С. И. Шохоръ-Троцкій.

УЧЕБНИКЪ

АРИѲМЕТИКИ

ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХЪ СТАТЕЙ.

Изданіе 2-ое, значительно исправленное и заново обработанное.

Цѣна 65 коп.

ИЗДАНІЕ А. А. КАРЦЕВА.

Москва, Мясницкая, Фуркасовскій переулокъ, д. Обидиной.

1892.

Типографія В. Безобразова и К°. (Спб., В. О., 8 л., д. № 45).

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Необходимо ранѣе употребленія книги исправить слѣдующія опечатки:

Стр.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
7	сн.	десяти	девяти
21	св.	стало-бытъ	стало-быть
22	св.	(§ 26)	(§ 27)
24	св.	посьменное	письменное
32	св.	§ 45*.	§ 45.
›	сп.	дѣлителю вытекающемъ	дѣлителю, вытекающемъ
75	св.	произведеніи	произведеніе
79	сп.	послѣднихъ достаточно	послѣднихъ, достаточно
109	св.	Глава VI	Глава VII
127	св.	Глава VII	Глава VIII
136	св.	Глава VIII	Глава IX

Предисловіе ко второму изданію.

Настоящее изданіе «Учебника ариѳметики» отличается отъ предыдущаго многочисленными исправленіями и, можно сказать, вполнѣ заново обработано для среднихъ учебныхъ заведеній, согласно указаніямъ критики, требованіямъ программъ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, а также согласно совѣтамъ нѣкоторыхъ друзей и указаніямъ педагогическаго опыта автора.

Исправленія и измѣненія коснулись столькихъ частей и частностей учебника, что перечисленіе таковыхъ заняло бы слишкомъ много мѣста. Ограничимся только самыми общими указаніями. Многія изъ статей, отнесенныхъ въ первомъ изданіи къ отдѣлу статей дополнительныхъ, нашли мѣсто въ самомъ учебникѣ; нѣкоторыя статьи теоретическаго содержанія исключены, въ виду фактической невозможности проработать эти статьи въ среднемъ учебномъ заведеніи *). Но, кромѣ того, учебникъ также дополненъ одною новою статьею, а именно статьею о теоріи четырехъ дѣйствій, отнесенною въ главу V-ую (§§ 70 — 72) и представляющею собою опытъ элементарнаго освѣщенія современной теоріи четырехъ дѣйствій, по нашему мнѣнію, вполнѣ доступной ученикамъ среднихъ учебныхъ заведеній.

При обработкѣ настоящаго изданія мы пользовались многими данными новѣйшей иностранной учебно-математической литературы, обращая вниманіе также на сочиненія по методикѣ преподаванія математики, въ особенности на взгляды, проведенные въ извѣстномъ сочиненія Рейдта «Anleitung zum mathematischen Unterricht». Статью о приближенныхъ вычисленіяхъ мы обработали заново, поставивъ дѣло на чисто-практическую точку зрѣнія и примкнувъ къ взглядамъ, которые проводилъ Лагранжъ въ своихъ лекціяхъ, читанныхъ въ Нормальной школѣ, напечатанныхъ въ «Журналѣ политехнической школы» («Journal de l'Ecole polytechnique») за 1812 г. и переведенныхъ Нидермюллеромъ на нѣмецкій языкъ подъ заглавіемъ: Lagrange's mathematische Elementarvorlesungen (Lpz. 1880). Благодаря этому, у насъ не изложенъ малопримѣняемый способъ умноженія, котораго изобрѣтеніе приписывается Ухтреду; этому способу не сочувствуютъ, по понятнымъ причинамъ, Лагранжъ, а также

---

*) Нумера параграфовъ, не подлежащихъ обязательному прохожденію въ низшихъ классахъ или могущихъ почему либо представить для учениковъ этихъ классовъ особенно большія трудности, отмѣчены въ учебникѣ звѣздочкою. Такимъ образомъ учащему дана возможность вполнѣ свободнаго отношенія къ вопросу о томъ — проходить ли то или иное теоретическое ученіе въ данный моментъ или не проходить.

одинъ изъ глубокомысленнѣйшихъ современныхъ математиковъ, Р. Грасманъ, въ своемъ превосходномъ сочиненіи по теоретической ариѳметикѣ, подъ заглавіемъ: «Die Zahlenlehre oder Arithmetik» (Stettin 1891), излагающій ученіе о приближенномъ умноженіи и другихъ дѣйствіяхъ съ болѣе простыхъ и естественныхъ точекъ зрѣнія.

Цѣль наша будетъ достигнута, если намъ удалось соединить полноту содержанія съ краткостью и вѣрностью изложенія и если намъ удалось отдѣлить то, что подлежитъ непремѣнному прохожденію въ низшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній, отъ подлежащаго прохожденію въ одномъ изъ высшихъ классовъ.

Считаемъ однакоже необходимымъ, во избѣжаніе возможныхъ недоразумѣній, предупредить о слѣдующемъ: настоящее изданіе «Учебника», какъ и предыдущее, обработано въ духѣ тѣхъ требованій методики преподаванія математики, по которымъ *вполнѣ самостоятельно* учиться по книгамъ малолѣтній ученикъ не въ состояніи, такъ какъ его надо и этому научить. Согласно этому взгляду, преподаваніе ариѳметики отнюдь не слѣдуетъ начинать съ буквальнаго изложенія ученій этого предмета по учебнику, а какъ-разъ наоборотъ: только ранѣе уже пройденное въ классѣ, притомъ методически пройденное, возможно и слѣдуетъ закончить, закруглить и упрочить въ сознаніи учащихся по тому или другому, конечно, не слишкомъ подробному, учебнику.

Осмѣливаемся питать нѣкоторую надежду, что въ настоящемъ изданіи «Учебникъ ариѳметики» пріобрѣтетъ себѣ новыхъ друзей и сторонниковъ въ средѣ тѣхъ преподавателей математики, которымъ не чужды вышенамѣченныя точки зрѣнія современной методики преподаванія низшей математики и которые имѣютъ склонность поработать надъ преподаваніемъ ариѳметики въ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ съ этихъ точекъ зрѣнія. Надѣемся, что и въ учительскихъ семинаріяхъ и институтахъ настоящее изданіе «Учебника ариѳметики» окажется, можетъ быть, также болѣе примѣнимымъ, чѣмъ предыдущее.

С. Шохоръ-Троцкій.

Спб., Басейная, 15.
Май 1892.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Что значитъ *считать*—знаетъ всякій. При счетѣ мы произносимъ слова: одинъ, два, три, четыре, и т. д. Каждое изъ этихъ словъ обозначаетъ какое нибудь одно, вполнѣ опредѣленное, *число*. Счетъ и число.

Точно такъ же всякій знаетъ—что значатъ слова: «половина», «треть», «четверть», «пятая доля», «шестая», и т. д.: каждое изъ нихъ обозначаетъ одну, вполнѣ опредѣленную, *долю* какого нибудь цѣлаго. Равнымъ образомъ всякій знаетъ — что значатъ совокупности словъ: «пять шестыхъ долей», «три седьмыхъ», и т. п. Доля.

Числа, обозначаемыя словами: «одинъ», «два», «три», «четыре», «пять» и т. д., называются *цѣлыми*; числа же, обозначаемыя словами: «половина», «одна треть», «три четверти», «пять восьмыхъ» и т. п., называются *дробными числами* или просто *дробями*; числа: «четыре съ половиною», «полтора», «пять цѣлыхъ и три седьмыхъ», «восемнадцать цѣлыхъ и пять шестыхъ» и т. п. представляютъ собою такъ называемыя *смѣшанныя числа*. Цѣлое, дробное и смѣшанное числа.

2. Мы можемъ, какъ извѣстно, сосчитать, сколько всего предметовъ содержится въ данной совокупности ихъ; можемъ также сосчитать—сколько какихъ-нибудь одинаковыхъ явленій совершилось въ данный промежутокъ времени; въ обоихъ случаяхъ мы получаемъ точное понятіе о томъ—сколько предметовъ или явленій въ данной совокупности ихъ: «три монеты», «пять человѣкъ», «семь стакановъ», «тринадцать карандашей», «сто одинъ пушечный выстрѣлъ», «девяносто ударовъ пульса», «семь остановокъ поѣзда». Такія числа иногда называются *конкретными*. Конкретныя числа.

3. Что̀ такое длина, что̀ такое объемъ предметовъ, продолжительность промежутковъ времени, стоимость предмета, вѣсъ тѣлъ—понимаетъ всякій. Длина, объемъ, вѣсъ, стоимость предмета, а также продолжительность какого-нибудь промежутка времени и многія другія *величины* могутъ быть *измѣряемы*. Длину можно измѣрить только длиною, вѣсъ — только вѣсомъ, и т. д. Одна длина должна быть либо *равна* другой, либо *больше*, либо *меньше* ея. То же вѣрно относительно вѣса двухъ предметовъ, Величина и измѣреніе.

относительно двухъ промежутковъ времени, и т. д. При этомъ длина есть *величина*; длина же даннаго куска матеріи и длина какого нибудь другого предмета суть два *значенія* этой величины, или же (проще) — двѣ *однородныя величины*.

Единица счета и единица мѣры.

Когда мы считаемъ предметы или явленія, то каждый изъ этихъ предметовъ и каждое изъ считаемыхъ явленій принимаемъ за *единицу*. При измѣреніи же какого-либо значенія какой-либо величины, за *единицу мѣры* принимаютъ нѣкоторое опредѣленное, постоянное значеніе той же величины. — Такъ, при измѣреніи длины за единицу принимаютъ сажень или аршинъ, футъ или вершокъ, версту, дюймъ, метръ и т. п., при измѣреніи вѣса — фунтъ, лотъ, пудъ, золотникъ, граммъ, при измѣреніи промежутка времени — часъ, минуту, секунду; и т. д.

Именованное число и отвлеченное.

4. Мы можемъ сосчитать, сколько въ данномъ значеніи какой-либо величины содержится такихъ значеній той же величины, которыя принимаются за единицы при измѣреніи значеній этой величины; въ этомъ случаѣ мы получаемъ точное понятіе о нѣкоторомъ вполнѣ опредѣленномъ значеніи этой величины, которое иногда называется также *именованнымъ числомъ*. Такъ, напр., пять аршинъ, семь фунтовъ, пять минутъ, тринадцать рублей представляютъ собою опредѣленныя значенія нѣкоторыхъ величинъ и называются также именованными числами.

Мы можемъ, наконецъ, такъ считать, чтобы единицы, нами считаемыя, оставались до-поры до-времени неопредѣленными, и въ этомъ случаѣ мы имѣемъ въ виду только понятіе о числѣ; подобныя числа называются *отвлеченными*. Таковы числа: пять, шесть, семь, двадцать, восемьсотъ, триста двадцать четыре.

Точно такъ же дробныя и смѣшанныя числа можно различать *именованныя* и *отвлеченныя*: если единица, которой доли мы беремъ, остается неопредѣленною, то дробное или смѣшанное число называется *отвлеченнымъ*; если же эта единица есть опредѣленная, для значеній какой-либо величины, единица мѣры, то дробное или смѣшанное число называется *именованнымъ*. Такъ, три осьмыхъ, пять шестыхъ, семь цѣлыхъ и три восьмыхъ суть числа отвлеченныя, а три осьмыхъ аршина, пять шестыхъ часа, семь и три восьмыхъ четверика — числа именованныя.

Предметъ ариѳметики.

5. Въ учебникахъ Ариѳметики излагаются правила письменнаго обозначенія чиселъ съ помощью такъ называемыхъ арабскихъ цыфръ и правила дѣйствій надъ числами. Кромѣ того, въ Ариѳметикѣ разсматриваются также нѣкоторыя свойства чиселъ и способы рѣшенія задачъ нѣкоторыхъ родовъ.

Глава I.

О счисленіи устномъ и письменномъ.

§ 1. Для устнаго обозначенія цѣлыхъ чиселъ, меньшихъ одиннадцати, употребляются слова: *одинъ*, *два*, *три*, *четыре*, *пять*, *шесть*, *семь*, *восемь*, *девять и десять;* для устнаго обозначенія чиселъ, бо̀льшихъ десяти, но меньшихъ двадцати, употребляются производныя слова: *одиннадцать*, *двѣнадцать*, *тринадцать*, *четырнадцать*, *пятнадцать*, *шестнадцать*, *семнадцать*, *восемнадцать и девятнадцать;* для устнаго обозначенія чиселъ, бо̀льшихъ девятнадцати, но меньшихъ ста, употребляются производныя слова: *двадцать*, *тридцать*, *сорокъ*, *пятьдесятъ*, *шестьдесятъ*, *семьдесятъ*, *восемьдесятъ*, *девяносто* и извѣстныя сочетанія этихъ словъ съ именами числительными, обозначающими числа, меньшія десяти; наконецъ, для устнаго обозначенія чиселъ, бо̀льшихъ девяноста девяти, но меньшихъ тысячи, употребляются слова: *сто*, *двѣсти*, *триста*, *четыреста*, *пятьсотъ*, *шестьсотъ*, *семьсотъ*, *восемьсотъ*, *девятьсотъ* и извѣстныя сочетанія этихъ словъ со словами, выражающими числа, меньшія ста.

Устное обозначеніе чиселъ.

Число тысячъ, если въ данномъ числѣ есть тысячи, устно обозначается точно такъ же, какъ и число единицъ, меньшее тысячи; говорятъ: одна тысяча, двѣ тысячи и т. д., десять тысячъ, одиннадцать тысячъ и т. д., двадцать тысячъ, двадцать одна тысяча и т. д., сто тысячъ, сто одна тысяча и т. д. до девятисотъ девяноста девяти тысячъ включительно. Точно такъ же обозначается устно и число милліоновъ, если таковые есть въ данномъ числѣ, т. е. говорятъ: одинъ милліонъ, два милліона и т. д. до девятисотъ девяноста девяти милліоновъ включительно *). Равнымъ обра-

*) *Милліономъ* называется одна тысяча тысячъ; тысяча милліоновъ называется *билліономъ* (или же милліардомъ); тысяча билліоновъ — *трилліономъ;* тысяча трилліоновъ—*квадрилліономъ*, а тысяча квадрилліоновъ—*квинтилліономъ*. Но въ этихъ послѣднихъ трехъ названіяхъ нѣтъ особенной надобности, ибо, въ случаяхъ, могущихъ представиться въ жизни и наукѣ, числа рѣдко превышаютъ билліоны.

зомъ и билліоны, трилліоны и т. д. подсчитываются подобно тому, какъ подсчитываются единицы, не составляющія вмѣстѣ одной тысячи.

Десятокъ и сотня. § 2. Для устнаго обозначенія чиселъ, меньшихъ тысячи, можно прибѣгнуть также къ именамъ существительнымъ: «единица», «десятокъ» и «сотня»: *десяткомъ* называется совокупность десяти единицъ, а *сотнею* — совокупность ста единицъ. Очевидно, что

одиннадцать	—	то же,	что	*одинъ*	*десятокъ*	и	*одна единица*,
двѣнадцать	—	»	»	»	»	»	*двѣ единицы*,
тринадцать	—	»	»	»	»	»	*три* »
четырнадцать	—	»	»	»	»	»	*четыре* »
пятнадцать	—	»	»	»	»	»	*пять единицъ*
шестнадцать	—	»	»	»	»	»	*шесть* »
семнадцать	—	»	»	»	»	»	*семь* »
восемнадцать	—	»	»	»	»	»	*восемь* »
девятнадцать	—	»	»	»	»	»	*девять единицъ*.

Далѣе, очевидно, что

двадцать	—	то же,	что	*два десятка*,
тридцать	—	»	»	*три* »
сорокъ	—	»	»	*четыре* »
пятьдесятъ	—	»	»	*пять десятковъ*,
шестьдесятъ	—	»	»	*шесть* »
семьдесятъ	—	»	»	*семь* »
восемьдесятъ	—	»	»	*восемь* »
девяносто	—	»	»	*девять десятковъ*.

Наконецъ, очевидно, что

двѣсти	—	то же,	что	*двѣ сотни*,
триста	—	»	»	*три* »
четыреста	—	»	»	*четыре* »
пятьсотъ	—	»	»	*пять сотенъ*,
шестьсотъ	—	»	»	*шесть* »
семьсотъ	—	»	»	*семь* »
восемьсотъ	—	»	»	*восемь* »
девятьсотъ	—	»	»	*девять сотенъ*.

Такимъ образомъ всякое число, меньшее тысячи, можетъ быть выражено не только съ помощью числительныхъ именъ, но также и съ помощью именъ существительныхъ: «единица», «десятокъ» и «сотня», въ соединеніи съ числительными именами, обозначающими числа меньшія десяти. Такъ, двадцать семь — то же, что два *десятка* и семь *единицъ*, а триста сорокъ пять — то же, что три *сотни*, четыре *десятка* и пять *единицъ*, и т. д.

§ 3. Простая единица, десятокъ, сотня, тысяча, десятокъ тысячъ, сотня тысячъ, милліонъ, десятокъ милліоновъ, сотня милліоновъ, билліонъ, и т. д. называются *единицами различныхъ разрядовъ:* простая единица называется единицею *перваго* разряда, десятокъ—единицею *второго* разряда, сотня—единицею *третьяго* разряда, и т. д. При этомъ должно помнить, что десятокъ содержитъ десять единицъ, сотня—десять десятковъ, тысяча—десять сотенъ, и вообще всякая составная единица—десять единицъ ближайшаго низшаго разряда. Разряды.

Изъ предыдущаго видно, что всякое число состоитъ либо изъ однѣхъ единицъ, либо изъ однихъ десятковъ, либо изъ однѣхъ сотенъ, либо изъ однѣхъ тысячъ, изъ однихъ десятковъ тысячъ, изъ однѣхъ сотенъ тысячъ, изъ однихъ милліоновъ и т. д., либо же изъ единицъ различныхъ разрядовъ. Такъ, всѣ числа, меньшія десяти, состоятъ изъ однѣхъ единицъ; десять, двадцать, тридцать, сорокъ, пятьдесятъ, девяносто состоятъ изъ однихъ десятковъ; сто, двѣсти, триста, четыреста, пятьсотъ, девятьсотъ — изъ однѣхъ сотенъ, и т. д. Числа же: двѣнадцать, двадцать четыре, триста двадцать пять состоятъ изъ единицъ различныхъ разрядовъ: двѣнадцать— изъ одного десятка и двухъ единицъ, двадцать четыре—изъ двухъ десятковъ и четырехъ единицъ, триста двадцать пять—изъ трехъ сотенъ, двухъ десятковъ и пяти единицъ. И т. д.

§ 4. Каждая изъ простыхъ единицъ даннаго числа, которыхъ совокупность не составляетъ отдѣльной тысячи, называется *единицею перваго класса;* каждая изъ тысячъ даннаго числа, которыхъ совокупность не составляетъ одного милліона, называется *единицею второго класса;* каждый изъ милліоновъ, которыхъ совокупность не составляетъ билліона, называется *единицею третьяго класса,* и т. д. Поэтому, въ числѣ: «сто восемнадцать *милліоновъ* триста двадцать пять *тысячъ* четыреста тридцать семь *единицъ*» заключается четыреста тридцать семь единицъ перваго класса, триста двадцать пять второго и сто восемнадцать — третьяго. Классы.

§ 5. На письмѣ слова, которыми обозначаются числа, т. е. имена числительныя и надлежащія ихъ сочетанія, часто замѣняются условными знаками (которые называются *цыфрами*) и условными же ихъ сочетаніями. Чаще всего для этой цѣли употребляются такъ называемыя арабскія цыфры; но въ нѣкоторыхъ случаяхъ употребляются также и цыфры римскія. Въ церковныхъ книгахъ употребляются для обозначенія чиселъ церковно-славянскія Цыфры.

буквы, изъ которыхъ большинству приписывается, если надъ буквою есть такъ называемое «титло», числовое значеніе.

Арабскія цыфры суть: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0. Изъ нихъ

цыфра	1	обозначаетъ	одну	единицу,
»	2	»	двѣ	единицы,
»	3	»	три	»
»	4	»	четыре	»
»	5	»	пять	единицъ,
»	6	»	шесть	»
»	7	»	семь	»
»	8	»	восемь	»
»	9	»	девять	единицъ.

Кромѣ этихъ цыфръ, употребляется еще цыфра 0 (нуль), которая, не обозначая никакого числа въ отдѣльности, а обозначая только отсутствіе его, при письменномъ обозначеніи чиселъ однако крайне важна. Въ отличіе отъ нуля прочія арабскія цыфры называются *значащими*.

Обозначеніе чиселъ, меньшихъ тысячи.

§ 6. Для письменнаго обозначенія (помощью арабскихъ цыфръ) какого нибудь числа, состоящаго изъ единицъ только перваго класса, должно прежде всего записать число сотенъ, если таковыя есть, потомъ рядомъ справа—число десятковъ, если таковые есть, и, наконецъ, рядомъ съ цыфрою десятковъ, справа этой послѣдней—число единицъ, если таковыя есть. Напр., число «двѣсти тридцать семь» обозначаютъ такъ: 237, потому что въ этомъ числѣ *двѣ* сотни, *три* десятка и *семь* единицъ.

Но если единицъ какого либо разряда въ данномъ числѣ нѣтъ, то вмѣсто цыфры, которая должна была бы обозначать число единицъ этого разряда, пишутъ нуль (0). Въ этомъ именно и заключается чрезвычайно важное служебное значеніе этой цыфры. Напр., число «двѣсти семь» обозначаютъ такъ: 207, а триста девять—такъ: 309, потому что въ этихъ числахъ нѣтъ отдѣльныхъ десятковъ; числа же «четыреста десять» и «пятьсотъ тридцать» обозначаются такъ: 410 и 530, потому что въ этихъ числахъ нѣтъ отдѣльныхъ единицъ. Безъ нуля въ подобныхъ случаяхъ обойтись нельзя, но нуля, однако же, не пишутъ въ началѣ письменнаго обозначенія числа; такъ, хотя въ числѣ «тридцать семь» и нѣтъ разряда сотенъ, но не принято писать: 037, а пишутъ просто: 37.

Обозначеніе чиселъ любой величины.

§ 7. Для письменнаго обозначенія (помощью арабскихъ цыфръ) цѣлаго числа, состоящаго изъ единицъ двухъ первыхъ классовъ, т. е. изъ единицъ и тысячъ, сначала записываютъ число тысячъ, руководясь при этомъ правиломъ обозначенія чиселъ, меньшихъ тысячи (§ 6); затѣмъ, оставивъ (для большей ясности) промежутокъ шириною немного менѣе ширины одной цыфры, записываютъ число единицъ перваго класса. Такъ, число «двѣсти тридцать семь тысячъ триста восемьдесятъ пять» помощью арабскихъ цыфръ должно быть обозначено такъ: 237 385. Того же правила держатся при обозначеніи цѣлаго числа, состоящаго изъ единицъ нѣсколькихъ классовъ: сначала записываютъ число единицъ наивысшаго класса, затѣмъ, оставивъ промежутокъ шириною немного менѣе ширины одной цыфры, записываютъ число единицъ слѣдующаго класса и т. д. Такъ, число «сто семь *билліоновъ* двадцать пять *милліоновъ* пятьсотъ тридцать *тысячъ* и девять *единицъ*» обозначается помощью арабскихъ цыфръ такимъ образомъ: 107 025 530 009.

Ученіе объ обозначеніи чиселъ помощью арабскихъ цыфръ называется *нумераціею* или *счисленіемъ*. Изложенная выше система обозначенія чиселъ называется *десятичною системою счисленія*.

Примѣчаніе. Нѣкоторые ставятъ передъ цыфрою сотенъ тысячъ и цыфрою сотенъ запятыя, но это не заслуживаетъ подражанія, въ особенности въ случаяхъ, когда мы имѣемъ дѣло съ числомъ, которое обозначается менѣе, чѣмъ семью цыфрами. Точно также не слѣдуетъ отдѣлять послѣднюю цыфру единицъ одного класса отъ первой цыфры единицъ слѣдующаго класса точкою.

§ 8. Числа, обозначаемыя на письмѣ одною арабской цыфрой, называются *однозначными:* таковы всѣ цѣлыя числа, меньшія десяти. Числа, обозначаемыя на письмѣ двумя арабскими цыфрами, называются *двузначными:* таковы всѣ цѣлыя числа, большія десяти и меньшія ста. И т. д. Числа двузначныя, трехзначныя, четырехзначныя и т. д. носятъ общее названіе *многозначныхъ чиселъ.* Числа однозначныя и многозначныя.

Примѣчаніе. Чтобы судить о томъ — какое изъ двухъ, обозначенныхъ по десятичной системѣ, чиселъ больше, должно обратить вниманіе на то, какое изъ нихъ обозначено бо̀льшимъ числомъ цыфръ: обозначенное бо̀льшимъ числомъ цыфръ, очевидно, больше. Если число цыфръ въ письменныхъ обозначеніяхъ чиселъ одинаково, то надо обратить вниманіе на число единицъ наивысшаго разряда: число, въ которомъ большее число единицъ наивысшаго разряда, очевидно, больше. Если число единицъ наивысшаго разряда въ обоихъ числахъ одинаково, то надо обратиться къ числу единицъ слѣдующаго разряда. И т. д.

§ 9. Кромѣ такъ называемыхъ арабскихъ цыфръ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ употребляются цыфры римскія. Наиболѣе употребительныя изъ нихъ слѣдующія: Римскія цыфры.

	I,	V,	X,	L,	C,	D,	M,	которыя
обозначаютъ	1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000.	

При обозначенiи чиселъ помощью этихъ цыфръ соблюдаются слѣдующiя правила: 1) Знакъ I можетъ повторяться не болѣе четырехъ разъ подъ-рядъ, а знаки X и C—не болѣе трехъ разъ. 2) Если знакъ I изображенъ послѣ цыфръ V или X, то единицу надо прибавить къ пяти или десяти; но если цыфра I изображена передъ цыфрами V или X, то единицу надо вычесть изъ пяти или десяти. Такъ, VI обозначаетъ шесть, а IV—четыре; XI—одиннадцать, IX—девять. 3) Точно такъ же, если цыфра X изображена послѣ цыфръ L и C, то десять надо прибавить къ пятидесяти или сту; если же цыфра X изображена предъ цыфрами L или C, то десять надо вычесть изъ пятидесяти или ста. Такъ LX обозначаетъ шестьдесятъ, а XL—сорокъ, CX—сто десять, а XC—девяносто. 4) Равнымъ образомъ, если цыфра C изображена послѣ цыфръ D и M, то сто надо прибавить къ пятистамъ или тысячѣ; если же цыфра C изображена предъ цыфрами D или M, то надо сто вычесть изъ пятисотъ или тысячи. Такъ, DC обозначаетъ шестьсотъ, а CD—четыреста, MC—одну тысячу сто, а CM—девятьсотъ.

Первыя двадцать чиселъ помощью римскихъ цыфръ обозначаются на письмѣ такъ: I, II, III, IIII (или IV), V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX.

Церковно-славянскiя цыфры.

§ 10. Что касается буквъ церковно-славянской азбуки, обозначающихъ числа, то онѣ непремѣнно снабжаются титломъ, т. е. надстрочнымъ значкомъ ҃. Кромѣ того, порядокъ буквъ церковно-славянской азбуки, имѣющихъ числовое значенiе, нѣсколько иной. Порядокъ и числовое значенiе буквъ, обозначающихъ числа, слѣдующiе:

а҃,	в҃,	г҃,	д҃,	є҃,	ѕ҃,	з҃,	и҃,	ѳ҃,	і҃,	к҃,	л҃,	м҃,	н҃,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	20,	30,	40,	50,

ѯ҃,	о҃,	п҃,	ч҃,	р҃,	с҃,	т҃,	у҃,	ф҃,	х҃,	ѱ҃,	ѿ҃,	ц҃.
60,	70,	80,	90,	100,	200,	300,	400,	500,	600,	700,	800,	900.

При письменномъ обозначенiи чиселъ помощью этихъ цыфръ соблюдается правило, чтобы буква, обозначающая сотни, предшествовала буквѣ, обозначающей десятки или единицы, а буква, обозначающая десятки, предшествовала буквѣ, обозначающей единицы. Такъ, числа 85, 243 и 476 помощью славянскихъ цыфръ обозначаются такъ: п҃є, с҃мг, и у҃оѕ. Только при обозначенiи чиселъ, меньшихъ двадцати и большихъ десяти, буква, обозначающая единицы, предшествуетъ буквѣ, обозначающей десятки. Такъ, 11, 12, 13 и т. д. обозначаются такъ а҃і, в҃і, г҃і и т. д. Для обозначенiя тысячъ цыфра, обозначающая число ихъ, снабжается слѣва ниже строки значкомъ ҂. Такъ, одна тысяча изображается ҂а҃, двѣ тысячи ҂в҃, три тысячи ҂г҃, двадцать тысячъ ҂к҃, и т. д.

Глава II.

О дѣйствіяхъ надъ отвлеченными цѣлыми числами.

Сложеніе.

§ 11. Что̀ значитъ *сосчитать*, сколько *всѣхъ* единицъ въ двухъ данныхъ числахъ, или, говоря иначе, что̀ значитъ *присчитать* единицы одного числа къ другому — знаетъ всякій. Сумма, сложеніе и слагаемыя.

Суммою данныхъ двухъ чиселъ называется число, которое можно получить, сосчитавъ — сколько всѣхъ единицъ въ данныхъ двухъ числахъ, т. е. присчитавъ къ первому числу единицы второго.

Сложеніемъ двухъ чиселъ называется дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе суммы двухъ данныхъ чиселъ.

Величина суммы двухъ чиселъ не зависитъ отъ того, которое изъ нихъ принято за первое. Такъ, отъ сложенія пяти единицъ съ восемью получается та же сумма, что отъ сложенія восьми съ пятью. Это свойство суммы двухъ чиселъ очевидно и не можетъ быть доказано, т. е. въ немъ нельзя убѣдиться съ помощью разсужденій.

Данныя для сложенія два числа называются безразлично *слагаемыми*. Знакъ дѣйствія сложенія (+) называется *плюсомъ*. Съ помощью этого знака обозначаютъ, что требуется сложить два числа (напр. 17 и 15), слѣдующимъ образомъ: $17 + 15$.

Если слагаемыя записаны въ одну строку, то запись суммы отдѣляется отъ записи второго слагаемаго знакомъ равенства (=). Такъ, записи $3 + 5 = 8$, $7 + 3 = 10$, $8 + 7 = 15$, $17 + 12 = 29$ обозначаютъ, что отъ сложенія трехъ и пяти получается восемь, отъ сложенія семи и трехъ получается десять, а отъ сложенія восьми и семи — пятнадцать, и т. д. Читается же подобная запись такъ: «три плюсъ пять равно восьми» или же: «три да пять составляетъ восемь», и т. д.

Если одно слагаемое подписано подъ другое, то подъ записью нижняго слагаемаго обыкновенно проводятъ горизонтальную черту, подъ которую помѣщаютъ запись суммы. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ одно слагаемое записывается подъ другимъ, а сумма подъ чертою — такъ, чтобы цыфры единицъ одного и того же разряда находились въ одномъ и томъ же вертикальномъ столбцѣ.

Если слагаемыя записаны въ одну строку и если записи ихъ отдѣлены одна отъ другой знакомъ сложенія, то слагаемое, запись котораго занимаетъ, считая отъ лѣвой руки къ правой, первое мѣсто, называется первымъ слагаемымъ, а слѣдующее — вторымъ.

Сумма нѣсколькихъ чиселъ.

§ 12. *Суммою трехъ данныхъ чиселъ* называется сумма, которая можетъ быть получена отъ сложенія суммы первыхъ двухъ чиселъ съ третьимъ; *суммою четырехъ данныхъ чиселъ* называется сумма, которая можетъ быть получена отъ сложенія суммы первыхъ трехъ съ четвертымъ, и т. д. *Сложеніемъ нѣсколькихъ чиселъ* называется дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе суммы ихъ. Если требуется найти сумму какихъ нибудь чиселъ, напр., чиселъ 256, 387, 520 и 396, то это требованіе можно обозначить такъ:

$$[(256 + 387) + 520] + 396,$$

гдѣ круглыя скобки ( ) обозначаютъ, что сначала надо найти сумму чиселъ 256 и 387, а полученную сумму сложить съ числомъ 520, а прямыя скобки [ ] обозначаютъ, что затѣмъ полученную сумму надо сложить съ числомъ 396. Но для большей простоты это требованіе однако же обозначаютъ обыкновенно такъ:

$$256 + 387 + 520 + 396.$$

Въ этомъ случаѣ число 256 называется первымъ, 387—вторымъ, 520—третьимъ, а 396—четвертымъ. – *Величина суммы нѣсколькихъ чиселъ не зависитъ отъ того—которое изъ нихъ принимается за первое, которое—за второе, которое—за третье,* и т. д. Такъ напр., $3 + 5 + 7 + 9 = 5 + 3 + 9 + 7 = 7 + 5 + 9 + 3$ и т. д. Это свойство суммы нѣсколькихъ чиселъ очевидно и не можетъ быть доказано съ помощью разсужденій.

Всѣ числа, надъ которыми требуется сдѣлать дѣйствіе сложенія или уже произведено это дѣйствіе, называются безразлично *слагаемыми* искомой или данной суммы. Сумма двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется иногда *результатомъ сложенія* этихъ чиселъ.

Группировка слагаемыхъ.

§ 13. Пусть, даны числа: 7, 9, 12, 15, 17 и 23; если сначала сложить 7 да 9, и результатъ разсматривать какъ одно слагаемое, затѣмъ сложить 12, 15 и 17 и эту сумму разсматривать какъ другое слагаемое, а оставшееся число (23) разсматривать какъ третье, то на письмѣ это требованіе выражаютъ такъ:

$$(7 + 9) + (12 + 15 + 17) + 23,$$

при чемъ, благодаря скобкамъ, обозначено, что дѣйствіе сложенія надо произвести въ такомъ порядкѣ: сначала сложить 7 и 9, потомъ — 12, 15 и 17, и наконецъ полученные результаты (16 и 44) и 23 сложить. Это значитъ извѣстнымъ образомъ *сочетать* или *сгруппировать слагаемыя.*

Въ практической ариѳметикѣ принимаютъ безъ доказательства что *какова бы ни была группировка данныхъ слагаемыхъ, величина* *суммы остается одна и та же.* Однако же это свойство суммы нѣсколькихъ слагаемыхъ можетъ быть не только провѣрено на примѣрахъ, но также доказано, т. е. въ справедливости этого можно убѣдиться съ помощью разсужденій; они вкратцѣ приведены въ слѣдующемъ параграфѣ.

Независимость величины суммы отъ порядка сложенія.

§ 14*. Пусть требуется найти сумму чиселъ:

$$7+9+12+15+17+23.$$

Можемъ эту сумму написать такъ (§ 12):

$$(7+9)+12+15+17+23,$$

или такъ:

$$12+15+17+(7+9)+23,$$

или же:

$$(12+15+17)+(7+9)+23,$$

или наконецъ такъ:

$$(7+9)+(12+15+17)+23.$$

Точно такимъ же образомъ можно убѣдиться, что величина всякой другой суммы не зависитъ отъ того — какова группировка слагаемыхъ, или, говоря иначе, не зависитъ отъ того — въ какомъ порядкѣ сдѣлано сложеніе слагаемыхъ.

Правила сложенія.

§ 15. Всякое число можетъ быть разсматриваемо и часто разсматривается какъ сумма нѣкотораго однозначнаго числа единицъ наивысшаго въ данномъ числѣ разряда съ такимъ же или инымъ, однозначнымъ же, числомъ единицъ разряда ближайшаго, и т. д. Такъ, напр., число 47365 можетъ быть разсматриваемо какъ сумма:

$$40\,000+7\,000+300+60+5.$$

Если требуется найти сумму какихъ нибудь чиселъ, напр., 47 365 и 26 683, то эта сумма можетъ быть, по предыдущему (§ 13), замѣнена слѣдующею:

$$(40\,000+20\,000)+(7000+6000)+(300+600)+(60+80)+(5+3).$$

На этомъ основаны слѣдующія правила письменнаго производства сложенія: 1) одно слагаемое подписываютъ подъ другое такъ, чтобы цыфры единицъ однихъ и тѣхъ же разрядовъ находились въ одномъ и томъ же вертикальномъ столбцѣ; при этомъ подъ записью послѣдняго слагаемаго проводятъ горизонтальную черту; 2) складываютъ сначала единицы перваго разряда, затѣмъ единицы второго, единицы третьяго и т. д.; 3) если сумма единицъ перваго разряда есть число однозначное, то это послѣднее записываютъ подъ чертою въ одномъ столбцѣ съ единицами того же разряда; точно такъ же поступаютъ съ единицами остальныхъ разрядовъ; 4) если же полученная сумма единицъ какого либо разряда есть число двузначное, то отъ этой суммы отдѣляютъ полученное число десятковъ единицъ даннаго разряда, подъ единицами этого разряда подписываютъ только единицы, а отдѣленное число десятковъ, удержанное въ умѣ или же записанное надъ цыфрою единицъ ближайшаго высшаго разряда, прибавляютъ къ этимъ послѣднимъ единицамъ. 5) Если одно изъ слагаемыхъ нуль, то результатъ сложенія равенъ другому слагаемому.

Примѣры:

$$\begin{array}{r} 2\ 131 \\ 1\ 423 \\ +2\ 344 \\ \hline 5\ 898 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ 372 \\ +4\ 254 \\ \hline 6\ 626 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ 856 \\ 289 \\ 7\ 906 \\ +4\ 350 \\ \hline 15\ 401 \end{array}$$

Сложеніе многихъ слагаемыхъ.

§ 16. Если требуется сложить болѣе или менѣе значительное число слагаемыхъ, то, во избѣжаніе нѣкоторыхъ неудобствъ, сначала складываютъ нѣкоторыя слагаемыя, потомъ изъ остальныхъ нѣкоторыя и т. д., пока не будутъ исчерпаны всѣ слагаемыя; затѣмъ складываютъ всѣ полученныя такимъ образомъ отдѣльныя суммы. Пусть, напр., требуется сложить: 276, 3 254, 1 075, 6 239, 54, 287, 5 386, 2 854, 1 276, 8 503, 24, 2 789, 235, 8, 7 549, 24, 7 869, 532

$$\begin{array}{r} 276 \\ 3\ 254 \\ 1\ 075 \\ 6\ 239 \\ 54 \\ +\ \ 287 \\ \hline 11\ 185 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\ 386 \\ 2\ 854 \\ 1\ 276 \\ 8\ 503 \\ 24 \\ +2\ 789 \\ \hline 20\ 832 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 235 \\ 8 \\ 7\ 549 \\ 24 \\ 7\ 869 \\ +\ \ 532 \\ \hline 16\ 217 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} 11\ 185 \\ 20\ 832 \\ +16\ 217 \\ \hline 48\ 234 \end{array}$$

Другой способъ сложенія.

§ 17*. Во избѣжаніе значительныхъ ошибокъ, полезно, если дано много слагаемыхъ, записывать въ сторонѣ всѣ частныя суммы, полученныя отъ сложенія единицъ одного и того же разряда; если при этомъ сложеніе начато съ единицъ низшаго разряда, то первую цыфру каждой слѣдующей суммы записываютъ подъ второю цыфрою предыдущей.

$$\begin{array}{r} 2\ 300 \\ 14\ 756 \\ 5\ 308 \\ 20\ 856 \\ 48 \\ +2\ 070 \\ \hline 45\ 338 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ 21 \\ 21 \\ 13 \\ +3 \\ \hline 45338. \end{array}$$

Въ особенности полезно составлять подобную запись частныхъ суммъ въ случаяхъ, если дано очень много слагаемыхъ: тогда въ результатѣ сложенія единицъ какого либо разряда могутъ получиться не только десятки этихъ единицъ, но даже сотни ихъ, которыя удержать въ памяти затруднительно.

§ 18. Для провѣрки сложенія можно произвести дѣйствіе надъ тѣми же слагаемыми, взятыми въ иномъ порядкѣ, или совершить его инымъ способомъ. Если оба раза дѣйствіе сдѣлано вѣрно, то, конечно, получится та же сумма. Обратно: если полученныя въ обоихъ случаяхъ суммы равны между собою, то есть нѣкоторыя основанія для того, чтобы допустить, что сложеніе сдѣлано вѣрно. Провѣрка сложенія.

Примѣръ:

2 300	5 308
14 756	2 070
5 308	48
20 856	2 300
48	20 856
+ 2 070	+ 14 756
45 338	45 338.

Замѣчаніе 1-ое. Быстрое и безошибочное производство дѣйствія сложенія возможно только при достаточно твердомъ знаніи такъ называемой таблицы сложенія однозначныхъ чиселъ и при достаточномъ навыкѣ въ сложеніи двузначныхъ чиселъ съ однозначными. Таблицѣ сложенія можно придать слѣдующую форму: Таблица сложенія.

—	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Для нахожденія помощью этой таблицы суммы любыхъ двухъ однозначныхъ чиселъ, напр., 6-ти и 8-ми, можно либо найти обозначеніе числа, находящееся въ пересѣченіи ряда обозначеній, начинающагося цыфрой 6, со столбцомъ обозначеній, начинающимся цыфрой 8, либо же найти число, находящееся въ пересѣченіи ряда обозначеній, начинающагося цыфрой 8, со столбцомъ обозначеній, начинающимся цыфрой 6. Искомое число во всякомъ случаѣ 14.

Порядокъ сложенія разрядовъ.

Замѣчаніе 2-ое. При письменномъ производствѣ сложенія, это дѣйствіе начинаютъ съ единицъ низшаго разряда, постепенно переходя къ единицамъ высшаго. Впрочемъ, если сумма единицъ каждаго разряда въ данныхъ слагаемыхъ есть число однозначное, то письменное производство сложенія можно начинать съ единицъ высшихъ разрядовъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ не понадобится никакихъ поправокъ. Точно такъ же при томъ способѣ письменнаго производства дѣйствія сложенія, который изложенъ въ § 17, нѣтъ надобности начинать сложеніе непремѣнно съ единицъ низшаго разряда, а можно начинать его также съ единицъ наивысшаго; но при этомъ слѣдуетъ не иначе, какъ постепенно, переходить къ единицамъ низшихъ, ибо въ противномъ случаѣ правильное записываніе частныхъ суммъ было бы затруднительно.

Устное производство сложенія.

Замѣчаніе 3-ье. При устномъ производствѣ сложенія это дѣйствіе начинаютъ обыкновенно съ единицъ наивысшаго разряда, постепенно переходя затѣмъ къ единицамъ низшихъ. Такъ, напр., пусть требуется сложить изустно 4 785 съ 3 656-ю: 4 тысячи да 3 тысячи составитъ 7 тысячъ; семьсотъ да шестьсотъ — 1 300, итого 8 300; восемьдесятъ да пятьдесятъ 130, да 8 300 составитъ 8 430, и т. д.

Прибавленіе однозначнаго числа.

Замѣчаніе 4-ое. При прибавленіи однозначныхъ чиселъ, напр., при сложеніи чиселъ 7, 9, 2, 4 и 5, не слѣдуетъ говорить такъ: 7 да 9 шестнадцать, 16 да 2 восемнадцать, 18 да 4 двадцать два, 22 да 5 двадцать семь: это слишкомъ многословно и утомительно. Слѣдуетъ говорить такъ: семь, шестнадцать, восемнадцать, двадцать два, двадцать семь, т. е. произносить вслухъ лишь названія чиселъ, получающихся въ результатѣ каждаго сложенія.

Вычитаніе.

Вычитаніе, уменьшаемое, вычитаемое, разность.

§ 19. *Вычитаніемъ* называется дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе неизвѣстнаго слагаемаго по данной суммѣ его съ другимъ, извѣстнымъ, слагаемымъ. Данная сумма въ этомъ случаѣ называется *уменьшаемымъ*, данное слагаемое — *вычитаемымъ*, искомое же — *остаткомъ* или *разностью*, а также *результатомъ вычитанія*.

Знакъ дѣйствія вычитанія (большое тире) называется *минусомъ* и отдѣляетъ запись уменьшаемаго отъ записи вычитаемаго, когда послѣднее записано рядомъ съ уменьшаемымъ справа этого послѣдняго; когда же вычитаемое подписано подъ уменьшаемымъ, то минусъ ставится слѣва вычитаемаго. Если вычитаемое записано съ уменьшаемымъ въ одну строку, то запись разности отдѣляется отъ записи вычитаемаго знакомъ равенства (=). Такъ, записи $8-3=5$, $16-9=7$ и т. п., обозначаютъ, что если изъ восьми единицъ вычесть три такихъ же единицы, то получится единицъ пять, а если изъ шестнадцати вычесть девять, то получится семь единицъ. Читается же подобная запись такъ: «восемь минусъ три равно пяти» или: «восемь безъ трехъ составитъ пять» и т. д. Когда вычитаемое равно уменьшаемому, то послѣ знака равенства пишутъ нуль; такъ: $4-4=0$, $6-6=0$, и т. п.

Если вычитаемое подписано подъ уменьшаемымъ, то, какъ это замѣчено выше, знакъ вычитанія можно поставить предъ вычитаемымъ; запись послѣдняго отдѣляется отъ записи разности горизонтальною чертою. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ вычитаемое обыкновенно записываютъ подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы цыфры единицъ одинаковыхъ разрядовъ вычитаемаго и уменьшаемаго находились въ одномъ и томъ же вертикальномъ столбцѣ. Такъ, запись

$$\begin{array}{r} 2\ 784 \\ -\ 1\ 251 \\ \hline 1\ 533 \end{array}$$

обозначаетъ, что если изъ 2784-хъ вычесть 1251, то получится 1533.

§ 20. Къ дѣйствію вычитанія прибѣгаютъ не только тогда, когда вопросъ очевидно требуетъ отысканія неизвѣстнаго слагаемаго по данной суммѣ его съ другимъ, извѣстнымъ, слагаемымъ, но также и во многихъ другихъ случаяхъ, напр.: а) когда требуется отыскать число, которое останется, если отъ даннаго числа единицъ отнять, отдѣлить, отбросить, отсчитать нѣкоторое число ихъ; б) когда требуется опредѣлить — на сколько единицъ большее изъ данныхъ чиселъ больше другого (или меньшее—меньше); в) когда по данному числу и разности между нимъ и другимъ числомъ требуется найти это послѣднее. — Но, по зрѣломъ размышленіи, всегда оказывается, что во всѣхъ этихъ случаяхъ одно изъ данныхъ чиселъ является извѣстною суммою двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно намъ дано (извѣстно), а другое неизвѣстно и подлежитъ отысканію. **Случаи примѣненія вычитанія.**

§ 21. Правила письменнаго производства вычитанія основаны на слѣдующемъ свойствѣ вычитанія: чтобы вычесть сумму одныхъ **Правила вычитанія.**

слагаемыхъ изъ суммы другихъ, изъ которыхъ каждое больше соотвѣтствующаго слагаемаго вычитаемой суммы, можно слагаемыя вычитаемой суммы вычесть изъ соотвѣтствующихъ слагаемыхъ уменьшаемой суммы и полученные результаты сложить. Такъ, напр.:

$$(8 + 7 + 5) - (6 + 4 + 2) = (8 - 6) + (7 - 4) + (5 - 2).$$

Если только возможно вычесть сумму однихъ слагаемыхъ изъ суммы другихъ, то возможно эту послѣднюю представить въ видѣ суммы такихъ слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое больше нѣкотораго, соотвѣтствующаго ему, слагаемаго вычитаемой суммы.

На этомъ основаны слѣдующія правила письменнаго производства вычитанія: 1) Записавъ вычитаемое подъ уменьшаемое надлежащимъ образомъ (§ 19), изъ единицъ уменьшаемаго, если возможно, вычитаютъ единицы вычитаемаго, а полученную разность записываютъ подъ цыфрою единицъ; точно такъ же поступаютъ и со слѣдующими разрядами, переходя къ десяткамъ, къ сотнямъ, и т. д. 2) Если въ какомъ-либо разрядѣ уменьшаемаго меньше единицъ, чѣмъ въ томъ же разрядѣ вычитаемаго, то число единицъ этого разряда уменьшаемаго увеличиваютъ на десять, и тогда только производятъ вычитаніе; единицы же слѣдующаго разряда вычитаемаго вычитаютъ уже изъ уменьшеннаго одною единицею числа единицъ соотвѣтствующаго разряда уменьшаемаго. 3) Во избѣжаніе возможныхъ ошибокъ, цыфру разряда, котораго одна единица раздроблена въ единицы низшаго разряда, отмѣчаютъ какимъ-либо образомъ, напр., поставивъ надъ нею точку.

Примѣры:

$$\begin{array}{r} 75\ 624 \\ -\,64\ 312 \\ \hline 11\ 312 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dot{4}\ \dot{1}27 \\ -\,1\ 564 \\ \hline 2\ 563 \end{array}$$

При этомъ можно разсуждать такъ (второй примѣръ): 7 безъ четырехъ—три; отъ двухъ десятковъ отнять 6 десятковъ невозможно; одну сотню уменьшаемаго обращаю въ десятки, къ двумъ десяткамъ уменьшаемаго прибавляю 10 десятковъ этой сотни, вычитаю 6 десятковъ изъ полученныхъ такимъ образомъ 12-ти десятковъ и получаю въ остаткѣ 6 десятковъ; въ уменьшаемомъ не осталось отдѣльныхъ сотенъ; одну тысячу уменьшаемаго обращаю въ сотни, вычитаю изъ 10-ти сотенъ этой тысячи 5 сотенъ и получаю въ остаткѣ 5 сотенъ. Наконецъ, отъ 3 тысячъ, оставшихся въ уменьшаемомъ, отнимаю одну тысячу и получаю двѣ тысячи. 4) Если на мѣстѣ того разряда, котораго одна единица обращена (для возможности вычитанія) въ 10 единицъ низшаго разряда, стоитъ нуль, то его принимаютъ за 9, а слѣдующую за нимъ значащую цыфру уменьшаютъ на единицу; если за этимъ нулемъ влѣво находятся еще нули, то каждый принимается за 9, а первая послѣ нихъ (считая отъ правой руки къ лѣвой) значащая цыфра уменьшается на единицу.

Примѣры:

203	23 004
— 86	— 2 786
117	20 218.

При этомъ можно разсуждать (см. первый примѣръ) такъ: отъ трехъ единицъ отнять шесть невозможно; отдѣльныхъ десятковъ въ числѣ нѣтъ; поэтому одну сотню уменьшаемаго обращаю въ десять десятковъ, и изъ нихъ одинъ обращаю въ единицы и прибавляю десять единицъ къ тремъ единицамъ уменьшаемаго; получаю 13 единицъ, вычитаю изъ нихъ 6 единицъ вычитаемаго и получаю 7 единицъ. Въ уменьшаемомъ остались: не двѣ, а одна сотня, и не десять, а всего девять десятковъ; изъ девяти десятковъ уменьшаемаго вычитаю восемь десятковъ вычитаемаго, и т. д.

Другой способъ вычитанія.

§ 21*. Кромѣ изложеннаго выше способа письменнаго производства дѣйствія вычитанія, есть еще способъ производства того же дѣйствія, основанный на томъ, что уменьшаемое есть сумма вычитаемаго съ искомою разностью. Пусть требуется вычислить разность

28 789 — 14 365.

Разсуждаемъ такъ: пять да 4—девять; стало-быть, цыфра единицъ разности есть 4; далѣе: шесть да 2 — восемь; стало-быть, цыфра десятковъ 2; три да 4 — семь, стало-быть, цыфра сотенъ 4; затѣмъ: четыре да 4—восемь, стало-быть, цыфра тысячъ 4; наконецъ: одинъ да 1 — два, стало-быть, цыфра десятковъ тысячъ 1. Такимъ образомъ мы постепенно опредѣлили цыфры разности, начиная съ единицъ перваго разряда, и ихъ надо только записать.

28 789
14 365
14 424

Для большей ясности мы въ нашемъ разсужденіи цыфры уменьшаемаго и вычитаемаго на письмѣ замѣнили словами, и число единицъ каждаго разряда искомой разности обозначали цыфрами. Того же правила будемъ держаться и при нахожденіи разности чиселъ:

427 235 и 249 578.

Разсматриваемъ 249 578 какъ первое слагаемое, искомую разность—какъ второе, а уменьшаемое—какъ ихъ сумму и, для разъясненія дѣла, изображаемъ это слѣдующимъ образомъ:

249 578
+
427 235

Затѣмъ разсуждаемъ такъ: восемь да 7 пятнадцать, пишу цыфру 7 подъ восемью, и эта цыфра есть цыфра единицъ разности; далѣе продолжаю такъ: восемь да семь пятнадцать, пять записано, одинъ въ умѣ; одинъ да семь —восемь, да 5 тринадцать, пишу подъ семью цыфру 5, и эта цыфра есть цыфра десятковъ разности; затѣмъ разсуждаю такъ: семь да одинъ — восемь, да 5 — тринадцать, три записано, одинъ въ умѣ; одинъ да пять шесть, шесть да 6 — двѣнадцать, подъ пятью пишу цыфру 6, и эта цыфра есть цыфра сотенъ разности. И т. д. Вся трудность этого способа состоитъ въ томъ, что каждую цыфру разности надобно написать въ тотъ моментъ, когда произносится ея значеніе. Т. е: восемь да 7 (тотчасъ же надо изобразить 7 подъ цыфрою 8) пятнадцать, пять записано, одинъ въ умѣ; одинъ да семь восемь, восемь да 5 (тотчасъ же написать цыфру 5 подъ цыфрою 7) тринадцать, три записано, одинъ въ умѣ; одинъ да пять шесть, шесть да 6 (тотчасъ же надо изобразить цыфру 6 подъ цыфрою 5) двѣнадцать, два записано, одинъ въ умѣ; одинъ да девять—десять, десять да 7 (тотчасъ же цыфру 7 записать подъ цыфрою 9) семнадцать, семь записано, одинъ въ умѣ; одинъ да четыре—пять, пять да 7 (тотчасъ же надо цыфру 7 подписать подъ цыфрою 4) двѣнадцать, два записано, одинъ въ умѣ; одинъ да два—три, три да 1 (тотчасъ же надо изобразить цыфру 1 подъ цыфрою два). Такимъ образомъ подъ числомъ

249 578

будетъ подписано: 177 657,

изъ каковыхъ чиселъ послѣднее и есть разность между числами 427 235 и 249 578.

Примѣчаніе. Само собою разумѣется, что нѣтъ надобности, при этомъ способѣ производства вычитанія, уменьшаемое писать непремѣнно подъ чертою, а вычитаемое надъ нею, какъ это сдѣлано выше, и что можно также найти цыфры разности въ случаѣ, если запись сдѣлана такъ, какъ она обыкновенно дѣлается.

Провѣрка вычитанія.

§ 22. Для провѣрки вычитанія можно: или 1) вычитаемое сложить съ разностью (если вычитаніе и сложеніе сдѣланы вѣрно, то должно получиться уменьшаемое), или 2) изъ уменьшаемаго вычесть разность (если оба раза дѣйствіе вычитанія сдѣлано вѣрно, то при вычитаніи разности изъ уменьшаемаго непремѣнно получится вычитаемое). Обратно: если отъ сложенія вычитаемаго съ разностью получается уменьшаемое или отъ вычитанія разности изъ уменьшаемаго—вычитаемое, то есть нѣкоторыя основанія для того, чтобы допустить, что дѣйствіе вычитанія сдѣлано вѣрно. Для провѣрки вычитанія чаще употребляется дѣйствіе сложенія вычитаемаго съ остаткомъ.

Примѣчаніе 1-е. Быстрое и безошибочное производство вычитанія возможно только при достаточно твердомъ знаніи таблицы вычитанія однозначныхъ чиселъ изъ однозначныхъ же, и однозначныхъ изъ двузначныхъ, не большихъ 18-ти.

Примѣчаніе 2-е. При письменномъ производствѣ вычитанія, его слѣдуетъ начинать съ единицъ низшаго разряда, ибо въ противномъ случаѣ иногда весьма трудно избѣгнуть ошибокъ при могущей представиться надобности въ поправкахъ. — Только въ томъ случаѣ, если число единицъ каждаго разряда уменьшаемаго больше числа единицъ того же разряда вычитаемаго, можно начинать дѣйствіе вычитанія съ единицъ разрядовъ высшихъ.

Умноженіе.

§ 23. *Произведеніемъ* одного цѣлаго числа на другое называется сумма, которую можно получить, взявъ первое изъ нихъ слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во второмъ. Произведеніе и умноженіе.

Умноженіемъ одного числа на другое называется дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе произведенія этихъ чиселъ. Первое изъ данныхъ чиселъ называется *множимымъ*, а второе — *множителемъ*. Произведеніе называютъ также *результатомъ умноженія.* Знакъ умноженія ($\times$) особеннаго названія не имѣетъ. Онъ ставится между множимымъ и множителемъ, изъ которыхъ второй въ ариѳметикѣ записываютъ послѣ перваго; если же множитель записанъ подъ множимымъ, то знакъ умноженія ставится предъ записью множителя. Въ первомъ случаѣ запись произведенія отдѣляется отъ записи множителя знакомъ равенства, во второмъ — горизонтальною чертою.

Такъ, записи $7 \times 8 = 56$ и

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 5 \\ \hline 40 \end{array}$$

обозначаютъ, что отъ умноженія семи на восемь получается пятьдесятъ шесть, а отъ умноженія восьми на пять — сорокъ, и т. п. Должно, впрочемъ, замѣтить, что первый способъ обозначенія слѣдуетъ предпочитать второму.

Произведеніемъ нѣсколькихъ чиселъ называется число, которое можно получить, умноживъ произведеніе первыхъ двухъ на третье, полученное произведеніе — на четвертое, и т. д. до послѣдняго включительно. — *Умноженіемъ* (или *перемноженіемъ*) *нѣсколькихъ чиселъ* называется дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе ихъ произведенія. Знакъ умноженія въ этомъ случаѣ ставится между данными числами, которыя должны быть записаны всѣ въ одну строку. Такъ запись: $7 \times 8 \times 3 \times 4$ обозначаетъ, что 7 надо помножить на 8, полученное на 3, а вновь полученное произведеніе на 4; оно такимъ образомъ замѣняетъ менѣе удобную запись

$$[(7 \times 8) \times 3] \times 4.$$

Наименованіе множимаго, множителя и произведенія.

Замѣчаніе. Множимое можетъ быть числомъ либо отвлеченнымъ, либо именованнымъ; оно можетъ выражать также и совокупность какихъ угодно предметовъ и явленій; но во всякомъ случаѣ, каковы бы ни были единицы множимаго, таковы также и единицы произведенія. Такъ,

$$7 \times 8 = 56,$$

$$7 \text{ арш.} \times 8 = 56 \text{ арш.},$$

$$7 \text{ книгъ} \times 8 = 56 \text{ книгъ},$$

и т. п. Что же касается множителя, то онъ можетъ быть числомъ только отвлеченнымъ.

Произведеніе двухъ чиселъ.

§ 24. Величина произведенія двухъ отвлеченныхъ чиселъ не зависитъ отъ того, которое изъ нихъ принято за множимое и которое—за множителя. Такъ, $7 \times 8 = 8 \times 7$, $4 \times 3 = 3 \times 4$.

Это свойство принадлежитъ къ числу очевидныхъ, пока имѣемъ дѣло съ однозначными числами, но не можетъ считаться очевиднымъ, когда множимое или множитель или оба числа̀ суть чи̇сла многозначныя. Это свойство произведенія двухъ чиселъ, впрочемъ, можетъ быть не только провѣрено, но и доказано съ помощью разсужденій, которыя приведены въ слѣдующемъ параграфѣ.

Независимость величины произведенія двухъ чиселъ отъ порядка ихъ.

§ 25*. Пусть требуется найти произведеніе двухъ чиселъ: 237 и 149. Но произведеніе ихъ равно той суммѣ, которая получится, если мы возьмемъ число 237 слагаемымъ 149 разъ. Предположимъ, что мы написали въ нижеслѣдующемъ столбцѣ (между двумя вертикальными линіями) 149 слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое есть 237.

$$\left|\begin{array}{c} 237 \\ 237 \\ 237 \\ 237 \\ \vdots \\ 237 \end{array}\right|$$

Точки, поставленныя между четвертымъ и послѣднимъ слагаемыми поставлены для того, чтобы не писать на самомъ дѣлѣ 149 разъ одно и то же слагаемое, т. е. для сбереженія мѣста; послѣ сложенія мы получимъ произведеніе числа 237 на число 149. Теперь станемъ разсуждать такъ: если я возьму отъ каждаго слагаемаго только по одной единицѣ, то я получу столько единицъ, сколько всѣхъ слагаемыхъ, т. е. 149, и въ каждомъ слагаемомъ останется 236 единицъ; возьму отъ новыхъ слагаемыхъ снова по одной единицѣ; тогда я получу тоже 149 единицъ, но въ каждомъ слагаемомъ останется уже 235 единицъ; такимъ образомъ я получилъ вмѣсто ста сорока девяти слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое 237, сто сорокъ девять слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно 235, и еще два слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно 149-ти. Затѣмъ отъ каждаго изъ 149-ти слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно 235-ти, возьму снова по единицѣ; тогда получу опять число 149, но въ каждомъ изъ прежнихъ слагаемыхъ уже 234 единицы. Такъ я могу поступать до тѣхъ поръ, пока въ каждомъ изъ прежнихъ слагаемыхъ не останется ни одной единицы; за-то вмѣсто прежнихъ ста сорока девяти слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно двумъ стамъ тридцати семи, получимъ 237 слагаемыхъ, изъ которыхъ въ каждомъ 149 единицъ. Но число всѣхъ единицъ то же, что прежде; стало-быть,

$$237 \times 149 = 149 \times 237.$$

На этомъ основано отысканіе произведенія въ случаѣ, если множитель равенъ единицѣ или нулю. Такъ,

$$17 \times 1 = 1 \times 17 = 17, \text{ а } 86 \times 0 = 0 \times 86 = 0.$$

Если множимое—число не отвлеченное, то, выразивъ множителя въ тѣхъ же единицахъ, въ какихъ выражено множимое, и принявъ его за множимое, далѣе, сдѣлавъ прежнее множимое числомъ отвлеченнымъ и принявъ его за множителя, получимъ произведеніе, равное первоначальному. Такъ,

$$7 \text{ арш. } \times 8 = 8 \text{ арш. } \times 7,$$
$$15 \text{ руб. } \times 80 = 80 \text{ руб. } \times 15,$$
$$3 \text{ книги } \times 10 = 10 \text{ кн. } \times 3, \text{ и т. п.}$$

§ 26*. Величина произведенія трехъ отвлеченныхъ чиселъ не измѣнится, если второе число сдѣлать первымъ, а первое вторымъ.— Дѣйствительно: пусть даны три числа 237, 526 и 724; тогда, по предыдущему, $237 \times 526 = 526 \times 237$, а отсюда

Перестановка первыхъ двухъ чиселъ въ произвед. трехъ чиселъ.

$$(237 \times 526) \times 724 = (526 \times 237) \times 724.$$

§ 27*. Величина произведенія трехъ отвлеченныхъ чиселъ не измѣнится, если второе число сдѣлать третьимъ, а третье вторымъ.— Дѣйствительно, напишемъ:

Перестановка послѣднихъ двухъ чиселъ въ произвед. трехъ чиселъ.

$$237 + 237 + 237 + \ldots + 237$$
$$237 + 237 + 237 + \ldots + 237$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$237 + 237 + 237 + \ldots + 237$$

Представимъ себѣ, что мы такихъ строкъ написали 724; представимъ далѣе, что въ каждой строкѣ слагаемыхъ 526; тогда слагаемыхъ, очевидно, въ каждомъ столбцѣ по 724; а потому, сложивъ всѣ слагаемыя сначала по строкамъ, а потомъ по столбцамъ, получимъ, что

$$(237 \times \mathbf{526}) \times \mathbf{724} = (237 \times \mathbf{724}) \times \mathbf{526}.$$

Перестановка первыхъ двухъ чиселъ въ произведеніе многихъ чиселъ.

§ 28*. Величина произведенія сколькихъ угодно цѣлыхъ чиселъ не измѣнится, если второе число изъ нихъ сдѣлать первымъ, а первое вторымъ.—Дѣйствительно: пусть даны будутъ числа 5, 7, 8, 11, 29. Тогда

$$5 \times 7 = 7 \times 5,$$

а потому

$$\mathbf{5} \times \mathbf{7} \times 8 = \mathbf{7} \times \mathbf{5} \times 8, \text{ и } \mathbf{5} \times \mathbf{7} \times 8 \times 11 = \mathbf{7} \times \mathbf{5} \times 8 \times 11,$$

а

$$\mathbf{5} \times \mathbf{7} \times 8 \times 11 \times 29 = \mathbf{7} \times \mathbf{5} \times 8 \times 11 \times 29.$$

Перестановка послѣднихъ двухъ чиселъ.

§ 29*. Величина произведенія сколькихъ угодно цѣлыхъ чиселъ не измѣнится, если послѣднее изъ нихъ сдѣлать предпослѣднимъ, а предпослѣднее послѣднимъ.—Дѣйствительно: пусть даны числа 7, 11, 15, 3, 4; тогда произведеніе чиселъ 7, 11 и 15 равна нѣкоторому числу, и помножить это произведеніе на 3, а полученное на 4, или же произведеніе это помножить на 4, а полученное на 3—все равно (§ 26). Поэтому

$$7 \times 11 \times 15 \times \mathbf{3} \times \mathbf{4} = 7 \times 11 \times 15 \times \mathbf{4} \times \mathbf{3}.$$

Перестановка смежныхъ двухъ чиселъ.

§ 30*. Величина произведенія сколькихъ угодно цѣлыхъ чиселъ не измѣнится, если на мѣсто одного изъ нихъ поставить слѣдующее, а на мѣсто этого послѣдняго замѣненное имъ. —Дѣйствительно: пусть дано произведеніе,

$$7 \times 8 \times 9 \times 5 \times 2 \times 17.$$

По предыдущему (§ 27)

$$7 \times 8 \times \mathbf{9} \times \mathbf{5} = 7 \times 8 \times \mathbf{5} \times \mathbf{9};$$

стало-быть

$$7 \times 8 \times \mathbf{9} \times \mathbf{5} \times 2 \times 17 = 7 \times 8 \times \mathbf{5} \times \mathbf{9} \times 2 \times 17.$$

§ 31*. Величина произведенія сколькихъ угодно чиселъ не измѣнится, если любыя два числа помѣняются своими мѣстами.—Дѣйствительно: мѣняясь мѣстами со смежными, каждое число можетъ занять среди другихъ любое мѣсто, а другое можетъ такимъ же образомъ занять его мѣсто. Такъ, напр.,

$$7 \times \mathbf{8} \times 9 \times 5 \times \mathbf{2} \times 17 = 7 \times \mathbf{2} \times 9 \times 5 \times \mathbf{8} \times 17,$$

потому что

$$\begin{aligned} 7 \times \mathbf{8} \times 9 \times 5 \times \mathbf{2} \times 17 &= 7 \times \mathbf{8} \times 9 \times \mathbf{2} \times 5 \times 17 \\ &= 7 \times \mathbf{8} \times \mathbf{2} \times 9 \times 5 \times 17 \\ &= 7 \times \mathbf{2} \times \mathbf{8} \times 9 \times 5 \times 17 \\ &= 7 \times \mathbf{2} \times 9 \times \mathbf{8} \times 5 \times 17 \\ &= 7 \times \mathbf{2} \times 9 \times 5 \times \mathbf{8} \times 17. \end{aligned}$$

§ 32*. Величина произведенія сколькихъ угодно цѣлыхъ чиселъ не зависитъ отъ того, которое изъ нихъ принято за первое, которое за второе и т. д.—Дѣйствительно: если дано произведеніе Перестановка какихъ угодно чиселъ.

$$7 \times 8 \times 9 \times 5 \times 2 \times 17,$$

то любые два числа могутъ помѣняться своими мѣстами (§ 29), и потому ничто не мѣшаетъ любому изъ данныхъ чиселъ занять первое мѣсто, второе, третье и т. д.

§ 33. Всѣ числа, которыхъ произведеніе найдено или требуется найти въ данномъ случаѣ, носятъ общее названіе *сомножителей* или просто *множителей* даннаго или искомаго произведенія. Величина его не зависитъ отъ того, которое мѣсто занимаетъ данный сомножитель въ ряду другихъ (§§ 26—33). Сомножители произведенія.

§ 34. Пусть даны сомножители $7 \times 8 \times 15 \times 6 \times 3$; если сначала взять произведеніе чиселъ 7 и 15, а потомъ произведеніе чиселъ 8 и 6, и первое произведеніе принять за одного сомножителя, второе—за другого, а 3—за третьяго, то это значитъ извѣстнымъ образомъ *сочетать* или *сгруппировать* сомножителей. На письмѣ это изобразится такъ: Группировка сомножителей.

$$(7 \times 15) \times (8 \times 6) \times 3.$$

Какова бы ни была группировка сомножителей даннаго или искомаго произведенія, величина послѣдняго остается одна и та же.—Дѣйствительно, если даны числа 7, 8, 15, 6 и 3, то

$$\begin{aligned}(7 \times 15) \times (8 \times 6) \times 3 &= 7 \times 15 \times (8 \times 6) \times 3 = \\ &= (8 \times 6) \times 7 \times 15 \times 3 = \\ &= 8 \times 6 \times 7 \times 15 \times 3 = \\ &= 7 \times 8 \times 15 \times 6 \times 3.\end{aligned}$$

§ 35*. Правила письменнаго производства умноженія многозначнаго числа на однозначное основано на слѣдующемъ основномъ свойствѣ произведенія суммы нѣсколькихъ чиселъ на данное число, вытекающемъ изъ самаго смысла умноженія, какъ сложенія равныхъ между собою слагаемыхъ: произведеніе суммы нѣсколькихъ слагаемыхъ на даннаго множителя равно суммѣ произведеній этихъ слагаемыхъ на этого множителя. Такъ, напр., Основное свойство произведенія суммы чиселъ на какого нибудь множителя.

$$(3 + 5 + 7 + 8) \times 2 = (3 \times 2) + (5 \times 2) + (7 \times 2) + (8 \times 2).$$

§ 36. Всякое многозначное число можетъ быть разсматриваемо какъ сумма единицъ различныхъ разрядовъ (§§ 6, 7 и 15); поэтому при письменномъ производствѣ умноженія многозначнаго числа на однозначное соблюдаются слѣдующія правила: а) Записавъ множимое и множителя (послѣдняго подъ первое или рядомъ съ нимъ, но въ послѣднемъ случаѣ необходимо отдѣлить одну за- Умноженіе многознач. числа на однозначное.

пись отъ другой знакомъ умноженія), каждый разрядъ множимаго, начиная съ единицъ, по порядку умножаютъ на множителя. Если каждое такое произведеніе есть число однозначное, то записываютъ всѣ эти произведенія такъ, чтобы цыфры единицъ различныхъ разрядовъ стояли на соотвѣтствующихъ имъ мѣстахъ. Такимъ образомъ $2\ 132 \times 3 = 6\ 396$. б) Если же какое нибудь изъ полученныхъ произведеній есть число двузначное, то сначала записываются только единицы этого двузначнаго числа, десятки же его удерживаются въ памяти для прибавленія ихъ къ произведенію единицъ слѣдующаго разряда множимаго на даннаго множителя. Такъ, $7\ 856 \times 7 = 54\ 992$.

Умноженіе на единицы какого либо разряда.

§ 37. Чтобы получить посьменное обозначеніе произведенія какого либо однозначнаго числа на число, равное одной единицѣ какого либо высшаго разряда, можно къ обозначенію множимаго приписать справа столько нулей, сколько ихъ въ письменномъ обозначеніи множителя. Такъ,

$3 \times 10 = 30$, потому что $3 \times 10 = 10 \times 3 = 10 + 10 + 10$,
$3 \times 100 = 300$, » » $3 \times 100 = 100 \times 3 = 100 + 100 + 100$,
$7 \times 1000 = 7000$, » » $7 \times 1000 = 1000 \times 7 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000$, и т. д.

Точно такъ же, для того чтобы получить письменное обозначеніе произведенія какого либо однозначнаго числа единицъ любого высшаго разряда на одну единицу того же или другого разряда, можно къ письменному обозначенію множимаго приписать справа столько нулей, сколько ихъ въ письменномъ обозначеніи множителя.

Для того же, чтобы получить обозначеніе произведенія какого либо однозначнаго числа единицъ любого высшаго разряда на однозначное же число единицъ того же или другого разряда, можно, перемноживъ эти однозначныя числа, приписать къ письменному обозначенію полученнаго произведенія столько нулей, сколько ихъ всего въ обоихъ сомножителяхъ. Такъ,

$30 \times 20 = 600$, ибо $30 \times 20 = (10 \times 3) \times (10 \times 2) = (3 \times 2) \times (10 \times 10)$,
$400 \times 30 = 12000$, » $400 \times 30 = (100 \times 4) \times (10 \times 3) = (4 \times 3) \times (100 \times 10)$.

Отсюда вытекаютъ слѣдующія правила: 1) чтобы получить письменное обозначеніе произведенія какого угодно числа на одну единицу какого либо высшаго разряда, можно къ обозначенію множимаго приписать справа столько нулей, сколько ихъ въ письменномъ обозначеніи множителя. Такъ,

$$27\ 523 \times 100 = 2\ 752\ 300,$$

ибо

$$
\begin{aligned}
20\,000 \times 100 &= 2\,000\,000 \\
7\,000 \times 100 &= 700\,000 \\
500 \times 100 &= 50\,000 \\
20 \times 100 &= 2\,000 \\
3 \times 100 &= 300,
\end{aligned}
$$

откуда

$$27\,523 \times 100 = 2\,752\,300.$$

2) Чтобы получить письменное обозначеніе произведенія какого угодно числа на какое угодно однозначное число единицъ высшаго разряда, можно, умноживъ данное множимое на это однозначное число, къ письменному обозначенію полученнаго произведенія приписать справа столько нулей, сколько ихъ во множителѣ. Такъ,

$$2754 \times 300 = 826\,200,$$

ибо

$$2754 \times 300 = 2754 \times (100 \times 3) = (2754 \times 3) \times 100.$$

§ 38. Письменное производство умноженія многозначнаго числа на многозначное же основано на способахъ производства дѣйствія въ тѣхъ частныхъ случаяхъ, которые разсмотрѣны въ предыдущемъ параграфѣ, а равно на слѣдующемъ свойствѣ произведенія суммы нѣсколькихъ чиселъ на сумму тѣхъ же или иныхъ чиселъ, вытекающемъ изъ § 35: Умноженіе многозначнаго числа на многозначное.

Произведеніе суммы нѣсколькихъ чиселъ на сумму какихъ угодно чиселъ равно суммѣ произведеній каждаго изъ слагаемыхъ множимаго на каждое изъ слагаемыхъ множителя. Такъ,

$$
\begin{aligned}
&(2+3+5) \times (4+7+9) = \\
&= 2 \times 4 + 3 \times 4 + 5 \times 4 + \\
&+ 2 \times 7 + 3 \times 7 + 5 \times 7 + \\
&+ 2 \times 9 + 3 \times 9 + 5 \times 9.
\end{aligned}
$$

При письменномъ производствѣ умноженія многозначнаго числа на многозначное поэтому соблюдаются слѣдующія правила:

1) Записавъ множителя подъ множимое или рядомъ съ нимъ (въ послѣднемъ случаѣ запись множителя надо знакомъ умноженія отдѣлить отъ записи множимаго) умножаютъ все множимое на каждый разрядъ множителя какъ на число однозначное, начиная съ низшаго или высшаго разряда множителя, и записываютъ одно произведеніе подъ другимъ такъ, чтобы цыфры одинаковыхъ разрядовъ помѣстились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ. Полученныя произведенія, называемыя *частными произведеніями*, складываются со-

образно тому, какъ они подписаны одно подъ другимъ. При этомъ запись можетъ имѣть одну изъ слѣдующихъ трехъ формъ, изъ которыхъ послѣдняя наиболѣе цѣлесообразна:

а) $$\begin{array}{r} 3576 \\ \times\ 425 \\ \hline 14304 \\ 7152 \\ 17880 \\ \hline 1519800 \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} 3576 \\ \times\ 425 \\ \hline 17880 \\ 7152 \\ +\ 14304 \\ \hline 1519800 \end{array}$$

и в) $$\begin{array}{l} 3576 \times 425 = 1\,519\,800 \\ \hline 14304 \\ 7172 \\ 17880. \end{array}$$

2) Если въ письменномъ обозначеніи множителя на мѣстѣ нѣкоторыхъ разрядовъ находятся нули, причемъ цыфра единицъ есть цыфра значащая, то множимое умножается только на тѣ разряды множителя, на мѣстѣ которыхъ находятся значащія цыфры:

а) $$\begin{array}{r} 3247 \\ \times\ 2003 \\ \hline 6494 \\ 9741 \\ \hline 6503741 \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} 3247 \\ \times\ 2003 \\ \hline 9741 \\ 6494 \\ \hline 6503741 \end{array}$$

в) $$\begin{array}{l} 3247 \times 2003 = 6\,503\,741. \\ \hline 6494 \\ 9741 \end{array}$$

3) Если письменныя обозначенія множимаго или множителя или того и другого *оканчиваются* нулями, то эти числа перемножаются такъ, какъ если бы этихъ нулей не было; потомъ къ письменному обозначенію полученнаго произведенія приписываются всѣ нули, которыми оканчиваются письменныя обозначенія сомножителей.

$$\begin{array}{r} 326 \\ \times\ 2400 \\ \hline 1304 \\ +\ 652 \\ \hline 782400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36000 \\ \times\ 243 \\ \hline 108 \\ 144 \\ +\ 72 \\ \hline 8748000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43000 \\ \times\ 23500 \\ \hline 115 \\ 129 \\ +\ 86 \\ \hline 1010500000. \end{array}$$

Число цыфръ произведенія.

§ 39*. Число всѣхъ цыфръ искомаго произведенія не можетъ быть меньше уменьшеннаго на одну единицу числа всѣхъ цыфръ множимаго и множителя.—Дѣйствительно, пусть, напр., требуется опредѣлить — сколько цыфръ можетъ быть въ произведеніи пятизначнаго числа на трехзначное; самое меньшее пятизначное число есть 10 000, а самое меньшее трехзначное есть 100; произведеніе этихъ чиселъ равно числу 1 000 000, въ которомъ 7 цыфръ—на одну меньше, чѣмъ въ множимомъ и множителѣ вмѣстѣ; сталобыть, въ произведеніи пятизначнаго числа на трехзначное не можетъ быть менѣе семи цыфръ. Точно такъ же можно убѣдиться, что число цыфръ произведенія четырехзначнаго на трехзначное не можетъ быть менѣе шести, и т. п.—Но, кромѣ того, должно замѣтить, что число цыфръ произведенія не можетъ быть болѣе всего числа цыфръ множимаго и множителя. Дѣйствительно, произведеніе самаго большого пятизначнаго числа, т. е. 99 999, на самое большое четырехзначное, т. е. на 9 999, должно быть меньше произведенія 100 000 $\times$ 10 000, т. е. должно быть меньше 1 000 000 000, а число его цыфръ должно быть такимъ образомъ меньше 10-ти, т. е. не можетъ быть больше 9-ти, или числа всѣхъ цыфръ множимаго и множителя. Тѣ же разсужденія могутъ быть приложены и къ опредѣленію наибольшаго числа цыфръ произведенія трехзначнаго и двузначнаго числа, пятизначнаго и семизначнаго, и т. д. — Такимъ образомъ число цыфръ произведенія двухъ сомножителей равно либо числу всѣхъ ихъ цыфръ, либо же этому числу, уменьшенному на одну единицу.

Провѣрка умноженія.

§ 40. Для провѣрки умноженія можно произвести второй разъ умноженіе, но начиная съ высшихъ цыфръ множителя, если оно ранѣе произведено начиная съ низшихъ цыфръ множителя, и обратно. Или же можно, замѣнивъ множимое множителемъ, а множитель множимымъ, снова произвести дѣйствіе умноженія. Если оба раза дѣйствіе было произведено вѣрно, то должны получиться непремѣнно равныя произведенія. Обратно: если въ обоихъ случаяхъ получились равныя произведенія, то есть нѣкоторыя основанія для того, чтобы допустить, что дѣйствіе совершенно вѣрно.

Порядокъ умнож. на цыфры множителя.

Замѣчаніе 1-ое. Начинать ли производство умноженія съ высшихъ цыфръ множителя или съ низшихъ, конечно, все равно; каждый изъ этихъ способовъ представляетъ свои выгоды. Но во всякомъ случаѣ необходимо соблюдать величайшую аккуратность въ надлежащемъ записываніи частныхъ произведеній другъ подъ другомъ. При этомъ, отдѣленіе цыфръ разныхъ классовъ другъ отъ друга бо̀льшимъ промежуткомъ цѣлесообразно только въ окончательномъ результатѣ, если этотъ послѣдній записанъ послѣ знака равенства.

Пиѳагорова таблица умноженія.

Замѣчаніе 2-ое. Быстрое и безошибочное производство умноженія возможно только при достаточно твердомъ знаніи такъ называемой таблицы умноженія однозначныхъ чиселъ и при достаточномъ навыкѣ въ сложеніи двузначныхъ чиселъ съ однозначными. Таблицу умноженія изображаютъ иногда въ слѣдующемъ видѣ *):

*) Въ этой формѣ таблица умноженія извѣстна подъ названіемъ Пиѳагоровой таблицы, по имени греческаго философа Пиѳагора, жившаго въ VI в. до Р. Х.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Для нахожденія помощью этой таблицы произведенія двухъ однозначныхъ чиселъ, напр., 6-ти и 8-ми, должно найти обозначеніе числа, находящееся въ пересѣченіи ряда обозначеній, начинающагося цыфрой 6, со столбцомъ обозначеній, начинающимся цыфрой 8, или обозначеніе числа, находящееся въ пересѣченіи ряда обозначеній, начинающагося цыфрой 8, со столбцомъ чиселъ, начинающимся цыфрой 6. Это число есть 48.

Дѣленіе.

Дѣленіе, дѣлимое и дѣлитель. Частное и отношеніе.

§ 41. *Дѣленіемъ* вообще называется дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе неизвѣстнаго сомножителя по данному произведенію его на другого, извѣстнаго, сомножителя. Данное произведеніе въ этомъ случаѣ называется *дѣлимымъ*, данный сомножитель — *дѣлителемъ*, а искомый — *частнымъ*, или *результатомъ дѣленія*. Знакомъ дѣленія служитъ двоеточіе (:), которое ставится между записью дѣлимаго и записью дѣлителя, изъ которыхъ первая предшествуетъ второй. Такъ, запись $15 : 3 = 5$ обозначаетъ, что отъ раздѣленія 15-ти на 3 получается 5; 15 при этомъ есть дѣлимое, 3 — дѣлитель, 5 — частное. Эта запись читается такъ: «пятнадцать, раздѣленное на три, равняется пяти». Дѣленіе на письмѣ обозначается иногда (при дѣленіи отвлеченныхъ чиселъ безъ всякой, впрочемъ, къ тому надобности) также и слѣдующимъ образомъ:

$$15 \,\big|\, \frac{3}{5.}$$

Дѣленіе можно различать слѣдующихъ двухъ родовъ: а) дѣленіе числа на равныя между собою части и б) такъ называемое дѣленіе по содержанію, или кратное сравненіе одного числа съ другимъ.

Дѣленіе числа на равныя между собою части имѣетъ цѣлью отысканіе множимаго, когда даны произведеніе и множитель; кратное сравненіе, или дѣленіе по содержанію, имѣетъ цѣлью отысканіе множителя, когда даны произведеніе и множимое. Въ обоихъ случаяхъ данное произведеніе называется дѣлимымъ, а данный множитель — дѣлителемъ; но частное, происходящее отъ кратнаго сравненія одного числа съ другимъ, называется иногда также и *кратнымъ отношеніемъ* или просто *отношеніемъ* перваго числа (дѣлимаго) ко второму (дѣлителю), а также *результатомъ кратнаго сравненія* двухъ чиселъ. Запись $15:3=5$ можетъ быть прочитана и такъ: «кратное отношеніе пятнадцати къ тремъ равно пяти» или просто такъ: «отношеніе пятнадцати къ тремъ равно пяти». Въ нѣкоторыхъ руководствахъ и пособіяхъ по начальной ариѳметикѣ употребляются для обозначенія дѣленія на равныя части знакъ $\lfloor\,\rfloor$, а для обозначенія кратнаго сравненія двоеточіе; но это различіе въ обозначеніяхъ необязательно, и въ настоящемъ руководствѣ для обозначенія обоихъ родовъ дѣленія употребляется одинъ и тотъ же знакъ (:). Благодаря тому, что произведеніе двухъ отвлеченныхъ чиселъ не зависитъ отъ порядка сомножителей, въ этомъ случаѣ безразлично — какой изъ сомножителей, при дѣленіи отвлеченныхъ чиселъ, неизвѣстенъ.

Наименованіе единицъ дѣлимаго, дѣлителя и частнаго.

Замѣчаніе. Дѣлимое можетъ быть числомъ отвлеченнымъ или именованнымъ; оно можетъ выражать также и совокупность какихъ угодно предметовъ; и дѣлитель можетъ быть числомъ отвлеченнымъ, а также и именованнымъ, или тоже выражать совокупность какихълибо предметовъ, но въ этихъ послѣднихъ двухъ случаяхъ онъ долженъ состоять изъ тѣхъ же единицъ, изъ которыхъ состоитъ дѣлимое. Такъ, равно возможны записи:

$$56 \text{ рублей} : 7 = 8 \text{ рубл.},$$
$$56 \text{ столовъ} : 7 = 8 \text{ стол.},$$
$$56 \text{ рублей} : 7 \text{ руб.} = 8,$$
$$56 \text{ столовъ} : 7 \text{ стол.} = 8,$$
$$56:7=8;$$

но невозможны такія записи, въ которыхъ дѣлимое и дѣлитель выражаютъ значенія различныхъ, разнородныхъ величинъ (напр., длину и промежутокъ времени, стоимость и объемъ) или совокупности различныхъ предметовъ; столь же невозможны записи, въ которыхъ дѣлимое есть число отвлеченное, а дѣлитель — число именованное или же выражающее совокупность какихъ либо предметовъ.—Первая изъ выше данныхъ записей обозначаетъ, что 56 рублей раздѣлены на 7 равныхъ между собою частей и что каждая часть равна 8-ми рублямъ, вторая — что 56 столовъ распредѣлены на 7 одинаковыхъ группъ и что въ каждой по 8-ми столовъ, третья—что отношеніе 56-ти рублей къ 7-ми рублямъ равно 8-ми (т. е. что 56 руб. болѣе 7-ми руб. въ 8 разъ), четвертая—что отношеніе одного числа столовъ къ другому числу столовъ (56-ми къ 7-ми) равно 8-ми; наконецъ, пятая запись обозначаетъ какъ то, что по раздѣленіи 56-ти на 7 равныхъ частей получится 8, такъ и то, что кратное отношеніе 56-ти къ 7-ми равно 8-ми.

Остатокъ при дѣленіи.

§ 42. Если дано дѣлимое 47, а дѣлитель 6, то частное не равно 7-ми (потому что $7\times6=42$, каковое число *меньше* 47-ми); но искомое частное не равно также и 8-ми (потому что $8\times6=48$, каковое число *больше* 47-ми). Въ этомъ случаѣ за частное принимаютъ меньшее изъ этихъ смежныхъ чиселъ, т. е. 6. Очень часто, при дѣленіи одного числа на другое, послѣднія таковы, что какое бы изъ двухъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ мы ни приняли за частное, происходящее отъ раздѣленія даннаго числа на другое, — произведеніе взятаго нами числа на даннаго дѣлителя не будетъ равно дѣлимому: въ одномъ случаѣ произведеніе это будетъ меньше, а въ другомъ—больше даннаго дѣлимаго. За частное въ такихъ случаяхъ въ ариѳметикѣ принимаютъ меньшее изъ двухъ смежныхъ чиселъ, и при этомъ разность между дѣлимымъ и произведеніемъ дѣлителя на предположенное частное называется *остаткомъ* этого дѣленія. Такъ, при раздѣленіи 47-ми на 6 въ частномъ получается 7, а въ остаткѣ 5; при раздѣленіи 26-ти на 3 въ частномъ получается 8, а въ остаткѣ 2, и т. д. Записи въ подобныхъ случаяхъ могутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\begin{array}{r} 47 : 6 = 7, \\ \underline{-\,42} \\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26 : 3 = 8 \\ \underline{-\,24} \\ 2 \end{array}$$

Заслуживаютъ вниманія случаи, когда дѣлитель равенъ единицѣ, напр., случаи: 17 : 1, 28 р. : 1 р., 35 ф. : 1, и т. п. Въ этихъ случаяхъ частныя равны самому дѣлимому — при дѣленіи на равныя части, и отвлеченному числу, которое равно числу единицъ дѣлимаго — при кратномъ сравненіи.

Если по раздѣленіи одного числа на другое не получается остатка, то говорятъ, что дѣлимое дѣлится на дѣлителя *на-цѣло безъ остатка*, или короче—что дѣлимое дѣлится на дѣлителя безъ остатка (говорятъ также, что дѣлимое дѣлится на дѣлителя на-цѣло), или же наконецъ просто — что дѣлимое *дѣлится* на дѣлителя.

Правила дѣленія многозначнаго числа.

§ 43. При письменномъ производствѣ кратнаго сравненія одного многозначнаго числа съ другимъ, т. е. при постепенномъ нахожденіи послѣдовательныхъ цыфръ частнаго, соблюдаются слѣдующія правила: а) Когда дѣлимое и дѣлитель надлежащимъ образомъ записаны, то въ дѣлимомъ, считая отъ лѣвой руки къ правой, отдѣляютъ столько цыфръ, сколько ихъ необходимо для того, чтобы отдѣленныя слѣва цыфры не обозначали числа меньшаго, чѣмъ дѣлитель. б) Потомъ узнаютъ—сколько разъ дѣлитель заключается въ отдѣленной слѣва части дѣлимаго, а полученное число записываютъ какъ частное. в) Далѣе дѣлитель множатъ на число, записанное въ частномъ, полученное произведеніе должнымъ образомъ подписываютъ подъ взятою частью дѣлимаго и вычитаютъ изъ нея. г) Полученная цыфра частнаго тогда считается вѣрною, если полученный остатокъ меньше дѣлителя. д) Затѣмъ къ цыфрамъ полученнаго остатка приписываютъ справа слѣдующую цыфру дѣлимаго и съ полученнымъ числомъ поступаютъ такъ же, какъ съ отдѣленною сначала частію дѣлимаго. Такъ продолжаютъ поступать до тѣхъ поръ, пока не будетъ приписана къ остатку послѣдняя цыфра частнаго. е) Если, послѣ приписанія къ какому-либо остатку слѣдующей цыфры частнаго, дѣлитель больше полученнаго такимъ образомъ числа, то въ частномъ пишутъ нуль и, не дѣлая умноженія, приписываютъ къ остатку еще одну цыфру дѣлимаго.

```
107395 : 235 = 457;        193125 | 625
— 940                      — 1875  |-----
-----                      ------  | 309.
  1339                       5625
— 1175                     — 5625
------                     ------
   1645                        0
 — 1645
 ------
      0
```

Примѣчаніе. Для быстраго выполненія дѣйствія кратнаго сравненія многозначныхъ чиселъ надо пріобрѣсти навыкъ въ быстромъ нахожденіи частнаго въ случаѣ, если дѣлимое есть многозначное число, въ которомъ цыфръ одною болѣе, чѣмъ въ дѣлителѣ.

Провѣрка дѣленія.

§ 44. Если дѣлимое дѣлится на-цѣло безъ остатка на дѣлителя, то для повѣрки кратнаго сравненія достаточно дѣлителя умножить на частное, и если оба дѣйствія произведены вѣрно, то отъ умноженія дѣлителя на частное получается непремѣнно дѣлимое. Обратно: если дѣлимое дѣлится на-цѣло безъ остатка на дѣлителя и если отъ умноженія дѣлителя на частное получилось число равное дѣлимому, то есть нѣкоторыя основанія для того, чтобы допустить, что дѣйствіе кратнаго сравненія сдѣлано вѣрно.

Если же дѣлимое не дѣлится на дѣлителя безъ остатка, то для повѣрки кратнаго сравненія достаточно сложить произведеніе дѣлителя на частное съ остаткомъ; если всѣ дѣйствія произведены вѣрно, то въ результатѣ получится непремѣнно дѣлимое. Обратно: если отъ прибавленія остатка къ произведенію дѣлителя на частное получается число, равное дѣлимому, то есть нѣкоторыя основанія для того, чтобы допустить, что дѣйствіе кратнаго сравненія произведено вѣрно.

Основное свойство дѣленія суммы чиселъ на какого нибудь дѣлителя.

§ 45*. Производство кратнаго сравненія многозначнаго числа съ однозначнымъ или многозначнымъ же основано на слѣдующемъ свойствѣ отношенія суммы чиселъ къ нѣкоторому дѣлителю вытекающемъ изъ свойствъ умноженія (см. § 35).

Если отношеніе каждаго изъ слагаемыхъ данной суммы къ нѣкоторому дѣлителю есть цѣлое число, то отношеніе суммы ихъ къ этому дѣлителю равно суммѣ отношеній каждаго изъ нихъ къ тому же дѣлителю. Такъ,

$$(15+20+35):5=(15:5)+(20:5)+(35:5).$$

Вся трудность приложенія этого свойства къ производству кратнаго сравненія заключается въ такомъ разложеніи дѣлимаго на слагаемыя, чтобы отношенія этихъ послѣднихъ къ дѣлителю представляли собою рядъ однозначныхъ чиселъ послѣдовательныхъ разрядовъ. Легко убѣдиться, что это разложеніе дѣлается во время самаго производства дѣйствія кратнаго сравненія.

Примѣчаніе. Быстрое и безошибочное производство кратнаго сравненія возможно только при достаточно твердомъ знаніи таблицы умноженія и достаточномъ навыкѣ въ производствѣ дѣленія двузначнаго числа на однозначное и на двузначное же.

При дѣленіи многозначнаго числа на многозначное же, если частное ихъ есть число однозначное, должно руководствоваться первою или первыми двумя цыфрами дѣлимаго и первою цыфрою дѣлителя: частное, очевидно, не можетъ быть больше отношенія числа, выражаемаго первою или первыми двумя цыфрами дѣлимаго, къ числу, выражаемому первою цыфрою дѣлителя. Пусть, напр., требуется раздѣлить 57 на 19; очевидно, что частное не можетъ быть больше 5-ти; но оно не можетъ быть также равно ни 5-ти, ни даже 4-мъ, потому что $19 \times 5 = 95$, а $19 \times 4 = 76$; положивъ, что

$$57 : 19 = 3,$$

получимъ, что дѣлимое въ этомъ случаѣ дѣлится на дѣлителя безъ остатка. Другой примѣръ: пусть требуется раздѣлить 3 072 на 768; отношеніе этихъ чиселъ не можетъ быть больше отношенія 30-ти къ 7-ми. Положивъ, что искомое частное равно 4-мъ, получимъ

$$3\,072 : 768 = 4,$$

т. е. дѣлимое и въ этомъ случаѣ дѣлится на дѣлителя безъ остатка.

Задаться цыфрою частнаго значитъ предположить, что искомая цыфра частнаго есть та или другая цыфра; но при этомъ можно задаться вѣрно или невѣрно. Научиться вѣрно задаваться цыфрами частнаго можно только путемъ многочисленныхъ упражненій въ дѣленіи многозначныхъ чиселъ на многозначныя же.

§ 46. Если требуется раздѣлить какое-нибудь многозначное число, напр. 193 195, на 625 равныхъ частей, то это значитъ, что надо найти такое множимое, отъ умноженія котораго на 625 получилось бы 193 195. Но 193 195 должно было бы получиться и въ томъ случаѣ, если бы мы 625 умножили на искомое число. Стало-быть, 625 можетъ быть разсматриваемо не только какъ множитель, для котораго подыскивается множимое, но также и какъ множимое, для котораго подыскивается множитель. Вслѣдствіе этого можно замѣнить дѣленіе числа 193 195 на 625 равныхъ частей кратнымъ сравненіемъ того же числа съ 625-тью. Дѣленіе числа на равныя части.

Въ силу такихъ же соображеній, при производствѣ дѣленія всякихъ чиселъ на равныя части поступаютъ по правиламъ производства кратнаго сравненія или даже просто замѣняютъ одно дѣйствіе другимъ. Но при этомъ не должно упускать изъ виду наименованіе частнаго, если дѣлимое есть число именованное. Равнымъ образомъ не должно упускать изъ виду, что при кратномъ сравненіи двухъ чиселъ получается число непремѣнно отвлеченное.

Примѣчаніе. Провѣрка дѣленія на равныя части дѣлается такъ же, какъ и провѣрка дѣйствія кратнаго сравненія (§ 44), съ тою лишь разницею, что если дѣлимое не есть число отвлеченное, то надо, при повѣркѣ, умножить не дѣлителя на частное, а наоборотъ частное на дѣлителя.

§ 47*. Письменное производство дѣленія можно производить не записывая всякій разъ произведенія, получаемаго отъ умноженія дѣлителя на число, обозначаемое отысканною цыфрою частнаго. Сокращенное письменное производство дѣленія.

При этомъ изустно производятъ такія вычисленія: 18 въ

1) $63\dot{3}810 \mid 18$
$98 \quad 3545$
81
90
0

2) $74\dot{5}61 \mid 83$
$816 \quad 898$
691
27

63-хъ содержится 3 раза; трижды восемь двадцать четыре; да 9 тридцать три; трижды одинъ три, да три — шесть. Сношу цыфру 8; 18 въ 98-ми содержится 5 разъ; пятью восемь сорокъ; да 8 сорокъ восемь; пятью одинъ пять, да четыре девять, и т. д.—При этомъ пользуются тѣмъ способомъ производства вычитанія, который изложенъ въ § 21. Такъ же выполнено второе вычисленіе.

Третій способъ.

§ 48*. Кромѣ вышеописанныхъ двухъ способовъ письменнаго производства дѣленія, полезно, въ случаѣ многозначнаго дѣлителя, пользоваться таблицею произведеній даннаго дѣлителя на однозначныя числа. Такъ, если требуется найти частное 6 678 561 : 548, то сначала составляемъ таблицу этихъ произведеній.

$548 \times 1 =$	548
$548 \times 2 =$	$1\,096$
$548 \times 3 =$	$1\,644$
$548 \times 4 =$	$2\,192$
$548 \times 5 =$	$2\,740$
$548 \times 6 =$	$3\,288$
$548 \times 7 =$	$3\,836$
$548 \times 8 =$	$4\,384$
$548 \times 9 =$	$4\,932$

Затѣмъ отыскиваемъ послѣдовательно всѣ цыфры частнаго, подбирая наиболѣе близкія произведенія. При этомъ исключается неувѣренность въ нѣкоторыхъ цыфрахъ частнаго и часто встрѣчающаяся на практикѣ необходимость поправокъ въ случаѣ, когда мы невѣрно задались какою либо цыфрою частнаго. Вычисленія располагаются слѣдующимъ образомъ:

1) $6678561 : 548 = 12186$, или
—548
1198
—1096
1025
—548
4776
—4384
3921
—3288
233

2) $6678561 : 548 = 12186.$
1198
1025
4776
3921
233

Въ особенности этотъ способъ производства дѣленія полезенъ въ случаѣ, если въ обозначеніи дѣлителя болѣе трехъ цыфръ.

Число цыфръ частнаго.

§ 49. Число цыфръ частнаго, даже если это послѣднее—число многозначное, всегда можетъ быть заранѣе вполнѣ точно опредѣлено. Для этого слѣдуетъ только отдѣлить въ дѣлимомъ (считая отъ лѣвой руки къ правой) столько цыфръ, сколько ихъ необходимо для полученія первой цыфры частнаго: число цыфръ этого послѣдняго всегда одною единицею больше числа остающихся справа цыфръ дѣлимаго. Такъ, число цыфръ частнаго, происходящаго отъ раздѣленія 17 635 на 28, равно тремъ, число цыфръ частнаго отъ раздѣленія 16 832 на 12 равно четыремъ, и т. д. — Вообще число цыфръ частнаго должно быть либо равно разности между числомъ цыфръ дѣлимаго и числомъ цыфръ дѣлителя, либо меньше этой разности на одну единицу. Ср. § 39.

Объ употребленіи скобокъ въ ариѳметикѣ.

§ 50. Число, получаемое по совершеніи дѣйствія надъ данными числами, называется, какъ извѣстно, *результатомъ* этого дѣйствія надъ данными числами. Такъ, сумма есть результатъ сложенія, разность—результатъ вычитанія, и т. д. Точно также 24 есть результатъ дѣйствій, обозпаченныхъ въ записи: $4 - 2 + 16 - 4 + 10$, а 25—результатъ дѣйствій, обозначенныхъ въ записи: **Употребленіе скобокъ.**

$$(14 - 2) \times 2 + 1, \text{ и т. п.}$$

Запись, требующая производства нѣкотораго ряда дѣйствій надъ нѣкоторыми опредѣленными числами, называется *ариѳметическимъ выраженіемъ.* Такъ, выше разсмотрѣнныя записи суть ариѳметическія выраженія. Для обозначенія дѣйствій употребляются обычные знаки, а для обозначенія того или иного порядка дѣйствій употребляются особенные знаки разной величины и вида, называемые *скобками.* Такъ, напр., если требуется сначала найти сумму чиселъ 18 и 12, потомъ разность тѣхъ же чиселъ, а полученные результаты перемножить, то это обозначаютъ такъ: $(18+12)\times(18-12)$; если изъ этого произведенія надо вычесть разность между числами 17 и 4, а вновь полученное умножить на 6, то всю эту совокупность дѣйствій обозначаютъ помощью знаковъ и скобокъ слѣдующимъ образомъ: $[(18 + 12) \times (18 - 12) - (17 - 4)] \times 6$.

Вообще не принято ставить скобокъ въ случаяхъ:

1) когда требуется найти сумму или произведеніе нѣсколькихъ чиселъ, т. е. не принято писать:

$$\{[(2 + 4) + 7] + 3\} + 5 \text{ и } \{[(2 \times 4) \times 7] \times 3\} \times 5,$$

а вмѣсто этого, пишутъ просто:

$$2 + 4 + 7 + 3 + 5 \text{ и } 2 \times 4 \times 7 \times 3 \times 5;$$

2) когда надо совершить послѣдовательный рядъ сложеній и вычитаній надъ данными числами, т. е. не принято писать: $\{[(8 + 7) - 5] - 2\} + 4$, а пишутъ просто: $8 + 7 - 5 - 2 + 4$;

3) когда рядъ сложеній или вычитаній совершается надъ произведеніями или частными чиселъ, т. е. не принято писать:

$$(2 \times 3) + (3 \times 5) - (4 \times 3) - (15 : 5),$$

а пишутъ просто:

$$2 \times 3 + 3 \times 5 - 4 \times 3 - 15 : 5.$$

Но вообще, во избѣжаніе недоразумѣній, лучше поставить скобки, хотя и не необходимыя, но лишь бы правильно, чѣмъ упустить скобки, когда онѣ необходимы *).

Объ измѣненіяхъ суммы и разности.

Основныя свойства суммы и разности.

§ 51*. Ученіе объ измѣненіи суммы и разности основано на слѣдующихъ свойствахъ тѣхъ ариѳметическихъ выраженій, въ которыя входятъ только дѣйствія сложенія и вычитанія:

1) Величина суммы не зависитъ ни отъ порядка слагаемыхъ, ни отъ ихъ группировки (§§ 12 и 13). Такъ, напр., слѣдующія записи выражаютъ одну и ту же сумму:

$1+2+3+4$	$2+1+3+4$	$3+1+2+4$	$4+1+2+3$
$1+2+4+3$	$2+1+4+3$	$3+1+4+2$	$4+1+3+2$
$1+3+2+4$	$2+3+1+4$	$3+2+1+4$	$4+2+1+3$
$1+3+4+2$	$2+3+4+1$	$3+2+4+1$	$4+2+3+1$
$1+4+2+3$	$2+4+1+3$	$3+4+1+2$	$4+3+1+2$
$1+4+3+2$	$2+4+3+1$	$3+4+2+1$	$4+3+2+1$

Равнымъ образомъ одну и ту же сумму даютъ слѣдующія различныя по виду группировки:

$$(1+2)+(3+4),$$
$$(1+3)+(2+4),$$
$$(1+4)+(2+3)$$

и всѣ, изъ нея вытекающія послѣ перемѣщенія слагаемыхъ, стоящихъ въ скобкахъ, а равно и результаты группировки:

$$1+(2+3)+4,\ \ 2+(1+3)+4,$$
$$1+(2+4)+3,\ \ 2+(1+4)+3,$$
$$1+(3+4)+2,$$

и всѣ вытекающія изъ нихъ группировки.

2) Величина суммы не измѣняется отъ одновременнаго увели-

---

*) Часто прибѣгаютъ къ скобкамъ только для того, чтобы лучше оттѣнить смыслъ какого либо равенства. Такъ, напр., для того, чтобы лучше оттѣнить то свойство произведенія трехъ чиселъ, по которому величина этого произведенія не зависитъ отъ того—которое изъ нихъ принято за второе и которое за третье, пишутъ: $(15 \times 3) \times 4 = (15 \times 4) \times 3$.

ченія одного изъ слагаемыхъ на нѣкоторое число и уменьшенія другого—на то же число. Такъ,

$$15 + 10 = (15 - 1) + (10 + 1) = (15 - 2) + (10 + 2)$$

и т. д.

3) Величина разности не измѣняется отъ одновременнаго увеличенія (или уменьшенія) уменьшаемаго и вычитаемаго на одно и то же число. Такъ:

$$15 - 7 = (15 + 1) - (7 + 1) = (15 + 2) - (7 + 2), \text{ и т. д.,}$$

а съ другой стороны:

$$15 - 7 = (15 - 1) - (7 - 1) = (15 - 2) - (7 - 2), \text{ и т. д.}$$

4) Результатъ послѣдовательнаго примѣненія дѣйствій сложенія и вычитанія, равенъ суммѣ всѣхъ слагаемыхъ, уменьшенной на сумму всѣхъ вычитаемыхъ чиселъ. Такъ,

$$12 - 3 + 5 - 7 + 6 - 2 = (12 + 5 + 6) - (3 + 7 + 2),$$
$$14 - 5 - 2 + 7 + 3 - 6 = (14 + 7 + 3) - (5 + 2 + 6), \text{ и т. п.}$$

Обратно: вычитаніе суммы нѣсколькихъ чиселъ изъ даннаго числа можно замѣнить послѣдовательнымъ вычитаніемъ слагаемыхъ этой суммы изъ даннаго уменьшаемаго. Такъ,

$$100 - (12 + 30 + 40) = 100 - 12 - 30 - 40.$$

5) Результатъ сложенія даннаго числа съ разностью какихънибудь двухъ чиселъ равенъ результату вычитанія вычитаемаго изъ суммы даннаго числа съ уменьшаемымъ. Такъ,

$$4 + (7 - 2) = 4 + 7 - 2,$$
$$15 + (9 - 4) = 15 + 9 - 4, \text{ и т. п.}$$

Дѣйствительно: въ первомъ изъ этихъ случаевъ 4 есть одно слагаемое, а выраженіе $(7 - 2)$ другое; поэтому

$$4 + (7 - 2) = (4 - 2) + (7 - 2 + 2) = 4 - 2 + 7 = 4 + 7 - 2;$$

точно такъ же

$$15 + (9 - 4) = (15 - 4) + (9 - 4 + 4) = 15 - 4 + 9 = 15 + 9 - 4.$$

6) Результатъ вычитанія изъ даннаго числа разности двухъ чиселъ равенъ результату вычитанія уменьшаемаго изъ суммы даннаго числа съ вычитаемымъ. Такъ,

$$15 - (10 - 3) = 15 + 3 - 10$$
$$17 - (8 - 2) = 17 + 2 - 8, \text{ и т. п.}$$

Дѣйствительно (на основаніи свойства 3-го):

$$15 - (10 - 3) = (15 + 3) - (10 - 3 + 3) = 15 + 3 - 10,$$
$$17 - (8 - 2) = (17 + 2) - (8 - 2 + 2) = 17 + 2 - 8, \text{ и т. п.}$$

Измѣненія суммы.

§ 52*. Отъ увеличенія одного изъ слагаемыхъ на какое нибудь число сумма увеличивается на такое же число. Такъ, напр.,

$$19 + 27 + 36 = 82,$$

а $$(19 + \mathbf{5}) + 27 + 36 = (19 + 27 + 36) + \mathbf{5} = 82 + \mathbf{5}.$$

Отъ уменьшенія одного изъ слагаемыхъ на нѣкоторое число сумма уменьшается на то же число. Такъ, напр.,

$$19 + 27 + 36 = 82,$$

а $$(19 - \mathbf{4}) + 27 + 36 = (19 + 27 + 36) - \mathbf{4} = 82 - \mathbf{4}.$$

Отъ одновременнаго увеличенія нѣкоторыхъ или всѣхъ слагаемыхъ на нѣкоторыя числа сумма увеличивается на сумму этихъ чиселъ. Такъ, напр.,

$$19 + 27 + 36 = 82,$$

а $$(19+\mathbf{2})+(27+\mathbf{3})+(36+\mathbf{5})=(19+27+36)+(\mathbf{2}+\mathbf{3}+\mathbf{5}).$$

Отъ одновременнаго уменьшенія нѣкоторыхъ или всѣхъ слагаемыхъ данной суммы на нѣкоторыя числа сумма эта уменьшается на сумму всѣхъ чиселъ, на которыя уменьшены слагаемыя. Такъ, напр.,

$$19 + 27 + 36 = 82,$$

а $$(19-\mathbf{2})+(27-\mathbf{4})+(36-\mathbf{7})=(19+27+36)-(\mathbf{2}+\mathbf{4}+\mathbf{7}).$$

Отъ одновременнаго увеличенія однихъ слагаемыхъ на одни числа и уменьшенія другихъ на тѣ же или другія числа сумма увеличивается на сумму прибавленныхъ и уменьшается на сумму отнятыхъ чиселъ. Такъ, напр.,

$$19 + 27 + 36 + 45 = 127,$$

а $$(19 + \mathbf{3}) + (27 + \mathbf{12}) + (36 - \mathit{6}) + (45 - \mathit{4}) =$$
$$= (19 + 27 + 36 + 45) + (\mathbf{3} + \mathbf{12}) - (\mathit{6} + \mathit{4}).$$

Измѣненія разности.

§ 53*. Отъ увеличенія уменьшаемаго на нѣкоторое число разность увеличивается на то же число. Такъ, напр.,

$$27 - 9 = 18, \text{ а } (27 + \mathbf{6}) - 9 = (27 - 9) + \mathbf{6} = 18 + \mathbf{6}.$$

Отъ уменьшенія уменьшаемаго на нѣкоторое число разность уменьшается на то же число. Такъ, напр.,

$$27 - 9 = 18, \; (27 - \mathbf{3}) - 9 = (27 - 9) - \mathbf{3} = 18 - \mathbf{3}.$$

Отъ увеличенія вычитаемаго на нѣкоторое число разность уменьшается на то же число. Такъ, напр.,

$$27 - 9 = 18, \text{ а } 27 - (19 + \mathbf{4}) = (27 - 9) - \mathbf{4} = 18 - \mathbf{4}.$$

Отъ уменьшенія вычитаемаго на нѣкоторое число разность увеличивается на то же число. Такъ, напр., $27 - 9 = 18$, а

$$27-(9-\mathbf{4})=27+\mathbf{4}-9=(27-9)+\mathbf{4}=18+\mathbf{4}.$$

Объ измѣненіяхъ произведенія и частнаго.

§ 54*. Ученіе объ измѣненіи произведенія и частнаго основано на слѣдующихъ свойствахъ дѣйствій умноженія и дѣленія: Основныя свойства произв. и частнаго.

1) Величина произведенія не зависитъ ни отъ порядка сомножителей, ни отъ ихъ группировки. (§§ 25—32 и 34).

2) Если раздѣлить произведеніе нѣсколькихъ сомножителей на одного изъ нихъ, то получится произведеніе остальныхъ множителей. Такъ, $(3 \times 5 \times 7 \times 8) : 7 = 3 \times 5 \times 8$; дѣйствительно:

$$(3 \times 5 \times 7 \times 8) : 7 = [(3 \times 5 \times 8) \times 7] : 7 = 3 \times 5 \times 8,$$

ибо раздѣлить произведеніе $(3 \times 5 \times 8) \times 7$ на 7 значитъ найти множимое, произведеніе котораго на 7 равняется $(3 \times 5 \times 8) \times 7$, а такимъ множимымъ и является произведеніе, запись котораго заключена, въ послѣднемъ выраженіи, въ круглыя скобки.

3) Если раздѣлить произведеніе нѣсколькихъ чиселъ, изъ которыхъ одно дѣлится на какое нибудь число, на это послѣднее число, то получится произведеніе всѣхъ остальныхъ сомножителей, помноженное на частное, происходящее отъ раздѣленія сказаннаго сомножителя на даннаго дѣлителя. Такъ,

$$(6 \times 35 \times 8) : 7 = (6 \times 8) \times (35 : 7),$$

потому что

$$(6 \times 35 \times 8) : 7 = (6 \times 7 \times 5 \times 8) : 7 = 6 \times 5 \times 8 = (6 \times 8) \times 5 =$$
$$= (6 \times 8) \times (35 : 7).$$

4) Если какое либо число дѣлится на данное произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, то результатъ раздѣленія этого числа на это произведеніе равенъ окончательному результату, который получится, если первоначально раздѣлить данное дѣлимое на перваго изъ множителей, полученное — на второго, вновь полученное — на третьяго, и т. д. до послѣдняго множителя включительно. Напр.,

$$360 : (2 \times 3 \times 5 \times 6) = [\{360 : 2) : 3] : 5\} : 6,$$

такъ какъ 360 дѣлится на произведеніе $2 \times 3 \times 5 \times 6$, т. е. на 180. Дѣйствительно, частное $360 : 180 = 2$; стало быть,

$$360 = 180 \times 2 = 2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 2,$$

откуда

$$360 : 2 = 2 \times 3 \times 6 \times 5,$$
$$(360 : 2) : 3 = 5 \times 6 \times 2,$$
$$[(360 : 2) : 3] : 5 = 6 \times 2,$$
$$\{[(360 : 2) : 3] : 5\} : 6 = 2,$$

т. е.

$$\{[(360 : 2) : 3] : 5\} : 6 = 360 : (2 \times 3 \times 5 \times 6),$$

или, что все равно:

$$360 : (2 \times 3 \times 5 \times 6) = \{[(360 : 2) : 3] : 5\} : 6.$$

Измѣненія произведенія. § 55*. Отъ увеличенія множимаго въ нѣсколько разъ произведеніе двухъ чиселъ увеличивается во столько же разъ. Такъ,

$$7 \times 5 = 35, \text{ а } (7 \times 2) \times 5 = (7 \times 5) \times 2 = 35 \times 2.$$

Точно такъ же отъ увеличенія множителя въ нѣсколько разъ произведеніе увеличивается во столько же разъ. Такъ,

$$7 \times 5 = 35, \text{ а } 7 \times (5 \times 3) = (7 \times 5) \times 3 = 35 \times 3.$$

Отъ одновременнаго увеличенія одного изъ сомножителей въ нѣкоторое число разъ, другого—въ то же или иное число разъ, и т. д., произведеніе увеличивается во столько разъ, сколько единицъ заключается въ произведеніи всѣхъ вновь введенныхъ множителей. Такъ, напр.,

$$3 \times 5 \times 7 \times 8 = 840,$$

а $$(3 \times 2) \times (5 \times 4) \times (7 \times 6) \times 8 = 840 \times (2 \times 4 \times 6),$$

потому что

$$(3 \times 2) \times (5 \times 4) \times (7 \times 6) \times 8 = (3 \times 5 \times 7 \times 8) \times (2 \times 4 \times 6).$$

Отъ уменьшенія одного изъ сомножителей даннаго произведенія въ нѣсколько разъ произведеніе уменьшается во столько же разъ. Такъ, напр.,

$$24 \times 5 = 120, \text{ а } (24 : 3) \times 5 = 120 : 3,$$

потому что

$$(24 : 3) \times 5 = (24 \times 5) : 3.$$

Отъ одновременнаго уменьшенія одного изъ сомножителей въ нѣкоторое число разъ, другого—въ то же или иное число разъ и т. д., произведеніе уменьшается во столько разъ, сколько единицъ въ произведеніи введенныхъ дѣлителей. Такъ, напр.,

$$24 \times 35 \times 18 = 15\,120,$$

а $$(24 : 4) \times (35 : 7) \times (18 : 9) = 15\,120 : (4 \times 7 \times 9),$$

потому что

$$\begin{aligned}(24 : 4) \times (35 : 7) \times (18 : 9) &= \\ = [(24 : 4) \times (35 : 7) \times 18] : 9 &= \\ = \{[18 \times (24 : 4) \times 35] : 7\} : 9 &= \\ = \{[(18 \times 35 \times 24) : 4] : 7\} : 9 &= \\ = (24 \times 35 \times 18) : (4 \times 7 \times 9).\end{aligned}$$

Отъ одновременнаго увеличенія одного изъ сомножителей и уменьшенія другого въ одно и то же число разъ произведеніе не измѣняется. Такъ,

$$8 \times 6 = 48, \text{ а } (8 \times 2) \times (6 : 2) = [(8 \times 6) \times 2] : 2 = 8 \times 6.$$

§ 56*. Измѣненія частнаго въ зависимости отъ измѣненія дѣлимаго и дѣлителя разсматриваются ниже только для тѣхъ случаевъ, когда дѣленіе совершается безъ остатка. Въ этомъ случаѣ, т. е. если дѣлимое дѣлится безъ остатка на дѣлителя, то: Измѣненія частнаго.

Отъ увеличенія (уменьшенія) дѣлимаго въ нѣсколько разъ частное увеличивается (уменьшается) во столько же разъ. Такъ, напр.,

$$70 : 5 = 14, \text{ а } (70 \times 3) : 5 = 14 \times 3,$$

потому что

$$(70 \times 3) : 5 = (70 : 5) \times 3, \text{ и т. д.}$$

Отъ увеличенія (уменьшенія) дѣлителя въ нѣсколько разъ частное уменьшается (увеличивается) во столько же разъ. Такъ, напр.,

$$60 : 3 = 20, \text{ а } 60 : (3 \times 5) = 20 : 5,$$

потому что

$$60 : (3 \times 5) = (60 : 3) : 5, \text{ и т. д.}$$

Отъ одновременнаго увеличенія (или уменьшенія) дѣлимаго и дѣлителя въ одинаковое число разъ частное не измѣняется. Такъ, напр.,

$$20 : 4 = 5; \text{ точно такъ же и } (20 \times 3) : (4 \times 3) = 5,$$

потому что

$$(20 \times 3) : (4 \times 3) = [(20 \times 3) : 3] : 4 = 20 : 4, \text{ и т. д.}$$

Примѣчаніе. При уменьшеніи дѣлимаго и при увеличеніи дѣлителя въ нѣсколько разъ, выше предполагается, что и при измѣненныхъ данныхъ дѣлимое не становится больше дѣлителя.

§ 57. На ученіи объ измѣненіяхъ искомыхъ чиселъ въ зависимости отъ измѣненія данныхъ основаны нѣкоторые сокращенные способы производства дѣйствій въ очень многихъ частныхъ случаяхъ. Нѣкот. случаи сокращеннаго производства дѣйствій.

а) *Сложеніе.* Пусть дано сложить 17 365 и 99 999. Вмѣсто этого находимъ сумму 17 365 + 100 000 и изъ полученной суммы вычитаемъ единицу. Къ подобному пріему можно прибѣгнуть при сокращеніи производства сложенія и въ слѣдующихъ случаяхъ:

$$99\,998 + 999 = 100\,000 + 1000 - 2 - 1.$$
$$980 + 736 = 1000 + 736 - 20.$$
$$7\,653 + 999 = (7\,653 + 1000) - 1.$$
$$2\,375 + 9\,998 = (2\,375 + 10\,000) - 2.$$
$$2\,375 + 9\,970 = (2\,375 + 10\,000) - 30.$$
$$75\,378 + 99\,800 = (75\,378 + 100\,000) - 200.$$

Подобнымъ же способомъ можетъ быть совершено дѣйствіе сложенія, когда одно изъ слагаемыхъ близко къ какому либо однозначному числу единицъ извѣстнаго разряда, будучи, при этомъ, меньше его. Напр.:

$$273 + 498 = (273 + 500) - 2.$$
$$7\,653 + 2\,999 = (7\,653 + 3000) - 1.$$
$$1\,367 + 7\,996 = (1\,367 + 8000) - 4.$$

Такая замѣна обычнаго способа сокращеннымъ приводитъ скорѣе къ искомому результату также и тогда, когда большее число слагаемыхъ удовлетворяетъ одному изъ только что разсмотрѣнныхъ условій. Напр.:

$$7\,998+2\,996=(8000+3000)-(2+4),$$
$$9\,999+998=(10\,000+1000)-(1+2),$$
$$298+396+499=(300+400+500)-(2+4+1),$$
$$3\,996+9\,900+9\,990=(4000+10\,000+10\,000)-(4+100+10).$$

б) *Вычитаніе.* Пусть дано вычесть 9 999 изъ 27 384. Вмѣсто этого находимъ разность 27 384—10 000, а къ полученному прибавляемъ единицу. Точно такъ же могутъ быть вычислены слѣдующія разности:

$$17\,365-9\,998=17\,365-10\,000+2$$
$$101\,001-9\,999=101\,001-10\,000+1, \text{ и т. п.}$$

в) *Умноженіе.* Пусть дано умножить 375 на 99. Вмѣсто этого можно 375 умножить на 100 съ тѣмъ, чтобы изъ полученнаго вычесть 375. Точно такъ же можно вычислить слѣдующее произведеніе: $27\,386\times 9\,999=27\,386\times 10\,000-27\,386$, и т. п.

Вмѣсто того, чтобы умножить 2 381 на 5, можно 23 810 раздѣлить на 2. Точно такъ же могутъ быть вычислены слѣдующія произведенія:

$$376\times 25=37\,600:4,$$
$$316\times 75=7\,900+7\,900+7\,900,$$

гдѣ

$$7\,900=316\times 25=31\,600:4, \text{ и т. п.}$$

Заслуживаютъ также вниманія случаи умноженія на 90, на 900, и т. п. Такъ:

$$387\times 90=38\,700-3\,870$$
$$457\times 900=457\,000-45\,700 \text{ и т. д.}$$

Вмѣсто того, чтобы умножить 264 на 175, можно умножить 264 на 200, съ тѣмъ чтобы изъ полученнаго числа вычесть одну восьмую долю полученнаго. И т. п. *)

Наконецъ, вниманія заслуживаетъ и умноженіе на 275. Такъ какъ производство умноженія на 25 и на 11 очень легко, а

$$275=25\times 11,$$

то для того, чтобы умножить 648 на 275, можно поступить такъ: $648\times 275=(648\times 25)\times 11$, гдѣ $648\times 25=16\,200$, а

$$16\,200\times 11=16\,200+162\,000.$$

---

*) См. Шохоръ-Троцкаго «Методическій Сборникъ ариѳметическихъ задачъ», часть II, стр. 32—38, №№ 231—300.

г) *Дѣленіе.* Вмѣсто того, чтобы раздѣлить число, запись котораго оканчивается нулями, на 25, можно, отбросивъ два нуля, умножить полученное число на 4. И т. п.

Примѣчаніе. Само собою разумѣется, что сокращеніе и ускореніе производства дѣйствій въ приведенныхъ случаяхъ достигаются только при *изустномъ* производствѣ вспомогательныхъ вычисленій.

§ 58*. Если данное число вычесть изъ ближайшей къ нему единицы высшаго разряда, то полученная разность называется *ариѳметическимъ дополненіемъ даннаго числа.* Такъ какъ Ариѳметическое дополненіе.

$$1\,000 - 234 = 766, \text{ а } 10\,000 - 8\,735 = 1\,265,$$

то 766 есть ариѳметическое дополненіе числа 234, а 1 265 — ариѳметическое дополненіе числа 8 735. Ариѳметическимъ дополненіемъ можно пользоваться при вычитаніи чиселъ: вмѣсто того чтобы вычесть данное число 2 359 изъ числа 4 765, можно къ этому послѣднему числу прибавить ариѳметическое дополненіе числа 2 359, т. е. 7 641, съ тѣмъ, чтобы изъ полученнаго результата была вычтена единица ближайшаго къ вычитаемому высшаго разряда. Дѣйствительно:

$$4\,765 - 2\,359 = 4\,765 + (10\,000 - 2\,359) - 10\,000 =$$
$$= 4\,765 + 7\,691 - 10\,000.$$

Нахожденіе ариѳметическаго дополненія легче всякаго другого вычитанія; поэтому, при нѣкоторомъ навыкѣ, производство вычитанія съ помощью прибавленія ариѳметическаго дополненія вычитаемаго къ уменьшаемому заслуживаетъ предпочтенія предъ иными способами вычитанія. При извѣстномъ навыкѣ расположеніе вычисленія можетъ быть совершенно такое же, какъ при обыкновенномъ способѣ производства вычитанія. (Ср. прим. къ § 57.)

Глава III.

Объ именованныхъ числахъ.

§ 59. Двѣ величины *однородны*, если одна изъ нихъ или равна другой, или больше, или меньше другой, а *разнородны*, если не можетъ быть и рѣчи о равенствѣ или неравенствѣ ихъ. (Введеніе, 3). Такъ, длина даннаго стола и вышина данной комнаты — величины однородныя, потому что одна изъ нихъ должна быть либо равна другой, либо больше, либо меньше ея; длина же стола Именованное число и величина.

и объемъ комнаты суть величины разнородныя, потому что о равенствѣ или неравенствѣ объема комнаты и длины стола не можетъ быть и рѣчи.

Всякое именованное число (см. Введеніе, 3) выражаетъ нѣкоторую величину, измѣренную какою либо однородною съ нею величиною, принимаемою при измѣреніи величинъ этого рода за единицу мѣры. Такъ, 14 футовъ есть длина, измѣренная длиною, которая называется футомъ и принимается иногда при измѣреніи длинъ за единицу мѣры. Строго говоря, именованное число—вовсе не число, а только величина; но для удобства рѣчи измѣренныя величины, выраженныя помощью чиселъ въ зависимости отъ извѣстныхъ единицъ мѣры, называются числами и притомъ именованными.

Единицы мѣры.

§ 60. Въ Россіи приняты слѣдующія единицы мѣры:

I. **Мѣры длины**: верста, сажень, аршинъ, вершокъ, дюймъ.

Въ милѣ (географической) приблизительно 7 верстъ.
Въ верстѣ 500 сажень.
Въ сажени 3 аршина.
Въ аршинѣ 16 вершковъ.

Кромѣ того, у насъ приняты за мѣры длины также англійскій футъ и его подраздѣленія:

Въ сажени 7 футовъ.
Въ футѣ 12 дюймовъ.
Въ дюймѣ 10 линій.

II. **Мѣры поверхностей**: квадратная миля, квадратная верста, и т. д., и десятина.

Въ □ (квадратной) милѣ 49 □ (квадр.) верстъ.
Въ □ верстѣ 250 000 □ сажень.
Въ □ сажени 9 □ аршинъ.
Въ □ аршинѣ 256 □ вершковъ.
Въ □ сажени 49 □ футовъ.
Въ □ футѣ 144 □ дюйма.
Въ □ дюймѣ 100 □ линій.
Въ десятинѣ 2 400 □ сажень.

III. **Мѣры объемовъ**: кубическая сажень, кубическій аршинъ, и т. д.

Въ кубической сажени 27 кубическихъ аршинъ.
Въ кубическомъ аршинѣ 4096 кубическихъ вершковъ.
Въ кубической сажени 243 кубическихъ фута.
Въ кубическомъ футѣ 1 728 кубическихъ дюймовъ.
Въ кубическомъ дюймѣ 1 000 куб. линій.

IV. Мѣры сыпучихъ тѣлъ: четверть, четверикъ, гарнецъ.

Въ четверти (или кулѣ) 2 осьмины или 8 четвериковъ (мѣръ).
Въ четверикѣ 8 гарнцевъ.
Въ гарнцѣ 30 долей.

V. Мѣры жидкихъ тѣлъ: бочка, ведро и штофъ.

Въ бочкѣ 40 ведеръ.
Въ ведрѣ 10 штофовъ или кружекъ.
Въ штофѣ 10 чарокъ.

VI. Мѣры торговаго вѣса: пудъ, фунтъ, лотъ, золотникъ, доля.

Въ тоннѣ 10 берковцевъ.
Въ берковцѣ 10 пудовъ.
Въ пудѣ 40 фунтовъ.
Въ фунтѣ 32 лота.
Въ лотѣ 3 золотника.
Въ золотникѣ 96 долей *).

VII. Мѣры цѣнностей: рубль и копейка.

Въ рублѣ 100 копеекъ.
Въ полтинникѣ 50 коп.
Въ четвертакѣ 25 коп.
Въ двугривенномъ 20 коп.
Въ пятиалтынномъ 15 коп.
Въ гривенникѣ 10 коп.
Въ пятакѣ 5 коп.
Въ копейкѣ 2 денежки или 4 полушки **).

VIII. Мѣры времени: годъ, мѣсяцъ, сутки, часъ, минута и секунда.

Въ вѣкѣ (или столѣтіи) 100 лѣтъ.
Въ году 12 мѣсяцевъ; въ простомъ 365, въ високосномъ 366 дней.
Въ мѣсяцѣ, среднимъ числомъ, 30 дней или сутокъ ***).

---

*) О мѣрахъ аптекарскаго вѣса см. отдѣлъ «Доп. статей».

**) Кромѣ того, въ Россіи употребительны *кредитные билеты:* рублеваго достоинства (желтаго цвѣта), трехрублеваго (зеленаго), пятирублеваго (синяго), десятирублеваго (краснаго), двадцатипятирублеваго (бѣлаго), пятидесятирублеваго (сѣраго цвѣта, нынѣ не встрѣчающіеся) и сторублеваго (цвѣта радуги).—Серебряные рубль, полтинникъ и четвертакъ чеканятся изъ серебра $83^1/_3$ пробы, а остальная серебряная монета—изъ серебра болѣе низкой пробы. См. отд. «Доп. статей».

***) Въ Январѣ, Мартѣ, Маѣ, Іюлѣ, Августѣ, Октябрѣ и Декабрѣ по 31 дню; въ Февралѣ простого года 28 дней, а високоснаго—29 дней; въ остальныхъ же мѣсяцахъ (Апрѣлѣ, Іюнѣ, Сентябрѣ и Ноябрѣ) по 30-ти дней. Въ первомъ полугодіи простого года такимъ образомъ 181 день, а високоснаго 182 дня, во второмъ же полугодіи всякаго года 184 дня.

Въ суткахъ 24 часа.
Въ часѣ 60 минутъ.
Въ минутѣ 60 секундъ.

IX. Мѣры количества бумаги: стопа и десть.

Въ стопѣ 20 дестей.
Въ дести 24 листа.

Метрическая система мѣръ.

§ 61 *. Въ научныхъ сочиненіяхъ въ настоящее время употребляются чаще всего мѣры *метрической* (такъ называемой французской или десятичной) *системы*.

а) Мѣры длины:

Метръ (равный 3 ф. 3 дюймамъ и 4 линіямъ безъ малаго или 22 съ половиною вершка безъ малаго) есть основная мѣра длины. Декаметръ равенъ 10-ти метрамъ, гектометръ — 10-ти декам., километръ — 10-ти гектометрамъ, и миріаметръ — 10-ти километрамъ. Кромѣ того, метръ раздѣляется на 10 равныхъ между собою частей, изъ которыхъ каждая называется десиметромъ, десиметръ же равенъ 10-ти сантиметрамъ, а сантиметръ — 10-ти миллиметрамъ.

б) Мѣры поверхности:

Аръ (равный безъ малаго 22 кв. саж.) есть квадратный декаметръ и служитъ основною мѣрой для поверхностей земельныхъ участковъ. Наиболѣе употребительна мѣра въ 100 аровъ, называемая гектаромъ и равная 2200 кв. саж. безъ малаго.

в) Мѣры объемовъ:

Стеръ есть основная мѣра объемовъ только громоздкихъ тѣлъ (дровъ и пр.). Онъ равенъ кубическому метру и составляетъ 35 слишкомъ кубическихъ футовъ. Вообще же употребляются мѣры: куб. гектометръ, куб. декаметръ, куб. десиметръ, куб. сантиметръ и куб. миллиметръ.

г) Мѣры сыпучихъ и жидкихъ тѣлъ:

По метрической системѣ, количества жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ измѣряются однѣми и тѣми же мѣрами. Основная мѣра сыпучихъ и жидкихъ тѣлъ называется — *литромъ*; литръ равенъ куб. десиметру (61 слишкомъ куб. дюймовъ); названія единицъ того же рода высшихъ и низшихъ наименованій составляются такимъ же образомъ, какъ названія единицъ длины.

д) Мѣры вѣса:

Граммъ (почти 22 доли съ половиною) есть основная единица вѣса; онъ равенъ вѣсу одного куб. сантиметра перегнанной воды при 4-хъ градусахъ Цельзія. Названія единицъ вѣса высшихъ и низшихъ наименованій составляются такимъ же образомъ, какъ названія единицъ длины. Наиболѣе употребительною, рядомъ съ граммомъ, единицею мѣры служитъ *килограммъ* или кило̀, равный приблизительно 2 ф. 42 золотникамъ. Кромѣ того, должно замѣтить мѣры: *квинталъ* (10 миріаграммовъ) и *тонну* (10 квинталей).

Составныя именованныя числа и ихъ преобразованія.

§ 62. Болѣе крупныя единицы мѣры по отношенію къ болѣе мелкимъ того же рода называются единицами *высшаго наименованія*, а болѣе мелкія называются по отношенію къ болѣе крупнымъ — единицами *низшаго наименованія*. Такъ, сажень есть единица низшаго наименованія по отношенію къ милѣ и верстѣ; по отношенію же къ футу, дюйму и линіи, а также по отношенію къ аршину и вершку сажень есть единица высшаго наименованія.

Величина иногда не выражается въ единицахъ одного наименованія: при измѣреніи, напр., данной длины футомъ можетъ случиться, чтобы онъ въ ней помѣстился 6 разъ и чтобы при этомъ получился остатокъ, меньшій одного фута; въ такомъ случаѣ этотъ остатокъ измѣряютъ ближайшею мѣрою низшаго наименованія, т. е. дюймомъ. Пусть дюймъ въ этомъ остаткѣ помѣщается, напр., 9 разъ и пусть при этомъ получился новый остатокъ, но меньшій одного дюйма; тогда этотъ остатокъ измѣряютъ ближайшею единицею низшаго наименованія, т. е. линіею. Пусть линія помѣстилась въ новомъ остаткѣ ровно 7 разъ. Тогда данная длина равняется 6 футамъ 9 дюймамъ и 7 линіямъ.

Именованное число, выраженное въ единицахъ одного только наименованія, называется *простымъ;* именованное же число, выраженное въ единицахъ разныхъ послѣдовательныхъ наименованій, называется *составнымъ*. Такъ, величины 5 фут., 7 фунт., 4 часа суть простыя именованныя числа; величины же, изъ которыхъ въ одной содержится 5 фунт. и 3 лота, въ другой — 4 фута 7 дюйм. и 9 лин., въ третьей — 4 час. 10 минутъ и 30 секундъ суть составныя именованныя числа.

Достойно вниманія, что отвлеченное число, выражающее сколько единицъ даннаго наименованія заключается въ составномъ именованномъ числѣ, должна быть меньше числа, выражающаго сколько единицъ этого наименованія заключается въ единицѣ ближайшаго высшаго. Такъ, въ составномъ именованномъ числѣ

5 фунт. 7 лот. 14 долей

5 фунтовъ не составляетъ пуда, 7 лотовъ не составляетъ фунта, 14 долей не составляетъ золотника.

Возможны иногда такія задачи, которыя требуютъ обращенія даннаго простого именованнаго числа, выраженнаго въ единицахъ какого-либо наименованія, въ разное ему простое или составное именованное число, выраженное въ единицахъ высшаго наименованія. Возможны и такія задачи, которыя требуютъ обращенія составного именованнаго числа въ равное ему простое или обращенія даннаго простого именованнаго числа, выраженнаго въ единицахъ какого-либо наименованія, въ равное ему именованное число, выраженное въ единицахъ наименованія низшаго. Такъ, можетъ быть предложенъ вопросъ, напр., о томъ — сколько фунтовъ, лотовъ и золотниковъ въ 3 600 золотникахъ (первый случай), и о томъ, сколько всего золотниковъ заключается въ 3 ф. 12 лот. и 2 зол. (второй случай), или сколько лотовъ въ 3 пудахъ (третій случай). — Обращеніе составного именованнаго числа, или простого, но выраженнаго въ единицахъ высшаго наименованія, въ простое, выраженное въ единицахъ наименованія низшаго, называется *раздробленіемъ* именованныхъ чиселъ; обращеніе же числа, выраженнаго въ единицахъ низшаго наименованія, въ число, выраженное въ единицахъ наименованія высшаго, называется *превращеніемъ*. Второй и третій изъ вышеприведенныхъ случаевъ требуютъ раздробленія, первый—превращенія. Раздробленіе и превращеніе именованныхъ чиселъ, впрочемъ, суть не какія либо особенныя дѣйствія надъ именованными числами, а только преобразованія однихъ именованныхъ чиселъ въ другія, выражающія ту же величину, съ помощью дѣйствій надъ числами отвлеченными.

§ 63. Пусть требуется раздробить

Раздробленіе именованныхъ чиселъ.

3 фунта 26 лот. 2 зол. и 87 долей

въ доли. Для этого прежде всего узнаёмъ, сколько лотовъ въ 3-хъ фунтахъ; съ этою цѣлью умножимъ число 32 на 3 (потому что въ одномъ фунтѣ 32 лота). Получимъ, что въ 3-хъ фунтахъ лотовъ 96, которые вмѣстѣ съ 26-тью лотами даннаго намъ именованнаго числа составятъ 122 лота. Далѣе, узнаёмъ — сколько золотниковъ въ этихъ 122-хъ лотахъ. Для этого мы число 3 умножимъ на 122 (потому что въ лотѣ 3 золотника). Получимъ, что въ 122-хъ лотахъ—золотниковъ 366, которые вмѣстѣ съ 2-мя золотниками даннаго именованнаго числа составятъ 368 золотниковъ. Наконецъ, узнаёмъ—сколько въ этихъ 368-ми золотникахъ долей. Для этого умножимъ число 96 на 368 (потому что въ одномъ золотникѣ 96 долей). Получимъ, что въ 368-ми золотникахъ содержится 35 328 долей, которыя, вмѣстѣ съ 87-мью долями даннаго именованнаго числа, составятъ 35 415 долей. Это послѣднее число долей и есть то число ихъ, которое содержится въ данной величинѣ, т. е. въ данномъ намъ составномъ именованномъ числѣ (въ 3 фунтахъ 26 лотахъ 2 золотникахъ 87 доляхъ).

Вычисленіе въ этомъ случаѣ можетъ быть расположено по одному изъ слѣдующихъ трехъ образцовъ:

3 ф. 26 л. 2 зол. 87 долей.

1)
3 ф.
32 л.
× 3
96 л.
+ 26 л.
122 л.
3 з.
× 122
366 з.
+ 2 з.
368 з.
96 д.
× 368
2 208
33 12
35 328 д.
+ 87 д.
35 415 долей.

2)
3 (число ф.)
× 32
96 л.
+ 26 л.
122 (число л.)
× 3
366 з.
+ 2 з.
368 (число з.)
× 96
2 208
33 12
35 328 д.
+ 87 д.
35 415 долей.

3)
3 ф.
× 32
96 л.
+ 26
122 л.
× 3
366 з.
+ 2 з.
368 з.
× 96
36 800
—1 472
35 328 д.
+ 87 д.
35 415 долей.

Въ случаѣ раздробленія простого именованнаго числа (напр. 14 пудовъ въ золотники) вычисленіе можетъ быть расположено по одному изъ слѣдующихъ трехъ образцовъ:

1)
14 п.
40 ф.
× 14
560 ф.
32 л.
× 560
1 120
16 80
17 920 л.
3 з.
× 17 920
53 760 золотниковъ.

2)
14 (число п.)
× 40
560 (число ф.)
× 32
1 120 л.
16 80
17 920 (число л.)
× 3
53 760 золотниковъ.

3)
14 п.
× 40
560 ф.
× 32
1 120
16 80
17 920 л.
× 3
53 760 золотниковъ.

Примѣчаніе. Въ выше данныхъ образцахъ расположенія вычисленій при раздробленіи именованныхъ чиселъ наименѣе вѣренъ, но наиболѣе удобенъ, третій способъ расположенія вычисленій; второй отъ третьяго отличается повидимому только въ томъ отношеніи, что значеніе всякаго множимаго охарактеризовано словами, стоящими въ скобкахъ. Этимъ устраняются недоразумѣнія при умноженіи, такъ какъ, строго говоря, не *именованное* число *пудовъ* умножается на 40 при раздробленіи даннаго количества пудовъ въ фунты, а, напротивъ, либо 40 фунтовъ надо умножить на отвлеченное число пудовъ, либо же отвлеченное число пудовъ надо умножить на 40. И т. д. Что же касается перваго образца, то онъ наиболѣе отвѣчаетъ сущности этого преобразованія, но за-то вовсе не отличается достаточною краткостью.

Превращеніе именованныхъ чиселъ.

§ 64. Пусть требуется узнать, сколько фунтовъ, лотовъ и золотниковъ въ 3 698 золотникахъ, т. е. пусть требуется превратить 3 698 золотниковъ въ единицы высшаго наименованія. Узнаёмъ прежде всего — сколько лотовъ въ этомъ количествѣ золотниковъ. Для этого раздѣлимъ 3 698 на 3 (потому что въ лотѣ 3 золотника). Получимъ въ частномъ 1 232, а въ остаткѣ 2; это значитъ, что въ данномъ намъ числѣ золотниковъ содержится 1 232 лота и 2 золотника. Затѣмъ узнаёмъ — сколько фунтовъ въ 1 232-хъ лотахъ; для этого раздѣлимъ 1 232 на 32. Получимъ въ частномъ 38, а въ остаткѣ 16; это значитъ, что въ 1 232-хъ лотахъ содержится 38 фунтовъ и 16 лотовъ. Изъ всего этого заключаемъ, что 3 698 золотниковъ — все равно, что сумма 38-ми фунтовъ, 16-ти лотовъ и 2-хъ золотниковъ.

Вычисленія при превращеніи именованныхъ чиселъ располагаются обыкновенно слѣдующимъ (хотя и не вѣрнымъ по существу, но за-то удобопонятнымъ и краткимъ) образомъ:

```
3 698 зол. | 3 зол.
  2 зол.   | 1232 лота | 32 лота
           | — 96      | 38 ф.
               272
           — 256
               16 лотовъ.
```

Мы получили, что 3 698 зол. = 38 ф. 16 л. 2 зол.

Еще примѣръ: пусть требуется превратить 1 474 560 долей въ единицы высшаго наименованія; располагаемъ вычисленія по тому же образцу:

1 474 560 д. | 96 д.
— 96 | 15 360 зол. | 3 зол.
514 | 0 зол. | 5120 л. | 32 л.
— 480 | — 32 | 160 ф. | 40 ф.
345 | 192 | 0 ф. | 4 пуда
— 288 | — 192
576 | 0 л.
— 576
0 долей.

Мы получили, что 1 474 560 долей = 4 пудамъ.

§ 65. Надъ составными именованными числами, конечно, могутъ быть совершаемы также и дѣйствія: сложенія, вычитанія умноженія и дѣленія (на равныя части или кратнаго сравненія). Сложеніе сост. им. чиселъ.

Цѣль сложенія двухъ и бо̀льшаго числа составныхъ именованныхъ чиселъ состоитъ въ отысканіи простого или составного именованнаго числа, равнаго суммѣ величинъ, выражаемыхъ слагаемыми; цѣль умноженія составного именованнаго числа на отвлеченное состоитъ въ отысканіи простого или составного именованнаго числа, выражающаго сумму слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно множимому и число которыхъ равно множителю. Точно также и цѣли вычитанія и дѣленія (на равныя части или кратнаго сравненія) составныхъ именованныхъ чиселъ тѣ же, что цѣли этихъ дѣйствій въ случаѣ чиселъ отвлеченныхъ.

Производство сложенія начинается съ единицъ низшаго наименованія; если при этомъ получается столько единицъ низшаго наименованія, что онѣ составляютъ не меньше одной единицы ближайшаго высшаго наименованія, то, по исключеніи изъ полученнаго числа (помощью превращенія) единицъ высшаго наименованія, остающееся число единицъ низшаго наименованія записываютъ приличнымъ образомъ, а единицы слѣдующаго наименованія присоединяются къ даннымъ для сложенія единицамъ того же наименованія. Располагаются вычисленія при этомъ слѣдующимъ образомъ:

Требуемое вычисленіе:

14 ф. 27 л. 2 зол. 86 дол.
27 ф. 16 л. 1 зол. 53 д.
+ 22 ф 23 л. — 75 д.
1 п. 35 ф. 3 л. 2 зол. 22 д.

Вспомогательныя вычисленія:

214 д. | 96 д. — 5 зол. | 3 зол.
— 192 | 2 з. — *2* зол. | 1 л.
22 д.

67 л. | 32 л. — 75 | 40 ф.
64 л. | 2 ф. — — 40 | 1 п.
3 л. — *35* ф.

Вычитаніе сост. им. чиселъ.

§ 66. При вычитаніи производство дѣйствія начинается также съ единицъ низшаго наименованія; если при этомъ число единицъ какого либо наименованія въ уменьшаемомъ меньше числа единицъ того же наименованія въ вычитаемомъ, то одна единица уменьшаемаго, притомъ ближайшаго высшаго наименованія, раздробляется въ единицы даннаго наименованія, полученное число прибавляется къ слишкомъ малому уменьшаемому числу единицъ этого наименованія, а число единицъ уменьшаемаго ближайшаго высшаго наименованія уменьшается на единицу. Вычисленіе при этомъ можно расположить слѣдующимъ образомъ:

Требуемое вычисленіе:	Вспомогательныя вычисленія, которыя, при вычитаніи, должны быть дѣлаемы въ умѣ:
17 п. 13 ф. 26 л. 1 зол. 26 д.	3 зол. + 1 з. = 4 зол.
— 2 п. 27 ф. 13 л. 2 зол. 17 д.	40 фун. + 13 ф. = 53 фун.
16 п. 53 ф. 25 л. 5 зол. 26 д.	
— 2 п. 27 ф. 13 л. 2 зол. 17 д.	
14 п. 26 ф. 12 л. 2 зол. 9 д.	

Умноженіе сост. им. чиселъ.

§ 67. Письменное производство умноженія начинаютъ съ единицъ низшаго наименованія. Если при этомъ получается единицъ низшаго наименованія больше, чѣмъ сколько ихъ въ одной единицѣ ближайшаго высшаго наименованія, то (помощью превращенія) изъ нихъ исключаются единицы наименованія высшаго; эти послѣднія прибавляются къ произведенію единицъ того же наименованія на даннаго множителя; оставшіяся-же единицы низшаго наименованія записываются въ одномъ вертикальномъ столбцѣ съ тѣми же единицами множимаго. Вычисленіе при этомъ располагается слѣдующимъ образомъ:

Требуемое вычисленіе:

	12 часовъ	45 м.	58 сек.
			× 36
19 сут.	3 часа	34 м.	48 сек.

Вспомогательныя письменныя вычисленія:

58 сек.		45 м.		12 ч.	
× 36		× 36		× 36	
2088 с.	60 с.	1620 м.		432 ч.	
— 180	34 м.	+ 34		+ 27 ч.	
288		1654 м.	60 м.	459 ч.	24 ч.
— 240		— 120	27 ч.	— 24	19 сут.
48 сек.		454		219	
		— 420		— 216	
		34 м.		*3 ч.*	

§ 68. Производство дѣленія составного именованнаго числа на равныя части начинается съ единицъ высшаго наименованія. Дѣленіе сост. им. чиселъ. Если при этомъ число единицъ высшаго наименованія въ дѣлимомъ меньше дѣлителя, то эту часть дѣлимаго раздробляютъ въ единицы ближайшаго наименованія и, прибавивъ къ полученному единицы того же наименованія, имѣющіяся въ дѣлимомъ, дѣлятъ полученную сумму на дѣлителя. Точно такъ же, въ случаѣ надобности, поступаютъ съ остатками послѣ раздробленія ихъ и прибавленія къ полученному соотвѣтствующихъ единицъ дѣлимаго. Вычисленія при этомъ располагаются слѣдующимъ образомъ:

```
43 пуда 20 ф. 7 зол. 53 д. | 145
× 40                       |------------
------                     | 12 ф. 5 д.
 1720
+  20
------
 1740 ф.
—145
------
  290 ф.
— 290 ф.
------
    7 з.
 × 96
------
   672 д.
 +  53 д.
------
   725 д.
 — 725 д.
------
     0
```

Для кратнаго сравненія двухъ составныхъ именованныхъ чиселъ оба раздробляются въ единицы низшаго въ этомъ случаѣ наименованія, послѣ чего дѣлаютъ кратное сравненіе полученныхъ такимъ образомъ чиселъ. Такъ, для того, чтобы узнать во сколько разъ 3 версты больше 15 футовъ, раздробляютъ 3 версты въ футы съ тѣмъ, чтобы сдѣлать кратное сравненіе полученнаго числа футовъ съ 15-тью футами. Точно такъ же, для того, чтобъ узнать во сколько разъ 30 пудовъ 3 фунта и 24 лота больше 2-хъ пудовъ и 8 лотовъ, и дѣлимое и дѣлителя раздробляютъ въ лоты.

§ 69*. Если составное именованное число выражено въ единицахъ метрической системы мѣръ (§ 61), то *раздробленіе* его представляетъ собою простое преобразованіе, почти не требующее никакихъ письменныхъ вспомогательныхъ вычисленій. Числа, выраженныя въ един. метр. системы. Такъ, напр.,

7 км. 2 м. 4 дсм. = 7000 м. + 2 м. + 4 дсм. = 70024 дсм.,

4 кгр. 6 ггр. 5 дкгр. 7 гр.=4000 гр.+600 гр.+50 гр.+7 гр.=
=4657 гр.

Еще менѣе вспомогательныхъ вычисленій требуется при *превращеніи* именованнаго числа, выраженнаго въ единицахъ метрической системы мѣръ. Такъ, напр.,

745 206 см.=7 км. 4 гм. 5 дкм. 2 м. 0 дсм. 6 см.,

а

30 068 дсг.=3 кг. 0 гг. 0 дкг. 6 гр. 8 дсг.=3 кг. 6 г. 8 дсг.

Равнымъ образомъ и четыре дѣйствія надъ составными именованными числами, выраженными въ единицахъ метрической системы мѣръ, не требуютъ особенныхъ вспомогательныхъ вычисленій. Въ виду того, что раздробленіе составныхъ именованныхъ чиселъ, выраженныхъ въ единицахъ метрической системы, очень легко, лучше всего въ этомъ случаѣ раздробить всѣ данныя числа въ единицы самаго низшаго изъ встрѣчающихся въ данныхъ числахъ наименованій и въ полученномъ результатѣ, если въ томъ есть надобность, сдѣлать превращеніе. Такъ, напр.,

7 гм. 8 м. 5 дсм.+9 км. 2 м. 7 см.=70 850 см.+900 207 см.=
=971 057 см.

6 км. 5 дкм. 2 м.—4 гм. 5 м. 8 дсм.=60 520 дсм.—4 058 дсм.=
=56 462 дсм.

7 км. 6 м.×245=7 006 м.×245=и т. д.
7 кгр. 6 ггр. 5 гр. : 45=7 605 гр. : 45=и т. д.
5 ггр. 7 дкг. 6 дсг. : 1 дсг. 8 сг.=5 706 дсг. : 18 сг.=
=57 060 сг. : 18 сг.=и т. д.

Вся трудность выполненія вычисленій надъ числами, выраженными въ единицахъ метрической системы, зависитъ только отъ того, что необходимо твердо помнить значенія и порядокъ приставокъ: *миріа*, *кило*, *гекто*, *дека*, *деци*, *санти*, *милли*.—Остальное представляетъ собою лишь простое примѣненіе нумераціи и четырехъ дѣйствій надъ отвлеченными числами.

Сокращ. обозначеніе единицъ метр. сист.

Замѣчаніе 1-е. Выше метръ обозначается буквою м., граммъ—буквами г. или гр., а приставка—достаточнымъ количествомъ составляющихъ ее буквъ; въ странахъ, гдѣ принята метрическая система мѣръ, названія ихъ по возможности сокращаются: *m* обозначаетъ метръ, *km*—километръ, *cm*—сантиметръ и *mm*—миллиметръ, *g*—граммъ, *t*—тонну, *kg*—кило, *mg*—миллиграммъ; гектаръ—*ha*, аръ—*a*, гектолитръ—*h*, литръ—*l*, и т. д.

Выгоды метрической системы.

Замѣчаніе 2-е. Метрическая система представляетъ слѣдующія выгоды: 1) принятыя въ ней единицы мѣры вполнѣ опредѣленны и разъ-на-всегда установлены: метръ отличается отъ одной десятимилліонной доли четверти земного меридіана на вполнѣ опредѣленную (притомъ весьма незначительную) величину; 2) всѣ единицы мѣры величинъ разнаго рода тѣсно связаны между собою; 3) для величинъ одного рода, но разныхъ размѣровъ, существуютъ удобныя для ихъ измѣренія единицы; 4) единицы мѣры для величинъ однородныхъ связаны одна съ другою весьма просто; 5) названія разныхъ единицъ мѣры не многочисленны и образованы единообразно; 6) метрическая система мѣръ, благодаря своему десятичному устройству, допускаетъ недоступную при другихъ системахъ мѣръ и, въ сравненіи съ нашею системою мѣръ, прямо необычайную простоту всѣхъ вычисленій надъ именованными числами; 7) дѣйствія надъ *составными* именованными числами, выраженными въ единицахъ этой системы, и преобразованія величинъ однѣхъ въ другія не требуютъ отдѣльной статьи въ курсахъ ариѳметики, такъ какъ представляютъ простое примѣненіе десятичной системы нумераціи *).

Единицы: франкъ и сантимъ.

Замѣчаніе 3-е. Принятая во Франціи и нѣк. др. странахъ монетная единица, называемая *франкомъ* (въ Италіи—«лира», въ Греціи—«драхма», въ Румыніи—«леу»), представляетъ собою стоимость четырехъ съ половиною граммовъ чистаго серебра. Франковая монета вѣситъ 5 граммовъ и, на наши деньги, равняется 25 копейкамъ золотомъ. Нашъ полуимперіалъ новѣйшаго чекана (начиная съ 1886 года) почти совершенно равенъ стоимости золотой двадцати-франковой монеты. — Десятая доля франка называется *десимомъ*, десятая доля десима—*сантимомъ*; монета въ пять сантимовъ называется *су*. Монета въ двадцать франковъ называется иногда *луидоромъ* или *наполеондоромъ*; но послѣднимъ именемъ называлась также монета въ 40 фр. съ изображеніемъ императора Наполеона I.—Въ Германіи, Англіи и многихъ другихъ странахъ земного шара, принявшихъ метрическую систему мѣръ длины и вѣса, однако же, существуютъ свои монетныя единицы, болѣе или менѣе значительно отличающіяся отъ франка и его подраздѣленій.

*) Нынѣ метрическая система принята обязательно не только во Франціи, но также въ Бельгіи, Голландіи, Греціи, Германіи, Даніи, Швеціи, въ Мексикѣ, Бразиліи, Южныхъ Штатахъ Америки, Египтѣ и мн. др. странахъ земного шара; въ Англіи же и Сѣверо-Американскихъ Соединенныхъ штатахъ она принята, но не обязательна; въ Россіи она принята только въ сочиненіяхъ научныхъ.—Во Франціи метрическая система обязательна съ 1-го Января 1840 года.

Глава V.

Общіе выводы относительно четырехъ дѣйствій надъ цѣлыми числами и надъ величинами.

Дѣйствіе сложенія и законы его.

§ 70*. Дѣйствіе сложенія двухъ чиселъ подчиняется только одному закону, а именно: величина результата сложенія двухъ чиселъ не зависитъ отъ того, которое изъ нихъ занимаетъ первое мѣсто и которое — второе (§ 12). Этотъ законъ извѣстенъ подъ именемъ *перестановительнаго закона*, и ему подчиняется также дѣйствіе сложенія надъ величинами. Такимъ образомъ, въ силу перестановительнаго закона

$$4 + 3 = 3 + 4,\ \ 8 + 176 = 176 + 8,$$

8 фут. + 2 арш. = 2 арш. + 8 фут., и т. п.

Тому же закону (перестановительному) подчиняется дѣйствіе сложенія трехъ или бо̀льшаго числа слагаемыхъ, т. е. въ силу перестановительнаго закона

$$4 + 3 + 5 = 4 + 5 + 3 = 3 + 4 + 5 = 3 + 5 + 4, \text{ и т. д.}$$

а равнымъ образомъ и

8 фут. + 2 арш. + 5 метровъ = 2 арш. + 8 фут. + 5 метр. =
= 5 метр. + 8 ф. + 2 арш., и т. д.

Но дѣйствіе сложенія трехъ и бо̀льшаго числа слагаемыхъ подчиняется также и тому закону, что величина суммы не зависитъ отъ способа сочетанія, т. е. отъ группировки слагаемыхъ (§ 13). Этотъ послѣдній законъ извѣстенъ подъ именемъ *сочетательнаго закона*, и ему подчиняется также дѣйствіе сложенія величинъ. Такимъ образомъ въ силу сочетательнаго закона

$$7+2+4+5+12=(7+4)+(5+2)+12=(4+12)+(5+7)+2, \text{ и т. д.},$$

а равнымъ образомъ:

8 фут. + 2 арш. + 5 метровъ + 7 вершк. + 17 линій =
= (2 арш. + 7 вершк.) + (8 фут. + 7 линій) + 5 метровъ, и т. д.

Дѣйствіе вычитанія одного числа изъ другого (или одной величины изъ другой) вообще не подчиняется перестановительному закону; только въ одномъ частномъ случаѣ, а именно когда уменьшаемое равно вычитаемому, отъ перестановки данныхъ чиселъ величина разности (равная нулю) не измѣнится; во всѣхъ же остальныхъ случаяхъ можетъ быть произведено вычитаніе только меньшаго числа (меньшей величины) изъ бòльшаго числа (изъ бòльшей величины). Такъ какъ при вычитаніи даны только два числа (уменьшаемое и вычитаемое), то не можетъ быть рѣчи о сочетательномъ законѣ при вычитаніи. Такимъ образомъ вычитаніе одного числа изъ другого (или одной величины изъ другой) вообще не подчиняется ни закону перестановительному, ни закону сочетательному.

Замѣчаніе. Истина, принимаемая въ наукѣ безъ доказательства, называется *аксіомою;* истина же, которая безъ доказательства не принимается, называется *теоремою*.—Въ практической ариѳметикѣ принимаютъ за аксіому, что дѣйствіе сложенія подчиняется законамъ перестановительному и сочетательному; но законъ сочетательный для сложенія, на самомъ дѣлѣ, не слѣдовало бы принимать за аксіому, и въ научной ариѳметикѣ справедливость его доказывается (§ 14). Законъ же перестановительный для сложенія не можетъ быть доказанъ, т. е. въ справедливости его нельзя убѣдиться съ помощью разсужденій. Поэтому перестановительный законъ для сложенія есть аксіома не только въ практической, но и въ научной (теоретической) ариѳметикѣ. Аксіома и теорема.

§ 71*. Дѣйствіе умноженія двухъ отвлеченныхъ чиселъ подчиняется закону перестановительному; эта истина въ практической ариѳметикѣ часто принимается безъ доказательства, хотя она представляетъ собою теорему, которой доказательство не представляетъ особенно большихъ трудностей (§ 25). Въ силу этого закона Дѣйствіе умноженія и законы его.

$$27 \times 375 = 375 \times 27,\ \ 5 \times 367 = 367 \times 5,\ \ 7 \times 1 = 7,\ \ 8 \times 0 = 0.$$

Кромѣ того, дѣйствіе умноженія трехъ и болѣе чиселъ также подчиняется тому же перестановительному закону, и это доказывается въ цѣломъ рядѣ весьма важныхъ теоремъ (§§ 26—32).

Далѣе, дѣйствіе умноженія трехъ и болѣе чиселъ подчиняется также закону сочетательному, и эта истина тоже представляетъ собою весьма важную теорему, вытекающую изъ перестановительнаго закона (§ 34).

Наконецъ, дѣйствіе умноженія подчиняется еще одному закону, которому сложеніе не подчиняется: отъ прибавленія къ множимому какого нибудь числа (или отъ вычитанія изъ множимаго какого нибудь числа) произведеніе увеличивается (или уменьшается) на произведеніе изъ прибавленнаго (или отнятаго) числа на множителя. Такъ, въ силу этого закона

$$(8+3)\times 5=8\times 5+3\times 5,\ (17+2)\times 4=17\times 4+2\times 4,\ \text{и т. п.,}$$

$$\text{а}\ (8-3)\times 5=8\times 5-3\times 5,\ (17-2)\times 4=17\times 4-2\times 4,\ \text{и т. п.}$$

Эта истина, принадлежа къ числу довольно очевидныхъ, можетъ быть однако же доказана на основаніи самаго смысла умноженія, какъ дѣйствія, котораго цѣль состоитъ въ отысканіи суммы слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно множимому и число которыхъ равно множителю (§ 35). Законъ этотъ, иначе говоря, заключается въ томъ, что *умножить сумму двухъ чиселъ на третье все равно, что произведеніе второго на третье сложить съ произведеніемъ перваго на третье, а умножить разность двухъ чиселъ на третье все равно, что произведеніе вычитаемаго на третье вычесть изъ произведенія уменьшаемаго на третье.* Этотъ законъ выражаютъ вкратцѣ слѣдующимъ образомъ: *дѣйствіе умноженія подчиняется относительно сложенія и вычитанія*, производимаго надъ множимымъ, *закону распредѣлительному.* Этому закону подчиняется также умноженіе какой угодно величины на отвлеченное число, такъ что, напр.,

(3 фута $+$ 2 арш.) $\times$ 5 $=$ 3 фут. $\times$ 5 $+$ 2 арш. $\times$ 5,
(8 фунтовъ $+$ 7 лот.) $\times$ 6 $=$ 8 фунт. $\times$ 6 $+$ 7 лот. $\times$ 6, и т. п.

Кромѣ того, благодаря закону перестановительному, дѣйствіе умноженія подчиняется закону распредѣлительному относительно сложенія и вычитанія, производимаго также и надъ множителемъ.

Случайименов. множимаго. *Замѣчаніе 1-ое.* Такъ какъ множитель, при умноженіи двухъ чиселъ, въ ариѳметикѣ долженъ быть числомъ непремѣнно отвлеченнымъ, то умноженіе какой нибудь величины (не отвлеченнаго числа) на какого либо множителя или на цѣлый рядъ ихъ не вполнѣ подчиняется закону перестановительному и только отчасти подчиняется закону сочетательному (ср. § 25).

Дѣйствіе дѣленія и законы его. *Замѣчаніе 2-ое.* Дѣйствіе дѣленія вообще не подчиняется ни перестановительному, ни сочетательному закону; перестановительному закону дѣйствіе дѣленія подчиняется только въ одномъ частномъ случаѣ, а именно когда дѣлимое равно дѣлителю; сочетательному же закону дѣленіе одного числа на другое не подчиняется потому, что при дѣленіи даны два числа: дѣлимое и дѣлитель. Закону распредѣлительному дѣленіе подчиняется только для дѣлимаго какъ въ отношеніи сложенія, такъ и въ отношеніи вычитанія, но съ тѣмъ ограниченіемъ, что каждое изъ слагаемыхъ (при сложеніи) и каждое изъ данныхъ чиселъ при вычитаніи (уменьшаемое и вычитаемое) должны при этомъ дѣлиться на дѣлителя на-цѣло безъ остатка. Такъ, имѣя въ виду только частныя,

$(16+6):2=16:2+6:2$, а $(16-6):2=16:2-6:2$,

но, при тѣхъ же условіяхъ,

$(13+5):2$ вовсе не равно $13:2+5:2$.

Это послѣднее ограниченіе можетъ быть устранено только съ помощью введенія дробныхъ чиселъ.

Замѣчаніе 3-е. Что же касается сложенія и вычитанія, то ни одно изъ нихъ, въ отношеніи сложенія и вычитанія, не подчиняется распредѣлительному закону; ибо

Дѣйствіе сложенія и вычитанія и законъ распредѣлительный.

$(8+6)+2=8+6+2$ и вовсе не равно $(8+2)+(6+2)$,
точно также
$(8+6)-2=8+6-2$ » » » » $(8-2)+(6-2)$;
равнымъ образомъ и
$(8-6)+2=8-6+2$ » » » » $(8+2)-(6+2)$,
и точно также
$(8-6)-2=8-6-2$ » » » » $(8-2)-(6-2)$.

§ 72*. Изъ законовъ, разсмотрѣнныхъ выше, одному только перестановительному не подчиняется ни одно изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій, одному сочетательному также не подчиняется ни одно изъ нихъ; только двумъ изъ нихъ: перестановительному и сочетательному, подчиняется дѣйствіе сложенія и умноженія; всѣмъ тремъ: перестановительному, сочетательному и распредѣлительному подчиняется только одно дѣйствіе, а именно умноженіе чиселъ; одному распредѣлительному (и то лишь отчасти) подчиняется только дѣленіе. Дѣйствіе же вычитанія не подчиняется ни одному изъ этихъ законовъ.—Изъ этого вытекаютъ слѣдующія особенности четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій: то изъ нихъ, которое подчиняется только двумъ законамъ—перестановительному и сочетательному, есть дѣйствіе сложенія; то, которое не подчиняется ни одному изъ трехъ законовъ, есть вычитаніе; то, которое подчиняется всѣмъ тремъ законамъ (перестановительному, сочетательному и распредѣлительному), есть дѣйствіе умноженія; наконецъ, то дѣйствіе, которое подчиняется только распредѣлительному закону, есть дѣйствіе дѣленія. Отсюда вытекаютъ слѣдующія опредѣленія сложенія и умноженія: дѣйствіе, которое подчиняется только законамъ перестановительному и сочетательному, называется *сложеніемъ*; дѣйствіе, которое подчиняется всѣмъ тремъ законамъ (перестановительному, сочетательному и распредѣлительному) называется *умноженіемъ*.

Опредѣленія дѣйствій.

Если вообще ариѳметическое дѣйствіе обозначить знакомъ $\smile$, то записи:

$$8 \smile 3,\ 6 \smile 7 \smile 5 \smile 3,\ (7+2) \smile 6 \text{ и } (7-2) \smile 6$$

будутъ по порядку обозначать, что надъ числами 8 и 3 совершено нѣкоторое дѣйствіе, что надъ числами 6, 7, 5 и 3 послѣдовательно совершено одно и то же дѣйствіе, что надъ суммою чиселъ 7 и 2 и числомъ 6 совершено нѣкоторое дѣйствіе и, наконецъ, что надъ разностью между числами 7 и 2 и надъ числомъ 6 совершено нѣкоторое дѣйствіе. Если предположимъ, что

$$8 \smile 3 = 3 \smile 8, \text{ а } 17 \smile 5 = 5 \smile 17, \text{ и т. д.,}$$

то знакъ $\smile$ можетъ обозначать либо сложеніе, либо умноженіе; если предположить, что

$$8 \smile 3 \smile 5 = 8 \smile 5 \smile 3,\ 17 \smile 18 \smile 6 = 17 \smile 6 \smile 18, \text{ и т. д.,}$$

то знакъ $\smile$ также можетъ обозначать либо сложеніе, либо умноженіе; если же извѣстно, что

$$8 \smile 3 = 3 \smile 8,\ 8 \smile 3 \smile 5 = 8 \smile 5 \smile 3, \text{ и т. д.,}$$

и если, кромѣ того,

$$(8+3) \smile 7 = 8 \smile 7 + 3 \smile 7,\ (8+3) \smile 9 = 8 \smile 9 + 3 \smile 9 \text{ и т. д.,}$$

то знакъ $\smile$ обозначаетъ только дѣйствіе умноженія.

Числа: измѣняемое и измѣняющее.

Замѣчаніе 1-ое. Иногда полезно, въ ученіи о дѣйствіяхъ, отличать первое число, *надъ которымъ* производится дѣйствіе, отъ второго: первое изъ нихъ является *измѣняемымъ* числомъ (пассивнымъ, страдательнымъ, основнымъ), второе—*измѣняющимъ* (активнымъ, дѣятельнымъ, вспомогательнымъ). Такъ, первое слагаемое, уменьшаемое, множимое и дѣлимое въ этомъ смыслѣ являются числами измѣняемыми, второе слагаемое, вычитаемое, множитель и дѣлитель—вообще измѣняющими.

Модуль дѣйствія.

Замѣчаніе 2-ое. Для всякаго дѣйствія существуетъ такое второе число, при которомъ результатъ дѣйствія равенъ первому числу. Такое число называется *модулемъ дѣйствія.* Такъ, для сложенія и вычитанія модуль дѣйствія равенъ нулю, потому что прибавленіе или вычитаніе нуля не измѣняетъ числа; для умноженія же и дѣленія модуль дѣйствія есть единица (1), потому что при умноженіи на единицу получается множимое, а при дѣленіи на единицу—дѣлимое. — Зная модуль неизвѣстнаго дѣйствія и какой-либо изъ законовъ, которому оно подчиняется или не подчиняется, иногда можно судить о томъ — какое это дѣйствіе: сложеніе, вычитаніе, умноженіе или дѣленіе. Такъ, если извѣстно, что модуль ариѳметическаго дѣйствія есть единица и что оно не подчиняется закону перестановительному (или сочетательному), можемъ съ полною увѣренностью утверждать, что это—дѣйствіе дѣленія; зная, что модуль дѣйствія есть единица и что оно подчиняется закону перестановительному (или сочетательному), можемъ утверждать, что это—дѣйствіе умноженія. И т. д.

Глава V.

О дѣлимости цѣлыхъ чиселъ.

§ 73. Общепринятая десятичная система счисленія обладаетъ такими особенностями, которыя дозволяютъ по письменному обозначенію числа, не производя дѣленія, судить о томъ—дѣлится ли или не дѣлится это число безъ остатка на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 7, на 8, на 9, на 10, на 11, на 12, на 14, на 15, на 16 и на многія другія числа. Понятіе о признакахъ дѣлимости чиселъ.

Признаками дѣлимости чиселъ называются тѣ внѣшніе признаки письменнаго обозначенія чиселъ по десятичной системѣ, по которымъ можно, не производя на самомъ дѣлѣ дѣленія, судить—дѣлится ли данное число на другое или нѣтъ. Ниже мы разсмотримъ только признаки дѣлимости чиселъ на 2, на 3, на 4, на 5, на 8, на 9 и на 10. Эти признаки основаны на слѣдующихъ очевидныхъ свойствахъ суммы и произведенія нѣсколькихъ чиселъ:

1) Произведеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится безъ остатка на каждое изъ нихъ. Такъ, 21 дѣлится на 3 и на 7, 72 дѣлится на 8 и на 9, и т. д.

2) Сумма нѣсколькихъ слагаемыхъ непремѣнно дѣлится на данное число безъ остатка, если каждое изъ нихъ дѣлится на то же самое число безъ остатка. Такъ, напр., каждое изъ слагаемыхъ суммы: $15 + 24 + 27$ дѣлится на 3 безъ остатка, а потому и 66 (т. е. сумма этихъ чиселъ) дѣлится на 3 безъ остатка.

3) Если изъ двухъ чиселъ одно дѣлится на нѣкоторое третье число, а другое на него не дѣлится, то и сумма этихъ двухъ чиселъ на него тоже не раздѣлится. Такъ, напр., изъ двухъ чиселъ 12 и 7 одно дѣлится на 3, а другое на 3 не дѣлится; поэтому и 19 (сумма этихъ двухъ чиселъ) на 3 тоже не раздѣлится.

Въ справедливости этихъ трехъ предложеній можно убѣдиться съ помощью разсужденій, приводимыхъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 74*. Произведеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится на-цѣло безъ остатка на каждаго изъ своихъ сомножителей.—Дѣйствительно: при дѣленіи даннаго произведенія двухъ цѣлыхъ чиселъ на одного изъ его сомножителей, отыскивается другой изъ сомножителей этого произведенія, а онъ по условію есть число цѣлое. Стало-быть, произведеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится на-цѣло безъ остатка на каждаго изъ своихъ сомножителей. Дѣлимость произведенія и суммы.

Обратно: если одно цѣлое число дѣлится безъ остатка на другое цѣлое число, то первое равно произведенію второго на нѣкоторое третье цѣлое число.—Дѣйствительно: дѣлимое равно въ этомъ случаѣ произведенію дѣлителя на частное, и при этомъ оба послѣднихъ числа—суть числа цѣлыя.

Сумма нѣсколькихъ чиселъ непремѣнно дѣлится на данное число безъ остатка, если каждое слагаемое на него дѣлится на-цѣло безъ остатка.—Дѣйствительно: такъ какъ, напр.,

$$15 = 5 \times 3,\ 24 = 8 \times 3,\ \text{а}\ 27 = 9 \times 3,$$

то

$$\begin{aligned}15+24+27 &= (5+5+5)+(8+8+8)+(9+9+9) = \\ &= (5+8+9)+(5+8+9)+(5+8+9) = \\ &= (5+8+9)\times 3,\end{aligned}$$

каковое произведеніе, на основаніи выше изложеннаго, непремѣнно дѣлится на 3 безъ остатка.

Если изъ двухъ чиселъ одно дѣлится на нѣкоторое третье на-цѣло безъ остатка, а другое на него не дѣлится, то сумма данныхъ двухъ чиселъ на него тоже не раздѣлится на-цѣло безъ остатка.—Дѣйствительно: въ этомъ случаѣ, какъ бы мы ни сгруппировали единицы суммы данныхъ двухъ чиселъ, она не можетъ быть представлена въ видѣ произведенія нѣкотораго цѣлаго числа на даннаго дѣлителя; а потому эта сумма, на основаніи предыдущаго, не раздѣлится на-цѣло безъ остатка на этого дѣлителя.

Признаки дѣлимости на 2, на 5 и на 10.

§ 75. На 2 данное многозначное число дѣлится на-цѣло безъ остатка: 1) если цыфра его единицъ есть нуль, или 2) если она обозначаетъ число, дѣлящееся на два (т. е. если она есть 2, 4, 6 или 8); въ противномъ случаѣ данное число на 2 не дѣлится.

Дѣйствительно: 1) если цыфра единицъ даннаго числа есть нуль, то оно состоитъ только изъ десятковъ, сотенъ и другихъ единицъ высшихъ разрядовъ; но каждый десятокъ, каждая сотня и каждая единица любого высшаго разряда дѣлится на 2 безъ остатка; стало-быть, и все число, если цыфра его единицъ есть нуль, должно дѣлиться на 2 безъ остатка. Такъ, напр., 350, 470, 17 630 и т. д. должны дѣлиться на 2 безъ остатка. 2) Если цыфра единицъ даннаго числа обозначаетъ число, дѣлящееся на 2 безъ остатка, то данное многозначное число, очевидно, тоже дѣлится на 2 безъ остатка; ибо оно, въ этомъ случаѣ, есть сумма нѣкотораго числа десятковъ, сотенъ и вообще единицъ высшихъ разрядовъ съ нѣкоторымъ числомъ единицъ перваго разряда, дѣлящимся на 2, т. е. представляетъ собою сумму такихъ слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое дѣлится на 2. Такъ, напр., числа 58, 174, 2 176 дѣлятся на 2 безъ остатка.—Если же цыфра единицъ не нуль и обозначаетъ число, которое на 2 не дѣлится на-цѣло, то и все число не раздѣлится на 2 безъ остатка, потому что тогда число можно разсматривать какъ сумму двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ одно дѣлится на 2 безъ остатка, а другое не дѣлится; но въ такомъ случаѣ (§ 73) все число тоже не можетъ раздѣлиться на 2 безъ остатка.

На 5 данное многозначное число дѣлится на-цѣло безъ остатка: 1) если цыфра его единицъ есть нуль, или 2) если она обозначаетъ число, дѣлящееся на 5, (т. е. если эта цыфра — 5); въ противномъ случаѣ оно на 5 не дѣлится на-цѣло безъ остатка.—Такъ, 70, 230, 145, 4 065 дѣлятся, 252, 76 не дѣлятся на 5 безъ остатка. Убѣдиться въ справедливости этого признака можно помощью разсужденій, подобныхъ изложеннымъ выше относительно признака дѣлимости чиселъ на 2.

На 10 данное многозначное число дѣлится на-цѣло безъ остатка только въ томъ случаѣ, если цыфра его единицъ есть нуль; въ противномъ случаѣ оно на 10 не дѣлится на-цѣло безъ остатка.—Такъ, напр., числа 14 750, 870 и 1 360 дѣлятся на 10 на-цѣло безъ остатка, а числа 37, 1 362, 34 564 и т. п. на 10 не дѣлятся безъ остатка. Убѣдиться въ справедливости этого признака можно помощью разсужденій, совершенно подобныхъ изложеннымъ выше относительно признака дѣлимости чиселъ на 2.

Числа четныя и нечетныя.

Замѣчаніе. Числа, дѣлящіяся на 2 безъ остатка, носятъ общее названіе *четныхъ*, числа же, на 2 безъ остатка не дѣлящіяся— названіе *нечетныхъ*. Такъ, 11118 число четное, а 2227—нечетное.

Признаки дѣлимости на 4 и на 8.

§ 76. На 4 многозначное число дѣлится на-цѣло безъ остатка: 1) если цыфры его десятковъ и единицъ суть нули, или 2) если число, обозначаемое послѣдними двумя его цыфрами, дѣлится на 4 безъ остатка; въ противномъ случаѣ оно на 4 не дѣлится на-цѣло безъ остатка.—Дѣйствительно: 1) если послѣднія двѣ цыфры даннаго числа суть нули, то оно состоитъ только изъ сотенъ, тысячъ и другихъ единицъ высшихъ разрядовъ; но каждая сотня, тысяча и каждая единица любого высшаго разряда дѣлится на 4 безъ остатка; стало-быть, и все число, если цыфры его десятковъ и единицъ суть нули, должно дѣлиться на 4 безъ остатка. 2) Если совокупность послѣднихъ двухъ цыфръ обозначаетъ число, дѣлящееся на 4 безъ остатка, то данное многозначное число тоже дѣлится на 4 безъ остатка, потому что оно въ этомъ случаѣ можетъ быть разсматриваемо какъ сумма слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое дѣлится на 4 безъ остатка. И т. д. Такъ, 300, 2 100, 528, 1 736 дѣлятся, а 527, 326 не дѣлятся на 4 безъ остатка.

На 8 многозначное число дѣлится на-цѣло безъ остатка: 1) если цыфры его сотенъ, десятковъ и единицъ суть нули, или 2) если число, обозначаемое совокупностью трехъ послѣднихъ цыфръ его, дѣлится на 8 безъ остатка; въ противномъ случаѣ это число на 8 не дѣлится на-цѣло безъ остатка. Такъ, 1 000, 4 000, 2 648, 3 032 дѣлятся, а 2 438 и 4 561 не дѣлятся на 8 безъ остатка. — Убѣдиться въ справедливости этого признака можно помощью разсужденій, совершенно подобныхъ изложеннымъ выше относительно признака дѣлимости на 4.

Примѣчаніе. Случай, когда цыфра единицъ есть нуль, можетъ быть разсматриваемъ какъ случай, когда единицы дѣлятся на-цѣло безъ остатка на 2; точно такъ же случай, когда цыфры десятковъ и единицъ суть нули, можетъ быть разсматриваемъ, какъ случай, когда число, обозначаемое совокупностью послѣднихъ двухъ цыфръ, дѣлится на 4 безъ остатка; равнымъ образомъ и случай, когда послѣднія три цыфры суть нули, можетъ быть разсматриваемъ какъ случай, когда число, обозначаемое совокупностью послѣднихъ трехъ цыфръ, дѣлится на 8 безъ остатка. Вотъ почему разсмотрѣнные признаки дѣлимости чиселъ на 2, на 4 и на 8, выражаются такъ: на 2 число дѣлится безъ остатка, если цыфра его единицъ обозначаетъ число четное; въ противномъ случаѣ, и т. д.; на 4 число дѣлится безъ остатка, если совокупность цыфръ его десятковъ и единицъ обозначаетъ число, которое дѣлится на 4 безъ остатка; въ противномъ случаѣ, и т. д.

Другіе признаки дѣлимости на 4 и на 8.

§ 77*. Чтобы узнать, дѣлится ли данное число на 4 или не дѣлится, нѣтъ надобности всегда дѣлить двузначное число, обозначаемое его послѣдними цыфрами, на 4: если цыфра десятковъ обозначаетъ число четное, то можно ограничиться только изслѣдованіемъ дѣлимости числа, обозначаемаго послѣдней цыфрой, на 4, ибо 20, 40, 60 и 80 дѣлятся на 4 безъ остатка; что же касается случая нечетнаго числа десятковъ, то въ этомъ случаѣ изъ нихъ можно вычесть возможно большее четное число десятковъ, послѣ чего можно разсуждать уже надъ оставшимся въ этомъ случаѣ десяткомъ и единицами. Пусть, напр., требуется узнать, дѣлится ли 18 796 на 4; для этого беремъ 96, отдѣляемъ отъ этого числа 80, получаемъ 16; это послѣднее число дѣлится на 4; стало-быть, и 18 796 дѣлится на 4. — Подобнымъ же образомъ поступаютъ при опредѣленіи дѣлимости на 8: при четномъ числѣ сотенъ, ихъ отбрасываютъ, такъ какъ четное число сотенъ всегда дѣлится безъ остатка на 8; точно такъ же отбрасываютъ цыфру десятковъ, если она есть 4 или 8; если же число сотенъ нечетное, а число десятковъ больше 4-хъ и не равно 8-ми, то отъ числа сотенъ отбрасываютъ возможно большее четное число ихъ, отъ числа десятковъ отбрасываютъ 4 или 8; изъ остающихся: сотни, десятковъ и единицъ образуютъ новое число, надъ которымъ и разсуждаютъ въ этомъ случаѣ. Пусть, напр., требуется узнать, дѣлится ли 76 794 на 8; согласно выше изложенному, намъ придется узнать, дѣлится ли 114 на 8, такъ какъ 680, отнятыя отъ 794-хъ, на 8 навѣрное дѣлятся.

Замѣчаніе. Есть еще одинъ довольно удобный признакъ дѣлимости чиселъ на 4, основанный на томъ, что каждый десятокъ равенъ суммѣ чиселъ $8+2$, изъ которыхъ 8 дѣлится на 4 безъ остатка; стало-быть, изъ каждаго десятка даннаго числа препятствуютъ дѣленію на 4 только двѣ единицы. На этомъ основаніи, умноживъ 2 на столько единицъ, сколько въ данномъ числѣ десятковъ, и прибавивъ къ полученному число простыхъ единицъ, разсуждаютъ надъ полученной суммой. Такъ, напр., 19 576 дѣлится на 4, потому что $2\times 7+6=20$, а 20 дѣлится на 4. И т. п. *). Третій признакъ дѣлимости на 4.

§ 78. Для того чтобы вывести признакъ дѣлимости чиселъ на 9, примемъ во вниманіе, что Признакъ дѣлимости на 9.

$10=9+1$	$100=99+1$	$1000=999+1$
$20=9\times 2+2$	$200=99\times 2+2$	$2000=999\times 2+2$
$30=9\times 3+3$	$300=99\times 3+2$	$3000=999\times 3+3$
$40=9\times 4+4$	$400=99\times 4+9$	$4000=999\times 4+4$
и т. д.	и т. д.	и т. д.

Да и вообще легко убѣдиться, что сколько бы мы единицъ любого разряда ни взяли, лишь бы ихъ было не болѣе девяти, все число равно суммѣ двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ одно есть произведеніе изъ нѣкотораго числа, въ письменномъ обозначеніи котораго встрѣчается только цыфра 9, на однозначное число единицъ даннаго разряда, а другое равно тому же однозначному числу единицъ перваго разряда. Такъ, напр., очевидно, что

$$20000=9999\times 2+2,\ \ 7000=999\times 7+7, \text{ и т. д.}$$

Вслѣдствіе этого, всякое однозначное число единицъ любого разряда можетъ быть разсматриваемо, какъ сумма двухъ слагае-

*) Признакъ дѣлимости на 8 можетъ быть видоизмѣненъ подобнымъ же образомъ: отъ каждой сотни при дѣленіи на 8 остается 4 единицы, а отъ десятка—2; поэтому, умноживъ 4 на число сотенъ, а 2—на число десятковъ, и, сложивъ полученные результаты съ числомъ простыхъ единицъ, разсуждаютъ уже надъ полученною суммою.

мыхъ, изъ которыхъ одно дѣлится на 9 на-цѣло безъ остатка, а другое — представляетъ собою однозначное число, равное числу единицъ даннаго разряда. Такъ, напр.,

$$\begin{aligned}\mathbf{1}0 &= 9\times 1+\mathbf{1},\\ \mathbf{3}0 &= 9\times 3+\mathbf{3},\\ \mathbf{4}00 &= 99\times 4+\mathbf{4},\\ \mathbf{5}00 &= 999\times 5+\mathbf{5},\\ \mathbf{7}000 &= 999\times 7+\mathbf{7},\end{aligned}$$

и т. д. Отсюда вытекаетъ, что:

На 9 данное число дѣлится безъ остатка, если сумма однозначныхъ чиселъ, обозначаемыхъ цыфрами этого числа, дѣлится безъ остатка на 9; въ противномъ случаѣ число на 9 не дѣлится на-цѣло безъ остатка *).—Такъ, число 72 324 дѣлится на 9 безъ остатка, потому что сумма его цыфръ $(7+2+3+2+4)$ равна 18-ти, а 18 дѣлится на 9 безъ остатка. Дѣйствительно: число 72 324 можно разсматривать какъ сумму слѣдующихъ десятичныхъ чиселъ: 70 000, 2 000, 300, 20 и 4. Но

$$\begin{aligned}70\,000 &= 9\,999\times 7+7,\\ 2\,000 &= 999\times 2+2,\\ 300 &= 99\times 3+3,\\ 20 &= 9\times 2+2,\\ 4 &= 4.\end{aligned}$$

Отсюда легко видѣть, что число 72 324 состоитъ изъ суммы четырехъ произведенiй, непремѣнно дѣлящейся на 9, которая увеличена на сумму $7+2+3+2+4$, которая тоже дѣлится на 9 безъ остатка.—Число же 23 516 на 9 не дѣлится на-цѣло безъ остатка, потому что сумма цыфръ его $(2+3+5+1+6)$ равна 17, а 17 на 9 не дѣлится безъ остатка. Дѣйствительно: 23 516 можно разсматривать какъ сумму чиселъ 20 000, 3 000, 500, 10 и 6; но

$$\begin{aligned}20\,000 &= 9\,999\times 2+2,\\ 3\,000 &= 999\times 3+3,\\ 500 &= 99\times 5+5,\\ 10 &= 9\times 1+1,\\ 6 &= 6,\end{aligned}$$

откуда легко видѣть, что 23 516 состоитъ изъ суммы пяти про-

*) Сумма однозначныхъ чиселъ, обозначаемыхъ цыфрами даннаго числа, называется для краткости *суммою цыфръ* этого числа. Такъ, если дано число 14 786, то сумма $1+4+7+8+6$, т. е. 26, называется для краткости суммою цыфръ этого числа, хотя, строго говоря, складываются при этомъ числа, выражаемыя отдѣльными цыфрами, а не самыя цыфры.

изведеній, которая непремѣнно дѣлится на 9 и которая увеличена на сумму $2+3+5+1+6$, не дѣлящуюся на 9 на-цѣло безъ остатка.

Признакъ дѣлимости на 3.

§ 79. Признакъ дѣлимости чиселъ на 3 подобенъ признаку дѣлимости чиселъ на 9, т. е.:

На 3 число дѣлится безъ остатка, если сумма цыфръ его дѣлится на 3 безъ остатка; въ противномъ случаѣ число на 3 не дѣлится безъ остатка. — Такъ, напр., 14 376 дѣлится на 3 безъ остатка, потому что сумма $1+4+3+7+6=21$, а 21 дѣлится на 3 безъ остатка. Число-же 26 753 на 3 не дѣлится, потому что $2+6+7+5+3=23$, а 23 не дѣлится на 3 безъ остатка.

Убѣдиться въ справедливости этого признака можно при помощи тѣхъ же точно разсужденій, которыя даны выше при выводѣ признака дѣлимости чиселъ на 9.

Значеніе десятичной системы.

Замѣчаніе 1-ое. Всѣ изложенные признаки дѣлимости чиселъ (на 2, на 4, на 8, на 5, на 10, на 9 и на 3) выведены въ предположеніи, что числа обозначены по десятичной системѣ счисленія, притомъ съ помощью такъ называемыхъ арабскихъ цыфръ.

Замѣна суммы цыфръ другими числами.

Замѣчаніе 2-ое. При опредѣленіи того — дѣлится ли данное число на 9 (или на 3) безъ остатка на-цѣло, какъ мы это видѣли выше, надо сначала найти такъ называемую сумму цыфръ даннаго числа. Но при этомъ, для сокращенія вычисленій, полезно всякій разъ, когда получается число бо̀льшее 9-ти, вычитывать изъ этого числа девять. Пусть, напр., требуется узнать — дѣлится ли число 7 635 867 на 9 безъ остатка. При этомъ можно поступить такъ: 7 да 6 тринадцать; долой 9, остается 4; 4 да 3 семь, да 5 двѣнадцать; долой 9, остается 3; 3 да 8 одиннадцать; долой 9, остается 2; 2 да 6 восемь, да 7 пятнадцать; долой 9, остается 6. Стало-быть, данное число не дѣлится на 9 безъ остатка, ибо мы изъ суммы его цыфръ, вычли нѣсколько разъ по 9-ти и въ остаткѣ получили 6 единицъ, которыя и препятствуютъ раздѣленію его на 9 на-цѣло безъ остатка. Точно такъ же поступаютъ при опредѣленіи дѣлимости чиселъ на 3, пока получится остатокъ, меньшій 9-ти: дѣлимость или недѣлимость этого послѣдняго на 3 болѣе или менѣе очевидна. — Такъ, данное число дѣлится на 3 безъ остатка, ибо 6 дѣлится на 3.

Простыя числа и составныя; дѣлитель и кратное даннаго числа.

§ 80. Всякое цѣлое число дѣлится само на себя и на единицу на-цѣло безъ остатка; частное, происходящее отъ раздѣленія числа на то же самое число, равно единицѣ; частное же, происходящее отъ раздѣленія числа на единицу, равно дѣлимому. Такъ,

$$317 : 317 = 1, \text{ а } 317 : 1 = 317, \text{ и т. п.}$$

Числа, которыя дѣлятся только сами на себя и на единицу, называются *первоначальными,* также *первыми* или *простыми.* Числа же, которыя дѣлятся не только сами на себя и на единицу, но также и на другія числа, называются *составными* или также *непервоначальными.* Такъ числа: 3, 7, 11, 17, 47 суть числа первоначальныя, а числа 4, 8, 9, 10, 15, 21 суть числа составныя, непервоначальныя.

Цѣлое число, на которое дѣлится на-цѣло безъ остатка другое цѣлое число, называется *дѣлителемъ* этого послѣдняго. Такъ, 7 есть дѣлитель 14-ти, 9 — дѣлитель 18-ти, и т. д. Если дѣлитель даннаго числа есть число первоначальное, то онъ называется *простымъ,* или *первоначальнымъ дѣлителемъ* этого числа. Такъ, 2 есть простой дѣлитель 20-ти, 3 — простой дѣлитель 18-ти.

Цѣлое число, которое дѣлится на-цѣло на другое цѣлое число, называется *кратнымъ* этого послѣдняго. Такъ, 14 есть число кратное 7-ми, 25 — кратное 5-ти, и т. п.

Общій дѣлитель и кратное нѣск. чиселъ.

§ 81. *Общимъ дѣлителемъ* двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется число, на которое каждое изъ нихъ дѣлится на-цѣло безъ остатка. Такъ, напр., 3 есть общій дѣлитель 15-ти, 27-ми и 6-ти, потому что каждое изъ этихъ трехъ чиселъ дѣлится на 3 на-цѣло безъ остатка.

Два числа называются *взаимно-первыми* или *взаимно-простыми,* если у нихъ нѣтъ ни одного общаго дѣлителя, кромѣ единицы. Такъ, напр., 21 и 25 суть числа взаимно-первыя, потому что у нихъ нѣтъ ни одного общаго дѣлителя, кромѣ единицы. Понятно, что всѣ первоначальныя числа по отношенію другъ къ другу суть числа взаимно-первыя.

Кратнымъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется число, которое дѣлится на-цѣло безъ остатка на каждое изъ этихъ чиселъ. Такъ, напр., 270 есть число, кратное чиселъ: 30, 90, 15, 45; число 360 есть число кратное по отношенію къ числамъ: 2, 3, 5, 4, 6, 10, 8, 12, 20, 36, 90.

Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется наибольшій изъ общихъ дѣлителей даннаго числа. Такъ, 30 есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ: 150 и 240, потому что изъ всѣхъ общихъ дѣлителей этихъ чиселъ 30 есть наибольшій, въ чемъ легко убѣдиться путемъ вычисленій.

Наименьшимъ кратнымъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется наименьшее изъ всѣхъ чиселъ, кратныхъ по отношенію къ даннымъ числамъ. Такъ, изъ всѣхъ чиселъ, которыя дѣлятся на 14, 30 и 45, наименьшимъ является, какъ въ томъ легко убѣдиться непосредственнымъ дѣленіемъ, число 630.

§ 82. Главнѣйшія свойства общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ состоятъ въ слѣдующемъ: Основанія Евклидова способа нахожд. общ. наиб. дѣл.

1) Общій наибольшій дѣлитель двухъ взаимно-первыхъ чиселъ равенъ единицѣ.—Такъ, общій наибольшій дѣлитель чиселъ 18 и 25 есть единица.

2) Общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно дѣлится на второе безъ остатка на-цѣло, равенъ второму числу. Такъ, общій наибольшій дѣлитель чиселъ 18 и 6 равенъ 6-ти, а общій наибольшій дѣлитель чиселъ 29 и 29 равенъ, конечно, 29-ти.

3) Если большее число не дѣлится на-цѣло безъ остатка на другое (меньшее) число, то общій наибольшій дѣлитель данныхъ двухъ чиселъ равенъ общему наибольшему дѣлителю меньшаго числа и остатка.—Такъ, общій наибольшій дѣлитель чиселъ 49 и 35 равенъ общему наибольшему дѣлителю чиселъ 35 и 14, причемъ 14 есть остатокъ, получаемый при раздѣленіи 49-ти на 35.

4) Если при раздѣленіи бо́льшаго числа на меньшее получается остатокъ, при раздѣленіи меньшаго числа на остатокъ получается второй остатокъ, при раздѣленіи перваго остатка на второй—третій остатокъ, и т. д., то общій наибольшій дѣлитель данныхъ двухъ чиселъ равенъ послѣднему остатку, содержащемуся въ предпослѣднемъ цѣлое число разъ. — Такъ, если даны два числа 480 и 350, то первый остатокъ равенъ 130, второй остатокъ (получаемый при раздѣленіи 350-ти на 130) равенъ 90, третій (получаемый при раздѣленіи 130-ти на 90) равенъ 40, четвертый остатокъ (получаемый при раздѣленіи 90 на 40) равенъ 10, и этотъ остатокъ есть послѣдній остатокъ, получаемый при вычисленіи этого рода, потому что при раздѣленіи предпослѣдняго (т. е. третьяго) остатка на 10 дѣленіе совершается на-цѣло, и въ частномъ получается 4; въ этомъ случаѣ 10 есть общій наибольшій дѣлитель данныхъ чиселъ: 480 и 350.

На этомъ основанъ способъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя, извѣстный въ наукѣ подъ названіемъ *способа послѣдовательнаго дѣленія*, а также подъ названіемъ *способа Евклида*, по имени славнаго математика древности, жившаго въ III вѣкѣ до Р. Хр. Способъ этотъ изложенъ въ слѣдующемъ параграфѣ, доказательство же его вѣрности—въ § 84.

§ 83. Для отысканія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ данныхъ чиселъ можно большее изъ нихъ раздѣлить на меньшее; если при этомъ остатокъ равенъ нулю, то меньшее число есть общій наибольшій дѣлитель обоихъ. Если отъ раздѣленія бо́льшаго на мень- Способъ послѣдов. дѣленія.

шее получается остатокъ, то меньшее дѣлятъ на этотъ остатокъ; если остатокъ отъ этого дѣленія равенъ нулю, то первый остатокъ есть общій наибольшій дѣлитель данныхъ двухъ чиселъ. Если же и въ этомъ случаѣ получается остатокъ, то предшествующій ему остатокъ дѣлятъ на новый остатокъ. И такимъ образомъ поступаютъ до тѣхъ поръ, пока получится въ остаткѣ нуль. Тогда послѣдній дѣлитель равенъ общему наибольшему дѣлителю данныхъ двухъ чиселъ.—Этотъ способъ отысканія общаго наибольшаго дѣлителя и есть *способъ послѣдовательнаго дѣленія.* По этому способу расположеніе вычисленій для отысканія общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 360 и 250 слѣдующее:

$$\begin{array}{r|l}
360 & 250 \\
-250 & 1 \\ \hline
250 & 110 \\
-220 & 2 \\ \hline
110 & 30 \\
-90 & 3 \\ \hline
30 & 20 \\
-20 & 1 \\ \hline
20 & 10 \\ \hline
0 & 2
\end{array}
\quad \text{или:} \quad
\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
1 & 2 & 3 & 1 & 2 & \\
360 & 250 & 110 & 30 & 20 & 10 \\
-250 & -220 & -90 & -20 & -20 & \\ \hline
110 & 30 & 20 & 10 & 0 &
\end{array}$$

Каковъ бы ни былъ способъ расположенія вычисленій, во всякомъ случаѣ послѣдній дѣлитель, т. е. въ данномъ случаѣ число 10, и есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ 360 и 250.

Доказательство способа Евклида.

§ 84*. Изъ изложенныхъ выше (§ 82) свойствъ общаго наибольшаго дѣлителя только первыя два не нуждаются въ разъясненіи и доказательствахъ. Что касается остальныхъ свойствъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, то они не столь очевидны, и въ нихъ можно убѣдиться вычисленіемъ, а также съ помощью разсужденій. Возьмемъ два числа, которыхъ общій наибольшій дѣлитель намъ неизвѣстенъ, напр., числа 8960 и 6320 (разсужденія останутся тѣ же при всякихъ другихъ двухъ числахъ). Раздѣливъ одно число на другое, получимъ въ частномъ 1, а въ остаткѣ 2640; поэтому (въ виду того, что дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное, увеличенному на остатокъ)

$$8960 = 6320 \times 1 + 2640;$$

изъ этого равенства видно, что всякій дѣлитель чиселъ 8960 и 6320 есть въ то же время дѣлитель числа 2640 (§ 74), а потому и общій наибольшій дѣлитель данныхъ двухъ чиселъ равенъ общему наибольшему дѣлителю меньшаго изъ нихъ и остатка, получаемаго при раздѣленіи бо́льшаго на меньшее. Далѣе, раздѣливъ

6320 на 2640, получимъ въ частномъ 2, а второй остатокъ равенъ 840, откуда (въ виду извѣстной зависимости между дѣлимымъ, дѣлителемъ и остаткомъ)

$$6320 = 2640 \times 2 + 1040;$$

изъ этого равенства получимъ, что общій наибольшій дѣлитель чиселъ 6320 и 2640 равенъ общему наибольшему дѣлителю чиселъ 2640 и 1040. Такимъ образомъ изъ двухъ равенствъ:

$$\begin{aligned} 8960 &= 6320 \times 1 + 2640, \\ 6320 &= 2640 \times 2 + 1040 \end{aligned}$$

и изъ остальныхъ равенствъ, получаемыхъ такимъ же образомъ:

$$\begin{aligned} 2640 &= 1040 \times 2 + 560, \\ 1040 &= 560 \times 1 + 480, \\ 560 &= 480 \times 1 + 80, \\ 480 &= 80 \times 6, \end{aligned}$$

получимъ, что:

общ.	наиб.	д-ль	ч.	8960 и 6320	=	об.	наиб.	д-лю	ч.	6320 и 2640,
»	»	»	»	6320 и 2640	=	»	»	»	»	2640 и 1040,
»	»	»	»	2640 и 1040	=	»	»	»	»	1040 и 560,
»	»	»	»	1040 и 560	=	»	»	»	»	560 и 480,
»	»	»	»	560 и 480	=	»	»	»	»	480 и 80,

общій же наибольшій дѣлитель чиселъ 480 и 80 равенъ 80. Поэтому и общій наибольшій дѣлитель чиселъ 8960 и 6320 равенъ 80-ти, т. е. послѣднему остатку, получаемому при послѣдовательномъ примѣненіи Евклидова способа къ числамъ 8960 и 6320.

Свойства общаго наибольшаго дѣлителя.

§ 85*. Изъ остальныхъ свойствъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ достойны особеннаго вниманія еще слѣдующія:

1) Если какое нибудь число есть общій дѣлитель данныхъ двухъ чиселъ, то онъ есть дѣлитель также и ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, и обратно: если данное число есть дѣлитель общаго наибольшаго дѣлителя данныхъ двухъ чиселъ, то оно есть дѣлитель также и данныхъ двухъ чиселъ.—Это свойство общаго наибольшаго дѣлителя принадлежитъ къ числу очевидныхъ; дѣйствительно: а) если одно изъ данныхъ двухъ чиселъ есть общій наибольшій дѣлитель обоихъ, напр., если даны числа 30 и 15, причемъ послѣднее есть общій наибольшій дѣлитель обоихъ чиселъ, то каждый общій дѣлитель обоихъ чиселъ есть дѣлитель 15-ти, и обратно: каждый дѣлитель 15-ти есть дѣлитель также и 30-ти; б) если же общій дѣлитель данныхъ двухъ чиселъ есть нѣкоторый (послѣдній) остатокъ, получаемый при Евклидовомъ способѣ, то всякій общій дѣлитель данныхъ чиселъ (напр., 360 и 250) есть дѣлитель и пер-

ваго остатка (§ 84), и второго, третьяго, и, наконецъ, послѣдняго, т. е. есть дѣлитель также общаго наибольшаго дѣлителя; обратно: если какое либо число есть дѣлитель послѣдняго остатка, то оно есть дѣлитель предпослѣдняго, третьяго съ конца и т. д., сталобыть, оно есть дѣлитель и данныхъ двухъ чиселъ.

2) Отъ увеличенія (или уменьшенія) каждаго изъ данныхъ двухъ чиселъ въ одно и то же число разъ общій наибольшій дѣлитель ихъ увеличивается (или уменьшается) во столько же разъ. Такъ, если вмѣсто чиселъ 8960 и 6320, которыхъ общій наибольшій дѣлитель равенъ 40-ка, взять числа въ 7 разъ бо̀льшія, т. е. 62 720 и 44 240, то ихъ общій наибольшій дѣлитель въ 7 разъ болѣе 40-ка, т. е. равенъ 280. Убѣдиться въ этомъ можно съ помощью слѣдующихъ разсужденій надъ числами 8960 и 6320, которыхъ общій наибольшій дѣлитель (§ 84) равенъ 80-ти; при этомъ важно, что такія же разсужденія могутъ быть повторены для всякихъ двухъ чиселъ. По Евклидову способу получимъ:

$8960=6320\times1+2640$, откуда $8960\times7=6320\times7\times1+2640\times7$,
$6320=2640\times2+1040$, » $6320\times7=2640\times7\times2+1040\times7$,
$2640=1040\times2+560$, » $2640\times7=1040\times7\times2+560\times7$,
$1040=560\times1+480$, » $1040\times7=560\times7\times1+480\times7$,
$560=480\times1+80$, » $560\times7=480\times7\times1+80\times7$,
наконецъ,
$480=80\times6$, » $480\times7=80\times7\times6$,

т. е. послѣднимъ остаткомъ послѣ примѣненія Евклидова способа къ числамъ 8960×7 и 6320×7, будетъ 80×7.

Свойство произведенія двухъ чиселъ.

§ 86*. Отъ увеличенія каждаго изъ данныхъ двухъ чиселъ въ одно и то же число разъ общій наибольшій дѣлитель ихъ увеличивается во столько же разъ (§ 85); отсюда вытекаетъ одно изъ важнѣйшихъ въ ариѳметикѣ свойствъ произведенія двухъ чиселъ: если дано произведеніе двухъ сомножителей, изъ которыхъ одно есть число взаимно-первое съ нѣкоторымъ третьимъ числомъ, и если это произведеніе дѣлится на это третье число, то второй изъ сомножителей даннаго произведенія дѣлится на то же третье число. Такъ, напр., если извѣстно, что

$2280=15\times152$ и что $2280:38=60$ (безъ остатка),

то 152 дѣлится на-цѣло безъ остатка на 38, ибо 15 и 38 суть числа взаимно-первыя. На этомъ замѣчательномъ свойствѣ произведенія двухъ чиселъ основаны очень многія ученія теоретической ариѳметики. Для доказательства этого свойства примемъ во вниманіе, что общій наибольшій дѣлитель чиселъ 38 и 15 равенъ 1-цѣ; поэтому,
» » » пр-ній 38×152 и 15×152 равенъ 152;

но 38 есть дѣлитель и произведенія 38×152 (это очевидно), и произведенія 15×152 (по условію); стало-быть, 38 есть дѣлитель ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, т. е. также и числа 152. Что̀ и требовалось доказать.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее свойство чиселъ, безъ котораго не можетъ быть установленъ признакъ дѣлимости на 6: если данное число, напр., 2261, дѣлится на каждое изъ двухъ взаимно-первыхъ чиселъ, напр., на 19 и на 7, въ отдѣльности, то оно дѣлится также и на ихъ произведеніе.—Дѣйствительно: разъ 2261 дѣлится на 19, то частное $2261 : 19$ равно нѣкоторому цѣлому числу, и на самомъ дѣлѣ:

$$2261 : 19 = 119, \text{ откуда } 2261 = 19 \times 119;$$

но по условію 2261 дѣлится также на 7, а 7 и 19 — взаимно-первыя числа; стало-быть, по предыдущему, число 119 должно дѣлиться на 7 безъ остатка; и на самомъ дѣлѣ $119 : 7 = 17$. Поэтому $2261 = 19 \times (17 \times 7) = (19 \times 7) \times 17$, т. е. 2261 дѣлится безъ остатка на произведеніе 19×7, что̀ и требовалось доказать.

Признакъ дѣлимости на 6.

Замѣчаніе 1-ое. На этомъ основанъ слѣдующій признакъ дѣлимости чиселъ на 6: если данное число есть число четное и если оно дѣлится, кромѣ того, на 3 безъ остатка, то оно дѣлится на 6 на-цѣло безъ остатка; въ противномъ случаѣ, т. е. если одно изъ этихъ ствойствъ или оба вмѣстѣ не принадлежатъ данному числу, то оно на 6 не дѣлится на-цѣло безъ остатка. — Дѣйствительно: для того, чтобы число дѣлилось на 6, необходимо, чтобы оно дѣлилось на 2 и на 3, потому что $6 = 2 \times 3$; но этого также и достаточно, на основаніи предыдущаго, ибо если число дѣлится и на 2, и на 3, то оно дѣлится также на 6. Стало-быть, если данное число дѣлится и на 2, и на 3 безъ остатка на-цѣло, то оно дѣлится и на 6; въ противномъ случаѣ оно на 6 не дѣлится.

Замѣчаніе 2-ое. Такимъ же образомъ могутъ быть выведены признаки дѣлимости на 12, 15, 18, 36 и мн. др. числа, равныя произведенію двухъ взаимно-первыхъ чиселъ. Но пользоваться этими признаками приходится рѣдко.

Разложимость непервонач. чиселъ на первонач. дѣлителей.

§ 87. Въ практической ариѳметикѣ можно принять безъ доказательства, что всякое непервоначальное число имѣетъ, по крайней мѣрѣ двухъ первоначальныхъ дѣлителей. Такъ, если дано число 270, то съ перваго взгляда можно видѣть, что оно дѣлится на 10 безъ остатка, а потому оно дѣлится также на 5 и на 2 безъ остатка, числа же 5 и 2 — числа первоначальныя. Точно такъ же легко убѣдиться, что числа 1 809, 260, 375 и т. д. имѣютъ каждое своихъ первоначальныхъ дѣлителей.

Изъ этого вытекаетъ, что:

1) Всякое непервоначальное число можетъ быть разсматриваемо, какъ произведеніе нѣкоторыхъ первоначальныхъ чиселъ.— Дѣйствительно, по предыдущему, всякое непервоначальное число имѣетъ какого нибудь первоначальнаго дѣлителя; если мы на этого дѣлителя раздѣлимъ данное число, то получимъ въ частномъ число либо первоначальное, либо составное. Если это частное есть число первоначальное, то данное число такимъ образомъ есть произведеніе двухъ первоначальныхъ чиселъ; если же частное есть число составное, то оно въ свою очередь должно дѣлиться на какое нибудь первоначальное число; а въ такомъ случаѣ данное число можно разсматривать какъ произведеніе нѣкоторыхъ двухъ первоначальныхъ чиселъ на нѣкоторое третье число, которое опять-таки можетъ быть либо простымъ, либо составнымъ; въ первомъ случаѣ данное число будетъ произведеніемъ трехъ первоначальныхъ чиселъ, во второмъ-же—третьяго непервоначальнаго множителя можно снова разсматривать какъ произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ одинъ непремѣнно число первоначальное. И т. д. Но первоначальный дѣлитель составного числа непремѣнно меньше этого послѣдняго; стало-быть, мы неизбѣжно дойдемъ до того, что данное непервоначальное число разложится на произведеніе чиселъ первоначальныхъ. Такъ, число

$$210 = 2 \times 105 = 2 \times 3 \times 35 = 2 \times 3 \times 5 \times 7, \text{ и т. п.}$$

Разложить данное число на первоначальныхъ множителей (или же дѣлителей) значитъ найти тѣ первоначальныя числа, которыхъ произведеніе равно данному числу.

2) Если данное непервоначальное число разложено какимъ нибудь образомъ на первоначальныхъ множителей, то какимъ бы образомъ мы ни разложили его на первоначальныхъ множителей, мы получимъ всякій разъ тѣхъ же множителей и притомъ каждаго изъ нихъ нѣкоторое опредѣленное число разъ.—Такъ, напр., всегда $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$; при этомъ какія бы иныя первоначальныя числа мы ни взяли, произведеніе ихъ не будетъ равно 210-ти; для того же, чтобы получить 210, необходимо взять въ какомъ либо порядкѣ тѣ же числа 2, 3, 5 и 7, т. е. изъ всѣхъ первоначальныхъ чиселъ только 2, 3, 5 и 7 послѣ перемноженія даютъ въ результатѣ 210.

Доказательство предыдущаго.

§ 88*. Въ справедливости того, что всякое непервоначальное число имѣетъ, по крайней мѣрѣ, двухъ первоначальныхъ дѣлителей, можно убѣдиться и съ помощью разсужденія, основаннаго на томъ, что данное цѣлое непервоначальное число не можетъ быть равно произведенію безчисленнаго множества сомножителей, а потому, разлагая каждый изъ его дѣйствительныхъ сомножителей, мы должны прійти непремѣнно, по крайней мѣрѣ, къ двумъ первоначальнымъ дѣлителямъ даннаго числа.

Въ томъ же, что всякое непервоначальное число есть произведеніе нѣкоторыхъ вполнѣ опредѣленныхъ первоначальныхъ сомножителей, тоже легко убѣдиться помощью разсужденія. Предположимъ, что данное число есть произведеніе какихъ нибудь опредѣленныхъ первоначальныхъ сомножителей; предположимъ далѣе, что оно есть произведеніе также и совсѣмъ другихъ первоначальныхъ сомножителей, и мы придемъ къ тому выводу, что число дѣлится безъ остатка не только на своихъ простыхъ множителей, но еще и на другія простыя числа. А потому оно равно произведенію своихъ первоначальныхъ множителей, помноженному на произведеніи еще другихъ множителей. Чего быть не можетъ.

Общій наиб. дѣл. и наим. кр. нѣск. чиселъ.

§ 89. Общаго наибольшаго дѣлителя сколькихъ угодно чиселъ можно получить слѣдующимъ образомъ: найдя общаго наибольшаго дѣлителя двухъ изъ числа данныхъ чиселъ и назвавъ его первымъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ, найдемъ общаго наибольшаго дѣлителя этого общаго наибольшаго дѣлителя и третьяго изъ данныхъ чиселъ; назвавъ полученнаго общаго наибольшаго дѣлителя вторымъ, найдемъ общаго наибольшаго дѣлителя второго общаго наибольшаго дѣлителя и четвертаго изъ данныхъ чиселъ. Поступая такимъ же образомъ и далѣе, получимъ, въ концѣ концовъ, послѣдняго общаго наибольшаго дѣлителя, который будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ всѣхъ данныхъ чиселъ. Такъ, если даны числа: 120, 200, 420, 560, 610, то

общ.	наиб.	д-ль	чиселъ:	120 и 200	равенъ 40,
»	»	»	»	40 и 420	» 20,
»	»	»	»	20 и 560	» 20,
»	»	»	»	20 и 610	» 10.

Стало-быть, общій наибольшій дѣлитель чиселъ 120, 200, 400, 420 и 160 равняется 10-ти. Доказательство справедливости этого способа нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ изложено въ отдѣлѣ «Дополнительныхъ статей».

Что касается наименьшаго кратнаго двухъ чиселъ, то наименьшее кратное двухъ чиселъ равно ихъ произведенію, раздѣленному на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя. Такъ, наименьшее кратное чиселъ 400 и 600, которыхъ общій наибольшій дѣлитель есть 200, равно частному $(400 \times 600) : 200$, т. е. 1200. Доказательство этого изложено въ отдѣлѣ «Дополнительныхъ статей».

Наименьшее же кратное нѣсколькихъ чиселъ находится слѣдующимъ образомъ: наименьшее кратное первыхъ двухъ чиселъ назовемъ первымъ наименьшимъ кратнымъ; тогда найдемъ наименьшее кратное перваго наименьшаго кратнаго и третьяго изъ данныхъ чиселъ; назвавъ его вторымъ наименьшимъ кратнымъ, найдемъ наименьшее кратное второго наименьшаго кратнаго и четвертаго изъ данныхъ чиселъ. Поступая такимъ же образомъ и далѣе, получимъ, въ концѣ концовъ, послѣднее наименьшее кратное, которое и будетъ наименьшимъ кратнымъ всѣхъ данныхъ чиселъ. Такъ, если даны числа: 120, 360, 480 и 560, то

наименьшее кр. чиселъ 120 и 360 равно 360;
» » » 360 и 480 » 1440;
» » » 1440 и 560 » 10080.

Стало-быть, наименьшее кратное всѣхъ данныхъ чиселъ равно 10080. Доказательство справедливости этого способа изложено въ отдѣлѣ «Дополнительныхъ статей».

Разложеніе числа на первоначальныхъ множителей. § 90. Для того чтобы разложить данное число, напр. 360, на его первоначальныхъ множителей, можно начать съ отысканія наименьшихъ первоначальныхъ чиселъ, на которыя оно дѣлится; оно дѣлится на 2, а потому раздѣлимъ его сначала на 2; въ частномъ получимъ 180; поэтому $360=2\times180$. Полученное частное тоже дѣлится на 2 безъ остатка; отъ раздѣленія же 180-ти на 2 получается 90; продолжая разсуждать также далѣе, получили:

$180 = 2 \times 90$, вслѣдствіе чего $360 = 2 \times 2 \times 90$;
$90 = 2 \times 45$, » » $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 45$;
$45 = 3 \times 15$, » » $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15$;
$15 = 3 \times 5$, » » $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

Такимъ образомъ 360 разложено на первоначальныхъ множителей, ибо каждый изъ полученныхъ сомножителей дѣлится только на самого себя и на единицу. Вычисленія при разложеніи чиселъ на первоначальныхъ множителей располагаются такъ, какъ это сдѣлано ниже для чиселъ 360, 270, 480, 475, 375 и 325, т. е. справа вертикальной черты записываютъ первоначальныхъ дѣлителей, а слѣва—частныя:

360	2	270	2	480	2	475	5	375	3	325	5
180	2	135	3	240	2	95	5	125	5	65	5
90	2	45	3	120	2	19	19	25	5	13	13
45	3	15	3	60	2			5	5		
15	3	5	5	30	2						
5	5			15	3						
				5	5						

Другіе способы нахожд. общ. наиб. дѣл. и наим. кр. числа.

§ 91. Есть еще одинъ способъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ (и нѣсколькихъ) чиселъ: если выдѣлить изъ числа всѣхъ первоначальныхъ множителей данныхъ чиселъ ихъ *общихъ* множителей, то произведеніе всѣхъ общихъ первоначальныхъ множителей данныхъ чиселъ равно общему наибольшему дѣлителю послѣднихъ. Доказательство этого приведено ниже, въ § 92. — Пусть требуется найти общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 360, 240 и 150. Разложимъ эти числа на первоначальныхъ множителей:

360	2	240	2	150	2
180	2	120	2	75	3
90	2	60	2	25	5
45	3	30	2	5	5
15	3	15	3		
5	5	5	5		

Легко видѣть, что число 2 является общимъ множителемъ этихъ чиселъ одинъ разъ; точно также общимъ множителемъ является число 3 и число 5. Произведеніе $2 \times 3 \times 5$, т. е. 30 есть общій наибольшій дѣлитель данныхъ чиселъ.

Для того чтобы найти наименьшее кратное двухъ или нѣсколькихъ чиселъ, поступаютъ слѣдующимъ образомъ: прежде всего разлагаютъ эти послѣднія на первоначальныхъ множителей, потомъ, взявъ всѣхъ простыхъ множителей перваго изъ нихъ, записываютъ этихъ множителей. Далѣе къ записаннымъ множителямъ присоединяются тѣ множители слѣдующаго числа, которыми послѣднее отличается отъ перваго числа; затѣмъ къ полученному ряду множителей приписываются множители третьяго числа, которыми оно отличается отъ первыхъ двухъ чиселъ, и т. д. до послѣдняго изъ данныхъ чиселъ включительно. Доказательства вѣрности этого изложенныхъ способовъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго нѣсколькихъ чиселъ даны въ слѣдующемъ параграфѣ.

Расположеніе вычисленій при отысканіи наименьшаго кратнаго нѣсколькихъ чиселъ сводится, стало-быть, прежде всего къ разложенію данныхъ чиселъ на простыхъ множителей и къ выдѣленію множителей, необходимыхъ и достаточныхъ для образованія наименьшаго кратнаго данныхъ чиселъ. Такъ, для отысканія наименьшаго кратнаго чиселъ: 420, 3 900 и 3 960, разложимъ эти числа на простыхъ множителей и подчеркнемъ тѣхъ множителей, которые должны непремѣнно войти въ число множителей искомаго наименьшаго кратнаго:

420	**2**	3900	2	3960	2
210	**2**	1950	2	1980	2
105	**3**	975	3	990	**2**
35	**5**	325	5	495	3
7	**7**	65	**5**	165	**3**
		13	**13**	55	5
				11	**11**.

Въ первомъ разложенiи цыфры: 2, 2, 3, 5 и 7 напечатаны крупнымъ шрифтомъ потому, что наименьшее кратное всѣхъ данныхъ чиселъ должно заключать всѣхъ этихъ множителей; во второмъ разложенiи отмѣчены числа 5 и 13, а въ третьемъ—2, 3 и 11. Такимъ образомъ получается рядъ чиселъ: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 11 и 13, произведенiе которыхъ

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 1\ 801\ 800,$$

каковое число и есть, во-первыхъ, число кратное данныхъ чиселъ 420, 3 900 и 3 960, потому что въ числѣ его множителей находятся множители каждаго изъ данныхъ чиселъ; во-вторыхъ, оно есть наименьшее кратное, потому что изъ числа его сомножителей нельзя исключить ни одного: если исключить хоть одинъ разъ взятое число 2, то полученное произведенiе не раздѣлится на 3 960; если исключить хоть одинъ разъ взятое число 3, то оно тоже не раздѣлится на 3 960; если исключить одинъ разъ взятое 5, оно не раздѣлится на 3 900; если исключить число 7, то оно не раздѣлится на 420, и т. д. Кромѣ того, изъ этого кратнаго числа нельзя также вычесть ни одной единицы, что вытекаетъ изъ разсужденiй, приведенныхъ въ слѣдующемъ пораграфѣ.

Наим. кр. взаимно-первыхъ чиселъ.

Замѣчанiе 1-ое. Легко убѣдиться, что наименьшее кратное двухъ или нѣсколькихъ первоначальныхъ или вообще взаимно-первыхъ чиселъ равно ихъ произведенiю. Дѣйствительно: у первоначальныхъ и вообще у взаимно-первыхъ чиселъ нѣтъ общихъ множителей, а потому наименьшее кратное первоначальныхъ или вообще взаимно-первыхъ чиселъ должно равняться произведенiю всѣхъ множителей всѣхъ данныхъ чиселъ, т. е. произведенiю этихъ чиселъ.

Понятiе о степени числа.

Замѣчанiе 2-е. Произведенiе одинаковыхъ сомножителей называется *степенью* этого, притомъ если равныхъ между собою сомножителей два—*второю* степенью, а если ихъ три—*третьею степенью*, и т. д. Такъ

8×8	или	64	назыв.	второю степенью	8-ми,
$6 \times 6 \times 6$	или	216	»	третьею »	6-ти,
$2 \times 2 \times 2 \times 2$	или	16	»	четвертою »	2-хъ, и т. п.

Вторая степень числа называется также *квадратомъ* его, а третья—*кубомъ*. Записывается произведенiе равныхъ сомножителей также и иначе, а именно: сомножителя записываютъ только разъ, зато надъ нимъ справа записываютъ болѣе мелкимъ шрифтомъ число, выражающее, сколько разъ въ данномъ случаѣ взято множителемъ данное число. Такъ, напр., вмѣсто произведенiя

$2 \times 2 \times 2$ пишутъ: 2^3,

вмѣсто того, чтобы писать $7 \times 7 \times 7 \times 7$ пишутъ: 7^4,
» » » » 15×15 » 15^2, и т. п.

При этомъ число равныхъ сомножителей называется *показателемъ* степени, а каждый изъ сомножителей — основаніемъ ея. Произведеніе двухъ степеней одного и того же числа, очевидно, равно новой степени того же основанія, которой показатель равенъ суммѣ показателей данныхъ двухъ степеней, т. е.

$$2^5 \times 2^3 = 2^8, \text{ а } 3^2 \times 3^3 = 3^5, \text{ и т. д.}$$

Замѣчаніе 3-е. Правила нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго нѣсколькихъ чиселъ могутъ быть выражены и иначе. Для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ надо взять произведеніе только тѣхъ простыхъ сомножителей, которыя встрѣчаются въ одно и то же время во всѣхъ разложеніяхъ данныхъ чиселъ, но притомъ съ наименьшими показателями, какія встрѣчаются въ этихъ разложеніяхъ. Для нахожденія же наименьшаго кратнаго нѣсколькихъ чиселъ надобно взять каждое изъ простыхъ чиселъ, встрѣчающихся въ ихъ разложеніяхъ, но съ наибольшимъ изъ показателей, съ которымъ оно встрѣчается въ этихъ разложеніяхъ. — При этомъ число безъ показателя считается равнымъ тому же числу съ показателемъ, равнымъ единицѣ, т. е. принимается безъ доказательства, что

Правила нахожденія общ. наиб. дѣл. и наим. кр. нѣск. чиселъ.

$$2 = 2^1, \ 7 = 7^1, \ 13 = 13^1, \text{ и т. п.}$$

§ 92*. Для того, чтобы убѣдиться въ томъ, что произведеніе всѣхъ общихъ первоначальныхъ дѣлителей данныхъ чиселъ равно общему наибольшему дѣлителю этихъ послѣднихъ достаточно принять къ свѣдѣнію, что каждый общій дѣлитель данныхъ двухъ чиселъ есть также и дѣлитель ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, и обратно: каждый дѣлитель общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ есть дѣлитель и данныхъ двухъ чиселъ.

Доказательство предыдущаго.

Для того же, чтобы убѣдиться въ томъ, что наименьшее кратное двухъ или нѣсколькихъ данныхъ чиселъ равно произведенію перваго изъ нихъ на недостающихъ ему первоначальныхъ дѣлителей, входящихъ въ составъ остальныхъ чиселъ, слѣдуетъ принять во вниманіе, что для того, чтобы данное число дѣлилось на каждое изъ данныхъ чиселъ не только достаточно, но и необходимо, чтобы первое число равнялось произведенію всѣхъ первоначальныхъ множителей, входящихъ въ составъ каждаго изъ данныхъ чиселъ.

Глава VI.

Объ обыкновенныхъ дробяхъ.

Доля, дробь и смѣшанное число.

§ 93. *Долею* единицы обыкновенно называется всякая часть единицы, которая содержится въ послѣдней цѣлое число разъ. Такъ, половина, треть, четверть, пятая, шестая, седьмая и т. д. суть доли единицы. *Дробью* или *дробнымъ числомъ* называется любая доля единицы, а равно и любое число равныхъ между собою долей ея. Такъ, двѣ трети, одна восемнадцатая, шесть одиннадцатыхъ суть дроби или дробныя числа. Для устнаго обозначенія дробей употребляются чаще всего имена числительныя количественныя въ связи съ порядковыми: послѣднія—для обозначенія величины взятыхъ долей, первыя—для обозначенія ихъ числа. Говоря: «пять двадцать-четвертыхъ», мы тѣмъ самымъ указываемъ, о какихъ именно доляхъ говоримъ (въ данномъ случаѣ это—двадцать-четвертыя доли, т. е. доли, изъ которыхъ каждая содержится 24 раза въ единицѣ); кромѣ того, указываемъ, сколько именно долей мы въ данномъ случаѣ имѣемъ въ виду, т. е., что имѣемъ въ виду такихъ долей 5.

При письменномъ обозначеніи дробей соблюдается слѣдующее правило: сначала, помощью арабскихъ цыфръ, обозначается число взятыхъ въ данномъ случаѣ долей, подъ этимъ обозначеніемъ проводится горизонтальная черта, а подъ этою послѣднею обозначается, тоже помощью арабскихъ цыфръ, число такихъ же долей въ единицѣ. Такъ, одна треть обозначается слѣдующимъ образомъ: $\frac{1}{3}$ потому, что въ этомъ случаѣ взята *одна* доля, а число такихъ же долей, какихъ взято въ этомъ случаѣ одна, въ единицѣ — три; двѣ пятнадцатыхъ, три седьмыхъ, одиннадцать двадцатыхъ по порядку обозначаются такъ: $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{11}{20}$.

Число взятыхъ въ данномъ случаѣ долей называется *числителемъ* дроби; число же долей, содержащихся въ этомъ случаѣ въ единицѣ, называется *знаменателемъ* дроби. Такъ, въ дробяхъ $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{9}{10}$, числа 3, 5 и 9 суть числители, а 4, 7 и 10—знаменатели. Числитель и знаменатель дроби носятъ общее названіе *членовъ* ея.

Правильною называется дробь, меньшая единицы, *неправильною* же—равная единицѣ или бóльшая единицы. Такъ, дроби: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{11}$ суть дроби правильныя; дроби же: $\frac{4}{4}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{11}{11}$, $\frac{14}{9}$—неправильныя.

Цѣлое число вмѣстѣ съ какою нибудь правильною дробью составляютъ *число смѣшанное*; на письмѣ такія числа обозначаются слѣдующимъ образомъ: сначала обозначается цѣлое число, а рядомъ съ нимъ, справа, болѣе мелкими цыфрами — дробь, которой черта должна приходиться противъ средины обозначенія цѣлаго числа; такъ, три съ половиной, четыре цѣлыхъ и три четверти, сто семьдесятъ семь цѣлыхъ и одна пятая обозначаются такъ: $3\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$, $177\frac{1}{5}$.

Примѣчаніе. Въ печати дроби иногда обозначаются съ помощью косой черты вмѣсто горизонтальной, т. е. пишутъ

$$^1/_3 \text{ вм. } \tfrac{1}{3},\ ^3/_4 \text{ вм. } \tfrac{3}{4},\ ^{11}/_{17} \text{ вм. } \tfrac{11}{17};$$

но такой способъ обозначенія не можетъ быть терпимъ на письмѣ, потому что на письмѣ онъ можетъ подать поводъ къ недоразумѣніямъ; напр., въ обозначеніи смѣшанныхъ чиселъ, при не аккуратномъ письмѣ, можно принять

$$3^3/_4 \text{ за } ^{33}/_4, \text{ и т. п.}$$

§ 94. Всякую долю единицы можно разсматривать какъ полное частное, происходящее отъ раздѣленія единицы на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ ея знаменателѣ. Точно такъ же и дробь, которой числитель больше единицы, можно разсматривать какъ полное частное, происходящее отъ раздѣленія числа, равнаго числителю, на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ знаменателѣ ея. Дѣйствительно, пусть дана дробь $\frac{3}{5}$ аршина; $\frac{1}{5}$ аршина есть полное частное, происходящее отъ раздѣленія, безъ остатка, одного аршина на 5 равныхъ частей, т. е. Дробь какъ полное частное.

$$1 \text{ арш. } : 5 = \tfrac{1}{5} \text{ аршина};$$

увеличивъ дѣлимое въ 3 раза, мы должны получить въ 3 раза большее частное, т. е. не одну пятую долю аршина, а уже $\frac{3}{5}$ его; стало-быть,

$$3 \text{ арш. } : 5 = \tfrac{3}{5} \text{ аршина}.$$

Это значитъ, что $\frac{3}{5}$ одного аршина можно разсматривать какъ полное частное, происходящее отъ раздѣленія 3-хъ арш. на 5 равныхъ частей. Точно такъ же и всякую иную совокупность равныхъ между собою долей какой угодно единицы можно разсматривать какъ результатъ раздѣленія (безъ остатка) такого числа единицъ того же рода, которое равно числителю, на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ знаменателѣ. Такъ,

$$\tfrac{3}{7} \text{ фунта} = 3 \text{ ф. } : 7, \text{ и } \tfrac{5}{6} \text{ сажени} = 5 \text{ саж. } : 6,$$

и вообще

$$\tfrac{3}{7} = 3 : 7,\ \tfrac{5}{6} = 5 : 6, \text{ и т. д.}$$

Именов. дробное число.

Замѣчаніе 1-е. Именованное дробное число, строго говоря, не число, а величина; числомъ же, очевидно, является только отвлеченная дробь, у которой знаменатель есть число отвлеченное, а числитель выражаетъ только число частей и поэтому тоже не можетъ быть числомъ именованнымъ. Тѣмъ не менѣе, однако, дробь, которая выражаетъ опредѣленную величину, принято называть именованнымъ дробнымъ числомъ, подобно тому, какъ величину, выраженную съ помощью цѣлаго числа и нѣкоторой единицы мѣры, принято называть цѣлымъ именованнымъ числомъ.

Частное въ видѣ дроби.

Замѣчаніе 2-е. Всякое полное частное, каковы бы ни были дѣлимое и дѣлитель, можетъ быть выражено въ видѣ дроби, если имѣемъ дѣло съ дѣленіемъ числа на равныя части. Такъ, зная, что

$$1:2=\tfrac{1}{2},\ 1:3=\tfrac{1}{3},\ 1:4=\tfrac{1}{4},\ 1:5=\tfrac{1}{5}\text{ и т. д.,}$$

легко убѣдимся, что

$$7:2=\tfrac{7}{2},\ 8:2=\tfrac{8}{2},\ 9:3=\tfrac{9}{3},\ 17070:7=\tfrac{17070}{7}$$

и вообще, что при раздѣленіи любого числа на любое другое число, можно полное частное положить равнымъ дроби, которой числитель равенъ дѣлимому, а знаменатель — дѣлителю. Такъ, напр., и $4=\frac{4}{1}$, $7=\frac{7}{1}$ и т. д.

Неправильная дробь и смѣшанное число.

§ 95. Всякая неправильная дробь можетъ быть выражена либо въ видѣ цѣлаго числа, либо же (если это невозможно) въ видѣ числа смѣшаннаго. Такъ, пусть дана дробь $\frac{17}{5}$; въ одной единицѣ заключается пятыхъ долей, очевидно, 5; намъ дано пятыхъ долей 17; спрашивается, какъ узнать, сколько единицъ заключается въ этихъ 17-ти доляхъ? Очевидно, что для этого надо найти, въ цѣлыхъ числахъ, отношеніе $17:5$; это отношеніе равно 3-мъ, т. е.,

$$17:5=3,\text{ причемъ въ остаткѣ получается } 2.$$

Стало-быть, въ 17-ти пятыхъ доляхъ одной единицы содержатся 3 цѣлыхъ единицы; остатокъ же 2 выражаетъ—сколько, кромѣ того, въ этомъ числѣ пятыхъ долей; а потому $\frac{17}{5}=3\frac{2}{5}$. Точно такимъ же образомъ получимъ, что

$$\tfrac{4}{4}=1,\ \tfrac{5}{3}=1\tfrac{2}{3},\ \tfrac{17}{2}=8\tfrac{1}{2},\ \tfrac{26}{9}=2\tfrac{8}{9},\ \tfrac{36}{12}=3;\text{ и т. п.}$$

Обратно: всякое цѣлое или смѣшанное число можетъ быть выражено въ видѣ равной ему неправильной дроби; для этого слѣдуетъ только раздробить каждую единицу цѣлаго числа въ такія же доли, въ какихъ выражена дробь смѣшаннаго числа.—Дѣйствительно, пусть дано смѣшанное число

$$7\tfrac{3}{4};$$

въ каждой единицѣ заключается 4 четверти одной единицы, въ 7-ми единицахъ ихъ 28, что̀ вмѣстѣ съ 3-мя четвертями даннаго смѣшаннаго числа составитъ, очевидно, всего тридцать одну четверть, т. е. $7\frac{3}{4}=\frac{31}{4}$. Точно такимъ же образомъ получимъ, что

$$2\frac{3}{5}=\frac{13}{5},\ 7\frac{1}{8}=\frac{57}{8},\ 5\frac{9}{11}=\frac{64}{11},\ \text{а}\ 3=\frac{6}{2}=\frac{15}{5},\ \text{и т. д.}$$

Преобразованіе неправильной дроби въ смѣшанное число называется *исключеніемъ* цѣлаго числа изъ неправильной дроби; преобразованіе же смѣшаннаго или цѣлаго числа въ равную ему неправильную дробь называется *обращеніемъ* числа въ неправильную дробь.—Правило исключенія цѣлаго числа изъ неправильной дроби гласитъ: для исключенія цѣлаго числа изъ неправильной дроби, дѣлятъ числителя послѣдней на знаменателя, частное принимаютъ за цѣлую часть смѣшаннаго числа, а остатокъ за числителя дробной его части, за знаменателя которой принимаютъ знаменателя данной дроби. Правило же обращенія смѣшаннаго числа въ неправильную дробь гласитъ такъ: для обращенія даннаго смѣшаннаго числа въ неправильную дробь, цѣлую часть даннаго числа умножаютъ на знаменателя дробной части, къ полученному прибавляютъ числителя ея, результатъ принимаютъ за числителя искомой неправильной дроби, а знаменателя дробной части смѣшаннаго числа—за знаменателя ея. Правило же обращенія цѣлаго числа въ неправильную дробь очевидно.

§ 96. Всякая дробь можетъ быть разсматриваема какъ полное частное, происходящее отъ раздѣленія (безъ остатка) числа, равнаго ея числителю, на число, равное ея знаменателю; поэтому: Измѣненія дроби.

1) Отъ увеличенія числителя въ нѣсколько разъ дробь увеличивается во столько же разъ,

2) Отъ уменьшенія числителя въ нѣсколько разъ дробь уменьшается во столько же разъ,

3) Отъ увеличенія знаменателя въ нѣсколько разъ дробь уменьшается во столько же разъ,

4) Отъ уменьшенія знаменателя въ нѣсколько разъ дробь увеличивается во столько же разъ, и

5) Отъ одновременнаго увеличенія или же уменьшенія обоихъ членовъ дроби въ одно и то же число разъ измѣняется только видъ дроби, величина же ея не измѣняется.

Такъ, отъ увеличенія вдвое числителя дроби $\frac{3}{5}$ получается дробь $\frac{6}{5}$, которая, очевидно, вдвое болѣе, чѣмъ $\frac{3}{5}$; отъ уменьшенія вдвое числителя дроби $\frac{10}{11}$ получается дробь $\frac{5}{11}$, которая, очевидно, вдвое меньше, чѣмъ $\frac{10}{11}$. Менѣе очевидны измѣненія дроби зависимости отъ измѣненій знаменателя: отъ увеличенія знаменателя $\frac{7}{30}$ въ два раза получается дробь $\frac{7}{60}$, которая вдвое меньше первоначально взятой потому, что каждая ея доля вдвое меньше; отъ уменьшенія же знаменателя дроби $\frac{7}{30}$ въ 5 разъ получается дробь $\frac{7}{6}$, которая въ 5 разъ болѣе первоначально взятой потому, что каждая доля ея въ 5 разъ болѣе. Хотя эти свойства дроби менѣе очевидны, но въ нихъ можно, стало-быть, убѣдиться помощью разсужденія.

Увеличенія дроби въ нѣсколько разъ достигаютъ, стало-быть, такъ же, какъ увеличенія частнаго при дѣленіи безъ остатка: либо взявъ дѣлимое (числителя) въ нѣсколько разъ большее (что̀ всегда возможно), либо же взявъ дѣлителя (знаменателя) въ нѣсколько разъ меньшаго (что̀ возможно не всегда); точно такъ же уменьшеніе дроби въ нѣсколько разъ можетъ быть достигнуто: либо уменьшеніемъ въ нѣсколько разъ числителя (дѣлимаго), что̀ не всегда возможно, либо же увеличеніемъ въ нѣсколько разъ знаменателя (дѣлителя), — что̀ возможно всегда.

Прибавленіе къ членамъ дроби и вычитаніе изъ нихъ поровну.

Замѣчаніе. Въ высшей степени важно помнить, что отъ одновременнаго прибавленія къ обоимъ членамъ дроби, которая не равна единицѣ, поровну, а также отъ вычитанія изъ нихъ одного и того же числа, величина дроби *измѣняется*. Такъ, напр., $\frac{3}{4}$ не равны $\frac{4}{5}$, а $\frac{7}{3}$ не равны $\frac{6}{2}$, $\frac{5}{7}$ не равны $\frac{11}{13}$ и не равны $\frac{3}{5}$, и т. д.

Преобразованіе дробей.

§ 97. На томъ свойствѣ дроби, по которому величина ея не измѣняется отъ одновременнаго увеличенія членовъ ея въ одно и то же число разъ, основано то преобразованіе *всякой дроби*, которое имѣетъ цѣлью выразить ее въ доляхъ, въ два раза, въ три, въ четыре, въ пять и т. д. разъ меньшихъ, чѣмъ первоначально взятая. Такъ, пусть дана дробь $\frac{3}{5}$ и требуется выразить ее въ доляхъ, вдвое меньшихъ; для этого, умноживъ члены ея на 2, получимъ равную ей дробь $\frac{6}{10}$; для того же чтобы получить дробь, выраженную въ доляхъ втрое меньшихъ, умножимъ члены ея на 3, и т. д. Такъ,

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{14}, \text{ и т. д.}$$
$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=\frac{6}{18}=\frac{7}{21}, \text{ и т. д.}$$

На томъ свойствѣ дроби, по которому величина ея не измѣняется отъ одновременнаго уменьшенія членовъ ея въ одно и то же число разъ, основано преобразованіе *многихъ дробей* въ дроби, которыхъ доли крупнѣе первоначально взятыхъ; но для возможности подобнаго преобразованія необходимо, чтобы числитель и знаменатель имѣли общаго дѣлителя. Такъ, $\frac{3}{7}$ не могутъ быть выражены въ болѣе крупныхъ доляхъ, а $\frac{12}{15}$ могутъ быть выражены въ доляхъ только втрое бо̀льшихъ, потому что 12 и 15 дѣлятся на одно и то же число 3. Точно такъ же $\frac{270}{360}$ могутъ быть выражены въ доляхъ, въ 2, въ 3, въ 5, въ 6, въ 9, въ 10, въ 15, въ 18, въ 30, въ 45, въ 90 разъ бо̀льшихъ, чѣмъ первоначально данныя доли, т. е.

$$\frac{270}{360}=\frac{135}{180}=\frac{90}{120}=\frac{54}{72}=\frac{45}{60}=\frac{30}{40}=\frac{27}{36}=\frac{18}{24}=\frac{15}{20}=\frac{9}{12}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Но та же дробь, т. е. $\frac{270}{360}$, не можетъ быть выражена въ доляхъ въ 4 раза болѣе крупныхъ, потому что 4 не есть общій дѣлитель членовъ ея; точно такъ же она не можетъ быть выражена, напр., въ доляхъ, въ 7, въ 8, въ 11, въ 12, въ 13, въ 14, или въ 16 разъ бо̀льшихъ.

То преобразованіе дроби, которое достигается одновременнымъ раздѣленіемъ членовъ ея на одно и то же число, называется *сокращеніемъ* дробей. Такъ, напр., сократить дробь

$$\frac{120}{300}$$

значитъ раздѣлить числителя и знаменателя ея на всѣхъ общихъ имъ дѣлителей. Производится это преобразованіе на письмѣ чаще всего по слѣдующему образцу:

$$\begin{array}{l} 2 \\ 6 \\ 12 \\ \dfrac{120}{300} = \dfrac{2}{5}. \\ 30 \\ 15 \\ 5 \end{array}$$

т. е. сначала дѣлятъ числителя и знаменателя на самаго очевиднаго общаго дѣлителя ихъ (такимъ въ данномъ случаѣ является число 10, дѣленіе на которое сводится къ уничтоженію послѣдняго нуля въ письменномъ обозначеніи числителя и знаменателя); потомъ, полученныя частныя дѣлятся на 2, вновь полученныя на 3 и т. д.; соотвѣтствующія частныя записываются надъ числителемъ и подъ знаменателемъ, слѣдующія частныя — соотвѣтственно надъ и подъ прежними, и т. д.

Дробь, которой члены не имѣютъ общихъ множителей и которая поэтому не можетъ быть сокращена, называется *несократимою*. Таковы, напр., дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{17}{19}$, $\frac{24}{35}$ и т. п.

Для того, чтобы съ достовѣрностью судить о томъ, сократима ли данная дробь или же не сократима (если это не очевидно), полезнѣе всего прибѣгнуть къ отысканію, съ помощью способа Евклида, общаго наибольшаго дѣлителя членовъ ея: если послѣдній равенъ единицѣ, то дробь несократима.

Примѣчаніе. Въ высшей степени важно помнить, что если дана какая-нибудь несократимая дробь, то *не существуетъ другой дроби съ меньшими членами*, которая равнялась бы данной дроби. Такъ, дробь $\frac{24}{35}$ не можетъ быть выражена ни въ тридцать-четвертыхъ, ни въ тридцать-третьихъ, ни въ тридцать-вторыхъ доляхъ единицы и ни въ какихъ иныхъ доляхъ, болѣе крупныхъ, чѣмъ тридцать-пятыя. — Доказательство этого свойства несократимыхъ дробей отнесено въ отдѣлъ «Дополнительныхъ статей», такъ какъ оно предполагаетъ нѣкоторыя познанія по предмету алгебры.

Приведеніе дробей къ одному знаменателю.

§ 98. **На неизмѣняемости величины дроби отъ одновременнаго увеличенія членовъ ея въ одно и то же число разъ основано преобразованіе всѣхъ данныхъ въ извѣстномъ случаѣ дробей въ дроби, выраженныя въ одинаковыхъ доляхъ. Такъ, если, напр., даны дроби**

$$\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4}\ \text{и}\ \tfrac{1}{5},$$

то каждую изъ нихъ можно выразить въ шестидесятыхъ доляхъ, такъ какъ 60 есть число, кратное 3-хъ, 4-хъ и 5-ти, т. е. дѣлящееся на-цѣло и на 3, и на 4, и на 5. Чтобы выразить всѣ эти дроби въ шестидесятыхъ доляхъ, члены первой надо умножить на 20, члены второй — на 15, а члены третьей — на 12. Тогда получимъ:

$$\tfrac{20}{60},\ \tfrac{15}{60}\ \text{и}\ \tfrac{12}{60}.$$

Преобразованіе данныхъ дробей съ разными знаменателями въ дроби съ знаменателями одинаковыми (т. е. въ дроби, выраженныя въ одинаковыхъ доляхъ) называется *приведеніемъ дробей къ одному знаменателю.*

При приведеніи дробей къ одному знаменателю могутъ быть два случая: либо всѣ знаменатели ихъ суть числа взаимно-первыя, либо нѣкоторые изъ знаменателей имѣютъ какихъ либо общихъ множителей. Такъ, въ дробяхъ:

$$\tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{4}{35}\ \text{и}\ \tfrac{7}{11}$$

всѣ знаменатели суть числа взаимно-первыя, а въ дробяхъ:

$$\tfrac{1}{4},\ \tfrac{7}{8},\ \tfrac{3}{70},\ \tfrac{5}{14}\ \text{и}\ \tfrac{9}{20}$$

знаменатели 4, 8 и 20 имѣютъ общаго множителя 4, знаменатели 70 и 14 имѣютъ общаго множителя 14, знаменатели 70 и 20 имѣютъ общаго множителя 10; кромѣ того, очевидно, что всѣ знаменатели имѣютъ общаго множителя 2.

1) Пусть даны дроби, у которыхъ знаменатели суть числа взаимно-первыя, напр.:

$$\tfrac{3}{4},\ \tfrac{2}{33}\ \text{и}\ \tfrac{6}{35};$$

наименьшее кратное знаменателей равно ихъ произведенію, т. е. числу 4 620; это и есть наименьшее изъ всѣхъ чиселъ, дѣлящихся на 4, 33 и 35. Это число можно сдѣлать знаменателемъ дроби, которая равна дроби $\frac{3}{4}$, а также знаменателемъ дроби, которая равна дроби $\frac{2}{33}$, и знаменателемъ дроби, которая равна дроби $\frac{6}{35}$. Для того, чтобы вмѣсто $\frac{3}{4}$ получить дробь, выраженную въ четыре-тысячи-шестьсотъ-двадцатыхъ доляхъ, члены данной дроби надо умножить на частное, происходящее отъ раздѣленія 4 620-ти на 4; это частное равно 1 155 (оно равно 33×35); отъ умноженія членовъ сказанной дроби на 1 155 получится дробь

$$\frac{3465}{4620}.$$

Поступая подобнымъ образомъ съ дробями $\frac{2}{33}$ и $\frac{6}{35}$, мы вмѣсто первой изъ нихъ получимъ дробь

$$\frac{280}{4620},$$

а вмѣсто дроби $\frac{6}{35}$ — дробь

$$\frac{792}{4620},$$

и такимъ образомъ данныя дроби, т. е. $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{33}$ и $\frac{6}{35}$, будутъ замѣнены соотвѣтственно равными имъ дробями:

$$\frac{3495}{4620}, \frac{280}{4620} \text{ и } \frac{792}{4620},$$

выраженными уже въ одинаковыхъ доляхъ. Такимъ образомъ мы привели данныя намъ дроби къ одному знаменателю.

2) Пусть даны дроби, которыхъ знаменатели имѣютъ общихъ множителей, напр.:

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{3}{70} \text{ и } \frac{5}{14}.$$

Наименьшее изъ чиселъ, дѣлящихся безъ остатка на 4, 8, 70 и 14, есть наименьшее кратное этихъ чиселъ; найдя его по извѣстнымъ правиламъ (§ 79), узнаемъ, что оно равно 280; за знаменателя каждой изъ данныхъ дробей, значитъ, можетъ быть принято это число; съ этою цѣлью члены первой изъ нихъ должны быть помножены на 70, члены второй — на 35, члены четвертой — на 4, наконецъ, члены пятой — на 20. Такимъ образомъ мы замѣнимъ данныя дроби

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{3}{70} \text{ и } \frac{5}{14}$$

соотвѣтственно равными имъ дробями:

$$\frac{70}{280}, \frac{245}{280}, \frac{12}{280} \text{ и } \frac{100}{280}.$$

При этомъ вычисленія могутъ быть располагаемы слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l}
5)\ \ 70 \quad 35 \quad 4 \quad 20 \\
1)\ \ \frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{3}{70}, \frac{5}{14}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|rl}
2) & 4 = 2 \times 2 & 4) & 280 : \ \ 4 = 70 \\
 & 8 = 2 \times 2 \times 2 & & 280 : \ \ 8 = 35 \\
 & 70 = 2 \times 5 \times 7 & & 280 : 70 = \ \ 4 \\
 & 14 = 2 \times 7 & & 280 : 14 = 20.
\end{array}$$

3) Наименьшее кратное зн-лей $= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 280$.

При этомъ нумера 1), 2), 3), 4) и 5) обозначаютъ порядокъ производства вычисленій. Каждое изъ полученныхъ частныхъ: 70, 35, 4 и 20 надписываютъ надъ соотвѣтствующею изъ данныхъ дробей, отдѣливъ эту запись отъ записи дроби знакомъ $\smile$. Такимъ образомъ, въ результатѣ получается запись:

$$\overset{\underset{\smile}{70}}{\frac{1}{4}},\ \overset{\underset{\smile}{35}}{\frac{7}{8}},\ \overset{\underset{\smile}{4}}{\frac{3}{70}},\ \overset{\underset{\smile}{20}}{\frac{5}{14}},$$

съ помощью которой, путемъ умноженія членовъ каждой изъ данныхъ на записанное надъ ея обозначеніемъ число, получаютъ:

$$6)\ \frac{70}{280},\ \frac{245}{280},\ \frac{12}{280},\ \frac{100}{280}.$$

Если почему либо разложеніе знаменателей на первоначальныхъ множителей не можетъ быть сдѣлано въ умѣ, то къ этимъ вычисленіямъ присоединяется еще разложеніе знаменателей на множителей, которому должно быть отведено отдѣльное мѣсто.

Сложеніе и вычитаніе дробныхъ чиселъ.

§ 99. Надъ дробями могутъ быть производимы тѣ же дѣйствія, что и надъ цѣлыми числами: дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія. При дѣйствіяхъ сложенія и вычитанія надо различать два случая: 1) когда даны дроби съ одинаковыми знаменателями, и 2) когда знаменатели у данныхъ дробей разные.

Суммою двухъ или болѣе дробей съ одинаковыми знаменателями является дробь, которой числитель равенъ суммѣ числителей данныхъ дробей, а знаменатель — ихъ знаменателю. Такъ,

$$\frac{17}{17} \text{ равна суммѣ } \frac{2}{17}+\frac{6}{17}+\frac{5}{17}+\frac{4}{17};$$

числитель этой дроби равенъ суммѣ $2+6+5+4$, а знаменатель—знаменателю данныхъ дробей. Это очевидно.

Суммою **двухъ или нѣсколькихъ дробей съ *различными* знаменателями называется дробь, которую можно получить по сложеніи тѣхъ дробей съ одинаковыми знаменателями, изъ которыхъ первая равна одной изъ данныхъ дробей, другая—другой и т. д. до послѣдней включительно.** Такъ, напр., дробь

$\frac{113}{60}$ равна суммѣ дробей: $\frac{20}{60}+\frac{45}{60}+\frac{48}{60}$, т. е. суммѣ $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$, такъ какъ $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$, $\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$ и $\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$.

Дѣйствіе, цѣль котораго состоитъ въ отысканіи суммы данныхъ дробей, называется *сложеніемъ* этихъ дробей.

Отсюда же вытекаетъ и правило производства сложенія дробей:

1) Если въ данныхъ слагаемыхъ дробяхъ знаменатели одинаковы, то для сложенія дробей складываютъ ихъ числителей, эту сумму дѣлаютъ числителемъ нѣкоторой дроби, а ихъ знаменателя— знаменателемъ; полученная такимъ образомъ дробь есть искомая сумма данныхъ дробей; 2) если же въ слагаемыхъ знаменатели различны, то надо прежде всего привести данныя дроби къ одному

(лучше всего — къ общему наименьшему) знаменателю, съ тою цѣлію, чтобы затѣмъ поступить при отысканіи ихъ суммы по правилу сложенія дробей съ одинаковыми знаменателями.

Вычитаніемъ во всякомъ случаѣ называется дѣйствіе, цѣль котораго есть отысканіе неизвѣстнаго слагаемаго по данной суммѣ его съ другимъ, извѣстнымъ, слагаемымъ. Данная сумма, будетъ ли она числомъ цѣлымъ, дробнымъ или смѣшаннымъ, во всякомъ случаѣ называется *уменьшаемымъ*, данное слагаемое — *вычитаемымъ*, а искомое — *разностью* или *остаткомъ*. Если уменьшаемое и вычитаемое суть дроби, то слѣдуетъ различать два случая: когда уменьшаемое и вычитаемое суть дроби съ одинаковыми знаменателями, и когда уменьшаемое и вычитаемое суть дроби съ знаменателями разными.

1) Пусть требуется сдѣлать вычитаніе:

$$\frac{15}{19} - \frac{8}{19}.$$

При этомъ $\frac{15}{19}$ есть сумма двухъ дробей, изъ которыхъ одна ($\frac{8}{19}$) дана, а другая подлежитъ отысканію. Но при сложеніи дробей съ одинаковыми знаменателями получается дробь, которой числитель равенъ суммѣ числителей, а знаменатель равенъ знаменателю слагаемыхъ дробей; стало-быть, числитель 15 есть сумма двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно подлежитъ отысканію, а другое равно 8-ми. А потому числитель искомой разности равенъ $15 - 8$, т. е. 7-ми, знаменатель же равенъ знаменателю данныхъ дробей, т. е.

$$\frac{15}{19} - \frac{8}{19} = \frac{7}{19}.$$

2) Пусть требуется сдѣлать вычитаніе:

$$\frac{44}{15} - \frac{17}{60}.$$

Приведя дроби къ одному знаменателю, получимъ

$$\frac{44}{60} - \frac{17}{60},$$

т. е. получимъ случай, подобный предыдущему.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило производства вычитанія дробей: 1) Если въ данныхъ двухъ дробяхъ знаменатели одинаковы, то, для вычитанія меньшей изъ нихъ изъ большей, вычитаютъ числителя первой изъ числителя второй, эту разность дѣлаютъ числителемъ нѣкоторой дроби, а ихъ знаменателя — знаменателемъ ея; полученная такимъ образомъ дробь есть искомая разность данныхъ дробей; 2) если же въ данныхъ дробяхъ знаменатели различны, то надо прежде всего привести ихъ къ одному знаменателю, съ тою цѣлію, чтобы затѣмъ съ полученными дробями поступить согласно правилу вычитанія въ томъ случаѣ, когда въ уменьшаемомъ и вычитаемомъ одинаковые знаменатели.

Законы дѣйствій сложенія и вычитанія.

Замѣчаніе 1-е. Само собою разумѣется, что и при сложеніи дробей, имѣютъ мѣсто слѣдующія свойства суммы и разности:

1) Величина суммы не зависитъ ни отъ порядка слагаемыхъ, ни отъ ихъ группировки. Такъ:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}+\frac{2}{3} \text{ и } \frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{7}\right)=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{7}\right)+\frac{4}{5}, \text{ и т. д.}$$

2) Результатъ сложенія дроби съ разностью двухъ дробей равенъ суммѣ перваго слагаемаго съ уменьшаемымъ, уменьшенной на дробь вычитаемую. Такъ,

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{7}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{7}.$$

3) Результатъ вычитанія изъ данной дроби разности двухъ другихъ дробей равенъ суммѣ первой дроби съ третьею, минусъ вторая. Такъ, напр.,

$$\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}.$$

И т. д.

Столь же справедливы тѣ измѣненія суммы и разности, о которыхъ идетъ рѣчь въ §§ 51—53 относительно цѣлыхъ чиселъ.

Сложеніе смѣшанныхъ чиселъ.

Замѣчаніе 2-е. При сложеніи цѣлаго числа съ правильною дробью получается число смѣшанное, котораго цѣлая часть равна данному цѣлому числу, а дробная—данному дробному. Такъ,

$$2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4},\quad 7+\frac{5}{8}=7\frac{5}{8}, \text{ и т. п.}$$

При сложеніи цѣлаго числа со смѣшаннымъ получается смѣшанное число, котораго цѣлая часть равна суммѣ даннаго цѣлаго числа съ цѣлою же частью числа смѣшаннаго, а дробная — его дробной части. Такъ,

$$7+2\frac{1}{3}=7+2+\frac{1}{3}=9+\frac{1}{3}=9\frac{1}{3}, \text{ и т. п.}$$

При сложеніи же смѣшанныхъ чиселъ прежде всего складываются дробныя части ихъ; при этомъ могутъ быть два случая: 1) сумма этихъ дробей есть дробь правильная; и 2) сумма ихъ есть дробь неправильная. Въ первомъ случаѣ сумма данныхъ смѣшанныхъ чиселъ равна смѣшанному числу, цѣлая часть котораго равна суммѣ цѣлыхъ частей, а дробная — суммѣ дробныхъ; во второмъ случаѣ (т. е. если сумма дробныхъ частей есть дробь неправильная), изъ этой суммы предварительно исключаютъ цѣлое число; потомъ складываютъ всѣ полученныя цѣлыя части съ полученною дробною частью суммы дробныхъ частей. Такъ,

$$7\frac{1}{3}+5\frac{2}{5}=7+5+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)=7+5+\left(\frac{5}{15}+\frac{6}{15}\right)=7+5+\frac{11}{15}=12\frac{11}{15},$$

$$8\frac{5}{6}+4\frac{3}{7}=8+4+\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{7}\right)=12+\left(\frac{35}{42}+\frac{18}{42}\right)=12+\frac{53}{42}=12+1\frac{11}{42}=13\frac{11}{42}.$$

Вычитаніе въ случаѣ смѣшанныхъ чиселъ.

Замѣчаніе 3-е. При вычитаніи цѣлаго числа изъ смѣшаннаго, первое вычитаютъ изъ цѣлой части второго, къ разности прибавляютъ дробную его часть, и полученная такимъ образомъ сумма, очевидно, есть искомая разность. Такъ,

$$17\tfrac{3}{4} - 8 = (17 + \tfrac{3}{4}) - 8 = (17 - 8) + \tfrac{3}{4} = 9 + \tfrac{3}{4} = 9\tfrac{3}{4}.$$

При вычитаніи смѣшаннаго числа изъ цѣлаго, изъ единицы уменьшаемаго вычитаютъ дробную часть вычитаемаго; потомъ, вычтя цѣлую часть вычитаемаго изъ уменьшенной на единицу цѣлой части уменьшаемаго, складываютъ полученныя разности. Такъ,

$$17 - 8\tfrac{4}{9} = (16 - 8) + (1 - \tfrac{4}{9}) = 8\tfrac{5}{9},$$

потому что

$$17 - 8\tfrac{4}{9} = (16 + 1) - (8 + \tfrac{4}{9}) = (16 - 8) + (1 - \tfrac{4}{9}) = 8 + \tfrac{5}{9} = 8\tfrac{5}{9}.$$

При вычитаніи смѣшаннаго числа изъ смѣшаннаго же могутъ быть два случая: 1) дробная часть уменьшаемаго больше дробной части вычитаемаго, и 2) дробная часть уменьшаемаго меньше дробной части вычитаемаго. Въ первомъ случаѣ изъ цѣлой части уменьшаемаго вычитается цѣлая часть вычитаемаго, а изъ дробной дробная; во второмъ же къ дробной части уменьшаемаго прибавляется единица этого послѣдняго, изъ уменьшенной на одну единицу цѣлой части уменьшаемаго вычитаютъ цѣлую часть вычитаемаго; дробную же его часть вычитаютъ изъ неправильной дроби, полученной по обращеніи въ таковую суммы одной единицы уменьшаемаго съ дробною частью его. Для того чтобы знать — съ какимъ изъ случаевъ мы имѣемъ дѣло (если это не очевидно) полезно прежде всего привести дробныя части данныхъ смѣшанныхъ чиселъ къ одному знаменателю *).

Такъ,

$$7\tfrac{3}{4} - 2\tfrac{2}{5} = 7\tfrac{15}{20} - 2\tfrac{8}{20} = (7 - 2) + (\tfrac{15}{20} - \tfrac{8}{20}) = 5 + \tfrac{7}{20} = 5\tfrac{7}{20};$$

$$\begin{aligned} 8\tfrac{12}{17} - 3\tfrac{18}{23} &= 8\tfrac{276}{391} - 3\tfrac{306}{391} \\ &= 7 + 1\tfrac{276}{391} - (3 + \tfrac{306}{391}) \\ &= (7 - 3) + (1 + \tfrac{276}{391} - \tfrac{306}{391}) \\ &= 4 + (\tfrac{667}{391} - \tfrac{306}{391}) \\ &= 4 + \tfrac{361}{391} = 4\tfrac{361}{391}. \end{aligned}$$

§ 100. *Умножить* какое нибудь число (дробное или смѣшанное) *на цѣлое число* значитъ найти сумму, которую можно получить послѣ сложенія столькихъ множимыхъ, сколько единицъ въ множителѣ. Такъ, напр., Умноженіе на цѣлое число.

$$\tfrac{3}{4} \times 5 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{15}{4} = 3\tfrac{3}{4},$$

$$\tfrac{8}{11} \times 3 = \tfrac{8}{11} + \tfrac{8}{11} + \tfrac{8}{11} = \tfrac{24}{11} = 2\tfrac{2}{11}, \text{ и т. п.}$$

Такимъ образомъ, если множитель есть цѣлое число, то умно-

*) Нѣкоторые при производствѣ дѣйствій сложенія и вычитанія надъ смѣшанными числами предварительно обращаютъ ихъ въ неправильныя дроби; но такое производство этихъ дѣйствій не всегда можетъ считаться цѣлесообразнымъ.

женіе дроби на этого множителя имѣетъ тотъ же смыслъ, что и умноженіе цѣлаго числа на цѣлое же; т. е., произведеніемъ дроби на цѣлое число называется сумма, которую можно получить, взявъ множимое столько разъ слагаемымъ, сколько единицъ въ множителѣ, а умноженіемъ называется дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе произведенія данной дроби на данное цѣлое число. Такъ, напр.,

$$\tfrac{2}{3} \times 4 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{3},$$
$$\tfrac{3}{7} \times 5 = \tfrac{3}{7} + \tfrac{3}{7} + \tfrac{3}{7} + \tfrac{3}{7} + \tfrac{3}{7} = \tfrac{15}{7},$$

и т. п. Отсюда вытекаетъ правило: для умноженія дроби на цѣлое число умножаютъ числителя ея на это цѣлое число, это произведеніе принимаютъ за числителя, а знаменателя даннаго множимаго за знаменателя дроби, которая и есть искомое произведеніе. Такъ, напр.,

$$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{2 \times 4}{3}, \quad \frac{3}{7} \times 7 = \frac{3 \times 7}{7}, \text{ и т. п.}$$

Умноженіе смѣшаннаго числа на цѣлое имѣетъ тотъ же смыслъ, что умноженіе цѣлаго или дробнаго числа на цѣлое, т. е. имѣетъ цѣлью нахожденіе суммы равныхъ между собою слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно множимому и число которыхъ равно множителю. Такъ,

$$7\tfrac{3}{4} \times 5 = 7\tfrac{3}{4} + 7\tfrac{3}{4} + 7\tfrac{3}{4} + 7\tfrac{3}{4} + 7\tfrac{3}{4}.$$

Правило умноженія смѣшаннаго числа на цѣлое вытекаетъ отсюда слѣдующее: для умноженія смѣшаннаго числа на цѣлое, надо дробную часть помножить на множителя, исключить цѣлое число изъ результата, если въ результатѣ получилась дробь неправильная, потомъ къ произведенію цѣлой части множимаго на множителя прибавить полученное ранѣе.

Далеко не столь же простъ и очевиденъ смыслъ умноженія, когда множитель есть число *дробное*.

Нахожденіе части цѣлаго или дроби.

§ 101. Прежде чѣмъ перейти къ умноженію какихъ угодно чиселъ на дробь, займемся рѣшеніемъ слѣдующихъ задачъ:

1) *Требуется найти $\tfrac{1}{5}$-тую долю 17-ти.* — Это — то же, что найти частное 17 : 5, но какъ это частное можетъ быть изображено (§ 94) въ видѣ дроби, то

$$17 : 5 = \tfrac{17}{5}.$$

Итакъ,

$$\tfrac{1}{5} \text{ доля 17-ти равна } \tfrac{17}{5} \text{ единицы, или } 3\tfrac{2}{5}.$$

Помощью такихъ же разсужденій можно найти любую долю любого цѣлаго числа.

2) *Требуется найти $\tfrac{1}{5}$-тую дроби $\tfrac{3}{4}$.* — Это значитъ, что надо

найти дробь, которая была бы меньше, чѣмъ $\frac{3}{4}$, въ 5 разъ; но для того, чтобы уменьшить $\frac{3}{4}$ въ 5 разъ, должно взять дробь съ знаменателемъ въ 5 разъ бо̀льшимъ. Стало-быть,

$\frac{1}{5}$ дроби $\frac{3}{4}$ равна $\frac{3}{20}$.

Помощью такихъ же разсужденій можно найти любую долю любой данной дроби.

3) *Требуется найти $\frac{3}{4}$ числа 15.*—Разсуждаемъ при этомъ такъ: $\frac{1}{4}$ пятнадцати единицъ получится по раздѣленіи 15-ти на 4 равныя между собою части; но частное отъ этого раздѣленія можетъ быть выражено въ видѣ дроби $\frac{15}{4}$, потому что $15 : 4 = \frac{15}{4}$; стало-быть, $\frac{1}{4}$ пятнадцати единицъ равна $\frac{15}{4}$.

Но намъ должно найти $\frac{3}{4}$ (а не одну четверть) пятнадцати единицъ; стало-быть, получимъ

$$\text{не } \frac{15}{4}, \text{ а } \frac{15 \times 3}{4} \text{ или } \frac{45}{4}.$$

Это значитъ, что $\frac{3}{4}$ пятнадцати единицъ равны $\frac{45}{4}$ одной единицы или $11\frac{1}{4}$. — Помощью точно такихъ же разсужденій можно найти любую часть любого цѣлаго любого числа.

4) *Требуется найти $\frac{3}{4}$ дроби $\frac{8}{9}$.*— Разсуждаемъ при этомъ такъ: $\frac{1}{4}$ дроби $\frac{8}{9}$ въ четыре раза меньше этой послѣдней дроби, т. е. равна $\frac{8}{9 \times 4}$. Но намъ должно найти не одну, а три четверти этой дроби. Стало-быть, мы должны получить втрое больше, чѣмъ сколько получили, т. е. должны получить не

$$\frac{8}{9 \times 4}, \text{ а } \frac{8 \times 3}{9 \times 4} \text{ или } \frac{2}{3}.$$

Очевидно, что съ помощью такихъ же точно разсужденій можно найти любую часть любой дроби.

Примѣчаніе 1-ое. Если требуется найти какую-либо часть смѣшаннаго числа, то обыкновенно это послѣднее обращаютъ въ неправильную дробь, ибо въ противномъ случаѣ пришлось бы вычислить отдѣльно часть цѣлаго, потомъ часть дроби съ тѣмъ, чтобы полученные результаты сложить для полученія искомаго, — что̀ иногда можетъ потребовать значительно больше вычисленій.

Примѣчаніе 2-ое. При нахожденіи части какого угодно числа, выражаемой данною дробью, можно на самомъ дѣлѣ сначала *вычислить* одну долю даннаго числа, а затѣмъ требуемое число долей его; но удобнѣе сначала только *обозначить* дѣйствія, какъ это сдѣлано выше, а потомъ уже ихъ выполнить, послѣ сокращенія.

§ 102. Практическіе вопросы и задачи, при разрѣшеніи которыхъ требуется найти часть числа, совершенно подобны вопросамъ, при разрѣшеніи которыхъ, если даны числа цѣлыя, прибѣгаютъ къ умно- Нахожденіе части числа и умноженіе.

женію. Такъ, напр., вопросъ: «что стоятъ $\frac{5}{8}$ аршина сукна, если аршинъ его стоитъ 6 рублей», совершенно подобенъ вопросу: «что стоятъ 2, 3, 4, 5 и т. д. аршинъ сукна, если аршинъ его стоитъ 6 р.»—Послѣдній же вопросъ разрѣшается помощью умноженія.

Практическіе вопросы и задачи, при разрѣшеніи которыхъ требуется найти извѣстную часть какой-нибудь дроби, тоже подобны вопросамъ, при разрѣшеніи которыхъ, если даны числа цѣлыя, прибѣгаютъ къ умноженію. Такъ, напр., вопросъ: «что стоятъ $\frac{5}{8}$ аршина ситцу, если аршинъ его стоитъ $\frac{4}{25}$ рубля?» совершенно подобенъ вопросу о стоимости извѣстнаго цѣлаго числа аршинъ какой угодно матеріи, если аршинъ ея стоитъ любое данное количество рублей.

Когда требуется найти часть какого нибудь числа, выраженную дробью, то вмѣсто того чтобы сказать, что требуется найти эту часть даннаго числа, часто говорятъ, что данное число надо *помножить на дробное число*, выражающее эту часть. Такъ, когда надо найти $\frac{3}{4}$ числа 10, то часто, вмѣсто этого, говорятъ: надо 10 *помножить* на $\frac{3}{4}$; когда надо найти $\frac{5}{7}$ дробнаго числа $\frac{15}{17}$, то говорятъ: надо $\frac{15}{17}$ помножить на $\frac{5}{7}$. И т. д. Но находить часть какого угодно числа мы умѣемъ (§ 101); поэтому мы должны умѣть также производить умноженіе на дробь: произведеніемъ цѣлаго числа на дробь при этомъ называется та дробь, которой числитель есть произведеніе множимаго на числителя множителя, а знаменатель равенъ знаменателю даннаго множителя; умноженіемъ же цѣлаго числа на дробь называется дѣйствіе, цѣль котораго—отысканіе произведенія даннаго цѣлаго числа на данную дробь. Такъ, напр., умножить 3 на $\frac{2}{5}$ значитъ найти дробь $\frac{6}{5}$, которой числитель равенъ произведенію 3-хъ на 2, а знаменатель равенъ знаменателю множителя. Произведеніемъ же дроби на дробь называется дробное число, котораго числитель равенъ произведенію числителей множимаго и множителя, а знаменатель—произведенію ихъ знаменателей, умноженіемъ же дроби на дробь называется дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе ихъ произведенія. Такъ, напр., умножить $\frac{5}{7}$ на $\frac{3}{8}$ значитъ найти дробь $\frac{15}{56}$, въ которой числитель равенъ произведенію числителей, а знаменатель—произведенію знаменателей данныхъ дробей. Поэтому:

$$\frac{2}{3}\times\frac{7}{9}=\frac{2\times7}{3\times9}=\frac{14}{27},\ \text{а}\ \frac{5}{6}\times\frac{7}{8}=\frac{5\times7}{6\times8}=\frac{35}{48},\ \text{и т. п.}$$

Правило умноженія гласитъ такъ: 1) если множитель есть число цѣлое, то для умноженія надо множимое увеличить во столько разъ, сколько единицъ въ множителѣ, и полученный результатъ будетъ искомымъ произведеніемъ; 2) если же множитель есть число дробное, то множимое надо помножить на числителя множителя, а полученное уменьшить во столько разъ, сколько единицъ въ знаменателѣ множителя.—При этомъ однако же остается не вполнѣ понятною причина, *почему* нахожденіе части числа называется умноженіемъ; это выяснено въ § 104.

§ 103. Всѣ случаи умноженія чиселъ, въ установленномъ выше смыслѣ этого слова, могутъ быть подведены подъ общее правило, если условиться цѣлое число принимать за дробь, которой числитель равенъ этому цѣлому числу, а знаменатель равенъ единицѣ. Это правило гласитъ такъ: *для умноженія одного числа на другое надо произведеніе числителей данныхъ чиселъ сдѣлать числителемъ, а произведеніе знаменателей—знаменателемъ дроби, которая и будетъ произведеніемъ данныхъ двухъ чиселъ.* Такъ, мы, пользуясь этимъ правиломъ, получимъ, что Общее правило умноженія.

$$8\times4=\tfrac{8}{1}\times\tfrac{4}{1}=\tfrac{32}{1}=32,\ \tfrac{3}{7}\times5=\tfrac{3}{7}\times\tfrac{5}{1}=\tfrac{15}{7},\ 6\times\tfrac{4}{5}=\tfrac{6}{1}\times\tfrac{4}{5}=\tfrac{24}{5},\ \tfrac{5}{7}\times\tfrac{4}{11}=\tfrac{20}{77}.$$

Что касается наименованія произведенія, то оно одинаково съ наименованіемъ множимаго. Множитель же во всякомъ случаѣ долженъ быть непремѣнно числомъ отвлеченнымъ, такъ какъ умноженіе на именованнаго множителя не имѣетъ смысла.

Замѣчаніе 1-е. Если въ числѣ сомножителей есть числа смѣшанныя, то, ранѣе производства умноженія, ихъ обыкновенно обращаютъ въ неправильныя дроби, такъ что Случай смѣшанн. множимаго или множителя.

$$17\tfrac{3}{4}\times\tfrac{5}{7}=\tfrac{71}{4}\times\tfrac{5}{7}=\tfrac{355}{28}=12\tfrac{19}{28},\ \text{а}\ 3\tfrac{2}{5}\times2\tfrac{3}{4}=\tfrac{17}{5}\times\tfrac{11}{4}=\tfrac{187}{20}.$$

Замѣчаніе 2-е. Прежде производства умноженія числителей и знаменателей полезно эти дѣйствія сначала только обозначить съ тѣмъ, чтобы потомъ (если это возможно) произвести сокращеніе на общихъ дѣлителей, которые могутъ оказаться въ числителѣ и знаменателѣ искомаго произведенія. Такъ, при умноженіи Способъ письменнаго производства умноженія дробей.

$$\tfrac{20}{21}\times\tfrac{35}{64}$$

не слѣдуетъ на самомъ дѣлѣ умножить 20 на 35 и 21 на 64, а гораздо удобнѣе только обозначить эти дѣйствія слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{20}{21}\times\frac{35}{64}=\frac{20\times35}{21\times64},$$

съ тѣмъ, чтобы потомъ произвести сокращеніе 20-ти и 64-хъ на 4, а 35-ти и 21-го на 7; вычисленіе при этомъ располагается такъ:

$$\frac{20}{21}\times\frac{35}{64}=\frac{\overset{5}{20}\times\overset{5}{35}}{\underset{3}{21}\times\underset{16}{64}}=\frac{25}{48}.$$

Точно такъ же, найдемъ, что

$$\frac{15}{58}\times\frac{16}{25}\times\frac{29}{36}=\frac{\overset{\overset{1}{3}}{15}\times\overset{\overset{2}{8}}{16}\times\overset{1}{29}}{\underset{\underset{1}{29}}{58}\times\underset{5}{25}\times\underset{\underset{3}{9}}{36}}=\frac{2}{15}.$$

Умноженіе и законы его.

§ 104. Всякое цѣлое число можно считать дробью, которой числитель равенъ тому же цѣлому числу, а знаменатель — единицѣ. Тогда и у цѣлаго числа есть числитель и знаменатель. Такъ,

$$1=\tfrac{1}{1},\ 2=\tfrac{2}{1},\ 3=\tfrac{3}{1},\ 4=\tfrac{4}{1},\ 5=\tfrac{5}{1}\ \text{и т. д.}$$

Читать подобныя дроби можно такъ: одна первая, двѣ первыхъ, три первыхъ, четыре первыхъ, и т. д. Мы видѣли, что:

Если даны два числа и если образовано третье, котораго числитель равенъ произведенію числителя перваго числа на числителя второго, а знаменатель — произведенію знаменателя перваго на знаменателя второго, то говорятъ, что третье число равно произведенію данныхъ двухъ чиселъ, а совокупность дѣйствій, цѣль которыхъ состоитъ въ отысканіи этого произведенія, называютъ умноженіемъ перваго числа на второе. Такъ, напр., если даны

	числа $\frac{2}{1}$ и $\frac{5}{7}$	и найдено число	$\frac{2\times5}{1\times7}$,	т. е. $\frac{10}{7}$,
или	» $\frac{5}{8}$ и $\frac{11}{1}$	» » »	$\frac{5\times11}{8\times1}$,	т. е. $\frac{55}{8}$,
или	» $\frac{7}{11}$ и $\frac{9}{13}$	» » »	$\frac{7\times9}{8\times13}$,	т. е. $\frac{63}{143}$,

то говорятъ, что число 2 помножено на $\frac{5}{7}$, число $\frac{5}{8}$ помножено на 11, а $\frac{7}{11}$ на $\frac{9}{13}$, и что числа $\frac{10}{7}$, $\frac{55}{8}$ и $\frac{65}{143}$ представляютъ собою: первое — произведеніе $2\times\frac{5}{7}$, второе — произведеніе $\frac{5}{8}\times11$ и третье — произведеніе $\frac{7}{11}\times\frac{9}{13}$. Это не противорѣчитъ ни тому, что, напр.,

$$5\times8=40,\ \text{потому что}\ \tfrac{5}{1}\times\tfrac{8}{1}\ \text{тоже равно}\ 40,$$

ни тому, что, напр.,

$$\tfrac{3}{4}\times5=\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4},\ \text{потому что}\ \tfrac{3}{4}\times\tfrac{5}{1}\ \text{тоже равно}\ \tfrac{15}{4},$$

ни тому, наконецъ, что, напр.,

$$8\times1=8,\ \text{ибо и}\ \tfrac{8}{1}\times\tfrac{1}{1}=8.$$

Кромѣ того, при этомъ взглядѣ на умноженіе какихъ угодно чиселъ (дробныхъ и цѣлыхъ) величина произведенія двухъ чиселъ не зависитъ отъ порядка сомножителей, потому что, напр.,

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times5}{4\times7},\ \text{а}\ \frac{5}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{5\times3}{7\times4};\ \text{но}\ \frac{3\times5}{4\times7}=\frac{5\times3}{7\times4},$$

стало-быть, и

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}.$$

Далѣе: величина произведенія трехъ сомножителей не зависитъ отъ группировки ихъ; такъ, напр.,

$$\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\right)\times\frac{9}{11}=\frac{3\times5}{4\times7}\times\frac{9}{11}=\frac{3\times5\times9}{4\times7\times11},$$

$$\text{а}\ \ \frac{3}{4}\times\left(\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{5\times9}{7\times11}=\frac{3\times(5\times9)}{4\times(7\times11)}=\frac{3\times5\times9}{4\times7\times11},$$

стало-быть:
$$\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\right)\times\frac{9}{11}=\frac{3}{4}\times\left(\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\right).$$

Наконецъ, и то свойство произведенія суммы двухъ чиселъ на третье, по которому эта сумма равна суммѣ произведенія перваго на третье и произведенія второго на третье, остается справедливымъ. Такъ, напр.,

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{7}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{41}{28}\times\frac{2}{3}=\frac{82}{84}=\frac{41}{42},$$

$$\text{а}\ \ \left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{12}+\frac{10}{21}=\frac{1}{2}+\frac{10}{21}=\frac{41}{42};$$

стало-быть:
$$\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{7}\right)\times\frac{2}{3}=\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}\right).$$

Такимъ образомъ ни одно изъ основныхъ свойствъ произведенія двухъ и болѣе цѣлыхъ чиселъ не теряетъ своего значенія при выше данномъ опредѣленіи умноженія.

Опредѣленія умноженія.

§ 105. Для бо́льшей *общности* умноженіе опредѣляютъ такъ: *умножить одно число на другое значитъ составить изъ перваго числа третье такъ, какъ изъ единицы составлено второе число.* Тогда для того, напр., чтобы найти произведенія: 17×11 и $\frac{8}{7}\times11$, надо каждое изъ множимыхъ взять *слагаемымъ* 11 разъ, потому что множитель (11) равенъ одиннадцати слагаемымъ, изъ которыхъ каждое равно единицѣ; въ результатѣ получатся числа: 187 и $\frac{88}{7}$; для того, чтобы найти произведеніе $5\times\frac{3}{4}$, надо найти $\frac{3}{4}$ числа 5, потому что множитель равенъ тремъ четвертямъ единицы; въ результатѣ получится $\frac{15}{4}$; наконецъ, для того, чтобы найти произведеніе $\frac{5}{6}\times\frac{7}{11}$, надо найти $\frac{7}{11}$ числа $\frac{5}{6}$, потому что множитель равенъ семи одиннадцатымъ единицы; въ результатѣ получится $\frac{35}{66}$. Только въ случаяхъ, когда множитель равенъ единицѣ или нулю (въ особенности въ послѣднемъ случаѣ), это опредѣленіе не ясно въ своихъ примѣненіяхъ.

Проще однако же пользоваться отдѣльнымъ опредѣленіемъ умноженія на дробь: *умножить какое-нибудь число на какую либо долю единицы значитъ найти такую же долю множимаго, а умножить на нѣсколько долей единицы значитъ найти столько же долей множимаго.* — Отсюда же вытекаетъ извѣстное правило (§ 103) для умноженія двухъ чиселъ: *считая цѣлое число за дробь, которой числитель равенъ этому цѣлому числу, а знаменатель — единицѣ, можно для перемноженія двухъ какихъ угодно чиселъ произведеніе* *числителей принять за числителя, а произведеніе знаменателей — за знаменателя третьяго числа, которое въ этомъ случаѣ и представляетъ собою искомое произведеніе.*

Теорія умноженія. § 106*. Умноженіе одного числа на другое допускаетъ, какъ мы видѣли, возможность слѣдующихъ трехъ случаевъ: 1) и множимое, и множитель — числа цѣлыя, и тогда произведеніе ихъ есть та сумма, которую можно получить, взявъ множимое слагаемымъ столько разъ, сколько въ множителѣ единицъ; этотъ случай разсмотрѣнъ въ §§ 23—40; 2) множимое — число дробное или смѣшанное, а множитель — цѣлое; въ этомъ случаѣ произведеніе также равно суммѣ, которую можно получить, взявъ множимое слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ множителѣ; наконецъ, 3) множимое — число цѣлое, дробное или смѣшанное, множитель же — число дробное или смѣшанное, и тогда произведеніе не можетъ быть разсматриваемо, какъ сумма равныхъ между собою слагаемыхъ, число которыхъ равно множителю; ибо дробнаго и смѣшаннаго числа слагаемыхъ себѣ представить невозможно. — Съ такими случаями, когда умноженіе не представляетъ собою замѣны сложенія, мы уже встрѣчались: это — случаи, когда множитель равенъ 1-цѣ или нулю; сложеніе въ этихъ двухъ случаяхъ невозможно, ибо сложить одно слагаемое или нуль слагаемыхъ невозможно. Въ этихъ случаяхъ мы, однако же, находимъ произведеніе изъ цѣлаго числа на нуль или на единицу, благодаря тому, что считаемъ справедливыми равенства: $18 \times 1 = 1 \times 18$ и $18 \times 0 = 0 \times 18$, основываясь, конечно, на томъ, что отъ перемѣны порядка сомножителей не измѣняется величина произведенія. Но должно замѣтить, что это свойство произведенія двухъ сомножителей выведено и доказано лишь для тѣхъ случаевъ, когда и множимое, и множитель не равны ни нулю, ни единицѣ. Мы же *допустили*, т. е. приняли безъ доказательства, что оно справедливо также и для сомножителей, изъ которыхъ одинъ равенъ нулю или единицѣ, и доказательства это предположеніе не допускаетъ, хотя мы и увѣрены въ его справедливости. Это затрудненіе однако же возможно устранить слѣдующимъ образомъ:

На основаніи §§ 70—72 мы можемъ опредѣлить умноженіе такъ: *дѣйствіе, которое подчиняется законамъ перестановительному, сочетательному и распредѣлительному, называется умноженіемъ.* Стало-быть, $18 \times 1 = 1 \times 18$, а $18 \times 0 = 0 \times 18$. Далѣе:

Принявъ цѣлое число за дробь, которой числитель равенъ этому цѣлому числу, а знаменатель равенъ единицѣ, т. е. принявъ, что $1 = \frac{1}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$, $4 = \frac{4}{1}$, $5 = \frac{5}{1}$ и т. д., мы можемъ тогда *доказать*, что *нахожденіе одной доли какого нибудь числа или суммы нѣсколькихъ слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно нѣкоторой опредѣленной долѣ даннаго числа (цѣлаго, дробнаго или смѣшаннаго), есть умноженіе этого послѣдняго числа на дробь, которой числитель равенъ числу слагаемыхъ, а знаменатель — знаменателю этой доли*; т. е. тогда можемъ *доказать*, что найти

одну пятую числа 700 все равно, что 700 помножить на $\frac{1}{5}$,
пять седьмыхъ » 1428 » » » 1428 » на $\frac{5}{7}$,
три четверти » $\frac{16}{9}$ » » » $\frac{16}{9}$ » на $\frac{3}{4}$,

Дѣйствительно:

$$\frac{1}{5} \text{ числа } 700 \text{ равняется } \frac{700}{5}, \text{ т. е. } 140,$$

$$\text{а } \frac{700}{1} \text{ числа } \frac{1}{5} \text{ равняется } \frac{700}{5}, \text{ т. е. тоже } 140;$$

$$\frac{5}{7} \text{ числа } 1428 \text{ равняется } \frac{1428 \times 5}{7}, \text{ т. е. } 520,$$

$$\text{а } \frac{1428}{1} \text{ числа } \frac{5}{7} \text{ равняется } \frac{5 \times 1428}{1 \times 7}, \text{ т. е. тоже } 520;$$

$$\text{наконецъ, } \frac{3}{4} \text{ числа } \frac{16}{9} \text{ равняется } \frac{16 \times 3}{9 \times 4}, \text{ т. е. } \frac{4}{3},$$

$$\text{а } \frac{16}{9} \text{ числа } \frac{3}{4} \text{ равняется } \frac{3 \times 16}{4 \times 9}, \text{ т. е. тоже } \frac{4}{3}.$$

Если нахожденіе суммы одинаковыхъ долей даннаго числа обозначить знакомъ $\smile$ и если при этомъ данное число записывать первымъ, а дробь, обозначающую какую сумму какихъ долей требуется найти, записывать второю, то ясно, стало-быть, что

$$\tfrac{5}{1} \smile \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{4} \smile \tfrac{5}{1},\ \tfrac{8}{75} \smile \tfrac{5}{16} = \tfrac{5}{6} \smile \tfrac{8}{75}, \text{ и т. д.};$$

такимъ образомъ доказано, что нахожденіе суммы одинаковыхъ долей даннаго числа подчиняется закону перестановительному. Столь же легко доказать, что это дѣйствіе подчиняется закону сочетательному; дѣйствительно, при тѣхъ же обозначеніяхъ:

$$\left(\frac{5}{7} \smile \frac{3}{4}\right) \smile \frac{8}{11} = \frac{5 \times 3 \times 8}{7 \times 4 \times 11};$$

$$\text{но и } \frac{5}{7} \smile \left(\frac{3}{4} \smile \frac{8}{11}\right) = \left(\frac{3}{4} \smile \frac{8}{11}\right) \smile \frac{5}{7} = \frac{3 \times 8 \times 5}{4 \times 11 \times 7};$$

т. е. результатъ отъ различія въ группировкѣ не измѣняется.

Наконецъ, остается еще доказать, что дѣйствіе нахожденія суммы одинаковыхъ долей даннаго числа подчиняется, по отношенію къ сложенію и вычитанію, закону распредѣлительному. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что, напр.,

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{7}\right) \smile \frac{8}{11} = \frac{41 \times 8}{28 \times 11} = \frac{41 \times 2}{77} = \frac{82}{77},$$

$$\text{но и } \left(\frac{3}{4} \smile \frac{8}{11}\right) + \left(\frac{5}{7} \smile \frac{8}{11}\right) = \frac{3 \times 8}{4 \times 11} + \frac{5 \times 8}{7 \times 11} = \frac{6}{11} + \frac{40}{77} = \frac{82}{77}, \text{ и т. п.}$$

Такимъ образомъ *доказано*, что дѣйствіе нахожденія суммы одинаковыхъ долей даннаго числа подчиняется тремъ законамъ:

перестановительному, сочетательному, а относительно сложенія и вычитанія—распредѣлительному. Стало-быть, дѣйствіе нахожденія части даннаго числа *можно* называть *умноженіемъ* послѣдняго на дробь, выражающую — какую совокупность какихъ долей даннаго числа требуется найти. Точно такъ же можно убѣдиться въ томъ, что *умноженіемъ* одного числа на другое *можно* называть дѣйствіе, цѣль котораго — составить изъ перваго числа третье такъ, какъ второе составлено изъ единицы; въ чемъ убѣдиться предоставляется учащемуся.

Дѣленіе на цѣлое число.

§ 107. Дѣленіе, каковы бы ни были дѣлимое и дѣлитель, есть дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе неизвѣстнаго сомножителя по данному произведенію его на даннаго сомножителя.

При дѣленіи точно такъ же, какъ при умноженіи дробей, можно различать два случая: когда дѣлитель есть цѣлое число, и когда дѣлитель есть число дробное. Разсмотримъ первый случай.

Пусть требуется раздѣлить $\frac{3}{7}$ на 4. Это значитъ, что если искомаго сомножителя умножить на 4, то получится $\frac{3}{7}$; стало-быть, искомый сомножитель въ 4 раза меньше, чѣмъ $\frac{3}{7}$; слѣдовательно, для его отысканія надо $\frac{3}{7}$ уменьшить въ 4 раза. Но для уменьшенія дроби $\frac{3}{7}$ въ 4 раза достаточно знаменателя ея увеличить въ 4 раза; такимъ образомъ искомый сомножитель равенъ $\frac{3}{7 \times 4} = \frac{3}{28}$. Дѣйствительно: если $\frac{3}{28}$ помножить на 4, то получится $\frac{3}{7}$, въ чемъ предоставляется убѣдиться учащемуся.

Отсюда вытекаетъ правило: для раздѣленія дроби на цѣлое число надо уменьшить эту дробь во столько разъ, сколько единицъ въ дѣлителѣ; поэтому, если числитель дѣлимаго дѣлится на дѣлителя, то можно, для раздѣленія данной дроби на данное цѣлое число, раздѣлить числителя дроби на даннаго дѣлителя; если же числитель дѣлимой дроби на дѣлителя не дѣлится, то, для уменьшенія дѣлимаго во столько разъ, сколько въ цѣломъ дѣлителѣ единицъ, надо знаменателя дѣлимой дроби умножить на даннаго дѣлителя. Такъ, $\frac{15}{17} : 5 = \frac{15 : 5}{17} = \frac{3}{17}$, а $\frac{5}{6} : 8 = \frac{5}{6 \times 8} = \frac{5}{48}$.

Если дѣлимое есть число цѣлое, то частное, какъ извѣстно изъ § 94, выражается также и въ видѣ дроби, которой числитель равенъ дѣлимому, а знаменатель — дѣлителю. — Если, наконецъ, дѣлимое есть число смѣшанное, то, выразивъ это дѣлимое въ видѣ неправильной дроби, мы придемъ къ случаю дѣленія дробнаго числа на цѣлое. Такъ: $8 : 5 = \frac{8}{5}$, $2\frac{3}{4} : 5 = \frac{11}{4} : 5 = \frac{11}{20}$, и т. д.

Далеко не столь же просто дѣленіе въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣлитель есть число *дробное*.

§ 108. Прежде чѣмъ перейти къ дѣйствію дѣленія какихъ угодно чиселъ на дробное число, займемся рѣшеніемъ слѣдующихъ задачъ: **Предварительныя задачи: нахожденіе цѣлаго по части его.**

1) *Требуется найти число, котораго* $\frac{1}{5}$ *доля равна 7-ми.*—Это значитъ, что частное, происходящее отъ раздѣленія искомаго числа на 5 равныхъ между собою частей, равно 7-ми. Стало-быть, искомое число есть дѣлимое, 5 есть дѣлитель, а 7—полное частное. Но дѣлимое всегда равно полному частному, помноженному на дѣлителя, а потому искомое число равно

$$5 \times 7 \text{ или } 7 \times 5, \text{ т. е. } 35\text{-ти}.$$

Помощью такихъ же разсужденій можно найти любое число, котораго опредѣленная доля равна данному цѣлому числу.

2) *Требуется найти число, котораго* $\frac{1}{5}$ *равна дроби* $\frac{3}{7}$. — Это значитъ, что искомое число есть дѣлимое, 5—дѣлитель, а $\frac{3}{7}$—полное частное. Искомое дѣлимое, стало-быть, въ 5 разъ болѣе, чѣмъ $\frac{3}{7}$; значитъ, для его нахожденія должно $\frac{3}{7}$ увеличить въ 5 разъ. Откуда получимъ, что искомое число равно

$$\frac{3 \times 5}{7}, \text{ т. е. } \frac{15}{7}.$$

Помощью такихъ же разсужденій можно найти неизвѣстное число, если извѣстна любая опредѣленная доля его.

3) *Требуется найти число, котораго* $\frac{3}{5}$ *равны 26-ти.*—Разсуждаемъ при этомъ такъ: $\frac{3}{5}$ неизвѣстнаго числа равны 26-ти; $\frac{1}{5}$ того же неизвѣстнаго числа втрое меньше, чѣмъ $\frac{3}{5}$ его, а потому $\frac{1}{5}$ неизвѣстнаго числа втрое меньше 26-ти, т. е. равны частному

$$26 : 3 = \frac{26}{3};$$

но все неизвѣстное число въ 5 разъ болѣе, чѣмъ $\frac{1}{5}$ его, т. е. равно

$$\frac{26 \times 5}{3} = \frac{130}{3}.$$

Помощью такихъ же разсужденій можно найти неизвѣстное число по любой части его, если эта часть есть цѣлое число.

4) *Требуется найти число, котораго* $\frac{4}{7}$ *равны дроби* $\frac{9}{25}$.—Разсуждаемъ при этомъ такъ: $\frac{4}{7}$ неизвѣстнаго числа равны $\frac{9}{25}$-мъ; $\frac{1}{7}$ того же неизвѣстнаго числа въ 4 раза меньше, чѣмъ $\frac{4}{7}$ его, а потому $\frac{1}{7}$ неизвѣстнаго числа вчетверо меньше девяти двадцатьпятыхъ единицы, т. е. равна

$$\frac{9}{25 \times 4};$$

но все неизвѣстное число въ 7 разъ болѣе, чѣмъ $\frac{1}{7}$ его, т. е. равно

$$\frac{9 \times 7}{25 \times 4} = \frac{63}{10}.$$

Расположеніе вычисленій.

Замѣчаніе. Расположеніе вычисленій при этомъ можетъ быть въ слѣдующемъ родѣ:

1) Найти неизвѣстное число, котораго $\frac{1}{5}$ равна 17-ти.

$$\frac{1}{5}\text{ неизв. числа} = 17,$$
$$\frac{5}{5}\quad»\quad»\quad = 17 \times 5.$$

2) Найти неизвѣстное число, котораго $\frac{1}{6}$ равна дроби $\frac{5}{7}$.

$$\frac{1}{6}\text{ неизв. числа} = \frac{5}{7},$$
$$\frac{6}{6}\quad»\quad»\quad = \frac{5 \times 6}{7} = \frac{30}{7}.$$

3) Найти неизвѣстное число, котораго $\frac{3}{4}$ равны 19.

$$\frac{3}{4}\text{ неизв. числа} = 19,$$
$$\frac{1}{4}\quad»\quad»\quad = \frac{19}{3},$$
$$\frac{4}{4}\quad»\quad»\quad = \frac{19 \times 4}{3} = \frac{76}{3}.$$

4) Найти неизвѣстное число, котораго $\frac{5}{6}$ равны дроби $\frac{8}{19}$.

$$\frac{5}{6}\text{ неизв. числа} = \frac{8}{19},$$
$$\frac{1}{6}\quad»\quad»\quad = \frac{8}{19 \times 5},$$
$$\frac{6}{6}\quad»\quad»\quad = \frac{8 \times 6}{19 \times 5} = \frac{48}{95}.$$

Дѣленіе цѣлаго числа на дробь.

§ 109. При дѣленіи на дробнаго дѣлителя можно точно такъ же, какъ при умноженіи на дробное число, различать два случая: а) когда дѣлимое есть цѣлое число, и б) когда дѣлимое есть число тоже дробное. Разсмотримъ первый случай.

Пусть требуется раздѣлить 4 на $\frac{3}{5}$; это значитъ, что если искомаго сомножителя умножить на $\frac{3}{5}$, то получится 4. Но отъ умноженія искомаго сомножителя на $\frac{3}{5}$ въ результатѣ должны получиться $\frac{3}{5}$ этого сомножителя; стало-быть,

$$\frac{3}{5}\text{ искомаго сомножителя равны } 4,$$
$$\frac{1}{5}\quad»\quad»\quad\text{равна } \frac{4}{3},$$

а весь искомый сомножитель равенъ $\frac{4 \times 5}{3}$.

Такимъ образомъ

$$4 : \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3},\quad 6 : \frac{7}{9} = \frac{6 \times 9}{7},\text{ и т. п.}$$

Отсюда вытекаетъ правило дѣленія цѣлаго числа на дробь: цѣлое число надо умножить на знаменателя дѣлителя, полученное произведеніе сдѣлать числителемъ, а числителя дѣлителя — знаменателемъ дроби, которая и представляетъ собою искомое частное.

Особеннаго вниманія заслуживаютъ частныя, происходящія отъ раздѣленія одной единицы на любую дробь:

$$1 : \frac{3}{7} = \frac{1 \times 7}{3} = \frac{7}{3},\ 1 : \frac{5}{6} = \frac{1 \times 6}{5} = \frac{6}{5},\ 1 : \frac{7}{9} = \frac{9}{7}, \text{ и т. п.}$$

Каждая изъ двухъ дробей, которыхъ произведеніе равно единицѣ или (что̀ одно и то же) изъ которыхъ каждая есть частное, происходящее отъ раздѣленія единицы на другую изъ нихъ, называется по отношенію къ другой *дробью обращенною* или *обратною*. Такъ, $\frac{3}{4}$ есть дробь, обратная дроби $\frac{4}{3}$, и т. п. При этомъ очевидно, что дробью, обратною цѣлому числу, называется дробь, которой числитель равенъ единицѣ, а знаменатель—данному цѣлому числу; числомъ же обратнымъ данной долѣ единицы называется цѣлое число, равное ея знаменателю. Такъ, 4 и $\frac{1}{4}$ суть взаимно-обратныя числа, и произведеніе ихъ равно одной единицѣ.

Правило дѣленія цѣлаго числа на дробь можетъ быть, благодаря взаимно-обратнымъ числамъ, выражено вкратцѣ слѣдующимъ образомъ: *для раздѣленія цѣлаго числа на дробь слѣдуетъ дѣлимое умножить на обращеннаго дѣлителя*. Дѣйствительно, по предыдущему:

$$4 : \frac{3}{7} = \frac{4 \times 7}{3},$$

но выраженіе $\frac{4 \times 7}{3}$ можетъ быть разсматриваемо какъ произведеніе

$$4 \times \frac{7}{3};$$

стало-быть, $4 : \frac{3}{7} = 4 \times \frac{7}{3}$.

Дѣленіе дроби на дробь и общее правило.

§ 110. Точно такъ же, если требуется раздѣлить $\frac{4}{5}$ на $\frac{5}{7}$, то путемъ разсужденій, подобныхъ приведеннымъ выше, найдемъ, что $\frac{4}{5}$ есть произведеніе неизвѣстнаго сомножителя на $\frac{5}{7}$; но, отъ умноженія неизвѣстнаго сомножителя на $\frac{5}{7}$, получатся $\frac{5}{7}$ этого сомножителя; стало-быть, $\frac{5}{7}$ искомаго сомножителя равны дроби $\frac{4}{5}$, откуда легко выведемъ, что этотъ сомножитель равенъ $\frac{4 \times 7}{5 \times 5}$, т. е. что

$$\frac{4}{5} : \frac{5}{7} = \frac{4 \times 7}{5 \times 5}.$$

Отсюда вытекаетъ правило дѣленія дроби на дробь: для раздѣленія дроби на дробь надо умножить числителя дѣлимой дроби на знаменателя дѣлителя, знаменателя дѣлимаго — на числителя дѣлителя и первое произведеніе сдѣлать числителемъ, а второе знаменателемъ дроби, которая и представляетъ собою искомое частное. Короче это правило можетъ быть выражено такъ: для раздѣленія дроби на дробь слѣдуетъ дѣлимое умножить на обращеннаго дѣлителя.

Изъ вышеизложеннаго видимъ, что всѣ случаи дѣленія могутъ быть подведены подъ одно общее правило, если примемъ во вниманіе, что цѣлое число есть число обратное дроби, которой числитель равенъ тому же цѣлому числу, а знаменатель равенъ единицѣ. Это *общее* правило гласитъ въ такомъ случаѣ слѣдующимъ образомъ: *для раздѣленія какого угодно числа на другое надо дѣлимое умножить на обращеннаго дѣлителя.* Такъ,

$$5 : 7 = 5 : \frac{7}{1} = 5 \times \frac{1}{7} = \frac{5}{7};\quad \frac{4}{5} : 7 = \frac{4}{5} : \frac{7}{1} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{4}{35};$$

$$5 : \frac{3}{4} = \frac{5}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{1 \times 3};\quad \frac{6}{7} : \frac{5}{8} = \frac{6}{7} \times \frac{8}{5} = \frac{6 \times 8}{7 \times 5}.$$

Примѣчаніе 1-ое. Благодаря выше даннымъ опредѣленіямъ умноженія и дѣленія и благодаря тому, что дѣленіе, послѣ введенія понятія о дроби, совершается всегда безъ остатка, всѣ свойства умноженія и дѣленія, касающіяся порядка производства этихъ дѣйствій въ случаѣ послѣдовательнаго ихъ примѣненія, а равно касающіяся измѣненій произведенія и частнаго, справедливы не только для цѣлыхъ, но также и для дробныхъ чиселъ. Такъ:

1) Результатъ раздѣленія произведенія нѣсколькихъ множителей на одного изъ нихъ равняется произведенію остальныхъ; напр.,

$$\left(\tfrac{3}{4} \times \tfrac{5}{6} \times \tfrac{7}{9}\right) : \tfrac{5}{6} = \tfrac{3}{4} \times \tfrac{7}{9}.$$

2) Результатъ раздѣленія какого нибудь числа на произведеніе нѣсколькихъ сомножителей равенъ результату послѣдовательнаго раздѣленія даннаго дѣлимаго на каждаго изъ множителей дѣлителя. Напр.,

$$7 : \left(\tfrac{3}{4} \times \tfrac{5}{6} \times \tfrac{11}{12}\right) = \left[\left(7 : \tfrac{3}{4}\right) : \tfrac{5}{6}\right] : \tfrac{11}{12}. \text{ И т. д.}$$

При этомъ достойно вниманія, что такъ какъ при дѣленіи дробныхъ чиселъ не получается остатка, то нѣкоторыя ограниченія, обыкновенно дѣлаемыя въ ученіи объ измѣненіи частнаго въ зависимости отъ измѣненій дѣлимаго и дѣлителя, въ случаѣ дробныхъ чиселъ, устраняются. Ср. § 56.

Примѣчаніе 2-ое. Прежде производства перемноженія чиселъ въ числителѣ и знаменателѣ полученнаго частнаго, надо произвести сокращеніе соотвѣтствующихъ чиселъ въ числителѣ и знаменателѣ частнаго, если только таковое возможно (ср. § 103). Такъ, напр.,

$$\frac{36}{77} : \frac{45}{44} = \frac{\overset{4}{36} \times \overset{4}{44}}{\underset{7}{77} \times \underset{5}{45}} = \frac{16}{35}.$$

Примѣчаніе 3-ье. Отысканіе цѣлаго по данной части его сводится къ дѣленію на дробь, что́ достойно особеннаго вниманія также и съ практической точки зрѣнія, при рѣшеніи задачъ. Дѣйствительно, задача: «5 аршинъ сукна стоятъ 35 р., что̀ сто́итъ одинъ аршинъ?» ничѣмъ существеннымъ не отличается отъ задачи: «$\frac{3}{4}$ арш. сукна сто́ятъ $\frac{17}{5}$ р., что́ сто́итъ одинъ арш.?» Такимъ образомъ, нахожденіе части цѣлаго приводитъ къ умноженію, а нахожденіе цѣлаго по извѣстной части его—къ дѣленію.

§ 111. Если при дѣленіи одно изъ данныхъ чиселъ есть число смѣшанное, то ранѣе производства дѣйствія надо это смѣшанное число обратить въ неправильную дробь. Такъ, хотя **Случай смѣшанныхъ чиселъ при дѣленіи.**

$$2\tfrac{3}{5} : \tfrac{3}{4} = (2 + \tfrac{3}{5}) : \tfrac{3}{4} = (2 : \tfrac{3}{4}) + (\tfrac{3}{5} : \tfrac{3}{4}),$$

но иногда гораздо удобнѣе вычислить искомый результатъ такъ:

$$2\frac{3}{5} : \frac{3}{4} = \frac{13}{5} : \frac{3}{4} = \frac{13 \times 4}{5 \times 3}.$$

Въ случаѣ же, если дѣлитель есть число смѣшанное, такое обращеніе не только полезно, но и прямо необходимо, потому что замѣна смѣшаннаго дѣлителя суммою цѣлаго числа съ дробью нисколько не облегчаетъ производства дѣленія. Такъ, хотя

$$\tfrac{2}{3} : 4\tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3} : (4 + \tfrac{1}{2}),$$

но это нисколько не приближаетъ насъ къ рѣшенію вопроса; обращеніе же смѣшаннаго числа въ неправильную дробь приводитъ къ очень простому вычисленію:

$$\frac{2}{3} : 4\frac{1}{2} = \frac{2}{3} : \frac{9}{2} = \frac{2 \times 2}{3 \times 9}.$$

§ 112. Оба вида дѣленія (когда неизвѣстно множимое и когда неизвѣстенъ множитель), въ случаѣ именованныхъ дѣлимаго и дѣлителя, должны быть разсмотрѣны отдѣльно одинъ отъ другого. Собственно дѣленіе, или правильнѣе — отысканіе множимаго по даннымъ произведенію и множителю, совершается по правиламъ, выше изложеннымъ, и съ помощью разсужденій, подобныхъ употребленнымъ въ случаѣ отвлеченнаго дѣлимаго. Точно такъ же производится кратное сравненіе отвлеченныхъ чиселъ, такъ какъ въ случаѣ отвлеченныхъ чиселъ оба вида дѣленія сводятся одинъ къ другому. *Кратное же сравненіе* именованныхъ чиселъ, изъ которыхъ одно или оба суть числа дробныя, можетъ быть сведено къ дѣленію слѣдующимъ образомъ: **Кратное сравненіе чиселъ.**

1) Пусть требуется найти частное (отношеніе) $\frac{3}{4}$ арш. : 7 арш.; это значитъ, что требуется найти отвлеченное число, на которое должно умножить 7 аршинъ для того, чтобы въ произведеніи получить $\frac{3}{4}$ аршина. Такъ какъ единица мѣры въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ одна и та же, то

$$\tfrac{3}{4}\text{ арш.} : 7\text{ арш.} = \tfrac{3}{4} : 7,$$

причемъ запись $\frac{3}{4}:7$ выражаетъ въ этомъ случаѣ требованіе найти множителя, на котораго надо помножить 7, чтобы получить $\frac{3}{4}$; но $\frac{3}{4}$ должно получиться также и въ томъ случаѣ, если искомое число помножить на 7, стало-быть, и въ этомъ случаѣ $\frac{3}{4}:7=\frac{3}{4\times 7}$, т. е.

$$\tfrac{3}{4} \text{ арш.} : 7 \text{ арш.} = \tfrac{3}{28}.$$

2) Пусть требуется найти частное (отношеніе) 8 арш. : $\frac{5}{7}$ арш. Разсужденіемъ, подобнымъ предыдущему, найдемъ:

$$8 \text{ арш.} : \frac{5}{7} \text{ арш.} = 8 : \frac{5}{7} = \frac{8\times 7}{5}.$$

3) Пусть, наконецъ, требуется найти частное (отношеніе)

$$\tfrac{3}{4} \text{ руб.} : \tfrac{5}{7} \text{ руб.}$$

Очевидно, что

$$\frac{3}{4} \text{ рубля} : \frac{5}{7} \text{ рубля} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3\times 7}{4\times 5}.$$

Легко убѣдиться, что правила, выше выведенныя для дѣленія въ случаѣ неизвѣстнаго множимаго, остаются справедливыми также для кратнаго сравненія дробныхъ чиселъ, т. е. для случая неизвѣстнаго множителя. Въ послѣднемъ случаѣ однако же необходимо сдѣлать такъ, чтобы дѣлимое и дѣлитель были выражены въ одинаковыхъ единицахъ мѣры.

Кратное сравненіе цѣлыхъ чиселъ.

§ 113. Помощью разсужденій, которыя употреблены выше для вывода отношенія двухъ именованныхъ чиселъ, изъ которыхъ одно или оба суть числа дробныя, можно вывести, что отношеніе двухъ однородныхъ именованныхъ и, притомъ, цѣлыхъ чиселъ тоже можетъ быть выражено въ видѣ дроби, но, конечно, отвлеченной; причемъ числитель этой дроби есть отвлеченное число единицъ, содержащихся въ дѣлимомъ, а знаменатель — отвлеченное число тѣхъ же (непремѣнно) единицъ, содержащихся въ дѣлителѣ. Пусть требуется найти отношеніе

$$7 \text{ арш.} : 17 \text{ арш.}$$

Дѣйствительно:

$$7 \text{ арш.} : 17 \text{ арш.} = 7 : 17 = \tfrac{7}{17};$$

точно такъ же выведемъ, что каковы бы ни были именованные дѣлимое и дѣлитель, ихъ можно выразить въ одинаковыхъ единицахъ мѣры, и тогда отношеніе двухъ величинъ или именованныхъ чиселъ, выраженныхъ въ одинаковыхъ единицахъ мѣры, равно отвлеченной дроби, которой числитель равенъ числу единицъ дѣлимаго, а знаменатель — числу единицъ дѣлителя. — Очевидно, что если дѣлимое и дѣлитель выражены не въ однѣхъ и тѣхъ же единицахъ, все выше изложенное не примѣнимо, и въ такомъ случаѣ надо прежде всего выразить данныя числа въ однѣхъ и тѣхъ же единицахъ мѣры.

Смыслъ отвлеченной дроби.

Замѣчаніе. Такимъ образомъ всякая отвлеченная дробь можетъ быть разсматриваема не только какъ нѣкоторая совокупность равныхъ между собою долей отвлеченной единицы (§ 93) и не только какъ частное, происходящее отъ раздѣленія отвлеченнаго числа, равнаго числителю, на число, равное знаменателю (§ 94), но также какъ кратное отношеніе двухъ отвлеченныхъ чиселъ (или именованныхъ одного наименованія), въ которыхъ отвлеченное число единицъ дѣлимаго равно числителю, а отвлеченное число единицъ дѣлителя—знаменателю дроби, выражающей отношеніе данныхъ чиселъ.

Величина результатовъ дѣйствій умноженія и дѣленія.

§ 114. Достойно вниманія, что *при умноженіи на дробь можетъ получиться результатъ меньшій множимаго, а при дѣленіи на дробь—результатъ большій дѣлимаго.* Дѣйствительно: если множитель равенъ единицѣ, выраженной въ видѣ неправильной дроби съ одинаковыми числителемъ и знаменателемъ, то произведеніе равно множимому; если же множитель меньше единицы, то произведеніе меньше множимаго. Подобнымъ образомъ и при дѣленіи, если дѣлитель равенъ единицѣ, то частное равно дѣлимому; если же дѣлитель меньше единицы, то частное больше дѣлимаго. Причина этого заключается въ слѣдующемъ. Умноженіе на цѣлое число, большее единицы, есть всегда сложеніе, и поэтому произведеніе двухъ чиселъ, если множитель болѣе единицы, всегда больше множимаго; умноженіе же на дробь есть не что иное, какъ нахожденіе суммы нѣкоторыхъ чиселъ, изъ которыхъ каждая равна нѣкоторой *части* множимаго, — суммы, которая больше множимаго только тогда, когда множитель больше единицы; если онъ равенъ единицѣ, то произведеніе равно множимому; если же, наконецъ, онъ — правильная дробь, то произведеніе должно быть меньше множимаго. Свойство же частнаго при дѣленіи на дробь, указанное выше, вытекаетъ изъ смысла дѣленія, какъ дѣйствія, обратнаго умноженію.— Должно, поэтому, помнить, что при умноженіи на правильную дробь произведеніе должно быть меньше множимаго и что при дѣленіи на правильную дробь частное должно быть больше дѣлимаго. — Это ни мало не удивительно: даже въ случаѣ цѣлыхъ чиселъ, если множитель равенъ единицѣ или нулю, произведеніе получается вовсе не бо̀льшее множимаго; такъ, напр., $18 \times 1 = 18$, а $18 \times 0 = 0$, т. е. при умноженіи на единицу получается множимое, а при умноженіи на нуль—число, меньшее, чѣмъ множимое, въ данномъ случаѣ на цѣлыхъ 18 единицъ.

Примѣчаніе. Достойно также вниманія, что каково бы ни было данное множимое, всегда можно подобрать такого множителя, чтобы произведеніе было какъ угодно мало, и обратно: каково бы ни было дѣлимое, можно всегда подобрать такого дѣлителя, чтобы частное было какъ угодно велико. Такъ, напр., если множимое равно милліону единицъ, то стòитъ взять множителя, равнаго одной милліонной долѣ единицы, чтобы произведеніе было равно единицѣ, а если взять множителя, меньшаго, чѣмъ одна милліонная доля единицы, то произведеніе получится меньшее, чѣмъ единица; точно такъ же, если дѣлимое равно даже небольшой дроби, напр., одной сотой долѣ единицы, то стòитъ взять дѣлителя еще меньшаго, напр., дѣлителя, равнаго одной десятитысячной долѣ единицы, чтобы въ частномъ получить сто единицъ, ибо

$$\tfrac{1}{100} : \tfrac{1}{10000} = 100, \text{ и т. п.}$$

Раздробленіе и превращеніе имен. дробей. § 115. Раздробить данную именованную дробь значитъ выразить величину, ею обозначаемую, въ единицахъ низшаго наименованія. При этомъ въ результатѣ можетъ получиться дробь, цѣлое или же смѣшанное именованное число. Такъ, напр.,

$$\tfrac{3}{400} \text{ пуда} = 40 \text{ ф.} \times \tfrac{3}{400} = \tfrac{3}{10} \text{ ф.} = 32 \text{ л.} \times \tfrac{3}{10} = \tfrac{48}{5} \text{ л., и т. д.}$$

$$\text{а } \tfrac{5}{12} \text{ саж.} = 7 \text{ ф.} \times \tfrac{5}{12} = \tfrac{35}{12} \text{ ф.} = 35 \text{ дюйм., и т. п.}$$

Вообще раздробленіе дробныхъ именованныхъ чиселъ выполняется съ помощью одного умноженія или же ряда умноженій нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ на дробныя. Само собою разумѣется, что расположеніе вычисленій можетъ быть и иное, чѣмъ выше, а именно: можно опредѣлить, сколько единицъ требуемаго наименованія содержится въ цѣлой единицѣ, которой долю составляетъ данная именованная дробь. Такъ, напр., если требуется узнать, сколько содержится золотниковъ въ $\frac{3}{400}$ пуда, то произведеніе $3 \times 32 \times 40$, которое выражаетъ—сколько золотниковъ въ одномъ пудѣ, помножаемъ на $\frac{3}{400}$; получимъ:

$$\frac{3 \times 32 \times 40 \times 3}{400} = \frac{3 \times 16 \times 3}{5} = \frac{14124}{5}.$$

Но сущность преобразованія въ обоихъ случаяхъ одна.

При этомъ полезно всѣ умноженія сначала только обозначить, дабы легко было сдѣлать, если это окажется возможнымъ, сокращеніе.

Превратить данное цѣлое, дробное или смѣшанное именованное число значитъ выразить величину, имъ обозначаемую, въ единицахъ высшаго наименованія. При этомъ въ результатѣ можетъ получиться цѣлое, дробное или смѣшанное именованное число. Такъ, напр., 80 ф. $= 2$ п. $= \frac{1}{10}$ берк. $\times 2 = \frac{1}{5}$ берковца,

$$117 \text{ зол.} = \tfrac{1}{3} \text{ л.} \times 117 = \tfrac{117}{3} \text{ л.} = \tfrac{1}{32} \text{ ф.} \times \tfrac{117}{3} = \tfrac{117}{96} \text{ ф., и т. д.}$$

Такимъ образомъ превращеніе именованныхъ чиселъ въ простое именованное число выполняется съ помощью умноженія нѣкоторыхъ дробей на нѣкоторыя цѣлыя или же дробныя числа. Само собою разумѣется, что при этомъ расположеніе вычисленія можетъ быть и иное. Такъ, напр., если требуется узнать, какую часть одного фунта составляетъ 117 золотниковъ, то для этого можно произведеніе $\frac{1}{3} \times \frac{1}{32}$ помножить на 117.

Глава VI.

О десятичныхъ дробяхъ.

§ 116. Изъ всѣхъ дробей въ ариѳметикѣ особеннаго вниманія заслуживаютъ тѣ, которыхъ знаменатели равны единицѣ какого-либо разряда десятичной системы счисленія. Таковы дроби: Понятіе о десятичныхъ дробяхъ.

$\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, и т. д., $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, и т. д. $\frac{1}{1000}$, $\frac{2}{1000}$, $\frac{3}{1000}$, и т. д.

Изъ нихъ $\frac{1}{10}$ меньше одной *единицы* въ 10 разъ,

$\frac{1}{100}$ » » *десятой тоже* » » »

$\frac{1}{1000}$ » » *сотой* » » » » и т. д.

Такія дроби обозначаются также и слѣдующимъ образомъ:

$\frac{1}{10}$ такъ: 0,1;

$\frac{1}{100}$ » 0,01;

$\frac{1}{1000}$ » 0,001;

и т. д. При этомъ: 1) нуль передъ запятою обозначаетъ, что цѣлаго числа въ данномъ случаѣ нѣтъ, 2) запятая обозначаетъ, что мы имѣемъ дѣло не съ цѣлыми числами, а съ долями, 3) цыфра, поставленная непосредственно послѣ запятой, обозначаетъ число десятыхъ долей, слѣдующая цыфра — число сотыхъ, третья цыфра — число тысячныхъ, и т. д. Согласно съ этимъ запись:

0,4 обозначаетъ $\frac{4}{10}$,

0,07 » $\frac{7}{100}$,

0,003 » $\frac{3}{1000}$,

0,12 » $\frac{1}{10} + \frac{2}{100}$,

0,316 » $\frac{3}{10} + \frac{1}{100} + \frac{6}{1000}$, и т. д.

Такимъ образомъ всякая подобная запись представляетъ сокращенное обозначеніе суммы извѣстнаго количества десятыхъ долей съ нѣкоторымъ количествомъ сотыхъ, тысячныхъ, и т. д.

Для лучшаго уясненія себѣ числа долей, обозначенныхъ подобною записью, напр., для устнаго обозначенія числа всѣхъ долей, выраженныхъ совокупностью цыфръ 0,36184, можно прежде всего принять во вниманіе, что

$$0{,}36184 = \tfrac{3}{10} + \tfrac{6}{100} + \tfrac{1}{1000} + \tfrac{8}{10\,000} + \tfrac{4}{100\,000},$$

чѣмъ можно воспользоваться также и для иного обозначенія дроби; кромѣ того, можно принять во вниманіе, что эта сумма, по приведеніи всѣхъ этихъ дробей къ одному знаменателю, равна

$$\tfrac{30000}{100000} + \tfrac{6000}{100000} + \tfrac{100}{100000} + \tfrac{80}{100000} + \tfrac{4}{100000},$$

т. е. равна $\dfrac{30000 + 6000 + 100 + 80 + 4}{100\,000}$, или $\dfrac{36184}{100000}$.

Такимъ образомъ для уясненія себѣ смысла записи 0,36184 можно найти сумму всѣхъ дробей, обозначаемыхъ этою записью, т. е. дробь, числитель которой обозначается записью, стоящею послѣ запятой, знаменатель же равенъ единицѣ такого разряда, что письменное обозначеніе этой единицы заключаетъ столько нулей, сколько цыфръ послѣ запятой. Такъ,

запись 0,7 обозначаетъ $\frac{7}{10}$,
» 0,1607 » $\frac{1607}{10000}$,
» 0,0078 » $\frac{78}{10000}$, и т. д.

Разница между записями 0,1607 и $\frac{1607}{10000}$, хотя онѣ обозначаютъ одну и ту же дробь, весьма значительна: въ первой записи не выписанъ знаменатель, благодаря тому, что каждая изъ цыфръ послѣ запятой имѣетъ, кромѣ своего собственнаго, еще и мѣстное, относительное значеніе. Говоря иначе, цыфры первой записи подчиняются закону десятичной системы счисленія, причемъ послѣ запятой слѣдуютъ одна за другою цыфры десятыхъ, сотыхъ, тысячныхъ и вообще десятичныхъ долей; во второй же записи составъ дроби изъ десятыхъ, сотыхъ и т. д. долей вовсе не очевиденъ.

Десятичною называется дробь, выражающая сумму опредѣленнаго числа десятичныхъ долей единицы, но притомъ обозначенная, благодаря запятой и десятичной системѣ счисленія, безъ знаменателя. Поэтому изъ двухъ обозначеній одной и той же дроби:

$\frac{127059}{1000000}$ и 0,127059

только вторая считается обозначеніемъ *десятичной* дроби, первая же обозначаетъ дробь обыкновенную, которая равна данной десятичной дроби. При этомъ десятичныя дроби всегда предпочитаются обыкновеннымъ съ тѣми же знаменателями. — Наизусть слѣдуетъ помнить десятичныя значенія слѣдующихъ дробей:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$,
$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{2}{5} = 0{,}4$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$,
$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{3}{5} = 0{,}6$	$\frac{5}{8} = 0{,}625$,
$\frac{5}{4} = 1{,}25$	$\frac{4}{5} = 0{,}8$	$\frac{7}{8} = 0{,}875$.

§ 117. Какъ отъ приписанія нулей съ лѣвой стороны къ письменному обозначенію цѣлаго числа, это послѣднее не измѣняетъ своей величины, такъ же точно величина десятичной дроби не измѣняется отъ приписанія нулей къ письменному обозначенію десятичной дроби съ правой его стороны. Дѣйствительно: **Приписываніе нулей къ обозначенію дес. дроби.**

$$0{,}5 = 0{,}50 = 0{,}500 = 0{,}5000, \text{ и т. д.}$$
$$0{,}17 = 0{,}170 = 0{,}1700 = 0{,}17000, \text{ и т. д.}$$

ибо нули справа въ этомъ случаѣ не измѣняютъ мѣстнаго значенія значащихъ цыфръ и не прибавляютъ никакихъ долей къ данной дроби.

Всѣ цѣлыя числа, а равно дроби и числа смѣшанныя, обозначенныя по десятичной системѣ (дроби и смѣшанныя числа — съ помощью запятой), носятъ общее названіе *десятичныхъ чиселъ*. Такъ, цѣлое число 567, дробь 0,567 и смѣшанное число 5,67 суть числа десятичныя. Всякое десятичное смѣшанное число и десятичную дробь можно представить въ сопровожденіи нулей съ правой и съ лѣвой стороны ихъ письменнаго обозначенія. Такъ,

$$12{,}37 = \ldots 000012{,}37000\ldots \text{ и } 0{,}57 = \ldots 000{,}570000\ldots,$$

гдѣ многоточія обозначаютъ, что такихъ нулей можно взять сколько угодно.

§ 118. Устное обозначеніе десятичныхъ дробей и смѣшанныхъ десятичныхъ чиселъ можетъ быть троякаго рода: **Устное обозначеніе дес. дробей.**

а) Можно по порядку назвать всѣ цыфры до и послѣ запятой; кто знаетъ сущность обозначенія десятичныхъ чиселъ, тому будетъ въ такомъ случаѣ понятно—что̀ обозначается тою или иною совокупностью цыфръ, взятыхъ въ какомъ либо опредѣленномъ порядкѣ. Напр., дробь, которой цыфры по порядку суть: 0 цѣлыхъ, 0, 6, 0, 2 и 3, есть дробь 0,06023, т. е. дробь, равная суммѣ

$$\frac{6}{100} + \frac{2}{10000} + \frac{3}{100000}.$$

б) Можно, какъ это выяснено выше, сдѣлать число, обозначаемое цыфрами послѣ запятой, числителемъ, а десятичное число, въ письменномъ обозначеніи котораго столько нулей, сколько цыфръ послѣ запятой—знаменателемъ. Тогда 0,06023 обозначаетъ дробь $\frac{6023}{100000}$.

в) Можно многозначную десятичную дробь раздѣлить на грани, начиная отъ запятой слѣва на-право, по три цыфры въ каждой, и затѣмъ прочесть каждую грань съ ея знаменателемъ; такъ какъ величина десятичной дроби не измѣняется отъ приписанія къ письменному обозначенію ея справа какого угодно количества нулей, то можно, въ случаѣ если въ послѣдней грани меньше трехъ цыфръ, дополнить число цыфръ однимъ или двумя нулями справа.

Напр., дробь 0,361825 можетъ быть обозначена такъ: 0,361 825 и прочитана слѣдующимъ образомъ: нуль цѣлыхъ, $\frac{361}{1000}$ и $\frac{825}{1000000}$; дробь же 0,58183 можетъ быть обозначена такъ: 0,581 830 и прочитана слѣдующимъ образомъ: нуль цѣлыхъ, $\frac{581}{1000}$ и $\frac{830}{1000000}$; наконецъ, дробь 0,0000736 можетъ быть обозначена такъ: 0,000 073 600 и прочитана слѣдующимъ образомъ: нуль цѣлыхъ, $\frac{0}{1000}$, $\frac{73}{1000000}$ и $\frac{600}{1\,000\,000\,000}$. И т. д.

Изъ этихъ трехъ способовъ устнаго обозначенія десятичныхъ дробей второй часто бываетъ затруднителенъ, а первый слишкомъ часто допускаетъ обмолвки того или иного рода. Наиболѣе удобенъ — въ особенности при большомъ числѣ знаковъ послѣ запятой, послѣдній способъ устнаго обозначенія многозначныхъ десятичныхъ дробей, тѣмъ болѣе, что при этомъ способѣ устнаго обозначенія десятичныхъ дробей, является чрезвычайное сходство чтенія и обозначенія десятичныхъ дробей съ чтеніемъ и обозначеніемъ цѣлыхъ чиселъ. Ясно, что десятичное число такимъ образомъ состоитъ изъ единицъ восходящихъ классовъ: единицъ, тысячъ, милліоновъ, билліоновъ и т. д., и изъ единицъ классовъ нисходящихъ: тысячныхъ долей, милліонныхъ, билліонныхъ и т. д.

Что же касается записыванія читаемыхъ въ слухъ устныхъ обозначеній десятичныхъ дробей съ помощью запятой, то трудности представляетъ надлежащее записываніе дробей только при второмъ способѣ устнаго ихъ обозначенія: для того, чтобы обозначить въ видѣ десятичной дроби, напр., дробь $\frac{81}{10000}$, сначала надо записать 81, потомъ сообразить — сколько нулей въ знаменателѣ; такъ какъ ихъ четыре, то послѣ запятой должно быть четыре цыфры, т. е. сказанная дробь должна быть обозначена такъ: 0, 0081.

Приведеніе дес. дробей къ одному знаменателю.

§ 119. Иногда на практикѣ (хотя и рѣдко) требуется приведеніе десятичныхъ дробей къ одному знаменателю. Это преобразованіе десятичныхъ дробей сводится къ приписанію одного или нѣсколькихъ нулей къ письменнымъ обозначеніямъ дробей, въ которыхъ число цыфръ послѣ запятой меньше, чѣмъ число цыфръ въ обозначеніи дроби, обозначаемой наибольшимъ числомъ цыфръ послѣ запятой. Такъ, чтобы привести дроби:

$$0{,}71;\ 0{,}7845;\ 0{,}993;$$

къ одному знаменателю, достаточно къ письменному обозначенію первой дроби справа приписать два нуля, а къ письменному обозначенію третьей — одинъ нуль. Послѣ приведенія десятичныхъ дробей къ одному знаменателю, очень легко судить о томъ — какая изъ нихъ наибольшая; но для того, чтобы судить объ этомъ нѣтъ, конечно, необходимости въ приведенiи данныхъ дробей непремѣнно къ одному знаменателю.

§ 120. Если дана десятичная дробь, то *перенести запятую* на одну цыфру (или одинъ знакъ) вправо значитъ составить новую десятичную дробь съ тѣми же цыфрами, поставленными въ томъ же порядкѣ, но съ запятою, стоящею послѣ цыфры, обозначающей въ ней десятыя доли; перенести въ дроби запятую на двѣ цыфры, или два знака, значитъ образовать новую дробь, въ которой цыфры тѣ же и взяты въ томъ же порядкѣ, но запятая поставлена послѣ цыфры, обозначающей сотыя доли, и т. д. Такъ, отъ перенесенiя запятой на-право въ дроби 0,365 **Перенесенiе запятой.**

на одинъ знакъ получится 3,65
» два знака » 36,5
» три » » 365,
» четыре » » 3650, и т. д.

Если дана десятичная дробь, то перенести запятую влѣво на одинъ знакъ значитъ образовать число съ тѣми же цыфрами, поставленными въ томъ же порядкѣ, но съ запятою, поставленною передъ цыфрою, обозначающею въ данномъ числѣ цѣлыя единицы; перенести въ десятичной дроби запятую на два знака влѣво значитъ составить новое число съ тѣми же цыфрами, но съ запятою передъ цыфрою, обозначающею въ данномъ числѣ число десятковъ, и т. д. Такъ, отъ перенесенiя влѣво запятой въ дроби 3,72

на одинъ знакъ получится 0,372,
» два знака » 0,0372,
» три » » 0,00372, и т. д.

Отъ перенесенiя запятой вправо на одинъ знакъ дробь увеличивается, а отъ перенесенiя запятой влѣво на одинъ знакъ дробь уменьшается въ десять разъ. Дѣйствительно: если дано число 3,754, то число 37,54 въ десять разъ больше первоначально даннаго числа, потому что

3 единицы обратились въ 3 десятка,
7 десятковъ » » 7 единицъ,
5 сотыхъ » » 5 десятыхъ,
а 4 тысячныхъ » » 4 сотыхъ.

Точно такъ же, если дано число 3,754, то число 0,3754 въ десять разъ меньше первоначально даннаго числа, потому что

3 единицы обратились въ 3 десятыхъ,
7 десятыхъ » » 7 сотыхъ,
5 сотыхъ » » 5 тысячныхъ,
а 4 тысячныхъ » » 4 десятитысячныхъ.

Вообще отъ перенесенія запятой на одинъ знакъ вправо (влѣво) число увеличивается (уменьшается) въ 10 разъ; отъ перенесенія запятой на два знака оно увеличивается или уменьшается въ 100 разъ, и т. д.

Сложеніе и вычитаніе дес. дробей.

§ 121. Дѣйствія сложенія и вычитанія десятичныхъ дробей производятся по правиламъ дѣйствій сложенія и вычитанія многозначныхъ чиселъ, съ тою только разницею, что, для большей наглядности, иногда приводятъ данныя дроби къ одному знаменателю. Это, впрочемъ, не необходимо; болѣе или менѣе цѣлесообразнымъ приведеніе десятичныхъ дробей къ одному знаменателю является тогда, когда при вычитаніи въ письменномъ обозначеніи уменьшаемаго менѣе цыфръ, чѣмъ въ обозначеніи вычитаемаго.

Примѣры:

$$\begin{array}{r} 0,763 \\ 0,518 \\ +\,0,836 \\ \hline 2,117 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,72 \\ 4,857 \\ +\,0,36 \\ \hline 5,937 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 0,720 \\ 4,857 \\ +\,0,360 \\ \hline 5,937 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,\dot{5}\dot{5}1 \\ -\,0,279 \\ \hline 0,272 \end{array} \;\Bigg|\; \begin{array}{r} 4,\dot{5}078 \\ -\,2,056 \\ \hline 2,4518 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 4,\dot{5}078 \\ -\,2,0560 \\ \hline 2,4518 \end{array} \;\Bigg|\; \begin{array}{r} \dot{5},8\dot{6} \\ -\,2,91593 \\ \hline 2,84317 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} \dot{5},7\dot{6}\dot{0}\dot{0}\dot{0} \\ -\,2,91683 \\ \hline 2,84317 \end{array}$$

Умноженіе дес. дробей.

§ 122. При производствѣ умноженія десятичной дроби на десятичную же, обыкновенно отбрасываются запятыя, а полученныя такимъ образомъ числа перемножаются какъ цѣлыя, и въ полученномъ результатѣ отдѣляется отъ правой руки къ лѣвой столько знаковъ, сколько всего десятичныхъ знаковъ въ множимомъ и множителѣ. Такъ, чтобы умножить 3,726 на 0,17, умножаютъ 3 726 на 17 и въ полученной записи произведенія, т. е. въ записи 63 342 отдѣляютъ, считая отъ правой руки къ лѣвой, 5 знаковъ, въ результатѣ чего получается число 0,63342.—Этотъ способъ производства умноженія десятичныхъ дробей основанъ на томъ, что отъ увеличенія каждаго изъ сомножителей въ нѣсколько разъ произведеніе увеличивается во столько разъ, сколько единицъ въ произведеніи введенныхъ при этомъ сомножителей (§ 55).

Другой способъ.

§ 123*. Другой способъ производства умноженія десятичной дроби на десятичную же дробь состоитъ въ слѣдующемъ: множителя подписываютъ подъ множимое такъ, чтобы цыфра цѣлыхъ единицъ множителя была подписана подъ послѣднею цыфрою множимаго; умноженіе начинаютъ съ наивысшей цыфры множителя; первую цыфру полученнаго произведенія подписываютъ подъ тою цыфрою множителя, на которую производится умноженіе; слѣдующія цыфры произведенія пишутся отъ правой руки къ лѣвой;

точно такъ же поступаютъ со слѣдующими цыфрами множителя; если записи ведены аккуратно, то въ каждомъ частномъ произведенiи запятая должна быть поставлена въ одномъ вертикальномъ столбцѣ съ запятою множимаго; затѣмъ всѣ полученныя частныя произведенiя складываются сообразно съ тѣмъ, какъ они записаны. Расположенiе вычисленiй можетъ имѣть одну изъ двухъ формъ:

$$\begin{array}{l}
\text{а) } 127{,}618 \times 56{,}23 = 7125{,}96014 \\
\hline
\qquad\quad \times 56{,}23 \\
\hline
6330{,}90 \\
\;\;765{,}708 \\
\;\;\;\;25{,}5236 \\
\;\;\;\;\;\;3{,}82854 \\
\hline
7125{,}96014
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{б) } 127{,}618 \times 56{,}23 = 7125{,}96014 \\
\hline
\qquad\quad \times 56{,}23 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
6330 & 90 \\
765 & 708 \\
25 & 5236 \\
3 & 82854 \\
\hline
7125 & 96014
\end{array}$$

Основанъ этотъ способъ производства умноженiя на томъ, что отъ умноженiя какихъ угодно единицъ множимаго на простыя единицы получаются такiя же единицы, какiя мы помножали; отъ умноженiя какихъ угодно единицъ множимаго на десятки получаются десятки такихъ единицъ, какiя мы умножали, и т. д., а отъ умноженiя на десятыя, сотыя, тысячныя и т. д. доли получаются десятыя, сотыя, тысячныя и т. д. доли тѣхъ единицъ, какiя мы помножали. При второмъ способѣ расположенiи вычисленiя запятыя въ частныхъ произведенiяхъ замѣнены общею вертикальною чертою, проведенiе которой подъ запятою множимаго не такъ развлекаетъ при выполненiи вычисленiя, какъ простановка въ каждомъ произведенiи запятой въ надлежащемъ мѣстѣ.

Преимущества послѣдняго способа.

Замѣчанiе. Этотъ способъ производства умноженiя десятичнаго числа на десятичное же представляетъ слѣдующiя преимущества: 1) онъ сразу даетъ, хотя и приблизительно, наивысшую цыфру произведенiя, которая иногда представляетъ наибольшiй интересъ; 2) при этомъ способѣ гораздо удобнѣе приблизительное вычисленiе, такъ какъ мы сразу видимъ какiе десятичные знаки для насъ уже не важны; 3) этотъ способъ производства умноженiя сразу приводитъ къ цѣли.

Дѣленіе десятичныхъ дробей.

§ 124. При дѣленіи десятичныхъ дробей слѣдуетъ различать два случая: 1) когда дѣлитель есть цѣлое число, и 2) когда онъ есть число дробное или смѣшанное.

1) Если дѣлитель есть число цѣлое, то опредѣленіе цыфръ частнаго производится точно такъ же, какъ опредѣленіе цыфръ частнаго въ случаѣ дѣленія цѣлыхъ чиселъ, т. е. сначала опредѣляется цыфра наивысшаго разряда частнаго, потомъ слѣдующая и т. д. до послѣдней цыфры дѣлимаго включительно. Разница между дѣленіемъ цѣлаго числа и дѣленіемъ десятичной дроби на цѣлое число заключается только въ томъ, что если въ послѣднемъ случаѣ получается остатокъ, то его обращаютъ въ единицы ближайшаго разряда, умноживъ его на десять, и опредѣляютъ еще одну цыфру частнаго, съ новымъ остаткомъ (если таковой получился) поступаютъ точно такъ же, и т. д.

```
4532,755 464 | 18              0,649 548 | 36
93           | 251,819 748      64       | 0,018 043
 32                             289
 147                              154
   35                             108
   175                              0
    134
      86
      144
        0
```

```
0,72 | 25          0,173 | 18
 72  | 0,0268       173  | 1,009 6111.....
 220                110
  200                20
   0                 20
```

(Въ этомъ случаѣ цыфра 1, очевидно, должна повторяться безчисленное множество разъ. Это обозначено многоточіемъ).

1) Если дѣлитель есть число дробное или смѣшанное, то для раздѣленія даннаго дѣлимаго на даннаго дѣлителя въ обоихъ этихъ числахъ переносятъ запятую на столько знаковъ, сколько десятичныхъ знаковъ содержится въ дѣлителѣ, съ тѣмъ чтобы послѣ этого поступить по правилу, изложенному выше. Полученное частное и будетъ искомое, такъ какъ, отъ перенесенія запятой въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ на одно и то же число знаковъ, дѣлимое и дѣлитель увеличились въ одно и то же число разъ, отъ чего частное не измѣнится; что же касается остатка, то, хотя онъ отъ увеличенія дѣлимаго и дѣлителя въ одно и то же число разъ увеличивается во столько же разъ, но такое увеличеніе не вліяетъ результатъ, ибо частное при этомъ выражается въ видѣ дроби.

$0{,}6472 : 0{,}04 = 16{,}18$; $0{,}471 : 0{,}28 = 1{,}682142857\ldots\ldots$

$$\begin{array}{r|l} 64{,}72 & 4 \\ \cline{2-2} 7 & 16{,}18 \\ 32 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 47{,}1 & 28 \\ \cline{2-2} 191 & 1{,}682142857\ldots \\ 230 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 120 & \\ 80 & \\ 240 & \\ 160 & \\ 200 & \\ 40 & \end{array}$$

(Остатокъ 40 былъ уже разъ и повлекъ за собою рядъ остатковъ: 12, 8, 24, 16 и 20, а равно рядъ цыфръ частнаго 1, 4, 2, 8, 5 и 7; эти цыфры, очевидно, должны повторяться безчисленное множество разъ. Это обозначено многоточіемъ).

Изъ примѣровъ мы видимъ, что частное не всегда можетъ быть точно выражено въ видѣ десятичной дроби, ибо взять безчисленное множество цыфръ въ частномъ на самомъ дѣлѣ невозможно. Въ этомъ случаѣ, остановившись на нѣкоторой цыфрѣ частнаго, отбрасываютъ всѣ слѣдующія за нею вправо, и полученное частное считаютъ *приблизительнымъ* частнымъ. Такъ, въ послѣднемъ примѣрѣ за приблизительныя частныя могутъ быть приняты слѣдующія десятичныя дроби: 1,6; 1,68; 1,682; 1,6821, и т. д.

Обращеніе обыкн. дробей въ десятичныя.

§ 125. Не только то частное, которое происходитъ отъ раздѣленія десятичной дроби на цѣлое число или на десятичную дробь, но и всякое нецѣлое частное можно постараться выразить въ видѣ десятичной дроби (правильной десятичной дроби, или же смѣшаннаго числа). Если цѣлое число дѣлится на другое безъ остатка, то частное выражается въ видѣ цѣлаго же числа; если же при дѣленіи цѣлаго числа на другое получается остатокъ, то, обративъ этотъ остатокъ въ десятыя доли, раздѣляютъ полученное на даннаго дѣлителя, отъ чего въ частномъ получатся десятыя доли; точно такъ же новый остатокъ, выраженный въ десятыхъ доляхъ, обращаютъ въ сотыя, и т. д. Если данная обыкновенная дробь меньше единицы, то число цѣлыхъ въ частномъ равно нулю; число десятыхъ частнаго опредѣляется послѣ обращенія числителя въ десятыя доли, и т. д.

Всякую обыкновенную, правильную или неправильную, дробь, поэтому, можно выразить въ десятичныхъ доляхъ, раздѣливъ числителя на знаменателя по вышеуказанному правилу, ибо всякая дробь можетъ быть разсматриваема какъ частное, происходящее отъ раздѣленія числа, равнаго числителю ея, на число, равное ея знаменателю.

Преобразованіе обыкновенной дроби въ равную ей десятичную называется *обращеніемъ* обыкновенной дроби въ десятичную.

При обращеніи, напр., дробей: $\frac{11}{16}$, $\frac{17}{40}$, $\frac{2}{13}$, въ десятичныя, вычисленіе можетъ быть расположено слѣдующимъ образомъ:

```
 11 | 16         17 | 40       2 | 13
110 |0,625      170 |0,425    20 |0,153846 153846....
—96            —160            70
  40             100            50
 —32             —80            110
   80             200             60
  —80            —200              80
    0               0               20
                                     70
```

Понятіе о періодической десятичной дроби.

§ 126. Прежде обращенія данной правильной или неправильной дроби въ десятичную, слѣдуетъ, если возможно, сократить данную дробь для того, чтобы упростить такимъ образомъ вычисленія, которыя потребуются при обращеніи ея въ десятичную.

Изъ несократимыхъ дробей особенно замѣчательны тѣ, которыхъ знаменатели суть: 9, 99, 999, 9 999 и т. д., т. е. дроби, которыхъ знаменатель меньше единицы какого-либо разряда на одну единицу перваго разряда. Необходимо помнить, что

$\frac{1}{9}=0,1111....$, $\frac{1}{99}=0,010101....$, $\frac{1}{999}=0,001001001....$, и т. д.

причемъ многоточія въ этомъ случаѣ обозначаютъ, что послѣ послѣдней цыфры слѣдуетъ безконечный рядъ новыхъ цыфръ, повинующихся тому же закону. Законъ этотъ состоитъ въ слѣдующемъ: при обращеніи въ десятичную такой дроби, которой числитель равенъ единицѣ, а знаменатель меньше единицы какого-либо десятичнаго разряда на одну единицу перваго разряда, получается безконечная правильная десятичная дробь, въ которой послѣ запятой повторяется

	цыфра	1,	когда	знаменатель	равенъ	9-ти,
группа	цыфръ	01,	»	»	»	99-ти,
»	»	001,	»	»	»	999-ти,
»	»	0001,	»	»	»	9999-ти, и т. д.

Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно на самомъ дѣлѣ выполнить вычисленія, къ которымъ прибѣгаютъ при обращеніи обыкновенной дроби въ десятичную. — Безконечная десятичная дробь, въ которой одна и та же совокупность цыфръ повторяется въ одномъ и томъ же порядкѣ, называется *періодической*; самая же совокупность повторяющихся цыфръ называется *періодомъ*.

Такимъ образомъ результатъ обращенія дроби $\frac{1}{9}$ въ десятичную есть дробь періодическая, которой періодъ есть цыфра 1; результать обращенія дроби $\frac{1}{99}$ въ десятичную есть дробь періодическая, которой періодомъ является совокупность цыфръ: 01; результатъ обращенія дроби $\frac{1}{999}$ въ десятичную есть дробь періодическая, которой періодомъ является совокупность цыфръ: 001. Говоря иначе, при обращеніи дробей $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$ и т. д. въ десятичныя получаются дроби періодическія, у которыхъ число цыфръ въ періодѣ равно числу цыфръ знаменателя; если знаменатель однозначное число, то періодъ 1; если же въ знаменателѣ цыфръ больше одной, то послѣдняя цыфра періода 1, остальныя же—нули.

Періодическія дроби, получаемыя при обращеніи дробей: $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, и т. д. въ десятичныя, обозначаются на письмѣ или такъ: 0,11...., 0,0101...., 0,001001...., или: 0,(1), 0,(01), 0,(001), и т. д. Многоточія въ первомъ случаѣ обозначаютъ, что имѣемъ дѣло съ дробями безконечными, о періодѣ же судятъ въ этомъ случаѣ по очевидной повторяемости нѣкоторой группы цыфръ; при второмъ же способѣ обозначенія въ скобки заключается та совокупность цыфръ, которая составляетъ періодъ.

Конечныя десятичныя дроби съ повторяющимися цифрамъ.

Замѣчаніе 1-ое. Должно помнить, что если въ десятичной дроби какая-нибудь совокупность цыфръ повторяется *опредѣленное конечное* количество разъ, то эта десятичная дробь не есть періодическая, а представляетъ собою нѣкоторую *конечную* десятичную дробь. Такъ, напр., дроби 0,1111 и 0,001001001 представляютъ собою не двѣ періодическія дроби, а двѣ конечныя десятичныя дроби, изъ которыхъ первая равна $\frac{1111}{10000}$, а вторая равна $\frac{1001001}{1000000000}$.

Кромѣ того, должно помнить, что сколько бы десятичныхъ цыфръ періодической дроби 0,1111.... мы ни взяли, мы всегда въ результатѣ получимъ дробь меньшую, чѣмъ $\frac{1}{9}$, и вообще сколько бы знаковъ данной періодической дроби мы ни взяли, мы получимъ дробь, которая меньше, чѣмъ дробь, отъ обращенія которой въ десятичную произошла данная періодическая дробь. Такимъ образомъ, каждая изъ дробей: 0,1; 0,11; 0,111; 0,1111; 0,11111 и т. д. не есть дробь періодическая, и непремѣнно менѣе, чѣмъ $\frac{1}{9}$.

Безконечныя, но не періодическія дроби.

Замѣчаніе 2-ое. Понятно, что однѣ и тѣ же цыфры могутъ повторяться безчисленное множество разъ по нѣкоторому такому опредѣленному закону, что при этомъ дробь не будетъ періодическою, оставаясь все-таки безконечною; таковы, напр., дроби:

0,10100100010000100000....
0,12711271112711127....
0,2452455245552455555....
0,12345678910111213141516171819....

Кромѣ того, въ математикѣ извѣстно великое множество такихъ безконечныхъ десятичныхъ дробей, которыя, выражая отношеніе нѣкоторыхъ величинъ къ нѣкоторымъ опредѣленнымъ единицамъ, не представляютъ собою, однако же, дробей періодическихъ, и въ которыхъ законъ слѣдованія цыфръ совершенно неизвѣстенъ, хотя любое число этихъ цыфръ можетъ быть вполнѣ достовѣрно вычислено. Къ числу подобныхъ чиселъ принадлежитъ, напр., то число, которое выражаетъ, во сколько разъ длина окружности больше длины ея діаметра. Геометрія учитъ, что это отношеніе во всѣхъ кругахъ одинаково, что десятичныхъ знаковъ этого числа можно опредѣлить сколько угодно, но что нѣтъ такого конечнаго числа, которое выражало бы точно это отношеніе, и что оно не представляетъ собою ни періодической десятичной дроби, ни иной какой десятичной дроби, въ которой цыфры слѣдовали бы одна за другой согласно какому либо извѣстному закону. Это число, для краткости, обозначается греческою буквою π, и съ девятью десятичными знаками $\pi = 3{,}141\,592\,654$; остальные же десятичные знаки, которыхъ безчисленное множество и изъ которыхъ каждый можетъ быть опредѣленъ, при этомъ отброшены.

Возможность обращенія обыкнов. дроби въ конечную десятичную.

§ 127. Для того, чтобы обыкновенная несократимая дробь обратилась въ конечную десятичную, необходимо и достаточно, чтобы знаменатель разлагался на простыхъ множителей, изъ которыхъ каждый равенъ либо 2-мъ, либо 5-ти. Дѣйствительно: для того, чтобы данная обыкновенная дробь выразилась конечною десятичною дробью, *необходимо*, чтобы знаменатель ея былъ дѣлителемъ какой-либо единицы какого-либо разряда; но для того, чтобы онъ былъ дѣлителемъ этой единицы, въ немъ не должно быть никакихъ простыхъ множителей, кромѣ 2-хъ и 5-ти. Это условіе также и *достаточно*; ибо если знаменатель состоитъ изъ простыхъ множителей, въ числѣ которыхъ встрѣчаются только число 2 и число 5, то всегда можно найти число, отъ умноженія котораго на даннаго знаменателя получится въ произведеніи одна единица какого-либо разряда. Такъ, при обращеніи обыкновенныхъ дробей: $\frac{18}{125}$, $\frac{7}{40}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{111}{250}$, въ десятичныя получаются въ результатѣ дроби конечныя, такъ какъ $125 = 5 \times 5 \times 5$, $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$, $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$, а $250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$.

Такія же несократимыя обыкновенныя дроби, которыхъ знаменатели не содержатъ въ числѣ своихъ простыхъ множителей ни 2-хъ, ни 5-ти, или же содержатъ, кромѣ 2-хъ и 5-ти, еще какихъ-либо простыхъ множителей, не могутъ при обращеніи въ десятичныя дать въ результатѣ дроби конечныя. Дѣйствительно: при обращеніи подобной обыкновенной дроби всегда должны получаться остатки, и ни одинъ изъ этихъ остатковъ не можетъ быть равенъ нулю (ибо въ такомъ случаѣ получилось бы, что нѣкоторая единица высшаго разряда дѣлится на-цѣло на первоначальное число, не равное ни 2-мъ, ни 5-ти, чего быть не можетъ). Далѣе, легко убѣдиться, что при обращеніи несократимой обыкновенной дроби въ десятичную въ результатѣ должна получиться либо конечная десятичная, либо періодическая десятичная дробь. Дѣйствительно: если знаменатель несократимой дроби не содержитъ въ числѣ своихъ простыхъ множителей ни одного числа, не равнаго числамъ 2 и 5, то она обратится въ конечную десятичную; въ противномъ же случаѣ должно получиться безчисленное множество остатковъ, изъ которыхъ каждый, однако же, долженъ быть меньше знаменателя данной обыкновенной дроби; стало-быть, число *различныхъ* остатковъ ограничено, въ то время какъ *всѣхъ* остатковъ безчисленное множество. А потому, начиная съ извѣстнаго остатка, долженъ появиться остатокъ, уже бывшій ранѣе, а вмѣстѣ съ этимъ остаткомъ и слѣдовавшій за нимъ и т. д.; такимъ образомъ получится въ частномъ нѣкоторая группа уже бывшихъ ранѣе цыфръ, т. е. получится нѣкоторый періодъ. Число цыфръ періода должно быть меньше числа единицъ знаменателя данной обыкновенной дроби, такъ какъ число различныхъ остатковъ должно быть меньше знаменателя. — При обращеніи дробей $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ въ десятичныя получаются слѣдующіе результаты:

$\frac{1}{3} = 0{,}333....$; $\frac{1}{6} = 0{,}1666....$; $\frac{1}{7} = 0{,}1428714287....$; $\frac{1}{11} = 0{,}0909....$

§ 128. Среди выше разсмотрѣнныхъ дробей дробь $\frac{1}{6}$ отличается отъ остальныхъ тѣмъ, что ея періодъ начинается не тотчасъ послѣ запятой, а съ цыфры сотыхъ. Къ подобному же результату приведетъ обращеніе дробей $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{55}$ и безчисленнаго множества другихъ въ десятичныя. Можетъ случиться, чтобы періодъ начался съ цыфры тысячныхъ, съ цыфры десяти-тысячныхъ, и т. д. Таковы, напр., дроби $\frac{1}{48}$, $\frac{1}{275}$ и безчисленное множество другихъ. Поэтому періодическія дроби различаютъ двухъ родовъ: 1) такія, которыхъ періодъ начинается цыфрою десятыхъ долей, и 2) такія, которыхъ періодъ отдѣленъ отъ цыфры цѣлыхъ однимъ или нѣсколькими десятичными знаками. Періодическія дроби послѣдняго рода называются *смѣшанными*, въ отличіе отъ дробей, періодъ которыхъ начинается цыфрою десятыхъ долей и которыя называются *простыми* (въ нѣкоторыхъ руководствахъ *чистыми*) періодическими дробями. Такъ, дроби 0,333...., 0,424242...., 0,167167.... суть простыя періодическія, а дроби: 0,2666...., 0,27636363....—смѣшанныя періодическія дроби.

Простыя и смѣшанныя період. дес. дроби.

Случаи, когда получается простая и когда смѣшанная період.дес.дробь.

Замѣчаніе. Полезно запомнить, что простыя періодическія дроби получаются при обращеніи въ десятичныя такихъ обыкновенныхъ несократимыхъ дробей, которыхъ знаменатель не содержитъ въ числѣ своихъ простыхъ множителей ни 2-хъ, ни 5-ти. Смѣшанная же періодическая дробь получается только въ такомъ случаѣ, когда знаменатель данной обыкновенной несократимой дроби въ числѣ своихъ первоначальныхъ множителей содержитъ, кромѣ 2-хъ и 5-ти, еще какія-либо первоначальныя числа. Достойно при этомъ вниманія, что число цыфръ, отдѣляющихъ въ смѣшанной періодической дроби цыфру цѣлыхъ отъ первой цыфры періода, равно числу, выражающему—сколько разъ входитъ простымъ множителемъ въ знаменателя обыкновенной дроби, обращаемой въ десятичную, число 2 или 5, — смотря по тому, которое изъ этихъ послѣднихъ чиселъ входитъ въ этого знаменателя множителемъ большее число разъ. Такъ, напр., при обращеніи дроби $\frac{7}{60}$ въ десятичную, первая цыфра періода отдѣляется отъ запятой двумя цыфрами, такъ какъ $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$; при обращеніи же дроби $\frac{1}{750}$ въ десятичную первая цыфра періода отдѣляется отъ цыфры цѣлыхъ тремя цыфрами, такъ какъ

$$750 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

Доказательство этихъ предложеній отнесено въ отдѣлъ «Дополнительныхъ Статей».

Обращеніе пер. дес. дробей въ обыкновенныя.

§ 129. *Обратить періодическую десятичную дробь въ обыкновенную* значитъ найти ту обыкновенную дробь, отъ обращенія которой въ десятичную происходитъ данная періодическая дробь и которую условимся, по отношенію къ данной періодической дроби, называть ея *производящей дробью.*

При обращеніи простыхъ періодическихъ десятичныхъ дробей въ обыкновенныя соблюдается слѣдующее правило: если періодъ данной періодической дроби состоитъ изъ одной цыфры, то производящая дробь имѣетъ числителемъ число, обозначаемое періодомъ, а знаменателемъ—число 9; если же періодъ состоитъ изъ двухъ цыфръ, то производящая дробь имѣетъ числителемъ число, обозначаемое періодомъ, а знаменателемъ—число 99, и т. д. Иначе говоря: при обращеніи простой періодической дроби въ обыкновенную, составляютъ дробь, которой числитель обозначается періодомъ, а знаменатель — столько разъ повторенною цыфрою 9, сколько цыфръ въ періодѣ. Такъ,

производящая	періодической	дроби	0,22....	равна	$\frac{2}{9}$,
»	»	»	0,77....	»	$\frac{7}{9}$,
»	»	»	1,0202....	»	$\frac{2}{99}$,

производящая періодической дроби 0,0707.... равна $\frac{7}{99}$,
» » » 0,2727.... » $\frac{27}{99}$,
» » » 0,008 008.... » $\frac{8}{999}$,
» » » 0,034 034... » $\frac{34}{999}$,
» » » 0,281 281.... » $\frac{281}{999}$,

и т. д. Дѣйствительно, такъ какъ
производящая періодической дроби 0,1111.... равна $\frac{1}{9}$,
то очевидно, что
производящая періодической дроби 0,222.... равна $\frac{2}{9}$,
» » » 0,333.... » $\frac{3}{9}$,
» » » 0,444.... » $\frac{4}{9}$,

и т. д., что̀ легко также провѣрить и вычисленіемъ; такъ какъ, далѣе,
производящая періодической дроби 0,01 01 01.... равна $\frac{1}{99}$,
то очевидно, что
производящая періодической дроби 0,02 02 02.... равна $\frac{2}{99}$,
» » » 0,03 03 03.... » $\frac{3}{99}$,
» » » 0,09 09 09.... » $\frac{9}{99}$,
» » » 0,10 10 10.... » $\frac{10}{99}$,
» » » 0,12 12 12.... » $\frac{12}{99}$,

и т. д., что̀ тоже легко можетъ быть провѣрено вычисленіемъ; столь же легко можетъ быть провѣрено, что
производящая періодической дроби 0,001 001.... равна $\frac{1}{999}$,
» » » 0,002 002.... » $\frac{2}{999}$,
» » » 0,003 003.... » $\frac{3}{999}$,
» » » 0,009 009.... » $\frac{9}{999}$,
» » » 0,010 010.... » $\frac{10}{999}$,
» » » 0,011 011.... » $\frac{11}{999}$,
» » » 0,099 099.... » $\frac{99}{999}$,
» » » 0,100 100.... » $\frac{100}{999}$,
» » » 0,101 101.... » $\frac{101}{999}$,
» » » 0,172 172.... » $\frac{172}{999}$.

Для обращенія смѣшанной періодической дроби въ обыкновенную можно, предварительно увеличивъ данную дробь во столько разъ, сколько это необходимо для того, чтобы послѣ запятой получилась простая періодическая дробь, обратить полученную въ обыкновенную дробь по правилу, данному выше; полученный же результатъ (будетъ ли онъ числомъ смѣшаннымъ или правильною дробью — все равно) надо, затѣмъ, уменьшить во столько разъ, во сколько разъ увеличена данная смѣшанная періодическая дробь. Такъ, пусть даны смѣшанныя періодическія дроби:

0,00 7777...., 0,6 348 348 348.... и 5,75 222....;

увеличивъ первую изъ нихъ въ 100 разъ, вторую въ 10 разъ и третью — въ 100 разъ, получимъ дроби:

0,7777...., которой производящая равна $\frac{7}{9}$,
6,348 348...., » » » $6\frac{348}{999}$,
и 575,222...., » » » $575\frac{2}{9}$;

полученныя нами такимъ образомъ дробное и смѣшанныя числа больше искомыхъ нами чиселъ: первое — въ 100 разъ, второе — въ 10 разъ, и третье — тоже въ 100 разъ; поэтому надо каждый изъ полученныхъ такимъ образомъ результатовъ уменьшить въ соотвѣтствующее число разъ. Такимъ образомъ получимъ, что

производящая періодич. дроби 0,00 777.... равна $\frac{7}{9}$: 100,
» » » 0,6 348 348.... » $6\frac{348}{999}$: 10,
» » » 0,75 222.... » $575\frac{2}{9}$: 100.

Произведя указанныя дѣйствія, получимъ, что

производящая періодич. дроби 0,00 777.... равна $\frac{7}{900}$,
» » » 0,6 348 348.... » $\frac{6342}{9990}$,
» » » 0,75 22.... » $5\frac{677}{900}$.

Правило обращенія смѣш. період. дроби въ обыкновенную.

§ 130. Полезно также запомнить слѣдующее правило обращенія смѣшанныхъ періодическихъ дробей въ обыкновенныя: перенеся запятую до второго періода и вычтя изъ полученнаго такимъ образомъ цѣлаго числа число, обозначаемое цыфрами, стоящими до періода, получимъ числителя искомой обыкновенной дроби; знаменатель же ея равенъ числу, котораго высшіе разряды обозначаются столько разъ повторенною цыфрою 9, сколько цыфръ въ періодѣ, а низшіе столько разъ повторенною цыфрою нуль, сколькими цыфрами запятая отдѣляется отъ періода. Убѣдиться въ вѣрности этого правила можно слѣдующимъ образомъ: прежде всего мы увеличиваемъ смѣшанную періодическую дробь во столько разъ, во сколько разъ необходимо ее увеличить для того, чтобы получить чистую періодическую дробь; этимъ легко объясняются нули и число ихъ въ знаменателѣ полученной нами производящей дроби; если полученная послѣ этого простая періодическая дробь будетъ правильною, то правило, очевидно, будетъ справедливо; если же послѣ этого получится смѣшанное число, то цѣлую часть придется помножить либо на 9, либо на 99, на 999, и т. п., а къ полученному произведенію прибавить число, равное періоду; при этомъ цѣлое число, умножаемое на 9, 99, 999 и т. д., обозначается цыфрами, стоящими до перваго періода; можно, умноживъ его вмѣсто 9 — на 10, вмѣсто 99 — на 100 и т. д., и прибавивъ къ полученному число, выражаемое періодомъ, отнять число, обозначаемое цыфрами до періода: въ результатѣ получится одно и то же.

Примѣчаніе 1-е. Производящая данной періодической дроби считается равною этой послѣдней; поэтому при вычисленіяхъ надъ періодическими дробями послѣднія замѣняются ихъ производящими.

Примѣчаніе 2-е. Всякая простая и смѣшанная періодическая дробь можетъ быть разсматриваема какъ дробь слѣшанная, при чемъ за цыфры, предшествующія періоду, можно принять любую совокупность цыфръ, слѣдующихъ за запятою, лишь бы слѣдующія за ними цыфры повторялись періодически. Это не вліяетъ на величину производящей дроби, какъ въ томъ легко убѣдиться вычисленіемъ, что̀ предоставляется учащемуся.

Примѣчаніе 3-е. Изъ всѣхъ періодическихъ дробей одна, а именно 0,99999...., не имѣетъ производящей, ибо не существуетъ такой обыкновеннной дроби, отъ обращенія которой получается эта періодическая дробь. Но, для большей общности, принято считать эту періодическую дробь происходящею отъ обращенія одной единицы въ десятичную дробь, такъ какъ это не приводитъ ни къ какимъ противорѣчіямъ.

Примѣчаніе 4-ое. Сообразно съ изложеннымъ въ примѣчаніи 3-мъ и съ правиломъ обращенія смѣшанныхъ періодическихъ десятичныхъ дробей въ обыкновенныя, дроби послѣдняго рода, періодъ которыхъ есть 9, обращаются въ конечныя десятичныя дроби. Такъ:

$$0,\mathit{2}999... = 0,\mathit{3};\quad 0,\mathit{174}999... = 0,\mathit{175},\ \text{и т. д.}$$

§ 131. Если дано десятичное число (цѣлое, дробное или смѣшанное), то *приближенными десятичными значеніями* этого числа называются тѣ числа, которыя получаются послѣ замѣны въ его обозначеніи всѣхъ цыфръ, стоящихъ вправо отъ нѣкоторой цыфры его, нулями. Такъ, напр., 27 000, 27 600, 27 640 суть приближенныя значенія числа 27 642; равнымъ образомъ дроби: 0,7; 0,72; 0,724—суть приближенныя значенія дроби: 0,7243. Приближенныя значенія дес. чиселъ.

§ 132*. Распространивъ смыслъ *приближенныхъ десятичныхъ значеній* на случай періодической дроби, получимъ, что конечныя десятичныя дроби: 0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; и т. д., будутъ конечными приближенными значеніями періодической дроби 0,33333333...., которой производящая равна $\frac{3}{9}$, т. е. $\frac{1}{3}$. Легко убѣдиться, что разность между приближенными десятичными значеніями данной періодической дроби и ея производящею уменьшается съ возрастаніемъ числа цыфръ приближеннаго десятичнаго значенія, и что можно взять приближенное десятичное значеніе со столькими цыфрами, чтобы разность между производящею и даннымъ приближен- Приближенныя значенія періодической дроби.

нымъ десятичнымъ значеніемъ періодической дроби была менѣе любой напередъ заданной, сколь угодно малой, доли единицы. Дѣйствительно: пусть дана періодическая десятичная дробь 0,33333.... и пусть знакъ $<$ замѣняетъ слово «меньше» (при этомъ знакъ этотъ своимъ отверстіемъ всегда обращается къ большему числу, а вершиною—къ меньшему). Легко убѣдиться, что

$$\begin{array}{lll} 0{,}3 < \frac{1}{3}, & \text{причемъ } \frac{1}{3}-0{,}3 & = \frac{1}{30}, \\ 0{,}33 < \frac{1}{3}, & \text{»} \quad \frac{1}{3}-0{,}33 & = \frac{1}{300}, \\ 0{,}333 < \frac{1}{3}, & \text{»} \quad \frac{1}{3}-0{,}333 & = \frac{1}{3000}, \\ 0{,}3333 < \frac{1}{3}, & \text{»} \quad \frac{1}{3}-0{,}3333 & = \frac{1}{30000}, \\ 0{,}33333 < \frac{1}{3}, & \text{»} \quad \frac{1}{3}-0{,}33333 & = \frac{1}{300000}, \text{ и т. д.,} \end{array}$$

т. е., что разность между производящею и послѣдовательными приближенными десятичными значеніями данной періодической дроби уменьшается и что притомъ можно взять столько цыфръ для составленія приближеннаго десятичнаго значенія данной періодической дроби чтобы разность между производящею этой періодической дроби и взятымъ нами приближеннымъ ея значеніемъ была менѣе нѣкоторой, напередъ заданной, сколь угодно малой доли единицы.

Вычисленія надъ дробями обыкновенными и десятичными.

§ 133. Дабы избѣгнуть вычисленій надъ приближенными величинами, обращаютъ всѣ данныя для вычисленія дроби въ обыкновенныя, если въ числѣ ихъ есть дроби, не обращающіяся въ конечныя десятичныя; въ противномъ случаѣ всѣ обыкновенныя дроби обращаютъ въ десятичныя, ибо вычисленія надъ десятичными дробями удобнѣе; такъ, напр., вычисленіе:

$$\left(\frac{2}{3}+0{,}7\right)+2{,}5$$

слѣдуетъ сдѣлать, обративъ всѣ дроби въ обыкновенныя; вычисленіе же:

$$\left(\frac{5}{16}+0{,}757\right)\times 2\frac{1}{2}$$

удобнѣе выполнить обративъ всѣ дроби въ десятичныя.

Десятичныя именованныя дроби, выраженныя въ единицахъ метр. системы.

§ 134*. Дѣйствія надъ именованными десятичными дробями, выраженными въ единицахъ метрической системы мѣръ, а равно и преобразованія такихъ именованныхъ чиселъ (раздробленіе и превращеніе) представляютъ значительныя удобства и сокращенія въ сравненіи съ дѣйствіями и преобразованіями именованныхъ обыкновенныхъ дробей.

Раздробленіе. Пусть требуется раздробить составное имен. число 6 килом. 4 м. и 5,786 дсм. въ миллиметры. Легко видѣть, что

6 килом. = 6000 м., а 4 метра = 40 дсм.

Поэтому предложенная намъ величина равна 60045,786 дсм. или 6004578,6 миллим.

Превращеніе. Пусть требуется превратить 117,56 миллиметра въ метры. Очевидно, что

117,56 мм. = 11,756 см. = 1,1756 дсм. = 0,11756 м.

Очевидно, что какъ раздробленіе, такъ и превращеніе сводятся въ случаѣ именованныхъ чиселъ, выраженныхъ въ единицахъ метрической системы, къ надлежащему перенесенію запятой въ нѣкоторомъ десятичномъ числѣ.—Что касается *четырехъ дѣйствій* надъ составными именованными числами, то достаточно выразить данныя числа въ единицахъ одинаковаго наименованія для того, чтобы сложеніе и вычитаніе могло быть сдѣлано по правиламъ производства этихъ дѣйствій надъ цѣлыми числами или надъ десятичными дробями; что же касается умноженія именованной дроби на отвлеченную и обоихъ случаевъ дѣленія, то и эти дѣйствія ничѣмъ существеннымъ не отличаются отъ дѣйствій надъ цѣлыми числами и надъ десятичными дробями.

Глава VII.

О кратныхъ отношеніяхъ и пропорціяхъ.

§ 135. Ариѳметическое выраженіе, требующее отысканія кратнаго отношенія двухъ чиселъ, и само называется *геометрическимъ*, или *кратнымъ отношеніемъ*, или же просто *отношеніемъ*. Такъ, напр., выраженія 15 : 3; $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$; 1 : 0,25; 2,75 : $\frac{45}{91}$, и т. под. называются отношеніями, хотя этимъ именемъ называются также частныя, происходящія въ этихъ случаяхъ отъ раздѣленія даннаго дѣлимаго на даннаго дѣлителя. **Кратное отношеніе двухъ чиселъ.**

Дѣлимое въ этомъ случаѣ называется *предыдущимъ*, а дѣлитель—*послѣдующимъ членомъ* отношенія, частное же называется *знаменателемъ* отношенія. Оба члена и знаменатель кратнаго отношенія можно считать *элементами* этого отношенія.

Очевидно, что предыдущій членъ геометрическаго отношенія равенъ произведенію послѣдующаго на знаменателя отношенія, а послѣдующій — частному, происходящему отъ раздѣленія предыдущаго члена на знаменатель отношенія. На этомъ основано нахожденіе одного изъ элементовъ отношенія, если даны остальные два. Такъ напр., если буква x обозначаетъ такое число, что

$$x : 15 = \tfrac{3}{4},\text{ то } x = 15 \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{45}{4} = 11\tfrac{1}{4};$$

если же, напр.,

$$18 : x = \frac{5}{7}, \text{ то } x = 18 : \frac{5}{7} = \frac{18 \times 7}{5} = \frac{126}{5} = 25\frac{1}{5}. \text{ И. т. п.}$$

Ариѳметическое отношеніе.

Замѣчаніе. Геометрическимъ отношеніе $15 : 3$ называется въ отличіе отъ выраженія $15 - 3$, называемаго *ариѳметическимъ* отношеніемъ, при чемъ разность членовъ этого послѣдняго отношенія называется также просто *разностью отношенія.*

Кратная пропорція.

§ 136. Два равныя между собою кратныхъ отношенія составляютъ *геометрическую*, или *кратную, пропорцію*, или же просто *пропорцію.* Таковы, напр., равенства:

$$15 : 3 = 20 : 4;\ 8\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{3}{4} = 34 : 11, \text{ и т. п.}$$

Предыдущій членъ перваго отношенія и послѣдующій второго носятъ общее званіе *крайнихъ*, а послѣдующій членъ перваго и предыдущій второго — общее званіе *среднихъ членовъ* геометрической пропорціи. Такъ, въ пропорціи $8\frac{1}{2} : 2\frac{3}{4} = 34 : 11$ числа $8\frac{1}{2}$ и 11 суть крайніе, а числа $2\frac{3}{4}$ и 34 — средніе члены ея.

Ариѳметическая пропорція.

Замѣчаніе. Геометрическою пропорція $15 : 5 = 18 : 6$ называется въ отличіе отъ выраженія $15 - 5 = 20 - 15$, которое называется *ариѳметическою пропорціею.* Ариѳметическія отношенія и пропорціи не представляютъ для ариѳметики ничего важнаго.

Основное свойство кратной пропорціи.

§ 137. Основное свойство геометрической пропорціи заключается въ томъ, что произведеніе крайнихъ ея членовъ равно произведенію ея среднихъ членовъ. Такъ, пусть дана пропорція $8\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = 34 : 11$; очевидно, что

отношеніе $8\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = \frac{34}{11}$, а также отношеніе $34 : 11 = \frac{34}{11}$;

изъ перваго отношенія получаемъ, что

$$8\tfrac{1}{2} = 3\tfrac{3}{4} \times \tfrac{34}{11},$$

а изъ второго, что

$$11 = 34 : \tfrac{34}{11},$$

откуда, помноживъ $8\frac{1}{2}$ на 11, получимъ, что

$$8\tfrac{1}{2} \times 11 = (3\tfrac{3}{4} \times \tfrac{34}{11}) \times (34 : \tfrac{34}{11}) = 3\tfrac{3}{4} \times 34;$$

т. е. мы получили, что произведеніе крайнихъ членовъ данной пропорціи равно произведенію ея среднихъ членовъ. Тотъ же пріемъ можетъ быть примѣненъ ко всякой геометрической пропорціи. Такимъ образомъ убѣдимся, что во всякой геометрической пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ ея равно произведенію среднихъ ея членовъ.

Изъ вышеизложеннаго способа опредѣленія неизвѣстнаго члена по остальнымъ тремъ вытекаетъ вполнѣ очевидное правило: неизвѣстный крайній (средній) членъ геометрической пропорціи равенъ произведенію среднихъ (крайнихъ), раздѣленному на извѣстный крайній (средній).

Замѣчаніе 1-е. На этомъ свойствѣ геометрической пропорціи основанъ способъ отысканія одного изъ членовъ пропорціи, когда остальные извѣстны. Такъ, пусть $x : 3\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4} : 0{,}76$; отсюда имѣемъ: Отысканіе неизвѣстнаго члена пропорціи.

$$0{,}76 \times x = 3\tfrac{1}{2} \times 7\tfrac{3}{4}, \text{ откуда } x = (3\tfrac{1}{2} \times 7\tfrac{3}{4}) : 0{,}76 \text{ и т. д.;}$$

пусть (другой случай) $2 : y = 7 : 5$; отсюда $y \times 7 = 2 \times 5$,

откуда въ свою очередь $y = \frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$.

Замѣчаніе 2-е. Неизвѣстный членъ данной пропорціи, если остальные извѣстны, можно отыскать и иначе: по условію Другой способъ.

$$x : 3\tfrac{1}{2} = 7\tfrac{3}{4} : 0{,}76, \text{ откуда } x : 3\tfrac{1}{2} = 7{,}75 : 0{,}76 = \tfrac{775}{76};$$

$$\text{или} \quad x = 3\frac{1}{2} \times \frac{775}{76} = \frac{7 \times 775}{2 \times 76}, \text{ и т. д.}$$

Точно такъ же можно поступить, когда неизвѣстенъ одинъ изъ среднихъ членовъ пропорціи. Пусть, напр.,

$$7 : y = 8 : 11; \text{ отсюда } 7 : y = \tfrac{8}{11}, \text{ а } y = 7 : \tfrac{8}{11} = \tfrac{77}{8} = 9\tfrac{5}{8}.$$

§ 138. Всякая геометрическая пропорція, всѣ члены которой суть числа цѣлыя, свидѣтельствуетъ о равенствѣ двухъ дробей, которыхъ числители порознь равны предыдущимъ, а знаменатели—послѣдующимъ членамъ данной пропорціи. Такъ, если дана пропорція $5 : 8 = 15 : 24$, то отсюда слѣдуетъ, что $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$; дѣйствительно: по самому смыслу пропорціи отношеніе 5-ти къ 8-ми равно отношенію 15-ти къ 24-мъ, а эти отношенія (частныя) могутъ быть выражены въ видѣ дробей $\frac{5}{8}$ и $\frac{15}{24}$, которыя должны быть поэтому равны между собою. Пропорція и равенство двухъ дробей.

Обратно: если двѣ какія-либо дроби равны между собою, то ихъ равенство свидѣтельствуетъ о существованіи нѣкоторой геометрической пропорціи, которой предыдущіе члены равны числителямъ, а послѣдующіе — знаменателямъ данныхъ дробей. Такъ, напр., $\frac{15}{16} = \frac{45}{48}$, откуда мы получимъ пропорцію: $15 : 16 = 45 : 48$, ибо дробь $\frac{15}{16}$ есть знаменатель отношенія $15 : 16$, а дробь $\frac{45}{48}$ знаменатель отношенія $45 : 48$, каковыя отношенія поэтому должны быть равны между собою.

§ 139. Всякая геометрическая пропорція допускаетъ такія преобразованія, которыя не нарушаютъ равенства полученныхъ двухъ новыхъ отношеній ея. Преобразованія пропорціи.

Къ числу подобныхъ преобразованій принадлежатъ:

1) Перемѣщеніе среднихъ или крайнихъ членовъ ея; такъ,

$$15 : 3 = 18 : 3\tfrac{3}{5}, \text{ и } 15 : 18 = 3 : 3\tfrac{3}{5}, \text{ а } 3\tfrac{3}{5} : 3 = 18 : 15;$$

при этомъ не измѣняется ни произведеніе крайнихъ, ни произведеніе среднихъ членовъ, но измѣняется знаменатель пропорціи;

2) Перемѣщеніе перваго отношенія на мѣсто второго, а второго—на мѣсто перваго; такъ,

$$15 : 5 = 21 : 7, \text{ и } 21 : 7 = 15 : 5;$$

при этомъ не измѣняется ни произведеніе крайнихъ, ни произведеніе среднихъ, ни знаменатель пропорціи;

3) Одновременное увеличеніе одного изъ крайнихъ (или среднихъ) и уменьшеніе другого изъ крайнихъ (или среднихъ) въ одно и то же число разъ; такъ,

$$15 : 5 = 18 : 6, \text{ а } (15 \times 7) : 5 = 18 : \tfrac{6}{7} \text{ и } 15 : \tfrac{5}{8} = (18 \times 8) : 6;$$

при этомъ не измѣняется ни произведеніе крайнихъ, ни произведеніе среднихъ, но измѣняется знаменатель пропорціи;

4) Одновременное увеличеніе (или уменьшеніе) обоихъ предыдущихъ или обоихъ послѣдующихъ въ одно и то же число разъ; такъ,

$$15 : 5 = 18 : 6, \text{ и } 15 \times 7 : 5 = 18 \times 7 : 6, \text{ а } \tfrac{15}{8} : 5 = \tfrac{18}{8} : 6,$$

и т. п.; при этомъ измѣняется и произведеніе крайнихъ, и произведеніе среднихъ, и знаменатель пропорціи;

5) Одновременное увеличеніе (или уменьшеніе) обоихъ членовъ какого-либо отношенія въ одно и то же число разъ; такъ,

$$15 : 5 = 18 : 6, \text{ и } 15 \times 7 : 5 \times 7 = 18 : 6, \text{ а } \tfrac{15}{8} : \tfrac{5}{8} = 18 : 6, \text{ и т. п.};$$

при этомъ измѣняются произведеніе среднихъ и произведеніе крайнихъ членовъ, но не измѣняется знаменатель пропорціи;

6) Одновременное увеличеніе или уменьшеніе обоихъ членовъ одного отношенія въ нѣкоторое число разъ и увеличеніе или уменьшеніе членовъ другого отношенія въ то же или иное число разъ; такъ, $15 : 5 = 18 : 6$, и

$$15 \times 7 : 5 \times 7 = \tfrac{18}{8} : \tfrac{6}{8}, \text{ а } \tfrac{15}{9} : \tfrac{5}{9} = 18 \times 3 : 6 \times 3, \text{ и т. п.};$$

равнымъ образомъ:

$$15 \times 7 : 5 \times 7 = 18 \times 7 : 6 \times 7, \text{ а } \tfrac{15}{7} : \tfrac{5}{7} = \tfrac{18}{7} : \tfrac{6}{7}, \text{ и т. п.};$$

при этомъ вообще измѣняется произведеніе крайнихъ и произведеніе среднихъ, но не измѣняется знаменатель пропорціи;

7) Почленное перемноженіе нѣсколькихъ пропорцій; такъ, если даны пропорціи

$$15 : 5 = 18 : 6,$$
$$7 : 3 = 14 : 6,$$
$$2 : 9 = 6 : 27,$$

то $(15 \times 7 \times 2) : (5 \times 3 \times 9) = (18 \times 14 \times 6) : (6 \times 6 \times 27)$;
при этомъ и произведеніе крайнихъ, и произведеніе среднихъ, и знаменатель отношенія получаются иные, чѣмъ въ данныхъ пропорціяхъ;

и 8) Почленное раздѣленіе одной пропорціи на другую; такъ, если даны пропорціи $5 : 6 = 10 : 12$ и $7 : 11 = 2\frac{1}{2} : 3\frac{13}{14}$,

то $(5 : 7) : (6 : 11) = (10 : 2\frac{1}{2}) : (12 : 3\frac{13}{14})$, и т. п.

Изъ всѣхъ этихъ преобразованій наименѣе очевидна дозволительность послѣднихъ двухъ. Возьмемъ двѣ пропорціи

$$15 : 5 = 18 : 6$$

$$\text{и}\quad 7 : 3 = 14 : 6;$$

онѣ свидѣтельствуютъ о существованіи равенствъ:

$$\frac{15}{5} = \frac{18}{6} \text{ и } \frac{7}{3} = \frac{14}{6};$$

эти же равенства могутъ быть почленно перемножены, въ результатѣ чего получится равенство:

$$\frac{15 \times 7}{5 \times 3} = \frac{18 \times 14}{6 \times 6},$$

которое въ свою очередь свидѣтельствуетъ о существованіи слѣдующей пропорціи:

$$(15 \times 7) : (5 \times 3) = (18 \times 14) : (6 \times 6).$$

Подобный же пріемъ можетъ быть употребленъ для доказательства дозволительности почленнаго перемноженія бóльшаго числа геометрическихъ пропорцій, а равно для доказательства дозволительности почленнаго раздѣленія одной пропорціи на другую.

Примѣчаніе. Въ случаѣ, если нѣкоторые или всѣ члены пропорціи суть дроби, вышеприведенное доказательство, конечно, непримѣнимо; но легко убѣдиться на каждомъ данномъ примѣрѣ, что подобныя преобразованія дозволительны и въ томъ случаѣ, когда одинъ или болѣе членовъ суть числа дробныя, ибо при этомъ не нарушается равенство отношеній, полученныхъ при почленномъ перемноженіи или раздѣленіи пропорцій.

§ 140*. Изъ членовъ всякой геометрической пропорціи можно составить еще семь пропорцій съ тѣми же членами, взятыми только въ иномъ порядкѣ. — Дѣйствительно: если дана пропорція **Восемь пропорцій съ данными членами.**

$$8 : 4 = 6 : 3,$$

то, при тѣхъ же крайнихъ и тѣхъ же среднихъ членахъ можно образовать еще три пропорціи:

$$8 : 6 = 4 : 3,\ 3 : 4 = 6 : 8 \text{ и } 3 : 6 = 4 : 8;$$

если же сдѣлать въ данной пропорціи крайніе члены средними, а средніе — крайними, получимъ пропорцію

$$4 : 8 = 3 : 6,$$

изъ которой въ свою очередь можно образовать новыхъ три пропорціи:

$$4 : 3 = 8 : 6,\ 6 : 8 = 3 : 4 \text{ и } 6 : 3 = 8 : 4.$$

Стало-быть, всѣхъ пропорцій, члены которой порознь равны даннымъ четыремъ числамъ (8, 4, 6 и 3) можно образовать, считая и данную, восемь, а изъ данной образовано ихъ семь.

Пропорціи съ данными членами.

§ 141. Если дана пропорція, въ которой одинъ или болѣе членовъ суть числа дробныя, то, очевидно, дозволительно привести всѣ члены къ одному знаменателю: отъ этого не измѣнится ни величина, ни порядокъ членовъ, а потому не измѣнятся ни произведеніе крайнихъ, ни произведеніе среднихъ, ни знаменатель пропорціи. Послѣ того, какъ члены пропорціи приведены къ одному знаменателю, можно составить пропорцію изъ числителей этихъ дробей или, какъ говорятъ въ этихъ случаяхъ, можно отбросить знаменателей. Такое преобразованіе дозволительно на томъ основаніи, что при этомъ всѣ члены данной пропорціи увеличиваются въ одно и то же число разъ, отъ чего равенство отношеній, по предыдущему, не нарушается. Такъ, если дана пропорція

$$8\tfrac{1}{2} : 3\tfrac{1}{7} = 42\tfrac{1}{2} : 15\tfrac{5}{7},$$

то, обративъ смѣшанныя числа въ неправильныя дроби, получимъ, очевидно, тождественную съ данною пропорцію:

$$\tfrac{17}{2} : \tfrac{22}{7} = \tfrac{85}{2} : \tfrac{110}{7}; \text{ откуда } 17 : 22 = 85 : 110;$$

или же, приведя эти дроби къ одному знаменателю, получимъ тождественную съ данною пропорцію:

$$\tfrac{119}{14} : \tfrac{44}{14} = \tfrac{595}{14} : \tfrac{220}{14};$$

умноживъ всѣ ея члены на 14, получимъ новую пропорцію, въ которой всѣ члены суть числа цѣлыя, а именно

$$119 : 44 = 595 : 220,$$

въ которой знаменатель отношенія тотъ же, что въ данной.

Производныя пропорціи.

§ 142. Кромѣ изложенныхъ выше свойствъ пропорціи, особеннаго вниманія достойно слѣдующее свойство ея:

Отъ увеличенія (или уменьшенія) каждаго изъ предыдущихъ членовъ геометрической пропорціи на число, равное соотвѣтствующему послѣдующему этой пропорціи, равенство отношеній не нарушается, а знаменатель отношенія увеличивается (или уменьшается) на одну единицу.

Дѣйствительно, если дана пропорція $15 : 3 = 25 : 5$, то увеличеніе 15-ти на 3 равносильно увеличенію дѣлимаго на величину дѣлителя, а это, очевидно, увеличиваетъ величину частнаго на одну единицу; точно такое же увеличеніе частнаго является послѣдствіемъ увеличенія 25-ти на 5 единицъ во второмъ отношеніи. А такъ какъ частныя въ этихъ случаяхъ увеличились на одно и то же число, то получимъ, что непремѣнно

$$(15+3) : 3 = (25+5) : 5,$$

такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ пропорціею, а въ пропорціи дѣленіе предполагается полное, безъ остатка.

Точно такъ же выведемъ, что если дана пропорція

$$15 : 3 = 25 : 5, \text{ то } (15-3) : 3 = (25-5) : 5.$$

Эти свойства пропорціи выражаются чаще слѣдующимъ образомъ: если дана геометрическая пропорція, то сумма (разность) членовъ перваго отношенія относится къ своему послѣдующему, какъ сумма (разность) членовъ второго отношенія—къ своему послѣдующему. Пропорціи, полученныя изъ данной на основаніи этого свойства, называются *производными*.

Изъ полученныхъ выше двухъ пропорцій могутъ быть, съ помощью перестановки среднихъ членовъ, получены двѣ новыя, которыя свидѣтельствуютъ о томъ, что сумма (разность) членовъ перваго отношенія геометрической пропорціи относится къ суммѣ (разности) членовъ второго отношенія, какъ послѣдующій (или предыдущій) перваго отношенія къ послѣдующему (предыдущему) второго. Дѣйствительно: мы видѣли выше, что если дана кратная пропорція

$$15 : 3 = 25 : 5,$$

то

$$(15+3) : 3 = (25+5) : 5, \text{ а } (15-3) : 3 = (25-5) : 5;$$

перемѣстивъ въ этихъ пропорціяхъ средніе члены, получимъ:

$$(15+3) : (25+5) = 3 : 5,$$

$$(15-3) : (25-5) = 3 : 5;$$

но изъ основной пропорціи легко вывести, что

$$3 : 5 = 15 : 25;$$

стало-быть,

$$(15+3) : (25+5) = 3 : 5 = 15 : 25;$$

равнымъ образомъ и

$$(15-3) : (25-5) = 3 : 5 = 15 : 25.$$

Очевидно, что тѣ же разсужденія могутъ быть примѣнены ко всякой геометрической пропорціи.

На основаніи вышеизложеннаго и помощью подобныхъ же разсужденій, легко убѣдиться, что сумма (разность) предыдущихъ членовъ геометрической пропорціи относится къ суммѣ (разности) послѣдующихъ, какъ одинъ изъ предыдущихъ относится къ своему послѣдующему. Такъ, если дана пропорція $15 : 3 = 25 : 5$, то послѣ перестановки среднихъ членовъ получимъ:

$15 : 25 = 3 : 5$, откуда $(15+25) : (3+5) = 15 : 3 = 25 : 5$, и т. д.

Замѣчаніе. Если дано болѣе двухъ равныхъ между собою геометрическихъ отношеній, то такая совокупность равенствъ также

Многочленныя пропорціи.

называется геометрической пропорціей, но въ отличіе отъ четырехчленной ее можно называть, по числу ея членовъ, шестичленною, восьмичленною, и т. д., пропорціею. Такова, напр., пропорція $26 : 13 = 14 : 7 = 10 : 5 = 8 : 4 = 50 : 25$.

Изъ всѣхъ свойствъ подобной пропорціи особенно замѣчательно слѣдующее: сумма всѣхъ предыдущихъ членовъ пропорціи относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ одинъ изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему.—Для доказательства этого свойства данной пропорціи, составимъ рядъ равенствъ:

$$\left.\begin{array}{r} 26 : 13 = 2, \\ 14 : 7 = 2, \\ 10 : 5 = 2, \\ 8 : 4 = 2, \\ 50 : 25 = 2; \end{array}\right\} \text{ отсюда: } \left\{\begin{array}{r} 26 = 13 \times 2, \\ 14 = 7 \times 2. \\ 10 = 5 \times 2, \\ 8 = 4 \times 2, \\ 50 = 25 \times 2, \end{array}\right.$$

А отсюда получимъ, что

$$26 + 14 + 10 + 8 + 50 = (13 + 7 + 5 + 4 + 25) \times 2,$$

или

$$(26 + 14 + 10 + 8 + 50) : (13 + 7 + 5 + 4 + 25) = 2;$$

но

$$2 = 26 : 13 = 14 : 7 = 10 : 5 = 8 : 4 = 50 : 25.$$

Стало-быть,

$(26+14+10+8+50):(13+7+5+4+25)=26:13=14:7=$..и т.д.

Такимъ же точно образомъ это отношеніе суммы всѣхъ предыдущихъ къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ можетъ быть доказано во всякой пропорціи.—Это свойство пропорціи очень полезно при рѣшеніи задачъ на такъ называемое правило пропорціональнаго дѣленія, о которыхъ рѣчь ниже, въ § 152.

Сокращенные способы дѣленія на нѣк. числа.

§ 143*. Для производства сокращеннымъ способомъ дѣленія на нѣкоторыя числа (на 75, 175, 225, 375, 525, 675, 875 и 1125) весьма полезно усвоить себѣ слѣдующее свойство геометрической пропорціи: если предыдущій (или послѣдующій) членъ какого-либо отношенія какой-либо геометрической пропорціи увеличенъ на какую-либо долю этого члена, то, для сохраненія равенства отношеній, достаточно увеличить послѣдующій (предыдущій) членъ того же отношенія на такую же долю этого члена.—Дѣйствительно: пусть дана кратная пропорція: $24 : 12 = 20 : 10$; прибавивъ къ 24-мъ одну четверть 24-хъ, мы такимъ образомъ помножимъ предыдущій членъ на $1\frac{1}{4}$, а потому намъ достаточно помножить послѣдующій членъ того же отношенія (т. е. 12) тоже на $1\frac{1}{4}$, чтобы равенство отношеній не нарушилось; умноженіе же

12-ти на $1\frac{1}{4}$ равносильно прибавленію къ 12-ти одной четверти этого числа. Такимъ образомъ мы получили, что такъ какъ

$$24 : 12 = 20 : 10, \text{ то } (24 + \tfrac{24}{4}) : (12 + \tfrac{12}{4}) = 20 : 10;$$

точно такъ же убѣдимся, что

$$(24 + \tfrac{24}{6}) : (12 + \tfrac{12}{6}) = 20 : 10,$$
$$(24 + \tfrac{24}{8}) : (12 + \tfrac{12}{8}) = 20 : 10,$$
$$(24 + \tfrac{24}{12}) : (12 + \tfrac{12}{12}) = 20 \,.\, 10, \text{ и т. д.}$$

Помощью подобныхъ же разсужденій придемъ къ выводу также и слѣдующаго свойства геометрической пропорціи: если предыдущій (или послѣдующій) членъ какого-либо отношенія геометрической пропорціи уменьшенъ на какую-либо долю того же члена, то для сохраненія равенства достаточно уменьшить послѣдующій (предыдущій) членъ того же отношенія на такую же долю этого члена.—Такъ, напр., если дана пропорція

$$24 : 12 = 20 : 10, \text{ то } (24 - \tfrac{24}{8}) : (12 - \tfrac{12}{8}) = 20 : 10,$$
$$(24 - \tfrac{24}{6}) : (12 - \tfrac{12}{6}) = 20 : 10, \text{ и т. п.}$$

На этомъ основаны сокращенные способы производства дѣленія на 75, 175, 225, 375, 525, 675, 875 и мн. др. числа:

1) Пусть требуется раздѣлить 116 325 на 75. Очевидно, что

$$116\,325 : 75 = 116\,325 : 75;$$

прибавивъ къ послѣдующему члену второго отношенія 25 единицъ, т. е. одну треть 75-ти, мы должны прибавить къ предыдущему члену того же отношенія треть этого члена, т. е.

$$116\,325 : 75 = \left(116\,325 + \frac{116325}{3}\right) : 100 = (116\,325 + 38\,775) : 100,$$

откуда получимъ, что

$$116\,325 : 75 = 155\,100 : 100, \text{ и т. д.}$$

2) Пусть требуется раздѣлить 716 357 на 175. Разсуждая подобнымъ же образомъ, найдемъ, что

$$716\,357 : 175 = \left(716\,357 + \frac{716357}{7}\right) : 200, \text{ и т. д.}$$

3) Пусть требуется раздѣлить 716 579 на 225; такъ какъ число 25 составляетъ одну девятую 225-ти, то

$$716\,579 : 225 = \left(716\,579 - \frac{716579}{9}\right) : 200, \text{ и т. д.}$$

4) Пусть требуется раздѣлить 571 410 на 375; такъ какъ число 125 составляетъ одну треть 375-ти, то

$$571\,410 : 375 = \left(571\,410 + \frac{571410}{3}\right) : 500, \text{ и т. д.}$$

5) Пусть требуется раздѣлить 817 817 на 525; такъ какъ число 75 составляетъ одну седьмую 525-ти, то

$$817\,817 : 525 = \left(817\,817 + \frac{817817}{7}\right) : 600, \text{ и т. д.}$$

6) Пусть требуется раздѣлить 716 316 на 675; такъ какъ число 225 составляетъ одну треть 675-ти, то

$$716\,316 : 675 = \left(716\,316 + \frac{716316}{3}\right) : 900, \text{ и т. д.}$$

7) Пусть требуется раздѣлить 837 564 на 875; такъ какъ число 125 составляетъ одну седьмую долю 875-ти, то

$$837\,564 : 875 = \left(837\,564 + \frac{837564}{7}\right) : 1000, \text{ и т. д.}$$

8) Пусть требуется раздѣлить 964 125 на 1125; такъ какъ число 125 составляетъ одну девятую долю 1125-ти, то

$$964\,125 : 1125 = \left(964\,125 - \frac{964125}{9}\right) : 1000, \text{ и т. д. *)}$$

Глава VIII.

О тройныхъ правилахъ.

Пропорціональныя величины.

§ 144. Въ математикѣ различаютъ величины, зависящія другъ отъ друга, и величины, другъ отъ друга не зависящія. Къ числу зависящихъ одна отъ другой величинъ принадлежатъ, напр., количество товара и стоимость его, количество жидкости, вытекающей въ теченіе какого-либо промежутка времени изъ сосуда, и величина этого промежутка времени, степень освѣщенія и разстояніе освѣщаемой поверхности отъ источника свѣта, высота, съ которой камень падаетъ на землю, и количество времени, которое необходимо для того, чтобы онъ достигъ земли, и т. д.

Если двѣ зависящія одна отъ другой величины таковы, что кратное отношеніе любыхъ двухъ значеній одной изъ нихъ равно кратному отношенію соотвѣтствующихъ имъ значеній другой изъ нихъ, то такія величины называются *прямо-пропорціональными другъ другу*. Къ числу таковыхъ принадлежатъ объемъ прямоугольнаго ящика и измѣренія его, длина окружности круга и длина ея поперечника и мн. др.; кромѣ того, къ нимъ причисляются стоимость товара и количество его, пространство, пройденное кѣмъ-либо, и время, имъ на это употребленное, время, необходимое для совершенія нѣкоторой работы, и количество работы, и т. п. **). Величина дроби прямо пропорціональна величинѣ

*) См. «Методическій Сборникъ ариѳм. задачъ для среднихъ уч. зав.» Шохоръ-Троцкаго, №№ 2276—2300.

**) Когда рѣчь идетъ о драгоцѣнныхъ камняхъ, то стоимость ихъ не считается пропорціональною ихъ вѣсу, ибо драгоцѣнные камни оцѣниваются иначе.

его числителя; величина произведенія двухъ чиселъ — величинѣ каждаго изъ сомножителей его; величина полнаго частнаго прямо-пропорціональна величинѣ дѣлимаго.

Если двѣ зависящія одна отъ другой величины таковы, что кратное отношеніе любыхъ двухъ значеній одного изъ нихъ равно числу, обратному относительно кратнаго отношенія соотвѣтствующихъ имъ значеній другой изъ нихъ, то такія величины называются *обратно-пропорціональными другъ другу*. Къ числу таковыхъ принадлежатъ: длина и ширина прямоугольнаго ящика, если объемъ и глубина его должны быть извѣстной величины; скорость движенія и время, если тѣло, движущееся равномѣрно, должно пройти путь извѣстной длины; количество времени, необходимое для исполненія нѣкоторой работы, и количество рабочихъ, исполняющихъ ее; количество дней, въ теченіе которыхъ исполняется работа, и число часовъ, употребляемыхъ ежедневно на работу; длина и ширина прямоугольнаго участка поля, если этотъ участокъ долженъ быть извѣстной величины, и мн. др. Величина дроби обратно пропорціональна его знаменателю; величина одного сомножителя обратно пропорціональна величинѣ другого, если произведеніе ихъ сохраняетъ одно значеніе.

Двѣ пары значеній двухъ пропорц. величинъ и задачи на простое тройное правило.

§ 145. Пусть даны двѣ прямо-пропорціональныя величины и пусть извѣстны: числовое значеніе одной изъ нихъ и соотвѣтствующее ему значеніе другой, а также нѣкоторое другое значеніе первой величины и соотвѣтствующее ему значеніе другой. Изъ четырехъ чиселъ, выражающихъ сказанныя четыре значенія, можетъ быть составлена пропорція, въ которой члены перваго отношенія равны числовымъ значеніямъ одной величины, а члены второго отношенія равны соотвѣтственнымъ значеніямъ другой. Примѣръ: пусть даны двѣ величины: стоимость нѣкотораго товара и количество его; пусть, напр., 5 арш. сукна стôятъ 9 р. 60 к.; тогда 7 аршинъ того же сукна должны стôить, какъ въ томъ легко убѣдиться весьма простымъ вычисленіемъ, 13 р. 44 к. Числа 5, 7, 960 и 1344 представляютъ собою члены геометрической пропорціи: $5 : 7 = 960 : 1344$, гдѣ два числовыхъ значенія одной величины (количества сукна) и два значенія другой (стоимости этихъ количествъ) составляютъ пропорцію. Въ справедливости же этой пропорціи можно убѣдиться, принявъ во вниманіе, что знаменатель каждаго изъ составляющихъ ее отношеній равенъ одной и той же величинѣ (въ данномъ случаѣ $\frac{5}{7}$) или что произведеніе крайнихъ членовъ ея равно произведенію среднихъ ея членовъ, т. е. что въ данномъ случаѣ $5 \times 1344 = 9 \times 960$.

На этомъ свойствѣ прямо-пропорціональныхъ величинъ основано отысканіе значенія какой-либо величины, если извѣстно соотвѣтствующее ему значеніе другой величины, которая прямо-пропорціональна первой, и нѣкоторыя другія два соотвѣтствующія другъ другу значенія тѣхъ же двухъ величинъ. Пусть, напр., предложена задача: «$7\frac{1}{4}$ ф. мыла стоятъ 1 р. $8\frac{3}{4}$ к.; что̀ стоятъ $6\frac{1}{2}$ ф. такого же мыла?» Обозначимъ стоимость $6\frac{1}{2}$ ф. мыла въ копейкахъ буквою x, т. е. пусть x — число копеекъ, представляющихъ стоимость этого количества мыла. По предыдущему получимъ кратную пропорцію:

$$x : 108\tfrac{3}{4} = 6\tfrac{1}{2} : 7\tfrac{1}{4},$$

изъ которой легко опредѣлить число x на основаніи свойствъ геометрической пропорціи.

Пусть даны двѣ величины не прямо, а обратно-пропорціональныя одна другой. Если, кромѣ того, извѣстны числовое значеніе первой изъ нихъ и соотвѣтствующее ему числовое значеніе второй, а также нѣкоторое другое числовое значеніе первой и соотвѣтствующее этому послѣднему числовое значеніе второй, то изъ этихъ четырехъ чиселъ можно составить геометрическую пропорцію. При этомъ членами перваго отношенія будутъ по порядку: первое значеніе первой величины и второе значеніе той же величины, членами же второго отношенія — наоборотъ: второе значеніе второй величины и первое значеніе той же величины. Пусть, напр., предложена задача: «Работая по 14-ти часовъ въ день, можно нѣкоторую работу окончить въ теченіе 5 дней; въ теченіе сколькихъ дней можно окончить ту же работу, работая по 10 часовъ въ день?» Обозначивъ число дней, въ теченіе которыхъ можно окончить указанную работу, работая по 10 час. въ день, буквою x, по предыдущему получимъ пропорцію $x : 5 = 14 : 10$, изъ которой легко опредѣлимъ число x на основаніи свойствъ пропорціи.

Задачи на простое тройное правило и способъ приведенія къ единицѣ.

Замѣчаніе. Задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить неизвѣстное значеніе нѣкоторой величины, если извѣстны соотвѣтствующее ему значеніе другой величины, которая прямо или обратно пропорціональна первой, и какія-либо два соотвѣтствующія другъ другу значенія тѣхъ же двухъ величинъ, называются задачами на *простое тройное правило.* Задачи этого рода, какъ мы видѣли выше, могутъ быть разрѣшаемы съ помощью пропорцій. Но каждая изъ задачъ на простое тройное правило можетъ быть также разрѣшена и съ помощью болѣе простыхъ разсужденій, извѣстныхъ подъ именемъ *способа приведенія къ единицѣ.*

Для выясненія этого способа обратимся къ задачѣ, предложенной выше: «$7\frac{1}{4}$ фунта мыла стоятъ 1 р. $8\frac{3}{4}$ коп.; что стоятъ $6\frac{1}{2}$ ф. такого же мыла?»—Разсуждаемъ такъ: $7\frac{1}{4}$ или $\frac{29}{4}$ фунта мыла стоятъ $108\frac{3}{4}$ или $\frac{435}{4}$ коп. Стало-быть,

$$\frac{1}{4} \text{ фунта стòитъ } \frac{435}{4 \times 29} \text{ к.,}$$

$$\text{цѣлый фунтъ стòитъ } \frac{435 \times 4}{4 \times 29} \text{ к.;}$$

$$\frac{1}{2} \text{ фунта стòитъ } \frac{435 \times 4}{4 \times 29 \times 2} \text{ к.,}$$

$$\text{а } 6\frac{1}{2} \text{ или } \frac{13}{2} \text{ фунта стòитъ } \frac{435 \times 4 \times 13}{4 \times 29 \times 2} \text{ к.}$$

Отсюда легко получить, послѣ сокращенія и производства указанныхъ дѣйствій, стоимость въ копейкахъ 6-ти съ половиною фунтовъ мыла.—Возьмемъ другую задачу: «Работая по 14-ти часовъ въ день, можно нѣкоторую работу окончить въ теченіе 5-ти дней; въ теченіе сколькихъ дней можно окончить ту же работу, работая по 10-ти часовъ въ день?»—Разсуждаемъ такъ: работая по 14-ти часовъ въ день, можно нѣкоторую работу окончить въ теченіе 5-ти дней; но, работая по одному часу въ день, ту же работу можно окончить въ теченіе промежутка времени, содержащаго

$$5 \text{ д.} \times 14;$$

а работая по 10-ти часовъ въ день, ту же работу можно окончить въ промежутокъ времени, въ 10 разъ меньшій промежутка времени, въ теченіе котораго эту работу можно окончить, работая въ день по одному часу, и поэтому содержащій

$$\frac{5 \text{ дней} \times 14}{10}.$$

Отсюда легко получается число дней, въ теченіе которыхъ работа можетъ быть окончена при десятичасовой ежедневной рàботѣ.

§ 146. Задачи, въ которыхъ по одному значенію какой-либо величины, соотвѣтствующимъ ему значеніямъ величинъ, ей пропорціональныхъ, и ряду другихъ значеній этихъ послѣднихъ величинъ опредѣляютъ соотвѣтствующее этому послѣднему ряду значеніе первой величины, извѣстны подъ именемъ задачъ на *сложное тройное правило*. Пусть предложена задача: Сложное тройное правило.

«Партія землекоповъ въ 26 человѣкъ можетъ вырыть каналъ въ 45 саженей длины, 9 саженей ширины и 4 сажени глубины въ теченіе 40 дней, работая по 12 часовъ въ день. Какой длины каналъ могутъ вырыть 39 землекоповъ, если ширина канала должна быть 5 саженей, а глубина 9 саженей, работая въ теченіе 80 дней по 10 часовъ въ день?»

Прежде всего опредѣлимъ—какимъ изъ величинъ длина канала прямо-пропорціональна и какимъ обратно-пропорціональна: длина канала, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, очевидно, прямо-пропорціональна числу рабочихъ, числу дней, посвященныхъ работѣ и числу часовъ ежедневной работы, а обратно-пропорціональна: ширинѣ и глубинѣ канала. Составимъ строки:

45 саж.	длины	соотвѣтствуютъ:	26 з.,	40 д.,	12 ч.;	9 с. ш.	4 с. гл.
x_1	»	»	»	39 »	40 »	12 »	9 » »	4 » »
x_2	»	»	»	39 »	80 »	12 »	9 » »	4 » »
x_3	»	»	»	39 »	80 »	10 »	9 » »	4 » »
x_4	»	»	»	39 »	80 »	10 »	5 » »	4 » »
x	»	»	»	39 »	80 »	10 »	6 » »	9 » »

Изъ первой и второй, изъ второй и третьей, изъ третьей и четвертой, четвертой и пятой и, наконецъ, изъ пятой и шестой строкъ получимъ рядъ пропорцій:

$$
\begin{aligned}
45 : x_1 &= 26 : 39,\\
x_1 : x_2 &= 40 : 80,\\
x_2 : x_3 &= 12 : 10,\\
x_3 : x_4 &= 5 : 9,\\
x_4 : x &= 9 : 4;
\end{aligned}
$$

перемноживъ ихъ почленно, найдемъ:

$$\frac{45 \times x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4}{x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x} = \frac{26 \times 40 \times 12 \times 5 \times 9}{39 \times 80 \times 10 \times 9 \times 4},$$

откуда

$$\frac{45}{x} = \frac{26 \times 40 \times 12 \times 5 \times 9}{39 \times 80 \times 10 \times 9 \times 4}, \text{ а } x = \frac{45 \times \overset{\overset{1}{3}}{39} \times \overset{\overset{1}{2}}{80} \times \overset{2}{10} \times \overset{1}{9} \times \overset{1}{4}}{\underset{\underset{1}{2}}{26} \times \underset{1}{40} \times \underset{\underset{1}{3}}{12} \times \underset{1}{5} \times \underset{1}{9}} = 90.$$

Способъ приведенія къ единицѣ. *Замѣчаніе.* Задачи на сложное тройное правило могутъ быть разрѣшаемы также и при помощи пріема, извѣстнаго подъ названіемъ способа приведенія къ единицѣ. Для выясненія примѣненія этого пріема къ частнымъ случаямъ возьмемъ выше рѣшенную задачу: «Партія землекоповъ въ 26 человѣкъ можетъ вырыть каналъ въ 45 саженей длины, 9 саж. ширины и 4 сажени глубины въ теченіе 40 дней, работая по 12 часовъ въ день. Какой длины каналъ могутъ вырыть 39 землекоповъ, если ширина канала должна быть 5 саженей, а глубина 9 саженей, работая въ теченіе 80 дней по 10 часовъ въ день?» — Разсуждаемъ такъ: каналъ въ 45 саженей длины могутъ, при извѣстныхъ изъ задачи условіяхъ, вырыть 26 человѣкъ; при тѣхъ же условіяхъ одинъ человѣкъ выроетъ каналъ длиною въ

$$\frac{45}{26} \text{ саж.},$$

а 39 человѣкъ при тѣхъ же условіяхъ выроютъ каналъ длиною въ

$$\frac{45 \times 39}{26} \text{ саж.};$$

такой длины каналъ можетъ быть вырытъ въ теченіе 40 дней; въ теченіе же одного дня можетъ быть вырытъ каналъ длиною въ

$$\frac{45 \times 39}{26 \times 40} \text{ саж.},$$

а въ теченіе 8-ми дней можетъ быть вырытъ каналъ длиною въ

$$\frac{45 \times 39 \times 80}{40} \text{ саж.};$$

такой длины каналъ можетъ быть вырытъ при 12-ти-часовой ежедневной работѣ, а при часовой работѣ можетъ быть вырытъ каналъ, при тѣхъ же условіяхъ, длиною въ

$$\frac{45 \times 39 \times 80}{26 \times 40 \times 12} \text{ саж.};$$

такой длины каналъ можетъ быть вырытъ при часовой работѣ, а при десятичасовой ежедневной работѣ можетъ быть вырытъ каналъ длиною въ

$$\frac{45 \times 39 \times 80 \times 10}{26 \times 40 \times 12} \text{ саж.};$$

такой длины каналъ можетъ быть вырытъ, если ширина канала равна 9 саж.; если бы требовалось вырыть каналъ въ одну сажень шириною, то длина канала была бы, очевидно, въ 9 разъ больше, чѣмъ при длинѣ канала, равной 9-ти саж., т. е. была бы равна:

$$\frac{45 \times 39 \times 80 \times 10 \times 9}{26 \times 40 \times 12} \text{ саж.};$$

такой длины каналъ былъ бы вырытъ, если бы ширина была равна одной саж.; но ширина канала должна быть равна 5-ти саж., поэтому длина канала, очевидно, будетъ

$$\frac{45 \times 39 \times 80 \times 10 \times 9}{26 \times 40 \times 12 \times 5} \text{ саж.};$$

такой длины каналъ былъ бы вырытъ, если бы глубина должна была быть равна 4-мъ саж., а при глубинѣ въ одну сажень былъ бы вырытъ каналъ въ 4 раза длиннѣе, т. е. въ

$$\frac{45 \times 39 \times 80 \times 10 \times 9 \times 4}{26 \times 40 \times 12 \times 5} \text{ саж.};$$

такой длины каналъ былъ бы вырытъ, если бы глубина его должна была бы равняться одной сажени; но глубина канала на самомъ дѣлѣ должна быть равна 9 саж., а потому длина его, очевидно, будетъ въ 9 разъ меньше, т. е. равняется

$$\frac{45 \times 39 \times 80 \times 10 \times 9 \times 4}{26 \times 40 \times 12 \times 5 \times 9} \text{ саж.},$$

— результатъ, совершенно тождественный съ полученнымъ выше.

При рѣшеніи задачъ на сложное тройное правило съ помощью способа приведенія къ единицѣ, такимъ образомъ, должно исходить непремѣнно съ извѣстнаго значенія той величины, неизвѣстное значеніе которой подлежитъ отысканію, — вотъ единственное правило, котораго не должно никогда забывать; при этомъ необходимо, конечно, также всегда имѣть въ виду — о какихъ величинахъ идетъ въ данный моментъ рѣчь: о прямо-пропорціональныхъ ли величинахъ или же о величинахъ обратно-пропорціональныхъ. Очень полезно, послѣ того какъ записаны условія задачи, переписать ихъ такъ, чтобы значенія величины прямо-пропорціональныхъ той, одно изъ значеній которой требуется отыскать, были записаны одно за другимъ, а значенія обратно-пропорціональныхъ слѣдовали за ними; не безполезно также, ранѣе рѣшенія задачи по тому или иному способу, какъ нибудь отличить величины прямо-пропорціональныя отъ обратно-пропорціональныхъ; выше это сдѣлано съ помощью точки съ запятою, поставленной послѣ записи значенія послѣдней изъ величинъ, прямо-пропорціональныхъ той, одно изъ значеній которой подлежитъ отысканію.

Понятіе о процентѣ.

§ 147. *Процентомъ* называется сотая доля всякаго (именованнаго или отвлеченнаго) числа по отношенію къ этому числу. Такъ, напр., 13 р. составляютъ одинъ процентъ тысячи трехсотъ р.; $\frac{3}{4}$ аршина составляютъ одинъ процентъ 75-ти аршинъ; отвлеченное смѣшанное число $1\frac{5}{7}$ составляетъ одинъ процентъ отвлеченнаго смѣшаннаго числа $171\frac{3}{7}$, и т. п. Поэтому, когда говорятъ, что нѣкоторое число составляетъ 5, или 6, или 8 процентовъ какого-нибудь другого числа, то это, очевидно, обозначаетъ, что первое составляетъ 5, или 6, или 8 сотыхъ этого послѣдняго числа. Слово «процентъ» на письмѣ часто замѣняется знакомъ $^0/_0$.—Что разумѣть подъ дробнымъ или смѣшаннымъ числомъ процентовъ, мы увидимъ ниже.

Если какое-нибудь число, напр. 12, составляетъ $6^0/_0$ нѣкотораго другого числа, а именно 50-ти, то числа 12, 50, 6 и 100 представляютъ собою члены геометрической пропорціи:

$$12 : 40 = 6 : 100.$$

Дѣйствительно: если 12 составляетъ $6^0/_0$ числа 50, то это значитъ, что

$$12 = 50 \times \frac{6}{100}, \text{ откуда } 12 = \frac{50 \times 6}{100}, \text{ или } 12 \times 100 = 50 \times 6;$$

сдѣлавъ числа 12 и 100 крайними, а 50 и 6—средними членами геометрической пропорціи, получимъ, что $12 : 50 = 6 : 100$.

Пользуясь этимъ свойствомъ процента, всегда можно помощью пропорціи разрѣшить задачи слѣдующихъ типовъ:

1) Найти число, которое составляетъ то или иное данное число процентовъ нѣкотораго даннаго числа;

2) Опредѣлить, сколько данное число составляетъ процентовъ другого даннаго числа;

3) Опредѣлить число, о которомъ извѣстно, что нѣкоторое данное число составляетъ извѣстное количество $^0/_0$ искомаго числа.

Для выясненія примѣненія къ частнымъ случаямъ и слѣдствій этого общаго свойства процента разрѣшимъ слѣдующія задачи:

Задача 1-я. Найти число, составляющее $24^0/_0$ трехсотъ-шестидесяти.—Для того, чтобы изъ данныхъ задачи составить пропорцію, разсуждаемъ такъ: пусть число, составляющее $24^0/_0$ трехсотъ-шестидесяти, равно x; мы видѣли выше, что въ такомъ случаѣ отношеніе x-а къ тремстамъ-шестидесяти должно равняться отношенію 24-хъ къ 100. Отсюда получимъ пропорцію:

$$x : 360 = 25 : 100, \text{ откуда } x = \frac{\overset{36}{\cancel{360}} \times 24}{\underset{10}{\cancel{100}}} = \frac{36 \times 24}{10} = 86{,}4.$$

Задача 2-я. Изъ 840 строеній нѣкотораго села 160 застрахованы. Сколько $^0/_0$ всего числа строеній составляетъ число строеній застрахованныхъ?—Для того, чтобы составить пропорцію, разсуждаемъ такъ: пусть 160 составляетъ x процентовъ 840; мы видѣли выше, что въ такомъ случаѣ отношеніе 160-ти къ 840 должно равняться отношенію x-а къ 100. Отсюда получимъ пропорцію:

$$160 : 840 = x : 100,$$

изъ которой опредѣлимъ величину x-а:

$$x = \frac{160 \times 100}{840} = \frac{400}{21} = 19\frac{1}{21};$$

это значитъ, что 160 составляетъ $19\frac{1}{21}{}^0/_0$ числа 840.

Дробное число процентовъ.

Замѣчаніе. Мы видѣли выше, что если число процентовъ выражается числомъ цѣлымъ, то оно выражаетъ число сотыхъ долей числа, о процентахъ котораго идетъ рѣчь. При рѣшеніи послѣдней задачи у насъ не получилось цѣлаго числа. Дробному или смѣшанному числу процентовъ можетъ быть придаваемъ слѣдующій смыслъ: если a составляетъ $\frac{m}{n}$ процента числа b, то это значитъ, что

$$a : b = \frac{m}{n} : 100,$$

т. е. если одно число составляетъ дробное число процентовъ другого, то это значитъ, что отношеніе перваго числа ко второму равно отношенію этой дроби къ числу 100. Но очевидно, что если

$$a : b = \frac{m}{n} : 100, \text{ то } a : b = \frac{m}{n} \times \frac{1}{100}, \text{ откуда } a = b \times \frac{m}{n} \times \frac{1}{100};$$

т. е. если число a составляетъ $\frac{m}{n}$ % числа b, то первое число составляетъ столько сотыхъ второго числа, сколько единицъ въ $\frac{m}{n}$. Въ этомъ смыслѣ опредѣленіе, данное выше для цѣлаго числа процентовъ, остается справедливымъ также и для дробнаго числа.

Задача 3-я. 156 рублей составляетъ $3\frac{3}{4}$% нѣкотораго числа. Опредѣлить это послѣднее число.—Для того, чтобы получить пропорцію, разсуждаемъ такъ: пусть искомое число равно x-у; тогда, согласно предыдущему,

$$156 : x = 3\tfrac{3}{4} : 100, \text{ откуда } x = \frac{\overset{52}{\cancel{156}} \times \overset{20}{\cancel{100}} \times 4}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{15}}} = 4160.$$

Рѣшеніе этихъ задачъ инымъ способомъ.

Замѣчаніе. Тѣ же задачи могутъ быть разрѣшены, очевидно, и безъ помощи пропорцій. Для рѣшенія задачи 1-й надо найти $\frac{24}{100}$ трехсотъ-шестидесяти, для каковой цѣли надо найти слѣдующее произведеніе:

$$360 \times \frac{24}{100}.$$

Для рѣшенія задачи 2-й надо сначала найти—какую часть числа 840 составляетъ 160; очевидно, что 160 составляетъ $\frac{160}{840}$ числа 840; тогда остается только узнать—сколько въ этой дроби (т. е. въ дроби $\frac{160}{840}$) сотыхъ долей; получимъ, что

$$\frac{160}{840} : \frac{1}{100} = \frac{160 \times 100}{840} = \frac{400}{21} = 19\frac{1}{21}.$$

Для рѣшенія задачи 3-й надо найти такое число, что если возьмемъ $3\frac{3}{4}$ одной сотой доли его, то получится 156 р.; для этого, очевидно, надо найти частное

$$156 : \left(\frac{1}{100} \times 3\frac{3}{4}\right) = \frac{156 \times 100 \times 4}{15} = 4160.$$

Задачи на правило процентовъ

§ 148. Прибыль или убытокъ, получаемые при торговыхъ предпріятіяхъ, обыкновенно выражаются въ процентахъ съ затраченнаго на данное предпріятіе капитала. Такъ, говорятъ, что домъ приноситъ чистаго дохода 7%, если этотъ чистый доходъ составляетъ $\frac{7}{100}$ стоимости дома; говорятъ, что при покупкѣ товара на извѣстную сумму дѣлается 15% уступки, если дѣлаемая покупателю скидка составляетъ $\frac{15}{100}$ объявленной стоимости товара. И т. п.

Отдать деньги взаймы (или *въ ростъ*) *по пяти % годовыхъ* значитъ отдать ихъ съ тѣмъ, чтобы по прошествіи года получить, кромѣ отданной суммы, еще $\frac{5}{100}$ этой суммы; точно также, взять извѣстную сумму денегъ взаймы *изъ 6°/₀ годовыхъ* значитъ взять эту сумму съ тѣмъ, чтобы по прошествіи года, кромѣ этой суммы, уплатить еще $\frac{6}{100}$ взятой суммы. При займахъ всякаго рода берущій взаймы называется *должникомъ* (дебиторомъ), дающій взаймы—*заимодавцемъ* (кредиторомъ), взятая сумма—*долгомъ*, вся прибыль, получаемая при этомъ заимодавцемъ — *процентными деньгами*; число единицъ прибыли, получаемыхъ со 100 единицъ цѣнности въ теченіе года—*процентною таксою*. Такъ, если Иванъ взялъ у Петра взаймы 1650 руб. по 8°/₀ срокомъ на 2 года 5 мѣсяцевъ, то Иванъ—должникъ (дебиторъ), Петръ—заимодавецъ (кредиторъ), 1650 р.—долгъ или *капиталъ*, отданный въ ростъ, 8 — процентная такса, т. е. 8 р. Иванъ уплатилъ бы Петру за каждые 100 рублей долга, если бы Иванъ ими пользовался въ теченіе только одного года; вся же прибыль, которую получитъ Петръ, называется также процентными деньгами.

При помѣщеніи какой-либо суммы денегъ въ какое-либо предпріятіе, прибыль выражается тоже въ процентахъ съ этой суммы; вся прибыль, выраженная въ единицахъ мѣры цѣнностей (рубляхъ, копейкахъ, франкахъ, и т. п.), называется прибылью (либо же процентными деньгами, если деньги отданы въ ростъ). Сумма же, помѣщенная въ какое-либо предпріятіе, въ ариѳметикѣ называется чаще всего просто *капиталомъ*.

Очевидно, что количество процентныхъ денегъ (т. е. вся прибыль, полученная съ предпріятія) прямо-пропорціонально: капиталу, промежутку времени, въ теченіе котораго должникъ пользуется ссудою (въ теченіе котораго капиталъ находился въ предпріятіи), и процентной (за каждыя сто единицъ капитала) таксѣ. Равнымъ образомъ очевидно, что время, въ теченіе котораго капиталъ находится въ предпріятіи, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, прямо-пропорціонально количеству процентныхъ денегъ и обратно-пропорціонально процентной таксѣ со ста и капиталу. Условная же процентная такса, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, прямо-пропорціональна процентнымъ деньгамъ (прибыли) и обратно-пропорціональна капиталу и времени; наконецъ, капиталъ, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, прямо-пропорціоналенъ процентнымъ деньгамъ (прибыли) и обратно-пропорціоналенъ: времени, въ теченіе котораго капиталъ находился въ предпріятіи, и процентной таксѣ.

Полезно также помнить, что сумма, *въ которую* обращается капиталъ, пущенный въ оборотъ на нѣкоторое время, прямо-пропорціональна, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, капиталу, но не находится въ пропорціональномъ отношеніи ни къ величинѣ промежутка времени, въ теченіе котораго капиталъ находился въ предпріятіи, ни къ прибыли со ста рублей (къ процентной таксѣ), ни къ прибыли, получаемой со всего капитала.

Задачи на такъ-называемое *правило процентовъ* тѣсно примыкаютъ къ задачамъ на простое или сложное тройное правило. Для выясненія примѣненія выше изложенныхъ общихъ соображеній къ частнымъ случаямъ, разрѣшимъ слѣдующія задачи:

Задача 1-я. Какъ велики процентныя деньги, которыя должникъ обязанъ уплатить кредитору, если первый взялъ у послѣдняго 1657 рублей на одинъ годъ по 8% годовыхъ?—Процентныя деньги прямо-пропорціональны капиталу; процентныя же деньги съ капитала въ 100 р. равны 8 рублямъ; стало-быть,

	со 100 руб.	получится	8 р.	проц.	денегъ,	
а	съ 1657 »	»	x »	»	»	;

составимъ пропорцію:

$$x : 8 = 1657 : 100, \text{ откуда } x = \frac{1657 \times 8}{100} = \frac{13256}{100} = 132{,}56,$$

т. е. процентныя деньги равны въ данномъ случаѣ 132 р. 56 к.

Задача 2-я. Какъ великъ капиталъ, приносящій въ годъ 175 рублей процентныхъ денегъ при 7% годовыхъ?—Капиталъ прямо-пропорціоналенъ, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, количеству процентныхъ денегъ, которыя онъ приноситъ въ теченіе года. Стало-быть,

100 р.	приносятъ	въ теченіе	года	7 р.	проц.	денегъ,	
x »	»	»	»	» 175 р.	»	»	;

составимъ пропорцію:

$$x : 100 = 175 : 7, \text{ откуда } x = \frac{175 \times 100}{7} = 2500,$$

т. е. капиталъ, приносящій, считая 7% годовыхъ, въ теченіе года 175 р. процентныхъ денегъ, равенъ 2500 рублямъ.

Задача 3-я. Съ капитала въ 5635 р. получено въ теченіе года процентныхъ денегъ 422 р. $62\frac{1}{2}$ коп. Спрашивается, какъ велика процентная такса?—Процентная такса, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, прямо-пропорціональна процентнымъ деньгамъ; процентныя же деньги со всего капитала равны въ данномъ случаѣ 422 р. $62\frac{1}{2}$ к.; стало-быть,

	съ 5635 р.	получается	422,625 р.	проц.	денегъ,		
а	со 100 »	»	x	»	»	»	;

составимъ пропорцію:

$x : 422,625 = 100 : 5635$, откуда $x = \frac{422,625 \times 100}{5635} = \frac{42262,5}{5635} = 7\frac{1}{2}$,

т. е. процентная такса въ этомъ случаѣ равна $7\frac{1}{2}$.

Задача 4-я. Капиталъ въ 15 600 р. отданъ въ ростъ по 8% годовыхъ. Во что онъ обратится по прошествіи 15-ти мѣсяцевъ? —Сумма, въ которую обращается данный капиталъ, прямо-пропорціональна послѣднему, но не находится въ пропорціональномъ отношеніи ни ко времени, ни къ процентной таксѣ; поэтому данную задачу замѣнимъ другою, въ которой всѣ величины прямо или обратно-пропорціональны другъ другу. Для этого замѣнимъ вопросъ предложенной задачи другимъ, а именно вопросомъ: какъ велики процентныя деньги, которыя принесетъ въ теченіе 15-ти мѣсяцевъ капиталъ въ 15 600 р.? Получимъ, что

100 руб. въ 12 мѣс. приносятъ 8 р. проц. денегъ,
а 15600 » » 15 мѣс. » x р. » » ;

составимъ пропорціи:

$$x_1 : 8 = 15600 : 100 \text{ и } x : x_1 = 15 : 12,$$

гдѣ x_1 обозначаетъ процентныя деньги, приносимыя ста рублями въ 15 мѣс., и откуда получимъ, что

$$x = \frac{\overset{156}{15600} \times \overset{5}{15} \times \overset{2}{8}}{\underset{1}{100} \times \underset{1}{12}} = 1560 \text{ р.}$$

т. е. 15 600 р., отданные по 8% годовыхъ, принесутъ въ теченіе 15-ти мѣсяцевъ 1560 р. процентныхъ денегъ. А потому онъ обратится, въ теченіе этого времени, въ

15 600 р. + 1 560 р., т. е. въ 17 160 р.

Задача 5-я. По сколько процентовъ надо отдать капиталъ въ 12000 рублей, чтобы онъ, по прошествіи 15 мѣсяцевъ, принесъ 1500 р. процентныхъ денегъ?—Процентныя деньги прямо-пропорціональны величинѣ капитала и промежутку времени. Получимъ, что

100 р. въ 12 мѣс. приносятъ x р. проц. денегъ,
а 12000 р. » 15 » » 1500 р. » » ;

составимъ пропорціи:

$$x_1 : 1500 = 100 : 12000 \text{ и } x : x_1 = 12 : 15,$$

гдѣ x_1 обозначаетъ процентныя деньги, приносимыя ста рублями въ 15 мѣс., т. е. процентную таксу, и откуда

$$x : 1500 = 12 \times 100 : 15 \times 12000,$$

а отсюда
$$x = \frac{1500 \times 12 \times 100}{15 \times 12000} = 10,$$

т. е. капиталъ долженъ быть отданъ по 10% годовыхъ.

Задача 6-я. На сколько мѣсяцевъ надо отдать 12000 рублей, чтобы, считая по 10% годовыхъ, капиталъ этотъ принесъ 1500 р. процентныхъ денегъ?—Время, въ теченіе котораго капиталъ находится въ оборотѣ, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, обратно-пропорціонально величинѣ капитала и прямо-пропорціонально процентнымъ деньгамъ; стало-быть,

100 р.	принесетъ	10 р.	проц.	денегъ	въ 12 м.;
12000 р.	»	1500 р.	»	»	» x м.;

составимъ пропорціи:

$$x_1 : 12 = 1500 : 10 \text{ и } x : x_1 = 100 : 12000,$$

откуда получимъ пропорцію:

$$x : 12 = 1500 \times 100 : 10 \times 12000, \text{ а отсюда } x = 15,$$

т. е. 12000 р. надо отдать на 15 м. для того, чтобы они принесли, считая по 10%, 1500 р. процентныхъ денегъ.

Задача 7-я. Нѣкоторый капиталъ, отданный по 6% годовыхъ, приноситъ нѣкоторую прибыль въ теченіе 16-ти мѣсяцевъ. По сколько процентовъ надо отдать тотъ же капиталъ на 10 мѣсяцевъ для того, чтобы получилась та же прибыль?—Процентная такса, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, обратно-пропорціональна времени; стало-быть, данный капиталъ, чтобы получить извѣстную прибыль, надо отдать

по 6% на 16 мѣс.,
и по x% » 10 » ;

составимъ пропорцію:

$$x : 6 = 16 : 10, \text{ откуда } x = \frac{16 \times 6}{10} = 9{,}6,$$

т. е. для того, чтобы тотъ же капиталъ принесъ въ теченіе 10-ти мѣсяцевъ ту же прибыль, его надо отдать по 9,6% годовыхъ.

Задача 8-я. Нѣкоторый капиталъ, отданный по 8% годовыхъ, принесъ въ теченіе 5 мѣсяцевъ нѣкоторую прибыль. На сколько мѣсяцевъ надо отдать тотъ же капиталъ, чтобы онъ принесъ ту же прибыль, считая по 6% годовыхъ? — Время обратно-пропорціонально, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, процентной таксѣ; стало-быть, данный капиталъ, для того, чтобы онъ принесъ одну и ту же прибыль, надо отдать

по 8% на 5 мѣс.
и по 6% » x » ;

составимъ пропорцію:

$$x : 5 = 8 : 6, \text{ откуда } x = \frac{5 \times 8}{6} = 6\tfrac{2}{3},$$

т. е. этотъ капиталъ надо отдать по 6% на $6\frac{2}{3}$ мѣсяца для того, чтобы получить ту же прибыль.

Способъ приведенія къ единицѣ и способъ дробей.

Замѣчаніе. Задачи на правило процентовъ могутъ быть разрѣшаемы также по способу приведенія къ единицѣ, что предоставляется, въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, учащемуся.—Но, кромѣ способа пропорцій и способа приведенія къ единицѣ, при рѣшеніи задачъ на правило процентовъ можно также пользоваться преимущественно тѣмъ, что слово «процентъ» обозначаетъ одну сотую долю. Для лучшаго выясненія этого, строго говоря, наиболѣе естественнаго способа, разрѣшимъ тѣ же задачи:

Задача 1-я. Какъ велики процентныя деньги, которыя получатся, по прошествіи года, съ капитала въ 1657 р., отданнаго по 8% годовыхъ?—Отдать капиталъ въ 1657 р. на годъ по 8% годовыхъ, значитъ отдать ихъ съ тѣмъ, чтобы, по прошествіи года, кромѣ этихъ 1657 р., получить еще $\frac{8}{100}$ этой суммы. Такимъ образомъ процентныя деньги въ этомъ случаѣ выражаются дробью

$$\frac{1657 \times 8}{100} \text{ р.},$$

результатъ вполнѣ согласный съ результатомъ, полученнымъ выше, на стр. 146-ой, но достигнутый гораздо скорѣе.

Задача 2-я. Какъ великъ капиталъ, приносящій въ годъ 175 р. процентныхъ денегъ при 7% годовыхъ?—Отдать капиталъ по 7% годовыхъ, значитъ отдать его съ тѣмъ, чтобы по прошествіи года, кромѣ этого капитала, получить еще $\frac{7}{100}$ того же капитала; стало-быть, $\frac{7}{100}$ неизвѣстнаго намъ капитала равны 175 р., откуда получимъ, что отданный въ ростъ капиталъ равенъ частному

$$175 \text{ р.} : \frac{7}{100} = \frac{175 \times 100}{100} \text{ р.} = 2500 \text{ р.},$$

результатъ, вполнѣ согласный съ результатомъ, полученнымъ выше, на стр. 146-ой, но достигнутый гораздо скорѣе.

Задача 3-я. Съ капитала въ 5635 р. получено въ теченіе года 422 р. $62\frac{1}{2}$ к. процентныхъ денегъ. Какъ велика процентная такса?—Процентныя деньги, полученныя по прошествіи года, равны 422 р. $62\frac{1}{2}$ к. или 422,62 р., а одинъ процентъ съ капитала въ 5635 р. равенъ 56,35 р., а потому процентная такса равна частному $422{,}625 : 56{,}35 = 7{,}5$, результатъ, согласный съ результатомъ, полученнымъ выше, на стр. 147-ой, но достигнутый гораздо скорѣе.

Задача 4-я. Капиталъ въ 15600 р. отданъ въ ростъ по 8% годовыхъ. Во что онъ обратится въ 15 мѣсяцевъ?—Капиталъ увеличится въ теченіе года на $\frac{8}{100}$ своей величины, стало-быть онъ обратится въ сумму, выражаемую дробью

$$\frac{15600 \text{ р.} \times 108}{100} = 17160 \text{ р.},$$

результатъ, согласный съ полученнымъ выше, на стр. 147-ой, но достигнутый гораздо скорѣе.

Задача 5-я. По сколько процентовъ надо отдать капиталъ въ 12 000 руб., чтобы онъ, по прошествіи 15 мѣс., принесъ 1500 р. прибыли?—1500 р. этотъ капиталъ приноситъ въ 15 м., въ годъ онъ принесетъ

$$\frac{1500 \text{ р.} \times 12}{15}, \text{ т. е. } 1200 \text{ р.}$$

Но 1% съ капитала въ 12000 р. равенъ 120 р.; стало-быть, 1200 составляетъ 10% съ этой суммы. А потому 12000 р. надо отдать по 10% годовыхъ для того, чтобы этотъ капиталъ принесъ въ 15 мѣсяцевъ 1500 р. процентныхъ денегъ.

Задача 6-я. На сколько мѣсяцевъ надо отдать 12 000 руб., чтобы, считая по 10% годовыхъ, этотъ капиталъ принесъ 1500 р. процентныхъ денегъ? — Процентныя деньги за годъ будутъ равны

$$\frac{12000 \text{ р.} \times 10}{100}, \text{ т. е. } 1200 \text{ р.}$$

въ теченіе мѣсяца капиталъ принесетъ 1200 р. : 12, т. е. 100 р. Стало-быть, 1500 р. процентныхъ денегъ получится въ теченіе столькихъ мѣсяцевъ, сколько разъ 100 р. содержится въ 1500 р., т. е. въ теченіе 15 мѣсяцевъ.

Задача 7-я. Нѣкоторый капиталъ, отданный по 6% годовыхъ, приноситъ нѣкоторую прибыль въ теченіе 16 мѣсяцевъ. По сколько процентовъ надо отдать тотъ же капиталъ на 10 мѣсяцевъ для того, чтобы получилась такая же прибыль?

Въ годъ капиталъ принесетъ $\frac{6}{100}$ капитала,

въ мѣсяцъ » » $\frac{6}{100 \times 12}$ »

въ 16 мѣсяц. » » $\frac{6 \times 16}{100 \times 12}$ »

На такую долю своей величины капиталъ увеличится въ 16 мѣсяцевъ; но на ту же долю капитала онъ долженъ увеличиться въ 10 мѣсяцевъ при другой процентной таксѣ; стало-быть,

въ мѣсяцъ онъ долженъ принести $\frac{6 \times 16}{100 \times 12 \times 10}$ капитала,

а въ годъ » » » $\frac{6 \times 16 \times 12}{100 \times 12 \times 10}$ ».

Такую долю капитала этотъ капиталъ долженъ приносить въ годъ для того, чтобы получилась та же прибыль, какая была принесена при 6% годовыхъ въ теченіе 16-ти мѣсяцевъ. Чтобы узнать, сколько это составитъ процентовъ, надо узнать, сколько разъ $\frac{1}{100}$ содержится въ полученной нами дроби; получимъ

$$\frac{6 \times 16 \times 12}{100 \times 12 \times 10} : \frac{1}{100} = \frac{6 \times 16 \times 12 \times 100}{100 \times 12 \times 10} = 9{,}6.$$

Задача 8-я. Нѣкоторый капиталъ, отданный въ ростъ по 8%, въ теченіе 5 мѣсяцевъ принесъ нѣкоторую прибыль. На сколько мѣсяцевъ надо отдать тотъ же капиталь для того, чтобы онъ ту же прибыль принесъ при 6% годовыхъ.—Прибыль, которую капиталъ принесетъ въ теченіе 5-ти мѣсяцевъ, бывъ отданъ по 8%, равна

$$\frac{8 \times 5}{100 \times 12} \text{ капитала;}$$

если же капиталъ будетъ отданъ по 6% годовыхъ,—онъ принесетъ въ мѣсяцъ прибыль, равную

$$\frac{6}{100 \times 12} \text{ капитала.}$$

Для того, чтобы узнать требуемое въ задачѣ, надо первую дробь раздѣлить на вторую; получимъ

$$\frac{8 \times 5}{100 \times 12} : \frac{6}{100 \times 12} = \frac{8 \times 5 \times 100 \times 12}{100 \times 12 \times 6} = 6\tfrac{2}{3}.$$

149. Должникъ иногда выдаетъ заимодавцу особаго рода расписку, письменное обязательство, называемое *векселемъ*, при чемъ въ векселѣ обозначается какъ срокъ уплаты, такъ равно и вся сумма денегъ, которую должникъ обязанъ заплатить въ этотъ срокъ заимодавцу, но не упоминается ни о размѣрѣ процентной таксы, ни о другихъ условіяхъ займа*). Сумма, подлежащая уплатѣ согласно данному векселю, называется *вексельною суммою* или *валютою* этого векселя. Но въ коммерческихъ сношеніяхъ часто случается, что уплата по данному векселю производится раньше срока, обозначеннаго въ этомъ векселѣ: или самъ должникъ уплачиваетъ, ранѣе срока платежа, по выданному имъ векселю, сдѣлавъ, по соглашенію съ кредиторомъ, вычетъ съ вексельной суммы, или же какое-нибудь третье лицо, называемое въ этомъ случаѣ *дисконтё-*

Задачи на учетъ векселей.

---

*) Вексель пишется на особенной (гербовой) бумагѣ и влечетъ за собою для должника, въ случаѣ неуплаты имъ денегъ къ сроку, болѣе серьезныя послѣдствія, чѣмъ обыкновенная расписка; текстъ векселя непремѣнно долженъ быть написанъ по слѣдующей, установленной закономъ, формѣ:

С.-Петербургъ, 1-го Января 1883 г.

Вексель на 2000 р. с.

Отъ сего перваго января тысяча восемьсотъ восемьдесятъ третьяго года чрезъ три мѣсяца по сему моему векселю повиненъ я заплатить Московскому 1-ой гильдіи купцу Ивану Иванову Петрову, или кому онъ прикажетъ, двѣ тысячи рублей, которыя я отъ него наличными деньгами сполна получилъ. (Имя, отчество и фамилія должника).

Иногда вмѣсто словъ «наличными деньгами» пишется «товаромъ».

ромъ векселя, уплачиваетъ кредитору нѣкоторую сумму, получая при этомъ право взысканія съ должника всей вексельной суммы по наступленіи срока векселя. Отсюда возникаетъ цѣлый рядъ задачъ, извѣстныхъ подъ общимъ названіемъ задачъ на *правило учета* (дисконта) *векселей*. *Учетомъ* называется скидка, дѣлаемая съ валюты при уплатѣ по векселю до наступленія его срока.

При учетѣ векселей принимаются во вниманіе не первоначальныя условія займа, а только величина промежутка времени, остающагося до срока даннаго векселя и условный размѣръ скидки; при этомъ задачи чаще всего разрѣшаются по способу, извѣстному подъ именемъ *коммерческаго учета векселей*.

При коммерческомъ способѣ учета векселей говорятъ, что учетъ сдѣланъ по 6% годовыхъ, если въ основу разсчета положено, что съ каждыхъ ста рублей вексельной суммы, скидывается 6 рублей, если до срока векселя остается еще цѣлый годъ. Пусть буква v обозначаетъ валюту векселя, p—процентную таксу, t—число мѣсяцевъ, остающихся до срока, d—учетъ, дѣлаемый со ста рублей, а D—учетъ, дѣлаемый со всей вексельной суммы; тогда

со 100 р. дѣлается учетъ въ d,
съ v » » » » D;

составимъ пропорцію: $D:d=v:100$, изъ которой по двумъ изъ трехъ величинъ (D, d и v) легко опредѣлить третью. При этомъ, очевидно, $d=p\times t:12$. — Для выясненія способа примѣненія коммерческаго учета къ частнымъ случаямъ, разрѣшимъ слѣдующія задачи:

Задача 1-я. Какъ великъ учетъ съ векселя въ 1272 р., если сдѣлать учетъ по 8% годовыхъ за 5 мѣсяцевъ до срока?—Разсуждаемъ такъ: со ста рублей, за 12 мѣсяцевъ до срока, дѣлается учетъ въ 8 р.; за одинъ мѣсяцъ до срока долженъ быть сдѣланъ съ каждыхъ ста рублей валюты учетъ въ $\frac{8}{12}$ р., а за 5 мѣсяцевъ до срока учетъ въ

$$\frac{\overset{2}{8}\times 5}{\underset{3}{12}}\text{ р.}=\frac{10}{3}\text{ р.}=3\tfrac{1}{3}\text{ р.}$$

Стало-быть, имѣемъ, что

со 100 р. долженъ быть сдѣланъ учетъ въ $3\frac{1}{3}$ р.;
а съ 1272 р. » » » » » x р.;

составимъ пропорцію:

$$x:3\tfrac{1}{3}=1272:100,\text{ откуда } x=\frac{\overset{1}{10}\times\overset{424}{1272}}{\underset{3}{3}\times\underset{10}{100}}=4{,}24,$$

т. е. учетъ равенъ 42 р. 40 к.

Примѣчаніе. При этомъ должно помнить, что только учетъ прямо-пропорціоналенъ валютѣ векселя; изъ прочихъ же величинъ при учетѣ векселя не всѣ находятся другъ отъ друга въ пропорціональной зависимости.

Задача 2-я. Какъ велика валюта векселя, если учетъ съ него, сдѣланный за 5 мѣсяцевъ до срока по 8% годовыхъ, равенъ 42 р. 40 к.—Разсуждаемъ такъ: со 100 руб. за 5 мѣсяцевъ до срока, считая по 8% годовыхъ, дѣлается учетъ въ $3\frac{1}{3}$ рубля; стало-быть, имѣемъ, что

со 100 р. дѣлается учетъ въ $3\frac{1}{3}$ р.;
а съ x » » » » 42,4 р.;

составимъ пропорцію

$$x : 100 = 42{,}4 : 3\frac{1}{3},\ \text{откуда}\ x = \frac{42{,}4 \times 100 \times 3}{10} = 1272,$$

т. е. валюта векселя равна 1272 р.

Задача 3-я. По сколько процентовъ сдѣланъ учетъ векселя, если валюта векселя 1272 р., учетъ 42 р. 40 к. и если вексель учтенъ за 5 мѣсяцевъ до срока? — При рѣшеніи задачъ этого типа разсуждаютъ такъ:

вмѣсто 1272 р. уплачено 1229 р. 60 к.;
» 100 р. » x р. x к.;

составимъ пропорцію:

$$x : 1229{,}6 = 100 : 1272,\ \text{откуда}\ x = \frac{1229{,}6 \cdot 100}{1272} = 96\frac{2}{3};$$

стало-быть, учетъ со ста рублей равняется

$$100\ \text{р.} - 96\frac{2}{3}\ \text{р., т. е.}\ 3\frac{1}{3}\ \text{руб.}$$

Этотъ учетъ сдѣланъ со ста рублей за 5 мѣсяцевъ до срока; за годъ до срока былъ бы сдѣланъ со ста рублей учетъ, равный

$$\frac{10 \times 12}{3 \times 5}\ \text{р., т. е. 8 р.};$$

слѣдовательно разсчетъ былъ сдѣланъ по 8% годовыхъ.

Задача 4-я. За сколько мѣсяцевъ до срока сдѣланъ учетъ векселя, если валюта его равна 1272 р., если учетъ, равный 42 р. 40 к., сдѣланъ по 8% годовыхъ?—Разсуждаемъ такъ:

вмѣсто 1272 руб. по векселю уплачено 1229,6 р.;
а » 100 » будетъ » x ;

составимъ пропорцію

$$x : 1229{,}6 = 100 : 1272,\ \text{откуда}\ x = \frac{122960}{1272} = 96\frac{2}{3},$$

стало-быть, со ста рублей сдѣланъ учетъ въ $3\frac{1}{8}$ р. Теперь разсуждаемъ такъ:

со	100	р.	за	12	мѣсяц.	до срока	дѣлается	учетъ въ	8 руб.
»	»	»	»	x	»	»	»	»	$3\frac{1}{3}$ руб.

составимъ пропорцію

$$x : 12 = 3\tfrac{1}{3} : 8, \text{ откуда } x = \frac{15 \times 10}{3 \times 8} = 5,$$

т. е. вексель учтенъ за 5 мѣсяцевъ до срока.

Примѣчаніе. Само собою разумѣется, что всѣ задачи на учетъ векселей могутъ быть разрѣшаемы также и съ помощью способа приведенія къ единицѣ; это предоставляется учащемуся.—Но во всякомъ случаѣ, надо помнить, что если въ задачѣ не всѣ величины другъ другу прямо или обратно пропорціональны, то ее прежде всего надо замѣнить такою, въ которой всѣ величины пропорціональны другъ другу.

Цѣпное правило.

§ 150. Къ числу задачъ, весьма удобно разрѣшаемыхъ съ помощью пропорцій, принадлежатъ также задачи на такъ называемое *цѣпное правило.* Для выясненія способа рѣшенія и сущности задачъ этого рода достаточно разрѣшить слѣдующую задачу: «100 баварскихъ гульденовъ равняются 212 франкамъ, 126 фр. равны 100 шиллингамъ, 247 шиллинговъ равны 126 австр. гульденамъ. Сколько баварскихъ гульденовъ въ 256-ти австрійскихъ?» — Обозначивъ число баварскихъ гульденовъ, равное 250-ти австр. гульденамъ, буквою x, получимъ рядъ равенствъ:

100	бав. г.	=	212	фр.;
126	фр.	=	100	шилл.;
247	шилл.	=	126	австр. гульд.;
256	ав. г.	=	x	бав. г.;

составимъ рядъ пропорцій:

100	бав. г.	:	126	фр.	=	212	:	126,
126	фр.	:	247	шилл.	=	100	:	247,
247	шилл.	:	256	ав. г.	=	126	:	256,
256	ав. г.	:	x	бав. г.	=	1	:	1;

изъ которыхъ найдемъ пропорцію

$$100 \text{ бав. г.} : x \text{ бав. г.} = 212 \times 100 \times 126 : 126 \times 247 \times 256;$$

а отсюда найдемъ, что

$$x = \frac{100 \times 126 \times 247 \times 256}{212 \times 100 \times 126} = 295\frac{14}{53},$$

т. е. что 256 австр. гульденовъ равны $295\frac{14}{53}$ бав. гульдена.

Замѣчаніе. Должно замѣтить, что задачи на цѣпное правило гораздо проще и поэтому чаще всего разрѣшаются съ помощью способа приведенія къ единицѣ. При этомъ разсуждаютъ такъ: Способъ приведенія къ единицѣ.

100 бав. г. $=$ 212 фр.	1 фр. $= \frac{100}{212}$ бав. г.;
126 фр. $=$ 100 шил.	126 фр. $= \frac{100 \times 126}{212}$ бав. г.;
247 ш. $=$ 126 австр.г.	1 шил. $= \frac{100 \times 126}{212 \times 100}$ бав. г.;
256 ав. г. $= x$ бав. г.	и т. д.

§ 151. Если требуется раздѣлить данное число на части, кратныя отношенія которыхъ выражаются кратными отношеніями какихъ-нибудь чиселъ, то задача такого рода принадлежитъ къ числу задачъ на такъ наз. *правило пропорціональнаго дѣленія.* Правило пропорціональнаго дѣленія.

1) Если данное число N требуется раздѣлить на двѣ части, кратное отношеніе которыхъ выражается отношеніемъ какихъ-нибудь двухъ цѣлыхъ чиселъ, напр., 3-хъ къ 5-ти, то, обозначивъ неизвѣстныя части буквами x и y, получимъ пропорцію:

$$x : y = 3 : 5,$$

откуда (§ 142)

$$(x+y) : x = 8 : 3 \text{ и } (x+y) : y = 8 : 5, \text{ но } x+y=N;$$

стало-быть, въ этомъ случаѣ имѣемъ двѣ пропорціи:

$$N : x = 8 : 3 \text{ и } N : y = 8 : 5,$$

въ каждой изъ которыхъ три члена извѣстны, а одинъ неизвѣстенъ.

2) Если данное число требуется раздѣлить на двѣ части, кратное отношеніе которыхъ выражается кратнымъ отношеніемъ двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно или оба суть числа дробныя или смѣшанныя, то отношеніе этихъ двухъ чиселъ замѣняется равнымъ ему отношеніемъ нѣкоторыхъ двухъ цѣлыхъ чиселъ, которое (§ 27) легко можетъ быть найдено.

3) Если данное число N требуется раздѣлить на три или болѣе частей и притомъ на такія части x, y, z, которыхъ отношенія къ нѣкоторому ряду извѣстныхъ чиселъ, напр., къ числамъ 3, 5, 7 равны между собою, такъ что $x : 3 = y : 5 = z : 7$, то можемъ изъ этой шестичленной пропорціи составить рядъ производныхъ:

$$(x+y+z) : x = (3+5+7) : 3, \text{ или } N : x = 15 : 3$$
$$(x+y+z) : y = (3+5+7) : 5, \text{ или } N : y = 15 : 5$$
$$(x+y+z) : z = (3+5+7) : 7, \text{ или } N : z = 15 : 7$$

гдѣ первые члены первыхъ отношеній и оба члена вторыхъ извѣстны.

Замѣчаніе. Многочленную пропорцію

$$x : a = y : b = z : c = \ldots = v : m = t : n$$

часто изображаютъ иначе, а именно такъ:

$$x : y : z : \ldots\ldots : w : t = a : b : c : \ldots\ldots : m : n,$$

что̀ равносильно ряду выше выписанныхъ пропорцій, а также ряду пропорцій:

$$\begin{aligned} x : y &= a : b \\ y : z &= b : c \\ &\vdots \\ w : t &= m : n, \end{aligned}$$

въ которыхъ послѣдующіе члены каждой пропорціи равны соотвѣтствующимъ предыдущимъ слѣдующей. Если поэтому условія задачи прямо сводятся къ сложной пропорціи

$$x : y : z : u : v : \ldots\ldots : w : t = a : b : c : d : \ldots\ldots : m : n,$$

то отсюда находимъ производныя пропорціи:

$(x + y + z + \ldots\ldots + w + t) : x = (a + b + c + \ldots\ldots + m + n) : a,$

$(x + y + z + \ldots\ldots + w + t) : y = (a + b + c + \ldots\ldots + m + n) : b,$ и т. д.

Задачи на прав. пропорц. дѣленія.

§ 152. Для выясненія примѣненія общихъ соображеній, изложенныхъ выше, къ частнымъ случаямъ разрѣшимъ слѣдующую задачу: Раздѣлить число 4 971 на четыре части такъ, чтобы первая относилась ко второй какъ $\frac{3}{4}$ къ $\frac{5}{8}$, вторая къ третьей—какъ 7 къ $2\frac{1}{2}$, а третья — къ четвертой какъ 8 къ 9. — Предположимъ, что буквы x, y, z и u по порядку обозначаютъ эти части; тогда

$$\begin{aligned} x : y &= \tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{8}, \text{ или } x : y = 6 : 5 \\ y : z &= 7 : 2\tfrac{1}{2}, \text{ или } y : z = 14 : 5 \\ z : u &= 8 : 9\ , \text{ или } z : u = 8 : 9. \end{aligned}$$

Умноживъ члены второго отношенія первой пропорціи на произведеніе изъ 14 на 8, получимъ пропорцію

(I) $$x : y = 672 : 560;$$

умноживъ далѣе члены второго отношенія второй пропорціи на столько, чтобы получить вмѣсто 14-ти число 560, т. е. на 40, получимъ пропорцію:

(II) $$y : z = 560 : 200;$$

умноживъ, наконецъ, члены второго отношенія третьей пропорціи на столько, чтобы вмѣсто 8-ми получить 200, т. е. на 25, получимъ пропорцію:

(III) $$z : u = 200 : 225.$$

Мы такимъ образомъ получили, что

$$\begin{aligned} x : y &= 672 : 560, \\ y : z &= 560 : 200, \\ z : u &= 200 : 225, \end{aligned}$$

изъ которыхъ выводимъ восьмичленную пропорцію:

$$x : y : z : u = 672 : 560 : 200 : 225,$$

откуда,

$(x+y+z+u):x=(672+560+200+225):672$, или $4971:x=1657:672$,
$(x+y+z+u):y=(672+560+200+225):560$, » $4971:y=1657:560$,
$(x+y+z+u):z=(672+560+200+225):200$, » $4971:z=1657:200$,
$(x+y+z+u):u=(672+560+200+225):225$, » $4971:u=1657:225$;

а изъ этихъ пропорцій выводимъ, что

$$x=2016,\ y=1680,\ z=600,\ u=675.$$

Замѣчаніе. Задачи на правило пропорціональнаго дѣленія могутъ быть разрѣшаемы и иначе, притомъ гораздо проще; можно, напр., выразивъ искомыя части даннаго числа въ доляхъ одной изъ нихъ, такимъ образомъ узнать, сколько какихъ долей одной изъ его частей содержится во всемъ данномъ числѣ, а потомъ и узнать эту часть даннаго числа. Такъ, напр., обратясь къ вышеразсмотрѣнной задачѣ, найдемъ, что Способъ приведенія къ единицѣ.

$$x=\tfrac{6}{5}y,\ y=\tfrac{14}{5}z,\ \text{а}\ z=\tfrac{8}{9}u;$$

отсюда, выразивъ всѣ части въ доляхъ части u, найдемъ, что

$$u=u,\ z=\frac{8}{9}\times u,\ y=\frac{14}{5}\times\frac{8}{9}\times u=\frac{112}{45}\times u,\ \text{а}\ x=\frac{6}{5}\times y=\frac{224}{75}\times u,$$

откуда

$$x+y+z+u=\frac{224}{75}\times u+\frac{112}{45}\times u+\frac{8}{9}\times u+u=\frac{1657}{225}\times u=4971.$$

И т. д.

§ 153. Къ числу задачъ на правило пропорціональнаго дѣленія принадлежатъ задачи на такъ называемое *правило товарищества.* Эти послѣднія требуютъ раздѣленія прибыли, полученной съ нѣкотораго предпріятія, въ которомъ участвуетъ нѣсколько лицъ, прямо пропорціонально капиталу каждаго и промежутку времени, въ теченіе котораго каждый капиталъ находился въ предпріятіи. Правило товарищества.

Пусть три капиталиста взнесли капиталы C', C'' и C''' для общаго предпріятія; пусть далѣе капиталъ C' находился въ предпріятіи въ теченіе t' мѣсяцевъ, капиталъ C''—въ теченіе t'' мѣсяцевъ, а капиталъ C''' — въ теченіе t''' мѣсяцевъ; пусть, наконецъ, полученная прибыль равна N. Требуется раздѣлить прибыль N между компаніонами пропорціонально ихъ капиталамъ и времени, въ теченіе котораго каждый изъ капиталовъ былъ въ обращеніи.—Это значитъ, что если первый изъ нихъ получитъ x руб., второй y, а третій z, то получимъ рядъ пропорціональныхъ величинъ

$$\begin{array}{ccccc} x & , & C' & , & t' \\ y & , & C'' & , & t'' \\ z & , & C''' & , & t''', \end{array}$$

изъ которыхъ, приравнявъ сначала промежутокъ времени t'' промежутку t', получимъ пропорціи

$$x : y_1 = C' : C'' \text{ и } y_1 : y = t' : t'',$$

откуда

$$x : y = C' \times t' : C'' \times t'';$$

точно такъ же найдемъ, что

$$y : z = C'' \times t'' : C''' \times t''';$$

А изъ этихъ двухъ пропорцій найдемъ слѣдующую шестичленную:

$$x : y : z = C' \times t' : C'' \times t'' : C''' \times t''',$$

требующую раздѣленія нѣкоторой величины N на части, пропорціональныя нѣкоторымъ извѣстнымъ числамъ.—Само собою разумѣется, что тѣ же разсужденія могутъ быть примѣнены къ случаю, когда дано большее число участвующихъ въ предпріятіи.

Примѣчаніе. Задачи на правило товарищества могутъ быть разрѣшаемы и иначе, а именно съ помощью слѣдующаго разсужденія: капиталъ, равный C' единицамъ цѣнностей, въ теченіе t' единицъ времени можетъ принести столько же прибыли, сколько принесетъ капиталъ, равный $C' \times t'$ единицъ цѣнностей, въ одну единицу времени, и т. д. А потому N надо раздѣлить на части, пропорціональныя числамъ $C' \times t'$, $C'' \times t''$ и $C''' \times t'''$.

Правило смѣшенія.

§ 154. Задачами на *правило смѣшенія перваго рода* называются задачи на отысканіе средней стоимости единицы смѣси, т. е. задачи слѣдующаго типа: дано m' фунтовъ нѣкотораго товара, фунтъ котораго стòитъ p' копеекъ, m'' того же товара, фунтъ котораго стòитъ p'' копеекъ, и т. д. Требуется опредѣлить, что будетъ стоить 1 фунтъ смѣси, составленной изъ всѣхъ данныхъ количествъ этого товара?—Задачи этого рода для своего разрѣшенія, очевидно, требуютъ простого примѣненія дѣйствій: сложенія, умноженія и дѣленія и не могутъ быть отнесены къ числу задачъ на тройныя правила. Но ихъ принято въ задачникахъ помѣщать въ отдѣлѣ задачъ на эти правила.—Не таковы такъ называемыя *задачи на правило смѣшенія второго рода*, которыя допускаютъ примѣненіе пропорцій. Задачи этого рода заключаются въ слѣдующемъ: по данной стоимости единицы нѣкотораго товара одного сорта, стоимости единицы того же товара другого сорта и т. д., опредѣлить — какія количества товара надо взять изъ каждаго сорта для того, чтобы составить смѣсь, единица которой стоила-бы данное число единицъ стоимости. Задачи этого рода сводятся къ пропорціональному дѣленію.

Для выясненія примѣненія этого общаго указанія къ частнымъ случаямъ разрѣшимъ слѣдующія двѣ задачи:

Задача 1-я. Торговецъ чаемъ желаетъ смѣшать чай, фунтъ котораго стòитъ 1 р. 80 к., съ чаемъ, фунтъ котораго стòитъ 2 р. 50 к., съ тѣмъ, чтобы получить 70 ф. чаю по 2 р. 6 к. за фунтъ. По сколько фунтовъ онъ долженъ взять чаю каждаго изъ двухъ сортовъ?—Эту задачу можно разрѣшить двумя способами.

1-й способъ. Разсуждаемъ такъ: на каждомъ фунтѣ, стòящемъ 1 р. 80 к., торговецъ получилъ бы, продавая его по 2 р. 6 к., прибыли 26 к.; на каждомъ фунтѣ чаю, стòящемъ 2 р. 50 к., онъ получилъ бы, продавая его по 2 р. 6 к., убытку 44 к. Предположимъ, что онъ смѣшалъ x ф. перваго сорта и y ф. второго, при чемъ имъ полученъ чай, фунтъ котораго стòитъ ровно 2 р. 6 к. Стало-быть, прибыль, которую торговецъ получилъ бы на x ф. низшаго сорта, равняется убытку, который онъ получилъ бы на y ф. высшаго сорта, продавая полученный чай по 2 р. 6 к. за фунтъ, т. е. $26 \times x = 44 \times y$, откуда получимъ пропорцію

$$x : y = 44 : 26, \text{ или } x : y = 22 : 13,$$

изъ которой составимъ производныя пропорціи:

$$(x + y) : x = 35 : 22 \text{ и } (x + y) : y = 35 : 13.$$

Въ этихъ пропорціяхъ неизвѣстны только x и y, такъ какъ

$$x + y = 70,$$

по условію задачи. Такимъ образомъ получимъ:

$$70 : x = 35 : 22, \text{ а } 70 : y = 35 : 13,$$

откуда

$$x = \frac{70 \times 22}{35}, \text{ а } y = \frac{70 \times 13}{35},$$

т. е. чаю низшаго сорта онъ долженъ взять 44 ф., а высшаго—26 ф.

2-ой способъ. Если торговецъ станетъ продавать чай, фунтъ котораго стòитъ 1 р. 80 к., по 2 р. 6 к. за фунтъ, то при этомъ онъ на каждомъ фунтѣ этого чаю получитъ 26 к. прибыли; если же онъ станетъ продавать чай, фунтъ котораго стоитъ 2 р. 50 к., по 2 р. 6 к. за фунтъ, то онъ при этомъ на каждомъ фунтѣ этого чаю получитъ 44 коп. убытку. Стало-быть, одну коп. прибыли онъ получалъ бы на каждой 26-ой долѣ фунта чаю низшаго сорта, а одну коп. убытку на каждой 44-ой долѣ фунта чаю высшаго сорта. Поэтому, смѣшивая одну 26-ую фунта чаю низшаго сорта съ одною 44-ою фунта чаю высшаго сорта, торговецъ получалъ бы чай, фунтъ котораго стòилъ бы 2 р. 6 к., а потому, обозначивъ буквою x нужное ему число фунтовъ чаю низшаго сорта, а буквою y—число фунтовъ высшаго сорта, получимъ, съ одной стороны, что

$$x + y = 70,$$

а съ другой стороны пропорцію

$$x : \frac{1}{26} = y : \frac{1}{44} \text{ или } x : y = \frac{1}{26} : \frac{1}{44} = 22 : 13,$$

откуда

$$70 : x = 35 : 22, \text{ и } 70 : y = 35 : 13, \text{ или } x = 44, \text{ а } y = 26,$$

т. е. низшаго сорта торговецъ долженъ взять 44 ф., а высшаго сорта 26 ф.

Задача 2-я. Составить изъ трехъ сортовъ муки: по $5\frac{1}{2}$ к., по 6 к. и по $7\frac{1}{2}$ к. за фунтъ, 35 ф. муки цѣною въ 7 к. за фунтъ. — При ариѳметическомъ рѣшеніи задачъ этого рода обыкновенно разсуждаютъ такъ: на каждомъ фунтѣ перваго сорта получилось бы (при продажѣ его по 7-ми к.) $1\frac{1}{2}$ коп. прибыли, на каждомъ фунтѣ второго сорта 1 коп. прибыли, а на каждомъ фунтѣ третьяго сорта $\frac{1}{2}$ коп. убытку; требуется, стало-быть, опредѣлить такія количества муки каждаго сорта, чтобы убыль, полученная на послѣднемъ сортѣ, уравновѣсилась прибылью съ остальныхъ сортовъ Беря, напр., по одному фунту изъ первыхъ двухъ сортовъ, получаемъ $2\frac{1}{2}$ коп. прибыли, которыя могутъ быть уравновѣшены, если мы возьмемъ 5 фунтовъ второго (т. е. столько фунтовъ, сколько разъ $\frac{1}{2}$ коп. содержится въ $2\frac{1}{2}$ коп.). Стало быть,

$$x : y : z = 1 : 1 : 5,$$

откуда найдемъ, по правилу пропорціональнаго дѣленія, числа x, y и z; а именно: $x = 5$, $y = 5$, $z = 25$.

Примѣчаніе. Задачи этого рода принадлежатъ къ числу неопредѣленныхъ. Ибо ничто не препятствуетъ намъ взять изъ перваго сорта напр. $\frac{1}{2}$ фунта (а не одинъ), а изъ второго $\frac{1}{10}$ долю фунта (а не столько же, сколько изъ перваго), тогда прибыль, полученная на $\frac{1}{2}$ фунта перваго сорта, равнялась бы $\frac{3}{4}$ коп., а прибыль полученная на $\frac{1}{10}$ ф. второго, равнялась бы $\frac{1}{10}$ коп., вся же прибыль равнялась бы $\frac{3}{4}$ к. $+ \frac{1}{10}$ к., т. е. $\frac{17}{20}$ к. Для того, чтобы эту прибыль уравновѣсить равною ей убылью съ нѣкотораго соотвѣтствующаго количества муки третьяго сорта, этой послѣдней надо было бы взять столько фунтовъ, сколько разъ $\frac{1}{2}$ к. содержится въ $\frac{17}{20}$ к., т. е. надо было бы взять $\frac{17}{10}$ фунта. Тогда

$$x : y : z = \frac{1}{1} : \frac{1}{20} : \frac{17}{10} = 10 : 1 : 34,$$

что̀ даетъ совсѣмъ иныя значенія для x, y и z.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЯ СТАТЬИ.

I. О величинѣ и нѣкоторыхъ единицахъ мѣры.

Ариѳметика, математическія науки, понятіе о величинѣ и терминъ «величина».

См. «Введеніе», 1 — 5. Ариѳметика, т. е. наука о четырехъ дѣйствіяхъ надъ числами, есть одна изъ *математическихъ наукъ*. Математическими называются науки о законахъ, которымъ подчиняются *величины* во всѣхъ случаяхъ, когда человѣческій умъ съ ними встрѣчается.

Въ наукѣ для краткости условились придавать общее названіе «величины» всевозможнымъ длинамъ, всевозможнымъ поверхностямъ, объемамъ, промежуткамъ времени, всевозможнымъ свойствамъ вещества, проявляющимся въ разной степени, напр., степенямъ упругости, твердости, крѣпости твердыхъ тѣлъ и т. п. Но это — условное значеніе *термина* «величина», — значеніе, отличное отъ первоначальнаго значенія этого слова.

Дѣйствія надъ величинами.

Способы производства дѣйствій надъ величинами зависятъ отъ того, съ величинами какого рода мы имѣемъ дѣло, и не представляютъ собою предмета ариѳметики. Наиболѣе трудностей представляютъ собою дѣйствія: дѣленія величинъ на равныя части и кратнаго сравненія. Кратное сравненіе одной величины съ другою называется также *измѣреніемъ* одной величины другою. При этомъ то значеніе величины, которымъ измѣряютъ другія значенія той же величины, называется *единицею мѣры*, если ею вообще принято измѣрять другія величины того же рода. Какъ только величины, надъ которыми требуется произвести какое либо изъ четырехъ дѣйствій, выражены въ зависимости отъ принятыхъ единицъ мѣры (т. е. въ видѣ такъ назыв. именованныхъ чиселъ), то дѣйствія надъ величинами замѣняются соотвѣтственными дѣйствіями надъ числами, и тогда является возможность обратиться къ ученіямъ и правиламъ ариѳметики.

Понятіе о величинѣ и неопредѣлимыя понятія.

Когда говорятъ о величинѣ стола или дома, о величинѣ какого нибудь разстоянія, о величинѣ участка земли, промежутка времени, о величинѣ силы, то имѣютъ въ виду такое свойство стола, дома, разстоянія, участка земли, промежутка времени, силы, которое доступно пониманію каждаго: *это понятіе не можетъ быть точно опредѣлено.* Въ самомъ дѣлѣ: что такое, напр., величина промежутка времени? Мы можемъ судить о ней, сравнивая ее съ величиною другого, намъ хорошо извѣстнаго, промежутка времени, напр., съ тѣмъ количествомъ времени, которое протекаетъ отъ одного удара маятника данныхъ часовъ до другого, можемъ ее даже представить себѣ болѣе или менѣе ясно, но выяснить въ точныхъ выраженіяхъ другому, что собственно мы разумѣемъ подъ словомъ „величина“ промежутка времени, мы не можемъ. То же справедливо относительно величины какого либо разстоянія, напр., разстоянія отъ Петербурга до Москвы: мы можемъ судить объ этой величинѣ по тому, что по желѣзной дорогѣ можно проѣхать это разстояніе въ теченіе извѣстнаго количества времени, можемъ сравнить эту величину съ величиною разстоянія, называемаго верстою, и т. п.; но выяснить, въ связи *съ болѣе простыми понятіями*, понятіе о томъ, что собственно называется величиною этого разстоянія, мы не можемъ, такъ какъ болѣе простыхъ понятій нѣтъ.

Такихъ понятій, не поддающихся точному опредѣленію, довольно много: такъ, напр., что такое пространство? что такое время? точно опредѣлить также невозможно. Это — понятія первоначальныя, основныя, не нуждающіяся въ точномъ опредѣленіи и не поддающіяся таковому. Равнымъ образомъ не подлежатъ опредѣленію ариѳметическія понятія: *числа*, *единицы*, *счета*, *присчитыванія единицъ одного числа къ другому*, *равенства* и *неравенства* (бо́льшаго и меньшаго), *цѣлаго и его части*, *дѣйствія надъ числомъ*.

Нѣкоторыя единицы мѣры.

Изъ особенныхъ единицъ мѣры заслуживаютъ вниманія: единицы для измѣренія разстояній въ астрономіи, единицы аптекарскаго вѣса (вышедшія уже въ зап. Европѣ изъ употребленія и замѣненныя тамъ единицами метрической системы), единицы вѣса драгоцѣнныхъ камней и единицы времени.

За единицу мѣры при измѣреніи астрономическихъ разстояній принимаются: экваторіальный радіусъ земли и среднее разстояніе земли отъ солнца. Экваторіальный радіусъ земли равенъ 6378,19 километра, а среднее разстояніе земли отъ солнца равно 23 408 земнымъ радіусамъ или же 149 300 672 километрамъ.

Въ аптекахъ у насъ принятъ за единицу мѣры вѣса: *аптекарскій фунтъ* Нюрнбергскаго аптекарскаго вѣса, равный приблизительно 84 золотникамъ вѣса торговаго. Въ аптекарскомъ фунтѣ 12 *унцій*, въ унціи—8 *драхмъ*, въ драхмѣ—3 *скрупула*, а въ скрупулѣ—60 *грановъ*.

Для измѣренія вѣса драгоцѣнныхъ камней (а иногда и золота) употребляется единица, извѣстная подъ именемъ *карата*. Каратъ равняется $\frac{33}{625}$ золотника или 0,0528 золотника.

Время полнаго обращенія земли вокругъ своей оси называется въ наукѣ *звѣздными сутками*, но въ гражданской жизни онѣ неудобны. Не менѣе неудобны *солнечныя сутки*, т. е. промежутокъ времени, протекающій между двумя послѣдовательными прохожденіями центра солнца чрезъ меридіанъ мѣста. За основную единицу мѣры времени принятъ нѣкоторый промежутокъ времени, называемый *средними сутками*. Въ курсахъ астрономіи и космографіи выясняется— что̀ такое среднія сутки и какое существуетъ отношеніе между истиннымъ солнечнымъ, звѣзднымъ и среднимъ временемъ. Среднее время показываютъ вѣрно идущіе часы.

Звѣзднымъ годомъ называется промежутокъ времени, употребляемый солнцемъ для совершенія полнаго оборота по эклиптикѣ, *тропическимъ* же—промежутокъ времени между двумя послѣдовательными прохожденіями солнца чрезъ точку весенняго равноденствія. Продолжительность звѣзднаго года равна по новѣйшимъ вычисленіямъ 365,256 358 ср. сутокъ, или 365 с. 6 ч. 9 м. 9,324 с., а продолжительность года тропическаго равна

365,242201 ср. сутокъ, или 365 с. 5 ч. 48 м. 46,166 сек.

Гражданскій годъ и календари: Юліанскій и Григоріанскій.

Гражданскимъ годомъ называется промежутокъ времени, равный либо 365, либо 366 суткамъ; только въ коммерческихъ сношеніяхъ годъ принимается иногда за 360 сутокъ. По Юліанскому календарю продолжительность гражданскаго года принимается равною 365,25 сутокъ,—что больше тропическаго года на 0,007799 сутокъ *). Годъ, предшествовавшій первому году по Р. Х., по этому календарю оказался годомъ простымъ (въ 365 дней), а каждый четвертый—годомъ високоснымъ (въ 366 дней); при этомъ въ теченіе періода въ 128 лѣтъ, первые три года котораго суть годы простые, а каждый четвертый високосный, разность между суммою гражданскихъ годовъ этого періода и суммою всѣхъ тропическихъ достигаетъ приблизительно величины одного дня. Такъ какъ тропическій годъ меньше гражданскаго, то по Юліанскому лѣтоисчисленію кален-

*) Въ противоположность гражданскому тропическій годъ иногда называютъ *астрономическимъ*.

дарь отстаетъ отъ лѣтосчисленія истиннаго, притомъ въ теченіе 128 лѣтъ, приблизительно на однѣ сутки. На Никейскомъ вселенскомъ соборѣ (въ 325 г. по Р. Х.) была исправлена ошибка въ 3 дня, накопившаяся со времени установленія Юліанскаго календаря (въ 44 г. до Р. Х.), а при папѣ Григоріи XIII была вновь исправлена накопившаяся ошибка въ 10 дней: Григорій XIII предписалъ вмѣсто 5-го октября 1582 г. считать 15-ое число того же мѣсяца того же года. Но, кромѣ того, тогда же, для устраненія дальнѣйшихъ ошибокъ, постановлено: всѣ годы, нумера которыхъ дѣлятся на 400, считать високосными; равнымъ образомъ считать високосными всѣ годы, нумера которыхъ дѣлятся на 4, но не оканчиваются двумя нулями; годы же, нумера которыхъ не дѣлятся на 4, и годы, нумера которыхъ оканчиваются двумя нулями, но не дѣлятся на 400, считать простыми.—Средняя величина года по Григоріанскому календарю равна 365,2465 сутокъ, что больше средней величины тропическаго года всего на 0,00028 однѣхъ сутокъ; лишній день накопится такимъ образомъ, какъ въ томъ легко убѣдиться простымъ вычисленіемъ (раздѣливъ 1 на 0,00028), въ теченіе 4000 лѣтъ.—Германскій астрономъ Мэдлеръ предложилъ систему, при которой ошибка, равная суткамъ набѣжитъ, только въ теченіе 50 000 лѣтъ: для этого онъ предложилъ считать одинъ изъ високосныхъ годовъ Юліанскаго періода въ 128 лѣтъ простымъ; но его система не принята на практикѣ *). Нынѣ Юліанскій календарь отстаетъ отъ Григоріанскаго на 12 дней, такъ что когда у насъ 1-ое января, по Григоріанскому считается уже 13-е число того же мѣсяца. Юліанское лѣтосчисленіе отличается простотою, весьма удобною для практическихъ цѣлей и для вычисленій, касающихся такъ наз. *Пасхаліи*, т. е. вычисленій, съ помощью которыхъ опредѣляется—въ какое изъ воскресеній даннаго года празднуется Свѣтлое Христово Воскресеніе.

Монетныя единицы.

См. § 60 «Учебника». До 1886 г. золотая и серебряная монета въ Россіи чеканилась: золотая—88-ой пробы, серебряные рубль, полтина и четвертакъ—$83\frac{1}{3}$ пробы, а мелкая серебряная монета—48-ой пробы. (*Пробою* называется число золотниковъ благороднаго металла въ одномъ фунтѣ сплава). Съ 1886 года и золотая, и серебряная *банковая* монета (рубли, полтинники и четвертаки) чеканятся изъ сплавовъ, въ которыхъ на 1000 частей сплава приходится 900 частей благороднаго металла. При этомъ цѣнность серебрянаго рубля осталась та же, что прежде, но въ полуимперіалѣ столько чистаго золота, что стоимость полуимперіала нынѣ весьма мало превышаетъ цѣнность 5-ти серебряныхъ рублей (а не равна 5 руб. 15 коп. серебра, какъ это было ранѣе). Такимъ образомъ полуимперіалъ нынѣ почти равенъ 20-ти франкамъ. Мелкая же (не банковая) серебряная монета чеканится по прежнему 48-й пробы.—Полезно помнить, что фунтъ золота дороже фунта серебра въ 15 разъ.

Что касается кредитныхъ билетовъ нашихъ, то цѣнность ихъ по отношенію къ серебру подвергается иногда колебаніямъ, и стоимость одного кредитнаго билета рублеваго достоинства не равна стоимости одного рубля серебрянаго. Стоимость кредитныхъ билетовъ рублеваго достоинства, выраженная въ зависимости отъ стоимости рубля серебрянаго, называется *курсомъ* кредитнаго рубля.

Взаимныя отношенія мѣръ емкости и вѣса и сравнительная таблица.

Вообще достойны вниманія слѣдующія взаимныя отношенія между мѣрами емкости и вѣса: объемъ четверика равенъ 1,600 куб. дюймамъ, объемъ ведра — 750 куб. дюймамъ; четверикъ содержитъ 64 фунта, а ведро — приблизительно 30 фунтовъ перегнанной воды при $13^1/_3{}^0$ Реомюра; фунтъ есть приблизительно вѣсъ 25 куб. дюймовъ дестиллированной воды при $13^1/_3$ гр. Реомюра. Что касается взаимныхъ соотно-

*) «Описательная Астрономія» проф. Хандрикова. 1886 г.

шеній русскихъ, французскихъ и англійскихъ мѣръ длины, поверхностей и объемовъ, то эти отношенія представлены въ слѣд. таблицѣ:

1 русс. или англ. футъ	= 0,93829	франц. фута	= 0,30479	метра
1 франц. футъ	= 1,06577	русс. фута	= 0,32484	метра
1 метръ	= 3,28090	русс. фут.	= 3,07844	фр. фута
1 десятина	= 1,09250	гектара	= 2,69972	акра
1 гектаръ	= 0,91533	десятины	= 2,47114	акра
1 акръ	= 0,37041	десятины	= 0,40467	гектара
1 ведро	= 0,1230	гектолитра	= 2,7070	галлона
1 гектолитръ	= 8,1308	ведра	= 22,0097	галлона
1 галлонъ	= 0,3694	ведра	= 0,0454	гектол.

II. О нумераціи и искусственныхъ системахъ счисленія.

Системы счисленія. См. § 6 «Учебника». Въ основѣ десятичной системы счисленія лежитъ двоякое значеніе цыфры: 1) абсолютное ея значеніе, т. е. значеніе цыфры, не зависящее отъ мѣста ея среди другихъ цыфръ, и 2) относительное, мѣстное значеніе цыфры, т. е. величина каждой изъ единицъ, обозначаемыхъ цыфрою въ зависимости отъ мѣста ея среди другихъ цыфръ.

Въ общепринятой системѣ счисленія (нумераціи) различаются: т. наз. простыя единицы, затѣмъ десятки, сотни, тысячи, десятки тысячъ и т. д. Эта система называется *десятичною*, число же 10 называется *основаніемъ* этой системы счисленія.

Та же идея (мѣстнаго значенія цыфръ) лежитъ въ основѣ системъ счисленія, называемыхъ двоичною, троичною, четверичною, пятеричною и т. д. до девятеричной включительно. Сущность ихъ въ слѣдующемъ:

При двоичной системѣ счисленія употребляется только двѣ цыфры: 1 и 0. Единицы разныхъ разрядовъ этой системы составляются слѣдующимъ образомъ: въ единицѣ второго разряда двѣ единицы перваго, въ единицѣ третьяго—двѣ единицы второго, въ единицѣ четвертаго — двѣ единицы третьяго, и т. д.—Легко видѣть, что всякое число по этой системѣ можетъ быть обозначено помощью цыфръ 1 и 0. Дѣйствительно: какое бы число единицъ ни было дано, онѣ могутъ быть разложены на пары; если это число—четное, то отдѣльныхъ единицъ, не входящихъ въ составъ какой нибудь пары, въ данномъ числѣ нѣтъ; стало-быть, при обозначеніи четнаго числа по двоичной системѣ цыфра единицъ будетъ нуль; число единицъ второго разряда въ четномъ числѣ можетъ быть либо нулемъ, либо единицей, смотря по тому, имѣемъ ли мы дѣло съ четнымъ числомъ паръ или нѣтъ; и т. д.; видимъ, что для обозначенія четныхъ чиселъ по двоичной системѣ, необходимо и достаточно имѣть двѣ цыфры, изъ которыхъ одна обозначаетъ одну единицу, а другая есть нуль. Если же данное число есть число нечетное, то оно состоитъ изъ нѣкотораго количества паръ, т. е. въ данномъ случаѣ изъ единицъ второго разряда, и одной единицы; стало-быть, цыфра единицъ въ этомъ случаѣ будетъ 1. Что же касается остальныхъ цыфръ числа, то онѣ и въ этомъ случаѣ суть либо единицы, либо нули. Сталобыть, всякое цѣлое число можетъ быть обозначено съ помощью двухъ цыфръ по двоичной системѣ.

При обозначеніи чиселъ по троичной системѣ употребляются три цыфры: 1, 2 и 0. Единица второго разряда при этой системѣ въ 3 раза болѣе единицы перваго; единица третьяго — въ 3 раза болѣе единицы второго; и т. д. Разсужденіями, подобными употребленнымъ выше, можно убѣдиться въ томъ, что всякое цѣлое число можетъ быть обозначено помощью сказанныхъ трехъ цыфръ по троичной системѣ счисленія.

Точно такъ же при четверичной системѣ употребляются четыре цыфры: 1, 2, 3 и 0, по пятеричной—пять цыфръ: 1, 2, 3, 4 и 0, и т. д. до десятичной включительно. Для построенія системъ, основаніе которыхъ больше десяти, надо придумать какіе-либо особенные знаки для обозначенія чиселъ, большихъ 9-ти и меньшихъ принятаго основанія системы: одиннадцатеричная система требуетъ отдѣльнаго знака для обозначенія 10-ти, двѣнадцатеричная—двухъ знаковъ: одного—для обозначенія десяти, и другого—для обозначенія одиннадцати, и т. д. Но сущность обозначенія чиселъ по этимъ системамъ, очевидно, та же, что при десятичной системѣ.

Отличіе искусственныхъ системъ счисленія отъ десятичной.

Существенное различіе между десятичною и другими (искусственными) системами счисленія заключается въ слѣдующемъ: 1) въ десятичной системѣ единица любого разряда имѣетъ отдѣльное словесное названіе, чего въ другихъ системахъ нѣтъ, и 2) въ десятичной системѣ, кромѣ единицъ различныхъ разрядовъ, различаются единицы различныхъ классовъ, что́ весьма облегчаетъ не только устное, но и письменное обозначеніе чиселъ, и чего въ другихъ системахъ вовсе нѣтъ.

Обозначеніе чиселъ по искусственнымъ системамъ.

Для того, чтобы обозначить съ помощью цыфръ какое нибудь, написанное по десятичной системѣ, число по какой либо иной (напр., шестеричной) системѣ, дѣлятъ данное число на 6, полученное частное тоже на 6, новое частное опять на 6, и т. д. до тѣхъ поръ, пока въ частномъ получится число, меньшее 6-ти. Первый остатокъ выражаетъ число простыхъ единицъ, второй—число единицъ второго разряда и т. д. до послѣдняго остатка включительно; послѣднее же частное выражаетъ число единицъ наивысшаго разряда. Такъ, напр., пусть требуется обозначить число 7635 по шестеричной системѣ; расположеніе вычисленій можетъ быть слѣдующее:

6	6	6	6	
7635	1272	212	35	**5**
16	7	32	**5**	
43	12	**2**		
15	**0**			
3				

Число, насъ интересующее, стало-быть, обозначается по шестеричной системѣ такъ: 55203.

Для опредѣленія, какое именно десятичное число обозначается данною совокупностью цыфръ, обозначающихъ число по какой нибудь другой (искусственной) системѣ, можно прибѣгнуть къ дѣйствію умноженія. Такъ, пусть запись 145302_6 обозначаетъ число, обозначенное по шестеричной системѣ; тогда

$$145302_6 = 2 + 6 \times 0 + 6^2 \times 3 + 6^3 \times 5 + 6^4 \times 4 + 6^5 \times 1.$$

Дѣйствія надъ числами.

Надъ числами, обозначенными по какой нибудь системѣ, могутъ быть производимы всѣ ариѳметическія дѣйствія, причемъ результаты получатся въ той же системѣ; при этомъ только должно помнить, что данное (равное основанію системы) число единицъ какого нибудь разряда составляетъ одну единицу слѣдующаго. Полезно поэтому составить отдѣльныя таблицы сложенія и вычитанія; но возможно обойтись, очевидно, и безъ нихъ, дѣлая вспомогательныя вычисленія въ умѣ. Такъ, пусть дано:

1) Сложить 42433_6 и 50524_6.

$$\begin{array}{r} 42433_6 \\ +\,50424_6 \\ \hline 133301_6 \end{array}.$$

2) Вычесть 13542_6 изъ 40350_6.

$$\begin{array}{r} \dot{4}03\dot{5}0_6 \\ -\,13542_6 \\ \hline 23404_6 \end{array}.$$

3) Умножить 2315_6 на 34_6.

$$\begin{array}{r} 2315_6 \\ \times\quad 34_6 \\ \hline 14112 \\ 11353 \\ \hline 132042_6 \end{array}.$$

4) Раздѣлить 23511_6 на 35_6.

$$\begin{array}{r|l} 23511_6 & 35_6 \\ \cline{2-2} -\,232 & 405_6 \\ \cline{1-1} 311 & \\ -\,311 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Обозначенія первыхъ десяти чиселъ.

Вотъ обозначенія первыхъ десяти чиселъ по восьми системамъ, отъ двоичной до девятеричной включительно:

по двоичной:	1,	10,	11,	100,	101,	110,	111,	1000,	1001,	1010.
„ троичной:	1,	2,	10,	11,	12,	20,	21,	22,	100,	101.
„ четверичной:	1,	2,	3,	10,	11,	12,	13,	20,	21,	22.
„ пятеричной:	1,	2,	3,	4,	10,	11,	12,	13,	14,	20.
„ шестеричной:	1,	2,	3,	4,	5,	10,	11,	12,	13,	14.
„ семеричной:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	10,	11,	12,	13.
„ восьмеричной:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	10,	11,	12.
„ девятеричной:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	10.	11.

III. О признакахъ дѣлимости.

Признакъ дѣлимости чиселъ на 11.

См. §§ 75—79 „Учебника“. Изъ признаковъ дѣлимости чиселъ, кромѣ разсмотрѣнныхъ въ „Учебникѣ“, достоинъ вниманія признакъ дѣлимости чиселъ на 11. Легко видѣть, что

$$\begin{aligned} 1 &= 11 \times 0 + 1, \\ 10 &= 11 \times 1 - 1, \\ 100 &= 11 \times 9 + 1, \\ 1000 &= 11 \times 91 - 1, \\ 10000 &= 11 \times 909 + 1, \end{aligned}$$

и т. д. Такимъ образомъ единицы перваго, третьяго, пятаго и вообще нечетнаго разряда равны нѣкоторому числу, кратному 11-ти, увеличенному на одну единицу перваго разряда; единицы же второго, четвертаго и вообще четнаго разряда равны нѣкоторому числу, кратному 11-ти, но уменьшенному на единицу перваго разряда. Отсюда слѣдуетъ, что:

1) Цыфра, сопровождаемая нечетнымъ числомъ нулей, обозначаетъ число, кратное 11-ти, уменьшенное на абсолютное значеніе этой цыфры, а цыфра, сопровождаемая четнымъ числомъ нулей, выражаетъ число, кратное 11-ти, но увеличенное на абсолютное значеніе цыфры.

2) Всякое число равняется нѣкоторому числу, кратному 11-ти, увеличенному на сумму цыфръ, стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ, и уменьшенному на сумму цыфръ, стоящихъ на мѣстахъ нечетныхъ. — Пусть, напр., дано число 2 676 597. Тогда

$$\begin{aligned} 2\,000\,000 &= \text{кр. } 11 + 2, \\ 600\,000 &= \text{кр. } 11 - 6, \\ 70\,000 &= \text{кр. } 11 + 7, \\ 6\,000 &= \text{кр. } 11 - 6, \\ 500 &= \text{кр. } 11 + 5, \\ 90 &= \text{кр. } 11 - 9, \\ 7 &= \phantom{\text{кр. } 11 +{}} 7; \end{aligned}$$

а потому $\quad 2\,676\,595 = \text{кр. } 11 + (2 + 7 + 5 + 7) - (6 + 6 + 9).$

Отсюда вытекаетъ слѣдующій признакъ дѣлимости чиселъ на 11: если разность между суммою цыфръ, стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ, и суммою цыфръ, стоящихъ на мѣстахъ четныхъ, есть кратное одиннадцати (нуль при этомъ принимается тоже за кратное одиннадцати), то число дѣлится безъ остатка на 11; въ противномъ случаѣ оно на 11 не дѣлится.

Признаки дѣлимости чиселъ на 7, на 13 и 37 могутъ быть выведены слѣдующимъ образомъ: представимъ себѣ, что мы имѣемъ дѣло съ системою счисленія, основаніе которой есть 1000, и примемъ во вниманіе, что вообще — Признаки дѣлимости чиселъ на 7, 13 и 37.

$$1000 = \text{кр. } 7 - 1 = \text{кр. } 13 - 1 = \text{кр. } 37 + 1$$
$$1000^2 = \text{кр. } 7 + 1 = \text{кр. } 13 + 1 = \text{кр. } 37 + 1$$
$$1000^3 = \text{кр. } 7 - 1 = \text{кр. } 13 - 1 = \text{кр. } 37 + 1$$

и что вообще

$$1000^{2n} = \text{кр. } 7 + 1 = \text{кр. } 13 + 1 = \text{кр. } 37 + 1$$
$$1000^{2n-1} = \text{кр. } 7 - 1 = \text{кр. } 13 - 1 = \text{кр. } 37 + 1.$$

Если число N=24 261 753 816, то, раздѣливъ его на грани по три цыфры въ каждой, мы получимъ, что

$$N = 816 + 1000 \times 753 + 1000^2 \times 261 + 1000^3 \times 24;$$

Разсмотримъ это число по отношенію къ 7-ми.

$$\begin{aligned} N = 816 &+ (\text{кр. } 7 - 1) \times 753 + \\ &+ (\text{кр. } 7 + 1) \times 261 + \\ &+ (\text{кр. } 7 - 1) \times 24\ , \end{aligned}$$

$$\text{или } N = \text{кр. } 7 + 816 + 261 - (753 + 24),$$

откуда получаемъ слѣдующій признакъ дѣлимости на 7: раздѣливъ обозначеніе числа, считая отъ правой руки къ лѣвой, на грани по три цыфры въ каждой и найдя разность между суммою чиселъ, обозначаемыхъ гранями, стоящихъ на четныхъ мѣстахъ, и суммою чиселъ, обозначаемыхъ гранями, стоящими на мѣстахъ нечетныхъ, найдемъ, что если эта разность дѣлится на 7, то и все число раздѣлится на 7; въ противномъ случаѣ оно на 7 не раздѣлится. — Такой же признакъ получимъ для 13, потому что

$$N = \text{кр. } 13 + 816 + 261 - (753 + 24).$$

Что же касается признака дѣлимости числа на 37, то получимъ

$$\begin{aligned} N = 816 &+ (\text{кр. } 37 + 1) \times 753 + \\ &+ (\text{кр. } 37 + 1) \times 261 + \\ &+ (\text{кр. } 37 + 1) \times 24\ , \end{aligned}$$

$$\text{или } N = \text{кр. } 37 + (816 + 753 + 216 + 24),$$

признакъ, аналогичный признаку дѣлимости чиселъ на 9 или на 3, съ тою разницей, что роль цыфръ въ интересующемъ насъ случаѣ играютъ грани. Точно также признаки дѣлимости чиселъ на 7 и на 13 аналогичны признаку дѣлимости чиселъ на 11.

Замѣчаніе. Признаки дѣлимости чиселъ зависятъ исключительно отъ принятой системы счисленія, самая же дѣлимость—отъ состава числа изъ слагаемыхъ, дѣлящихся на данное число. Этого не должно не забывать. — Признаки дѣлимости и система счисленія.

Если за основаніе системы принять какое-либо число, отличное отъ 10-ти, то легко вывести признаки дѣлимости чиселъ, обозначенныхъ по этой системѣ: 1) на число меньшее основанія системы счисленія одною единицею, 2) на число, большее основанія одною единицею, 3) на число, равное основанію системы или представляющему дѣлителя его, 4) на число, равное какой либо степени основанія или дѣлителя ея.—Это предоставляется учащемуся.

См. § 78 „Учебника". Условимся называть два числа, дающія, при раздѣленіи на одно и то же третье, одинъ и тотъ же остатокъ, *сравнимыми по модулю*, равному этому третьему числу. Такъ, 18 и 23 сравнимы по модулю 6, а 28 и 31 сравнимы по модулю 3. Обозначаютъ это слѣдующимъ образомъ: — Провѣрка дѣйствій съ помощью признаковъ дѣлимости.

$$18 \equiv 23\ (\textit{mod. } 5);\ \text{а } 28 \equiv 31\ (\text{mod. } 3).$$

Если множимое и множитель обозначены очень большимъ числомъ цыфръ, такъ что провѣрка дѣйствія умноженія потребовала бы много труда и времени, то для довольно скорой провѣрки дѣйствія можно пользоваться слѣдующей теоремой: *произведеніе двухъ чиселъ и произведеніе остатковъ, получаемыхъ при раздѣленіи этихъ чиселъ на одного и того же дѣлителя, сравнимы по тому же дѣлителю.* Такъ, напр., $18 \times 27 \equiv 3 \times 2$ (mod. 5).

Дѣйствительно: пусть даны два числа A и B, и пусть

$$A = m \times q + r, \text{ а } B = m \times q_1 + r_1;$$

требуется доказать, что $A \times B \equiv r \times r_1$ (mod. m).

Изъ данныхъ равенствъ получимъ, что

$$A \times B = (m \times q + r) \times (m \times q_1 + r_1)$$
$$= m \times q \times m \times q_1 + r \times m \times q_1 + m \times q \times r_1 + r \times r_1,$$

т. е. что $A \times B =$ кр. $m + r \times r_1$, откуда и заключаемъ, что

$$A \times B \equiv r \times r_1 \text{ (mod. } m).$$

Для провѣрки умноженія можетъ служить любое число съ извѣстнымъ признакомъ дѣлимости, напр., 2, 3, 4, 5, 25, 9, 11. Но первыя пять чиселъ неудобны потому, что если пользоваться признаками дѣлимости на 2 или на 5, то ошибка только тогда будетъ замѣтна, если она, не будучи кратной 2-хъ или 5-ти, сдѣлана въ цыфрѣ единицъ; если далѣе пользоваться признаками дѣлимости на 4 и на 25, то ошибка только тогда будетъ замѣтна, если она, будучи кратной 4-хъ или 25-ти, сдѣлана въ двухъ послѣднихъ цыфрахъ; наконецъ, что касается признака дѣлимости на 3, то имъ не пользуются потому, что изъ трехъ послѣдовательныхъ чиселъ одно непремѣнно есть кратное 3-хъ, и ошибка, кратная 3-хъ, очень легко можетъ вкрасться въ вычисленіе. Поэтому дѣлаютъ провѣрку съ помощью 9-ти или 11-ти.

Пусть, напр., вычислено, что 17 638 × 5 126 = 90 412 388.

Остатокъ отъ раздѣленія какого угодно числа на 9 равенъ остатку отъ раздѣленія суммы цыфръ его на 9; поэтому

$$17\,638 \equiv 25 \text{ (mod. 9)}$$
$$5\,126 \equiv 14 \text{ (mod. 9)}$$
$$90\,411\,388 \equiv 35 \text{ (mod. 9)}$$

Если умноженіе сдѣлано вѣрно, то

$$35 \equiv 25 \times 14 \text{ (mod. 9); или } 35 \equiv 350 \text{ (mod. 9);}$$
$$\text{Но } 35 \equiv 8 \text{ (mod. 9), а } 350 \equiv 8 \text{ (mod. 9);}$$

стало-быть, интересующіе насъ окончательные остатки равны между собою. Слѣд. есть вѣроятность, что вычисленіе сдѣлано вѣрно.

Замѣчаніе 1-е. Можно провѣрить полученный результатъ съ помощью двухъ чиселъ: 9 и 11. Для того, чтобы въ вычисленіе, дающее въ обоихъ случаяхъ удовлетворительный результатъ, вкралась ошибка, необходимо, чтобы эта ошибка была въ одно и то же время кратною и 9-ти и 11-ти, что уже мало вѣроятно.

Замѣчаніе 2-е. Дѣйствія сложенія и вычитанія тоже могутъ быть провѣряемы съ помощью признаковъ дѣлимости; но этого обыкновенно не дѣлаютъ. Что же касается дѣйствія дѣленія, то оно можетъ быть провѣрено, съ помощью признаковъ дѣлимости, на томъ основаніи, что дѣлимое равно произведенію изъ дѣлителя на частное, увеличенному на остатокъ.

IV. Объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и о первоначальныхъ числахъ.

Рядъ Ламé. См. § 83 „Учебника.“ Теорема о числѣ дѣленій, производимыхъ для отысканія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ по Евклидову способу, извѣстная въ наукѣ подъ названіемъ теоремы Ламé (по имени открывшаго ее французскаго геометра), основана на одномъ изъ свойствъ ряда чиселъ

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 и т. д.,

изъ которыхъ первыя два суть 1 и 2, а каждое изъ слѣдующихъ равенъ суммѣ двухъ ему непосредственно предшествующихъ. Условимся для краткости сказанный рядъ чиселъ называть рядомъ Ламé.

Теорема I. Въ рядѣ Ламé за всякою группою членовъ съ k цыфрами въ каждомъ слѣдуетъ число, въ которомъ $k + 1$ цыфра.

Пусть два числа M и N этого ряда имѣютъ каждое по k цыфръ и пусть изъ нихъ число N есть послѣднее число съ этимъ числомъ цыфръ; требуется доказать, что число цыфръ слѣдующаго члена ряда, равно $k + 1$. Членъ ряда, слѣдующій за числомъ N, равенъ по условію $M+N$; кромѣ того, по условію $M+N$ содержитъ болѣе k цыфръ. Стало-быть, въ то время какъ

$$M<10^k \text{ и } N<10^k, \text{ число } M+N>10^{k-1}.$$

Но съ другой стороны, $M<N$; стало-быть,

$$M+N<2N<2\cdot 10^k; \text{ слѣд. } 10^{k-1}<M+N<2\cdot 10^k$$

и число цыфръ члена $M+N$ равно $k+1$. Что и требовалось доказать.

Теорема II. Въ рядѣ Ламе́ число членовъ съ одинаковымъ числомъ цыфръ въ каждомъ равно либо четыремъ, либо пяти.

Допустимъ, что членъ $M+N$ есть первый, въ которомъ $k+1$ цыфра, и разсмотримъ члены ряда Ламе́, начиная съ $M+N$:

$$M+N,\ M+2N,\ 2M+3M,\ 3M+5N,\ 5M+8N \text{ и т. д.}$$

По условію, число цыфръ въ членѣ $M+N$ равно $k+1$; въ членѣ $M+2N$ тоже $k+1$ цыфръ, потому что по предыдущему

$$M+N<2\cdot 10^k, \text{ а } N<10^k, \text{ откуда } M+2N<3\cdot 10^k.$$

Принявъ во вниманіе, что

$$M+N<2\cdot 10^k, \text{ найдемъ, что } 2M+3N<5\cdot 10^k.$$

Точно такъ же найдемъ, что четвертое число $3M+5N<8\cdot 10^k$ Такимъ образомъ число цыфръ не только въ членѣ $M+N$, но также и въ каждомъ изъ слѣдующихъ за нимъ членовъ:

$$M+2N,\ 2M+3N,\ 3M+5N$$

равно $k+1$. Стало-быть, число членовъ, обозначаемыхъ съ помощью $(k+1)$-ой цыфры, не можетъ быть меньше четырехъ, т. е. оно должно быть или равно 4-мъ, или больше 4-хъ. Разсмотримъ пятый членъ нашего ряда; онъ равенъ числу $5M+8N$, которое меньше 13×10^k, т. е. меньше $10^{k+1}+3\times 10^k$; членъ этотъ можетъ, очевидно, имѣть либо $k+1$ цыфръ, либо $k+2$ цыфры. Въ первомъ случаѣ число членовъ ряда, имѣющихъ по $(k+1)$-ой цыфрѣ, равно 5-ти, а въ послѣднемъ — только 4-мъ, что̀ свидѣтельствуетъ о томъ, что число членовъ съ одинаковымъ числомъ цыфръ можетъ быть равно не только 4-мъ, но и 5-ти.

Теперь остается еще доказать, что оно не можетъ быть больше 5-ти. Разсмотримъ для этого шестой членъ ряда; онъ равенъ

$$8M+13N=10M+10N+3N-2M=10\times(M+N)+3N-2M.$$

Но, по предыдущему, число цыфръ въ $M+N$ равно $k+1$; стало-быть, число $10\times(M+N)$ имѣетъ $k+2$ цыфры; отъ прибавленія къ этому числу $3N$ количество цыфръ не измѣнится, такъ какъ $N<10^k$; но и отъ вычитанія изъ полученнаго результата числа $2M$ число цыфръ тоже не измѣнится, потому что $2M<2N<3N$, каковое послѣднее число именно и прибавлено къ $10\times(M+N)$. Стало-быть, число цыфръ шестого члена равно непремѣнно $k+2$, а въ такомъ случаѣ число членовъ съ $k+1$ цыфрами не можетъ быть болѣе 5-ти, а можетъ быть равно либо 4-мъ, либо 5-ти. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-е. Если $A=B\times q_1+r_1$ и если A и B заключаются между двумя членами Q и $P+Q$ ряда Ламе́, то остатокъ r_1 меньше не только числа Q, но даже и числа P. — Дѣйствительно,

$$r_1=A-B\times q_1; \text{ но } A<P+Q, \text{ и } B>Q,$$

слѣдовательно

$$A-B\times q_1<P+Q-Q\times q_1,$$

т. е.

$$r_1<P-Q\times(q_1-1); \text{ стало-быть, и подавно } r_1<P;$$

что̀ и требовалось доказать.

Слѣдствіе 2-е. Если $A=B\times q_1+r_1$ и если A равно члену $P+Q$, а B больше члена Q ряда Ламе́, то и въ этомъ случаѣ $r_1<P$, ибо и тогда

$$A=P+Q, \text{ а } B>Q; \text{ откуда } A-B\times q_1<P+Q-Q\times q_1$$

т. е.

$$A-B\times q_1<P-Q\times(q_1-1), \text{ или } r_1<P-Q\times(q_1-1);$$

стало-быть, и подавно

$$r_1<P.$$

Слѣдствіе 3-е. Если $A = B \times q_1 + r_1$, если при этомъ $A = P + Q$, а $B = Q$, то r_1 и въ этомъ случаѣ меньше P. Дѣйствительно,

$$r_1 = A - B \times q_1 = P + Q - Q \times q_1 = P - Q \times (q_1 - 1)$$

откуда очевидно, что $r_1 < P$.

Замѣчаніе. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ, т. е. въ случаѣ если $A = P + Q$, а $B = Q$, очевидно, что

$$A = B \times 1 + P,$$

гдѣ $P < B$ и гдѣ $1 = q_1$, а $P = r_1$.

Теорема Ламé.

Теорема III. Число дѣленій, необходимыхъ для нахожденія, по способу Евклида, общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ чиселъ, всегда меньше упятереннаго числа цыфръ меньшаго изъ нихъ.

Пусть общій наибольшій дѣлитель чиселъ A и B, изъ которыхъ $A > B$, равняется r_n; пусть число цыфръ числа B равно k; требуется доказать, что $n < 5k$. Пусть B содержится между двумя послѣдовательными членами P и Q ряда Ламé:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \cdots,\ L,\ M,\ N,\ P \text{ и } Q;$$

сравнимъ съ этимъ рядомъ рядъ чиселъ

$$r_n,\ r_{n-1},\ r_{n-2},\ \cdots,\ r_1 \text{ и } B.$$

Такъ какъ $P < B < Q$, то, по предыдущему, $r_1 < N$; но если $r_1 < N$, то $r_2 < L$, и т. д. Стало-быть, число членовъ въ рядѣ остатковъ непремѣнно меньше числа членовъ ряда Ламé. Если число цыфръ въ B равно k, то число цыфръ въ членѣ Q ряда Ламé равно либо тоже k, либо $k + 1$. Такъ какъ число всѣхъ остатковъ, по предыдущему, менѣе числа всѣхъ членовъ ряда Ламé отъ 1-цы до Q включительно, то для того, чтобы узнать—сколько, максимумъ, можетъ быть остатковъ, должно узнать—сколько членовъ заключается въ рядѣ Ламé, начиная съ единицы и кончая числомъ P. Такъ какъ первое число съ $(k + 1)$-ою цыфрою есть Q, то каждый изъ остальныхъ членовъ содержитъ менѣе $(k+1)$-ой цыфры; число членовъ съ k цыфрами, по теоремѣ II-ой, не болѣе 5-ти; число членовъ съ $(k - 1)$-ою цыфрою тоже не болѣе 5-ти и т. д.; стало-быть, число всѣхъ членовъ никакъ не болѣе $k \times 5$ или $5k$.

А въ такомъ случаѣ, при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ чиселъ по Евклидову способу, число получаемыхъ остатковъ: r_1, r_2, r_3, $\cdots$, r_{n-1}, r_n, тоже не болѣе $5k$, откуда слѣдуетъ, что число послѣдовательныхъ дѣленій, необходимыхъ для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, не болѣе упятереннаго числа цыфръ въ меньшемъ изъ нихъ. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Эта теорема остается справедливою также и въ томъ случаѣ, если B равно какому нибудь изъ чиселъ ряда Ламé, напр., числу Q, въ которомъ n цыфръ. Ибо, если Q есть послѣднее изъ чиселъ этого ряда съ n цыфрами, то число остатковъ менѣе $5n$, а если Q не послѣднее изъ чиселъ ряда Ламé съ n цыфрами, то число остатковъ и подавно меньше $5n$. Учащемуся предоставляется, въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, теоремы I — III проработать на частномъ случаѣ и примѣнить къ опредѣленнымъ цѣлымъ числамъ.

Нѣкоторыя правила.

См. § 87 «Учебника». При отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ достойны вниманія слѣдующія правила:

1) Если общій наибольшій дѣлитель двухъ какихъ нибудь послѣдовательныхъ остатковъ настолько очевиденъ, что не можетъ быть никакого сомнѣнія въ томъ, что нѣтъ общаго дѣлителя, который былъ бы больше этого очевиднаго общаго наибольшаго ихъ дѣлителя, то продолжать дальнѣйшее дѣленіе не для чего.

2) Если мы пришли къ двумъ послѣдовательнымъ остаткамъ, у которыхъ, очевидно, нѣтъ никакихъ общихъ дѣлителей, кромѣ единицы, т. е. если мы пришли къ двумъ остаткамъ взаимно-первымъ другъ къ другу, то продолжать дѣленіе тоже не для чего.

3) Если при раздѣленіи какого либо изъ остатковъ на слѣдующій мы ясно видимъ, что, взявъ большее на одну единицу частное, мы до-

стигаемъ остатка отрицательнаго, абсолютная величина котораго менѣе абсолютной величины остатка, полученнаго при меньшемъ частномъ, то слѣдуетъ взять большее частное, и съ отрицательнымъ остаткомъ поступать такъ же, какъ и съ положительнымъ.

См. § 89 «Учебника». Условимся, для краткости, обозначать общаго наибольшаго дѣлителя какихъ нибудь чиселъ, напр. 35 и 45, такимъ образомъ: Δ (35, 45), а всякаго дѣлителя ихъ такъ: δ (35, 45). Нѣк. теоремы объ общ. наиб. дѣлителѣ.

Отысканіе общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ основано на слѣдующихъ теоремахъ:

Теорема IV. Если общій наибольшій дѣлитель нѣкоторой группы чиселъ есть общій дѣлитель группы другихъ чиселъ, а общій наибольшій этихъ послѣднихъ есть общій дѣлитель первыхъ, то общій наибольшій дѣлитель первой группы чиселъ равенъ общему наибольшему дѣлителю второй группы.

Пусть $\Delta (A, B, C, \cdots M) = \delta (a, b, c, \cdots m)$ и пусть $\Delta (a, b, c, \cdots m) = \delta (A, B, C, \cdots M)$; требуется доказать, что $\Delta (A, B, C, \cdots M) = \Delta (a, b, c, \cdots m)$.

Предположимъ, что $\Delta (A, B, C, \cdots M) > \Delta (a, b, c, \cdots m)$; въ такомъ случаѣ $\Delta (A, B, C, \cdots M)$ не можетъ быть дѣлителемъ группы чиселъ $a, b, c, \cdots m$, что́ противорѣчитъ первому условію теоремы; стало-быть, $\Delta (A, B, C, \cdots M)$ не можетъ быть больше, чѣмъ

$$\Delta (a, b, c, \cdots m).$$

Предположимъ, что $\Delta (A, B, C, \cdots M) < \Delta (a, b, c, \cdots m)$; тогда

$$\Delta (a, b, c, \cdots m) > \Delta (A, B, C, \cdots M);$$

а въ такомъ случаѣ $\Delta (a, b, c, \cdots m)$ не можетъ быть общимъ дѣлителемъ группы чиселъ: $A, B, C, \cdots M$, — что противорѣчитъ второму условію теоремы. Стало-быть,

$$\Delta (A, B, C, \cdots M)$$

не можетъ быть также и меньше, чѣмъ

$$\Delta (a, b, c, \cdots m).$$

Но въ такомъ случаѣ, разъ $\Delta (A, B, C, \cdots M)$ не больше и не меньше, чѣмъ $\Delta (a, b, c, \cdots m)$, то необходимо, чтобы $\Delta (A, B, C, \cdots M)$ былъ равенъ $\Delta (a, b, c, \cdots m)$. Что и требовалось доказать.

Теорема V. Общій наибольшій дѣлитель трехъ чиселъ A, B и C равенъ общему наибольшему дѣлителю одного изъ нихъ и общаго наибольшаго дѣлителя остальныхъ двухъ.—Пусть

$\Delta (A$ и $B) = D$, пусть $\Delta (A, B$ и $C) = D_1$ и пусть $\Delta (D$ и $C) = D_2$; требуется доказать, что $D_1 = D_2$. Всякій общій дѣлитель чиселъ A, B и C есть также дѣлитель чиселъ D и C, потому что всякій общій дѣлитель чиселъ A и B есть также дѣлитель ихъ общаго наибольшаго дѣлителя D. Стало-быть,

$\delta (A, B$ и $C) = \delta (D$ и $C)$, а тогда и $\Delta (A, B$ и $C) = \delta (D$ и $C)$. Съ другой стороны, всякій общій дѣлитель чиселъ D и C есть также и общій дѣлитель чиселъ A, B и C, т. е. $\delta (D$ и $C) = \delta (A, B$ и $C)$; а въ такомъ случаѣ и $\Delta (D$ и $C) = \delta (A, B$ и $C)$. По предыдущей теоремѣ заключаемъ отсюда, что

$$\Delta (A, B \text{ и } C) = \Delta (D \text{ и } C).$$

Что и требовалось доказать.

Теорема VI. Общій наибольшій дѣлитель сколькихъ угодно чиселъ равенъ общему наибольшему дѣлителю одного изъ нихъ и общаго наибольшаго дѣлителя остальныхъ.—Пусть

$$\begin{aligned}
&\Delta\ (a_0 \text{ и } a_1) = D_1,\\
&\Delta\ (D_1 \text{ и } a_2) = D_2,\\
&\Delta\ (D_2 \text{ и } a_3) = D_3,\\
&\Delta\ (D_3 \text{ и } a_4) = D_4,\\
&\vdots\\
&\Delta\ (D_{m-1} \text{ и } a_m) = D_m;
\end{aligned}$$

требуется доказать, что $\Delta\ (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \cdots\ a_m) = D_m$. Изъ предыдущаго ряда равенствъ легко вывести, что

$$\begin{aligned}
&\Delta\ (a_0\ ,\ a_1 \text{ и } a_2) = D_2,\\
&\Delta\ (a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2 \text{ и } a_3) = D_3,\\
&\Delta\ (a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3 \text{ и } a_4) = D_4,\\
&\vdots\\
&\Delta\ (a_0\ ,\ a_1\ ,\ \cdots\ a_{m-} \text{ и } a_m) = D_m.
\end{aligned}$$

Но по условію:

$$\Delta\ (D_{m-1} \text{ и } a_m) = D_m;$$

стало-быть,

$$\Delta\ (a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ \cdots\ a_m) = \Delta\ (D_{m-1} \text{ и } a_m).$$

Что и требовалось доказать.

Теорема VII. Общіе дѣлители данныхъ чиселъ суть также и дѣлители общаго наибольшаго дѣлителя этихъ чиселъ —Пусть

$$D_m = \Delta\ (a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \cdots\ .\ a_m);$$

требуется доказать, что

$$\delta\ (a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \cdots\ ,\ a_m) = \delta\ (D_m).$$

Предположимъ, что данъ какой-нибудь общій дѣлитель чиселъ:

$$a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \cdots\ a_m;$$

назовемъ его буквою k; тогда, если бы онъ не былъ дѣлителемъ числа D_m, то общимъ наибольшимъ дѣлителемъ этихъ чиселъ было бы не D_m, а произведеніе $D_m \times k$, что́ противорѣчитъ условію. Итакъ, число k не можетъ не быть дѣлителемъ числа D_m, что́ и требовалось доказать.

Теорема VIII. Произведеніе всѣхъ первоначальныхъ дѣлителей, общихъ даннымъ двумъ числамъ, равно общему наибольшему дѣлителю этихъ чиселъ.—Пусть $N = a^\alpha \times b^\beta \times \cdots \times m^\mu \times n^\nu$ и пусть при этомъ N есть произведеніе всѣхъ первоначальныхъ множителей, общихъ числамъ A и B; требуется доказать, что

$$N = \Delta\ (A \text{ и } B).$$

По условію число $A = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \cdots m^\mu \times n^\nu \times P$, а число $B = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \cdots m^\mu \times n^\nu \times Q$; но P и Q не могутъ имѣть никакихъ общихъ множителей, потому что всѣ общіе ихъ множители отобраны для составленія числа N; стало-быть, числа P и Q суть числа взаимно-первыя, а въ такомъ случаѣ N есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ A и B. Что и требовалось доказать.

См. § 60 «Учебника». Для составленія таблицы первоначальныхъ чиселъ, меньшихъ какого нибудь даннаго числа, напр., меньшихъ чѣмъ 1000, или чѣмъ 10 000 и т. п., составимъ сначала таблицу всѣхъ натуральныхъ чиселъ до даннаго предѣла включительно; потомъ вычеркнемъ по порядку всѣ не первоначальныя числа, кратныя 2-хъ, кратныя 3-хъ, кратныя 5-ти, кратныя 7-ми, кратныя 11-ти, и т. д. Говоря иначе: мы сначала вычеркнемъ каждое второе число, начиная счетъ отъ 3-хъ, потомъ — каждое третье начиная счетъ съ 4-хъ (при этомъ числа 6, 12, 18 и т. д. будутъ перечеркнуты вторично), потомъ вычеркнемъ каждое пятое число начиная съ 6-ти (при этомъ числа 10, 15, 20 и нѣкоторыя другія придется перечеркнуть вторично), и т. д. По мѣрѣ вычеркиванія получается рядъ первоначальныхъ чиселъ, совокупность которыхъ извѣстна подъ названіемъ Эратосѳенова рѣшета по имени греческаго ученаго Эратосѳена (род. въ 275 г. и умершаго въ 194 г. до Р. Хр.). Эратосѳеново рѣшето.

Теорема IX. Какъ бы велико ни было данное первоначальное число, существуетъ такое первоначальное число, которое больше даннаго. — Пусть N есть нѣкоторое первоначальное число; требуется доказать, что существуетъ нѣкоторое первоначальное число P, которое больше, чѣмъ N. Для доказательства этого разсмотримъ такое число S, что О числѣ первоначальныхъ чиселъ.

$$S = [1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (N-2) \times (N-1) \times N] + 1.$$

Это число S, по предыдущему, обладаетъ, по-крайней-мѣрѣ, однимъ первоначальнымъ дѣлителемъ P. Но этотъ дѣлитель P не можетъ быть равенъ числу N, потому что S есть сумма

$$N \times Q + 1,$$

въ которой второе слагаемое не дѣлится на N; точно такъ же P не можетъ быть равно какому нибудь первоначальному числу k, которое меньше, чѣмъ N, потому что въ такомъ случаѣ

$$S = k \times Q_1 + 1.$$

гдѣ второе слагаемое не дѣлится на k. Стало-быть, первоначальное число P не можетъ ни равняться числу N, ни быть меньше числа N; а потому оно должно быть больше числа N. Что̀ и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Рядъ первоначальныхъ чиселъ безконеченъ. — Дѣйствительно: какъ бы велико ни было первоначальное число N, всегда можно найти первоначальное число P, которое больше, чѣмъ N; точно такъ же можно найти первоначальное число X, которое больше, чѣмъ P, первоначальное число Y, которое больше, чѣмъ X и т. д., причемъ ничто не мѣшаетъ отысканію все бо̀льшихъ и бо̀льшихъ первоначальныхъ чиселъ. Стало-быть, рядъ первоначальныхъ чиселъ безконеченъ. Что̀ и требовалось доказать.

См. § 126 «Учебника». *Теорема X.* Если число B есть число взаимнопервое съ N и если отъ раздѣленія какого нибудь числа A на B получается остатокъ R, то въ рядѣ произведеній: Періодичность остатковъ.

$$A \times N,\ A \times N^2,\ A \times N^3,\ A \times N^4 \cdots \qquad (N)$$

существуетъ безчисленное множество произведеній

$$A \times N^k,\ A \times N^{2k},\ A \times N^{3k},\ A \times N^{4k} \cdots$$

изъ которыхъ каждое, по раздѣленіи на B, даетъ тотъ же остатокъ R. — Дѣйствительно: ни одинъ изъ остатковъ отъ раздѣленія членовъ ряда (N) на число B не можетъ быть равенъ нулю, потому что данное число N есть число первое съ B; стало-быть, остатковъ этихъ безчисленное множество. А такъ какъ каждый изъ нихъ долженъ быть меньше B, то они должны повторяться періодически, начиная съ нѣкотораго остатка. Пусть $A \times N^m$ и $A \times N^n$ суть тѣ различныя произведенія, отъ раздѣленія которыхъ на B получаются равные остатки r_m и r_n. Въ такомъ случаѣ разность

$$A \times N^n - A \times N^m$$

должна быть числомъ кратнымъ числа B. Но

$$A\times N^n - A\times N^m = N^m \times (A\times N^{n-m} - A).$$

Стало-быть, произведеніе $N^m\times(A\times N^{m-n} - A)$ должно дѣлиться на-цѣло безъ остатка на B. Множимое N^m на B не дѣлится, потому что по условію N и B суть числа взаимно-первыя. Стало-быть, на B должна дѣлиться разность $A\times N^{m-n} - A$. Это значитъ, что при раздѣленіи на B прозведенія $A\times N^{n-m}$ получается тотъ же остатокъ, какой получается при раздѣленіи числа A на B. Слѣдовательно въ рядѣ произведеній:

$$A\times N,\ A\times N^2,\ A\times N^3, \cdots A\times N^x \cdots$$

существуетъ такой членъ $A\times N^k$, (гдѣ $k = n - m$), который даетъ въ остаткѣ, при раздѣленіи на B, число R, получаемое при раздѣленіи A на B. Тотъ же остатокъ получается при раздѣленіи на B произведенія

$$A\times N^{2k},\ A\times N^{3k},\ A\times N^{4k}$$

и т. д. Дѣйствительно: $A\times N^k = B\times q_1 + R$; отсюда

$$\begin{aligned} A\times N^{2k} &= (B\times q_1 + R)\times N^k \\ &= B\times N^k\times q_1 + R\times N^k \\ &= B\times N^k\times q_1 + (A - B\times q)\times N^k \\ &= (q_1 - q)\times B\times N^k + A\times N^k; \end{aligned}$$

но произведеніе

$$(q_1 - q)\times B\times N^k,$$

очевидно, дѣлится на B, число же $A\times N^k$ даетъ, при раздѣленіи на B, въ остаткѣ R, какъ это доказано выше; стало-быть, и $A\times N^{2k}$ даетъ въ остаткѣ также R. Точно такимъ же образомъ можно доказать, что и $A\times N^{3k}$, $A\times N^{4k}$, $A\times N^{5k}$ .... и т. д. до безконечности даютъ въ остаткѣ одно и то же число R. Такимъ образомъ, если B есть число взаимно-первое съ N и если при раздѣленіи A на B получается остатокъ R, то въ рядѣ произведеній

$$A\times N,\ A\times N^2,\ A\times N^3, \ldots$$

существуетъ безчисленное множество членовъ

$$A\times N^k,\quad A\times N^{2k},\ A\times N^{3k}$$

и т. д., которые, по раздѣленіи на B, даютъ тотъ же остатокъ R. Что̀ и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Эта теорема чрезвычайно важна въ теоріи періодическихъ дробей.

Теорема Эйлера.

Теорема XI. Если дано число N, если число взаимно-простыхъ съ нимъ и меньшихъ, чѣмъ N, чиселъ равно n, и если числа N и A суть числа взаимно-первыя, то $A^n - 1$ дѣлится на N на-цѣло безъ остатка.—Пусть

$$p_1,\quad p_2,\quad \cdots,\quad r_n$$

суть числа, меньшія чѣмъ N, изъ которыхъ каждое есть число взаимно-первое съ N; пусть A и N суть числа взаимно-первыя; требуется доказать, что $A^n - 1$ дѣлится на-цѣло безъ остатка на N.—Для доказательства этого составимъ произведенія:

$$p_1\times A,\ p_2\times A,\quad p_3\times A,\ \cdots,\quad p_n\times A,$$

и раздѣлимъ каждое изъ этихъ произведеній на число N. Пусть остатки соотвѣтственно равны r_1, r_2, $r_3, \cdots$, r_{n-1}, r_n. Очевидно, что ни одинъ изъ этихъ остатковъ не равенъ нулю, потому что каждое изъ составленныхъ нами произведеній и число N суть числа взаимно-первыя; далѣе очевидно, что между ними нѣтъ чиселъ равныхъ между собою, потому что въ такомъ случаѣ одно изъ нихъ должно было бы отличаться отъ другого на число, кратное числа N. Что невозможно. Наконецъ, легко убѣдиться, что каждое изъ чиселъ r_1, r_2, $r_3, \cdots$, r_{n-1}, r_n есть число взаимно-первое съ N; потому что еслибы у числа N и какого-нибудь изъ этихъ остатковъ былъ общій дѣлитель q, то этотъ дѣлитель былъ бы также дѣлителемъ числа N и одного изъ произведеній, которыя мы дѣлили на N,—что противорѣчило бы предыдущему. Но рядъ чиселъ

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \cdot \cdot \cdot \cdot, \quad p_n$$

есть рядъ чиселъ, меньшихъ, чѣмъ N, и взаимно-первыхъ съ нимъ; точно также и рядъ чиселъ

$$r, \quad r_2, \quad r_3, \cdot \cdot \cdot \cdot, \quad r_n$$

есть рядъ чиселъ, также меньшихъ N и также, по предыдущему, взаимно-первыхъ съ N, а потому эти ряды должны быть составлены изъ однихъ и тѣхъ же чиселъ. Но

$$(p_1 \times A) \times (p_2 \times A) \times \cdot \cdot \cdot \times (p_n \times A) \equiv r_1 \times r_2 \times \cdot \cdot \cdot \times r_n \text{ (mod. } N);$$

поэтому

$$p_1 \times p_2 \times \cdot \cdot \cdot \times p_n \times A_n \equiv p_2 \times p_2 \times \cdot \cdot \cdot \times p_n \text{ (mod, } N);$$

откуда явствуетъ, что

$$p_1 \times p_2 \times \cdot \cdot \cdot \cdot \times p_n \times A^n - p_1 \times p_2 \times \cdot \cdot \cdot \cdot \times p_n = \text{кр. } N,$$

$$\text{откуда } (A^n - 1) \times p_1 \times p_2 \times \cdot \cdot \cdot \cdot \times p_n = \text{кр. } N.$$

Но по условію каждое изъ чиселъ p_1, p_2, $\cdot \cdot \cdot \cdot p_n$, а равно ихъ произведеніе и число N суть числа взаимно-первыя; стало-быть, $A^n - 1$ дѣлится на N безъ остатка. Что и требовалось доказать. — Эта теорема извѣстна подъ названіемъ теоремы Эйлера по имени славнаго геометра, открывшаго ее *).

Теорема XII. Если p есть число первоначальное и если a и p суть числа взаимно-первыя, то разность $a^{p-1} - 1$ дѣлится на-цѣло на p.—Дѣйствительно, если p есть число первоначальное, то число всѣхъ чиселъ, съ нимъ взаимно-простыхъ и ему предшествующихъ, равно $p - 1$. А потому, по теоремѣ Эйлера, разность $a^{p-1} - 1$ должна дѣлиться на p безъ остатка на-цѣло.—Эта теорема извѣстна подъ названіемъ теоремы Фермата, по имени знаменитаго французскаго геометра, открывшаго ее, впрочемъ, ранѣе Эйлера. Пьеръ де Ферматъ (de Fermat) родился въ 1601 году умеръ въ 1665 г. Теорема Фермата.

См. § 89 «Учебника». *Теорема XIII.* Если число D есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ A_1 и A_2, если Q_1 есть частное, происходящее отъ раздѣленія числа A_1 на D, а Q_2—частное отъ раздѣленія A_2 на D, то всякое число, кратное чиселъ A_1 и A_2, есть въ то же время число, кратное произведенія $D \times Q_1 \times Q_2$. О наименьшемъ кратномъ числѣ.

Пусть $D = \Delta$ (A_1 и A_2), пусть $Q_1 = A_1 : D$ и $Q_2 = A_2 D$; требуется доказать, что всякое число, кратное чиселъ A_1 и A_2, есть въ то же время число, кратное произведенія $D \times Q_1 \times Q_2$. Для того, чтобы какое нибудь число было кратнымъ числа A_1, необходимо и достаточно, чтобы это число могло быть разсматриваемо какъ произведеніе $A_1 \times m$, гдѣ m есть какое-либо цѣлое число. Но по условію, $A_1 = D \times Q_1$; стало-быть,

$$A_1 \times m = D \times Q_1 \times m.$$

Для того, чтобы произведеніе $m \times D \times Q_1$ дѣлилось на A_2, въ свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы $m \times D \times Q_1$ содержало всѣхъ множителей числа B, т. е. чтобы оно дѣлилось (такъ какъ $A_2 = D \times Q_2$) на $D \times Q_2$. Но произведеніе $m \times D \times Q_1$ дѣлится безъ остатка, числа же Q_1 и Q_2 суть числа взаимно-первыя. Слѣдовательно, m должно дѣлиться на Q_2. Итакъ, $m = Q_2 \times n$; отсюда вытекаетъ, что число, кратное чиселъ A_1 и A_2 и равное

$$A_1 \times m = D \times Q_1 \times Q_2 \times n,$$

*) *Леонгардъ Эйлеръ* родился въ Базелѣ въ 1707 г., а умеръ членомъ Императорской Академіи Наукъ въ С.-Петербургѣ въ 1783 г. Полное собраніе всѣхъ его сочиненій заняло бы 16000 стр. въ 4-ую долю листа.

т. е. что число, кратное A_1 и A_2, есть кратное произведенія $D \times Q_1 \times Q_2$. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-е. Наименьшее кратное двухъ чиселъ A_1 и A_2, которыхъ общій наибольшій дѣлитель равенъ D и которыя по раздѣленіи на него даютъ въ частномъ соотвѣтственно Q_1 и Q_2, равно $D \times Q_1 \times Q_2$. —Дѣйствительно: всякое кратное чиселъ A_1 и A_2 равно

$$D \times Q_1 \times Q_2 \times n,$$

гдѣ n есть любое цѣлое число. Наименьшее значеніе это произведеніе получаетъ, когда $n = 1$; но тогда это кратное число будетъ наименьшимъ. Стало-быть, наименьшее кратное чиселъ A_1 и A_2 равно $D \times Q_1 \times Q_2$. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 2-е. Наименьшее кратное двухъ чиселъ равно произведенію ихъ, раздѣленному на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя. — Дѣйствительно: по предыдущему, $D \times Q_1 \times Q_2$ есть наименьшее кратное чиселъ A_1 и A_2, если D есть ихъ общій наибольшій дѣлитель, а Q_1 и Q_2—соотвѣтственно частныя, происходящія отъ раздѣленія A_1 и A_2 на D. Очевидно, что

$$D \times Q_1 = A_1, \text{ а } D \times Q_2 = A_2,$$

откуда

$$D \times D \times Q_1 \times Q_2 = A_1 \times A_2,$$

а наименьшее кратное чиселъ A_1 и A_2, т. е.

$$D \times Q_1 \times Q_2 = A_1 \times A_2 : D.$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 3-е. Всякое кратное двухъ чиселъ есть также и кратное ихъ наименьшаго кратнаго.—Дѣйствительно всякое кратное двухъ чиселъ A_1 и A_2 есть кратное произведенія $D \times Q_1 \times Q_2$; а это послѣднее есть наименьшее кратное чиселъ A_1 и A_2. Стало-быть, всякое кратное двухъ чиселъ есть въ то же время кратное ихъ наименьшаго кратнаго. Что и требовалось доказать.

Теорема XIV. Если даны числа A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, если затѣмъ составлено произведеніе изъ числа A_0 на тѣхъ первоначальныхъ множителей числа A_1, которыхъ нѣтъ въ A_0, далѣе на тѣхъ первоначальныхъ множителей, которыхъ нѣтъ ни въ A_0, ни въ A_1, и т. д., то это произведеніе есть наименьшее кратное данныхъ чиселъ, и сколько бы мы ни вычли изъ этого произведенія, на всѣ данныя числа полученная разность раздѣлится только въ случаѣ, когда вычитаемое равно уменьшаемому.—Дѣйствительно: пусть полученное произведеніе равно M_n. Тогда

$$M_n - k$$

есть разность, уменьшаемое которой дѣлится безъ остатка на A_0, A_1, A_2, ..., A_n, а вычитаемое неизвѣстно. Эта разность можетъ дѣлиться на A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n только въ томъ случаѣ, когда и k дѣлится на тѣ же числа, т. е. когда k есть кратное чиселъ A_0, A_1, A_2...., A_n, или (что то же) когда

$$k = M \times p, \text{ гдѣ } p \text{ есть цѣлое число.}$$

Но въ такомъ случаѣ разность

$$M_n - k = M_n - M_n \times p;$$

это (если не допускать отрицательныхъ рѣшеній) возможно только тогда, когда $p = 1$; а въ такомъ случаѣ

$$M_n - k = M_n - M_n = 0,$$

т. е. только нуль есть число, которое, будучи меньше, чѣмъ M_n, дѣлится безъ остатка на всѣ данныя числа: A_0, A_1, A_2,.... A_n. Стало-быть, M_n есть наименьшее изъ цѣлыхъ чиселъ, отличающихся отъ нуля, которое дѣлится на-цѣло безъ остатка на данныя числа. Что и требовалось доказать.

Теорема XV. Наименьшее кратное данныхъ чиселъ равно наименьшему кратному одного изъ нихъ и наименьшаго кратнаго остальныхъ.— Дѣйствительно: пусть даны числа A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n; пусть: наименьшее кратное чиселъ A_0 и A_1 равно M_1; наименьшее кратное чиселъ M_1 и A_2 равно M_2; наименьшее кратное чиселъ M_2 и A_3 равно M_3; и т. д.; и пусть, наконецъ, M_n наименьшее кратное чиселъ M_{n-1} и A_n; требуется доказать, что наименьшее кратное всѣхъ чиселъ: A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n равно M_n. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что M_1 содержитъ всѣхъ первоначальныхъ множителей числа A_0 и тѣхъ первоначальныхъ множителей числа A_1, которыми A_1 отличается отъ A_0. Такимъ же образомъ найдемъ, что M_2 содержитъ всѣхъ первоначальныхъ множителей числа A_0 съ присоединеніемъ тѣхъ первоначальныхъ множителей числа A_1, которыхъ нѣтъ въ A_0, и съ присоединеніемъ тѣхъ первоначальныхъ множителей числа A_2, которыхъ нѣтъ ни въ A_0, ни въ A_1. Поэтому M_2 есть наименьшее кратное чиселъ: A_0, A_1 и A_2. И т. д. Продолжая то же разсужденіе далѣе, получимъ, что M_n есть наименьшее кратное чиселъ: A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n. Что и требовалось доказать.

См. замѣчаніе, которымъ снабженъ § 96 «Учебника». *Теорема XVI.* Если отъ прибавленія къ членамъ дроби поровну дробь увеличилась, то это дробь правильная; если отъ прибавленія къ обоимъ членамъ поровну дробь уменьшилась, то это дробь неправильная, бо́льшая единицы; если же отъ прибавленія къ обоимъ членамъ дроби поровну послѣдняя не измѣнилась, то это дробь неправильная, равная единицѣ.— **Прибавленіе къ обоимъ членамъ дроби поровну.**

Дѣйствительно: пусть дана дробь $\frac{a}{b}$; предположимъ, что

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+c};$$

тогда, приведя эти двѣ дроби къ одному знаменателю, получимъ:

$$\frac{a \times b + a \times c}{b^2 + b \times c} = \frac{a \times b + c \times b}{b^2 + b \times c}, \quad \text{откуда}$$

$a \times b + a \times c = a \times b + c \times b$ или $a \times c = c \times b$, что возможно только тогда, когда $a = b$. Т. е.: если дробь не измѣняетъ своей величины послѣ прибавленія къ членамъ ея поровну, то числитель ея равенъ знаменателю. Точно такимъ же образомъ найдемъ, что если

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}, \text{ то } a > b,$$

а если

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}, \text{ то } a < b.$$

Т. е.: если дробь отъ прибавленія къ членамъ ея поровну уменьшилась, то числитель больше знаменателя; если же дробь при этомъ увеличилась, то числитель ея меньше знаменателя.

Теорема XVII (обратная предыдущей). Если къ обоимъ членамъ дроби правильной прибавить поровну, то дробь увеличится; если къ обоимъ членамъ дроби неправильной, но большей, чѣмъ единица, прибавить поровну, то дробь уменьшится; если же къ обоимъ членамъ дроби неправильной, которая равна единицѣ, прибавить поровну, то дробь не измѣнитъ своей величины. — Доказательство можетъ быть поведено способомъ отъ противоположнаго и предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе. Учащемуся предоставляется также доказать теоремы, аналогичныя теоремамъ XVI и XVII и относящіяся до вычитанія изъ членовъ дроби поровну и зависящихъ отъ этого вычитанія измѣненій величины дроби, т. е. слѣдующія: если отъ вычитанія изъ обоихъ членовъ дроби поровну послѣдняя увеличилась, то это — дробь неправильная, притомъ бо́льшая единицы; если же дробь при этомъ уменьшилась, то это—дробь правильная; наконецъ, если дробь при этомъ не измѣнилась, то эта дробь равна единицѣ. Обратно: если изъ обоихъ членовъ правильной дроби вычесть поровну, то полученная дробь будетъ менѣе первоначально данной, и т. д.

Несократимая дробь и дроби съ меньшими членами.

См. примѣчаніе къ § 97. *Теорема XVIII*. Если дана несократимая дробь $\frac{a}{b}$, то нѣтъ дроби съ меньшими членами, которая равнялась бы данной дроби.—Дѣйствительно: пусть $\frac{a}{b} = \frac{a-m}{b-n}$, гдѣ буквы m и n обозначаютъ тѣ цѣлыя числа, которыя надо вычесть соотвѣтственно ихъ числителя и знаменателя данной дроби, чтобы получить дробь, равную этой послѣдней. Тогда

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q},$$

гдѣ p и q суть цѣлыя числа, изъ которыхъ $p < a$, а $q < b$. Разсматривая дробь $\frac{a}{b}$ какъ частное, происходящее отъ раздѣленія цѣлаго числа p на цѣлое же число q, получимъ, что

$$\frac{a}{b} \times q = p, \text{ или } \frac{a \times q}{b} = p.$$

Но, по условію, числа a и b суть числа взаимно-первыя (ибо въ противномъ случаѣ дробь $\frac{a}{b}$ была бы дробью сократимою); стало-быть, число q должно дѣлиться на-цѣло безъ остатка на b (§ 86 «Учебника»),— что возможно только въ томъ случаѣ, если q не меньше, чѣмъ b. Что противорѣчитъ условію. Слѣдовательно не существуетъ дроби съ меньшими числителемъ и знаменателемъ, которая равнялась бы несократимой дроби $\frac{a}{b}$. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Въ силу доказаннаго выше, несократимая дробь можетъ быть равна дроби только сократимой, притомъ дроби съ соотвѣтственно *бо́льшими* членами.

См. § 125 «Учебника». Въ основѣ теоріи обращенія обыкновенныхъ дробей въ десятичныя и періодическихъ—въ обыкновенныя лежатъ слѣдующія теоремы: Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

Теорема XIX. Если данная несократимая дробь обращается въ конечную десятичную, то изъ первоначальныхъ множителей ея знаменателя каждый равенъ или числу 2, или числу 5, т. е. въ числѣ первоначальныхъ множителей знаменателя нѣтъ никакихъ иныхъ первоначальныхъ чиселъ. — Дѣйствительно: если несократимая дробь

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{10^y},$$

то это значитъ, что 10^y дѣлится на b; но 10^y содержитъ въ числѣ своихъ первоначальныхъ множителей только 2 и 5, а потому b не можетъ содержать никакихъ другихъ первоначальныхъ множителей, кромѣ чиселъ 2 и 5. Что и требовалось доказать.

Теорема XX. Если знаменатель данной несократимой дроби содержитъ въ числѣ своихъ первоначальныхъ множителей только 2 или 5, или же и 2 и 5, но не содержитъ никакихъ другихъ первоначальныхъ множителей, то эта дробь обращается въ конечную десятичную дробь. — Дѣйствительно, если въ дроби $\frac{a}{b}$ знаменатель

$$b=2^m\cdot 5^n,$$

гдѣ m и n суть нѣкоторыя цѣлыя числа, то можетъ представиться три случая: 1) m больше n, 2) m меньше n и 3) m равно n. Въ послѣднемъ случаѣ знаменатель равенъ нѣкоторой степени 10-ти, потому что $2^m\cdot 5^m=(2\times 5)^m=10^m$; въ такомъ случаѣ дробь $\frac{a}{b}$ тождественно равна дроби $\frac{a}{10^m}$, и поэтому данная дробь можетъ быть безъ всякихъ преобразованій обозначена въ видѣ десятичной дроби. Въ случаѣ, если m больше n, то всегда можно найти такое число p, чтобы существовало равенство: $2^m\times 5^n\times 5^p=2^m\times 5^m$, ($p$ въ этомъ случаѣ равно $m—n$); а потому въ этомъ случаѣ

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2^m\times 5^n}=\frac{a\times 5^p}{2^m\times 5^m}=\frac{a\times 5^p}{10^m},$$

т. е. данная дробь обращается въ десятичную, если члены ея предварительно помножить на нѣкоторую опредѣленную степень 5-ти. Точно такъ же выведемъ, что если m меньше n, то всегда можно найти такое число q, чтобы существовало равенство

$$2^m\times 5^n\times 2^q=2^n\times 5^n;$$

(q въ этомъ случаѣ равно $n—m$); и тогда

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2^m\times 5^n}=\frac{a\times 2^q}{2^m\times 5^n\times 2^q}=\frac{a\times 2^q}{2^n\times 5^n}=\frac{a\times 2^q}{10^n},$$

т. е. данная дробь обращается въ десятичную по умноженіи членовъ ея на нѣкоторую опредѣленную степень 2-хъ. Итакъ, при всякихъ m и n, дробь $\frac{a}{b}$, гдѣ $b=2^m\times 5^n$, обращается въ конечную десятичную. Что и требовалось доказать.

12*

Теорема XXI. Если знаменатель несократимой обыкновенной дроби вовсе не содержитъ въ числѣ своихъ первоначальныхъ множителей ни 2-хъ, ни 5-ти, или же содержитъ, кромѣ 2-хъ и 5-ти, еще какихъ либо множителей, то эта обыкновенная дробь не обращается въ конечную десятичную.—Дѣйствительно: если знаменатель несократимой дроби $\frac{a}{b}$ вовсе не содержитъ въ числѣ своихъ множителей ни 2-хъ, ни 5-ти, то нѣтъ такого числа x, отъ умноженія котораго на b получилось бы 10^p, потому что въ числѣ первоначальныхъ множителей количества 10^p находятся только числа 2 и 5, а подобное число не можетъ быть произведеніемъ другихъ первоначальныхъ множителей (§ 88 «Учебника»). Такое же точно разсужденіе приложимо и въ томъ случаѣ, если въ знаменателѣ несократимой дроби

$$\frac{a}{b},$$

кромѣ 2-хъ и 5-ти, есть еще какіе либо другіе первоначальные множители, потому что и въ этомъ случаѣ не существуетъ такого числа y, отъ умноженія котораго на b получилось бы 10^q.

Замѣчаніе. Изъ всего вышеизложеннаго можно сдѣлать слѣдующій выводъ: для того, чтобы данная несократимая обыкновенная дробь могла быть обращена въ конечную десятичную, необходимо и достаточно, чтобы знаменатель этой дроби содержалъ въ числѣ своихъ первоначальныхъ множителей только числа: 2 и 5, или же только одно изъ этихъ двухъ чиселъ.

Теорема XXII. Если знаменатель обыкновенной несократимой дроби есть число, взаимно-первое съ 10-тью, то эта дробь при обращеніи въ десятичную даетъ въ результатѣ чистую періодическую дробь.—Дѣйствительно: пусть дана несократимая правильная дробь $\frac{a}{b}$, гдѣ $a < b$, и пусть числа b и 10 суть числа взаимно-первыя; требуется доказать, что, при обращеніи дроби $\frac{a}{b}$ въ десятичную, получается чистая періодическая дробь. Мы видѣли (теорема X), что такъ какъ a и 10 суть числа взаимно-первыя, то въ ряду произведеній:

$$a \times 10,\ a \times 100,\ a \times 1000 \text{ и т. д.}$$

непремѣнно есть произведеніе, при раздѣленіи котораго на b получится остатокъ, равный остатку отъ раздѣленія $a \times 10$ на b. Такъ какъ обращеніе обыкновенной дроби въ десятичную сводится къ умноженію числителя a обыкновенной дроби на нѣкоторую степень 10-ти и соотвѣтственному уменьшенію полученнаго частнаго, то умножимъ a на 10^q, при чемъ q выберемъ такъ, чтобы остатокъ отъ раздѣленія на b произведенія $a \times 10^q$ равнялся остатку, даваемому при раздѣленіи числа $a \times 10$ на b. Тогда мы получимъ въ частномъ цѣлый рядъ цифръ, изъ которыхъ и составляется періодъ, такъ какъ послѣдній остатокъ снова равняется остатку, получаемому отъ раздѣленія $a \times 10$ на b; отъ вторичнаго умноженія этого остатка на 10^q, въ частномъ получится тотъ же рядъ цифръ въ той же послѣдовательности.

Примѣръ. Пусть требуется обратить въ десятичную дробь $\frac{4}{7}$. Мы знаемъ, что

остатокъ	отъ	раздѣленія	4	на	7	равенъ	4,
»	»	»	40	»	»	»	5,
»	»	»	400	»	»	»	1,
»	»	»	4000	»	»	»	3,
»	»	»	40000	»	»	»	2,
»	»	»	400000	»	»	»	6;

наконецъ, при раздѣленіи 4000000 на 7 опять получится въ остаткѣ 4. Стало-быть, 1000000 и есть то число, на которое надо умножить 4 прежде всего для того, чтобы, по раздѣленіи полученнаго на 7, найти періодъ искомой дроби. Дѣйствительно,

$$\begin{array}{l|l} 4{,}000000 & 7 \\ \cline{2-2} \;\;50 & 0{,}571428\ldots \\ \;\;\;10 & \\ \;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;4; & \end{array}$$

умноживъ снова полученное въ остаткѣ число 4 на 1000000, получимъ снова тѣ же цыфры и въ той же послѣдовательности.

Теорема XXIII. Если въ знаменателѣ обыкновенной несократимой дроби, кромѣ другихъ первоначальныхъ множителей, есть также числа 2 или 5, то эта несократимая дробь обращается въ смѣшанную періодическую, непеpіодическая часть которой состоитъ изъ столькихъ цыфръ, сколько единицъ въ большемъ изъ показателей, съ которыми 2 или 5 входитъ въ этотъ знаменатель.—Дѣйствительно: пусть дана несократимая дробь

$$\frac{a}{b},$$

знаменатель которой

$$b = m \cdot 2^p \cdot 5^q,$$

гдѣ m есть число, которое не содержитъ въ числѣ своихъ первоначальныхъ множителей ни 2-хъ, ни 5-ти, а p и q обозначаютъ цѣлыя числа. При этомъ можно различать три случая: 1) p равно q; 2) p больше q, и 3) p меньше q. Въ первомъ случаѣ

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{m \cdot 2^p\, 5^p} = \frac{a}{m \cdot 10^p} = \frac{a}{m} \times \frac{1}{10^p};$$

во второмъ

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{m \cdot 2^p \cdot 5^q} = \frac{a \cdot 5^r}{m \cdot 2^p \cdot 5^p} = \frac{a \times 5^r}{m \times 10^p} = \frac{a \times 5^r}{m} \times \frac{1}{10^p},$$

если $r = p - q$; въ третьемъ же случаѣ

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{m \cdot 2^p \times 5^q} = \frac{a \times 2^r}{m \cdot 2^r\, 5^q} = \frac{a \times 2^r}{m \times 10^q} = \frac{a \times 2^r}{m} \times \frac{1}{10^q}.$$

Но во всѣхъ этихъ трехъ случаяхъ получается нѣкоторая несократимая дробь, которая обращается въ чистую періодическую и которая должна быть уменьшена во столько разъ, сколько единицъ заключается въ 10-ти, взятыхъ съ показателемъ, равнымъ большему изъ показателей, съ которыми 2 или 5 входятъ въ знаменатель данной дроби. А отъ уменьшенія данной простой періодической дроби въ 10^q разъ, будетъ перенесена запятая влѣво отъ начала перваго періода на q цыфръ, отъ чего образуется q цыфръ неперіодической части. Что и требовалось доказать.

Примѣры.

$$\frac{7}{12} = \frac{7}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{25}{100} = \frac{175}{3} \times \frac{1}{100};$$

отъ обращенія $\frac{175}{3}$ въ десятичную получится смѣшанное число, дробная часть котораго будетъ чистая періодическая дробь; по уменьшеніи полученнаго въ 100 разъ, получится смѣшанная періодическая дробь, въ которой неперіодическая часть состоитъ изъ двухъ цыфръ ($12 = 3 \times 2^2$). Другой примѣръ:

$$\frac{19}{70} = \frac{19}{7} \times \frac{1}{10};$$

по обращеніи дроби $\frac{19}{7}$ въ десятичную получились бы цѣлое число и нѣкоторая чистая періодическая дробь, а по уменьшеніи полученнаго результата въ 10 разъ получится смѣшанная періодическая дробь, неперіодическая часть которой состоитъ изъ одной цыфры. Третій примѣръ: $\frac{17}{150} = \frac{17}{3} \times \frac{1}{50} = \frac{34}{3} \times \frac{1}{100}$. По обращеніи дроби $\frac{34}{3}$ въ десятичную получились бы цѣлое число и чистая періодическая дробь, а по уменьшеніи полученнаго въ 100 разъ, получится дробь смѣшанная, неперіодическая часть которой состоитъ изъ двухъ цыфръ ($150 = 3 \cdot 2 \cdot 5^2$).

Теорема XXIV. Если знаменатель данной обыкновенной дроби меньше одной единицы какого-либо разряда на одну единицу перваго разряда, а письменное обозначеніе числителя состоитъ изъ столькихъ же цыфръ, какъ знаменатель, то результатъ обращенія данной обыкновенной дроби въ десятичную есть чистая періодическая дробь, которой періодъ равенъ числителю данной дроби.— Пусть цыфры числителя

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ a_{n-1} \text{ и } a_n$$

а знаменатель пусть равенъ разности

$$10^n - 1;$$

условимся обозначать дробь такого рода такъ:

$$\frac{a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_{n-1}\ a_n}{10^n - 1},$$

требуется доказать, что отъ обращенія этой дроби въ десятичную получается чистая періодическая дробь:

$$0,\ a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n\ a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n \cdots$$

гдѣ a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n обозначаютъ цыфры числителя. — Дѣйствительно: что въ результатѣ должна получиться чистая періодическая дробь, вытекаетъ изъ того, что знаменатель есть число взаимно-первое съ десятью. Кромѣ того *), очевидно, что

$$(a_1\ a_2 \cdots a_n) \times 10^n = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_{n-1}\ a_n) \times (10^n - 1) + (a_1\ a_2\ \cdots\ a_{n-1}\ a_n),$$

---

*) Ниже буквы, поставленныя рядомъ, обозначаютъ число, цыфры котораго по порядку обозначаются этими буквами. Это обозначеніе короче полнаго обозначенія:

$$10^{n-1} \times a_1 + 10^{n-2} \times a_2 + 10^{n-3} \times a_3 + \cdots 10^1 \times a_{n-1} + a_n,$$

которымъ обозначеніе, употребленное въ текстѣ, легко можетъ быть замѣнено.

Это равенство доказываетъ, что если, при обращеніи въ десятичную дроби:

$$\frac{a_1\, a_2 \cdots a_{n-1}\, a_n}{10^n - 1},$$

числителя помножить на 10^n, то и въ частномъ отъ раздѣленія полученнаго числа на 10^n-1, и въ остаткѣ этого получатся тѣ же цыфры въ томъ же порядкѣ, что въ числителѣ данной дроби Помноживъ полученный остатокъ снова на 10^n, снова получимъ и въ частномъ, и въ остаткѣ совокупность цыфръ: $a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_{n-1}\, a_n$ и т. д. Такимъ образомъ въ частномъ получится чистая періодическая дробь, которой періодъ равенъ числителю данной дроби. Что и требовалось доказать.

Примѣръ. Пусть дана дробь $\frac{237}{999}$; очевидно, что

$$237\,000 = 237 \times 999 + 237;$$

стало-быть отъ раздѣленія числа 237 000 на 999 получится частное 237, да и въ остаткѣ тоже получится 237. Легко видѣть, что поэтому отъ обращенія въ десятичную дробь

$$\frac{237}{999} \text{ получится } 0{,}237\ 237\ 237 \cdots$$

Замѣчаніе. Если въ числителѣ меньше цыфръ, чѣмъ въ знаменателѣ, который равенъ $10^n - 1$, то періодомъ будетъ совокупность цыфръ числителя, предшествуемая столькими нулями, что число всѣхъ цыфръ періода будетъ равняться числу цыфръ знаменателя.

Теорема XXV. Всякая несократимая обыкновенная дробь, которой знаменатель есть число взаимно-первое съ 10-ью, можетъ быть обращена въ обыкновенную же дробь, которой знаменатель есть нѣкоторая степень 10-ти, уменьшенная единицею.—Дѣйствительно: если b есть число взаимно-первое съ 10-ью, то, на основаніи теоремы XI-ой (Эйлера), непремѣнно существуетъ такая степень 10-ти, которая по раздѣленіи на b дастъ въ остаткѣ единицу. Пусть эта степень есть 10^q. Тогда

$$10^q = b \times x + 1, \text{ откуда } b \times x = 10^q - 1.$$

Стало-быть, существуетъ нѣкоторое цѣлое число x, произведеніе котораго на b есть нѣкоторая степень 10-ти, уменьшенная единицею. Умноживъ числителя и знаменателя дроби $\frac{a}{b}$ на этого множителя x, мы получимъ нѣкоторую равную ей дробь, которой знаменатель равенъ нѣкоторой степени 10-ти, уменьшенной на единицу, возможность чего и требовалось доказать.

Замѣчаніе 1-е. Отсюда вытекаетъ слѣдующій способъ обращенія обыкновенной дроби, которой знаменатель — число взаимно-первое съ 10-ю, въ десятичную: ищутъ число, обозначаемое столько разъ взятой цыфрою 9, чтобы это число дѣлилось на знаменателя данной дроби; числитель ея, умноженный на частное, происходящее отъ раздѣленія этого числа на знаменателя, равенъ періоду десятичной дроби; при этомъ должно только принять во вниманіе, что если въ этомъ произведеніи менѣе цыфръ, чѣмъ сколько въ отысканномъ числѣ, въ письменномъ обозначеніи котораго встрѣчается только цифра 9, девятками, то періодомъ является отысканный числитель, предшествуемый приличнымъ числомъ нулей.

Примѣръ. Требуется обратить дробь $\frac{4}{7}$ въ десятичную.

9	7	99	7	999	7	9999	7	99999	7	999999	7
2	1	29	142	29	14	29	1428	29	14285	29	142857.
		1		19		19		19		19	
				5		59		59		59	
						3		39		39	
								4		49	
										0	

Умноживъ числителя и знаменателя на 142857, получимъ дробь

$$\frac{567428}{999999};$$

отсюда слѣдуетъ (теорема XXII), что дробь $\frac{4}{7}$ обращается въ чистую періодическую, которой періодъ равенъ 567428, т. е. обращается въ дробь 0,567428 567428...

Другой примѣръ. Пусть требуется обратить дробь $\frac{1}{13}$ въ десятичную.

9	13	99	13	999	13	9999	13	99999	13	999999	13
9	0	8	7	89	76	89	769	89	7692	89	76923.
				11		119		119		119	
						2		29		29	
								3		39	
										0	

Умноживъ числителя и знаменателя дроби $\frac{1}{13}$ на 76923, получимъ

$$\frac{76923}{999999};$$

отсюда слѣдуетъ, что дробь $\frac{1}{13}$ обращается въ чистую періодическую дробь, которой періодъ равенъ 076923, т. е. обращается въ дробь 0,076923076933...

Тѣ же результаты могутъ быть найдены съ помощью правила обращенія обыкновенныхъ дробей, чаще всего примѣняемаго въ этихъ случаяхъ и изложеннаго въ § 29 „Учебника".

Замѣчаніе 2-е. Изъ вышедоказанной теоремы, кромѣ того, вытекаетъ, что число цыфръ періода не зависитъ отъ числителя, а зависитъ только отъ того, какая наименьшая степень десяти, по раздѣленіи на знаменателя, даетъ въ остаткѣ единицу.

Замѣчаніе 3-е. Обыкновенную дробь, отъ обращенія которой въ десятичную получается данная чистая періодическая дробь, т. е. производящую данной періодической десятичной дроби, считаютъ равною этой послѣдней. То же справедливо относительно обыкновенныхъ дробей, отъ обращенія которыхъ въ десятичныя получаются данныя смѣшанныя періодическія дроби. Но строгое доказательство дозволительности этого положенія возможно только съ помощью *теоріи предѣловъ*, не излагаемой въ курсахъ ариөметики.

V. О пропорціяхъ, пропорціональныхъ величинъ и тройныхъ правилахъ.

Ариөметическія пропорціи. См. замѣчаніе, которымъ снабженъ § 136 „Учебника". Ариөметическія пропорціи въ Математикѣ имѣютъ весьма мало приложеній и интересны только какъ выраженія, обладающія нѣкоторыми свойствами, подобными свойствамъ пропорцій геометрическихъ. Въ основѣ ученія объ ариөметическихъ пропорціяхъ лежатъ слѣдующія простыя теоремы:

Теорема XXVI. Если дана ариөметическая пропорція

$$a - b = c - d,$$

то сумма крайнихъ членовъ ея равна суммѣ ея среднихъ членовъ. — Дѣйствительно: если $a - b = c - d$, то

$$(a - b) + (b + d) = (c - d) + (b + d),$$

откуда

$$a - b + b + d = c - d + b + d \text{ или } a + d = c + d.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема XXVII. Если сумма двухъ какихъ-либо чиселъ равна суммѣ тѣхъ же или другихъ двухъ чиселъ, то слагаемыя первой суммы представляютъ собою крайніе члены нѣкоторой ариөметической пропорціи, а слагаемыя второй — средніе ея члены. — Пусть $a + b = c + d$, требуется доказать, что a и b суть крайніе, а c и d—средніе члены, или обратно a и b—средніе, а c и d—крайніе нѣкоторой члены ариөметической пропорціи. При этомъ могутъ быть три случая:

1) $a = c$; тогда, очевидно, $b = d$, и

$$a - c = d - b,$$

гдѣ a и b суть крайніе, а c и d—средніе члены пропорціи;

2) $a > c$; тогда очевидно, $d < b$; но въ такомъ случаѣ

$$a + b - (c + b) = c + d - (c + b), \text{ или } a - c = d - b,$$

гдѣ a и b (какъ и въ предыдущемъ случаѣ) суть крайніе, а c и d — средніе члены пропорціи;

3) $a < c$; тогда, очевидно, $b > a$; но въ такомъ случаѣ

$$a + b - (a + d) = c + d - (a + d) \text{ или } b - d = c - a,$$

гдѣ a и b (какъ и въ предыдущемъ случаѣ) суть крайніе, а c и d — средніе члены пропорціи.

Теорема XXVIII. Если сумма двухъ чиселъ не равна суммѣ другихъ двухъ, то не существуетъ такой ариѳметической пропорціи, въ которой слагаемыя первой суммы были бы крайними, а слагаемыя второй—средними членами.—Пусть

$$a + b \gtrless c + d;$$

требуется доказать, что не существуетъ пропорціи, въ которой a и b были бы крайними, а c и d — средними членами. — Для доказательства этого предположимъ, что существуетъ пропорція

$$a - c = d - b;$$

но въ такомъ случаѣ, по теоремѣ первой этого параграфа,

$$a + b = c + d,$$

что̀ невозможно по условію. Стало-быть, невозможно также, чтобы при этомъ условіи существовала пропорція $a - c = d - b$. Что̀ и требовалось доказать.

См. § 139 „Учебника". *Теорема XXIX.* Если даны двѣ геометрическія пропорціи, то ихъ можно почленно сложить только въ случаѣ равенства ихъ знаменателей отношенія и въ случаѣ пропорціональности ихъ предыдущихъ (или послѣдующихъ) членовъ.—Дѣйствительно: пусть даны слѣдующія пропорціи: **Почленное сложеніе пропорцій.**

$$a : b = c : d, \text{ (откуда } a \times d = b \times c), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и

$$m : n = p : q, \text{ (откуда } m \times q = n \times p), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и пусть

$$(a + m) : (b + n) = (c + p) : (d + q).$$

Тогда

$$(a + m) \times (d + q) = (b + n) \times (c + p),$$

откуда

$$a \times d + a \times q + m \times d + m \times q = b \times c + b \times p + n \times c + n \times p.$$

Но, по условію,

$$a \times d = b \times c, \text{ а } n \times p = m \times q;$$

стало-быть,

$$a \times q + m \times d = b \times p + n \times c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Опредѣлимъ изъ равенствъ (1) и (2) значенія чиселъ d и q въ зависимости отъ остальныхъ членовъ пропорцій, въ составъ которыхъ они входятъ, и полученныя значенія подставимъ вмѣсто d и q въ равенство (3). Получимъ, что

$$d = \frac{b \times c}{a}, \; q = \frac{n \times p}{m},$$

а вмѣсто равенства (3) получимъ новое:

$$a \times \frac{n \times p}{m} + m \times \frac{b \times c}{a} = b \times p + n \times c,$$

или, помноживъ обѣ части неравенства на $a \times m$, получимъ, что

$$a^2 \times n \times p + m^2 \times b \times c = a \times b \times p \times m + n \times c \times a \times m.$$

Т. е.

$$a^2 \times n \times p - a \times b \times p \times m = n \times a \times c \times m - m^2 \times b \times c.$$

Взявъ произведеніе $a \times p$ общимъ множителемъ въ первой, а произведеніе $m \times c$—во второй части равенства, получимъ:

$$a \times p \times (a \times n - b \times m) = m \times c \times (a \times n - b \times m).$$

Вычтя изъ обѣихъ частей равенства вторую его часть, получимъ:

$$a \times p \times (a \times n - b \times m) - n \times c \times (a \times n - b \times m) = 0.$$

Отсюда получимъ

$$(a \times p - m \times c) \times (a \times n - b \times m) = 0.$$

Что возможно только въ двухъ случаяхъ: 1) либо въ случаѣ, когда

$$a \times p - m \times c = 0,$$

2) либо въ случаѣ, когда

$$a \times n - b \times m = 0.$$

Въ первомъ случаѣ

$$a \times p = m \times c, \text{ или } a : m = c : p,$$

т. е. предыдущіе члены данныхъ пропорцій пропорціональны; во второмъ же

$$a \times n = b \times m, \text{ или } a : b = m : n,$$

т. е. знаменатели отношенія обѣихъ пропорцій равны между собою. Такимъ образомъ, для того чтобы данныя двѣ пропорціи можно было сложить почленно, необходимо и достаточно, чтобы одно изъ помянутыхъ условій было выполнено. Что и требовалось доказать. — Аналогичная теорема справедлива также относительно почленнаго вычитанія одной геометрической пропорціи изъ другой. Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащимуся.

О пропорціональныхъ величинахъ.

См. § 144 „Учебника". Достойны вниманія слѣдующія теоремы относительно пропорціональныхъ величинъ:

Теорема XXX. Если, при увеличеніи значенія одной изъ взаимно зависящихъ величинъ въ любое цѣлое число разъ, соотвѣтственное значеніе другой, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, увеличивается во столько же разъ, то эти двѣ величины прямо-пропорціональны одна другой. — Пусть даны двѣ зависящія одна отъ другой величины A и B и два значенія, соотвѣтствующія одно другому, a_1 и b_1 этихъ величинъ и пусть съ увеличеніемъ a_1 въ m разъ (гдѣ m есть число цѣлое) значеніе k_1 тоже увеличивается въ m разъ; требуется доказать, что въ такомъ случаѣ отъ умноженія одной изъ нихъ на $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q суть цѣлыя числа, другая тоже умножится на $\frac{p}{q}$.

Умножимъ значеніе a_1 на $\frac{1}{q}$; въ такомъ случаѣ мы получимъ вмѣсто значенія a_1 величины A нѣкоторое другое ея значеніе $\frac{a_1}{q}$; пусть этому значенію величины A соотвѣтствуетъ значеніе b_2 величины B. Легко видѣть, что $b_2 = \frac{b_1}{q}$, ибо значенію $\left(\frac{a_1}{q}\right) \times q$ величины A соотвѣтствуетъ, по условію, значеніе $b_2 \times q$ величины B; но $\left(\frac{a_1}{q}\right) \times q = a_1$; стало-быть, по условію, $b_2 \times q = b_1$, откуда $b_2 = \frac{b_1}{q}$. Итакъ, значенію $\frac{a_1}{q}$ величины A соотвѣтствуетъ значеніе $\frac{b_1}{q}$ величины B. А въ такомъ случаѣ значенію $\frac{a_1}{q} \times p$ величины A соотвѣтствуетъ значеніе $\frac{b_1}{q} \times p$ величины B. Но

$$\frac{a_1}{q} \times p = a_1 \times \frac{p}{q}, \text{ а } \frac{b_1}{q} \times p = b_1 \times \frac{p}{q};$$

стало-быть, мы получили, что при умноженіи значенія a_1 величины A на $\frac{p}{q}$ значеніе b_1 величины B тоже умножится на $\frac{p}{q}$. Въ такомъ случаѣ величины A и B прямо пропорціональны одна другой. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. При этомъ предполагается, что число $\frac{p}{q}$ есть число соизмѣримое съ единицею. Но теорема остается справедливою также и въ случаѣ несоизмѣримаго множителя, хотя здѣсь это не можетъ быть строго доказано по той причинѣ, что для такого доказательства требуется знаніе нѣкоторыхъ ученій изъ теоріи предѣловъ, излагаемой въ курсахъ алгебры и геометріи.

Теорема XXXI. Если при увеличеніи значенія одной изъ двухъ, взаимнозависящихъ другъ отъ друга, величинъ въ любое цѣлое число разъ, соотвѣтствующее значеніе другой, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, уменьшается во столько же разъ, то эти величины обратно-пропорціональны одна другой. — Пусть даны двѣ зависящія одна отъ другой величины A и B и два значенія, соотвѣтствующія одно другому, a_1 и b_1 этихъ величинъ и пусть отъ умноженія a_1 на m (гдѣ m есть число цѣлое) b_1 уменьшается въ m разъ; требуется доказать, что отъ умноженія значенія a_1 величины A на $\frac{p}{q}$ значеніе b_1 величины B умножится на $\frac{q}{p}$. Умножимъ a_1 на $\frac{1}{q}$; въ такомъ случаѣ мы получимъ вмѣсто значенія a_1 величины A нѣкоторое другое ея значеніе $\frac{a_1}{q}$; пусть этому значенію величины A соотвѣтствуетъ значеніе b_2 величины B. Легко видѣть, что $b_2 = b_1 \times q$; потому что значенію $\frac{a_1}{q} \times b$ величины A соотвѣтствуетъ значеніе $\frac{b_2}{q}$ величины B; но $\frac{a_1}{q} \times q = a_1$; стало-быть, по условію, $\frac{b_2}{q} = b_1$, откуда $b_2 = b_1 \times q$. Итакъ, значенію $\frac{a_1}{p}$ величины A соотвѣтствуетъ значеніе $b_1 \times q$ величины B. А въ такомъ случаѣ значенію $\frac{a_1}{q} \times p$ величины A соотвѣтствуетъ значеніе $\frac{b_1 \times q}{p}$ величины B. Но

$$\frac{a_1}{q} \times p = a_1 \times \frac{p}{q}, \text{ а } \frac{b_1 \times q}{p} = b_1 \times \frac{q}{p};$$

стало-быть, мы получили, что при умноженіи значенія a_1 величины A на $\frac{p}{q}$ значеніе b_1 величины B при данныхъ условіяхъ умножится на $\frac{q}{p}$. Въ такомъ случаѣ величины A и B обратно-пропорціональны одна другой. Что̀ и требовалось доказать.

Замѣчаніе. При этомъ предполагается, что число $\frac{p}{q}$ есть число соизмѣримое съ единицей. См. замѣчаніе, которымъ снабжено доказательство предыдущей теоремы.

Теорема XXXII. Если данныя величины A и B прямо-пропорціональны одна другой, то кратное отношеніе двухъ отвлеченныхъ чиселъ, выражающихъ любыя соотвѣтствующія другъ другу значенія ихъ, есть одно и то же (постоянное) число, каковы бы ни были значенія этихъ величинъ.—Пусть величины A и B однородны и пусть

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2;$$

требуется доказать, что

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = A_3 : B_3 = \cdots = A_i : B_i,$$

гдѣ A_1, A_1, A_3, $\cdots$, A_i суть отвлеченныя числа, выражающія значенія величины A, а B_1, B_3; B_3, $\cdots$ B_i — соотвѣтствующія значенія величины B.

Дѣйствительно, по условію:

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2,$$
$$A_2 : A_3 = B_2 : B_3,$$
$$A_3 : A_4 = B_3 : B_4;$$
$$\vdots$$
$$A_{i-1} : A_i = B_{i-1} : B_i .$$

Перемѣстивъ во всѣхъ этихъ пропорціяхъ средніе члены, получимъ, что

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2,$$
$$A_2 : B_2 = A_3 : B_3,$$
$$A_3 : B_3 = A_4 : B_4,$$
$$\vdots$$
$$A_{i-1} : B_{i-1} = A_i : B_i ,$$

откуда получаемъ рядъ равныхъ между собою отношеній

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = A_3 : B_3 = \cdots = A_i : B_i.$$

Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе 1-е. Мы беремъ отвлеченныя числа A_1, $A_2, \cdots A_i$, B_1, B_2, $B_3, \cdots B_i$ потому, что въ противномъ случаѣ было бы невозможно перемѣщеніе среднихъ членовъ, такъ какъ отысканіе отношенія значеній всякихъ двухъ величинъ представляетъ собою неисполнимое требованіе, если данныя величины неоднородны.

Замѣчаніе 2-е. Очевидно, что пропорція, составленная изъ величинъ, а не изъ отвлеченныхъ чиселъ, обладаетъ не всѣми свойствами, которыя замѣчаются въ пропорціяхъ, составленныхъ изъ отвлеченныхъ чиселъ. Такъ, напр., въ пропорціяхъ перваго рода произведеніе крайнихъ и произведеніе среднихъ членовъ не только не равны между собою, но даже не могутъ быть составлены; въ нихъ не можетъ быть сдѣлана перестановка среднихъ и крайнихъ членовъ, если величины не однородны, и т. п. Справедливыми остаются для нихъ то свойство числовыхъ пропорцій, по которому оба отношенія ея должны быть равны между собою, а равно свойства, зависящія отъ измѣненія величины членовъ ея.

Теорема XXXIII. Если двѣ величины A и B другъ другу обратно пропорціональны, то произведеніе двухъ отвлеченныхъ чиселъ, выражающихъ любыя соотвѣтствующія другъ другу значенія этихъ величинъ есть одно и то же (постоянное) число, каковыбы ни были эти значенія.—Пусть величины A и B однородны и пусть

$$A_1 : A_2 : = B_2 : B_1,$$
$$A_2 : A_3 : = B_3 : B_2,$$
$$A_3 : A_4 : = B_4 : B_3,$$
$$\vdots$$
$$A_{i-1} : A_i = B_{i-1} : B_i$$

гдѣ A_1, A_2, $\cdots$ A_i, B_1, B_2, $\cdots$ B_i суть отвлеченныя числа, выражающія отношенія взятыхъ значеній данныхъ величинъ къ приличнымъ образомъ выбраннымъ единицамъ. Требуется доказать, что

$$A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2 = A_3 \times B_3 = \cdots = A_i \times B_i.$$

Дѣйствительно: взявъ произведеніе крайнихъ и произведеніе среднихъ въ каждой изъ этихъ пропорцій, получимъ

$$A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2,$$
$$A_2 \times B_2 = A_3 \times B_3,$$
$$\vdots$$
$$A_{i-1} \times B_{i-1} = A_i \times B_i ,$$

т. е. получимъ рядъ равныхъ между собою произведеній:

$$A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2 = A_3 \times B_3 = \cdots = A_i \times B_i.$$

См. § 149 „Учебника“. Кромѣ изложеннаго въ только что указанномъ параграфѣ „Учебника“ правила учета векселей, достоинъ вниманія еще одинъ способъ учета, называемый *математическимъ*. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ. Обозначивъ валюту векселя буквою v, число мѣсяцевъ, остающихся до срока, буквою t, а процентную таксу буквою p; получимъ, что процентныя деньги со ста рублей въ t мѣсяцевъ, очевидно, равны **Математическій способъ учета векселей.**

$$\frac{p \times t}{12};$$

обозначимъ это число, для краткости, буквою p_1; тогда предположимъ, что

с҃ суммы $100 + p_1$ дѣлается учетъ въ p_1 руб.
а съ валюты v „ „ въ d руб.,

гдѣ d обозначаетъ учетъ со всей валюты; отсюда получимъ пропорцію

$$d : p_1 = v : (100 + p_1),$$

на основаніи которой по любымъ двумъ изъ данныхъ величинъ можно опредѣлить третью, причемъ способъ этотъ и называютъ способомъ математическаго учета векселей. Для выясненія примѣненія этого способа учета векселей къ частнымъ случаямъ рѣшимъ слѣдующія задачи:

Задача 1-я. Какъ великъ учетъ съ векселя въ 1271 р., если сдѣлать учетъ математическій по 8% годовыхъ за 5 мѣсяцевъ до срока? – Разсуждаемъ такъ: 100 рублей даютъ въ теченіе 12 мѣсяцевъ 8 р. процентныхъ денегъ; въ теченіе одного мѣсяца они даютъ $\frac{8}{12}$ р., а въ теченіе 5 мѣсяцевъ

$$\frac{8 \times 5}{12} \text{ р.} = \frac{10}{3} \text{ р.} = 3\tfrac{1}{3} \text{ р.}$$

Стало-быть, имѣемъ, что, при математическомъ учетѣ,

съ $103\frac{1}{3}$ р. долженъ быть сдѣланъ учетъ въ $3\frac{1}{3}$ р.
а съ 1271 р. „ „ „ „ „ x р.

откуда получимъ пропорцію:

$$x : 3\tfrac{1}{3} = 1271 : 103\tfrac{1}{3}, \text{ изъ которой } x = \frac{10 \times 1271 \times 3}{3 \times 310} = \frac{1271}{31} = 41$$

т. е. учетъ равенъ 41 р.

Задача 2-я. Какъ велика валюта векселя, если учетъ съ него, сдѣланный за 5 мѣсяцевъ до срока по 8% годовыхъ, равенъ 41 р.?—Разсуждаемъ такъ: 100 руб. даютъ въ теченіе 5 мѣсяцевъ, считая по 8% годовыхъ, $3\frac{1}{3}$ рубля, стало-быть, имѣемъ, что

съ $103\frac{1}{3}$ р. дѣлается учетъ въ $3\frac{1}{3}$ р.
а „ x „ „ „ „ 41 „

откуда получимъ пропорцію

$$x : 103\tfrac{1}{3} = 41 : 3\tfrac{1}{3}, \text{ изъ которой } x = \frac{41 \times 310 \times 3}{3 \times 10} = 1271,$$

т. е. валюта векселя равна 1271 р.

Задача 3-я. По сколько процентовъ сдѣланъ учетъ векселя, если валюта векселя 1271 р., учетъ 41 р., и если вексель учтенъ за 5 мѣсяцевъ до срока? Съ помощью основной формулы

$$d : p_1 = v : (100 + p_1)$$

можно найти p_1, а зная величину p_1, можно легко найти p, такъ какъ $p_1 = \frac{p \times t}{12}$; но такой способъ рѣшенія требуетъ вспомогательныхъ алгебраическихъ вычисленій, а потому въ ариѳметикѣ разсуждаютъ нѣсколько иначе: по условію задачи,

вмѣсто 1271 р. по векселю уплачено 1230 р.
а „ x „ „ „ „ 100 „

гдѣ x обозначаетъ сумму, въ которую обращается 100 рублей въ теченіе 5 мѣсяцевъ, и откуда получаемъ пропорцію

$$x : 1271 = 100 : 1230, \text{ изъ которой } x = \frac{1271 \times 100}{1230} = 103\,\frac{41}{123} = 103\tfrac{1}{3},$$

т. е. что со $103\frac{1}{3}$ р. сдѣланъ учетъ въ $3\frac{1}{3}$ рубля за 5 мѣсяцевъ до срока. Далѣе разсуждаемъ такъ:

въ теченіе 5 мѣсяцевъ наростаетъ $3\frac{1}{3}$ р. проц. денегъ,
" " 12 " " x " " " ;

откуда получаемъ пропорцію

$$x : 3\tfrac{1}{3} = 12 : 5, \text{ изъ которой } x = \frac{10 \times 12}{3 \times 5} = 8,$$

т. е. учетъ сдѣланъ по 8% годовыхъ.

Задача 4-я. За сколько мѣсяцевъ до срока сдѣланъ математическій учетъ даннаго векселя, валюта котораго равна 1271 р., если учетъ равенъ 41 руб. и если онъ сдѣланъ по 8% годовыхъ? Разсуждаемъ такъ:

вмѣсто 1271 руб. по векселю уплачено 1240 руб.
а " x " будетъ " 100 "

откуда получаемъ пропорцію

$$x : 1271 = 100 : 1230, \text{ изъ которой } x = \frac{1271 \times 100}{1230} = 103\tfrac{1}{3},$$

т. е. что со $103\frac{1}{3}$ р. дѣлается учетъ въ $3\frac{1}{3}$ р. Теперь разсуждаемъ такъ:

8 р. проц. денегъ наростаетъ на 100 р. въ теченіе 12 мѣсяцевъ,
$3\frac{1}{3}$ р. " " " " " " " " x " ;

откуда получимъ пропорцію

$$x : 12 = 3\tfrac{1}{3} : 8, \text{ изъ которой } x = \frac{12 \times 10}{3 \times 8} = 5,$$

т. е. вексель учтенъ за 5 мѣсяцевъ до срока.

Отношеніе учета комерческаго къ математическому.

Замѣчаніе. Если величину учета по такъ наз. математическому способу обозначимъ буквою D_1, валюту векселя — буквою V, процентную таксу буквою p, а число мѣсяцевъ, остающихся до срока векселя, — буквою t, то легко вывести, что

$$D_1 = \frac{p \times t \times V}{12 \times \left(100 + \frac{p \times t}{12}\right)}.$$

Обозначивъ величину учета по такъ называемому коммерческому способу, при тѣхъ же условіяхъ, буквою D_2, мы, очевидно, получимъ, что

$$D_2 = \frac{p \times t \times V}{12 \times 100}.$$

Отсюда легко получимъ пропорцію

$$D_1 : D_2 = 100 : \left(100 + \frac{p \times t}{10}\right),$$

изъ которой очевидно, что величина учета по математическому способу меньше величины учета по способу коммерческому.

Способъ учета векселей по Лейбницу.

Коммерческій способъ учета векселей называется иначе способомъ *Карпцова*, а способъ такъ называемаго математическаго учета—способомъ *Гофмана*, по имени лицъ, предложившихъ эти способы. Изъ остальныхъ способовъ учета векселей замѣчателенъ способъ, предложенный германскимъ философомъ *Лейбницемъ* (1646—1716), но на практикѣ употребляемый еще рѣже Гофманова способа. Способъ Лейбница состоитъ въ томъ, что наростаніе капитала вычисляется (точно такъ же, какъ при способѣ Гофмана) съ выплачиваемой суммы, но по сложнымъ, а не по простымъ процентамъ. Учетъ по способу Лейбница можетъ быть вычисленъ съ помощью слѣдующихъ разсужденій: пусть V—валюта векселя, p — годовая процентная такса, a — капиталъ, уплачиваемый по векселю, $D_з$—учетъ съ векселя по Лейбницеву способу; пусть до истеченія срока остается ровно t лѣтъ, гдѣ t есть число цѣлое; тогда по формулѣ сложныхъ процентовъ, извѣстной изъ алгебры,

$$V = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t,$$

откуда

$$a = \frac{V}{(1+r)^t}$$

гдѣ для краткости буквою r замѣнена величина $p : 100$. Но по условію $D_з = V - a$; стало-быть,

$$D_з = V - \frac{V}{(1+r)^t};$$

откуда получимъ довольно сложную формулу для величины учета:

$$D_з = \frac{(1+r)^t - 1}{(1+r)^t} \times V.$$

Если до срока векселя остается t лѣтъ и n дней, то, какъ это извѣстно изъ алгебры, въ такомъ случаѣ

$$V = a\,(1+r)^t \times \left(1 + \frac{r \times n}{365}\right).$$

$$D_з = V - \frac{V}{(1+r)^t \times \left(1 + \frac{r \times n}{365}\right)}.$$

Эта формула, очевидно, еще сложнѣе. Понятно, что принципъ сложныхъ процентовъ можно распространить на дробныя части года; но на формулѣ, получаемой при этомъ, здѣсь не мѣсто останавливаться.

На практикѣ способъ Лейбница, какъ это замѣчено выше, никогда не употребляется. Мало употребителенъ на практикѣ также и способъ Гофмана.

См. § 153 „Учебника". Въ нѣкоторыхъ сборникахъ ариѳметическихъ задачъ встрѣчаются задачи на такъ называемое правило сроковъ. Ограничимся разсмотрѣніемъ слѣдующихъ типовъ задачъ этого рода: Задачи на правило сроковъ.

1) Нѣкто долженъ уплатить другому лицу чрезъ a_1 мѣсяцевъ A рублей; должникъ предлагаетъ кредитору слѣдующія условія: a_1 руб. онъ уплатитъ чрезъ t_1 мѣсяцевъ по заключеніи сдѣлки, гдѣ t_1, конечно, меньше t, а остальное — чрезъ такой срокъ, чтобы никто при этомъ не былъ въ убыткѣ. Чрезъ сколько мѣсяцевъ по совершеніи первой уплаты онъ долженъ уплатить остальную часть суммы A, если при этомъ не должны пострадать ничьи интересы?

Разсуждаемъ такъ: пусть въ теченіе мѣсяца каждый рубль приноситъ доходъ, равный b рублямъ; тогда капиталъ въ A руб. въ теченіе t мѣсяцевъ можетъ принести

$$b \times t \times A \text{ рублей доходу;}$$

капиталъ же въ a_1 рублей, которымъ дебиторъ желаетъ пользоваться въ теченіе t_1 мѣсяцевъ, принесъ бы ему, по тому же разсчету,

$$b \times t_1 \times a_1 \text{ рублей доходу.}$$

Стало-быть, капиталъ $A - a_1$ долженъ принести ему рублей

$$b \times t \times A - b \times t_1 \times a_1$$

для того, чтобы его интересы не пострадали. При этомъ, конечно, не пострадаютъ также и интересы кредитора. Одинъ рубль приноситъ въ мѣсяцъ b рублей; спрашивается, въ теченіе сколькихъ мѣсяцевъ дебиторъ долженъ пользоваться капиталомъ $A - a_1$ для того, чтобы получить

$$b \times t \times A - b \times t_1 \times a_1 \text{ рублей доходу?}$$

Предположимъ, что онъ долженъ пользоваться этимъ капиталомъ въ теченіе x мѣсяцевъ. Тогда

$$b \times x \times (A - a_1) = b \times t \times A - b \times t_1 \times a_1$$

откуда

$$b \times x \times (A - a_1) = b \times (t \times A - t \times a_1),$$

или

$$x \times (A - a_1) = t \times A - t_1 \times a.$$

Отсюда

$$x = \frac{t \times A - t_1 \times a_1}{A - a_1}.$$

Очевидно, что при этомъ величина промежутка времени x не зависитъ отъ величины b, которая въ этомъ случаѣ является лишь вспомогательною, при рѣшеніи задачи, величиною.

Примѣръ. Пусть нѣкто обязался уплатить чрезъ 3 года 20000 р.; пусть онъ далѣе пожелалъ черезъ 2 года уплатить 12000 рублей. Спрашивается, чрезъ сколько времени онъ долженъ уплатить остальные 8000 рублей, если при этомъ не должны пострадать ничьи интересы?

Разсуждая такимъ же образомъ, какъ выше, получимъ, что

$$x = \frac{3 \times 20000 - 2 \times 12000}{20000 - 12000} = \frac{32000}{8000} = 4.$$

Это значитъ, что остальныя 8000 дебиторъ долженъ уплатить чрезъ 4 года.

2) Нѣкто обязался уплатить другому лицу A руб. съ тѣмъ, чтобы a_1 руб. уплатить чрезъ t_1 мѣсяцевъ, a_2 руб. чрезъ t_2 мѣсяцевъ, ..., a_k руб. чрезъ t_k мѣсяцевъ, причемъ $a_1 + a_1 + a_3 + \dots + a_k = A$. Спрашивается, чрезъ сколько мѣсяцевъ по заключеніи сдѣлки онъ долженъ уплатить разомъ всю сумму, если при этомъ ничьи интересы не должны пострадать?

Разсуждаемъ такъ: пусть каждый рубль приноситъ въ мѣсяцъ b рублей прибыли. При первоначальныхъ условіяхъ должникъ получитъ $b \times a_1 \times t_1 + b \times a_2 \times t_2 + \dots + b \times a_k \times t_k$ руб. прибыли; пусть онъ обязанъ взнести всю сумму A за-разъ чрезъ x мѣсяцевъ, и пусть при этомъ не пострадали ничьи интересы; тогда

$$b \times A \times x = b \times (a_1 \times t_1 + a_2 \times t_2 + \dots + a_k \times t_k),$$

откуда

$$x = \frac{a_1 \times t_1 + a_1 \times t_2 + \dots + a_k \times t_k}{A}.$$

Легко видѣть, что и въ этомъ случаѣ срокъ уплаты не зависитъ отъ величины прибыли, приносимой въ мѣсяцъ однимъ рублемъ.

Примѣръ. Нѣкто обязался уплатить 8000 рублей слѣдующимъ образомъ: 2500 р. чрезъ 6 мѣсяцевъ по заключеніи сдѣлки, 3500 р. чрезъ 10 мѣсяцевъ и 2000 — чрезъ 15 мѣсяцевъ; кредиторъ пожелалъ получить всѣ деньги разомъ, на что должникъ согласился. Когда наступаетъ срокъ этой уплаты?

Разсуждая такимъ же образомъ, какъ выше, получимъ, что

$$x = \frac{2500 \times 6 + 3500 \times 10 + 2000 \times 15}{8000} = 1.$$

Это значитъ, что 8000 р. подлежатъ уплатѣ, при этихъ условіяхъ, ровно чрезъ 1 годъ по заключеніи сдѣлки.

Замѣчаніе. Какъ задачи на правило сроковъ, такъ въ особенности задачи на такъ наз. правило математическаго учета встрѣчаются въ жизни довольно рѣдко. Кромѣ того, должно замѣтить, что несогласными со здравымъ смысломъ являются не только многія задачи на сложное тройное правило, но также тѣ задачи на правило товарищества, въ которыхъ участникъ предпріятія какъ бы заявляетъ притязанія на прибыль съ предпріятія, въ которомъ онъ не участвовалъ въ теченіе всего времени существованія этого предпріятія, и притомъ также за то время, въ теченіе котораго это лицо и вовсе не участвовало въ предпріятіи.

VI. О приближенныхъ вычисленіяхъ.

Приближенныя значенія чиселъ.

Условимся 250 считать приближенною величиною всякаго числа, бо̀льшаго чѣмъ 250, но меньшаго чѣмъ 260; точно также 5700 будетъ приближеннымъ значеніемъ числа, бо̀льшаго чѣмъ 5700, но меньшаго чѣмъ 5800, и т. д.; равнымъ образомъ 2,70 будетъ приближеннымъ значеніемъ числа, бо̀льшаго чѣмъ 2,7, но меньшаго, чѣмъ 2,8. Условимся при этомъ нули, замѣняющіе неизвѣстныя цыфры числа, котораго приближенное значеніе мы беремъ, изображать болѣе мелкимъ шрифтомъ. Такъ, 25_0 есть приближенная величина числа, бо̀льшаго чѣмъ 250, но меньшаго чѣмъ 260; равнымъ образомъ 27_{00} есть приближенная величина числа, бо̀льшаго чѣмъ 2700, но меньшаго чѣмъ 2800; число же 270_0 будетъ приближенная величина числа, бо̀льшаго чѣмъ 2700, но меньшаго чѣмъ 2710; и т. д. Въ десятичныхъ дробяхъ нуль, приписанный справа, будетъ характеризовать приближенную величину; такъ, 2,75 будетъ нѣкоторое число, а $2{,}75_0$—приближенная величина числа, бо̀льшаго чѣмъ 2,75, но меньшаго чѣмъ 2,76.

При производствѣ четырехъ дѣйствій надъ приближенными значеніями чиселъ, можетъ представиться слѣдующій вопросъ первостепенной важности: какія цыфры полученнаго результата достовѣрны и не зависятъ отъ того, которыя именно цыфры замѣнены нулями въ числахъ, приближенныя значенія которыхъ мы принимаемъ за данныя.

Сложеніе.

Сложеніе. Пусть требуется сдѣлать сложеніе десяти слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое есть приближенное значеніе нѣкотораго *цѣлаго* числа. Сложивъ

$$\begin{array}{r} 32_0 \\ 27_0 \\ 67_0 \\ 81_0 \\ 70_0 \\ 52_0 \\ 45_0 \\ 51_0 \\ 81_0 \\ 27_0 \end{array}$$

эти числа по извѣстнымъ правиламъ, получимъ сумму 533_0, въ которой цыфра единицъ невѣрна; но отъ сложенія единицъ должно было-бы получиться нѣкоторое число десятковъ, которое повліяло бы также на цыфру десятковъ полученной суммы; стало-быть, цыфра десятковъ тоже невѣрна въ этомъ случаѣ (т. е. когда дано 10 слагаемыхъ).—Что касается цыфры сотенъ, то эта цыфра требуетъ обсужденія болѣе подробнаго: если бы каждая цыфра единицъ была единицей (беремъ крайній случай), то цыфра десятковъ увеличилась на одну единицу; если бы каждая цыфра единицъ была девяткой (беремъ другой крайній случай), то къ цыфрѣ десятковъ должно было бы прибавить девять единицъ; въ обоихъ случаяхъ цыфры десятковъ были бы различныя, а въ зависимости отъ этого могло бы получиться также и иная цыфра сотенъ. Стало-быть, и цыфра сотенъ тоже недостовѣрна въ этомъ случаѣ. — Что же касается цыфры тысячъ, то она отъ неизвѣстныхъ намъ цыфръ единицъ, которыя замѣнены нулями, не зависитъ. Дѣйствительно: даже въ случаѣ 9-ти десятковъ, которые могли бы получиться отъ сложенія неизвѣстныхъ единицъ, цыфра сотенъ могла бы измѣниться только на одну единицу; но такъ какъ число всѣхъ сотенъ искомой суммы не можетъ быть равно 99-ти, то эта единица сотенъ не могла бы уже повліять на сотни такъ, чтобы получилась въ результатѣ лишняя тысяча.

Свойство суммы и правило сложенія.

Отсюда получаемъ слѣдующія свойства суммы: 1) если число слагаемыхъ менѣе одиннадцати, то сумма единицъ никоимъ образомъ не можетъ повліять на цыфру тысячъ, сумма десятковъ — на цыфру десятковъ тысячъ, и т. д.; а потому цыфру тысячъ искомой суммы должно считать достовѣрною, если только слагаемыхъ не болѣе десяти и если не достовѣрны только цыфры единицъ въ данныхъ слагаемыхъ; 2) чтобы возможно было вычислить сумму данныхъ слагаемыхъ, коихъ не болѣе десяти, и быть въ состояніи поручиться за цыфру единицъ какого либо разряда, необходимо и достаточно знать только двѣ слѣдующія справа за этимъ разрядомъ цыфры въ каждомъ слагаемомъ; 3) если только цыфры единицъ слагаемыхъ, коихъ не болѣе десяти, не извѣстны, то полученная цыфра десятковъ не можетъ считаться вѣрною, полученная же цыфра сотенъ можетъ отличаться отъ истинной не болѣе, чѣмъ на одну единицу. (Такимъ образомъ полученная выше сумма 5330 можетъ быть замѣнена суммою 5300, которая отличается отъ истинной, неизвѣстной намъ, суммы менѣе чѣмъ на одну сотню; въ этомъ случаѣ говорятъ, что сумма найдена съ точностью до одной сотни).—Отсюда вытекаютъ слѣдующія правила: 1) если число

*) Когда же дано меньше слагаемыхъ, то цыфра десятковъ можетъ быть и вѣрна, но ручаться за нее все таки нельзя.

слагаемыхъ не болѣе десяти и если въ нихъ неизвѣстны только цыфры единицъ, то сумму можно вычислить съ точностью до одной сотни; если же въ нихъ неизвѣстны также цыфры десятковъ, то сумму можно вычислить съ точностью до одной тысячи и т. д.; 2) чтобы возможно было вычислить сумму слагаемыхъ, коихъ не болѣе десяти, съ точностью до единицы какого нибудь разряда, необходимо и достаточно, чтобы въ слагаемыхъ, кромѣ цыфръ этого разряда, были достовѣрны также цыфры слѣдующаго низшаго разряда; цыфры же остальныхъ низшихъ разрядовъ могутъ быть замѣнены нулями.

Примѣры.

Примѣръ 1. Требуется найти, съ точностью до одной сотой доли, сумму слѣдующихъ слагаемыхъ: 20,2756; 13,37425; 5,1763; 4,801567.

20,2756
13,37425
5,1763
4,801567

Для этого примемъ всѣ цыфры, стоящія послѣ цыфръ тысячныхъ, за нули и сложимъ числа такъ, какъ будто цыфръ десятитысячныхъ, стотысячныхъ и милліонныхъ ни въ одномъ изъ данныхъ чиселъ нѣтъ. Въ результатѣ получимъ 43,626. Отбросивъ послѣднюю цыфру (цыфру тысячныхъ) получимъ число 43,62, которое представляетъ собою сумму данныхъ чиселъ съ точностью до 0,01. Но такъ какъ число 43,626 ближе къ числу $43{,}6_3$, чѣмъ къ полученному нами результату (а именно, чѣмъ къ числу $43{,}6_2$), то за приближенную сумму данныхъ чиселъ лучше принять число 43,63.—Такой результатъ, впрочемъ, носитъ названіе приближенія *съ избыткомъ*, въ то время какъ приближеніе, меньшее истиннаго результата, называется приближеніемъ *съ недостаткомъ*. При этомъ, если первая изъ отбрасываемыхъ цыфръ равна 5-ти или болѣе 5-ти, то берутъ приближеніе съ избыткомъ (увеличивъ для того ближайшую слѣва цыфру на одну единицу); въ противномъ же случаѣ предпочитается приближеніе съ недостаткомъ.

Примѣръ 2. Пусть требуется узнать: съ какою именно степенью точности можно вычислить сумму слѣдующихъ приближенныхъ чиселъ: 2,7160; 3,217890; 6,18920.

2,7160
3,217890
6,18920

Въ нихъ нуль справа напоминаетъ о томъ, что эти числа представляютъ собою приближенные результаты нѣкоторыхъ дѣйствій, достовѣрные только въ цыфрахъ, предшествующихъ нулямъ. Очевидно, что въ первомъ слагаемомъ намъ неизвѣстны цыфры десятитысячныхъ; поэтому мы уже за цыфру тысячныхъ суммы поручиться не въ состояніи. А въ такомъ случаѣ мы можемъ найти сумму данныхъ чиселъ лишь съ точностью до одной сотой; эта сумма равна 11,22. — Правило очевидно, и его предоставляется вывести учащемуся.

Вычитаніе и правило его производства.

Вычитаніе. При вычитаніи могутъ представиться три случая: 1) даны два точныхъ числа, и требуется найти ихъ разность съ нѣкоторою опредѣленною степенью точности; 2) даны два неточныхъ числа и требуется найти ихъ разность съ наибольшею, какъ только возможна въ этомъ случаѣ, степенью приближенія; 3) даны два числа, одно — точное, а другое — приближенное, и требуется найти ихъ разность съ наибольшею степенью приближенія. — При рѣшеніи этихъ вопросовъ слѣдуетъ принять во вниманіе, что каждая цыфра вычитаемаго можетъ повліять на слѣдующую слѣва цыфру уменьшаемаго. Возьмемъ крайній случай, изъ котораго выяснятся способы вычитанія во всѣхъ случаяхъ. Пусть требуется сдѣлать вычитаніе: $7243_0—3243_0$.

$$\begin{array}{r} 7243_0 \\ -\,3243_0 \\ \hline \end{array}$$

При этомъ нули мелкаго шрифта обозначаютъ, что цыфры единицъ уменьшаемаго и вычитаемаго неизвѣстны. Въ остаткѣ получится, если эти цыфры принять за равныя между собою, слѣдующіе число: 4000_0; если бы мы предположили, что дѣйствительная цыфра единицъ уменьшаемаго 9, а дѣйствительная цыфра единицъ вычитаемаго 0, то дѣйствительная разность была бы 40009; если бы мы предположили, что дѣйствительная цыфра единицъ уменьшаемаго 0, а дѣйствительная цыфра единицъ вычитаемаго 9, то дѣйствительная разность была бы 39991. Въ обоихъ (крайнихъ) случаяхъ получаются разности, отличающіяся отъ полученной приблизительной разности, менѣе чѣмъ на одинъ десятокъ. Отсюда вытекаетъ слѣдующее свойство разности: цыфры единицъ уменьшаемаго и вычитаемаго вліяютъ только на цыфру десятковъ; ибо хотя отъ того, что цыфра единицъ вычитаемаго болѣе цыфры единицъ уменьшаемаго, могутъ измѣниться нѣкоторыя и даже всѣ цыфры разности, но на всю разность это можетъ повліять только въ томъ смыслѣ, что она на самомъ дѣлѣ болѣе или менѣе приближенной на нѣкоторое число единицъ, меньшее десяти, Примѣры.

Примѣръ 1. Даны числа 27683 и 12987; требуется найти ихъ разность съ точностью до одной тысячи; для этого найдемъ разность 27000—12000, т. е. 15000. Это число и есть разность съ точностью до одной тысячи.

Примѣръ 2. Даны два приближенныхъ числа: 2,718280 и 3,1410 и требуется найти ихъ разность съ наибольшею, какая только возможно въ этомъ случаѣ точностью. Очевидно, что такъ какъ четвертая, пятая и шестая цыфры уменьшаемаго неизвѣстна, то четвертая, пятая и шестая цыфры разности тоже не могутъ быть извѣстны. А потому надо найти разность, которая вѣрна съ точностью до одной тысячной, и одна тысячная есть наибольшая степень точности, съ какою разность данныхъ чиселъ можетъ быть найдены. — Такъ же разсуждаютъ въ случаяхъ, когда уменьшаемое извѣстно съ высшею, чѣмъ вычитаемое, степенью точности.

$$\begin{array}{r} 3{,}1410 \\ -\,2{,}7180 \\ \hline 1{,}3230 \end{array}$$

Примѣръ 3. Даны два числа 3,718 и 2,619230, изъ которыхъ первое точно извѣстно, а второе—приблизительно до 0,00001. Разность ихъ можетъ быть вычислена съ тою же степенью точности, съ какою дано вычитаемое.— Такъ же разсуждаютъ, когда вычитаемое дано точно, а уменьшаемое—приблизительно.

Правила приближеннаго вычисленія разности такимъ образомъ сводятся къ слѣдующему: закругливъ уменьшаемое и вычитаемое до той или иной (возможной или достаточной въ данномъ случаѣ степени точности) опредѣляютъ разность съ тою же степенью точности; при этомъ слѣдуетъ приближенныя значенія уменьшаемаго и вычитаемаго брать или оба съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ.

Умноженіе.

Умноженіе. Для того чтобы уяснить себѣ излагаемый ниже способъ умноженія одного числа на другое въ случаѣ приближеннаго вычисленія разрѣшимъ слѣдующіе вопросы:

1) Пусть требуется опредѣлить произведеніе чиселъ: 32 764 и 8 669. Станемъ умножать на цыфры множителя, начиная съ первой слѣва (ср. § 38); получимъ первое частное произведеніе: 262 112 тысячъ. Помножимъ на вторую цыфру слѣва, т. е. на 6, и получимъ второе частное произведеніе 196 584 сотни. На цыфру 7 (т. е. на цыфру десятковъ) множителя мы станемъ умножать только число всѣхъ десятковъ множимаго, оставивъ цыфру единицъ множимаго (т. е. 4) безъ вниманія; получимъ третье частное произведеніе: 22 932 сотни, которое мы и запишемъ приличнымъ образомъ. Точно такъ же на цыфру единицъ множителя (т. е. на 9) помножимъ не все множимое, а только все число сотенъ, въ немъ содержащихся, оставивъ безъ вниманія цыфры десятковъ и единицъ множимаго; получимъ 2 943 сотни, которыя мы и запишемъ приличнымъ образомъ. Сложивъ эти частныя произведенія, получимъ: 2 843 579 сотенъ или приблизительно 284 358 тысячъ.—Остается еще разрѣшить вопросъ—какія изъ цыфръ полученнаго такимъ образомъ числа можно считать принадлежащими полному произведенію данныхъ двухъ чиселъ? Обозначимъ отброшенную часть въ первомъ изъ частныхъ произведеній буквою P_1, а отброшенную во второмъ изъ частныхъ произведеній часть—буквою P_2. Тогда

$$\begin{array}{l} 32764 \\ \underline{\times\, 8679} \\ 262112 \\ 196584 \\ 22932 \\ \underline{2943} \\ 2843579 \end{array}$$

$$P_1 = 4 \times 7 \times 10^1 \text{ и } P_2 = 6 \times 9 \times 10^1.$$

Легко убѣдиться, что такъ какъ $4 > 1$, и $6 > 1$ и, кромѣ того $4 < 10$ и $6 < 10$, то

$$P_1 > 7 \times 10 \text{ и } P > 9 \times 10 \text{ и, кромѣ того, } P_1 < 7 \times 10^2, \text{ а } P_2 < 9 \times 10^2,$$

откуда

$$P_1 + P_2 > (7 + 9) \times 10 > 10^2, \text{ и } P_1 + P_2 < (7 + 9) \times 10^2.$$

По этому:

$$P_1 + P_2 < 100 \times 10^2, \text{ т. е. } < 10\,000,$$

причемъ

$$P_1 + P_2 > \ 10 \times 10^2, \text{ т. е. } > \ 1\,000.$$

Отсюда видимъ, что отброшенное вліяетъ на цыфру тысячъ, благодаря тому, что $7 + 9$ болѣе 10-ти, но на цыфру десятковъ тысячъ уже не вліяетъ, потому что $7 + 9$ менѣе 100.

Примѣры.

Примѣры. а) Пусть требуется найти произведеніе $2\,716\,935 \times 469\,702$ съ точностью до 10 000. Отдѣляемъ въ множителѣ три цыфры справа, сумма цыфръ оставшейся слѣва части равна 9-ти. По этому можемъ произвести дѣйствіе такъ:

2716935	
$\times$469702	
10867740	произведеніе всего множимаго на 4 сотни тыс.
16301610.	„ „ „ „ 6 дес. тыс.
24452415	„ „ „ „ 9 тысячъ.
1901851	„ всѣхъ дес. множим. „ 7 сотенъ.
5432	„ „ тыс. „ „ 2 единицы.
1276149798	произведеніе въ тысячахъ.
1276149800000 . .	произведеніе съ точностью до 10000.

б) Пусть требуется найти произведеніе тѣхъ же чиселъ съ точностью до 100 000. Отдѣляемъ въ множителѣ двѣ цыфры слѣва, сумма остальныхъ цыфръ $(9 + 7 + 0 + 2)$ равна 18; отсюда заключаемъ, что цыфры тысячъ во множителѣ тоже нужна. Расположеніе вычисленій то же, что выше.

в) Пусть, наконецъ, требуется найти произведеніе $767\,247 \times 64\,162$ съ точностью до 1 000. Отдѣляемъ во множителѣ двѣ цыфры слѣва; сумма этихъ цыфръ $(6 + 2)$ менѣе 10-ти; поэтому располагаемъ вычисленіе такъ:

767247	
64162	
4603482	произведеніе всего множимаго на 6 дес. тыс.
3068988.	„ „ „ „ 4 тысячи,
767247	„ „ „ „ 1 сотню,
460344	„ всѣхъ дес. множим. „ 6 десятковъ,
15544	„ „ сотенъ „ „ 2 единицы.
492281215	произведеніе въ сотняхъ.
49228122000. . .	„ съ точностью до 1 000.

Примѣръ и правило.

2) Пусть даны два числа $N_1 = 2716934$ и $N_2 = 469702$.

Начнемъ производство дѣйствія опять съ наивысшаго разряда множителя. Отбросимъ въ множимомъ столько цыфръ справа, чтобы послѣдняя изъ оставшихся цыфръ, помноженная на 4, дала въ произведеніи единицы, изъ которыхъ каждая равна 10^7. Эта цыфра множимаго, очевидно, 9, потому что

$$(4 \times 10^5) \times (9 \times 10^2) = (4 \times 9) \times 10^5.$$

2716934
$\times$469702
27169
$\times$469702
108676
18296
2439
189
127500 дес. милл.
или 12750 сот. милл.

Итакъ, множимое обратилось въ 2 716 900. Помноживъ 2 716 900 на цыфру 4, получимъ первое частное произведеніе 108 676, выраженное въ единицахъ, изъ которыхъ каждая равна 10^7. На слѣдующую цыфру множителя помножимъ всѣ цыфры новаго множимаго за исключеніемъ цыфры единицъ, т. е. 9; на третью слѣва цыфру множителя помножимъ всѣ цыфры множимаго за исключеніемъ послѣднихъ двухъ цыфръ его, и т. д. до тѣхъ поръ, пока будутъ исчерпаны всѣ цыфры множимаго. Мы такимъ образомъ получимъ цѣлый рядъ частныхъ произведеній, выраженныхъ въ единицахъ, изъ которыхъ каждая равна 10^7, а именно рядъ произведеній: 108 676, 16,296, 2 439 и 189, такъ какъ на цыфры десятковъ и единицъ множителя мы не умножали ни одной цыфры множимаго.

$$P_1 < 4 \cdot 10^5 \cdot 10^2 = 4 \cdot 10^7$$
$$P_2 < 6 \cdot 10^4 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10^7$$
$$P_3 < 9 \cdot 10^3 \cdot 10^4 = 9 \cdot 10^7$$
$$P_4 < 7 \cdot 10^2 \cdot 10^5 = 7 \cdot 10^7$$
$$P_5 < 0 \cdot 10^1 \cdot 10^6 = 0$$
$$P_6 < 2 \cdot 10^7$$

Разсмотримъ, какими мы пренебрегли произведеніями; обозначимъ ихъ по порядку буквами: P_1, P_2, P_3 и т. д. Получимъ, очевидно, что, зная этотъ рядъ неравенствъ, характеризующихъ каждое изъ отброшенныхъ нами произведеній, мы можемъ вычислить, за которую цыфру полученнаго произведенія можно поручиться. Дѣйствительно: сумма всѣхъ отброшенныхъ произведеній.

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 < (4 + 6 + 9 + 7 + 2) \cdot 10^7$$

или

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 < 28 \cdot 10^7 < 10^9$$

Стало-быть, полученное произведеніе 1275 тысячъ милліоновъ вѣрно съ точностью до 1000 000 000.

Отсюда вытекаютъ слѣдующія общія правила для умноженія цѣлыхъ приближенныхъ чиселъ:

1) взявъ сумму цыфръ даннаго множителя, находятъ ближайшую къ ней высшую десятичную единицу, и на первую слѣва цыфру множителя помножаютъ всѣ тѣ цыфры, которыя дадутъ разряды не меньшіе, чѣмъ 10^k; остальныя цыфры множимаго замѣняются нулями, т. е. игнорируются; на слѣдующую справа цыфру множителя помножаютъ всѣ цыфры множимаго, за исключеніемъ первыхъ справа изъ ранѣе помноженныхъ цыфръ множимаго, и т. д. до тѣхъ поръ пока не будутъ исчерпаны либо всѣ цыфры множимаго, либо всѣ цыфры множителя; 2) если сумма цыфръ множителя менѣе 10-ти, то полученное произведеніе будетъ точно до 10^{k+1}; если она болѣе 9-ти, но менѣе ста, то произведеніе будетъ вычислено съ точностью до 10^{k+2} и т. д.; 3) при умноженіи десятичныхъ дробей правильныхъ и смѣшанныхъ соблюдается то же правило, но при этомъ, дабы при умноженіи сразу получалось мѣсто запятой, полезно пользоваться правиломъ, изложеннымъ въ § 123 настоящаго учебника.

Примѣръ 1. Пусть требуется найти произведеніе двухъ чиселъ: 681,75636 на **Примѣры.**
0,047236. Прежде всего обратимъ множителя въ цѣлое число и соотвѣтственнымъ образомъ уменьшимъ множимое; затѣмъ подпишемъ множителя такъ, чтобы цыфра единицъ множителя пришлась подъ послѣднею цыфрою множимаго:

```
   0,00068175636
        × 47236
27|2680000
 4|767
  |136
  | 18
32|189
```

Начнемъ умноженіе съ единицъ высшаго разряда множителя и на цыфру 4 помножимъ всѣ цыфры множимаго, начиная съ 7-ми, принявъ цыфры 5636 за нули; тогда первое частное произведеніе, согласно правилу умноженія, которое изложено въ § 123 и подлежитъ усвоенію ранѣе чтенія настоящихъ строкъ, получимъ первое частное произведеніе 27,2680000. Засимъ помножимъ на цыфру 7 множителя всѣ цыфры множимаго, за исключеніемъ еще одной (а именно 1-цы); получимъ второе частное произведеніе 4,767; далѣе примемъ еще одну цыфру множимаго за нуль (а именно цыфру 1) и помножимъ полученное множимое на цыфру сотенъ множителя, т. е. на 2; получимъ третье частное произведеніе 8,136. Наконецъ, примемъ и цыфру 8 множимаго за нуль и помножимъ полученное множимое на цыфру десятковъ множителя, т. е. на 3; получимъ послѣднее частное произведеніе 0,012 (такъ какъ уже на цыфру единицъ помножать нечего). При этомъ нули въ первомъ частномъ произведеніи записаны только для уясненія себѣ мѣста запятой, которая замѣнена общею для всѣхъ произведеній чертою; полное же произведеніе, полученное такимъ образомъ, равно 32,189. Въ этомъ произведеніи однако же не всѣ цыфры достовѣрны. Такъ какъ сумма цыфръ множителя равна 22 (ибо $4 + 7 + 2 + 3 + 6 = 22$), то сумма всѣхъ произведеній, нами пренебреженныхъ, меньше, чѣмъ $22 \times 0{,}001$, и подавно меньше, чѣмъ $100 \times 0{,}001$, т. е. меньше чѣмъ 0,1. А потому полученное нами произведеніе можетъ быть замѣнено числомъ: 32,2, которое представляетъ собою произведеніе данныхъ чиселъ съ точностью до одной десятой.—Очевидно, что, дѣлая умноженіе такимъ образомъ, какъ оно выше сдѣлано, мы можемъ всегда опредѣлить—за которыя цыфры полученнаго приближеннаго произведенія можно поручиться; для этого слѣдуетъ только единицу нижайшаго разряда произведенія помножить на ближайшую бо́льшую, чѣмъ сумма цыфръ множителя, десятичную единицу: полученное произведенія выразитъ степень приближенія полученнаго произведенія.

Примѣръ 2. Пусть требуется найти произведеніе чиселъ: 3,14151927 и 2,7182818 съ точностью до одной сотой. Сумма цыфръ множителя равна 37. Ближайшая къ ней единица высшаго разряда—сотня. На первую цыфру множителя помножаемъ всѣ цыфры множимаго, которыя отъ умноженія на эту цыфру дадутъ не менѣе десятитысячныхъ долей (такъ какъ десятитысячныя, будучи помножены не только на сумму цыфръ множителя, но даже на 100, дадутъ сотыя); тогда получимъ новое множимое: 3,1415. Для полученія же новаго множителя достаточно принять къ свѣдѣнію, что надо отбросить всѣ тѣ цыфры, которыя дадутъ при умноженіи на высшую цыфру множимаго доли, меньшія десятитысячныхъ; тогда получимъ новаго множителя: 2,7182. Остальныя цыфры множимаго и множителя ненужны. — Полученное такимъ образомъ произведеніе, т. е. 8,5385 точно до одной сотой доли. Т. е. можно вполнѣ поручиться за слѣдующія цыфры произведенія: 8,54.

```
 3,14151927
  × 2,7182818
 3,1415
  × 2,7182
6|2830
2|1987
 | 314
 | 248
 |   6
8|5385
```

Дѣленіе.

Дѣленіе. При дѣленіи могутъ представиться слѣдующіе случаи: 1) даны два точныхъ числа и требуется найти ихъ отношеніе (частное) съ нѣкоторою, напередъ заданною, степенью точности; 2) дѣлимое неточное, дѣлитель — точное число и требуется найти частное съ напередъ заданною степенью точности; 3) дѣлимое — точное число, дѣлитель — число неточное, и требуется найти частное съ наибольшею, какая только возможно въ данномъ случаѣ, степенью точности; наконецъ, 4) и дѣлимое, и дѣлитель — числа неточныя, и требуется найти возможно болѣе точное частное.

Когда дѣлимое и дѣлитель—числа точныя, дѣленіе можетъ быть продолжено до той цыфры частнаго, какая намъ только нужна въ данномъ случаѣ, и поэтому останавливаться на этомъ случаѣ не представляется необходимымъ. Полезно только замѣтить, что для бо́льшей точности слѣдуетъ опредѣлять также цыфру, слѣдующую за интересующею насъ въ данномъ случаѣ цыфрою, дабы убѣдиться въ томъ—не лучше взять въ данномъ случаѣ приближеніе съ избыткомъ. Если при этомъ одно или оба числа суть десятичныя дроби, то надо увеличить дѣлимое и дѣлителя во столько разъ, сколько это необходимо для того, чтобы дѣлитель обратился въ число цѣлое. Когда исчерпаны всѣ цыфры дѣлимаго, то вмѣсто присоединенія къ остаткамъ нулей можно поступить слѣдующимъ образомъ: послѣдній остатокъ можно раздѣлить на число, которое получится послѣ того какъ въ дѣлителѣ отброшена послѣдняя цыфра, новый остатокъ—на число, которое получится послѣ того какъ въ дѣлителѣ отброшена еще одна цыфра, и т. д. до тѣхъ поръ, пока не будутъ исчерпаны всѣ цыфры дѣлителя. При этомъ за послѣднюю цыфру частнаго ручаться, конечно, нельзя; кромѣ того, подобный способъ производства дѣленія цѣлесообразенъ только въ томъ случаѣ, если полученныя такимъ образомъ цыфры частнаго достаточны.

Когда дѣлимое есть число неточное, а дѣлитель — точное, то дѣленіе можетъ, въ случаѣ цѣлаго дѣлителя, совершиться только до низшей цыфры дѣлимаго, и тогда частное будетъ непремѣнно опредѣлено съ недостаткомъ, ибо остальныя цыфры частнаго не могутъ быть извѣстны. Если же дѣлитель есть конечная десятичная дробь, то, перенеся запятую въ дѣлимомъ и дѣлителѣ на столько знаковъ вправо, сколько ихъ въ дѣлителѣ послѣ запятой, можно дѣлать дѣленіе, пока не будутъ исчерпаны всѣ цыфры дѣлимаго.—При этомъ, конечно, столь же дозволителенъ выше описанный способъ дѣленія.

Если и дѣлимое, и дѣлитель суть числа неточныя и если въ одномъ изъ нихъ послѣ запятой справа болѣе цыфръ, чѣмъ въ другомъ, то излишнія цыфры приличнымъ образомъ отбрасываются; потомъ производятъ дѣленіе до тѣхъ поръ, пока это возможно безъ присоединенія къ остаткамъ нулей; затѣмъ для опредѣленія остальныхъ цыфръ частнаго отъ дѣлителя отбрасывается низшая цыфра и на полученное число дѣлятъ весь остатокъ; новый остатокъ дѣлятъ уже на число, которое получается послѣ того какъ отброшены двѣ цыфры дѣлителя и т. д. до тѣхъ поръ пока не будутъ исчерпаны всѣ цыфры дѣлимаго. Въ полученномъ частномъ будутъ достовѣрны всѣ цыфры, кромѣ послѣдней.

Дозволительность указанныхъ пріемовъ основана на двухъ свойствахъ дѣлимаго и дѣлителя: во 1-хъ, на томъ, что дѣлимое равно произведенію изъ дѣлителя на частное, увеличенному на остатокъ, и во 2-ыхъ, на томъ, что отъ одновременнаго уменьшенія дѣлимаго и дѣлителя въ одно и то же число разъ частное не измѣняется.

Примѣры. 1) Раздѣлить 2,71828 на 0,137. Переносимъ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ (оба—точныя числа) запятую на три знака; получимъ:

2718,28 : 137 = 20,5716... 782 978 19 : 13 6 : 1	Такимъ образомъ получили частное, въ которомъ цыфра 6 невѣрна. Если бы требовалась бо́льшая степень точности, то пришлось бы поступить иначе, а именно присоединить нули.
2) 12,1638₀ : 3,24 = 3,754. 1216,38₀ : 324 = 3,7543.... 2443 1758 138 : 32 10 : 3	Дѣлимое число неточное. Такимъ образомъ полученное частное точно до 0,001. При послѣднихъ двухъ остаткахъ въ обоихъ примѣрахъ поставлены новые дѣлители для большей ясности.

3) $\underline{2{,}7182818_0 : 3{,}14162_0 = 0{,}897}$

$27183 : 31416 = 0{,}8968$
$27183 : 3142$
$3037 : 314$
$211 : 31$
$25 : 3$

И дѣлимое, и дѣлитель — числа неточныя. Въ этомъ случаѣ при всякомъ остаткѣ поставленъ его новый дѣлитель и частное получилось съ точностью до 0,001.

Замѣчаніе. При производствѣ дѣленія на практикѣ, не пишутъ новаго дѣленія каждый разъ, а въ письменномъ обозначеніи дѣлителя перечеркиваютъ ненужную цыфру.

КОНЕЦЪ.