0} \Delta y / \Delta x = 0$ или (§ 206) $y' = 0$, ч. и т. д.

Доказанную теорему формулируютъ иногда слѣдующимъ образомъ: *производная постояннаго равна нулю.*

Теорема II. *Производная алгебраической суммы равна алгебраической суммѣ производныхъ ея слагаемыхъ.*

Пусть $y = u + v - w$, гдѣ u, v и w суть функціи x. Давая перемѣнному x приращеніе Δx и называя соотвѣтственныя приращенія функцій y, u, v и w черезъ Δy, Δu, Δv и Δw, находимъ:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w).$$

Такъ какъ $y = u + v - w$, то

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на Δx и перейдемъ къ предѣлу при $\Delta x = 0$ (§ 203):

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim \frac{\Delta u}{\Delta x} + lim \frac{\Delta v}{\Delta x} - lim \frac{\Delta w}{\Delta x} \text{ при } \Delta x = 0.$$

Но, по опредѣленію производной (§ 206) имѣемъ:

$$\lim_{\Delta x = 0} \Delta y/\Delta x = y'; \ \lim_{\Delta x = 0} \Delta u/\Delta x = u'; \ \lim_{\Delta x =} \Delta v/\Delta x = v'; \ \lim_{\Delta x = 0} \Delta w/\Delta x = w'.$$

Слѣд.,

$$y' = (u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

Теорема III. *Производная произведенія двухъ функцій равна суммѣ произведеній первой функціи на производную второй и второй на производную первой.*

Пусть $y = uv$, гдѣ u и v суть функціи x. Давая x приращеніе Δx и обозначая соотвѣтственныя приращенія функцій y, u и v черезъ Δy, Δu, Δv, находимъ:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$$

Для приращенія Δy получимъ слѣдующее выраженіе:

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на Δx и перейдемъ къ предѣлу при $\Delta x = 0$ (§ 203):

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim\ u \frac{\Delta v}{\Delta x} + lim\ v \frac{\Delta u}{\Delta x} + lim\ \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \text{ при } \Delta x = 0.$$

Но (§§ 204, 206) $lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$;

$$\lim_{\Delta x=0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} u \cdot \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta v}{\Delta u} = uv';$$

$$\lim_{\Delta x=0} v \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} v \cdot \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = vu';$$

$$\lim_{\Delta x=0} \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = 0.$$

Слѣд.,

$$y' = (uv)' = uv' + vu'.$$

Теорему не трудно распространить на случай произведенія произвольнаго конечнаго числа множителей.

Слѣдствіе. *При опредѣленіи производной произведенія, въ которомъ есть постоянный множитель, можно этого множителя выносить за знакъ производной.*

Пусть $y = Au$, гдѣ u есть функція x и A—постоянное.

По теоремѣ III имѣемъ:

$$y' = (Au)' = Au' + uA'.$$

Но (§ 208, теор. I) $A' = 0$; слѣд., $y' = Au'$.

Теорема IV. *Производная дроби равна дроби, числитель которой есть разность произведеній знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а знаменатель равенъ квадрату знаменателя.*

Пусть $y = u/v$, гдѣ u и v суть функціи x. Удерживая обозначенія и планъ вычисленій предыдущей теоремы, находимъ:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)/(v + \Delta v);$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)};$$

$$lim\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = lim\,\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} \text{ при } \Delta x = 0.$$

Но (§§ 205, 203, 204, 206)

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \lim_{\Delta x = 0}\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\Big/\lim_{\Delta x = 0} v(v + \Delta v) =$$

$$= \left(\lim_{\Delta x = 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x = 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\Big/\lim_{\Delta x = 0} v \cdot \lim_{\Delta x = 0}(v + \Delta v) =$$

$$= \left(\lim_{\Delta x = 0} v \cdot \lim_{\Delta x = 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x = 0} u \cdot \lim_{\Delta x = 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\Big/\lim_{\Delta x = 0} v \cdot \lim_{\Delta x = 0}(v + \Delta v) =$$

$$= (vu' - uv')/v^2.$$

Слѣдовательно,

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

§ 209. **Производная степени.** Пусть $y = x^m$, гдѣ m есть *натуральное* число. Требуется найти y', т.-е. производную степени съ натуральнымъ показателемъ.

Давая x приращеніе Δx и обозначая соотвѣтственное приращеніе y черезъ Δy, находимъ:

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^m.$$

Такъ какъ $y=x^m$, то

$$\Delta y=(x+\Delta x)^m-x^m.$$

Отсюда при помощи формулы бинома Ньютона (§ 114) получимъ:

$$\Delta y=C_m^1 x^{m-1}\Delta x+C_m^2 x^{m-2}(\Delta x)^2+\cdots+C_m^m(\Delta x)^m.$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на Δx и переходя къ передѣлу при $\Delta x=0$, находимъ:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\left\{C_m^1 x^{m-1}+C_m^2 x^{m-2}\Delta x+\cdots+C_m^m(\Delta x)^{m-1}\right\}$$

Предѣлъ многочлена, стоящаго во второй части, равенъ $C_m^1 x^{m-1}$ или mx^{m-1}, такъ какъ всѣ его члены кромѣ перваго содержатъ множитель Δx, обращающійся въ предѣлѣ въ нуль (§§ 203, 204).

Слѣд., $y'=(x^m)'=mx^{m-1}$.

Эта формула даетъ возможность вычислять производныя степеней съ натуральнымъ показателемъ.

Напримѣръ, $(x)'=1\cdot x^{1-1}=x^0=1$;

$$(x^2)'=2\cdot x^{2-1}=2x;$$

$$(x^3)'=3\cdot x^{3-1}=3x^2.$$

§ 210. **Производная цѣлой раціональной функціи.** Пусть y есть цѣлая раціональная функція перемѣннаго x, т.-е.

$$y=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n,$$

гдѣ n есть натуральное число, а p со значками постоянныя.

По § 208 (теор. II, слѣдствія теор. III, теор. I) и § 209 вычисленіе производной данной функціи располагается слѣдующимъ образомъ:

$$y'=(p_0x^n)'+(p_1x^{n-1})'+(p_2x^{n-2})'+\cdots+(p_{n-1}x)'+(p_n)'=$$
$$=p_0(x^n)'+p_1(x^{n-1})'+p_2(x^{n-2})'+\cdots+p_{n-1}(x)'+(p_n)'=$$
$$=p_0nx^{n-1}+p_1(n-1)x^{n-2}+p_2(n-2)x^{n-3}+\cdots+p_{n-1}.$$

Отсюда видно, что производная цѣлой раціональной функціи n-ой степени есть цѣлая раціональная функція $(n-1)$-ой степени.

§ 211. **Производная раціональной дроби.** Зная производную цѣлой раціональной функціи (§ 210), легко найти производную дробной раціональной функціи. Для этого нужно примѣнить теорему IV § 208 о производной дроби.

Пусть, напримѣръ, $y=(2x+3)/(x^2+x+1)$. Вычисляя производную y', находимъ:

$$y'=\frac{(x^2+x+1)(2x+3)'-(2x+3)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}=$$

$$=\frac{2(x^2+x+1)-(2x+3)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-2x^2-6x-1}{(x^2+x+1)^2}.$$

§ 212. **Возрастаніе и убываніе функцій.** Разсужденія, которыми мы воспользовались въ § 176 для выясненія связи между возрастаніемъ или убываніемъ функціи $y=ax^2+bx+c$ и знакомъ ея производной, не зависятъ отъ вида этой функціи и являются такимъ образомъ разсужденіями *общими*, т.-е. приложимыми ко всякой непрерывной функціи.

Эти разсужденія приводятъ къ заключенію, которое было указано въ § 176 и которое мы здѣсь снова приведемъ, не спеціализируя характера упоминаемой въ немъ функціи y.

Если при возрастаніи перемѣннаго x отъ значенія x_0 къ значенію $x_0+\Delta x$ $(\Delta x>0)$ функція y возрастаетъ, т.-е. $\Delta y>0$, то ея производная y' положительна при $x=x_0$; если же при указанномъ измѣненіи x функція убываетъ, т.-е. $\Delta y<0$, то ея производная y' отрицательна при $x=x_0$ *).

Обратно: если $y'>0$ при $x=x_0$, то функція y возрастаетъ при возрастаніи перемѣннаго x отъ значенія $x=x_0$; если $y'<0$ при $x=x_0$, то функція y убываетъ при возрастаніи x отъ $x=x_0$.

Примѣры. 1. *Требуется узнать, возрастаетъ или убываетъ функція $y=3x^4-10x^2+1$ при возрастаніи x отъ $x=1$.*

---

*) Случай, когда $y'=0$, разсматривается въ § 213.

Найдемъ производную данной функціи: $y' = 12x^3 - 20x$. Значеніе ея при $x = 1$ равно -8. Такъ какъ оно отрицательно, то функція y убываетъ при возрастаніи x отъ $x = 1$.

2. *Требуется найти, возрастаетъ или убываетъ функція* $y = 2x/(1 + x^2)$ *при возрастаніи* x *отъ* $x = -{}^1/_2$.

Найдемъ производную данной функціи:

$$y' = 2 \cdot \frac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

При $x = -{}^1/_2$ значеніе y' положительно; слѣд., функція y возрастаетъ при возрастаніи x отъ $x = -{}^1/_2$.

§ 213. **Maximum и minimum функціи.** Дополнимъ сказанное въ предыдущемъ § о связи возрастанія или убыванія функціи со знакомъ ея производной разсмотрѣніемъ того случая, когда производная обращается въ нуль.

Положимъ, что при измѣненіи x отъ значенія $a - \Delta x$ до значенія $a + \Delta x$, гдѣ a есть нѣкоторое постоянное число, а $\Delta x > 0$, функція y сначала возрастаетъ, а потомъ убываетъ, и что смѣна возрастанія на убываніе происходитъ при $x = a$. Въ такомъ случаѣ значеніе функціи y при $x = a$ является *наибольшимъ* изъ ея значеній въ интервалѣ $(a - \Delta x,\ a + \Delta x)$, или функція y при $x = a$ достигаетъ своего *maximum*.

При данныхъ условіяхъ производная y' функціи y имѣетъ положительныя значенія при тѣхъ значеніяхъ x въ разсматриваемомъ интервалѣ, которыя меньше a, и отрицательныя для значеній x, бо́льшихъ a. Слѣд., при $x = a$ происходитъ *перемѣна знака* производной съ *положительнаго* на *отрицательный*. Такъ какъ предполагается, что разсматриваемая функція и ея производная непрерывны, то перемѣна знака производной y' можетъ произойти только при обращеніи ея въ нуль. Слѣд., при $x = a$ производная y' обращается въ нуль.

Если при измѣненіи x въ указанномъ интервалѣ функція сначала убываетъ (до значенія $x = a$) и затѣмъ возрастаетъ (послѣ $x = a$), то при $x = a$ функція достигаетъ своего *наименьшаго* значенія въ этомъ интервалѣ или своего *minimum*. Производная ея имѣетъ отрицательныя значенія при $x < a$ и положительныя при $x > a$. При $x = a$ она обращается въ нуль, перемѣняя при этомъ *отрицательный* знакъ на *положительный*.

Эти заключенія можно пополнить введеніемъ въ разсмотрѣніе производной первой производной данной функціи. Она называется *второй* производной данной функціи и обозначается присоединеніемъ значка $''$ къ названію функціи. Напр., вторая производная функціи y обозначается символомъ y'', вторая производная функціи $f(x)$ — символомъ $f''(x)$. Опредѣленіе второй производной функціи y можно записать слѣдующимъ образомъ:

$$y'' = (y')'.$$

По отношенію къ y' вторая производная y'' играетъ такую же роль, какъ первая производная y' по отношенію къ функціи y. Поэтому знакъ *второй* производной при данномъ значеніи x указываетъ на характеръ измѣненія *первой* производной при возрастаніи x отъ даннаго значенія (§ 212).

Въ случаѣ *maximum* функціи y при $x = a$ ея производная при $x < a$ положительна, при $x = a$ обращается въ нуль, а при $x > a$—отрицательна, т.-е. при возрастаніи x отъ $a - \Delta x$ до $a + \Delta x$ она убываетъ; слѣд., вторая производная y'' функціи y *отрицательна* при всѣхъ значеніяхъ x, заключенныхъ въ разсматриваемомъ интервалѣ, и, въ частности, при $x = a$.

Въ случаѣ *minimum* функціи y при $x = a$ ея прозводная при $x < a$ отрицательна, при $x = a$ равна нулю, а при $x > a$ положительна, т.-е. при возрастаніи x отъ $a - \Delta x$ до $a + \Delta x$ она возрастаетъ; слѣд., вторая производная y'' функціи y *положительна* при всѣхъ значеніяхъ x, заключенныхъ въ разсмариваемомъ интервалѣ, и, въ частности, при $x = a$.

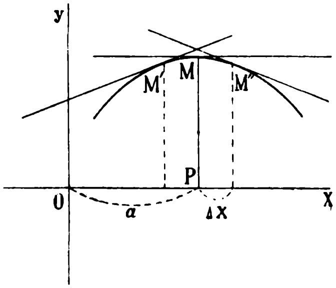
Указанныя заключенія можно расположить въ слѣдующихъ таблицахъ, изъ которыхъ первая относится къ случаю *maximum* функціи, а вторая—къ случаю *minimum*.

	$a-\Delta x \leqslant x < a$	$x=a$	$a < x \leqslant a+\Delta x$
y	**возрастаетъ**	maximum	**убываетъ**
y'	$+$	0	$-$
y''		$-$	

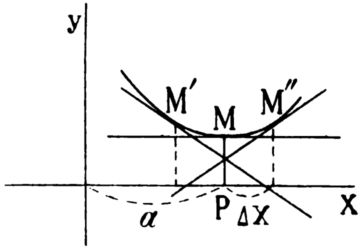
	$a-\Delta x \leqslant x < a$	$x=a$	$a < x \leqslant a+\Delta x$
y	**убываетъ**	minimum	**возрастаетъ**
y'	$-$	0	$+$
y''		$+$	

Если при $x=a$ и первая и вторая производныя функціи y обращаются въ нуль, то вопросъ о томъ, имѣетъ ли при $x=a$ функція y *maximum* или *minimum* можно рѣшить изслѣдованіемъ знаковъ первой производной для $x=a-\Delta x$ и $x=a+\Delta x$. Если эти знаки противоположны, то имѣется или *maximum*, или *minimum* (см. выше); если же знаки одинаковы, то при $x=a$ функція y не имѣетъ ни *maximum* ни *minimum*.

Чертежи 30, 31 и 32 представляютъ геометрическія иллюстраціи заключеній, сдѣланныхъ при изслѣдованіи вопроса о *maximum* и *minimum* функціи. Черт. 30 представляетъ тотъ случай, когда функція y при $x=a$ имѣетъ *maximum*; кривая $y=f(x)$ для $x=a$ имѣетъ ординату PM, большую сосѣднихъ слѣва и справа. Касательная къ кривой въ точкѣ M параллельна оси x, т.-е. $y'=0$, касательная въ точкѣ M' съ абсциссой $a-\Delta x$ составляетъ острый уголъ съ осью x, т.-е. $y'>0$, а касательная въ точкѣ M'' съ абсциссой $a+\Delta x$ составляетъ съ осью x тупой уголъ, т.-е. $y'<0$ (§ 207).

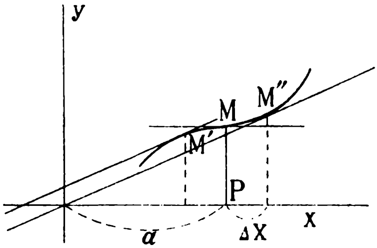


Черт. 30.



Черт. 31.

Чертежъ 31 соотвѣтствуетъ случаю *minimum* функціи при $x=a$; кривая $y=f(x)$, для $x=a$ имѣетъ ординату PM, меньшую сосѣднихъ слѣва и справа. Касательная къ кривой въ точкѣ M параллельна оси x, т.-е. $y'=0$, касательная въ точкѣ M' съ абсциссой $a-\Delta x$ образуетъ съ осью x тупой уголъ, т.-е. $y'<0$, а касательная въ точкѣ M'' съ абсциссой $a+\Delta x$ составляетъ острый уголъ, т.-е. $y'>0$.



Черт. 32.

Чертежъ 32 соотвѣтствуетъ тому случаю, когда функція y при $x=a$ не имѣетъ ни *maximum*, ни *minimum*, хотя ея производная y' обращается въ нуль при $x=a$. Кривая $y=f(x)$ при $x=a$ имѣетъ ординату PM, которая больше сосѣднихъ слѣва и меньше сосѣднихъ справа. Касательная къ кривой въ точкѣ M параллельна оси x, т.-е. $y'=0$; касательныя въ точкѣ M' съ абсциссой $a-\Delta x$ и въ точкѣ M'' съ абсциссой $a+\Delta x$ составляютъ съ осью x острые углы, т.-е. въ томъ и другомъ случаѣ $y'>0$.

Точка M называется въ этомъ случаѣ точкой *перегиба* кривой.

§ 214. Примѣры на изслѣдованіе измѣненія раціональныхъ функцій.

1. *Изслѣдовать измѣненіе функціи*

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

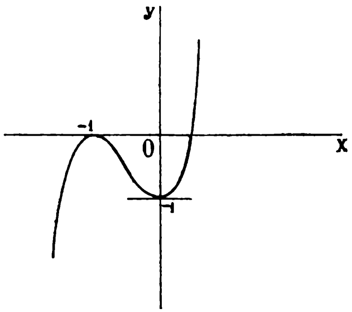
при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Составляемъ первую и вторую производныя данной функціи:

$$y' = 6x^2 + 6x, \quad y'' = 12x + 6.$$

Представивъ y' въ видѣ произведенія $6x[x - (-1)]$ легко видѣть, что $y' > 0$ для $x < -1$, $y' = 0$ для $x = -1$, $y' < 0$ для $-1 < x < 0$, $y' = 0$ для $x = 0$ и $y' > 0$ для $x > 0$.

При $x = -1$ вторая производная y'' имѣетъ значеніе -6, а при $x = 0$ она имѣетъ значеніе $+6$.



Черт. 33.

Переходя къ данной функціи, мы дѣлаемъ слѣдующія заключенія (§§ 212 и 213): при возрастаніи x отъ $-\infty$ до -1 функція y возрастаетъ, при $x = -1$ она достигаетъ *maximum*, равнаго нулю, затѣмъ при измѣненіи x отъ -1 до 0 она убываетъ, при $x = 0$ достигаетъ *minimum*, равнаго -1, и, наконецъ, при возрастаніи x отъ -1 до $+\infty$ она безгранично возрастаетъ.

На чертежѣ 33 изображенъ графикъ функціи.

2. *Изслѣдовать измѣненіе функціи*

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}$$

при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Составимъ первую и вторую производныя функціи:

$$y' = 2 \cdot \frac{(1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2};$$

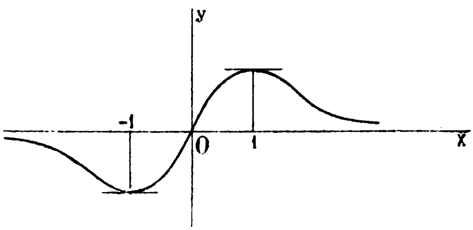
$$y'' = 2 \cdot \frac{(1 + x^2)^2(1 - x^2)' - (1 - x^2)(1 + 2x^2 + x^4)'}{(1 + x^2)^4} =$$

$$= 2 . \frac{-(1 + x^2)^2 . 2x - (1 - x^2)(4x + 4x^3)}{(1 + x^2)^4} =$$

$$= -2\frac{(1 + x^2)[2x(1 + x^2) + 4x(1 - x^2)]}{(1 + x^2)^4} = \frac{-4(3x - x^3)}{(1 + x^2)^3}.$$

Первая производная обращается въ нуль для $x = -1$ и для $x = +1$. Для $x = -1$ вторая производная имѣетъ положительное значеніе, а для $x = +1$ — отрицательное значеніе. Слѣд. (§ 212) данная функція имѣетъ *minimum* при $x = -1$ и *maximum* при $x = +1$. Для $x < -1$ первая производная отрицательна, для $-1 < x < +1$ она положительна и для $x > 1$ она снова отрицательна. Слѣд., при возрастаніи x отъ $-\infty$ до -1 функція убываетъ, при $x = -1$ она достигаетъ наименьшаго значенія, равнаго -1, при $-1 < x < 1$ она возрастаетъ, при $x = 1$ достигаетъ наибольшаго значенія, равнаго $+1$, и для $x > 1$ убываетъ.

Замѣтивъ, что при $x = 0$ функція обращается въ нуль, а при безграничномъ возрастаніи абсолютнаго значенія x стремится къ нулю *), сохраняя положительныя значенія при $x > 0$ и отрицательныя при $x < 0$, легко построить графикъ данной функціи. Онъ изображенъ на чертежѣ 34.



Черт. 34.

Ось x пересѣкаетъ кривую въ началѣ координатъ и служитъ ея асимптотой.

Упражненія. *Изслѣдовать измѣненія и построить графики слѣдующихъ функцій:*

1. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$; 2. $y = x - \frac{1}{3}x^3$;
3. $y = 1 - x + x^2 - x^3$; 4. $y = x^4 - 5x^2 + 4$;
5. $y = (x^2 + x + 1)/x^2$.

---

*) $\lim\limits_{x=\infty} \frac{2x}{1 + x^2} = \lim\limits_{x=\infty} \frac{2/x}{1 + 1/x^2} = 0.$

ГЛАВА XIV.

Непрерывныя дроби.

§ 215. **Понятіе о непрерывной дроби.** *Непрерывной дробью* называется выраженіе вида

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{\ddots}{\ddots+\cfrac{b_n}{a_n+\ldots}}}}}$$

гдѣ подъ буквами a и b съ индексами разумѣются числа, на которыя налагается лишь то условіе, чтобы указанныя въ выраженіи дѣйствія можно было выполнить.

Въ элементарной алгебрѣ разсматриваются простѣйшія непрерывныя дроби, соотвѣтствующія тому случаю, когда въ написанномъ выше выраженіи всѣ b равны 1, а всѣ a суть цѣлыя положительныя числа, при чемъ a_0 можетъ быть равно нулю.

Непрерывную дробь мы будемъ обозначать слѣдующимъ символомъ, болѣе удобнымъ для письма, чѣмъ предыдущій:

$$a_0+\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{a_n+}\cdots$$

Числа a_0, $1/a_1$, $1/a_2, \ldots$ называются *звеньями* непрерывной дроби. Если число звеньевъ *конечно*, то и дробь называется *конечной;* дробь съ *безконечнымъ* числомъ звеньевъ называется *безконечной.*

§ 216. **Значеніе конечной непрерывной дроби.** *Всякая конечная непрерывная дробь есть раціональное число.* Въ этомъ легко убѣдиться, выполнивъ дѣйствія, указанныя въ выраженіи непрерывной дроби.

Напр., $1+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{2}=1+\frac{1}{2+}\ \frac{2}{7}=1+\frac{7}{16}=\frac{23}{17}$.

§ 217. **Обращеніе раціональнаго числа въ непрерывную дробь.** *Всякое раціональное число можно представить въ видѣ конечной непрерывной дроби.*

Пусть a/b есть несократимая дробь, т.-е. a и b суть цѣлыя взаимно простыя числа. Надъ числами a и b выполнимъ рядъ тѣхъ дѣйствій, которыя производятся при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя способомъ послѣдовательнаго дѣленія. Обозначая послѣдовательныя частныя черезъ a_0, a_1, a_2, ..., а послѣдовательныые остатки черезъ b_0, b_1, b_2, ..., получимъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$\begin{aligned}
&a=b\cdot a_0+b_0\\
&b=b_0\cdot a_1+b_1\\
&b_0=b_1a_2+b_2\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&b_{n-3}=b_{n-2}a_{n-1}+b_{n-1}\\
&b_{n-2}=b_{n-1}a_n+b_n.
\end{aligned}$$

Такъ какъ, по предположенію, общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b есть 1, то, предполагая $b_n=0$, нужно положить $b_{n-1}=1$.

Изъ написанныхъ равенствъ легко получить слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a}{b}=a_0+\frac{b_0}{b}=a_0+1\Big/\frac{b}{b_0},\\
&\frac{b}{b_0}=a_1+\frac{b_1}{b_0}=a_1+1\Big/\frac{b_0}{b_1},\\
&\frac{b_0}{b_1}=a_2+\frac{b_2}{b_1}=a_2+1\Big/\frac{b_1}{b_2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{b_{n-3}}{b_{n-2}}=a_{n-1}+\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}=a_{n-1}+1\Big/\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}},\\
&\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}=a_n.
\end{aligned}\right\}\dots\ (\alpha)$$

Подставляя въ выраженіе a/b вмѣсто дроби b/b_0 ея выраженіе изъ второго равенства, затѣмъ, замѣняя въ полученномъ выраженіи дробь b_0/b_1 ея значеніемъ изъ третьяго равенства и т. д., мы приходимъ къ выраженію раціональнаго числа a/b черезъ конечную непрерывную дробь:

$$a/b = a_0 + \frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+} \cdots \frac{1}{a_{n-1}+}\ \frac{1}{a_n}.$$

Примѣръ. Обратить въ непрерывную дробь число 217/73.

Такъ какъ

$$217 = 73 \cdot 2 + 71;\ 73 = 71 \cdot 1 + 2;\ 71 = 2 \cdot 35 + 1;\ 2 = 1 \cdot 2 + 0,$$

$$\text{то } 217/73 = 2 + \frac{1}{1+}\ \frac{1}{35+}\ \frac{1}{2}.$$

§ 218. **Обращеніе ирраціональнаго числа въ непрерывную дробь.** Разсматривая таблицу (α) предыдущаго §, мы видимъ, что каждое ея равенство *выдѣляетъ цѣлое число* соотвѣтственно изъ дробей a/b, b/b_0, $b_0/b_1, \ldots$ Это выдѣленіе цѣлой части числа и приводитъ къ выраженію даннаго числа черезъ непрерывную дробь.

Если мы имѣемъ положительное ирраціональное число x, то изъ него можно выдѣлить цѣлую часть a_0 и представить его въ видѣ $a_0 + 1/x_1$, такъ что

$$x = a_0 + 1/x_1,$$

при чемъ a_0 есть положительное цѣлое число или нуль, а x_1 новое ирраціональное число, бóльшее 1.

Выдѣляя цѣлую часть изъ числа x_1, найдемъ, что

$$x_1 = a_1 + 1/x_2,$$

гдѣ a_2 есть цѣлое положительное число, а x_2—ирраціональное число, бóльшее 1.

Подобнымъ же образомъ мы приходимъ къ равенствамъ:

$$x_2 = a_2 + 1/x_3,\ x_3 = a_3 + 1/x_4, \ldots,$$

въ которыхъ a_2, $a_3, \ldots$ суть цѣлыя положительныя числа, а x_3, $x_4, \ldots$ суть ирраціональныя числа, большія 1. Число этихъ равенствъ безконечно.

Изъ предыдущихъ равенствъ слѣдуетъ, что

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \; \frac{1}{a_2 +} \; \frac{1}{a_3 +} \cdots,$$

т.-е. положительное ирраціональное число представляется въ видѣ безконечной непрерывной дроби.

Примѣръ. *Обратить число $(\sqrt{5}-1)/2$ въ непрерывную дробь.*

Такъ какъ $2 < \sqrt{5} < 3$, то $(\sqrt{5}-1)/2 < 1$; слѣд.,

$$(\sqrt{5}-1)/2 = 0 + \frac{1}{2/(\sqrt{5}-1)} = 1 \Big/ \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Такъ какъ

$$1 < \frac{\sqrt{5}+1}{2} < 2,$$

то цѣлая часть числа $(\sqrt{5}+1)/2$ равна 1. Выдѣляя ее, получимъ:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{2/(\sqrt{5}-1)} = 1 + 1 \Big/ \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Въ знаменателѣ послѣдней дроби опять стоитъ число $(\sqrt{5}+1)/2$. Поэтому при продолженіи процесса мы всегда будемъ получать 1 въ качествѣ цѣлой части знаменателей. Слѣд.,

$$(\sqrt{5}-1)/2 = 1 + \frac{1}{1+} \; \frac{1}{1+} \cdots$$

§ 219. **Подходящія дроби. Составленіе ихъ.** Пусть дана непрерывная дробь:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \; \frac{1}{a_2 +} \; \frac{1}{a_3 +} \cdots \frac{1}{a_{n-1} +} \; \frac{1}{a_n +}. \quad . \; . \; . \; (\beta)$$

Обрывая ее на первомъ, второмъ, . . . , n-омъ звенѣ и вычисляя полученныя такимъ образомъ конечныя непрерывныя дроби, мы приходимъ къ ряду раціональныхъ дробей, которыя называются *подходящими* дробями данной непрерывной дроби (β).

Подходящая дробь, которую мы получаемъ, обрывая дробь (β) на n-омъ звенѣ, называется n-ою подходящею дробью или подходящею дробью n-аго порядка.

Вычисляя для непрерывной дроби (β) первую, вторую и третью подходящія дроби и обозначая ихъ соотвѣтственно черезъ p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3, находимъ:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0}{1}; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}; \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1},$$

при чемъ

$$\begin{aligned} p_1 &= a_0, \ p_2 = a_0 a_1 + 1, \ p_3 = a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0, \\ q_1 &= 1, \ q_2 = a_1, \qquad\quad q_3 = a_1 a_2 + 1. \end{aligned}$$

Разсматривая числа p_1, p_2 и p_3 и числа q_1, q_2 и q_3, легко видѣть, что между первыми и между вторыми существуютъ слѣдующія соотношенія:

$$p_3 = p_2 a_2 + p_1, \ q_3 = q_2 a_2 + q_1 \qquad \ldots \ (\gamma)$$

Формулы (γ) устанавливаютъ связь между числителями и между знаменателями трехъ первыхъ подходящихъ дробей непрерывной дроби (β).

Присоединимъ къ числамъ p_1, p_2 и p_3 рядъ чиселъ $p_4, p_5, \ldots, p_n, \ldots$, изъ которыхъ каждое составлено изъ двухъ предыдущихъ такъ, какъ p_3 составлено изъ p_1 и p_2, т.-е. составимъ числа по закону, выраженному формулой:

$$p_n = p_{n-1} a_{n-1} + p_{n-2}, \ (n = 3, \ 4, \ldots)$$

гдѣ a_{n-1} есть знаменатель n-аго звена дроби (β).

Точно также къ числамъ q_1, q_2, q_3 присоединимъ рядъ чиселъ q_4, $q_5, \ldots$, составленныхъ по закону, выраженному формулой:

$$q_n = q_{n-1} a_{n-1} + q_{n-2}, \ (n = 3, \ 4, \ldots).$$

Мы видѣли, что дробь p_3/q_3 есть третья подходящая дробь непрерывной дроби (β). Докажемъ, что p_n/q_n есть n-ая подходящая дробь той же непрерывной дроби.

Для этого допустимъ, что p_{n-1}/q_{n-1} есть $(n-1)$-ая подходящая дробь непрерывной дроби (β), и докажемъ, что въ такомъ случаѣ p_n/q_n есть n-ая подходящая дробь.

По закону составленія чиселъ p и q имѣемъ равенство:

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_{n-2}a_{n-2}+p_{n-3}}{q_{n-2}a_{n-2}+q_{n-3}}.$$

Чтобы изъ $(n-1)$-ой подходящей дроби получить n-ую подходящую дробь, достаточно замѣнить въ ея выраженіи знаменатель a_{n-2} $(n-1)$-аго звена суммою $a_{n-2}+1/a_{n-1}$. Дѣлая это во второй части послѣдняго равенства и производя въ результатѣ подстановки упрощенія, находимъ:

$$\frac{p_{n-2}(a_{n-2}+1/a_{n-1})+p_{n-3}}{q_{n-2}(a_{n-2}+1/a_{n-1})+q_{n-3}}=\frac{(p_{n-2}a_{n-2}+p_{n-3})a_{n-1}+p_{n-2}}{(q_{n-2}a_{n-2}+q_{n-3})a_{n-1}+q_{n-2}}\ldots \quad (\delta)$$

Но по закону образованія чиселъ p и q имѣемъ:

$$p_{n-2}a_{n-2}+p_{n-3}=p_{n-1};\ p_{n-1}a_{n-1}+p_{n-2}=p_n;$$
$$q_{n-2}a_{n-2}+q_{n-3}=q_{n-1};\ q_{n-1}a_{n-1}+q_{n-2}=q_n.$$

Поэтому вторая часть равенства (δ) приводится къ дроби p_n/q_n, что и требовалось доказать.

Но мы видѣли, что p_3/q_3 есть третья подходящая дробь непрерывной дроби (β); слѣд., p_4/q_4 есть ея 4-ая подходящая дробь, p_5/q_5—5-ая подходящая дробь и т. д.

Изъ этого слѣдуетъ, что формулы

$$\left.\begin{aligned} p_n&=p_{n-1}a_{n-1}+p_{n-2},\\ q_n&=q_{n-1}a_{n-1}+q_{n-2},\end{aligned}\right\} \quad (96)$$

гдѣ $n\geqslant 3$ и $p_1=a_0$, $q_1=1$, $p_2=a_0a_1+1$, $q_2=a_2$, выражаютъ общій законъ, по которому составляются числители и знаменатели подходящихъ дробей непрерывной дроби (β).

§ 220. **Свойство чиселъ p_n и q_n.** Переходя къ изученію свойствъ подходящихъ дробей, укажемъ сначала одно свойство чиселъ p и q, составленныхъ по закону, выраженному формулами (96). Это свойство заключается въ томъ, что

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

Дѣйствительно, по формуламъ (96) имѣемъ:

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (p_{n-1} a_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - (q_{n-1} a_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1} =$$
$$= p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} = -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1});$$

это равенство показываетъ, что для чиселъ, составленныхъ по формуламъ (96), разность $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$ при замѣнѣ n черезъ $n-1$ измѣняетъ только свой знакъ или, другими словами, пріобрѣтаетъ множитель -1. Поэтому

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (-1)(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = \\ &= (-1)^2 (p_{n-2} q_{n-3} - p_{n-3} q_{n-2}) = \\ &= (-1)^3 (p_{n-3} q_{n-4} - p_{n-4} q_{n-3}) = \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &= (-1)^{n-2} (p_2 q_1 - p_1 q_2) = (-1)^n. \end{aligned}$$

§ 221. **Свойства подходящихъ дробей.** 1) *Подходящая дробь p_n/q_n несократима.* Это свойство есть прямое слѣдствіе свойства чиселъ p_n и q_n, выраженнаго формулой (97). Если бы числа p_n и q_n имѣли общій дѣлитель, то на него должна была бы дѣлиться и разность $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$, что невозможно, такъ какъ эта разность равна ± 1.

2) *Разность двухъ смежныхъ подходящихъ дробей p_n/q_n и p_{n-1}/q_{n-1} равна $(-1)^n/q_{n-1} q_n$.*

Дѣйствительно, при помощи формулы (97), находимъ:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}.$$

3) *Подходящія дроби p_1/q_1, p_3/q_3, p_5/q_5, ... нечетнаго порядка представляютъ рядъ возрастающихъ чиселъ, а дроби p_2/q_2, p_4/q_4, p_6/q_6, ... четнаго порядка — рядъ убывающихъ чиселъ.*

Чтобы обнаружить это свойство подходящихъ дробей, составимъ разность $p_n/q_n - p_{n-2}/q_{n-2}$ дробей p_n/q_n и p_{n-2}/q_{n-2}, которыя, смотря по значенію n, представляютъ либо двѣ смежныя дроби нечетнаго порядка, либо двѣ послѣдовательныя дроби четнаго порядка. Пользуясь формулами (96) и (97), находимъ:

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{p_nq_{n-2}-q_np_{n-2}}{q_nq_{n-2}}=$$
$$=\frac{(p_{n-1}a_{n-1}+p_{n-2})q_{n-2}-(q_{n-1}a_{n-1}+q_{n-2})p_{n-2}}{q_nq_{n-2}}=$$
$$=\frac{a_{n-1}(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})}{q_nq_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}a_{n-1}}{q_nq_{n-2}}.$$

Такъ какъ a_{n-1}, q_n и q_{n-2} суть числа положительныя, то знакъ разности $p_n/q_n-p_{n-2}/q_{n-2}$ зависитъ отъ знака $(-1)^{n-1}$.

Если n есть нечетное число, то $(-1)^{n-1}=+1$ и, слѣд., $p_n/q_n>p_{n-2}/q_{n-2}$; если же n есть четное число, то $(-1)^{n-1}=-1$ и, слѣд., $p_n/q_n<p_{n-2}/q_{n-2}$ (§ 163). Итакъ,

$$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_3}{q_3}<\frac{p_5}{q_5}<\cdots;\ \frac{p_2}{q_2}>\frac{p_4}{q_4}>\frac{p_6}{q_6}>\cdots$$

§ 222. **Сравненіе непрерывной дроби съ ея подходящими дробями.** *Значеніе непрерывной дроби заключается между ея двумя смежными подходящими дробями.*

Пусть дана непрерывная дробь

$$x=a_0+\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{a_n+}\ \frac{1}{a_{n+1}+}\ \frac{1}{a_{n+2}+}\cdots$$

Удерживая прежнія обозначенія, напишемъ ея $(n+1)$-ую подходящую дробь:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_na_n+p_{n-1}}{q_na_n+q_{n-1}}.$$

Если во второй части этого равенства вмѣсто a_n подставить $x_n=a_n+\frac{1}{a_{n+1}+}\ \frac{1}{a_{n+2}+}\cdots$, то получится данная непрерывная дробь x, такъ что

$$x=\frac{p_nx_n+p_{n-1}}{q_nx_n+q_{n-1}}.$$

Опредѣляя отсюда x_n, находимъ:

$$x_n = \frac{q_{n-1}x - p_{n-1}}{p_n - q_n x} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \; \frac{x - p_{n-1}/q_{n-1}}{p_n/q_n - x} \quad . \; . \; . \; . \quad (\varepsilon)$$

Такъ какъ $x_n > 0$, $q_{n-1} > 0$, $q_n > 0$, то

$$\frac{x - p_{n-1}/q_{n-1}}{p_n/q_n - x} > 0.$$

Это неравенство требуетъ, чтобы числитель и знаменатель лѣвой части имѣли одинаковый знакъ. Слѣд., имѣютъ мѣсто либо неравенства

$$x - p_{n-1}/q_{n-1} > 0 \text{ и } p_n/q_n - x > 0,$$

либо неравенства

$$x - p_{n-1}/q_{n-1} < 0 \text{ и } p_n/q_n - x < 0.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$\text{или } p_{n-1}/q_{n-1} < x < p_n/q_n, \text{ или } p_{n-1}/q_{n-1} > x > p_n/q_n.$$

По свойству 2) подходящихъ дробей (§ 221) первая цѣпь неравенствъ соотвѣтствуетъ *четнымъ* значеніямъ n, а вторая—*нечетнымъ* значеніямъ n.

Сдѣланное сравненіе значенія непрерывной дроби съ ея подходящими дробями можно резюмировать слѣдующимъ образомъ: подходящія дроби *нечетнаго* порядка *меньше* непрерывной дроби, а подходящія дроби *четнаго* порядка *больше* ея.

§ 223. **Разность между непрерывной дробью и ея подходящими.** 1) *Разность между непрерывной дробью и ея $(n+1)$-ой подходящей дробью* **меньше** *по абсолютному значенію разности между непрерывной дробью и ея n-ой подходящей дробью.*

Изъ равенства (ε) предыдущаго § имѣемъ:

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} x_n = \frac{x - p_{n-1}/q_{n-1}}{p_n/q_n - x}.$$

Такъ какъ $q_n > q_{n-1}$ (см. форм. 96) и $x_n > 1$, то первая часть равенства больше 1. Слѣд., и вторая часть его должна быть больше 1, а это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда

$$|x - p_n/q_n| < |x - p_{n-1}/q_{n-1}|.$$

Это неравенство представляетъ собою алгебраическое выраженіе разсматриваемой теоремы.

2) *Абсолютное значеніе разности между непрерывной дробью и ея подходящей дробью меньше единицы, дѣленной на квадратъ знаменателя подходящей дроби.*

Такъ какъ (§ 221, свойство 2)

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^{n+1}}{q_nq_{n+1}},$$

и непрерывная дробь x заключается между p_{n+1}/q_{n+1} и p_n/q_n (§ 222), то

$$|x-p_n/q_n|<1/q_nq_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\zeta)$$

Но изъ способа составленія чиселъ q (форм. 96) слѣдуетъ, что $q_{n+1}>q_n$. Отсюда заключаемъ, что $q_nq_{n+1}>q_n^2$ и $1/q_nq_{n+1}<1/q_n^2$.

Поэтому, если существуетъ неравенство (ζ), то *á fortiori* имѣетъ мѣсто неравенство

$$|x-p_n/q_n|<1/q_n^2,$$

доказывающее справедливость теоремы.

§ 224. **Подходящія дроби, какъ приближенныя значенія непрерывной дроби.** Изъ свойствъ подходящихъ дробей по отношенію къ непрерывной дроби (§§ 222, 223) слѣдуетъ, что подходящія дроби представляютъ *два ряда приближенныхъ значеній непрерывной дроби:* подходящія дроби *нечетнаго* порядка даютъ рядъ приближеній съ *недостаткомъ*, а подходящія дроби *четнаго* порядка—рядъ приближеній съ *избыткомъ*.

Степень точности этихъ приближеній возрастаетъ вмѣстѣ съ порядкомъ подходящихъ дробей и можетъ быть оцѣнена (§ 223).

Разсмотримъ еще одно свойство подходящихъ дробей, которое повышаетъ ихъ цѣнность въ качествѣ приближеній непрерывной дроби.

Если дробь a/b ближе подходитъ къ непрерывной дроби x, чѣмъ ея подходящая p_n/q_n, то $a>p_n$ и $b>q_n$, т.-е. не существуетъ дроби, ближе подходящей къ непрерывной дроби x, чѣмъ p_n/q_n, и болѣе простой по формѣ, чѣмъ послѣдняя.

Для вывода этого свойства подходящихъ дробей ограничимся разсмотрѣніемъ того случая, когда n есть *четное* число *).

Въ этомъ случаѣ имѣемъ (§ 222):

$$p_{n-1}/q_{n-1} < x < p_n/q_n.$$

Такъ какъ, по предположенію, дробь a/b ближе подходитъ къ x, чѣмъ p_n/q_n, то

$$p_{n-1}/q_{n-1} < a/b < p_n/q_n \quad \ldots\ldots \quad (\gamma_1)$$

Отсюда находимъ, что

$$a/b - p_{n-1}/q_{n-1} < p_n/q_n - p_{n-1}/q_{n-1},$$

или (§ 221)

$$\frac{aq_{n-1} - bp_{n-1}}{bq_{n-1}} < \frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

Умноживъ обѣ части неравенства на $bq_{n-1}q_n$, получимъ:

$$(aq_{n-1} - bp_{n-1})q_n < b.$$

Такъ какъ, по предположенію, разность $a/b - p_{n-1}/q_{n-1}$ положительна, то числитель ея $aq_{n-1} - bp_{n-1}$ есть цѣлое положительное число. Поэтому изъ послѣдняго неравенства слѣдуетъ, что $b > q_n$.

Итакъ, знаменатель b дроби a/b больше знаменателя q_n дроби p_n/q_n.

Изъ неравенствъ (γ_1) находимъ слѣдующія неравенства для дроби b/a:

$$q_n/p_n < b/a < q_{n-1}/p_{n-1}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$q_{n-1}/p_{n-1} - b/a < q_{n-1}/p_{n-1} - q_n/p_n,$$

или

$$(aq_{n-1} - bp_{n-1})/ap_{n-1} < 1/p_{n-1}p_n.$$

***) Доказательство теоремы въ случаѣ n нечетнаго можетъ служить полезнымъ упражненіемъ.**

Умноживъ обѣ части этого неравенства на $ap_{n-1}p_n$, находимъ, что $(aq_{n-1}-bp_{n-1})p_n<a$. Но $aq_{n-1}-bp_{n-1}$ есть цѣлое положительное число; слѣд., $a>p_n$.

Такимъ образомъ оказывается, что и числитель a дроби a/b больше числителя p_n подходящей дроби p_n/q_n, т.-е. дробь a/b сложнѣе по формѣ, чѣмъ дробь p_n/q_n.

Изъ доказаннаго предложенія слѣдуетъ, что подходящая дробь подходитъ къ непрерывной ближе, чѣмъ всякая дробь, знаменатель которой меньше знаменателя подходящей дроби.

Примѣръ. Извѣстно, что число π (отношеніе окружности къ діаметру) заключается между числами 3,1415926 и 3,1415927.

Обращая эти числа въ непрерывныя дроби, находимъ:

$$3{,}1415926=3+\frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\cdots,$$

$$3{,}1415927=3+\frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\cdots$$

Отсюда заключаемъ, что написанныя звенья непрерывной дроби явятся и при обращеніи числа π въ непрерывную дробь. Вычисляя первыя 4 подходящія дроби, находимъ:

$$p_1/q_1=3;\ p_2/q_2=22/7;\ p_3/q_3=333/106;\ p_4/q_4=355/113.$$

Вторая и четвертая подходящія дроби даютъ извѣстныя приближенныя значенія π, изъ которыхъ первое принадлежитъ Архимеду, а второе Адріану Мецію. То и другое число представляетъ приближенныя значенія π съ избыткомъ, первое отличается отъ π менѣе, чѣмъ на $1/49$, а второе—менѣе, чѣмъ на $1/12769$ (§ 223).

Но степень точности разсматриваемыхъ приближеній обнаруживается яснѣе, если мы обратимъ p_2/q_2 и p_4/q_4 въ десятичныя дроби:

$$p_2/q_2=3{,}142\ldots;\ p_4/q_4=3{,}1415929\ldots$$

§ 225. **Геометрическія иллюстраціи.** Свойства подходящихъ дробей, разсматриваемыхъ, какъ приближенія непрерывной дроби, можно иллюстрировать графически.

Пусть дана непрерывная дробь:

$$\omega = a_0 + \frac{1}{a_1+}\;\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{a_n+}\cdots$$

Для ея подходящихъ дробей сохранимъ прежнія обозначенія. Установимъ слѣдующее соотвѣтствіе между подходящими дробями съ одной стороны и точками плоскости и лучами, выходящими изъ начала координатъ, съ другой: точку съ абсциссой q_n и ординатой p_n, а также лучъ, проведенный изъ начала координатъ въ эту точку, будемъ называть соотвѣтственными подходящей дроби p_n/q_n.

Угловой коэффиціентъ этого луча равенъ p_n/q_n, а уравненіе его таково (§§ 150, 151):

$$y = (p_n/q_n)\cdot x.$$

Такъ какъ (§§ 221, 222).

$$p_1/q_1 < p_3/q_3 < p_5/q_5 < \cdots < \omega,$$
$$p_2/q_2 > p_4/q_4 > p_6/q_6 > \cdots > \omega,$$

то лучи, соотвѣтствующіе послѣдовательнымъ подходящимъ дробямъ нечетнаго порядка, слѣдуютъ другъ за другомъ въ направленіи движенія отъ положительнаго направленія оси x къ положительному направленію оси y (противъ стрѣлки часовъ), а лучи, соотвѣтствующіе послѣдовательнымъ подходящимъ дробямъ четнаго порядка, слѣдуютъ другъ за другомъ въ направленіи движенія отъ положительнаго направленія оси y къ положительному направленію оси x (по стрѣлкѣ часовъ).

Между лучами, соотвѣтствующими подходящимъ дробямъ нечетнаго и подходящимъ дробямъ четнаго порядка лежитъ лучъ, опредѣляемый уравненіемъ:

$$y = \omega x,$$

т.-е. лучъ, соотвѣтствующій непрерывной дроби.

Такимъ образомъ мы получаемъ наглядное изображеніе приближенія подходящихъ дробей къ непрерывной.

Условимся называть *раціональнымъ* тотъ лучъ, котораго *угловой коэффиціентъ есть раціональное число*, и *ирраціональнымъ* — лучъ съ *ирраціональнымъ угловымъ коэффиціентомъ.*

Всѣ лучи, соотвѣтствующіе подходящимъ дробямъ, суть раціональные лучи.

Если ω есть конечная непрерывная дробь, то лучъ, ей соотвѣтствующій, есть также раціональный и совпадаетъ съ лучомъ, соотвѣтствующимъ ея послѣдней подходящей дроби.

Если ω есть безконечная дробь, то лучъ, ей соотвѣтствующій, есть лучъ ирраціональный. На немъ нѣтъ ни одной точки съ обѣими раціональными координатами (кромѣ начала координатъ), или, другими словами, нѣтъ точекъ съ цѣлыми координатами.

Этотъ лучъ можно *опредѣлить* нѣкоторымъ распредѣленіемъ всѣхъ раціональныхъ лучей на два класса и назвать *сѣченіемъ* въ области точекъ, координаты которыхъ выражаются цѣлыми числами (ср. § 44).

Возможенъ и другой способъ геометрически иллюстрировать приближеніе подходящихъ дробей къ непрерывной.

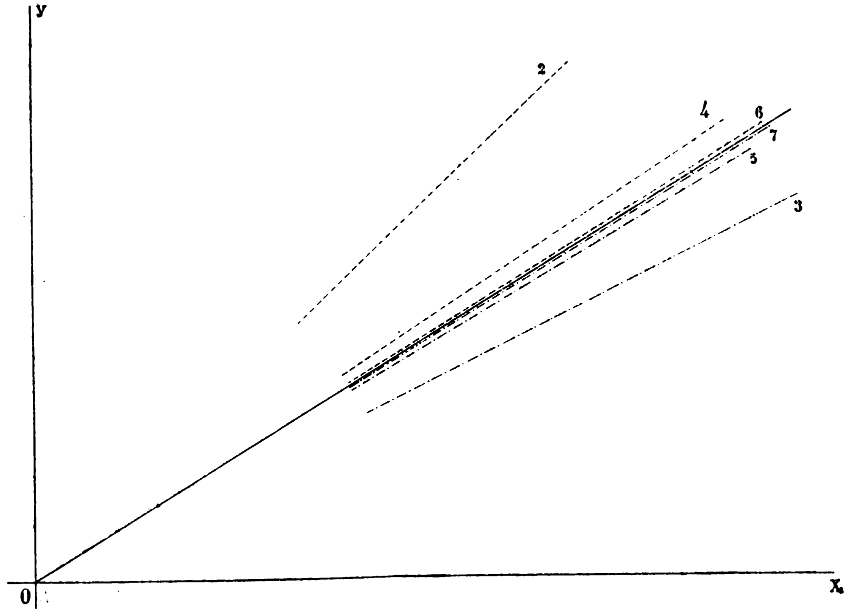
Построивъ точки (q_1, p_1), (q_3, p_3), (q_5, p_5), ... , соотвѣтствующія подходящимъ дробямъ нечетнаго порядка, соединимъ первую точку со второй, вторую съ третьей и т. д. Такимъ образомъ мы получимъ выпуклую ломаную линію.

Соединеніе каждыхъ двухъ послѣдовательныхъ точекъ изъ ряда точекъ (q_2, p_2), (q_4, p_4), (q_6, p_6), ... , соотвѣтствующихъ подходящимъ дробямъ четнаго порядка, дастъ другую ломаную, также выпуклую.

Положеніе вершинъ этихъ ломаныхъ линій относительно луча $y = \omega x$ даетъ наглядное изображеніе приближенія соотвѣтственныхъ подходящихъ дробей къ непрерывной.

На чертежахъ 35 и 36 указанные пріемы для построенія геометрическихъ иллюстрацій приложены къ дроби

$$\omega = 0 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\cdots$$



Черт. 35.

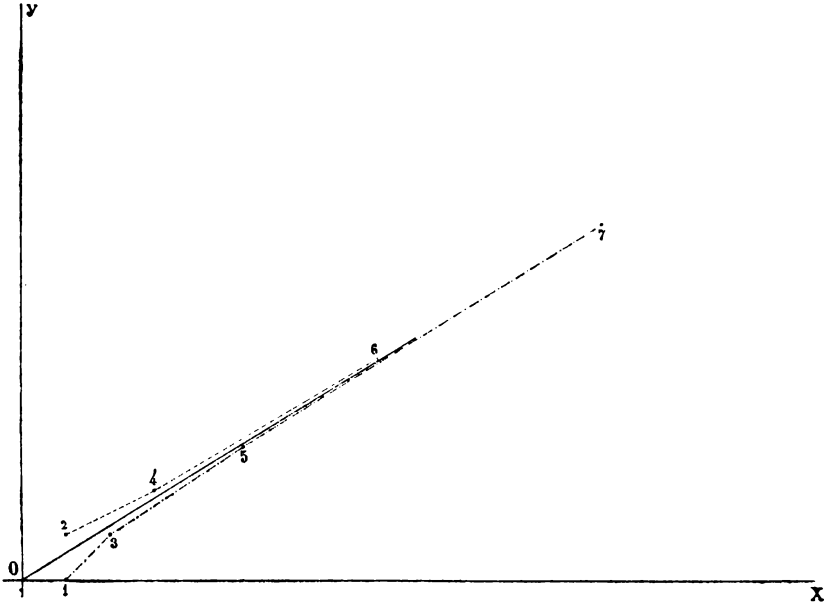
Подходящія дроби ея суть слѣдующія:

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{0}{1};\ \frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{1};\ \frac{p_3}{q_3}=\frac{1}{2};\ \frac{p_4}{q_4}=\frac{2}{3};\ \frac{p_5}{q_5}=\frac{3}{5};\ \frac{p_6}{q_6}=\frac{5}{8};\ \frac{p_7}{q_7}=\frac{8}{13};\ \ldots$$

На чертежѣ 35 лучъ, соотвѣтствующій подходящей дроби, отмѣченъ ея нумеромъ и вычерченъ только отрѣзкомъ, достаточно удаленнымъ отъ начала координатъ. Лучи нечетнаго порядка и лучи четнаго порядка вычерчены различными пунктирами, а лучъ $y=\omega x$ — сплошной линіей.

На чертежѣ 36 точка, соотвѣтствующая подходящей дроби, отмѣчена ея нумеромъ. Ломаныя линіи вычерчены различными пунктирами, а лучъ $y=\omega x$ — сплошной линіей.

§ 226. **Примѣры періодическихъ непрерывныхъ дробей.** Безконечная непрерывная дробь, въ которой, начиная съ нѣкотораго мѣста, знаменатели звеньевъ повторяются въ опредѣленномъ порядкѣ, называется *періодической.*



Черт. 36.

Для указанія цикла повторяющихся знаменателей можно отмѣчать первый и послѣдній изъ нихъ звѣздочками (*), поставленными подъ ними. Напр., періодическая дробь, первое звено которой равно 2, а знаменатели всѣхъ остальныхъ звеньевъ равны 4, можетъ быть обозначена символомъ: $2+\frac{1}{\underset{*}{4}+}\cdots$; періодическая непрерывная дробь, первое звено которой равно 1, второе $\frac{1}{2}$, а знаменатели остальныхъ представляютъ безконечное повтореніе цикла: 3, 1, 5, изображается символомъ:

$$1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{\underset{*}{3}+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{\underset{*}{5}+}\cdots$$

Приведемъ примѣръ полученія періодической дроби и примѣръ вычисленія періодической дроби.

1) *Требуется обратить въ непрерывную дробь число* $2\sqrt{a^2+1}$, *гдѣ a есть натуральное число.*

Такъ какъ $2a < 2\sqrt{a^2+1} < 2a+1$, то
$$2\sqrt{a^2+1} = 2a + 1/z_1,$$

гдѣ $z_1 > 1$. Вычисляя z_1, находимъ:
$$z_1 = 1/2(\sqrt{a^2+1} - a) = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+1} + a).$$

Такъ какъ
$$2a < \sqrt{a^2+1} + a < 2a+1,$$
то $a < z_1 < a + \frac{1}{2}$. Слѣд., $z_1 = a + 1/z_2$, гдѣ $z_2 > 1$.

Вычисляя z_2, находимъ
$$z_2 = 1/(z_1 - a) = 2/(\sqrt{a^2+1} - a) = 2(\sqrt{a^2+1} + a).$$

Отсюда заключаемъ, что
$$4a < z_2 < 4a + 1;$$
слѣд.,
$$z_2 = 4a + 1/z_3, \text{ гдѣ } z_3 > 1.$$

Вычисляя z_3, находимъ
$$z_3 = 1/(z_2 - 4a) = 1/2(\sqrt{a^2+1} - a) = z_1.$$

Если $z_3 = z_1$, то дальнѣйшія вычисленія будутъ повтореніями предыдущихъ, и мы получимъ слѣдующую періодическую непрерывную дробь:
$$2\sqrt{a^2+1} = 2a + \frac{1}{\overset{*}{a}+}\ \frac{1}{\overset{*}{4a}+} \cdots$$

2) *Требуется найти значеніе періодической непрерывной дроби*
$$\frac{1}{\overset{*}{2}+}\ \frac{1}{\overset{*}{1}+} \cdots$$

Обозначивъ данную дробь черезъ x, находимъ уравненіе:

$$x = \frac{1}{2+} \frac{1}{1+x}.$$

или

$$x = \frac{1+x}{3+2x}$$

или, наконецъ,

$$2x^2 + 2x - 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Рѣшая это уравненіе получимъ

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Данная непрерывная дробь есть положительное число; поэтому она равна положительному корню уравненія (9), т.-е. равна $(\sqrt{3}-1)/2$.

Приведенные примѣры наводятъ на мысль, что между ирраціональными выраженіями вида $A+\sqrt{B}$, гдѣ $B>0$, и непрерывными періодическими дробями существуетъ связь. Подробная теорія непрерывныхъ періодическихъ дробей устанавливаетъ тотъ фактъ, что выраженіе вида $A+\sqrt{B}$, гдѣ $B>0$ разлагается въ непрерывную періодическую дробь, и что непрерывная періодическая дробь служитъ корнемъ квадратнаго уравненія, т.-е. приводится къ выраженію указаннаго вида.

Доказательство послѣдняго предложенія затрудненій не представляетъ и можетъ быть рекомендовано въ видѣ интереснаго упражненія.

ГЛАВА XV.

Прогрессіи.

§ 227. **Ариѳметическая прогрессія**. *Ариѳметической* или *разностной* прогрессіей называется рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое представляетъ сумму предыдущаго числа и числа постояннаго, называемаго *разностью* прогрессіи.

Числа, составляющія прогрессію, называются ея *членами*. Обозначая n-ый членъ прогрессіи черезъ a_n и разность ея черезъ d, по опредѣленію имѣемъ:

$$a_2 = a_1 + d;\ a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;\ a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d; \ldots$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (98)$$

Ариѳметическая прогрессія обозначается слѣдующимъ образомъ:

$$\div\, a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n \ldots$$

§ 228. **Свойства членовъ ариѳметической прогрессіи.** 1) *Если въ прогрессіи разсматривается конечное число членовъ, то сумма членовъ, равно удаленныхъ отъ перваго и послѣдняго, есть число постоянное и равна суммѣ перваго и послѣдняго членовъ.*

Дана прогрессія

$$\div\, a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_k \ldots . a_{n-k+1} \ldots\ a_{n-2} . a_{n-1} . a_n,\ .\ .\ .\ \quad (\alpha)$$

разность которой равна d. Члены a_k и a_{n-k+1} суть соотвѣтственно k-ый съ начала и k-ый съ конца. Нужно доказать, что

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Замѣтивъ, что рядъ чиселъ

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots ,\ a_{n-k+1}; \ldots ,\ a_k; \ldots ,\ a_3,\ a_2,\ a_1$$

представляетъ прогрессію съ разностью $-d$, и примѣняя формулу (98) для k-ыхъ членовъ первой и второй прогрессій, находимъ, что

$$a_k = a_1 + (k-1)d;\ a_{n-k+1} = a_n - (k-1)d.$$

Почленное сложеніе этихъ равенствъ даетъ:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

2) *Каждый членъ ариѳметической прогрессіи есть среднее ариѳметическое двухъ рядомъ съ нимъ стоящихъ членовъ.*

Если a, b, c суть три послѣдовательные члена ариѳметической прогрессіи, то, по только что указанному свойству, имѣемъ равенство: $2b = a + c$. Отсюда находимъ, что $b = (a+c)/2$, т.-е. b есть среднее ариѳметическое чиселъ a и c.

3) *Сумма n первыхъ членовъ ариѳметической прогрессіи равна полусуммѣ перваго и послѣдняго, умноженной на число членовъ.*

Обозначая черезъ s_n сумму n членовъ прогрессіи (α), имѣемъ:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$s_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Складывая почленно эти равенства, находимъ, что

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + $$
$$+ (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Такъ какъ каждое изъ n слагаемыхъ второй части, по свойству 1, можно замѣнить суммой $a_1 + a_n$, то $2s_n = (a_1 + a_n).n$, откуда

$$s_n = (a_1 + a_n)n/2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

§ 229. **Вставка между двумя числами среднихъ ариѳметическихъ.** Задача, состоящая въ составленіи ариѳметической прогрессіи по ея первому члену a и $(n+2)$-ому члену b, на основаніи свойства 2 (§ 228), формулируется слѣдующимъ образомъ: *вставить n среднихъ ариѳметическихъ между числами a и b.*

Для рѣшенія этой задачи нужно опредѣлить разность d искомой прогрессіи. По формулѣ (98) имѣемъ $b = a + (n+1)d$, откуда находимъ: $d = (b - a)/(n+1)$.

§ 230. **Возрастающая и убывающая прогрессіи.** Изъ опредѣленія прогрессіи слѣдуетъ, что при $d > 0$ послѣдующій членъ прогрессіи болѣе предыдущаго, а при $d < 0$ послѣдующій членъ менѣе предыдущаго. Въ первомъ случаѣ прогрессія называется *возрастающей*, а во второмъ *убывающей*.

Абсолютное значеніе членовъ ариѳметической прогрессіи, какъ возрастающей, такъ и убывающей безгранично возрастаетъ вмѣстѣ съ нумеромъ его мѣста (см. форм. 98). Точно также безгранично возрастаетъ вмѣстѣ съ n и абсолютное значеніе суммы s_n (см. форм. 99).

§ 231. **Гармоническая прогрессія.** Рядъ чиселъ, обратныя значенія которыхъ составляютъ ариѳметическую прогрессію, называется *гармонической* прогрессіей.

Напримѣръ, рядъ чиселъ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ представляетъ гармоническую прогрессію, потому что рядъ обратныхъ чиселъ $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ есть ариѳметическая прогрессія.

Если a, b, и c суть три послѣдовательные члена гармонической прогрессіи, то, по опредѣленію гармонической прогрессіи, имѣемъ соотношеніе:

$$1/b - 1/a = 1/c - 1/b,$$

откуда находимъ:

$$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c} \text{ и } b = \frac{2ac}{a+c}.$$

b называется *среднимъ гармоническимъ чиселъ a и c*.

Вставить n среднихъ гармоническихъ между числами a и b значитъ составить гармоническую прогрессію, первый членъ которой есть a, а $(n+2)$-ой членъ есть b. Рѣшеніе этой задачи приводится къ рѣшенію задачи § 229.

Напр., вставимъ 3 среднихъ гармоническихъ между числами 1/6 и 1/14. Такъ какъ рядъ обратныхъ чиселъ представляетъ ариѳметическую прогрессію, то форм. (98)

$$14 = 6 + 4d,$$

откуда $d=2$. Искомая прогрессія такова: 1/6, 1/8, 1/10, 1/12, 1/14. Нужно замѣтить, что для суммы n членовъ гармонической прогрессіи общей формулы не существуетъ.

§ 232. **Геометрическая прогрессія.** Рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое послѣдующее получается изъ предыдущаго черезъ умноженіе его на постоянное число, называется *геометрической* или *кратной* прогрессіей.

Числа, составляющія геометрическую прогрессію, называются ея *членами*, а постоянное число, на которое нужно умножить членъ прогрессіи, чтобы получить слѣдующій за нимъ членъ, называется *знаменателемъ* прогрессіи.

Обозначая n-ый членъ черезъ a_n и знаменатель прогрессіи черезъ q, по опредѣленію прогрессіи, имѣемъ слѣдующія равенства:

$$a_2 = a_1 q,\ a_3 = a_2 q = a_1 q^2,\ a_4 = a_3 q = a_1 q^3, \ldots\ldots,$$
$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

Геометрическая прогрессія обозначается слѣдующимъ образомъ:

$$\because\!\because a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ldots : a_n : \ldots\ldots$$

§ 233. **Свойства членовъ геометрической прогрессіи.** 1) *Если въ геометрической прогрессіи разсматривается конечное число членовъ, то произведеніе членовъ, равно удаленныхъ отъ перваго и послѣдняго, есть число постоянное и равно произведенію перваго и послѣдняго членовъ.* Пусть дана геометрическая прогрессія:

$$\because\!\because a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_k : \ldots\ldots : a_{n-k+1} : \ldots : a_{n-2} : a_{n-1} : a_n . \ . \ . \quad (\beta)$$

знаменатель которой равенъ q. Члены a_k и a_{n-k+1} суть соотвѣтственно k-ый съ начала и k-ый съ конца. Нужно доказать, что $a_k . a_{n-k+1} = a_1 a_n$.

Замѣтивъ, что рядъ чиселъ

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots,\ a_{n-k+1}, \ldots,\ a_k, \ldots,\ a_3,\ a_2,\ a_1$$

представляетъ геометрическую прогрессію съ знаменателемъ q^{-1}, и примѣняя формулу (100) для k-ыхъ членовъ первой и второй прогрессіи, находимъ, что

$$a_k = a_1 q^{k-1};\ a_{n-k+1} = a_n q^{-(k-1)}.$$

Почленное умноженіе этихъ равенствъ даетъ:

$$a_k . a_{n-k+1} = a_1 a_n.$$

2) *Каждый членъ геометрической прогрессіи есть среднее геометрическое двухъ сосѣднихъ съ нимъ членовъ.*

Если a, b и c суть три послѣдовательныхъ члена геометрической прогрессіи, то, по только что доказанному свойству, имѣемъ равенство: $b^2 = ac$. Отсюда находимъ, что $b = \sqrt{ac}$, т.-е. что b есть среднее геометрическое чиселъ a и c.

3) *Произведеніе n первыхъ членовъ геометрической прогрессіи равно квадратному корню изъ n-й степени произведенія перваго и послѣдняго члена.*

Обозначая черезъ Π_n произведеніе n первыхъ членовъ прогрессіи (β), имѣемъ:

$$\Pi_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n,$$
$$\Pi_n = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 a_1.$$

Перемножая почленно эти равенства, находимъ, что

$$\Pi_n^2 = (a_1 a_n).(a_2 a_{n-1}).(a_3 a_{n-2}) \dots (a_{n-2} a_3).(a_{n-1} a_2).(a_n a_1).$$

Такъ какъ каждый изъ n множителей второй части, по свойству 1, можно замѣнить произведеніемъ $a_1 a_n$, то $\Pi_n^2 = (a_1 a_n)^n$, откуда

$$\Pi_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}.$$

(Сравн. § 228).

4) *Сумма s_n первыхъ n членовъ прогрессіи (β) выражается формулой:*

$$s_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \quad \dots\dots\dots \quad (101)$$

По опредѣленію прогрессіи мы имѣемъ равенство:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}).$$

Съ другой стороны извѣстно (форм. 82), что

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1.$$

Слѣд., $s_n = a_1(q^n - 1)/(q-1)$. Замѣтивъ, что $a_1 q^n = a_n q$, легко привести эту формулу къ виду (101).

§ 234. **Вставка между двумя числами среднихъ геометрическихъ.** Задача, состоящая въ составленіи геометрической прогрессіи по ея первому члену a и $(n+2)$-му члену b, на основаніи свойства 2 (§ 233), формулируется такъ: *вставить n среднихъ геометрическихъ между числами a и b.*

Для рѣшенія этой задачи нужно опредѣлить знаменатель q искомой прогрессіи. По формулѣ (100) имѣемъ: $b = aq^{n+1}$, откуда находимъ: $q = \sqrt[n+1]{b/a}$. (Сравн. § 229).

§ 235. **Сравненіе среднихъ ариѳметическаго, гармоническаго и геометрическаго двухъ положительныхъ чиселъ.** Пусть a и b два положительныхъ числа. Обозначимъ черезъ A, H и G соотвѣтственно среднее ариѳметическое, среднее гармоническое и среднее геометрическое этихъ чиселъ, такъ что (§§ 228, 231, 233)

$$A = (a+b)/2,\ H = 2ab/(a+b),\ G = \sqrt{ab}.$$

Покажемъ, что

$$AH = G^2 \text{ и } A > G > H.$$

Въ справедливости написаннаго равенства легко убѣдиться умноженіемъ выраженій A и H и сравненіемъ результата съ G.

Для того, чтобы показать справедливость указанныхъ неравенствъ, составимъ разности $A - G$ и $G - H$:

$$A - G = (a+b)/2 - \sqrt{ab} = (a - 2\sqrt{ab} + b)/2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2/2$$
$$G - H = \sqrt{ab} - 2ab/(a+b) = \sqrt{ab}(a - 2\sqrt{ab} + b)/(a+b) =$$
$$= \sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2/(a+b).$$

Такъ какъ, по предположенію, $a > 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ суть вещественныя числа и $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$. Слѣд.,

$$A - G > 0 \text{ и } G - H > 0,$$

откуда слѣдуетъ (§ 163), что

$$A > G > H.$$

§ 236. **Сравненіе среднихъ ариѳметическаго и геометрическаго n положительныхъ чиселъ.** Среднимъ ариѳметическимъ n чиселъ называется ихъ сумма, дѣленная на n, а среднимъ геометрическимъ—n-й корень изъ ихъ произведенія.

Пусть даны n положительныхъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажемъ, что ихъ среднее ариѳметическое $(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$ больше ихъ средняго геометрическаго $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ при условіи, что не всѣ данныя числа равны между собою.

Для этого рѣшимъ сначала задачу: *число $s>0$ разложить на двѣ части такъ, чтобы произведеніе ихъ было наибольшее.*

Если одну изъ искомыхъ частей обозначимъ черезъ x, то другая выразится разностью $s-x$. Нужно найти такое значеніе x, чтобы произведеніе $x(s-x)$ было наибольшее. Задача приводится такимъ образомъ къ нахожденію *maximum* функціи $y=x(s-x)=sx-x^2$.

Для этого беремъ производную y' функціи y и приравниваемъ ее нулю (§ 213): $y'=s-2x=0$. Отсюда находимъ, что $x=s/2$. Такъ какъ вторая производная y'' функціи y равна -2, т.-е. отрицательна при всякомъ значеніи x, то найденное значеніе $x=s/2$ соотвѣтствуетъ *maximum* функціи.

Если множитель $x=s/2$, то и другой множитель $s-x$ также равенъ $s/2$. Слѣд., *произведеніе двухъ положительныхъ множителей, сумма которыхъ постоянна, достигаетъ наибольшаго значенія въ томъ случаѣ, когда оба множителя становятся равными.* Изъ этого слѣдуетъ, что произведеніе n положительныхъ множителей $a_1, a_2, \ldots, a_n$, сумма которыхъ остается постоянной, увеличивается при замѣнѣ каждой пары неравныхъ множителей двумя равными множителями съ той же суммой, и что наибольшаго значенія это произведеніе достигнетъ, когда всѣ n множителей его будутъ равны между собою при сохраненіи ихъ суммы. Но въ такомъ случаѣ каждый изъ нихъ окажется равнымъ $(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$. Слѣд.,

$$\left\{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right\}^n > a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Отсюда получаемъ неравенство

$$(a_1 + a_2 + \cdot\cdot + a_n)/n > \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots . a_n},$$

которое доказываетъ справедливость указанной теоремы.

Въ случаѣ равенства всѣхъ чиселъ a неравенство переходитъ въ равенство.

§ 237. **Возрастающія и убывающія геометрическія прогрессіи.** Сравненіе *абсолютныхъ* значеній послѣдовательныхъ членовъ геометрической прогрессіи приводитъ къ установленію понятія о возрастающей и убывающей прогрессіи.

Если *абсолютное значеніе знаменателя прогрессіи больше 1,* то прогрессія называется *возрастающей* или *восходящей;* если *абсолютное значеніе знаменателя прогрессіи меньше 1,* то прогрессія называется *убывающей* или *нисходящей.*

Въ возрастающей прогрессіи абсолютное значеніе общаго члена a_n неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ n, а въ убывающей — убываетъ при возрастаніи n и стремится къ нулю.

По формулѣ (100) имѣемъ:

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

гдѣ q есть знаменатель прогрессіи. Обозначивъ черезъ Q абсолютное значеніе q, отсюда находимъ:

$$|a_n| = |a_1| . Q^{n-1}.$$

При возрастаніи n во второй части этого равенства измѣняется только второй множитель, т.-е. Q^{n-1}. Покажемъ, что при $Q > 1$ можно найти такое значеніе n, при которомъ Q^{n-1} окажется больше произвольнаго, какъ угодно большого числа A.

Такъ какъ $Q > 1$, то $Q = 1 + d$, гдѣ $d > 0$. Нужно показать, что существуетъ число n, удовлетворяющее неравенству:

$$Q^{n-1} = (1 + d)^{n-1} > A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

По неравенству (π) § 55, мы знаемъ, что

$$(1 + d)^{n-1} > 1 + (n - 1)d.$$

Для того, чтобы удовлетворить неравенству (γ) достаточно выбрать n такъ, чтобы

$$1+(n-1)d>A.$$

Рѣшая это неравенство, находимъ $n>1+(A-1)/d$.

Итакъ, при $Q>1$ цѣлыя и положительныя степени Q представляютъ рядъ чиселъ, неограниченно возрастающихъ вмѣстѣ съ показателемъ.

Отсюда слѣдуетъ, что $|a_n|$ также неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ n.

Для убывающей прогрессіи $Q<1$. Такъ какъ для этого случая $1/Q>1$, то рядъ чиселъ $1/a_1$, $1/a_2$, $1/a_3, \ldots$ представляетъ возрастающую прогрессію; члены ея, по доказанному, безгранично возрастаютъ по абсолютному значенію, т.-е. можно найти такое n, что $|1/a_n|>B$, гдѣ B есть произвольное, какъ угодно большое число. Изъ этого неравенства слѣдуетъ, что $|a_n|<1/B$. Но, увеличивая B, можно сдѣлать дробь $1/B$ меньше произвольнаго, малаго положительнаго числа ε. Слѣд. (§ 123),

$$|a_n|<\varepsilon \text{ и } \lim_{n=\infty} a_n=0.$$

§ 238. **Понятіе о сходящемся и расходящемся рядѣ.** Пусть

$$u_1,\ u_2, \ldots\ldots,\ u_n, \ldots\ldots\ldots \qquad (u)$$

представляетъ безконечный рядъ чиселъ, составленныхъ по опредѣленному закону.

Будемъ составлять суммы s_1, $s_2, \ldots$ послѣдовательныхъ членовъ этого ряда:

$$s_1=u_1;\ s_2=u_1+u_2;\ s_3=u_1+u_2+u_3;\ldots;$$
$$s_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n;\ldots.$$

При неограниченномъ возрастаніи n могутъ представиться слѣдующіе случаи: 1) сумма s_n стремится къ опредѣленному конечному предѣлу; 2) сумма s_n возрастаетъ безгранично по абсолютному значенію; 3) сумма s_n, сохраняя конечное значеніе, не имѣетъ предѣла.

Въ первомъ случаѣ ($\lim\limits_{n=\infty} s_n =$ кон. ч.) рядъ (u) называется *сходящимся;* во второмъ и третьемъ—*расходящимся.*

Ариѳметическая и геометрическая прогрессія представляютъ собою простѣйшіе ряды. Приложимъ къ нимъ указанныя понятія о сходимости и расходимости.

Ариѳметическая прогрессія представляетъ рядъ *расходящійся*, такъ какъ сумма n первыхъ членовъ ея безгранично возрастаетъ по абсолютному значенію при возрастаніи n (§ 230).

Геометрическая возрастающая прогрессія ($|q|>1$) представляетъ *расходящійся* рядъ. Это легко обнаружить вычисленіемъ предѣла суммы s_n при $n=\infty$ (форм. 101; §§ 205, 204, 203, 237):

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim_{n=\infty}\{(a_nq-a_1)/(q-1)\} = \frac{\lim\limits_{n=\infty}(a_nq-a_1)}{q-1} = \infty.$$

Геометрическая убывающая прогрессія ($|q|<1$) есть сходящійся рядъ, потому что

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim_{n=\infty}\{(a_nq-a_1)/(q-1)\} = \lim_{n=\infty}\frac{a_nq}{q-1} - \lim_{n=\infty}\frac{a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Формулу

$$\lim_{n=\infty} s_n = a_1/(1-q),\ |q|<1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

дающую предѣлъ суммы членовъ безконечно убывающей прогрессіи, можно для частныхъ значеній a_1 и q иллюстрировать геометрически.

Пусть, напр., дана прогрессія

$$\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \ldots\ldots$$

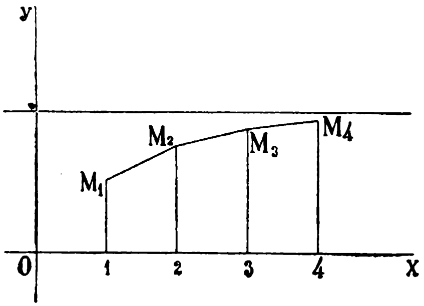
Полагая въ формулѣ (102) $a_1=1$, $q=\frac{1}{2}$, находимъ

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2.$$

Составимъ суммы s_1, s_2, s_3, ...:

$$s_1=1;\quad s_2=\frac{3}{2};\quad s_3=\frac{7}{4};\quad s_4=\frac{15}{8};\ldots$$

Взявъ прямоугольную систему осей координатъ построимъ точки $M_1(1, 1)$, $M_2\left(2, \frac{3}{2}\right)$, $M_3\left(3, \frac{7}{4}\right)$, $M_4\left(4, \frac{15}{8}\right)$,... и соединимъ M_1 съ M_2, M_2 съ M_3, M_3 съ M_4,... Такимъ образомъ мы получимъ ломаную линію, звенья которой неограниченно приближаются къ прямой $y = \lim\limits_{n=\infty} s_n = 2$ при возрастаніи нумера звена (черт. 37).



Черт. 37.

ГЛАВА XVI.

Показательная функція и логариѳмъ.

§ 239. **Логариѳмъ числа. Показательная функція.** *Логариѳмомъ числа y при основаніи a называется показатель степени, въ которую нужно возвести a, чтобы получить y.*

Логариѳмъ обозначается символомъ log или символомъ log_a, если нужно указать основаніе.

Такъ, напр., $log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$; $log_8 2 = 1/3$, потому что $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$; $log_3 \frac{1}{9} = -2$, потому что $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9$.

Если мы обозначимъ логариѳмъ числа y при основаніи a черезъ x, то указанную въ опредѣленіи зависимость между числами a, x и y можно выразить каждой изъ двухъ слѣдующихъ формулъ:

$$y = a^x, \quad x = log_a y.$$

Эти двѣ формулы выражаютъ одну и ту же функціональную зависимость между перемѣнными x и y. Первая изъ нихъ опредѣляетъ y, какъ функцiю x, а вторая опредѣляетъ x, какъ функцiю y. Функцiя $y = a^x$ называется *показательной* функцiей. Показательная функцiя и логариѳмъ суть функцiи *обратныя* одна другой.

Полная теорiя логариѳмовъ выходитъ изъ рамокъ элементарной алгебры, въ которой логариѳмы разсматриваются только въ качествѣ средства для упрощенiя вычисленiй. Поэтому для ознакомленiя съ теорiей логариѳмовъ съ точки зрѣнiя элементарной алгебры достаточно имѣть въ виду тѣ случаи, которые представляются въ практикѣ вычисленiй. На практикѣ же приходится имѣть дѣло съ логариѳмами *положительныхъ* чиселъ при основанiи, *большемъ единицы*.

Поэтому при изученiи показательной функцiи мы будемъ полагать $a > 1$, а при изученiи логариѳма $a > 1$ и $y > 0$

§ 240. **Свойства функцiи a^x при рацiональныхъ значенiяхъ x.** Смыслъ символа a^x извѣстенъ для рацiональныхъ значенiй x. Если $x = m$, гдѣ m есть натуральное число, то (§ 39) $a^x = a \cdot a \cdots a$ (m множителей). Если $x = p/q$, гдѣ p и q суть натуральныя числа, то (§ 62) $a^x = \sqrt[q]{a^p}$. Если $x = -n$, гдѣ n есть цѣлое или дробное положительное число, то (§ 40 и 62) $a^x = 1/a^n$. Если $x = 0$, то (§ 40) $a^x = 1$.

Но перемѣнное x, измѣняясь, можетъ получать ирращональныя значенiя, для которыхъ смыслъ символа a^x не былъ выясненъ. Чтобы пополнить этотъ пробѣлъ, разсмотримъ свойства показательной функцiи a^x, относящiяся къ тому случаю, когда x есть число рацiональное.

Теорема 1. *Если $a > 1$, то при неограниченномъ возрастанiи цѣлаго и положительнаго числа m функцiя a^m неограниченно возрастаетъ.*

Пусть m и k два натуральныхъ числа. По свойствамъ степеней съ цѣлыми и положительными показателями при $a > 1$ имѣемъ неравенства (§ 39):

$$a^k > 1, \quad a^{m+k} > a^m.$$

Послѣднее неравенство указываетъ на возрастанiе a^m при возрастанiи показателя.

Доказательство того, что это возрастаніе неограниченно, было приведено въ § 237 при разсмотрѣніи возрастающей прогрессіи. Заключеніе теоремы можно выразить формулой:

$$\lim_{m=\infty} a^m = \infty, \quad a > 1, \quad m \text{ — натуральное число.}$$

Теорема 2. *Если* $a > 1$ *и* n *есть цѣлое положительное число, то* $\sqrt[n]{a}$ *больше 1, уменьшается съ возрастаніемъ* n *и стремится къ 1 при неограниченномъ возрастаніи* n.

Если бы $\sqrt[n]{a} \leqslant 1$, то (§ 39) $a \leqslant 1$, что противорѣчитъ условію; слѣд., $\sqrt[n]{a} > 1$.

Если бы при k цѣломъ и положительномъ существовало неравенство $\sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n+k]{a}$, то возведеніе обѣихъ частей его въ степень $n(n+k)$ привело бы къ неравенству: $a^{n+k} \leqslant a^n$, которое противорѣчитъ теоремѣ 1. Слѣд., $\sqrt[n+k]{a} < \sqrt[n]{a}$.

Докажемъ, наконецъ, что $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ при $n = \infty$.

Для этого достаточно показать возможность найти настолько большое число n, что разность $\sqrt[n]{a} - 1$ окажется меньше произвольнаго положительнаго числа ε (§ 122).

Замѣтимъ, что неравенство

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (\alpha)$$

удовлетворяется, если удовлетворяются неравенства

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon, \quad a < (1 + \varepsilon)^n.$$

Но послѣднее изъ нихъ удовлетворяется (§ 237) при $n > (a-1)/\varepsilon$. Слѣд., можно найти такое значеніе для n, что неравенство (α) удовлетворится. Отсюда вытекаетъ заключеніе, что

$$\lim_{n-\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Теорема 3. *Если $a>1$ а m и n два натуральныхъ числа, то $a^{m/n}$ больше 1 и неограниченно возрастаетъ при неограниченномъ возрастанiи показателя.*

Такъ какъ $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$ и $a^m>1$, то $a^{m/n}>1$.

Если k есть рацiональное положительное число, то $a^k>1$ и $a^{m/n+k}=a^{m/n}\cdot a^k>a^{m/n}$.

Положимъ, что число m/n заключается между двумя послѣдовательными натуральными числами p и $p+1$, такъ что

$$p\leqslant m/n<p+1.$$

По доказанному имѣемъ неравенства:

$$a^p\leqslant a^{m/n}<a^{p+1}.$$

При неограниченномъ возрастанiи числа m/n цѣлое число p также неограниченно возрастаетъ. Но, по теоремѣ 1, $\lim\limits_{p=\infty} a^p=\infty$. Поэтому послѣднiя неравенства приводятъ къ заключенiю, что

$$\lim_{m/n=\infty} a^{m/n}=\infty.$$

Теорема 4. *Если дробь m/n (m и n — натуральныя числа) уменьшается и стремится къ нулю, то $a^{m/n}$ уменьшается и стремится къ 1 ($a>1$).*

При уменьшенiи дроби m/n обратная дробь n/m увеличивается и стремится къ безконечности, когда первая стремится къ нулю.

Если p и $p+1$ два послѣдовательныхъ натуральныхъ числа, между которыми лежитъ дробь n/m, то

$$p\leqslant n/m<p+1 \quad \text{и} \quad 1/p\geqslant m/n>1/(p+1).$$

Отсюда, по теоремѣ 3, заключаемъ, что

$$a^{1/p}\geqslant a^{m/n}>a^{1/(p+1)}.$$

Но, по теоремѣ 2, $\lim a^{1/p}=\lim a^{1/(p+1)}=1$ при $p=\infty$. Слѣд.,

$$\lim_{m/n=\infty} a^{m/n}=1.$$

Приведенныя теоремы вполнѣ выясняютъ характеръ измѣненія функціи a^x, когда x, измѣняясь, получаетъ только раціональныя значенія.

§ 241. **Значеніе символа a^x при x ирраціональномъ.** Изъ опредѣленія положительнаго ирраціональнаго числа посредствомъ сѣченія въ области положительныхъ раціональныхъ чиселъ или распредѣленія всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса (§ 44) и изъ свойствъ чиселъ, принадлежащихъ къ первому и ко второму классамъ, вытекаетъ возможность выдѣлить изъ чиселъ перваго класса послѣдовательность возрастающихъ чиселъ, а изъ чиселъ второго класса послѣдовательность убывающихъ чиселъ, обладающихъ слѣдующими свойствами: 1) каждое число первой послѣдовательности меньше каждаго числа второй послѣдовательности; 2) числа первой послѣдовательности возрастаютъ или, по крайней мѣрѣ, не убываютъ, а числа второй послѣдовательности убываютъ или, по крайней мѣрѣ, не возрастаютъ; 3) въ первой послѣдовательности нѣтъ числа *наибольшаго*, а во второй нѣтъ числа *наименьшаго;* 4) можно найти два такія числа, изъ которыхъ одно принадлежитъ къ первой послѣдовательности, а другое ко второй, что абсолютное значеніе разности между ними будетъ меньше произвольнаго напередъ заданнаго числа.

Числа первой послѣдовательности служатъ для ирраціональнаго числа приближенными значеніями съ недостаткомъ, а числа второй послѣдовательности — приближенными значеніями съ избыткомъ. Ирраціональное число есть общій предѣлъ этихъ двухъ послѣдовательностей.

Напр., $\sqrt{2}$ есть предѣлъ послѣдовательностей:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ \ldots\ldots\ldots$$

Число π (отношеніе окружности къ діаметру) есть предѣлъ послѣдовательностей:

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots\ldots\ldots$$
$$4;\ 3{,}2;\ 3{,}15;\ 3{,}142;\ 3{,}1416;\ \ldots\ldots\ldots$$

Пусть ирраціональное число x служитъ предѣломъ послѣдовательности возрастающихъ раціональныхъ положительныхъ чиселъ

$$x_1',\ x_2',\ \ldots\ldots,\ x_n',\ \ldots\ldots,$$

и предѣломъ послѣдовательности убывающихъ раціональныхъ положительныхъ чиселъ

$$x_1'',\ x_2''.\ \ldots\ldots,\ x_n'',$$

По указаннымъ выше свойствамъ чиселъ этихъ послѣдовательностей каждое число x' первой послѣдовательности меньше каждаго числа x'' второй послѣдовательности и можно найти такія два числа x_n' и x_n'', что разность $x_n'' - x_n'$ будетъ меньше произвольнаго положительнаго числа ε.

Составимъ двѣ новыя послѣдовательности чиселъ:

$$a^{x_2'},\ a^{x_2'},\ \ldots,\ a^{x_n'},\ \ldots\ldots\ldots;\quad \ldots \qquad (\beta)$$

$$a^{x_1''},\ a^{x_2''},\ \ldots,\ a^{x_n''},\ \ldots\ldots\ldots \qquad (\gamma)$$

Пользуясь теоремами предыдущаго §, легко видѣть, что при $a > 1$ числа этихъ послѣдовательностей обладаютъ слѣдующими свойствами: 1) каждое число $a^{x'}$ первой послѣдовательности меньше каждаго числа $a^{x''}$ второй послѣдовательности; 2) числа первой послѣдовательности возрастаютъ, а числа второй послѣдовательности убываютъ; 3) въ первой послѣдовательности нѣтъ числа наибольшаго, а во второй —нѣтъ числа наименьшаго; 4) можно найти такія два числа $a^{x_n'}$ и $a^{x_n''}$, которыхъ разность $a^{x_n''} - a^{x_n'}$ окажется меньше произвольнаго положительнаго числа ε.

Остановимся на доказательствѣ только послѣдняго свойства, такъ какъ доказательство первыхъ трехъ не представляетъ затрудненій.

Разность $a^{x''_n} - a^{x'_n}$ можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$a^{x''_n} - a^{x'_n} = a^{x'_n}\left[a^{x''_n - x'_n} - 1\right].$$

По теоремѣ 4 предыдущаго § второй множитель правой части этого равенства можно сдѣлать меньше произвольнаго положительнаго числа надлежащимъ уменьшеніемъ показателя $x''_n - x'_n$, а это послѣднее возможно по свойствамъ чиселъ x' и x''.

Поэтому можно найти такія числа x'_n и x''_n, что

$$a^{x''_n - x'_n} - 1 < \varepsilon / a^{x'_n},$$

гдѣ ε есть произвольное положительное число. Но изъ этого неравенства слѣдуетъ, что $a^{x''_n} - a^{x'_n} < \varepsilon$.

Каждая изъ послѣдовательностей (β) и (γ) опредѣляетъ ирраціональное число. Дѣйствительно, имѣя послѣдовательность (β), мы можемъ всѣ раціональныя числа распредѣлить на два класса, отнеся раціональное число r къ первому классу, если въ послѣдовательности (β) можно указать число, *не меньше* r, и ко второму классу въ противномъ случаѣ.

Если дана послѣдовательность (γ), раціональное число r будетъ причислено ко второму классу въ томъ случаѣ, когда въ этой послѣдовательности можно указать число, *не большее* r, и къ первому классу, когда этого сдѣлать нельзя.

Сдѣланное при помощи одной изъ этихъ послѣдовательностей распредѣленіе раціональныхъ чиселъ на два класса обладаетъ всѣми свойствами, указанными въ § 44. Поэтому каждая изъ послѣдовательностей (β) и (γ) опредѣляетъ ирраціональное число, которое служитъ ея предѣломъ. Покажемъ, что эти предѣлы одинаковы. Допуская противное, положимъ, что

$$\lim a^{x'_n} = \beta, \quad \lim a^{x''_n} = \gamma,$$

при чемъ $\beta<\gamma$. При этихъ предположеніяхъ, мы имѣли бы слѣдующія неравенства:

$$a^{x'_n}<\beta<\gamma<a^{x''_n};\quad a^{x''_n}-a^{x'_n}>\gamma-\beta.$$

Послѣднее неравенство противорѣчитъ только что доказанному свойству разности $a^{x''_n}-a^{x'_n}$, выражаемому неравенствомъ: $a^{x''_n}-a^{x'_n}<\varepsilon$.

Слѣд., $\beta=\gamma$, т.-е. послѣдовательности (β) и (γ) стремятся къ одному предѣлу.

Этотъ предѣлъ принимается за значеніе показательной функціи a^x при x ирраціональномъ.

Значенія a^x для отрицательныхъ значеній показателя опредѣляются условіемъ: $a^{-x}=1/a^x$ $(x>0)$ (§ 40).

Выяснивъ значеніе символа a^x для ирраціональныхъ значеній показателя, можно при помощи теоремъ § 240 перечислить свойства показательной функціи и вывести изъ нихъ заключеніе о характерѣ измѣненія функціи a^x при непрерывномъ измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

§ 242. **Свойства функціи a^x при $a>1$.**

1) *$a^x>0$ при вещественныхъ значеніяхъ x.*

2) *$a^x>1$ для $x>0$ и $a^x<1$ для $x<0$.*

3) *Функція a^x возрастаетъ вмѣстѣ съ x.*

4) $\lim\limits_{x=\infty} a^x=\infty$.

5) $\lim\limits_{x=-\infty} a^x=0$.

(пп. 3–5: § 240, теор. 1, 3; § 241).

6) $\lim\limits_{x=0} a^x=1$. (§ 240, теор. 2, 4; § 241).

7) *Функція a^x непрерывна при всѣхъ значеніяхъ x.*

Если x есть нѣкоторое опредѣленное значеніе перемѣннаго x, а Δx есть его приращеніе, то приращеніе функціи выразится разностью: $a^{x+\Delta x}-a^x$. Такъ какъ

$$a^{x+\Delta x}-a^x=a^x[a^{\Delta x}-1],$$

а по 6-ому свойству $\lim a^{\Delta x}=1$ при $\Delta x=0$, то можно взять Δx настолько малымъ по абсолютному значенію, что

$$a^{\Delta x}-1<\varepsilon/a^x.$$

гдѣ ε есть произвольное, какъ угодно малое положительное число. При такомъ выборѣ Δx изъ предыдущаго равенства получимъ неравенство

$$a^{x+\Delta x} - a^x < \varepsilon,$$

которое показываетъ непрерывность функціи a^x при произвольномъ значеніи x (§ 125).

8) *Уравненіе* $a^x = b$ $(b > 0)$ *имѣетъ* **только одинъ** *вещественный корень.*

По свойству 5 можно указать такое значеніе x_1 перемѣннаго x, что $a^{x_1} < b$, а по свойствамъ 3 и 4 можно найти такое число $x_2 > x_1$, что $a^{x_2} > b$.

При непрерывномъ измѣненіи x отъ x_1 до x_2 функція a^x непрерывно возрастаетъ отъ a^{x_1} до a^{x_2}, (свойства 3 и 7), т.-е. принимаетъ *всѣ* значенія отъ $a^{x_1} < b$ до $a^{x_2} > b$. Слѣд. для *одного* изъ значеній x, лежащихъ между x_1 и x_2, она становится равной b.

Всѣ перечисленныя свойства можно резюмировать въ слѣдующемъ заключеніи: *при непрерывномъ измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ функція a^x $(a > 1)$ непрерывно возрастаетъ отъ 0 до ∞.*

Обозначивъ a^x черезъ y и принявъ x и y за прямоугольныя координаты точки на плоскости, можно построить графикъ функціи a^x, т.-е. кривую, опредѣляемую уравненіемъ:

$$y = a^x.$$

На чертежѣ 38 изображены двѣ кривыя, изъ которыхъ пунктирная опредѣляется уравненіемъ: $y = 10^x$, а сплошная — уравненіемъ: $y = e^x$, гдѣ $e = 2{,}7182818284\ldots$ (см. § 246).

§ 243. **Логариѳмъ.** По доказанному въ предыдущемъ § (свойство 8) уравненіе $x = a^y$, въ которомъ y разсматривается, какъ неизвѣстное, имѣетъ при $x > 0$ одинъ вещественный корень. Этотъ корень называется логариѳмомъ (ср. § 239) числа x

при основаніи a и обозначается символомъ $log_a\ x$, такъ что имѣетъ мѣсто тождество:

$$x = a^{log_a x}.$$

Зная свойства показательной функціи, можно указать свойства логариѳма x, какъ функціи перемѣннаго x.

Приведемъ эти свойства, предполагая, что $a > 1$ и $x > 0$.

1) $log_a\ a = 1$.

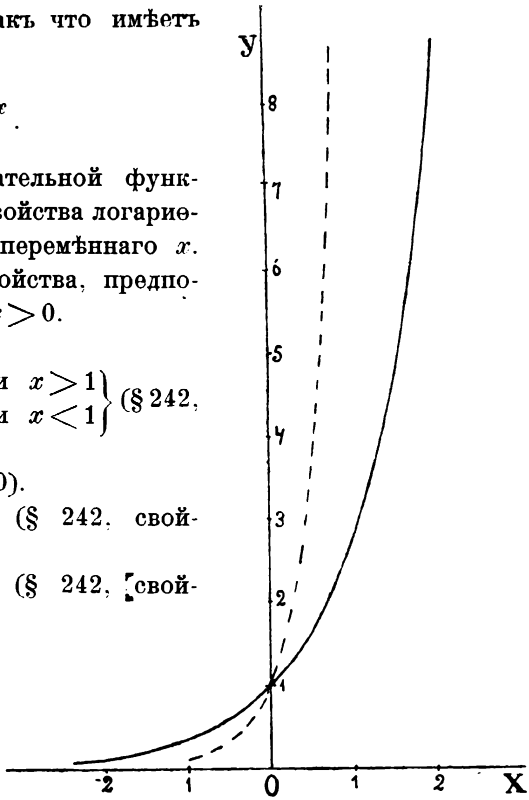
2) $\left.\begin{array}{l} log_a\ x > 0, \text{ если } x > 1 \\ log_a\ x < 0, \text{ если } x < 1 \end{array}\right\}$ (§ 242, свойство 2).

3) $log_a\ 1 = 0$ (§ 40).

4) $log_a\ 0 = -\infty$ (§ 242, свойство 5).

5) $log_a\ \infty = +\infty$ (§ 242, свойство 4).

6) *Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ множителей.*



Черт. 38.

Пусть x_1 и x_2 два положительныхъ числа. Такъ какъ

$$x_1 = a^{log_a x_1} \text{ и } x_2 = a^{log_a x_2},$$

то

$$x_1\, x_2 = a^{log_a x_1 + log_a x_2},$$

т.-е.

$$log_a (x_1\, x_2) = log_a\, x_1 + log_a\, x_2.$$

Теорему легко распространить на случай произведенія произвольнаго числа положительныхъ множителей.

7) *Логариѳмъ частнаго двухъ положительныхъ чиселъ равенъ разности логариѳмовъ дѣлимаго и дѣлителя.*

Удерживая прежнія обозначенія, имѣемъ:

$$x_1/x_2 = a^{log_a x_1}/a^{log_a x_2} = a^{log_a x_1 - log_a x_2}.$$

Отсюда находимъ:

$$log_a (x_1/x_2) = log_a x_1 - log_a x_2.$$

8) *Логариѳмъ степени положительнаго числа равенъ его логариѳму, умноженному на показатель степени.*

Если $x > 0$, то

$$x = a^{log_a x}, \quad x^m = \left(a^{log_a x}\right)^m = a^{m\, log_a x}.$$

Отсюда получаемъ, что

$$log_a (x^m) = m\, log_a x.$$

9) *Логариѳмъ корня изъ положительнаго числа равенъ его логариѳму, дѣленному на показатель корня.*

Если $x > 0$, то

$$x = a^{log_a x}, \quad \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{a^{log_a x}} = a^{(log_a x)/m}.$$

Отсюда

$$log_a \sqrt[m]{x} = (log_a x)/m.$$

10) *$log_a x$ возрастаетъ при возрастаніи x.*

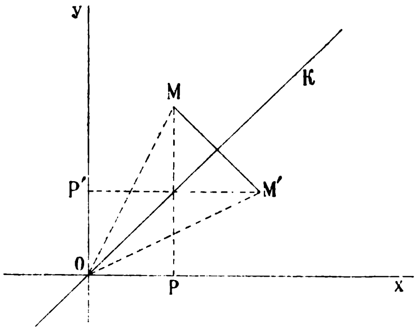
Это слѣдуетъ непосредственно изъ свойствъ 2 и 7.

Графикъ функціи $log_a x$, т.-е. кривую, опредѣляемую уравненіемъ:

$$y = log_a x,$$

легко получить, замѣтивъ, что изъ этого уравненія вытекаетъ уравненіе: $x = a^y$, которое показываетъ, что между x и y существуетъ та же зависимость, которая устанавливается между y и x уравненіемъ $y = a^x$. Кривую, опредѣляемую послѣднимъ уравненіемъ, мы знаемъ, какъ графикъ показательной функціи (§ 242). Покажемъ, что кривая, опредѣляемая уравненіемъ $x = a^y$, или графикъ логариѳма, есть *кривая, симметричная первой относительно прямой, дѣлящей уголъ xOy пополамъ.*

Пусть (черт. 39) точка M (α, β) есть одна изъ точекъ кривой $y = a^x$, такъ что $\beta = a^\alpha$. Проведемъ прямую OK, дѣлящую уголъ xOy пополамъ, и построимъ точку M' (α', β'), симметричную точкѣ M относительно OK. Опустивъ изъ точки M перпендикуляръ MP на ось x, а изъ точки M' перпендикуляръ $M'P'$ на ось y, и соединивъ точку O съ точками M и M', получимъ два равныхъ прямоугольныхъ треугольника OPM и $OP'M'$. Изъ равенства ихъ слѣдуетъ, что



Черт. 39.

$$OP = OP' \text{ и } PM = P'M'.$$

Но OP есть абсцисса точки M, а PM — ея ордината. По условію имѣемъ: $OP = \alpha$, $PM = \beta$. Точно также OP', какъ ордината точки M' равна β', а $P'M'$, какъ ея абсцисса, равна α'. Слѣд., $\alpha = \beta'$, $\beta = \alpha'$. Такъ какъ между α и β существуетъ по предположенію соотношеніе $\beta = a^\alpha$, то между α' и β' существуетъ соотношеніе $\alpha' = a^{\beta'}$, т.-е. точка M' лежитъ на кривой, опредѣляемой уравненіемъ: $x = a^y$ или уравненіемъ $y = log_a x$. Обратное также справедливо, т.-е. если M' есть точка кривой $y = log_a x$, то точка M, симметричная ей относительно прямой OK, лежитъ на кривой $y = a^x$.

Поэтому графикъ функціи a^x и графикъ функціи $log_a x$ представляютъ двѣ кривыя, расположенныя симметрично относительно равнодѣлящей OK координатнаго угла xOy. Вращеніе плоскости координатъ на 180^0 около OK переводитъ одну изъ этихъ кривыхъ въ другую. На чертежѣ 40 пунктирная кривая представляетъ графикъ логариѳма при основаніи 10, а сплошная — графикъ логариѳма при основаніи e (ср. § 242).

§ 244. **Форма логариѳма.** Логариѳмы раціональны только для весьма немногихъ чиселъ, вообще же они представляются ирраціональными числами, вмѣсто которыхъ при вычисленіяхъ берутся ихъ приближенныя значенія, вычисленныя съ опредѣленною степенью точности.

Логариѳмы всѣхъ чиселъ могутъ быть представлены въ видѣ суммы $c+m$, гдѣ c есть цѣлое положительное или отрицательное число или нуль, а m — положительное число, меньшее 1. Докажемъ это.

Пусть $x>1$ и не представляетъ цѣлой степени основанія a. Въ рядѣ

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ldots\ldots$$

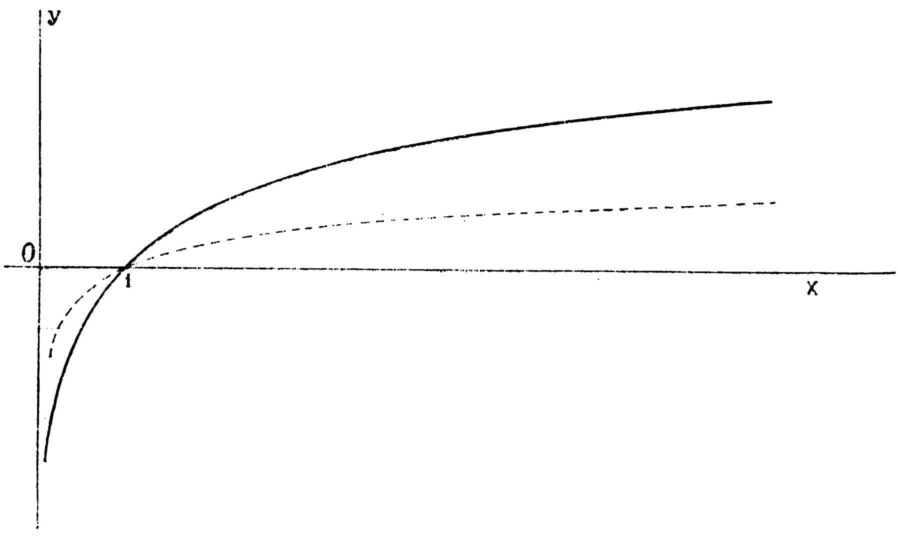
степеней основанія ($a>1$) можно найти двѣ послѣдовательныя степени a^p и a^{p+1}, между которыми лежитъ число x (§ 240, теор. 1), такъ что

$$a^p<x<a^{p+1}.$$

Изъ этихъ неравенствъ слѣдуетъ, что $x=a^p\cdot b$, гдѣ b есть число, заключенное между 1 и a. Для логариѳма x находимъ слѣдующее выраженіе (§ 243):

$$log_a x=p+m,$$

гдѣ $m=log\, b$ и $0<m<1$.



Черт. 49.

Если $x < 1$ и не представляетъ цѣлой степени a, то въ указанномъ выше рядѣ степеней можно найти двѣ послѣдовательныя степени a^{q-1} и a^q, между которыми лежитъ число $1/x > 1$, такъ что

$$a^{q-1} < 1/x < a^q.$$

Изъ этихъ неравенствъ слѣдуетъ, что $1/x = a^q \cdot b'$ и $x = a^{-q} \cdot b$, гдѣ b есть число, заключенное между 1 и a. Логариѳмъ x выражается въ этомъ случаѣ слѣдующимъ образомъ:

$$log x = -q + m,$$

гдѣ $m = log b$ и $0 < m < 1$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что $log x = c + m$ для всякаго положительнаго числа x, при чемъ c есть цѣлое число или нуль, а m есть *положительное* число, заключенное между 0 и 1.

Число c называется *характеристикой* логариѳма, а m его *мантиссой*.

Изъ сказаннаго видно, что для опредѣленія характеристики логариѳма даннаго числа достаточно въ рядѣ

$$\ldots . a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a^1,\ a^2, \ldots .$$

степеней основанія найти двѣ послѣдовательныя степени, между которыми заключается данное число. Показатель низшей изъ нихъ служитъ характеристикой логариѳма даннаго числа. Приведемъ примѣры.

Пусть $a = 3$. Требуется найти характеристики логариѳмовъ чиселъ 24 и 3/17. Составимъ рядъ степеней основанія:

$$\ldots 3^{-3} = 1/27,\ 3^{-2} = 1/9,\ 3^{-1} = 1/3,\ 3^0 = 1,\ 3^1 = 3,$$
$$3^2 = 9,\ 3^3 = 27, \ldots$$

Такъ какъ $3^2 < 24 < 3^3$, то характеристика $log_3 24$ равна 2; такъ какъ $3^{-3} < 3/17 < 3^{-2}$, то характеристика $log_3 (3/17)$ равна -2.

Пусть $a = 10$. Требуется найти характеристики логариѳмовъ чиселъ 3872 и 0,03872.

Такъ какъ $10^3 < 3872 < 10^4$, то характеристика $log_{10}\, 3872$ равна 3; такъ какъ $10^{-2} < 0{,}03872 < 10^{-1}$, то характеристика $log_{10}\, 0{,}03872$ равна — 2.

Мантиссы логариѳмовъ представляютъ не что иное, какъ логариѳмы чиселъ заключенныхъ между 1 и a. Поэтому для того, чтобы знать логариѳмы всѣхъ чиселъ, достаточно знать логариѳмы чиселъ, заключенныхъ между 1 и a.

Современные пріемы вычисленія логариѳмовъ излагаются въ теоріи безконечныхъ рядовъ.

§ 245. **Переходъ отъ одной системы логариѳмовъ къ другой.** Положимъ, что a и b два положительныхъ числа. Покажемъ, что существуетъ весьма простая зависимость между логариѳмами чиселъ при основаніи a и логариѳмами чиселъ при основаніи b.

Пусть x есть положительное число. По опредѣленію логариѳма имѣемъ:

$$x = a^{log_a x}, \quad x = b^{log_b x}.$$

Отсюда получаемъ:

$$a^{log_a x} = b^{log_b x}.$$

Взявъ логариѳмы обѣихъ частей этого равенства при основаніи a, находимъ:

$$log_a x \cdot log_a a = log_b x \cdot log_a b,$$

или

$$log_a x = log_b x \cdot log_a b.$$

Опредѣляя отсюда $log_b x$, получимъ:

$$log_b x = \frac{1}{log_a b} \cdot log_a x.$$

Эта формула показываетъ, что переходъ отъ логариѳмовъ при основаніи a къ логариѳмамъ при основаніи b совершается черезъ умноженіе первыхъ на постоянное число $1/log_a b$.

Число $1/log_a b$ называется *модулемъ преобразованія* системы логариѳмовъ съ основаніемъ a въ систему логариѳмовъ съ основаніемъ b. Модуль преобразованія есть число, обратное логариѳму новаго основанія по старой системѣ.

Напр., для того, чтобы перейти отъ логариѳмовъ при основаніи 10 къ логариѳму при основаніи 100, достаточно первые умножить на $1/log_{10}$ 100 или на $1/2$.

Изъ различныхъ системъ логариѳмовъ замѣчательны двѣ: система логариѳмовъ при ирраціональномъ основаніи

$$e = 2,7182818284\ldots,$$

которые носятъ названіе *натуральныхъ* или *неперовыхъ*, и система логариѳмовъ при основаніи 10, называемыхъ *десятичными* или *бригговыми*.

§ 246. **Понятіе о натуральныхъ логариѳмахъ.** Изобрѣтеніе логариѳмовъ, названіе «*логариѳмъ*» и первыя таблицы логариѳмовъ принадлежатъ шотландцу *Джону Неперу* (John Napier, 1550—1617). Таблицы Непера появились въ 1614 г. Почти одновременно, а именно въ 1620 г., швейцарецъ Бюрги напечаталъ свои таблицы логариѳмовъ, составленныя имъ независимо отъ Непера.

Оба они при составленіи своихъ таблицъ руководствовались одной и той же идеей. Знакомство съ нею и нѣкоторое ея развитіе приводитъ къ понятію объ упомянутыхъ въ предыдущемъ § натуральныхъ логариѳмахъ.

Будемъ разсматривать рядъ чиселъ, доставляемыхъ формулой:

$$x = a^y,$$

въ которой a есть постоянное число, а y получаетъ послѣдовательно рядъ слѣдующихъ значеній:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ y,\ y+1, \qquad \ldots \quad (\delta)$$

Эти числа чуть

$$1,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^y,\ a^{y+1}\ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

Рядъ (δ) представляетъ ариѳметическую прогрессію, а рядъ (ε)—геометрическую. Члены ариѳметической прогрессіи (δ) называются логариѳмами соотвѣтственныхъ членовъ прогрессіи (ε) при основаніи a.

Задача, которую рѣшали Неперъ и Бюрги, заключалась прежде всего въ выборѣ основанія a такъ, чтобы послѣдовательные члены ряда (ε) возможно мало отличались другъ отъ друга. Основываясь на томъ, что степени *единицы* равны *единицѣ*, и Неперъ, и Бюрги полагали, что послѣдовательныя цѣлыя степени числа, мало отличающагося отъ единицы, мало отличаются другъ отъ друга. Поэтому за число a Неперъ взялъ $1-10^{-7}=0{,}9999999$, а Бюрги $1+10^{-4}=1{,}0001$.

Такимъ образомъ Неперъ занимался послѣдовательностью чиселъ: $x=(1-10^{-7})^y$, а Бюрги послѣдовательностью чиселъ $x=(1+10^{-4})^y$, гдѣ $y=0,\ 1,\ 2,\dots$

Опредѣлимъ разность двухъ значеній x, соотвѣтствующихъ въ этихъ послѣдовательностяхъ значеніямъ y и $y+1$ показателя. Обозначая эту разность или приращеніе x черезъ Δx, находимъ:

$$\Delta x=a^{y+1}-a^y=a^y(a-1)=x(a-1).$$

Полагая въ этой формулѣ $a=1-10^{-7}$ и $a=1+10^{-4}$, получимъ:

$$\Delta x=-x\cdot 10^{-7}; \quad \dots\dots\dots \quad (\zeta)$$

$$\Delta x=x\cdot 10^{-4}. \quad \dots\dots\dots \quad (\eta)$$

Для вычисленія членовъ ряда (ε) Неперъ пользовался формулой (ζ), а Бюрги—формулой (η).

Такъ какъ приращеніе Δy перемѣннаго y равно 1, то при помощи предыдущихъ формулъ находимъ слѣдующія значенія отношенія $\Delta y/\Delta x$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=-10^7\cdot\frac{1}{x}\ \textit{(Неперъ)}\\ \frac{\Delta y}{\Delta x}&=10^4\cdot\frac{1}{x}\ \textit{(Бюрги)}.\end{aligned}\right\}\quad\dots\dots\quad(\vartheta)$$

Эти формулы можно соединить въ одну, сдѣлавъ въ той и другой преобразованіе перемѣннаго y.

Положимъ въ первой изъ нихъ $y = -10^7 z$. Для того, чтобы измѣненіе y совершалось, какъ прежде, скачками, равными 1, нужно измѣнять z скачками, равными -10^{-7}, такъ что $\Delta y = -10^7 \Delta z$. Подставляя это значеніе Δy въ первую изъ формулъ (ϑ) и сокращая результатъ на -10^7 получимъ:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Къ этой же самой формулѣ приводитъ преобразованіе второй формулы (ϑ) посредствомъ подстановки $y = 10^4 z$. Перемѣнное z измѣняется въ этомъ случаѣ скачками, равными 10^{-4}.

Указанное преобразованіе первой изъ формулъ (ϑ) приводитъ къ замѣнѣ послѣдовательности чиселъ $(1-10^{-7})^y$ послѣдовательностью чиселъ $(1-10^{-7})^{-10^7 z}$, а преобразованіе второй формулы (ϑ) — къ замѣнѣ послѣдовательности чиселъ $(1+10^{-4})^y$ черезъ послѣдовательность чиселъ $(1+10^{-4})^{10^4 z}$, при чемъ въ первомъ случаѣ $\Delta z = -10^{-7}$, а во второмъ $\Delta z = 10^{-4}$.

Разсматривая эти новыя послѣдовательности, легко видѣть, что онѣ представляютъ частные случаи послѣдовательности чиселъ $x = (1+1/n)^{nz}$, гдѣ n есть цѣлое число, а z—перемѣнное, измѣняющееся скачками, равными $1/n$, такъ что $\Delta z = 1/n$ и $\Delta(nz) = 1$. При этомъ $\Delta x = x/n$ (см. форм. ζ и η).

Но числа указанной послѣдовательности можно представить въ видѣ $[(1+1/n)^n]^z$, т.-е. въ видѣ степеней числа $(1+1/n)^n$; въ такомъ случаѣ z является логариѳмомъ числа x при основаніи $a = (1+1/n)^n$.

По идеѣ Непера и Бюрги выборъ основанія логариѳмовъ тѣмъ лучше, чѣмъ гуще рядъ (ε), т.-е. чѣмъ меньше по абсолютному значенію Δx. Такъ какъ $\Delta x = x/n$, то рядъ этотъ становится гуще съ возрастаніемъ абсолютнаго значенія цѣлаго числа n.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ мысли о разсмотрѣніи предѣла, къ которому стремится выраженіе $(1+1/n)^n$ при безграничномъ возрастаніи абсолютнаго значенія n. Этотъ предѣлъ оказывается ирраціональнымъ числомъ, заключеннымъ между числами 2 и 3. Онъ обозначается буквой e и служитъ основаніемъ *натуральныхъ* логариѳмовъ, которые, въ честь Непера, называются также неперовыми.

Число e тѣсно связано съ числомъ π (отношеніе окружности къ діаметру) и играетъ весьма важную роль въ математикѣ. Приближенное значеніе его указано въ предыдущемъ §.

§ 247. **Десятичные логариѳмы.** Современникъ и другъ Непера *Бриггсъ (Henry Briggs*, 1556—1630) замѣтилъ неудобства, представляемыя системой логариѳмовъ съ основаніемъ $1-10^{-7}$, и вмѣстѣ съ Неперомъ напалъ на мысль взять за основаніе число 10. Логариѳмы при основаніи 10 называются *десятичными* или *бригговыми.*

Для вычисленія десятичныхъ логариѳмовъ Бриггсъ примѣнилъ пріемъ, отличный отъ того, которымъ пользовались Неперъ и Бюрги.

Бриггсъ воспользовался тѣмъ свойствомъ чиселъ и ихъ логариѳмовъ, что *логариѳмъ средняго геометрическаго двухъ чиселъ равенъ среднему ариѳметическому ихъ логариѳмовъ.*

Дѣйствительно, если $log\, x_1 = y_1$ и $log\, x_2 = y_2$, то (§ 243)

$$log \sqrt{x_1 x_2} = (log\, x_1 + log\, x_2)/2 = (y_1 + y_2)/2.$$

Отсюда слѣдуетъ, что, зная логариѳмы y_1 и y_2 двухъ чиселъ x_1 и x_2, можно опредѣлить число, логариѳмъ котораго равенъ $(y_1 + y_2)/2$. Для этого потребуется только извлеченіе квадратнаго корня изъ $x_1 x_2$.

Зная, напр., что $log\ 1 = 0$ и $log\ 10 = 1$ при основаніи 10, находимъ

$$0{,}5 = log \sqrt{1\,.\,10} = log\ 3{,}1623$$
$$0{,}25 = log \sqrt{1\,.\,3{,}1623} = log\ 1{,}7783$$
$$0{,}375 = log \sqrt{3{,}1623\,.\,1{,}7783} = log\ 2{,}3714 \text{ и т. д.}$$

Преимущество десятичныхъ логариѳмовъ передъ неперовыми основано на совпаденіи основанія десятичной системы счисленія и основанія системы десятичныхъ логариѳмовъ и заключается въ томъ, что для опредѣленія *характеристики* десятичнаго логариѳма (§ 244) не нужно дѣлать никакихъ вычисленій.

Характеристика десятичнаго логариѳма для чиселъ большихъ 1, равна числу цифръ его цѣлой части, уменьшенному на единицу, а для чиселъ, меньшихъ 1, равна нумеру мѣста, занимаемаго первой значащей цифрой послѣ запятой, взятому со знакомъ *минусъ* (см. § 243).

Напр., характеристика log 13,5 равна 1; характеристика log 0,05783 равна — 2.

При таблицахъ логариѳмовъ обыкновенно помѣщается описаніе ихъ устройства, правила ихъ употребленія и указанія степени точности вычисленій, дѣлаемыхъ при помощи этихъ таблицъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.