СБОРНИКЪ ЗАДАЧЪ,

ПРЕДЛАГАВШИХСЯ НА КОНКУРСНЫХЪ ЭКЗАМЕНАХЪ ПРИ ПОСТУПЛЕНІИ ВЪ СПЕЦІАЛЬНЫЯ ВЫСШІЯ УЧЕБНЫЯ ЗАВЕДЕНІЯ.

Часть III. ГЕОМЕТРІЯ.

Изданіе III, вновь переработанное.

СОСТАВИЛЪ

П. К. Шмулевичъ,

ИНЖЕНЕРЪ ПУТЕЙ СООБЩЕНІЯ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Складъ изданія у автора: Ивановская ул., д. 6, кв. 1.

1905.

Типографія **Н. Н. Клобукова**, Лиговская ул. д. 34.

Отъ автора.

Третье изданіе задачника по Геометріи состоитъ изъ введенія и четырехъ главъ.

Введеніе содержитъ краткую статью о нѣкоторыхъ наиболѣе употребительныхъ методахъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе. Подробнѣе другихъ разработанъ вопросъ о методѣ геометрическихъ мѣстъ, наиболѣе нужномъ для дальнѣйшаго изложенія; о другихъ же методахъ — подобія, спрямленія, построенія фигуры по частямъ, параллельнаго перенесенія — дано лишь основное понятіе.

Въ первой главѣ помѣщены условія и рѣшенія 50 задачъ на построеніе и доказательство изъ программы конкурсныхъ экзаменовъ въ Институтѣ Инженеровъ Путей Сообщенія. Всѣ эти задачи разобраны настолько подробно, что изученіе ихъ безъ посторонней помощи доступно для силъ средняго ученика.

Вторую главу составляютъ задачи на построеніе (числомъ 43) изъ программы Технологическаго Института. Большинство этихъ задачъ крайне элементарно и проходится при изученіи теоріи Геометріи.

Главы третья и четвертая содержатъ условія и рѣшенія наиболѣе типичныхъ задачъ предлагавшихся за послѣднія пять лѣтъ (1900—1904) въ Институтахъ: Горномъ, Технологическомъ, Путей Сообщенія и другихъ.

Кромѣ того, въ концѣ книги помѣщено приложеніе, содержащее статью „Построеніе корней квадратнаго уравненія“, такъ какъ это есть единственный вопросъ изъ „Приложенія Алгебры къ Геометріи", не имѣющійся въ Геометріи А. Киселева, но вошедшій въ программу конкурсныхъ испытаній.

Въ заключеніе долженъ обратить вниманіе учащихся на то обстоятельство, что во всѣхъ Институтахъ на экзаменѣ изъ Геометріи главнѣйшую роль играетъ знаніе теоріи, на что и слѣдуетъ обратить особое вниманіе.

Наиболѣе подходящимъ учебникомъ по теоріи Геометріи является „Элементарная Геометрія для среднихъ учебныхъ заведеній А. Киселева", причемъ слѣдуетъ добавить изъ Геометріи Давидова §§ 54, 107, 205, 214 и 217, а для держащихъ экзаменъ въ Технологическій Институтъ еще §§ 274 и 275.

Инженеръ П. Шмулевичъ.

Ивановская, 6. СПБ. Іюнь 1905 г.

ВВЕДЕНІЕ.

О рѣшеніи геометрическихъ задачъ на построеніе.

Правильное, осмысленное рѣшеніе геометрическихъ задачъ на построеніе состоитъ изъ четырехъ частей: 1) *анализа*, 2) *построенія*, 3) *доказательства* (синтеза) и 4) *изслѣдованія*.

I. **АНАЛИЗЪ**. Раньше, чѣмъ рѣшать задачу, необходимо составить *планъ* рѣшенія. Для этого обыкновенно поступаютъ такъ: предполагаютъ задачу рѣшенной и дѣлаютъ отъ руки примѣрный чертежъ искомой фигуры, хотя бы и не подходящій размѣрами къ требуемой. По чертежу, отмѣтивъ на немъ тѣ линіи и углы, которые извѣстны изъ условія, замѣчаютъ, что рѣшеніе задачи сводится къ нахожденію какой-нибудь точки, или прямой, или къ опредѣленію какого-нибудь угла.

Послѣ этого стараются найти такую зависимость между данными и искомыми величинами, которая позволила бы найти положеніе искомой точки, или величину искомой прямой, или угла, на опредѣленіе которыхъ сведено рѣшеніе задачи.

При этомъ обыкновенно приходится проводить различныя вспомогательныя прямыя и окружности, нерѣдко даже наудачу, не зная заранѣе, принесетъ ли проведенная линія пользу, или нѣтъ. Бóльшая или меньшая удача и простота рѣшенія зависитъ, главнымъ образомъ, отъ навыка, пріобрѣтаемаго исключительно долговременной практикой, хотя нѣкоторыя указанія даетъ знаніе *методовъ* рѣшенія.

Когда при помощи подобныхъ разсужденій и догадокъ зависимость между данными и искомыми величинами опредѣлена, переходятъ ко второй части рѣшенія—построенію.

II. **ПОСТРОЕНІЕ** есть механическое выполненіе тѣхъ пріемовъ, которые были выведены изъ плана рѣшенія задачи, т. е. изъ анализа.

III. **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Когда построеніе выполнено и искомая фигура начерчена, необходимо доказать, что она дѣйствительно удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ задачи. При этомъ ходъ разсужденія будетъ обратный тому, который былъ примѣненъ при анализѣ. Поэтому доказательство называютъ иногда *синтезомъ*.

IV. **ИЗСЛѢДОВАНІЕ** имѣетъ цѣлью выяснить, при всякихъ ли данныхъ величинахъ предложенная задача возможна, допускаетъ ли она одно рѣшеніе, или нѣсколько. Кромѣ того, строгое изслѣдованіе задачи требуетъ разсмотрѣнія всевозможныхъ частныхъ случаевъ, которые могутъ представиться, причемъ необходимо выяснить, измѣнится ли ходъ рѣшенія въ этихъ случаяхъ, и какъ именно. При этомъ иной разъ оказывается, что для нѣкоторыхъ частныхъ значеній заданныхъ величинъ общій способъ рѣшенія задачи не примѣнимъ и приходится начинать рѣшеніе снова съ анализа для этого частнаго случая.

Въ очень многихъ задачахъ на построеніе оказывается возможнымъ вести анализъ различными способами, въ зависимости отъ тѣхъ или иныхъ вспомогательныхъ построеній. При этомъ и способы построенія, и доказательства будутъ различны, но *результаты изслѣдованія всегда должны быть одинаковы, какимъ бы способомъ задача ни была рѣшена.*

Нѣкоторые методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

I. Методъ геометрическихъ мѣстъ.

Геометрическимъ мѣстомъ точекъ называется такая линія, или совокупность линій, или поверхность, всѣ точки которыхъ *обладаютъ нѣкоторымъ опредѣленнымъ свойствомъ*, **исключительно имъ принадлежащимъ**.

Такимъ образомъ, если требуется доказать, что какая-нибудь линія есть геометрическое мѣсто точекъ, удовлетворяющихъ какому-нибудь условію, то доказательство распадается на двѣ самостоятельныя части: во-первыхъ, надо показать, что *всякая точка, удовлетворяющая требуемому условію, лежитъ непремѣнно на этой линіи*, и во-вторыхъ, что *всякая точка этой линіи непремѣнно удовлетворяетъ требуемому условію*.

Примѣненіе геометрическихъ мѣстъ къ рѣшенію задачъ на построеніе заключается въ слѣдующемъ:

Если задача сводится на нахожденіе нѣкоторой точки, которая должна удовлетворять какимъ-нибудь опредѣленнымъ условіямъ, то отбросивъ одно изъ этихъ условій, увидимъ, что задача становится неопредѣленной, т. е. ей можетъ удовлетворять не одна, а цѣлый рядъ точекъ, обладающихъ всѣми требуемыми свойствами, кромѣ отброшеннаго. Эти точки составятъ нѣкоторое геометрическое мѣсто, фигура котораго обыкновенно бываетъ извѣстна, или легко опредѣляется. Послѣ этого, принявъ во вниманіе отброшенное условіе и откинувъ какое-нибудь другое, увидимъ, что искомая точка способна принять безчисленное множество новыхъ положеній, образующихъ въ своей совокупности новое геометрическое мѣсто. Опредѣлимъ видъ этого геометрическаго мѣста и построимъ его. Тогда искомая точка должна лежать и на первомъ, и на второмъ геометрическомъ мѣстѣ и слѣдовательно опредѣлится ихъ пересѣченіемъ.

Задача будетъ возможна или невозможна, смотря по тому пересѣкутся или нѣтъ найденныя геометрическія мѣста.

Пользоваться методомъ геометрическихъ мѣстъ приходится очень часто,—почти въ каждой задачѣ на построеніе,—поэтому очень важно знать и умѣть строить различныя геометрическія мѣста.

Изъ многихъ геометрическихъ мѣстъ перечислимъ только тѣ, знаніе которыхъ понадобится для рѣшенія нижеприведенныхъ задачъ на построеніе.

Г. М. I. *Геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ на данномъ разстояніи a отъ данной точки C, есть окружность, описанная изъ центра C радіусомъ a.*

Г. М. II. *Геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ A и B есть перпендикуляръ, возставленный къ прямой AB въ ея серединѣ* *).

Г. М. III. *Геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ данныхъ прямыхъ* **) *есть биссектрисса угла, образованнаго этими прямыми.*

Г. М. IV. *Геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ на данное разстоянiе отъ данной прямой MN* ***), *составляютъ двѣ прямыя, параллельныя MN.*

Г. М. V. *Геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касающихся данной прямой AB въ данной на ней точкѣ M, есть перпендикуляръ къ AB въ точкѣ M.*

Г. М. VI. *Геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касающихся данной окружности O въ данной на ней точкѣ M, есть прямая, соединяющая M съ центромъ даннаго круга.*

Г. М. VII. *Геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ данный отрѣзокъ прямой виденъ подъ даннымъ угломъ, составляютъ двѣ дуги, описанныя на этомъ отрѣзкѣ и вмѣщающiя данный уголъ.*

Г. М. VIII. *Геометрическое мѣсто серединъ равныхъ хордъ, проведенныхъ въ данной окружности O, есть концентрическая окружность, касательная къ одной изъ этихъ хордъ* ****).

Г. М. IX. *Геометрическое мѣсто точекъ, разстоянiя которыхъ до двухъ данныхъ точекъ A и B находятся въ постоянномъ отношенiи $m:n$, есть окружность, опредѣленнаго центра и радiуса, если только m не равно n* *****).

---

*) Изъ этого слѣдуетъ, что *геометрическое мѣсто центровъ окружностей, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки есть перпендикуляръ, возставленный въ серединѣ прямой, соединяющей эти точки.*

**) А слѣд. и *мѣсто центровъ окружностей, касающихся двухъ данныхъ прямыхъ.*

***) А слѣд. и *мѣсто центровъ окружностей, касающихся данной прямой въ произвольной ея точкѣ.*

****) Если длина такихъ хордъ равна a, то радiусъ концентрической окружности равенъ $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, гдѣ r—радiусъ данной окружности.

*****) Если $m=n$, то искомое геометр. мѣсто есть перпендикуляръ въ серединѣ прямой AB.

Выведемъ правило для построенія этого геометрическаго мѣста, извѣстнаго подъ именемъ *окружности Аполонія.*

Положимъ, мы имѣемъ двѣ точки A и B (черт. 1). Требуется опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе разстояній которыхъ до A и B постоянно равно отношенію $m:n$.

При помощи извѣстнаго изъ Геометріи построенія (Кис. § 197) на безконечной прямой AB всегда можно найти двѣ точки, удовлетворяющія требуемому условію. Пусть это будутъ точки K и L, такъ что

$$AK:BK=m:n \tag{1}$$

$$AL:BL=m:n. \tag{2}$$

Допустимъ, что какимъ бы то ни было способомъ, намъ удалось найти еще одну точку, напр. C, удовлетворяющую требуемому условію, такъ что

$$AC:BC=m:n. \tag{3}$$

Сравнивая равенство (3) съ (1) и (2), имѣемъ:

$$AK:BK=AC:BC \tag{4}$$

$$AL:BL=AC:BC. \tag{5}$$

Изъ равенствъ (4) и (5) на основаніи извѣстной изъ геометріи теоремы (Кис. § 199) слѣдуетъ, что CK есть биссектрисса внутренняго угла ACB въ тре-кѣ ABC, а CL—биссектрисса внѣшняго угла DCB того же тре-ка. Вслѣдствіе этого $\angle KCL$, состоя изъ двухъ половинъ смежныхъ угловъ, равенъ 90°. Отсюда ясно, что изъ всякой точки принадлежащей искомому геометрическому мѣсту, отрѣзокъ KL виденъ подъ прямымъ угломъ, а потому на основаніи геом. мѣста VII заключаемъ, что искомая Аполоніева окружность есть окружность, описанная на KL какъ на діаметрѣ.

Построеніе Аполоніевой окружности. Проводимъ черезъ данныя точки A и B (черт. 2) двѣ произвольныя параллели и откладываемъ на нихъ отрѣзки $AM=m$, $BN=n$ и $BN_1=n$. Проводимъ прямыя MN_1, пересѣкающую AB въ точкѣ K и MN, пересѣкающую AB въ точкѣ L. Прямую KL въ точкѣ O дѣлимъ пополамъ и изъ O радіусомъ OK описываемъ окружность, которая и будетъ искомой Аполоніевой окружностью.

Докажемъ теперь, что дѣйствительно *всѣ* точки полученной окружности удовлетворяютъ требуемому условію. Для этого возьмемъ на этой окружности произвольную точку C и докажемъ, что $AC:BC=m:n$?

Соединимъ точку C съ точками A, B, K, L и проведемъ черезъ B прямую, параллельную AC, пересѣкающую CL въ точкѣ E и продолженіе CK въ точкѣ D.

По построенію $\triangle ACK \sim \triangle DBK$, откуда

1. $AC:DB=AK:BK=m:n$ (по построенію).

Также $\triangle ACL \sim \triangle BEL$, откуда

2. $AC:BE=AL:BL=m:n$ (по построенію).

Изъ пропорцій (1) и (2) заключаемъ, что

$$DB=BE,$$

т. е. точка B есть середина прямой DE.

Въ тре-кѣ DCE уголъ DCE прямой (потому что вершина его C находится на окружности, а стороны его опираются на діаметръ KL). Поэтому прямая BC въ этомъ тре-кѣ есть медіана гипотенузы DE и слѣд. равна ея половинѣ, т. е. BD или BE *).

Подставивъ въ любое изъ равенствъ (1) или (2) BC вмѣсто BD или BE, получимъ

$$AC:BC=m:n,$$

т. е. всякая точка, взятая на Аполоніевой окружности, удовлетворяетъ искомому геометрическому мѣсту, что и треб. доказать.

Г. М. X. *Геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ до двухъ данныхъ прямыхъ находятся въ постоянномъ отношеніи $m:n$, есть прямая, проходящая черезъ вершину угла, образованнаго этими прямыми, и одну изъ такихъ точекъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть прямыя AB и BC (черт. 3) пересѣкаются въ точкѣ B и пусть D есть одна изъ точекъ, удовлетворяющихъ требуемому условію, т. е.

$$DE:DF=m:n. \tag{1}$$

---

*) Теорема: *«во всякомъ прямоугольномъ тре-кѣ медіана гипотенузы равна половинѣ гипотенузы»* доказывается очень просто.

Соединимъ D съ вершиной угла B, возьмемъ на прямой BD произвольную точку K и опустимъ перпендикуляры KH на BC и KG на AB.

Изъ подобія тре-ковъ BKH и BDE имѣемъ·

$$KH : DE = BK : BD. \tag{2}$$

Также изъ подобія тре-ковъ BKG и BDF:

$$KG : DE = BK : BD. \tag{3}$$

Изъ равенствъ (2) и (3) слѣдуетъ:

$$KH : DE = KG : DF,$$

или перемѣнивъ мѣста среднихъ членовъ:

$$KH : KG = DE : DF = m : n,$$

что и треб. доказать.

Итакъ, *построеніе* искомаго геометрическаго мѣста производится слѣдующимъ образомъ. Въ произвольной точкѣ прямой BA (черт. 4), напр. въ B, возставляемъ перпендикуляръ и откладываемъ на немъ отрѣзокъ $BN = n$; въ произвольной точкѣ прямой BC, напр. хотя бы въ той же точкѣ B, возставляемъ перпендикуляръ и откладываемъ на немъ отрѣзокъ $BM = m$. Проводимъ черезъ N прямую, параллельную BA и черезъ M прямую, параллельную BC. Пусть точка пересѣченія этихъ параллелей будетъ D. Тогда прямая BD, соединяющая полученную точку D съ вершиной угла B, и будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ.

Г. М. XI. *Геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ два смежные отрѣзка AK и KB прямой AB видны подъ равными углами, есть Аполоніева окружность, разстояніе точекъ которой до A и B равно отношенію $AK : BK$* *).

Въ самомъ дѣлѣ, если какая-нибудь точка C (черт. 1) принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту, т. е.

$$\angle ACK = \angle BCK,$$

то въ тре-кѣ ABC прямая CK есть биссектрисса угла ACB, а потому (Кис. § 198) имѣемъ пропорцію:

$$AC : BC = AK : BK,$$

*) Эта окружность непремѣнно пройдетъ черезъ точку B.

т. е. всякая точка искомаго геометрическаго мѣста находится въ постоянномъ отношеніи $AK : BK$ отъ точекъ A и B, а потому это и есть Аполоніева окружность.

Г. М. XII. *Геометрическое мѣсто вершинъ равновеликихъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе, составляютъ двѣ прямыя, параллельныя основанію.*

Это слѣдуетъ непосредственно изъ геом. мѣста IV.

Примѣры примѣненія метода геометрическихъ мѣстъ встрѣтятся почти въ каждой изъ ниже разсмотрѣнныхъ задачъ на построеніе.

II. Методъ подобія.

Во многихъ случаяхъ бываетъ удобно не строить непосредственно искомую фигуру, а начать съ построенія фигуры ей подобной, послѣ чего нетрудно перейти къ требуемой. Въ этомъ случаѣ данныя для построенія величины раздѣляются на два класса: однѣ даютъ возможность построить фигуру, подобную данной, а другія служатъ для того, чтобы отъ этой фигуры перейти къ требуемой.

Этотъ пріемъ особенно удобенъ въ тѣхъ случаяхъ, когда только одна изъ данныхъ величинъ опредѣляетъ какой нибудь линейный элементъ искомой фигуры, а всѣ другія представляютъ углы, или отношенія сторонъ.

Напр., если для построенія тре-ка даны два угла, или уголъ и отношеніе сторонъ его заключающихъ, или отношеніе трехъ сторонъ, и кромѣ того одинъ какой нибудь линейный элементъ (напр., сторона, высота, медіана, биссектрисса, радіусъ вписаннаго или описаннаго круга и т. д.), то сперва, не обращая вниманія на данный линейный элементъ, строятъ фигуру, подобную данной, а потомъ, вводя требуемую линію, переходятъ къ искомой фигурѣ.

Примѣры пользованія методомъ подобія можно найти при рѣшеніи задачъ №№ 15, 16, 22, 38 и друг.

Кромѣ того, методъ подобія часто примѣняется при вписываніи однѣхъ фигуръ въ другія. Таковы напр. задачи: вписать квадратъ въ данный секторъ (№ 36) или въ данный сегментъ (№ 37) и др.

III. Методъ спрямленія.

Этотъ методъ примѣняется особенно часто при построеніи треугольниковъ, а именно во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда въ числѣ данныхъ элементовъ находится сумма или разность его сторонъ. Заключается этотъ методъ въ томъ, что поворачиваютъ одну изъ сторонъ, сумма или разность которыхъ дана, около точки ея пересѣченія съ другой изъ нихъ до тѣхъ поръ, пока обѣ стороны не составятъ одной прямой, при чемъ на чертежѣ получается данная сумма или разность.

Примѣры примѣненія этого метода можно найти въ задачахъ №№ 1, 2, 3, 4, 10, 13, 14, 16 и др.

Кромѣ этихъ методовъ, наиболѣе часто встрѣчающихся при рѣшеніи нижеприведенныхъ 50 задачъ на построеніе, полезно замѣтить еще:

IV. Методъ построенія фигуры по частямъ, примѣняемый въ тѣхъ случаяхъ, когда изъ данныхъ элементовъ тре-ка опредѣляется непосредственно нѣкоторая его часть.

Напр., если въ тре-кѣ даны медіана и высота, проведенныя изъ одного и того же угла, то этими величинами опредѣляется нѣкоторый тре-къ, составляющій часть даннаго и рѣшеніе задачи начинается съ построенія этого треугольника.

Примѣры примѣненія этого метода можно найти въ задачахъ №№ 4, 5, 8, 13, 17, 25 и друг.

V. Методъ параллельнаго перенесенія состоитъ въ томъ, что какая нибудь линія переносится параллельно самой себѣ въ какую нибудь опредѣленную точку; при этомъ обыкновенно образуется треугольникъ, который можно построить.

Примѣры примѣненія этого метода можно найти въ задачахъ №№ 6, 7, 8, 9, 19 и друг.

Принятыя сокращенія и обозначенія.

М. геом. м.—методъ геометрическихъ мѣстъ.
Г. М. № —геом. мѣсто подъ №.
М. под. —методъ подобія.
М. спр. —методъ спрямленія.
М. пос. ч. —методъ построенія по частямъ.
М. пар. пер.—методъ параллельнаго перенесенія.

Въ тре-кѣ ABC обозначены:

A, B, C —углы треугольника.
a, b, c —стороны, противолежащія угламъ A, B, C.
h_a, h_b, h_c —высоты на стороны a, b, c.
m_a, m_b, m_c —медіаны на тѣ же стороны.
β_A, β_B, β_C —биссектриссы угловъ A, B, C.
R —радіусъ описаннаго круга.
r —радіусъ вписаннаго круга.
ρ_a, ρ_b, ρ_c —радіусы внѣвписанныхъ круговъ.
$2p$ —периметръ треугольника.
S —площадь треугольника.
Знакъ $\backsim$ означаетъ подобіе.
Знакъ $\equiv$ означаетъ равенство площадей (равновеликость).

ГЛАВА I.

Задачи на построеніе и на доказательство, предлагаемыя въ Институтѣ Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

1а. Построить треугольникъ по данной сторонѣ, углу къ ней прилежащему и суммѣ двухъ другихъ сторонъ.

Дано: a, $b+c=m$, $\angle B$. (*Мет. спр. и мет. геом. м.*).

Анализъ. Допустимъ, что задача рѣшена и что $\triangle ABC$ (черт. 5) есть искомый. Такъ какъ каждая изъ сторонъ этого тре-ка AB и AC порознь неизвѣстны, а сумма ихъ по условію равна m, то примѣняемъ методъ спрямленія, для чего вращаемъ сторону AC около вершины A до тѣхъ поръ, пока направленіе ея не совпадетъ съ продолженіемъ стороны BA. Тогда вся сторона AC займетъ положеніе AD и прямая BD будетъ равна данной суммѣ m.

Соединяя точку D съ C и разсматривая $\triangle BDC$, замѣчаемъ, что въ немъ извѣстны двѣ стороны и уголъ между ними ($BC=a$; $BD=m$; $\angle DBC=\angle B$), а потому этотъ тре-къ легко построить.

Теперь задача сводится къ опредѣленію вершины A, которая должна, во 1-ыхъ, находиться на прямой BD и во 2-ыхъ, должна равно отстоять отъ точекъ D и C (*Г. М.* № II). Слѣдовательно вершина A найдется въ пересѣченіи прямой BD съ перпендикуляромъ, возставленнымъ въ серединѣ прямой DC.

Рѣшеніе. Строимъ $\triangle BDC$ по углу B и сторонамъ $BC=a$ и $BD=m$. Изъ середины стороны DC возставляемъ къ ней перпендикуляръ EA до пересѣченія его со стороной BD

въ точкѣ A. Соединяя эту точку A съ C, получаемъ искомый $\triangle ABC$.

Доказательство. Тре-къ ABC есть требуемый, такъ какъ онъ удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ задачи: въ самомъ дѣлѣ, сторона $BC=a$; уголъ $ABC=B$ и сумма двухъ другихъ сторонъ $AB+AC=AB+AD=m$.

Изслѣдованіе. Условіе, *необходимое* для возможности задачи состоитъ, очевидно, въ томъ, чтобы сумма m была больше стороны a. Докажемъ, что это условіе *достаточно*, т. е. что если оно выполнено, то задача всегда возможна.

Въ самомъ дѣлѣ, если $m>a$, то въ $\triangle BDC$ уголъ $C > \angle D$ а потому всегда возможно провести линію AC подъ такимъ угломъ ACD къ сторонѣ CD, чтобы $\angle ACD = \angle ADC$, а подобное построеніе вполнѣ равносильно возстановленію перпендикуляра EA въ серединѣ стороны CD.

Итакъ, если $m > a$, то задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе.

1 b. Построить треугольникъ по данной сторонѣ, разности двухъ другихъ сторонъ и углу противолежащему большей изъ нихъ.

Дано: a, $b-c=d$, $\angle B$. (*Мет. спр. и мет. геом. м.*).

Анализъ. Допустимъ, что задача рѣшена и что $\triangle ABC$ (черт. 6) искомый. Для того, чтобы получить на чертежѣ отрѣзокъ, равный данной разности d, спрямляемъ сторону AC съ AB, т. е. поворачиваемъ сторону AC около точки A до тѣхъ поръ пока направленіе этихъ линій не совпадетъ. Тогда AC займетъ положеніе AD и отрѣзокъ BD будетъ равенъ d. Соединяя точки D и C, получаемъ $\triangle DBC$, въ которомъ извѣстны двѣ стороны ($BC=a$, $BD=d$) и уголъ между ними $DBC=180^\circ-B$. Построивъ тре-къ по этимъ даннымъ, сводимъ задачу къ опредѣленію вершины A, которая должна находиться, во 1-ыхъ, гдѣ нибудь на продолженіи прямой DB а, во 2-ыхъ, должна равно отстоять отъ точекъ D и C (*Г. М.* № II). Слѣдовательно вершина A найдется въ пересѣченіи продолженія прямой BD съ перпендикуляромъ возставленнымъ въ серединѣ прямой DC.

Построеніе. Строимъ $\triangle DBC$ по двумъ сторонамъ ($DB = d$ и $BC=a$) и углу между ними, дополняющему данный уголъ

B до 180°. Къ серединѣ прямой DC возставляемъ $\perp$ до пересѣченія его въ точкѣ A съ продолженіемъ стороны BD. Соединяя точку A съ C, получаемъ искомый $\triangle ABC$.

Доказательство. Тре-къ ABC — требуемый, такъ какъ онъ удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ задачи: въ самомъ дѣлѣ, сторона $BC = a$; $\angle ABC = 180° - DBC = 180° - (180° - B) = B$; и разность двухъ другихъ сторонъ $AC - AB = AD - AB = d$.

Изслѣдованіе. Условіе, *необходимое* для возможности задачи, заключается очевидно въ томъ, чтобы разность d была бы меньше a. Если при этомъ данный уголъ B — острый или прямой, то задача всегда возможна и имѣетъ только одно рѣшеніе, такъ какъ въ этомъ случаѣ $\angle BDC$, будучи меньше $\angle ABC$ (какъ внѣшняго угла), будетъ непремѣнно острымъ, а потому наклонная DB и перпенд. EA на основаніи постулата Эвклида непремѣнно пересѣкутся на продолженіи DB гдѣ нибудь за точкой B и опредѣлятъ искомую вершину A. Если же уголъ B тупой, то построеніе возможно не всегда, такъ какъ можетъ оказаться, что въ $\triangle DBC$ уголъ BDC прямой, а слѣд. линіи DB и AE окажутся параллельными (черт. 7), или же, что $\angle BDC$ — тупой, и тогда линіи DB и AE хотя и пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ A (черт. 8), но въ полученномъ $\triangle ABC$ уголъ ABC будетъ равенъ не B, а $180° - B$ и слѣд. этотъ треугольникъ не удовлетворитъ требованіямъ задачи.

1c. Построить треугольникъ по сторонѣ, разности двухъ сторонъ и углу, противолежащему меньшей изъ нихъ.

Дано: a, $b - c = d$, $\angle C$. *(М. спр. и м. геом. м.)*.

Анализъ. Пусть $\triangle ABC$ — искомый (черт. 9). Поворачивая сторону AB около точки A пока она не займетъ положеніе AD и соединяя D съ B, замѣчаемъ, что въ $\triangle BDC$ извѣстны двѣ стороны ($BC = a$, $DC = d$) и уголъ между ними C.

Построивъ этотъ тре-къ, найдемъ вершину A въ пересѣченіи продолженія стороны CD съ перпендикуляромъ, возставленнымъ къ BD въ ея серединѣ (*Г. М.* № II).

Построеніе. Строимъ $\triangle BDC$ по сторонамъ $BC = a$, $DC = d$ и углу между ними $BCD = C$. Въ серединѣ BD возставляемъ къ ней $\perp$ и продолжаемъ его до пересѣченія съ продолженіемъ CD въ точкѣ A. Тре-къ ABC—искомый.

Доказательство. Тре-къ ABC — требуемый, такъ какъ онъ удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ задачи: въ самомъ дѣлѣ, сторона $BC=a$; $\angle ACB = \angle C$; и разность двухъ другихъ сторонъ $AC-AB=AC-AD=d$.

Изслѣдованіе. Условіе, необходимое для возможности задачи, заключается прежде всего въ томъ, чтобы разность d была меньше a, и кромѣ того, чтобы данный $\angle C$ былъ непремѣнно острый *).

Если эти условія соблюдены, и если при построеніи $\triangle BDC$ окажется, что $\angle BDC$—тупой, то перпендикуляръ EA непремѣнно пересѣчется съ продолженіемъ наклонной CD и дастъ въ пересѣченіи вершину A, такъ что въ этомъ случаѣ задача возможна и имѣетъ одно рѣшеніе.

Если же, построивъ $\triangle BDC$ увидимъ, что $\angle BDC$ прямой, то линіи CD и AE окажутся параллельными и слѣд. рѣшенія не будетъ; также если окажется, что $\angle BDC$ острый, то хотя линіи DC и AE пересѣкутся, но полученный $\triangle ABC$ не будетъ содержать $\angle C$, а потому не будетъ удовлетворять условіямъ вопроса.

2а. Построить треугольникъ по данной сторонѣ, углу ей противолежащему и суммѣ двухъ другихъ сторонъ.

Дано: a, A, $b+c=m$. (*Мет. спр. и мет. геом. м.*).

Анализъ. Допустимъ, что задача рѣшена и что $\triangle ABC$ — (черт. 10) требуемый. Примѣняя методъ спрямленія, вращаемъ сторону AC около A до тѣхъ поръ пока она приметъ положеніе AD, такъ что $AD = AC$, а слѣд. $BD = m$. Соединяя точку D съ C, получаемъ $\triangle BDC$, въ которомъ извѣстны двѣ стороны ($BC = a$, $BD = m$) и уголъ BDC, противолежащій меньшей изъ нихъ, равный половинѣ даннаго угла A **).

---

*) Такъ какъ онъ противолежитъ *меньшей* сторонѣ въ $\triangle ABC$.

**) $\angle ADC = \angle ACD$ (вслѣдствіе равнобедренности $\triangle ACD$); $\angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = 2ADC$, откуда $\angle ADC = \frac{A}{2}$

Построивъ этотъ $\triangle BDC$, опредѣлимъ положеніе вершины A въ пересѣченіи стороны BD съ перпенд., возставленнымъ къ сторонѣ CD въ ея серединѣ (*Г. М.* № II).

Построеніе. На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ $BD = m$. При точкѣ D строимъ уголъ, равный $\frac{A}{2}$, а изъ точки B засѣкаемъ эту линію радіусомъ a. Соединяя точку пересѣченія C съ B, получаемъ $\triangle BCD$, а возставляя въ серединѣ CD перпендикуляръ, получаемъ въ пересѣченіи его съ BD искомую вершину A.

Доказательство. Тре-къ ABC — требуемый, такъ какъ онъ удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ задачи. Въ самомъ дѣлѣ, сторона $BC = a$; $AB + AC = AB + AD = m$; $\angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = 2 \,.\, ADC = 2 \cdot \frac{A}{2} = A$.

Изслѣдованіе. Условіе, *необходимое* для рѣшенія задачи, заключается очевидно въ томъ, чтобы сумма m была больше a. Если это условіе соблюдено, то при построеніи $\triangle BDC$ могутъ встрѣтиться 3 случая:

1°. Сторона a можетъ оказаться меньше длины перпендикуляра BK, (черт. 11) и тогда $\triangle BDC$ построить нельзя, что укажетъ на невозможность задачи.

2°. Сторона a можетъ оказаться равной перпендикуляру BK; тогда $\triangle BDC$ окажется прямоугольнымъ при C и задача будетъ имѣть одно рѣшеніе.

3°. Если сторона a больше перпендикуляра BK, то окружность, описанная изъ B радіусомъ a, пересѣчется съ прямой DK въ двухъ точкахъ C_1 и C_2 и получатся 2 тре-ка BDC_1 и BDC_2. Возставляя въ точкахъ E_1 и E_2 (серединахъ сторонъ DC_1 и DC_2) перпендикуляры E_1A_1 и E_2A_2 получимъ 2 тре-ка BA_1C_1 и BA_2C_2, удовлетворяющихъ требуемымъ условіямъ. Не трудно доказать, что эти тре-ки равны. Въ самомъ дѣлѣ, $BC_1 = BC_2$ (какъ радіусы); $\angle BA_1C_1 = \angle BA_2C_2$ (такъ какъ каждый изъ нихъ какъ внѣшній $= 2 \cdot \frac{A}{2} = A\Big)$.

Кромѣ того изъ равенствъ:

$$\angle C_2C_1B + \angle BC_1A_1 + \angle A_1C_1D = 180^\circ$$
$$\angle DBC_2 + \angle BC_2D + \angle C_2DB = 180^\circ,$$

въ которыхъ $\angle C_2C_1B = \angle BC_2D$ (изъ равнобедр. $\triangle BC_1C_2$)

$$\angle A_1C_1D = \angle C_2DB = \frac{A}{2}$$

слѣдуетъ, что $\angle BC_1A_1 = \angle DBC_2$.

Слѣдовательно, $\triangle\triangle\ A_1BC_1$ и A_2BC_2, имѣя по 2 равныхъ угла и по равной сторонѣ, равны.

Принимая во вниманіе, что изъ прямоугольнаго $\triangle BKD$ сторона $BK = BD\ .\ Sin \angle BDK = m\ .\ sin\ \frac{A}{2}$, можемъ написать условіе возможности задачи въ слѣдующемъ видѣ:

$$m > a \geqslant m\ .\ sin\ \frac{A}{2}.$$

Если это неравенство соблюдено, то задача возможна и имѣетъ *одно рѣшеніе*; въ противномъ случаѣ рѣшеній не будетъ.

2b. Построить треугольникъ по данной сторонѣ, углу ей противолежащему и разности двухъ другихъ сторонъ.

Дано: a, A, $b-c=d$. (*Мет. спр. и мет. геом. м.*).

Анализъ. Допустимъ, что $\triangle ABC$ (черт. 12) искомый. Спрямляя сторону AB съ AC, получаемъ точку D, такъ что $DC=d$. Въ $\triangle BDC$ извѣстны двѣ стороны ($BC = a$, $DC = d$) и $\angle BDC = 90^\circ + \frac{A}{2}$ *). Построивъ этотъ тре-къ, найдемъ вершину A въ пересѣченіи продолженія стороны DC съ перпенд., возставленнымъ въ серединѣ BD. (*Г. М.* № II).

Построеніе. На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ DC, равный d. При точкѣ D строимъ уголъ, равный $90^\circ + \frac{A}{2}$, а изъ точки C радіусомъ a засѣкаемъ сторону этого угла. Полученную точку B соединяемъ съ D и въ серединѣ прямой BD возставляемъ къ ней $\perp$ до пересѣченія въ точкѣ A съ продолженіемъ DC. Тре-къ ABC — искомый.

---

*) Въ самомъ дѣлѣ: $\angle BDC = \angle ABD + \angle DAB = \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) + A = 90^\circ + \frac{A}{2}$.

Доказательство. Тре-къ ABC удовлетворяетъ всѣмъ требуемымъ условіямъ. Въ самомъ дѣлѣ: сторона $BC = a$; $AC - AB = AC - AD = d$. Въ равнобедренномъ $\triangle ABD$ уголъ $ADB = 180^0 - \angle BDC = 180^0 - \left(90^0 + \frac{A}{2}\right) = 90^0 - \frac{A}{2}$; слѣдовательно и $\angle ABD = 90^0 - \frac{A}{2}$, а потому $\angle BAD = $ $= 180^0 - 2 \cdot \left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = \angle A$.

Изслѣдованіе. Условіе, *необходимое* для возможности построенія заключается очевидно въ томъ, что разность d должна быть меньше a. Этого условія и *достаточно*. Въ самомъ дѣлѣ, если оно соблюдено, то при построеніи $\triangle BDC$ окружность, описанная изъ C радіусомъ a *непремѣнно* пересѣчетъ BD въ двухъ точкахъ изъ которыхъ B_1 не годится, такъ какъ $\triangle DCB_1$ не содержитъ угла $90^0 + \frac{A}{2}$. Точка же B даетъ $\triangle BDC$, отъ котораго переходимъ къ $\triangle ABC$, удовлетворяющему условію задачи. Итакъ, если $d < a$, то задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе.

3. Построить треугольникъ по данному его периметру и угламъ.

Дано: $2p$, $\angle B$, $\angle C$, (A). (*Мет. спр. и мет. геом. м.*).

Анализъ. Допустимъ, что $\triangle ABC$ (черт. 13) искомый. Спрямляемъ стороны BA и CA съ BC, для чего вращаемъ BA около точки B до положенія BD и CA около точки C до положенія CE. Тогда $DE = 2p$.

Соединяя точки D и E съ A, получаемъ $\triangle ADE$, въ которомъ извѣстны одна сторона ($DE = 2p$) и два угла: $\angle ADE = \frac{B}{2}$ и $\angle AED = \frac{C}{2}$. Когда $\triangle ADE$ будетъ построенъ, вершины B и C, найдутся на пересѣченіи стороны DE съ перпендикулярами, возставленными въ серединахъ сторонъ AD и AE (*Г. М.* № II).

Построеніе. Строимъ $\triangle ADE$ по сторонѣ $DE = 2p$ и угламъ $\frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$. Изъ серединъ сторонъ AD и AE возставляемъ номъ $\triangle ADE$ извѣстны катетъ и гипотенуза, а потому этотъ $\triangle$ легко построить. Продолжая AE на равное разстояніе до точки F и соединяя F съ B и C, получаемъ параллелограммъ $ABFC$ въ которомъ $\angle ACF = 180^0 - A$. Итакъ, точка C найдется въ пересѣченіи продолженія DE съ геометрическимъ мѣстомъ точекъ изъ которыхъ прямая AF видна подъ угломъ $180^0 - A$ (*Г. М.* № VII).

Построеніе. Строимъ прямоуг. $\triangle ADE$ по катету $AD = h_a$ и гипотенузѣ $AE = m_a$. Продолжаемъ гипотенузу до точки F, такъ чтобы $EF = AE$ и описываемъ на прямой AF дугу, вмѣщающую уголъ $180^0 - A$. На пересѣченіи продолженія DE съ этой дугой получится вершина C, послѣ чего отложивъ на прямой CE по другую сторону отъ точки E часть $EB = EC$ и соединивъ точки C и B съ A, получимъ искомый тре-къ.

Доказательство. По построенію $AD \perp BC$ и равно h_a; прямая AE есть дѣйствительно медіана (такъ какъ $EC = EB$ по построенію) и равна m_a. Соединивъ точки B и C съ F получаемъ параллелограммъ *) $ABFC$, въ которомъ $\angle ACF = 180^0 - A$, а слѣд. $\angle BAC = 180^0 - ACF = 180^0 - (180^0 - A) = A$. Итакъ, $\triangle ABC$ содержитъ всѣ требуемые элементы.

Изслѣдованіе. Задача возможна и имѣетъ одно рѣшеніе, если $m_a \geqslant h_a$. Если $m_a = h_a$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный и построеніе его не представляетъ никакихъ трудностей.

Замѣчаніе. Можно построить требуемый $\triangle ABC$ и иначе на основаніи *метода подобія*: строимъ $\triangle ADE$ (черт. 19) и откладываемъ на линіи DE по обѣ стороны отъ точки E два произвольныхъ равныхъ отрѣзка, напр. EK и EL, описываемъ дугу, вмѣщающую данный $\angle A$ и точку пересѣченія M этой дуги съ прямой AE соединяемъ съ K и L. Полученный $\triangle KLM$ подобенъ искомому ABC, а потому проведя изъ A прямыя AB и AC параллельно KM и ML до пересѣченія съ линіей KL или ея продолженіемъ, построимъ требуемый $\triangle ABC$. Доказательство изъ подобія двухъ паръ тре-ковъ: $\triangle ABC \sim \triangle KLM$ и $\triangle ACE \sim \triangle MLE$.

---

*) Параллелограммъ потому, что въ фигурѣ $ABFC$ обѣ діагонали, пересѣкаясь, дѣлятся пополамъ.

9а *). Построить треугольникъ по данному основанію, высотѣ на это основаніе и медіанѣ одной изъ двухъ другихъ сторонъ.

Дано: a; h_a; m_b. (*Мет. пар. пер.*; *м. геом. м.*).

Анализъ. Предполагая, что ABC (черт. 20) есть искомый тре-къ, продолжаемъ его медіану BE на равное разстояніе, такъ что $EF = BE$ и соединяемъ точку F съ A и C.

Въ параллелограммѣ $ABCF$ извѣстны: сторона $(BC = a)$ высота $(AD = h_a)$ и діагональ $(BF = 2m_b)$, а слѣд. этотъ параллелограммъ можно построить.

Построеніе. Проводимъ 2 произвольныя параллельныя прямыя, на разстояніи другъ отъ друга, равномъ h_a. На одной изъ этихъ параллелей откладываемъ отрѣзокъ $BC = a$ и изъ точки B радіусомъ $2m_b$ засѣкаемъ на другой изъ нихъ точку F. Соединивъ F съ C и проведя $BA \parallel CF$, получимъ параллелограммъ $BAFC$, діагональ котораго AC отдѣлитъ искомый $\triangle ABC$.

Доказательство. Въ $\triangle ABC$ сторона $BC = a$ по построенію опустивъ изъ A перпендик. AD на BC убѣдимся, что высота $AD = h_a$ по построенію.

Соединивъ B и F, пересѣкающую AC въ точкѣ E, увидимъ, что $AE = EC$ (по свойству діагоналей параллелограмма) т. е. что BE есть дѣйствительно медіана; кромѣ того $BE = \frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} \cdot 2m_b = m_b$. Итакъ, $\triangle ABC$ содержитъ всѣ требуемые элементы.

Изслѣдованіе. Для того, чтобы дуга, описанная изъ точки B радіусомъ $2m_b$ пересѣкла прямую XY, необходимо и достаточно, чтобы $2m_b \geqslant h_a$.

Если $2m_b > h_a$, то задача имѣетъ 2 рѣшенія: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC$ (черт. 20). Если $2m_b = h_a$, то получится одно рѣшеніе. Если же $2m_b < h_a$, то рѣшеній не будетъ ни одного.

9б. Построить тре-къ по данному основанію, высотѣ и медіанѣ проведеннымъ къ одной изъ двухъ другихъ сторонъ.

Дано: b; h_b; m_a. (*М. постр. ч.*; *м. геом. м.*).

---

*) Задача № 9 формулирована въ программѣ невполнѣ ясно: неизвѣстно къ какой сторонѣ относится высота: къ данному основанію, или къ той же сторонѣ на которую извѣстна медіана. Поэтому подъ №№ 9a и 9b задача рѣшена для обоихъ предположеній.

Анализъ. Пусть ABC (черт. 18) искомый тре-къ; $AD=h_a$ его высота, $AE=m_a$—его медіана. Въ $\triangle ADE$ извѣстны гипотенуза и катетъ, а потому его можно построить. Вершина C опредѣлится, если изъ A радіусомъ b засѣчь продолженіе DE.

Вершина B найдется, если отложить отъ точки E по другую сторону часть $EB=EC$.

Построеніе. Строимъ прямоуг. $\triangle ADE$ по гипотенузѣ ($AE=m_a$) и катету ($AD=h_a$).

Продолжаемъ DE по обѣ стороны, и изъ точки A радіусомъ равнымъ b, засѣкаемъ на этой прямой точку C; откладываемъ отъ точки E по другую сторону часть $EB=EC$. Тре-къ ABC—искомый.

Доказательство. Въ $\triangle ABC$ высота $AD=h_a$ по построенію; такъ какъ $EC=EB$, то E есть середина стороны BC и слѣд. AE есть медіана и по построенію она равна m_a; сторона $AC=b$ по построенію. Итакъ, $\triangle ABC$ содержитъ всѣ требуемые элементы.

Изслѣдованіе. Если $m_a < h_a$, то задача невозможна. Если $m_a = h_a$, то $\triangle ABC$ равнобедренный и задача имѣетъ одно рѣшеніе. Если $m_a > h_a$, то при $b > m_a$ задача имѣетъ 2 рѣшенія; при $b = m_a$ задача имѣетъ всего одно рѣшеніе при $b < m_a$ могутъ быть 3 случая: 1) если $b > h_a$— два рѣшенія: 2) если $b = h_a$ — одно рѣшеніе — прямоугольный тре-къ и 3) если $b < h_a$ — ни одного рѣшенія.

10. Построить тре-къ по данной высотѣ, периметру и углу при вершинѣ.

Дано: h_a; $2p$; $\angle A$. (*М. спр.; м. геом. м.*).

Анализъ. Предположимъ, что $\triangle ABC$ (черт. 21) — искомый. Спрямляя стороны CA и BA съ BC, получимъ отрѣзокъ $MN=2p$. Соединивъ точки M и N съ A, замѣчаемъ, что въ $\triangle AMN$ извѣстно основаніе ($MN=2p$), высота $AD=h_a$ и уголъ при вершинѣ ($\angle MAN=90^0+\frac{A}{2}$ *). Слѣд. вершина A, этого

*) Въ самомъ дѣлѣ: $\triangle AMB$ — равнобедренный и слѣд. $\angle ABC$, какъ внѣшній, $=2AMB$, откуда $\angle AMB=\frac{B}{2}$; также въ равнобедренномъ $\triangle ANC$ имѣемъ: $\angle ANC=\frac{C}{2}$; слѣд. изъ $\triangle AMN$ пишемъ: $\angle MAN=180-(AMN+$

тре-ка должна находиться на пересѣченіи двухъ геометрическихъ мѣстъ: 1) геом. м. точ., разстояніе которыхъ отъ MN равно h (*Г. М.* IV) и 2) геом. м. точ., изъ которыхъ отрѣзокъ MN видѣнъ подъ угломъ $90^\circ + \frac{A}{2}$ (*Г. М.* VII).

Построеніе. На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ MN, равный данному периметру $2p$, описываемъ на MN дугу, вмѣщающую $\angle\left(90^\circ + \frac{A}{2}\right)$, и проводимъ прямую $XY \parallel MN$ на разстояніи h_a. Точку пересѣченія этой параллели съ дугой A, соединяемъ съ M и N и къ прямымъ AM и AN возставляемъ въ серединахъ перпендикуляры, пересѣкающіе MN въ точкахъ B и C. Тре-къ ABC—искомый.

Доказательство. Въ $\triangle ABC$ высота$=h_a$ по построенію. Периметръ $AB+BC+AC = MB + BC+CN = MN = 2p$. $\angle BAC = 180^\circ - (B+C) = 180^\circ - 2(AMN+ANM) = 180^\circ - 2(180^\circ - MAN) = 180^\circ - 2\left[180^\circ - \left(90^\circ + \frac{A}{2}\right)\right] = A$. Итакъ, $\triangle ABC$ содержитъ всѣ требуемые элементы.

Изслѣдованіе. Возможность построенія $\triangle ABC$ обусловливается пересѣченіемъ прямой XY, параллельной MN и отстоящей отъ нея на разстояніи h_a съ описанной на MN дугой, вмѣщающей уголъ $90^\circ + \frac{A}{2}$. Если эти линіи пересѣкаются въ двухъ точкахъ—возможны 2 рѣшенія; если прямая XY касается дуги — одно рѣшеніе; или XY съ дугой не имѣетъ общихъ точекъ, рѣшеній не будетъ.

Если въ серединѣ MN возставить къ ней перпенд. KL, то возможность построенія тре-ка зависитъ отъ соблюденія неравенства $h \leqslant KL$ *).

$$+ ANM) = 180^\circ - \frac{B+C}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - BAC}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ + \frac{A}{2}.$$

*) Если соединить точку K съ N, то въ прямоуг. $\triangle KLN$ $\angle LKN = \frac{1}{2}\left(90^\circ + \frac{A}{2}\right)$; а потому катетъ $KL = LN \,.\, Cotg\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right)$, а слѣд. условіе возможности задачи выразится неравенствомъ: $h \leqslant p \,.\, Cotg\left(45^\circ + \frac{A}{4}\right)$.

11. Построить треугольникъ по данному основанію, углу при вершинѣ и точкѣ на основаніи, черезъ которую проходитъ биссектрисса угла при вершинѣ.

Дано: a; A; точка D на основаніи. *(М. геом. м.)*.

Анализъ. Допустимъ, что $\triangle ABC$ (черт. 22) искомый. Соединивъ вершину A съ точкой D, получимъ биссектриссу AD. Изъ точки A оба отрѣзка прямой BC видны подъ углами, равными $\frac{1}{2}A$. Слѣд. точка A должна находиться на пересѣченіи дугъ, описанныхъ на BD и CD и вмѣщающихъ углы, равные $\frac{1}{2} \angle A$. (*Г. М.* VII).

Построеніе. На каждомъ изъ отрѣзковъ BD и CD данной стороны BC описываемъ дугу, вмѣщающую уголъ $\frac{A}{2}$. Пересѣченіе этихъ дугъ даетъ вершину A искомаго тре-ка; соединивъ A съ B и C, получимъ $\triangle ABC$.

Доказательство. Соединивъ точки A и D, видимъ, что прямая AD есть биссектрисса; уголъ при вершинѣ $BAC = BAD + CAD = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A$; и сторона $BC = a$. Итакъ, $\triangle ABC$ содержитъ всѣ требуемые элементы.

Изслѣдованіе. Такъ какъ двѣ дуги, вмѣщающія углы $\frac{A}{2}$ имѣютъ одну общую точку именно D, причемъ *касаться* въ этой точкѣ онѣ не могутъ, то непремѣнно существуетъ и вторая точка ихъ пересѣченія, опредѣляющая собой положеніе вершины A.

Итакъ, задача всегда возможна и имѣетъ только одно рѣшеніе.

Другіе способы рѣшенія этой задачи. Такъ какъ биссектрисса дѣлитъ противолежащую сторону на части, пропорціональныя двумъ другимъ сторонамъ, то $AB : AC = BD : DC$ и слѣд. вершина A найдется въ пересѣченіи дуги, описанной на BC и вмѣщающей $\angle A$ и Аполоніевой окружности, разстояніе точекъ которой до B и C находится въ отношеніи равномъ $BD : DC$.

Вотъ еще одно простое рѣшеніе. Описавъ на BC дугу, вмѣщающую $\angle A$ (черт. 23) и опустивъ изъ центра ея $\perp$ на BC, продолжаемъ этотъ $\perp$ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ K. Соединяемъ K съ D и продолжаемъ KD до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ

A, которая и будетъ искомой вершиной. Доказательство основано на равенствѣ угловъ $\angle BAK = \angle CAK$, опирающихся на равныя дуги ($\smile BK = \smile KC$).

12. Построить треугольникъ по даннымъ радіусамъ круговъ вписаннаго и описаннаго и одному изъ угловъ.

Дано: r; R; A. *(Мет. геом. мѣстъ).*

Анализъ. Такъ какъ равные вписанные углы опираются на равныя дуги, а равныя дуги стягиваются равными хордами, то, описавъ окружность даннаго радіуса R (черт. 24) и построивъ при произвольной точкѣ K этой окружности $\angle BKC$, равный A, получимъ сторону BC, равную сторонѣ a искомаго тре-ка. Слѣд. вопросъ сводится къ нахожденію положенія вершины A на окружности. Предположимъ, что задача рѣшена и что $\triangle ABC$ (черт. 24) искомый. Впишемъ въ $\triangle ABC$ окружность и пусть центръ ея находится въ точкѣ M. Соединяя M съ B и C, получаемъ $\triangle BMC$, въ которомъ можно опредѣлить $\angle BMC$. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ M есть центръ круга вписаннаго въ $\triangle ABC$, то $\angle MBC = \frac{1}{2} B$; $\angle MCB = \frac{1}{2} C$, а потому $\angle BMC = 180^\circ - (MBC + MCB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(B + C) =$ $= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - A) = 90^\circ + \frac{A}{2}$. Итакъ, изъ точки M сторона BC должна быть видна подъ угломъ $90^\circ + \frac{A}{2}$, а потому точка эта должна лежать гдѣ нибудь на дугѣ, описанной на BC и вмѣщающей $\angle \left(90^\circ + \frac{A}{2}\right)$. (*Г. М.* VII). Съ другой стороны, точка M, какъ центръ круга вписаннаго въ $\triangle ABC$, должна отстоять отъ BC на разстояніи, равномъ радіусу вписаннаго круга r. (*Г. М.* IV). Итакъ, точка M найдется на пересѣченіи двухъ указанныхъ геометрическихъ мѣстъ.

Когда положеніе точки M будетъ опредѣлено, дальнѣйшій ходъ построенія не представитъ затрудненій.

Построеніе. Описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ R. При произвольной точкѣ K этой окружности строимъ $\angle$, равный A. Пересѣченіе сторонъ этого угла съ окружностью дастъ точки B и C, соединивъ которыя получимъ сторону BC искомаго тре-ка. Проводимъ прямую $XY \parallel BC$ и отстоящую отъ нея на разстояніи r и описываемъ на BC дугу, вмѣщающую

$\angle\left(90^\circ+\frac{A}{2}\right)$. Пересѣченіе этихъ двухъ геометр. мѣстъ опредѣлитъ точку M — центръ круга, вписаннаго въ искомый тре-къ.

Описавъ изъ центра M окружность радіуса r, проводимъ изъ B и C къ ней касательныя, пересѣкающіяся въ точкѣ A.

Тре-къ ABC — искомый.

Доказательство. Такъ какъ всѣ три стороны $\triangle ABC$ по построенію касаются круга, описаннаго изъ точки M радіусомъ r, то можно утверждать, что одинъ изъ требующихся элементовъ — радіусъ вписаннаго круга r въ $\triangle ABC$ имѣется.

$$\angle BAC = 180^\circ - (ABC + ACB) = 180^\circ - 2(MBC + MCB) =$$

$$= 180^\circ - 2(180^\circ - BMC) = 180^\circ - 2\left[180^\circ - \left(90^\circ + \frac{A}{2}\right)\right] = A.$$

Слѣд. $\angle BAC = \angle A$; кромѣ того $\angle BKC$ по построенію равенъ A, слѣд. $\angle BAC = \angle BKC$, а такъ какъ оба эти угла опираются на одну и ту же дугу BC и $\angle BKC$ вершиной лежитъ на окружности, то и вершина угла BAC т. е. точка A тоже должна лежать на той же окружности, такъ что $\triangle ABC$ дѣйствительно вписанъ въ кругъ радіуса R.

Итакъ, въ $\triangle ABC$, $\angle BAC = \angle A$; радіусъ описаннаго круга $= R$ и радіусъ вписаннаго круга $= r$, т. е. этотъ $\triangle$ заключаетъ въ себѣ всѣ требуемые элементы, а потому онъ и есть искомый.

Изслѣдованіе. Для возможности задачи необходимо и достаточно пересѣченіе прямой XY, отстоящей отъ BC на разстояніе r, съ дугой, описанной на BC и вмѣщающей уголъ $90^\circ + \frac{A}{2}$. Если къ серединѣ прямой BC возставить $\perp DE$ *) до пересѣченія съ вышеупомянутой дугой, то при $r < DE$ задача имѣетъ 2 рѣшенія (соотвѣтственно двумъ точкамъ пересѣченія M и M_1); при $r = DE$ задача имѣетъ одно рѣшеніе — равнобедренный тре-къ. При $r > DE$ рѣшеній нѣтъ. Если точку E соединить съ B то въ прямоуг. $\triangle BDE$ катетъ

*) Перпендикуляръ этотъ на чертежѣ не проведенъ, чтобы не затемнять чертежа.

$BD = \frac{a}{2}$, $\angle BED = 45^\circ + \frac{A}{4}$, а слѣд. $ED = BD \,.\, Cotg\, BED =$

$= \frac{a}{2} \,.\, Cotg\left(45 + \frac{A}{4}\right)$.

Но $\frac{a}{2} = R \,.\, Sin A$, а потому $DE = R \,.\, Sin A \,.\, Cotg\left(45^\circ + \frac{A}{4}\right)$.

Поэтому условіе возможности задачи выразится неравенствомъ:

$$r \leqslant R \,.\, Sin A \,.\, Cotg\left(45^\circ + \frac{A}{4}\right).$$

Другой способъ. Описываемъ окружность радіуса R. При произвольной точкѣ K этой окружности строимъ уголъ, равный A. Пересѣченіе сторонъ этого угла съ окружностью опредѣляетъ сторону BC искомаго тре-ка. Проводимъ прямую $XY \parallel BC$ на разстояніи r и изъ точки N, середины дуги BC радіусомъ BN описываемъ дугу, пересѣкающую XY въ точкѣ M. Прямая MN пересѣчетъ окружность въ искомой вершинѣ A. Доказательство основано на измѣреніи угловъ дугами *).

13. Построить треугольникъ по данной сторонѣ, суммѣ двухъ другихъ сторонъ и радіусу круга вписаннаго.

Дано: a, $b + c = m$; r. (*М. постр. ч.*; *м. геом. м.*).

Анализъ этой задачи основанъ на слѣдующей **теоремѣ:**

Разстояніе отъ любой вершины тре-ка до точекъ касанія со сторонами, образующими данную вершину, равно полуразности суммы этихъ сторонъ и противолежащей стороны.

Дѣйствительно: если въ $\triangle ABC$ (черт. 25) O есть центръ вписаннаго круга и E, F, D—точки касанія, то

$$AE + EB + AF + FC = b + c, \text{ или}$$
$$2AE + BD + DC = b + c, \text{ откуда}$$
$$2AE + BC = b + c, \text{ а слѣд. } AE = \frac{b + c - a}{2}.$$

На основаніи этой теоремы задача рѣшается очень просто. Если предположить, что $\triangle ABC$ (черт. 26) искомый, то въ

*) *Указаніе*: продолжить BM до пересѣч. съ окружностью: $\triangle BMN$ — равнобедренный; разсмотрѣть, чѣмъ измѣряются углы BMN и MBN.

прямоуг. $\triangle AOE$ извѣстны два катета [$EO=r$; $AE=\frac{1}{2}(m-a)$]. Построивъ этотъ тре-къ опредѣлимъ $\angle EAO$, равный половинѣ $\angle A$ искомаго тре-ка. Послѣ этого намъ будутъ извѣстны: сторона a, противолежащій уголъ A и сумма двухъ другихъ сторонъ $b+c=m$ и задача сведется къ разобранной выше (см. № $2a$).

Построеніе. Строимъ прямоуг. тре-къ $A_1O_1E_1$ по двумъ катетамъ: O_1E_1 и $A_1E_1=\frac{1}{2}$ $(m-a)$. Построеніе это опредѣлитъ величину $\angle E_1A_1O_1$. Послѣ чего остается построить $\triangle ABC$ по даннымъ a, $b+c=m$, и углу $A=2 \,.\, E_1A_1O_1$. На продолженіи A_1E_1 откладываемъ отрѣзокъ $A_1B=m$ и изъ точки B радіусомъ a засѣкаемъ другую сторону угла $E_1A_1O_1$. Возставляя въ $\triangle A_1BC$ перпендикуляръ къ серединѣ A_1C до пересѣченія его съ A_1B въ точкѣ A, получимъ искомый $\triangle ABC$.

Доказательство. Тре-къ ABC, построенный по указанному способу, есть дѣйствительно искомый, такъ какъ сторона его $BC=a$ и сумма $AB+AC=m$ по построенію.

Кромѣ того если найти центръ вписаннаго круга O, вписать въ $\triangle ABC$ кругъ, и обозначить точку касанія этого круга со стороной AB буквой E, то на основаніи вышеприведенной теоремы имѣемъ $AE=\frac{1}{2}$ $(m-a)$, а слѣд. $\triangle AOE = \triangle A_1O_1E_1$ (черт. № 26), такъ какъ $AE=A_1E_1$ и $\angle EAO = \angle E_1A_1O_1$ сл. $E_1O_1=EO=r$, т. е. радіусъ вписаннаго въ $\triangle ABC$ круга равенъ дѣйствительно r. Итакъ, $\triangle ABC$ содержитъ все требуемые элементы.

Изслѣдованіе. Первое условіе, необходимое для возможности задачи, заключается очевидно въ томъ, чтобы сумма m была больше a. Если это условіе выполнено, то для построенія $\triangle ABC$ необходимо, кахъ выведено въ задачѣ № 2 соблюденіе условія:

$$a \geqslant m \,.\, Sin\frac{A}{2}.$$

14. Построить треугольникъ по данному основанію, разности угловъ при основаніи и разности двухъ другихъ сторонъ.

Дано: a; $B-C=\delta$; $b-c=d$. (*М. спр., м. геом. м.*).

Анализъ. Предположимъ, что $\triangle ABC$ (черт. № 27) искомый. Спрямляемъ стороны AC и AB, т. е. откладываемъ на AC

часть $AD = AB$; тогда $DC = d$. Соединяя D съ B и обозначая $\angle DBC$ буквой x, имѣемъ:

$$x = \angle B - \angle ABD = \angle B - \angle ADB = B - (x + C),$$

откуда $2x = B - C$, а слѣд. $x = \frac{\delta}{2}$. Теперь въ $\triangle BCD$ извѣстны двѣ стороны ($BC = a$; $DC = d$) и уголъ, прилежащій къ одной изъ нихъ, а потому этотъ $\triangle$ можно построить. Вершина A найдется на пересѣченіи продолженія стороны DC и перпендикуляра, возставленнаго къ прямой BD въ ея серединѣ.

Построеніе. На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ BC, равный a и при точкѣ B строимъ уголъ равный $\frac{\delta}{2}$. Изъ C засѣкаемъ сторону этого угла дугой радіуса d. Продолжаемъ сторону DC полученнаго тре-ка, а изъ середины BD возставляемъ къ ней перпендикуляръ. Точка пересѣченія этихъ двухъ линій опредѣлитъ искомую вершину A тре-ка

Доказательство. Въ $\triangle ABC$ сторона $BC = a$ по построенію $AC - AB = AC - AD = d$ по построенію. Разность угловъ

$$\angle ABC - \angle ACB = (\angle ABD + \angle DBC) - \angle ACB = \angle ADB +$$
$$+ \frac{\delta}{2} - \angle ACB = \angle ACB + \angle DBC + \frac{\delta}{2} - \angle ACB = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Итакъ, $\triangle ABC$ содержитъ всѣ требуемые элементы.

Изслѣдованіе. Первое необходимое условіе заключается очевидно въ томъ, чтобы разность d была меньше стороны a, Затѣмъ для возможности построенія вспомогательнаго $\triangle BDC$ необходимо, чтобы дуга, описанная изъ точки C радіусомъ d пересѣклась со стороной BK, т. е. чтобы d было не менѣе длины перпенд. NC. Такъ какъ изъ прямоуг. $\triangle NBC$ катетъ $NC = BC \,.\, Sin\, NBC = a\, Sin \frac{\delta}{2}$, то условіе возможности выразится такъ:

$$a > d \geqslant a \,.\, Sin \frac{\delta}{2}.$$

При этомъ, если $d > a \,.\, Sin \frac{\delta}{2}$, то дуга пересѣчетъ прямую BC въ двухъ точкахъ D и D_1, соотвѣтственно чему получатся 2 тре-ка: BCA и BCA_1, но нетрудно доказать, что эти тре-ки равны между собой, такъ что рѣшеніе получится всего одно.

15. Построить треугольникъ по данной высотѣ, углу при вершинѣ и отношенію отрѣзковъ, на которые высота дѣлитъ основаніе.

Дано: h_a; A, $BD : DC = m : n$. (*Мет. под.*; *мет. геом. м.*).

Анализъ. Если предположимъ, что задача рѣшена и что $\triangle ABC$—искомый, то проведя произвольную прямую $B_1C_1 \parallel BC$ (черт. 28) видимъ, что $\triangle AB_1C_1 \backsim \triangle ABC$, а потому въ $\triangle AB_1C_1$ высота раздѣлитъ основаніе тоже въ отношеніи $m : n$. Изъ этого видно, что нетрудно построить тре-къ, *подобный данному*. На этомъ и основано

построеніе. Беремъ произвольной длины отрѣзокъ B_1C_1 и дѣлимъ его въ точкѣ D_1 въ данномъ отношеніи $m : n$ такъ что

$$B_1D_1 : D_1C_1 = m : n.$$

На линіи B_1C_1 описываемъ дугу, вмѣщающую данный уголъ A, и возставляемъ въ точкѣ D_1 перпендикуляръ до пересѣченія съ этой дугой въ точкѣ A.

Соединяя A съ B_1 и C_1. получаемъ $\triangle AB_1C_1$, подобный искомому. Чтобы перейти теперь отъ $\triangle AB_1C_1$ къ искомому, откладываемъ отъ точки A по линіи AD_1 отрѣзокъ AD, равный данной высотѣ h_a и проводимъ черезъ точку D прямую $\parallel B_1C_1$ до пересѣченія съ прямыми AB_1 и AC_1 въ точкахъ B и C. Полученный $\triangle ABC$—искомый.

Доказательство. Въ $\triangle ABC$ высота $AD = h_a$ по построенію; $\angle BAC = \angle A$ по построенію.

Кромѣ того, вслѣдствіе подобія $\triangle\triangle ABC$ и AB_1C_1 имѣемъ $BD : DC = B_1D_1 : D_1C_1 = m : n$ по по построенію.

Итакъ, $\triangle ABC$ удовлетворяетъ всѣмъ требуемымъ условіямъ.

Изслѣдованіе. Задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе.

16. Построить равнобедренный треугольникъ по данной боковой сторонѣ и суммѣ высоты съ основаніемъ.

Дано: b; $a + h_a = m$; ($c = b$). (*М. спр.*; *м. под.*; *м. геом. м.*).

Анализъ. Предположимъ, что задача рѣшена и что $\triangle ABC$ (черт. 30) есть искомый равнобедренный тре-къ. Чтобы ввести въ чертежъ данную сумму m, спрямляемъ основаніе съ высотой; для этого продолжаемъ высоту AD до точки O, такъ что $DO = BC$; тогда $AO = m$. Соединивъ O съ B, получимъ прямоуг. $\triangle ODB$, въ которомъ DB, какъ половина основанія, равна $\frac{1}{2}\, OD$.

Такимъ образомъ въ $\triangle ODB$ одинъ катетъ вдвое больше другого и это даетъ возможность построить произвольный прямоуг. тре-къ подобный тре-ку ODB, послѣ чего нетрудно получить искомый $\triangle ABC$. На основаніи этого производится

построеніе. При произвольной точкѣ E строимъ прямой уголъ и откладываемъ на одной изъ сторонъ его произвольный отрѣзокъ EF, а на другой отрѣзокъ EO вдвое большій такъ что

$$OE : EF = 2.$$

Соединяемъ точки O и F прямой OF и откладываемъ на продолженіи OE отрѣзокъ OA, равный данной суммѣ m. Изъ точки A радіусомъ, равнымъ данной сторонѣ b, описываемъ дугу. Изъ точки пересѣченія этой дуги съ прямой OF или ея продолженіемъ опускаемъ на OA перпендикуляръ BD и продолжаемъ его до точки C, тккъ чтобы $DC = DB$. Тре-къ ABC—искомый.

Доказательство. Тре-къ ABC—равнобедренный, такъ какъ по построенію $BD = CD$. Сторона $AB = b$ по построенію. Изъ подобія $\triangle\triangle\, DBO$ и FEO слѣдуетъ:

$$DB : OD = EF : OE = 1 : 2,$$

откуда $DB = \frac{1}{2}\, OD$, а слѣд. $CB = 2 \, . \, DB = OD$.

Поэтому $AD + CB = AD + OD = AO = m$.

Итакъ, $\triangle ABC$ удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ задачи.

Изслѣдованіе. Для возможности построенія искомаго тре-ка необходимо, чтобы дуга описанная изъ точки A радіусомъ b пересѣкла прямую OF или ея продолженіе, а для этого необходимо, чтобы b было не меньше длины перпенд. AN, опущеннаго изъ A на OF. Изъ $\triangle OEF$ имѣемъ:

$$tang \angle EOF = \frac{EF}{EO} = \frac{1}{2} \cdot$$

слѣд. $Sin\, EOF = \frac{1}{\sqrt{5}}$, поэтому изъ $\triangle\, OAN$

$$AN = AO\, .\, Sin\, AON = \frac{m}{\sqrt{5}}.$$

Итакъ, b должно быть не меньше чѣмъ $\frac{m}{\sqrt{5}}$. Кромѣ того, для возможности пересѣченія вышеуказанной дуги съ линіей OF необходимо, чтобы b было меньше AO.

Итакъ, условіе возможности задачи выражается неравенствомъ:

$$m > b \geqslant \frac{m}{\sqrt{5}}.$$

Если $b = \frac{m}{\sqrt{5}}$, то дуга радіуса b *коснется* прямой OF и получится *одно* рѣшеніе; если же $b > \frac{m}{\sqrt{5}}$, то дуга пересѣчется съ прямой OF въ двухъ точкахъ: B и B_1. Если обѣ эти точки будутъ лежать по одну сторону отъ точки M *), то задача будетъ имѣть 2 рѣшенія, какъ это и показано на черт. 30. Это будетъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, если $b < AM$, или такъ какъ $AM = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}m$, если $b = \frac{m}{2}$.

Если же двѣ точки пересѣченія будутъ лежать по разныя стороны отъ точки M, то задача будетъ имѣть всего одно рѣшеніе.

Интересно замѣтить, что второе рѣшеніе, т. е. $\triangle AB_1C_1$ соотвѣтствуетъ въ этомъ случаѣ заданію: построить равнобедренный тре-къ по боковой сторонѣ и *разности* основанія съ высотой, такъ какъ нетрудно доказать, что для этого случая $CB - AD = AO$, т. е. $a - h_a = m$.

17. Построить равнобедренный треугольникъ по даннымъ высотѣ и медіанѣ, проведеннымъ изъ одной изъ вершинъ его основанія.

Дано: h_b; m_b; $(b=c)$. *(М. постр. ч.; м. геом. м.).*

Анализъ. Предположимъ, что $\triangle\, ABC$ (черт. 29) искомый; BE его высота, BD—медіана.

---

*) M есть точка пересѣченія прямой OF съ перпенд., возставленнымъ къ прямой AO изъ точки A.

Въ прямоуг. $\triangle BDE$ извѣстны: гипотенуза ($BD = m_b$) и катетъ ($BE = h_b$), а потому этотъ $\triangle$ можно построить. Такъ какъ всѣ 3 медіаны тре-ка пересѣкаются въ одной точкѣ и дѣлятся въ ней въ отношеніи 2 : 1 (считая отъ вершины), то черезъ точку O, дѣляющую BD въ отношеніи 2 : 1, должна пройти и медіана стороны C, равная вслѣдствіе равнобедренности $\triangle ABC$ медіанѣ стороны b.

Итакъ, вершина C должна 1) лежать на линіи ED и 2) отстоять отъ точки O на разстояніи, равномъ BO, т. е. $\frac{2}{3}m_b$.

Построеніе. Строимъ прямоуг. $\triangle BED$ по гипотенузѣ $BD = m_b$ и катету $BE = h_b$. Дѣлимъ BD въ точкѣ O на части BO и OD относящіяся, какъ 2 : 1 и описываемъ изъ точки O радіусомъ равнымъ BO дугу, пересѣкающую линію DE или ея продолженіе въ точкѣ C.

Откладывая по линіи ED по другую сторону отъ точки D отрѣзокъ $AD = DC$ и соединяя точки C и A съ B, получаемъ искомый $\triangle ABC$.

Доказательство. Въ $\triangle ABC$ прямая $BE \perp AC$ слѣд. BE есть высота и она равна требуемой h_b по построенію. Такъ какъ отрѣзки AD и CD равны по построенію, то прямая BD есть дѣйствительно медіана; по величинѣ она равна требуемой m_b.

Такъ какъ въ точкѣ O медіана BD дѣлится въ отношеніи 2 : 1, то прямая OC, соединяющая эту точку съ вершиной C есть медіана стороны c; но по построенію $OC = OB$. Слѣд. и вся медіана $CF = BD$, а потому въ $\triangle ABC$ двѣ медіаны равны между собой, а слѣд. этотъ тре-къ равнобедренный.

Итакъ, $\triangle ABC$ удовлетворяетъ всѣмъ требуемымъ условіямъ.

Изслѣдованіе. Для возможности построенія $\triangle BED$ необходимо, чтобы h_b было не меньше m_b. Если $h_b = m_b$, то $\triangle ABC$— равносторонній и получится одно рѣшеніе. Если же $h_b < m_b$, то дуга, описанная изъ точки O радіусомъ $BO = \frac{2}{3}m_b$ пересѣчетъ прямую DE въ двухъ точкахъ, соотвѣтственно чему задача будетъ имѣть 2 рѣшенія: $\triangle BAC$ и $\triangle BA_1C_1$ (черт. 29).

Другой способъ. Можно рѣшить эту задачу еще такъ: построивъ $\triangle BDE$, замѣчаемъ, что $AB = 2AD$, а слѣд. точка A должна находиться на Аполоніевой окружности, у которой отношеніе разстояній всѣхъ ея точекъ до B и D должно находиться въ отношеніи 2 : 1. Кромѣ того вершина A должна находиться на продолженіи DE. Поэтому A найдется на пересѣченіи двухъ сказанныхъ геометрическихъ мѣстъ Такъ какъ Аполоніева окружность пересѣчется съ прямой DE въ двухъ точкахъ, то задача будетъ имѣть 2 рѣшенія.

18. Построить треугольникъ по данному основанію, радіусу круга описаннаго и отношенію двухъ другихъ сторонъ.

Дано: a; R; $b : c = m : n$.

Анализъ. Если $\triangle ABC$ (черт. 31)—искомый, то отношеніе сторонъ $AC : AB$ равно по условію данному отношенію $m : n$ Поэтому вершина A должна лежать, во первыхъ, на Аполоніевой окружности, отношеніе разстояній которой до B и C равно отношенію $m : n$, и во вторыхъ на окружности, радіуса R, описанной на BC, какъ на хордѣ.

Построеніе. Беремъ отрѣзокъ BC, равный данной сторонѣ a, описываемъ на немъ, какъ на хордѣ, окружность радіуса R *). и строимъ геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе разстояній, которыхъ до точекъ A и C равно данному отношенію $m : n$ Пересѣченіе этой Аполоніевой окружности съ окружностью радіуса R дастъ вершину A искомаго тре-ка.

Доказательство. Въ $\triangle ABC$ сторона $BC = a$; радіусъ описаннаго круга $= R$ и отношеніе сторонъ $AC : AB = m : n$, такъ какъ вершина A лежитъ на Аполоніевой окружности, всѣ точки которой удовлетворяютъ этому отношенію.

Изслѣдованіе. Для того, чтобы данный отрѣзокъ a могъ служить хордой въ кругѣ радіуса R необходимо, чтобы a было не больше $2R$.

Если условіе $a \leqslant 2R$, соблюдено, то задача возможна и имѣетъ два рѣшенія, такъ какъ и вторая точка (A_1) пересѣченія двухъ вышеуказанныхъ геометрическихъ мѣстъ дастъ $\triangle A_1BC$, удовлетворяющій всѣмъ требованіямъ задачи.

Другой способъ. Можно рѣшить эту задачу еще такъ: описываемъ на BC какъ на хордѣ окружность радіуса R, дѣлимъ дугу BC пополамъ въ точкахъ M и M_1 и дѣлимъ BC въ точкѣ K въ отношеніи $m : n$.

*) Для этого возставляемъ $\perp$ къ серединѣ BC и изъ точки B (или C) радіусомъ R засѣкаемъ на немъ точку O, которая и будетъ центромъ.

Прямыя MK и M_1K пересѣкутъ окружность въ искомой вершинѣ A или A_1.

См. рѣшеніе задачи № 11.

19. Построить трапецію по даннымъ четыремъ ея сторонамъ.

Анализъ. Если $ABCD$ (черт. 32) есть искомая трапеція, то проведя прямую $BE \parallel CD$, замѣчаемъ, что въ $\triangle ABE$ извѣстны всѣ 3 стороны ($AB=a$; $BE=c$; $AE=d-b$).

Построеніе. Строимъ $\triangle ABE$ по тремъ сторонамъ, изъ вершины B проводимъ прямую $\parallel AE$ и откладываемъ на ней отрѣзокъ $BC=b$. Черезъ точку C проводимъ прямую $\parallel BE$ до пересѣченія съ продолженіемъ AE въ точкѣ D. Трапеція $ABCD$—искомая.

Доказательство. Фигура $ABCD$ есть дѣйствительно трапеція, такъ какъ $BC \parallel AD$; въ этой трапеціи сторона $AB=a$; $BC=$ $=b$; $CD=BE=c$; $AD=AE+ED=d-b+b=d$. Итакъ, въ трапеціи $ABCD$ всѣ 4 стороны имѣютъ требуемую длину.

Изслѣдованіе. Задача возможна и имѣетъ одно рѣшеніе, если возможно построить $\triangle ABE$, т. е. если

$$a+c>d-b; \text{ и } a-c<d-b.$$

20. Описать окружность, касающуюся данной прямой въ данной точкѣ и данной окружности.

(*Мет. геометр. мѣстъ*).

Анализъ. Предположимъ, что задача рѣшена и что окружность A (черт. 33) есть искомая. Центръ A непремѣнно долженъ находиться гдѣ нибудь на перпендикулярѣ возставленномъ въ точкѣ K къ прямой MN. (*Г. М.* № 5). Соединяя центры окружностей A и O прямой AO и точку касанія C съ K прямой CK получаемъ равнобедренный $\triangle ACK$. Проведя изъ центра O прямую $OB \parallel CK$ до пересѣченія съ продолженіемъ KA въ точкѣ B, получаемъ $\triangle AOB$, подобный тре-ку ACK и слѣдовательно тоже равнобедренный.

Изъ равенства $AB=AO$ слѣдуетъ, что $KB=CO$. т. е. радіусу данной окружности, а потому положеніе точки B и линіи BO извѣстно. Такимъ образомъ можно найти второе геометрическое мѣсто центра A—перпендикуляръ къ серединѣ прямой OB. (*Г. М.* № 2).

Построеніе. Къ прямой MN въ данной на ней точкѣ K возставляемъ перпендикуляръ KL и откладываемъ на немъ отрѣзокъ KB, равный радіусу данной окружности O. Соединяемъ точку B съ центромъ O и изъ середины прямой BO возставляемъ къ ней $\perp$ до пересѣченія съ KL въ точкѣ A, которая и будетъ центромъ искомой окружности, остается только изъ точки A радіусомъ AK описать окружность.

Доказательство. По построенію $AB=AO$; и $KB=CO$. Вычитая второе равенство изъ перваго, получаемъ $AK=AC$. Но AK есть радіусъ, которымъ мы проводили окружность A, слѣд. разстояніе между центрами AO равно суммѣ радіусовъ, а потому окружность A *касается* данной.

Кромѣ того, какъ видно непосредственно изъ построенія окружность A касается прямой MN въ данной на ней точкѣ K, а потому всѣ условія задачи выполнены.

Изслѣдованіе. Если отложить на перпендикулярѣ, возставленномъ въ точкѣ K отрѣзокъ KB_1, равный радіусу данной окружности O, по другую сторону *), то произведя совершенно такое же построеніе, какъ прежде, получимъ окружность A_1, касающуюся данной *внутренно*, такъ что *вообще* задача допускаетъ 2 рѣшенія, одно внутреннее и одно внѣшнее касаніе; но могутъ встрѣтиться случаи когда будутъ возможны или 2 внѣшнихъ, или два внутреннихъ, или одно какое нибудь или даже ни одного касанія. Различные виды и формы рѣшенія зависятъ отъ относительнаго положенія окружности O, прямой MN и точки на ней K.

Разсмотримъ всѣ случаи, которые могутъ встрѣтиться **).

Прямая MN и окружность O могутъ:

1) не встрѣчаться;

2) касаться;

3) пересѣкаться.

*) Точнѣе: въ ту же сторону отъ прямой MN, гдѣ находится центръ данной окружности O.

**) Привожу только результаты изслѣдованія. Выводы легко могутъ быть получены, если сдѣлать для каждаго положенія отдѣльный чертежъ и продѣлать построеніе какъ указано выше.

1. Если прямая MN и окружность O не встрѣчаются, какъ это изображено на черт. 33, то задача всегда возможна и имѣетъ 2 рѣшенія: одно внутреннее, другое внѣшнее касанія.

2. Если MN касается окружности O, то могутъ представиться 2 случая:

a) Точка K не совпадаетъ съ точкой касанія окружности съ прямой. Въ этомъ случаѣ, задача имѣетъ всего одно рѣшеніе—внѣшнее касаніе.

b) Точка K совпадаетъ съ точкой касанія окружности съ прямой. Въ этомъ случаѣ, задача становится неопредѣленной и имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, какъ внутреннихъ, такъ и внѣшнихъ касаній.

3. Если MN и окружность O пересѣкаются, то могутъ представиться 3 случая:

a) Точка K лежитъ внѣ окружности O. Въ этомъ случаѣ задача имѣетъ 2 рѣшенія и оба круга касаются даннаго внѣшне.

b) Точка K лежитъ внутри окружности O. Задача имѣетъ 2 рѣшенія, и оба касанія—внутреннія.

c) Точка K есть одна изъ точекъ пересѣченія прямой MN съ окружностью O.

Такъ какъ центръ искомой окружности долженъ въ этомъ случаѣ совпасть съ точкой K и радіусъ окружности получается равнымъ нулю, то задача не имѣетъ ни одного рѣшенія.

21. Описать окружность, касающуюся даннаго круга въ данной точкѣ и данной прямой.

(*Мет. геометр. мѣстъ*).

Анализъ. Предположимъ, что окружность A (черт. 34) удовлетворяетъ условію, т. е. касается окружности O въ данной точкѣ K и прямой MN. Такъ какъ центры двухъ касательныхъ окружностей лежатъ на одной прямой съ точкой касанія, то искомый центръ долженъ непремѣнно находиться гдѣ нибудь на прямой OK. (*Г. М.* № VI). Съ другой стороны, проведя въ точкѣ K касательную къ окружности O, до пересѣченія въ точкѣ B съ прямой MN, видимъ, что искомая окружность касается двухъ сторонъ угла KBM, а потому центръ ея долженъ находиться на биссектриссѣ этого угла.

Построеніе. Соединяемъ центръ окружности O съ данной на ней точкой K и проводимъ въ точкѣ K касательную KB до пересѣченія *) съ данной прямой MN. Проводимъ биссектриссу угла, образованнаго линіями KB и MN до пересѣченія ея съ линіей OK въ точкѣ A. Принимаемъ точку A за центръ и описываемъ окружность радіусомъ AK. Эта окружность и будетъ искомой.

Доказательство. Такъ какъ точка A лежитъ на биссектриссѣ угла KBM, то $AK = AL$, а потому окружность A коснется прямой MN. Кромѣ того изъ построенія очевидно, что она коснется и окружности O въ данной на ней точкѣ K.

Изслѣдованіе. Прямая KB, касательная къ данному кругу въ точкѣ K, пересѣкаясь съ прямой MN образуетъ 2 смежныхъ угла: KBN и KBM, а потому задача имѣетъ вообще 2 рѣшенія: одинъ центръ A находится на пересѣченіи OK съ биссектриссой угла KBM (внѣшнее касаніе), а другой (A_1) на пересѣченіи съ биссектриссой угла KBN (внутреннее касаніе).

Разсмотримъ всѣ случаи относительнаго расположенія окружности O и прямой MN, которые могутъ встрѣтиться:

1) Прямая MN не встрѣчается съ окружностью O.

2) Прямая MN касается окружности O.

3) Прямая MN пересѣкается съ окружностью O.

1. Если MN не имѣетъ общихъ точекъ съ O, то задача всегда возможна и имѣетъ 2 рѣшенія—внутреннее и внѣшнее касанія.

2. Если MN касается окружности O, то могутъ представиться 2 случая:

a) Точка касанія совпадаетъ съ точкой K. Задача становится неопредѣленной и имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, какъ для внутренняго, такъ и для внѣшняго касаній.

b) Точка касанія не совпадаетъ съ точкой K. Въ этомъ случаѣ задача имѣетъ всего одно рѣшеніе: внѣшнее касаніе.

*) Если прямая KB окажется параллельной прямой MN, то дальнѣйшій ходъ рѣшенія очевиденъ.

3) Если прямая MN пересѣкается съ окружностью, то здѣсь могутъ представиться 2 различныхъ положенія:

a) Прямая MN, пересѣкая окружность не проходитъ черезъ точку K. Задача имѣетъ 2 рѣшенія — внутреннее и внѣшнее касанія.

b) Прямая MN пересѣкаетъ окружность и K есть одна изъ точекъ пересѣченія. Задача въ этомъ случаѣ невозможна.

22. Описать окружность, проходящую черезъ двѣ данныя точки и касающуюся данной прямой.

(*Мет. геом. м.*; *мет. подобія*).

Анализъ. Предположимъ, что задача рѣшена и окружность O (черт. 35) есть искомая. Центръ O долженъ очевидно лежать гдѣ нибудь на перпендикулярѣ, возставленномъ къ прямой AB въ ея серединѣ (*Г. М.* № II).

Соединяя центръ O съ точкой касанія C и съ точкой B, видимъ, что O долженъ одинаково отстоять отъ данной прямой KN и отъ данной точки B. Задача сводится теперь къ слѣдующей: имѣется $\angle NKD$ и внутри его точка B; требуется на сторонѣ KD этого угла найти такую точку, чтобы разстоянія ея до данной точки B и до другой стороны угла KN были равны.

Задача эта рѣшается очень просто при помощи метода подобія, такъ какъ если изъ произвольной точки P прямой KD провести прямыя $PQ \parallel OB$ и $PR \parallel OC$, то изъ подобія $\triangle KOB$ и $\triangle KPQ$, и $\triangle KOC$ и $\triangle KPR$ легко вывести, что $PQ = PR$. Слѣд. если опустить изъ произвольной точки P, взятой на сторонѣ KD перпендикуляръ PR на KN и засѣчь радіусомъ, равнымъ PR точку Q на прямой KB, то искомая точка O найдется пересѣченіемъ прямой, параллельной PQ, съ прямой KD.

Построеніе. Соединяемъ данныя точки A и B и изъ середины прямой AB возставляемъ къ ней перпендикуляръ DK, пересѣкающій данную прямую KN въ точкѣ K. Соединяемъ K и B *) и изъ произвольной точки P прямой KD опускаемъ на KN перпендикуляръ PR и радіусомъ, равнымъ PR, описы-

*) Т. е. съ той изъ данныхъ точекъ, которая окажется внутри угла DKN.

ваемъ дугу, пересѣкающую KB въ точкѣ Q. Соединяемъ P съ Q и изъ точки B проводимъ прямую $BO \parallel PQ$. Точка пересѣченія этой прямой съ DK есть центръ O искомой окружности. Радіусъ ея есть OB.

Доказательство. Окружность, описанная изъ точки O радіусомъ OB есть дѣйствительно искомая: во-первыхъ, такъ какъ точка O находится на перпендикулярѣ къ AB въ ея серединѣ, то окружность эта пройдетъ и черезъ точку A. Во-вторыхъ, она непремѣнно коснется прямой KN.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно показать, что перпенд., опущенный изъ точки O на прямую KN, равенъ радіусу OB.

Такъ какъ $OB \parallel PQ$ по построенію и $OC \parallel PR$ какъ 2 перпендикуляра къ одной прямой KN, то $\triangle KOB \sim \triangle KPQ$ и $\triangle KOC \sim \triangle KPR$.

Изъ подобія этихъ тре-ковъ слѣдуетъ:

$$\frac{OB}{PQ}=\frac{OK}{PK}; \quad \text{и} \quad \frac{OC}{PR}=\frac{OK}{PK}.$$

Изъ сравненія этихъ пропорцій заключаемъ:

$$\frac{OB}{PQ}=\frac{OC}{PR}.$$

Но $PQ = PR$ по построенію. Слѣд. $OC = OB$, а потому окружность, описанная радіусомъ OB, пройдетъ черезъ точку C и вслѣдствіе перпендикулярности прямыхъ KN и OC, прямая KN непремѣнно будетъ къ кругу O *касательной*, что и требовалось доказать.

Изслѣдованіе. Задача невозможна 1) если точки A и B лежатъ по разныя стороны отъ данной прямой KN и 2) если точки A и B лежатъ на KN, такъ какъ въ обоихъ этихъ случаяхъ окружность, проходящая черезъ точки A и B, непремѣнно будетъ *пересѣкаться* съ прямой KN и не можетъ коснуться ея. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ задача возможна и имѣетъ вообще два рѣшенія: окружность O и окружность O_1 (черт. 35), центръ которой получается отъ пересѣченія съ DK прямой BO_1, проведенной параллельно PS, гдѣ S есть вторая точка пересѣченія дуги радіуса PR съ BK.

Кромѣ того, въ зависимости отъ относительнаго положенія прямыхъ AB и KN могутъ встрѣтиться слѣдующіе частные случаи.

1. Прямая KN проходитъ черезъ одну изъ данныхъ точекъ, напр. черезъ B.

Задача имѣетъ въ этомъ случаѣ одно рѣшеніе: искомый центръ найдется въ пересѣченіи перпендикуляра къ серединѣ AB и перпендикуляра къ KN въ точкѣ B,

2. Прямая KN параллельна AB.

Въ этомъ случаѣ задача имѣетъ всего одно рѣшеніе, причемъ способъ построенія ея значительно упрощается *).

3. Прямая AB перпендикулярна KN.

Въ этомъ случаѣ задача имѣетъ 2 рѣшенія, причемъ оба круга получаются разныхъ радіусовъ. Выводъ способа построенія предоставляется учащимся.

23. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая отъ сторонъ угла отсѣкала бы хорды данной длины.

(*Мет. геом. мѣстъ*).

Анализъ. Допустимъ, что задача рѣшена и что окружность O (черт. 36) требуемаго радіуса R отсѣкаетъ отъ сторонъ даннаго угла XYZ данные отрѣзки $AB=a$ и $CD=b$. Соединяя центръ O съ точками пересѣченія B и D, и опуская перпендикуляры замѣчаемъ, что въ каждомъ изъ прямоуг. тре-ковъ OEB и OFD извѣстны по гипотенузѣ и одному изъ катетовъ, а потому каждый изъ этихъ тре-ковъ можно построить. Построеніе это опредѣлитъ длины перпендикуляровъ OE и OF, т. е. разстояніе центра O отъ сторонъ даннаго угла, послѣ чего задача будетъ рѣшена (*Г. М.* № IV).

Построеніе. Откладываемъ при произвольной точкѣ K прямой XY отрѣзокъ KL, равный половинѣ даннаго отрѣзка a. Возставляемъ въ K перпенд. KM и засѣкаемъ его изъ точки L дугой даннаго радіуса R. Прямая проведенная изъ M параллельно XY есть одно геометрическое мѣсто центра O.

---

*) Выводъ его предоставляется учащимся.

Чтобы получить другое геометрич. мѣсто, дѣлаемъ аналогичное построеніе при произвольной точкѣ N прямой YZ; откладываемъ $NP = \frac{b}{2}$, возставляемъ $NQ \perp YZ$ и засѣкаемъ этотъ перпендикуляръ изъ точки P даннымъ радіусомъ R. Черезъ вершину Q полученнаго прямоуг. $\triangle NPQ$, проводимъ прямую $\parallel YZ$.

Два построенныхъ такимъ образомъ геометрическихъ мѣста, пересѣкаясь опредѣлятъ положеніе центра O. Окружность, описанная изъ O даннымъ радіусомъ R будетъ искомой.

Доказательство. Опустивъ изъ O перпендикуляры $OE \perp XY$ и $OF \perp YZ$ и соединивъ O съ B и D, получимъ прямоуг. $\triangle\triangle OEB$ и OFD. Тре-къ $OEB = \triangle MKL$ $(OB = R = ML$; $OE = MK)$, а слѣд. $EB = KL = \frac{a}{2}$, а потому $AB = 2 \,.\, EB = 2 \cdot \frac{a}{2} = a$. Также $\triangle OFD = \triangle QNP$ $(OD = QP = R$; $OF = QN)$, а потому $FD = NP = \frac{b}{2}$; слѣд. $CD = 2FD = 2 \,.\, \frac{b}{2} = b$.

Итакъ окружность O проведена даннымъ радіусомъ R и отсѣкаетъ отъ сторонъ угла хорды требуемой длины a и b, такъ что всѣ условія задачи удовлетворены.

Изслѣдованіе. Такъ какъ хорда не можетъ быть больше діаметра, то условіе возможности задачи выражается неравенствами $a < 2R$ и $b < 2R$. Если неравенства эти соблюдены, то задача всегда возможна.

Если при этомъ обусловлено, что на сторонѣ XY должна получиться хорда *именно* b, то рѣшеніе будетъ всего одно; въ противномъ случаѣ если безразлично на какой сторонѣ должна получиться хорда a и на какой b,—задача имѣетъ 2 рѣшенія.

24. Если разность между суммою двухъ сторонъ тре-ка и его третьей стороной равна діаметру круга вписаннаго, то треугольникъ прямоугольный.

Въ $\triangle ABC$ *дано*: $b + c - a = 2r$.

Доказать: $\angle A = 90^\circ$.

Изъ чертежа (25) имѣемъ:
$b=AC=AF+FC$; $c=AB=AE+EB$; $a=BC=BD+DC$.

Подставляя эти значенія въ данное равенство

$$b+c-a=2r;$$

получаемъ:

$$AF+FC+AE+EB-BD-DC=2r,$$

откуда, на основаніи равенства касательныхъ, проведенныхъ изъ одной точки къ окружности, слѣдуетъ, что $2\,AE=2r$, т. е. $AE=r$.

Соединяя точку A съ центромъ вписаннаго круга O, получаемъ прямоуг. $\triangle AOE$, который, вслѣдствіе равенства $AE==r=EO$ будетъ равнобедреннымъ. Слѣд. $\angle EAO=45^\circ$, а потому $BAC=2\,.\,OAE=2\,.\,45^\circ=90^\circ$, что и требовалось доказать.

25. Построить треугольникъ по данному углу и двумъ высотамъ, изъ которыхъ одна проведена изъ вершины даннаго угла.

Дано: $\angle A$; h_b; h_a.

Анализъ. Положимъ, что $\triangle ABC$ (черт. 37)—искомый, такъ что $\angle BAC=\angle A$; высота $BD=h_b$; высота $AE=h_a$. Замѣчаемъ, что въ прямоуг. $\triangle ABD$ извѣстны катетъ ($BD=h_b$) и острый уголъ ($\angle BAD=\angle A$), а потому его можно построить. Послѣ этого въ $\triangle ABE$ будутъ извѣстны гипотенуза AB, опредѣлившаяся изъ предыдущаго построенія и катетъ $AE==h_a$. Построивъ этотъ тре-къ, опредѣлимъ точку E, а соединивъ E съ B и проведя EB до пересѣченія съ продолженіемъ AD, получимъ третью вершину C искомаго тре-ка.

Построеніе. Строимъ прямоуг. $\triangle BAD$ по катету $BD=h_b$ и противолежащему острому углу A. На гипотенузѣ AB, какъ на діаметрѣ описываемъ окружность и изъ точки A радіусомъ, равнымъ h_a описываемъ дугу, пересѣкающуюся съ окружностью въ точкѣ E *). Проводимъ прямую BE до пересѣченія съ продолженіемъ AD въ точкѣ C. Тре-къ ABC—искомый.

---

*) Можно поступить и иначе: изъ точки A радіусомъ h_a описываемъ дугу, а изъ точки B проводимъ къ ней касательную, пересѣкающую продолженіе AD въ точкѣ C, которая и будетъ искомой вершиной.

Доказательство. Въ $\triangle ABC$ уголъ $BAC = A$ по построенію; высота $BD = h_b$—по построенію. Соединивъ A съ E, получаемъ $\triangle ABE$, прямоугольный при E; слѣд. AE есть высота тре-ка ABC и по построенію она равна требуемой h_a. Итакъ, $\triangle ABC$ содержитъ всѣ требуемые элементы.

Изслѣдованіе. Для возможности построенія необходимо, чтобы высота AE, была не больше стороны AB, опредѣляемой графически путемъ построенія $\triangle ABD$. Такъ какъ въ этомъ тре-кѣ $BD = AB \, Sin \, A$, то $AB = \frac{BD}{Sin \, A} = \frac{h_b}{Sin \, A}$, а потому условіе возможности задачи выражается неравенствомъ $h_a \leqslant \frac{h_b}{Sin \, A}$ *). При этомъ задача имѣетъ всего *одно* рѣшеніе во всѣхъ случаяхъ кромѣ слѣдующаго: если $\angle A$ острый и $h_a > h_b$, то возможно построить 2 тре-ка удовлетворяющихъ условіямъ задачи, какъ это показано на чертежѣ (38); одинъ тре-къ ABC и другой $\triangle ABC_1$.

26. Доказать, что высоты остроугольнаго треугольника служатъ биссектриссами внутреннихъ угловъ того треугольника, вершинами котораго будутъ основанія высотъ даннаго треугольника.

Проведемъ въ $\triangle ABC$ (черт. 39) три высоты: AD, BE, CF и соединимъ основанія высотъ т. е. точки D, E, F. Требуется доказать, что въ полученномъ такимъ образомъ тре-кѣ DEF прямыя AD, BE и CF будутъ биссектриссами.

Въ четыреугольникѣ $AFOE$ углы при F и при E прямые, а слѣд. около этого четыреугольника можетъ быть описана окружность. Тоже можно сказать и про четыреугольники $OFBD$ и $ODCE$. Діаметрами этихъ окружностей будутъ соотвѣтственно AO, BO, CO. Описавъ сказанныя окружности, замѣтимъ, что въ окружности описанной около четыреугольника $AFOE$ на дугу, стягиваемую хордой FO опираются углы FEO и FAO, которые вслѣдствіе этого равны.

Также замѣчаемъ, что въ окружности, описанной около четыреугольника $EODC$ на дугу, стягиваемую хордой OD

---

*) Если $\angle A$ прямой или тупой, то нетрудно убѣдиться изъ построенія, что въ случаѣ *равенства* $h_a = \frac{h_b}{Sin \, A}$ тре-къ *невозможенъ*.

опираются углы OED и OCD, которые поэтому равны. Но вслѣдствіе перпендикулярности сторонъ $\angle FAO = \angle OCD$ $(CF \perp AF;\ AO \perp CD)$; поэтому равны углы FEO и DEO.

Подобнымъ же образомъ доказывается равенство и другихъ угловъ.

27. Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей провести сѣкущую данной длины.

Анализъ. Предположимъ, что задача рѣшена и пусть сѣкущая KM (черт. 40), проходящая черезъ точку пересѣченія данныхъ окружностей равна требуемой длинѣ a. Опустивъ изъ центровъ O и C перпендикуляры OD и CE на KM, получаемъ отрѣзокъ $DE = \frac{KM}{2} = \frac{a}{2}$ (такъ какъ D есть середина AK и E — середина AM). Проведя изъ O прямую $OF \parallel KM$ получаемъ прямоугольный $\triangle OFC$, который можно построить, такъ какъ въ немъ извѣстны гипотенуза (OC = разстоянію между центрами данныхъ окружностей) и катетъ $(OF = DE = \frac{a}{2})$.

Построеніе. Соединяемъ центры данныхъ окружностей O и C описываемъ на OC, какъ на діаметрѣ полуокружность и засѣкаемъ на ней изъ точки O (или C) радіусомъ $\frac{a}{2}$ точку F.

Проводимъ прямую OF и черезъ точку пересѣченія данныхъ окружностей A прямую $KM \parallel OF$. Эта прямая и будетъ искомой.

Доказательство. Соединяя точку F съ C, продолжая CF до пересѣченія съ KM въ точкѣ E и опуская изъ O перпендикуляръ OD на KM, замѣчаемъ, что $CF \perp OF$ и слѣд. $CF \perp KM$. Отрѣзокъ DE вслѣдствіе параллельности равенъ $OF = \frac{a}{2}$. Но DE есть половина сѣкущей KM, а потому

$$KM = 2 \cdot \frac{a}{2} = a.$$

Изслѣдованіе. Для возможности рѣшенія задачи необходимо, чтобы OF, какъ катетъ, былъ не больше OC; обозначая разстояніе между центрами данныхъ окружностей буквой d, можемъ это условіе выразить неравенствомъ:

$$\frac{a}{2} \leqslant d, \text{ или } a \leqslant 2d.$$

Кромѣ того a должно быть не меньше чѣмъ наименьшая изъ всѣхъ возможныхъ сѣкущихъ, проходящихъ черезъ точку A, т. е. не меньше AB. Итакъ, условіе возможности напишется такъ:

$$AB \leqslant a \leqslant 2d.$$

Если это условіе соблюдено, то задача возможна и имѣетъ два рѣшенія: KM и LN.

28. Изъ точки данной внѣ круга, провести сѣкущую такъ, чтобы внутренняя часть сѣкущей равнялась ея внѣшней части.

Анализъ. Пусть сѣкущая AB (черт. 41) проведена изъ данной точки A такъ, что $AC = CB$. Задача будетъ рѣшена, если удастся опредѣлить положеніе точки B или точки D, лежащей на другомъ концѣ діаметра BD. Соединивъ точку D съ A и C, замѣтимъ, что въ $\triangle ABD$ прямая DC служитъ одновременно и медіаной (такъ какъ $AC = CB$) и высотой (такъ какъ $\angle DCB$, опираясь на діаметръ BD—прямой). Изъ этого заключаемъ, что $\triangle ABD$ равнобедренный, а потому сторона его $AD = BD =$ діаметру даннаго круга. На основаніи этого производится

построеніе. Изъ данной точки A, радіусомъ равнымъ діаметру даннаго круга, описываемъ дугу, пересѣкающую данную окружность въ точкѣ D. Проводимъ діаметръ DB и соединяемъ точку B съ A. Прямая BA, пересѣкаясь съ окружностью въ точкѣ C, раздѣлится въ этой точкѣ пополамъ.

Доказательство. Соединимъ точку D съ A и C. Тре-къ DBA—равнобедренный по построенію, а потому прямая DC, будучи высотой этого тре-ка ($\angle DCB$—прямой, такъ какъ опирается на діаметръ BD) будетъ въ то же время и медіаной, а потому точка C есть дѣйствительно середина прямой AB, что и треб. доказать.

Изслѣдованіе. Дуга, описанная изъ точки A радіусомъ, равнымъ діаметру $2r$ данной окружности, пересѣчется съ послѣдней, вообще, въ двухъ точкахъ, D и D_1, соотвѣтственно чему задача имѣетъ вообще два рѣшенія: AB и AB_1. Если разстояніе отъ центра O до точки A равно $3r$, то окружность, описанная изъ A, *коснется* данной и задача будетъ имѣть одно рѣшеніе, причемъ какъ внутренняя, такъ и внѣшняя часть сѣкущей, будетъ равна въ этомъ случаѣ $2r$. Если $AO > 3r$—рѣшеній не будетъ ни одного. Итакъ, условіе возможности задачи выражается неравенствомъ $AO \leqslant 3r$ *).

29. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ всѣ хорды, проведенныя изъ одной и той же точки окружности, въ одномъ и томъ же отношеніи, есть окружность.

Возьмемъ на окружности точку A (черт. 42), проведемъ черезъ нее какую нибудь хорду AB и раздѣлимъ ее въ данномъ отношеніи $m:n$ въ точкѣ C. Проведя черезъ ту же точку A діаметръ AD, раздѣлимъ его въ точкѣ E въ томъ же отношеніи $m:n$ и соединимъ E съ C, и D съ B. Треугольники ACE и ABD подобны такъ какъ имѣютъ по общему углу, заключенному между пропорціональными сторонами $AC:AB = m:(m+n)$ и $AE:AD = m:(m+n)$. Изъ подобія тре-ковъ слѣдуетъ равенство угловъ: $\angle ACE = \angle ABD = 90^\circ$ (такъ какъ $\angle ABD$ опирается на діаметръ).

На основаніи этого выводимъ заключеніе, что всякая точка удовлетворяющая искомому геометрическому мѣсту, есть вершина прямоугольнаго тре-ка, гипотенузой котораго служитъ отрѣзокъ діаметра AE, а такъ какъ вершины всѣхъ прямыхъ угловъ, опирающихся на одинъ и тотъ же отрѣзокъ, находятся на окружности, описанной на немъ, какъ на діаметрѣ, то слѣд. искомое геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ отношеніи $m:n$ всѣ хорды, проведенныя изъ одной точки окружности, есть окружность O_1, діаметромъ которой служитъ отрѣзокъ AE, отношеніе котораго къ діаметру данной окружности равно $\frac{m}{m+n}$.

Докажемъ теперь, что дѣйствительно *всякая* точка этой окружности O, принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту.

---

*) Кромѣ того AO должно быть болѣе r, но въ условіи задачи сказано, что точка A лежитъ *внѣ* окружности, т. е. это неравенство соблюдено.

Для этого возьмемъ на окружности O_1 произвольную точку, напр. K, проведемъ хорду KAL и докажемъ, что въ точкѣ K она раздѣлится въ отношеніи $m:n$. Соединяемъ K съ E и L съ D.

Прямыя EK и DL параллельны между собой, какъ перпендикуляры къ одной и той же прямой AL; на основаніи теоремы: двѣ параллельныя прямыя отсѣкаютъ отъ сторонъ угла пропорціональныя части, можемъ написать:

$$AK:KL = AE:DE = m:n.$$

Итакъ, $AK:KL = m:n$, что и треб. док.

Замѣчаніе. На основаніи выведенной теоремы заключаемъ, что *геометрическое мѣсто срединъ всѣхъ хордъ, исходящихъ изъ одной точки A окружности O, есть окружность описанная на радіусѣ AO, какъ на діаметрѣ.*

30. Построить треугольникъ по основанію, углу при вершинѣ и медіанѣ одной изъ двухъ другихъ сторонъ.

Дано: a; $\angle A$; m_b. *(Мет. геом. мѣстъ).*

Анализъ. Допустимъ, что задача рѣшена и что $\triangle ABC$ (черт. 43) есть искомый. Такъ какъ въ $\triangle ABC$ извѣстно основаніе $BC = a$ и уголъ при вершинѣ, то описавъ на данномъ отрѣзкѣ a дугу, вмѣщающую данный уголъ A, получимъ одно геометрическое мѣсто для вершины A (*Г. М.* № VII). Если точка D есть середина стороны AC, то во первыхъ D должно отстоять отъ B на разстояніи $BD = m_b$ (*Г. М.* № I), во вторыхъ, точка D, какъ середина хорды CA, проведенной изъ точки C должна находиться на геометрическомъ мѣстѣ срединъ всѣхъ хордъ, проведенныхъ изъ A, т. е. на окружности, описанной на радіусѣ CO, какъ на діаметрѣ *). Эти два соображенія даютъ возможность опредѣлить положеніе точки D, послѣ чего, проведя прямую CD, получимъ въ пересѣченіи ея съ окружностью O вершину A.

Построеніе. На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ $BC = a$ и описываемъ на немъ дугу, вмѣщающую данный уголъ A. Соединяемъ точку C съ центромъ O этой дуги

---

*) См. примѣчаніе въ предыд. задачѣ.

и на линіи CO, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность K. Изъ точки B, радіусомъ, равнымъ m_b засѣкаемъ эту окружность K въ точкѣ D. Соединяемъ D съ C и продолжаемъ CD до пересѣченія съ окружностью O въ точкѣ A. Треугольникъ ABC—искомый.

Доказательство. Соединимъ точку D съ B и съ O. Въ $\triangle ABC$ сторона $BC=a$ и $\angle BAC=\angle A$ по построенію. Прямая BD равна по длинѣ m_b; остается только доказать, что она есть *дѣйствительно медіана*, т. е. что точка D есть середина стороны CA. Но въ $\triangle DOC$ уголъ ODC опирается на діаметръ OC, слѣд. $OD \perp AC$, а перпендикуляръ, опущенный на хорду (AC) изъ центра (O) дѣлитъ хорду пополамъ, т. е. D есть дѣйствительно середина хорды AC.

Изслѣдованіе. Для возможности задачи необходимо, чтобы дуга, описанная изъ точки B радіусомъ m_b пересѣклась (или хотя коснулась) съ окружностью K, а для этого, какъ извѣстно изъ геометріи *) необходимо, чтобы разстояніе между центрами этихъ окружностей (т. е. между точками B и K) было не больше суммы и не меньше разности радіусовъ этихъ окружностей. Такъ какъ радіусъ окружности, описанной изъ точки B равенъ m_b, а радіусъ окружности, описанной изъ K равенъ $\frac{R}{2}$ **), то условіе возможности задачи можно выразить неравенствомъ:

$$m_b-\frac{R}{2}\leqslant BK\leqslant m_b+\frac{R}{2}\cdot \qquad (1).$$

Если это неравенство соблюдено, то задача возможна и имѣетъ или одно, или два рѣшенія, причемъ надо имѣть въ виду, что второе рѣшеніе годится только тогда, если обѣ точки пересѣченія дуги, описанной изъ B радіусомъ m_b будутъ лежать *выше* прямой BC, потому что, если вторая точка пересѣченія D, лежитъ ниже BC, то полученный тре-къ будетъ содержать не $\angle A$, а уголъ 180^0-A.

Примѣчаніе. Неравенство (1), выражающее условіе возможности задачи, можно преобразовать такъ, чтобы оно зависѣло только отъ

*) См. Геометрія Киселева § 138.

**) Буквой R обозначенъ радіусъ окружности O, описанной около $\triangle ABC$.

данныхъ величинъ a, A, m_b и не содержало R и BK—величинъ, опредѣляемыхъ изъ построенія. Для этого замѣчаемъ, что $R=\frac{a}{2\ Sin\ A}$ а величину BK можно опредѣлить изъ слѣдующихъ соображеній:

На основаніи теоремы: произведеніе всей сѣкущей на ея внѣшнюю часть есть величина (для одной и той же окружности) постоянная, пишемъ:

$$BL\ .\ BF = BE\ .\ BC, \text{ или}$$

$$\left(BK-\frac{R}{4}\right)\cdot\left(BK+\frac{R}{4}\right)=\frac{a}{2}\ a,$$

откуда $$BK^2-\frac{R^2}{16}=\frac{a^2}{2},$$

а слѣд. $BK=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{R^2}{16}}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{64 Sin^2 A}}=\frac{a}{8 Sin A}\ \sqrt{32 Sin^2 A+1}$

Такимъ образомъ входящія въ неравенство (1) величины R и BK могутъ быть опредѣлены не только графически, но и при помощи вычисленія.

Другой способъ рѣшенія. Продолжая медіану BD (черт. 44) до точки E, такъ что $DE=BD=m_b$, соединяя D съ A и C, замѣчаемъ, что $\angle ACE=\angle BAC=\angle A$, а потому точка C находится на дугѣ DCE описанной на DE и вмѣщающей $\angle A$ (*Г. М.* № VII) и на дугѣ описанной изъ B радіусомъ a (*Г. М.* № I). Поэтому построеніе производится такъ:

На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ $BE=2m_b$, дѣлимъ его въ точкѣ D пополамъ и на DE описываемъ дугу, вмѣщающую $\angle A$, а изъ точки B засѣкаемъ эту дугу радіусомъ, равнымъ a въ точкѣ C. Проводимъ прямую CD и откладываемъ на ея продолженіи отрѣзокъ $AD=DC$. Тре-къ ABC—искомый.

31. Черезъ данную точку провести сѣкущую къ сторонамъ даннаго угла такъ, чтобы отношеніе отрѣзковъ сѣкущей, заключенныхъ между данной точкой и точками пересѣченія проведенной сѣкущей со сторонами угла, было бы равно отношенію двухъ заданныхъ отрѣзковъ.

При рѣшеніи этой задачи разсмотримъ два случая:

I. Точка A находится внутри даннаго угла KML и

II.—внѣ его.

I. **Анализъ**. Предположимъ, что задача рѣшена и что прямая BC (черт. 45), дѣлится въ данной точкѣ A такимъ образомъ, что отношеніе $AB : AC$ равно отношенію заданныхъ отрѣзковъ $m : n$.

Проведя черезъ A прямую $AD \parallel ML$, замѣчаемъ, что

$$BD : DM = AB : AC = m : n.$$

Но отрѣзокъ DM извѣстенъ *), а потому DB найдется какъ четвертая пропорціональная къ тремъ даннымъ отрѣзкамъ MD, m, n.

Построеніе. Проводимъ изъ данной точки A прямую, параллельную одной изъ сторонъ даннаго угла напр. ML до пересѣченія ея съ другой стороной угла въ точкѣ D. Откладываемъ на сторонѣ угла ML отрѣзки $ME = n$ и $EF = m$, соединяемъ E съ D, и проводимъ изъ F прямую параллельно DE, пересѣкающую MK въ точкѣ B. Прямая BA—искомая.

Доказательство. Такъ какъ по построенію $BF \parallel DE$, то $BD : DM = FE : ME = m : n$. Кромѣ того, вслѣдствіе параллельности прямыхъ AD и ML имѣемъ:

$$AB : AC = BD : DM = m : n,$$

что и треб. доказать.

II. **Анализъ**. Если прямая ABC (черт. 46)—искомая, то проведя $AD \parallel KM$ до пересѣченія съ продолженіемъ ML въ точкѣ D, имѣемъ:

$$DM : DC = AB : AC = m : n.$$

Но отрѣзокъ DM получается непосредственно изъ чертежа, а DC можетъ быть опредѣлено, какъ четвертая пропорціональная къ тремъ даннымъ отрѣзкамъ: DM, m, n.

Построеніе. Изъ данной точки A проводимъ прямую $\parallel KM$ до пересѣченія съ продолженіемъ прямой ML въ точкѣ D. Проводимъ черезъ D къ DL прямую подъ произвольнымъ угломъ и откладываемъ на ней отрѣзки $DE = m$ и $DF = n$. Соединяемъ E съ M и изъ F проводимъ $FC \parallel EM$. Прямая, соединяющая точку C съ A есть искомая.

---

*) Онъ опредѣляется непосредственно изъ чертежа проведеніемъ изъ A прямой, параллельной LM.

Доказательство. Такъ какъ $FC \parallel EM$, то

$$DM : DC = DE : DF = m : n.$$

Кромѣ того, вслѣдствіе параллельности AD и KM:

$$AB : AC = DM : DC = m : n,$$

что и треб. доказать.

Изслѣдованіе, общее для обоихъ случаевъ. Если только данная точка A не находится на одной изъ сторонъ даннаго угла KML, то задача всегда возможна и имѣетъ два рѣшенія, причемъ второе рѣшеніе получится, если изъ A проводить прямую AD параллельно *другой* сторонѣ угла (т. е. сторонѣ MK въ первомъ случаѣ и сторонѣ ML во второмъ).

32. Доказать, что линія, соединяющая точку пересѣченія непараллельныхъ сторонъ трапеціи съ точкою пересѣченія ея діагоналей, дѣлитъ параллельныя стороны трапеціи пополамъ.

Продолжаемъ непараллельныя стороны AB и CD (черт. 47) трапеціи $ABCD$ до пересѣченія ихъ къ точкѣ K и соединяемъ K съ O, точкой пересѣченія діагоналей. Требуется доказать, что прямая KO раздѣлитъ BC и AD пополамъ, т. е. что $BE = CE$ и $AF = DF$.

Проводимъ черезъ точку O прямую GH, параллельную основаніямъ трапеціи.

Изъ подобія тре-ковъ AGO и ABC имѣемъ.

$$\frac{GO}{BC} = \frac{AG}{AB} \tag{1}$$

Изъ подобія тре-ковъ DHO и DCB:

$$\frac{OH}{BC} = \frac{DH}{DC} \tag{2}$$

Но отношенія $\frac{AG}{AB}$ и $\frac{DH}{DC}$ равны между собою *), поэтому изъ равенства (1) и (2) слѣдуетъ:

$$\frac{GO}{BC} = \frac{OH}{BC},$$

откуда $GO = OH$, т. е. прямая KO есть медіана $\triangle GKH$.

---

*) Такъ какъ двѣ прямыя AB и CD пересѣчены тремя параллелями BC, GH, AD.

Каждый изъ тре-ковъ AKD и BKC подобенъ тре-ку GKH, а потому KF дѣлитъ каждую изъ прямыхъ AD и BC въ точкахъ F и E въ такомъ же отношеніи, какъ и прямую GH въ точкѣ O, т. е. пополамъ, что и треб. доказать.

33. Если три высоты одного треугольника пропорціональны тремъ высотамъ другого треугольника, то треугольники подобны.

Дано: $\frac{h_a}{h'_a} = \frac{h_b}{h'_b} = \frac{h_c}{h'_c}$.

Площади двухъ треугольниковъ относятся какъ произведенія основанія на высоту. Поэтому, если обозначить въ $\triangle ABC$ стороны буквами a, b, c высоты h_a, h_b, h_c и площадь S, а въ $\triangle A_1B_1C_1$ стороны a_1, b_1, c_1, а высоты h'_a, h'_b, h'_c и площадь S_1, то можно написать:

$$\frac{a \,.\, h_a}{a_1 \,.\, h'_a} = \frac{S}{S_1}\,; \quad \frac{b \,.\, h_b}{b_1 \,.\, h'_b} = \frac{S}{S_1}\,; \quad \frac{c \,.\, h_c}{c_1 \,.\, h'_c} = \frac{S}{S_1}\,,$$

откуда

$$\frac{ah_a}{a_1h'_a} = \frac{bh_b}{b_1h'_b} = \frac{ch_c}{c_1h'_c}\,,$$

а принимая во вниманіе данное равенство $\frac{h_a}{h'_a} = \frac{h_b}{h'_b} = \frac{h_c}{h'_c}$,

получаемъ: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

Слѣдовательно стороны тре-ковъ ABC и $A_1B_1C_1$ пропорціональны, а потому эти тре-ки подобны, что и треб. доказать.

34. Если двѣ стороны и биссектрисса угла между ними одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ и биссектриссѣ угла между ними другого треугольника, то треугольники равны.

Въ $\triangle\triangle$ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 48) *дано*: $a=a_1$; $b=b_1$; $\beta c=\beta' c$.
Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$?

На основаніи теоремы: „*Произведеніе двухъ сторонъ треугольника равно квадрату биссектриссы угла, заключеннаго между этими сторонами, плюсъ произведеніе отрѣзковъ третьей стороны* (Киселевъ § 220) имѣемъ изъ данныхъ тре-ковъ

$AC\,.\,BC = CD^2 + AD\,.\,BD$, откуда $\beta_C^2 = b\,.\,a - AD\,.\,BD$ (1)

$A_1C_1\,.\,B_1C_1 = C_1D_1{}^2 + A_1D_1\,.\,B_1D_1$, откуда $\beta'^2_C = b_1a_1 - A_1D_1\,.\,B_1D_1$ (2)

Но изъ пропорціи

$$\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}\,;\quad \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{b_1}{a_1}$$

имѣемъ $AD = BD\,.\,\frac{b}{a}$; $A_1D_1 = B_1D_1\,.\,\frac{b_1}{a_1}$;

подставляя эти значенія въ равенства (1) и (2), получимъ:

$$\beta_C^2 = a\,.\,b - BD^2\,.\,\frac{b}{a}$$

$$\beta'^2_C = a_1b_1 - B_1D_1{}^2\,.\,\frac{b_1}{a_1}.$$

Изъ этихъ равенствъ, на основаніи даннаго условія $a = a_1$; $b = b_1$; $\beta_C = \beta'_C$, заключаемъ, что

$$BD = B_1D_1.$$

Слѣд. всѣ три стороны тре-ка CDB соотвѣтственно равны тремъ сторонамъ $\triangle\, C_1D_1B_1$, а потому тре-ки эти равны; слѣд. $\angle\, DCB = \frac{C}{2} = \angle\, D_1C_1B_1 = \frac{C_1}{2}$, а потому $\angle\, C = \angle\, C_1$. Теперь очевидно, что тре-ки ABC и $A_1B_1C_1$ равны, такъ какъ они имѣютъ по равному углу, заключенному между равными сторонами.

35. Найти точку, изъ которой три отрѣзка данной прямой AB, BC и CD были бы видны подъ равными углами.

(Мет. геом. мѣстъ).

Искомая точка X (черт. 49), изъ которой отрѣзки AB, BC, CD будутъ видны подъ равными углами должна находиться на пересѣченіи двухъ Аполоніевыхъ окружностей: одной, разстояніе точекъ которой до A и C относится какъ $AB : BC$ и другой, точки которой отстоятъ отъ B и D въ отношеніи $BC : CD$.

Построеніе. Строимъ по извѣстнымъ правиламъ Аполоніеву окружность, у которой отношеніе разстояній до точекъ A и C было бы равно $AB : BC$ и другую Аполоніеву окружность, у которой отношеніе разстояній до точекъ B и D было бы равно $BC : CD$. Точка пересѣченія этихъ двухъ окружностей X и будетъ искомой.

Доказательство. Соединивъ X съ A, B, C, D, разсмотримъ $\triangle AXC$. Въ немъ по свойству Аполоніевой окружности $AX : CX = AB : BC$, откуда видно, что BX есть биссектрисса $\angle AXC$, т. е.

$$\angle AXB = \angle BXC. \tag{1}$$

Также въ $\triangle BXD$ по свойству Аполоніевой окружности $BX : DX = BC : CD$, откуда видно, что CX есть биссектрисса $\angle BXD$, т. е.

$$\angle BXC = \angle DXC \tag{2}$$

Изъ равенствъ (1) и (2) слѣдуетъ, что

$$\angle AXB = \angle BXC = \angle DXC$$

т. е. что изъ точки A отрѣзки AB, BC, CD видны подъ равными углами.

Изслѣдованіе. Для возможности рѣшенія задачи необходимо и достаточно, чтобы двѣ Аполоніевы окружности пересѣклись между собой. Изъ чертежа нетрудно вывести, что Апол. окр., отношеніе разстояній точекъ которой до двухъ данныхъ точекъ A и C равно $AB : BC$ *), (причемъ точка B находится между A и C) располагается всегда такъ, что *покрываетъ* меньшій изъ отрѣзковъ AB и BC; другими словами изъ двухъ смежныхъ отрѣзковъ AB и BC одной прямой AC, меньшій изъ отрѣзковъ составляетъ *часть* діаметра Апол. окр., а большій—составляетъ *продолженіе* діаметра.

---

*) Можно сказать еще такъ: если изъ двухъ смежныхъ отрѣзковъ AB и BC лѣвый отрѣзокъ (AB) больше праваго (BC) то Ап. окр. пойдетъ отъ точки B *вправо*. Если же правый отрѣзокъ больше лѣваго, то Апол. окр. отъ точки B пойдетъ *влѣво*.

Изъ этого мы можемъ заключить, что если средній изъ трехъ данныхъ отрѣзковъ (BC) меньше каждаго изъ крайнихъ, то изъ двухъ Апол. окружностей одна пойдетъ непремѣнно влѣво отъ точки C, а другая вправо отъ точки B и потому эти окружности непремѣнно пересѣкутся въ какихъ нибудь двухъ точкахъ X и X_1 (лежащихъ по разныя стороны отъ данной прямой) и слѣд. задача въ этомъ случаѣ будетъ имѣть два рѣшенія.

Если средній отрѣзокъ больше каждаго изъ крайнихъ, то одна изъ Апол. окружностей пойдетъ вправо отъ точки C, а другая влѣво отъ точки B и потому нигдѣ не пересѣкутся.

Если средній отрѣзокъ меньше одного изъ крайнихъ и равенъ другому (напр. $AB>BC$; $DC=BC$), то задача имѣетъ 2 рѣшенія: точки X и X' найдутся въ пересѣченіи Апол. окр., расположенной вправо отъ точки B съ перпендикуляромъ возставленнымъ въ точкѣ C къ прямой DC.

Если всѣ три отрѣзка AB, BC и CD равны между собой то рѣшеній не будетъ, такъ какъ Апол. окр. обращаются въ этомъ случаѣ въ перпендикуляры, возставленные въ точкахъ B и C къ одной и той же прямой, а потому параллельные.

Наконецъ, въ томъ случаѣ, если средній отрѣзокъ BC меньше одного изъ крайнихъ, напр. AB, но больше другого (CD), то задача можетъ или имѣть два рѣшенія, или не имѣть ни одного изъ нихъ: все зависитъ отъ того, какъ расположатся BE и CF Аполоніевыхъ окружностей относительно другъ друга: если оба конца одного діаметра будутъ *между* двумя концами другого діаметра, то окружности будутъ лежать одна внутри другой, а слѣд. не пересѣкутся. Если же одинъ конецъ одной окружности будетъ лежать *между* двумя концами другого діаметра, а другой конецъ его же будетъ находиться *внѣ* второго діаметра, то окружности пересѣкутся въ двухъ точкахъ и задача будетъ имѣть два рѣшенія.

36. Вписать квадратъ въ данный секторъ такъ, чтобы двѣ изъ его вершинъ лежали на дугѣ, а двѣ другія на радіусахъ.

Анализъ. Предположимъ, что задача рѣшена и что квадратъ $KLMN$ (черт. 50) вписанъ въ данный секторъ AOB.

Соединяя центръ O съ вершиной квадрата L, опуская перпендикуляръ OS на KL и проводя изъ произвольной точки E прямой OL прямую $EF \parallel KL$, $ED \parallel LM$ и $DC \parallel EF$ замѣчаемъ, что вслѣдствіе подобія тре-ковъ OFE и OPL

$$FE : PL = OE : OL \tag{1}$$

и изъ подобія тре-ковъ ODE и OML:

$$DE : ML = OE : OL. \tag{2}$$

Изъ пропорцій (1) и (2) слѣдуетъ:

$$FE : PL = DE : ML,$$

или, переставляя средніе члены:

$$FE : DE = PL : ML = 1 : 2,$$

т. е.

$$FE = CD = \tfrac{1}{2} DE$$

Изъ этого слѣдуетъ, что если въ произвольной точкѣ C прямой OP возставить перпендикуляръ CD, а въ точкѣ D возставить $DE \perp CD$ и отложить отрѣзокъ $DE = 2\,CD$, то прямая OE пересѣчетъ дугу сектора въ точкѣ, которая будетъ одной изъ вершинъ квадрата.

Построеніе. Дѣлимъ пополамъ прямой OS уголъ AOB, образуемый радіусами сектора. Въ произвольной точкѣ этой прямой возставляемъ къ ней перпендикуляръ CD до пересѣченія съ OB, а въ точкѣ D возставляемъ перпендикуляръ къ CD и откладываемъ на немъ отрѣзокъ $DE = 2CD$.

Соединяемъ точки O и E и продолжаемъ прямую OE до пересѣченія съ дугою сектора въ точкѣ L. Изъ L проводимъ $LM \parallel OS$ и $LK \perp OS$; изъ K проводимъ $KN \parallel OS$ и соединяемъ точки M и N. Фигура $KLMN$ есть требуемый квадратъ.

Доказательство. Такъ какъ радіусъ OS перпендикуляренъ къ хордѣ KL, то $KP = PL$. Проведя $EF \parallel KL$, имѣемъ изъ подобія тре-ковъ OFE и OPL:

$$PL : FE = OL : OE.$$

Изъ подобія тре-ковъ OED и OLM:

$$OL : OE = LM : ED \text{ и слѣд.}$$

$$PL : FE = ML : DE$$

откуда, переставляя средніе члены и замѣняя FE равной величиной CD, получаемъ:

$$PL : ML = CD : DE = 1 : 2 \text{ (по построенію)}$$

а слѣд. $PL=\frac{1}{2}ML$, а такъ какъ PL есть половина KL, то $KL=ML$. Соединяя O съ K замѣчаемъ, что $\triangle ONK=\triangle OLM$ ($OK = OF$, какъ радіусы; $\angle OKN = \angle OLM$, такъ какъ каждый изъ нихъ дополняетъ до 90° равные углы OKL и OLK; $\angle NOK = \angle MOL$, такъ какъ каждый изъ нихъ дополняется до половины $\angle AOB$ и $\angle LOK$).

Изъ равенства этихъ тре-ковъ слѣдуетъ, что $NK=LM$.

Слѣдовательно четыреугольникъ $KLMN$, имѣя три стороны равными ($NK=ML=KL$) и два угла заключенные между равными сторонами ($\angle NKL$ и $\angle MLK$) по построенію прямые—есть квадратъ.

Изслѣдованіе. По мѣрѣ увеличенія угла AOB, образуемаго радіусами сектора AO и BO, сторона вписаннаго квадрата KL будетъ все время увеличиваться до тѣхъ поръ, пока не достигнетъ своего наибольшаго возможнаго значенія, т. е. пока не сдѣлается равной $R\sqrt{2}$ гдѣ $R=AO$. Это будетъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, когда $\angle AOB$ будетъ равенъ 270° и тогда сторона квадрата будетъ равна разстоянію между A и B. При дальнѣйшемъ увеличеніи $\angle AOB$ задача сдѣлается невозможной.

Итакъ, задача возможна и имѣетъ одно рѣшеніе, если $\angle AOB$ не превышаетъ 270°.

37. Вписать квадратъ въ данный сегментъ такъ, чтобы двѣ изъ его вершинъ лежали на хордѣ, а двѣ другія на дугѣ.

Анализъ. Допустимъ, что задача рѣшена и что $KLMN$ (чер. 51) есть квадратъ, вписанный въ данный сегментъ $AKLB$. Опустивъ изъ центра O дуги $AKLB$ перпендикуляръ OCE на KL и соединивъ точки C и L, опускаемъ изъ произвольной точки F прямой CL перпендикуляръ FH на AB. Изъ подобія тре-ковъ CEH и CLM имѣемъ:

$$FH : LM = CF : CL \qquad (1)$$

Проведя $FG \parallel KL$, получаемъ изъ подобія тре-ковъ CGF и CEL.

$$GF : EL = CF : CL. \qquad (2)$$

Изъ пропорцій (1) и (2) получаемъ:

$$FH : LM = GF : EL.$$

Переставляя въ получившейся пропорціи средніе члены и замѣняя GF равной величиной CH, получаемъ:

$$FH : CH = LM : EL = 2 : 1,$$

откуда $$FH = 2CH.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что если отложить на прямой AB отъ точки C произвольный отрѣзокъ CH, а на перпендикулярѣ къ AB въ точкѣ H отрѣзокъ HF вдвое больше CH, то прямая, соединяющая точки C и F въ пересѣченіи съ дугой сегмента опредѣлитъ положеніе одной изъ вершинъ искомаго квадрата.

Построеніе. Изъ центра O даннаго сегмента опускаемъ на AB перпендикуляръ OC и откладываемъ отъ C на AB произвольный отрѣзокъ CH. Въ точкѣ H возставляемъ къ AB перпендикуляръ и откладываемъ на немъ отрѣзокъ $HF = 2CH$. Соединяемъ C съ F и продолжаемъ CF до пересѣченія съ дугою сегмента въ точкѣ L. Изъ L опускаемъ на AB перпендикуляръ LM и проводимъ $LK \parallel AB$. Изъ K опускаемъ на AB перпендикуляръ KN. Получившійся такимъ образомъ четыреугольникъ $KLMN$ есть искомый квадратъ.

Доказательство. Проводимъ $FG \parallel AB$.
Изъ подобія тре-ковъ CGF и CEL имѣемъ:

$$EL : GF = CL : CF. \tag{1}$$

Изъ подобія тре-ковъ CFH и CLM имѣемъ:

$$LM : FH = CL : CF. \tag{2}$$

Изъ равенства (1) и (2) слѣдуетъ:

$$EL : GF = LM : FH$$

Перемѣняя мѣстами средніе члены и замѣчая, что $GF = CH$, получаемъ:

$$EL : LM = CH : FH = 1 : 2 \text{ (по построенію)}$$

откуда $EL = \frac{1}{2} LM.$

Но E есть середина хорды KL (такъ какъ радіусъ OE перпендикуляренъ къ KL), а потому изъ равенства $EL = \frac{1}{2} LM$. слѣдуетъ

$$KL = LM.$$

Соединяя K съ C, замѣчаемъ, что $\triangle CKN = \triangle CLM$ ($CK = CL$; $\angle CKL = \angle CLK$), а слѣд.

$$NK = LM = KL.$$

Итакъ, въ четыреугольникѣ $KLMN$ всѣ стороны равны между собой и всѣ углы прямые, а потому $KLMN$ есть квадратъ.

Изслѣдованіе. По мѣрѣ увеличенія дуги $AKLB$ сторона вписаннаго въ сегментъ квадрата будетъ увеличиваться до тѣхъ поръ, пока не достигнетъ наибольшаго возможнаго значенія, равнаго $R\sqrt{2}$, что будетъ имѣть мѣсто тогда, когда дуга $AKLB$ сдѣлается равной $\frac{3}{4}$ окружности. При дальнѣйшемъ увеличеніи дуги задача сдѣлается невозможной.

Итакъ, задача возможна и имѣетъ одно рѣшеніе въ томъ случаѣ, если дуга $AKLB$ содержитъ не болѣе 270 дуговыхъ градусовъ.

38. По данной сторонѣ правильнаго пятиугольника построить самый многоугольникъ.

(Мет. под.).

Анализъ. Такъ какъ всѣ правильные пятиугольники подобны между собой, то построивъ произвольный правильный пятиугольникъ, легко перейдемъ къ требуемому, т. е. имѣющему днаную сторону a. Простѣйшій же способъ построенія правильнаго пятиугольника съ произвольной стороной состоитъ въ томъ, что строятъ правильный десятиугольникъ и соединяютъ его вершины *черезъ одну*.

Построеніе. Чертимъ окружность O (черт. 52) произвольнаго радіуса, вписываемъ въ нее по извѣстнымъ правиламъ правильный десятиугольникъ $ABCDEFGHIK$ и соединяемъ вершины его *черезъ одну*. Получаемъ такимъ образомъ правильный пятиугольникъ $ACEGI$. Изъ какой нибудь вершины, напр. A, проводимъ діагонали AC и AG и на сторонѣ AC откладываемъ AC_1 равную данной сторонѣ a.

Проводимъ $C_1E_1 \parallel CE$ до пересѣченія съ діагональю AE въ точкѣ E_1, $E_1G_1 \parallel EG$ до пересѣченія съ діагональю AG въ точкѣ G_1 и $G_1I_1 \parallel GI$ до пересѣченія съ продолженіемъ стороны AI въ точкѣ I_1.

Полученная фигура $AC_1E_1G_1I_1$ есть искомый правильный пятиугольникъ съ данной стороной a.

Доказательство. Пятиугольникъ $AC_1E_1G_1I_1$ подобенъ $ACEGI$ такъ какъ фигуры эти разбиваются діагоналями, проведенными изъ точки A на подобные и одинаково расположенные тре-ки. Но пятиугольникъ $ACEGI$ правильный по построенію а потому и $AC_1E_1G_1I_1$ есть пятиугольникъ правильный, и всѣ стороны его равны сторонѣ $AC_1=a$ по построенію.

Изслѣдованіе. Задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе.

39. Найти въ треугольникѣ такую точку, чтобы перпендикуляры, опущенныя изъ нея на стороны, находились въ данномъ отношеніи $m:n:p$.

Анализъ. Извѣстно, что геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ до сторонъ даннаго угла находятся въ постоянномъ отношеніи $m:n$, есть прямая проходящая черезъ вершину угла и одну изъ точекъ, удовлетворяющихъ требуемому условію *). Слѣдовательно искомая точка X (чер. 53) найдется на пересѣченіи двухъ геометрическихъ мѣстъ: 1) геом. мѣста точекъ, отношенія разстояній которыхъ до прямыхъ AC и AB равно $m:n$ и 2) геом. мѣста точекъ, отношенія разстояній которыхъ до прямыхъ AC и BC равно $m:p$.

Построеніе. Проводимъ прямыя $A_1C_1 \parallel AC$ на разстояніи m; $A_1B_1 \parallel AB$ на разстояніи n, и $B_1C_1 \parallel BC$ на разстояніи p **). Соединяя A_1 съ A и C_1 съ C, получимъ въ пересѣченіи прямыхъ AA_1 и CC_1 искомую точку X.

Доказательство. Такъ какъ точка A_1 отстоитъ на разстояніи m отъ прямой AC и n отъ AB, то прямая A_1A, проходящая черезъ вершину угла A и точку A_1, есть геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ до сторонъ угла A, т. е. до прямыхъ AC и AB находятся въ постоянномъ отношеніи $m:n$. Также прямая C_1C, проходя черезъ вершину C и точку

*) См. «Геометрическое мѣсто № X» стр. 10.

**) Если m, n, p даны не какъ нѣкоторые отрѣзки, а въ числахъ, то параллели A_1C_1, A_1B_1, B_1C_1 проводятъ на разстояніяхъ, пропорціональныхъ числамъ m, n, p.

C_1, отстоящую на разстояніи m отъ AC и p отъ BC, есть геом. мѣсто точекъ, разстояніе которыхъ до прямыхъ AC и BC находится въ постоянномъ отношеніи $m : p$.

Если изъ точки X опустимъ перпендикуляры XD, XE, XF на стороны $\triangle ABC$, то имѣемъ:

$$XD : XE = m : n, \qquad (1)$$

такъ какъ X лежитъ на геометр. мѣстѣ A_1A; также

$$XD : XF = m : p, \qquad (2)$$

такъ какъ X лежитъ на геометр. мѣстѣ C_1C.

Изъ (1) и (2), получаемъ:

$$XD : XE : XF = m : n : p,$$

что и треб. доказать.

Изслѣдованіе. Задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе, если только данные отрѣзки (или числа) m, n, p имѣютъ конечную величину, причемъ *одинъ изъ нихъ* можетъ быть даже равенъ нулю.

40. **Въ данный кругъ вписать прямоугольникъ съ данной площадью a^2.**

Анализъ. Допустимъ, что задача рѣшена и что прямоугольникъ $ABCD$ (чер. 54)—искомый. Опустимъ перпендикуляръ AE изъ его вершины A на діагональ BD (служащую очевидно діаметромъ даннаго круга O).

Обозначая длину перпенд. AE буквой x, имѣемъ *площ.* $ABCD = 2\triangle ABD = BD \,.\, AE = 2\,Rx = a^2$ (по условію), отсюда $x = \frac{a^2}{2R}$, или $x : a = \frac{a}{2} : R$, т. е. x можетъ быть опредѣлено построеніемъ четвертой пропорціональной къ тремъ извѣстнымъ отрѣзкамъ: R, a $\frac{a}{2}$ (гдѣ a есть сторона квадрата, равновеликаго прямоугольнику $ABCD$).

Построеніе. Опредѣляемъ при помощи извѣстнаго изъ геометріи (Кисел. § 196) построенія четвертую пропорціональную къ даннымъ отрѣзкамъ R, a, $\frac{a}{2}$, проводимъ въ данной окружности O произвольный діаметръ, напр. BD и возставляемъ въ любой точкѣ его напр. въ центрѣ O перпендикуляръ, на которомъ откладываемъ отрѣзокъ OF, равный найденной четвертой пропорціональной. Проводимъ черезъ F прямую, параллельную діаметру BD и пересѣкающую окружность въ точкѣ A (A_1). Соединяемъ A съ B и D и проводимъ $BC \parallel AD$ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ C; соединяемъ C съ D. Прямоугольникъ $ABCD$—искомый.

Доказательство. Площадь прямоугольника $ABCD =$ удвоенной площади тре-ка $ABD = BD \,.\, AE = 2R \,.\, \frac{a^2}{2R} = a^2$, что и треб. док.

Изслѣдованіе. Для возможности задачи необходимо и достаточно, чтобы прямая, проведенная черезъ точку F параллельно діаметру BD пересѣклась (или коснулась) съ окружностью; условіе это будетъ непремѣнно выполнено, если $OF \leqslant R$, а такъ какъ $OF = \frac{a^2}{2R}$, то условіе возможности задачи можно выразить неравенствомъ:

$$\frac{a^2}{2R} \leqslant R, \text{ или } a^2 \leqslant 2R^2.$$

Но $a^2 = (R\sqrt{2})^2 =$ площади квадрата, вписаннаго въ данный кругъ; поэтому условіе возможности задачи состоитъ въ томъ чтобы заданная площадь a^2 была не больше площади квадрата, вписаннаго въ данную окружность *).

Если это условіе соблюдено, то задача возможна и имѣетъ одно рѣшеніе. Вторая точка пересѣченія A_1 даетъ тотъ же прямоугольникъ $ABCD$ только иначе расположенный.

41. Если площади двухъ равнобедренныхъ треугольниковъ относятся какъ квадраты ихъ основаній, то треугольники подобны.

Въ тре-кахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 55) дано:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{BC^2}{B_1C_1{}^2}. \qquad (1)$$

---

*) Это условіе можно было предвидѣть до рѣшенія задачи, такъ какъ извѣстно, что изъ всѣхъ, вписанныхъ въ одну и ту же окружность прямоугольниковъ, наибольшую площадь имѣетъ квадратъ.

Требуется доказать, что эти тре-ки подобны.

Изъ геометріи извѣстно, что площади двухъ тре-ковъ относятся какъ произведенія основаній на высоты. Слѣд. проведя высоты AD и A_1D_1, имѣемъ:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{BC\,.\,AD}{B_1C_1\,.\,A_1D_1} \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), получаемъ:

$$\frac{BC^2}{B_1C_1{}^2}=\frac{BC\,.\,AD}{B_1C_1\,.\,A_1D_1}, \text{ или } \frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AD}{A_1D_1}. \qquad (3)$$

Изъ равенства (3) получимъ:

$$\frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}B_1C_1}=\frac{AD}{A_1D_1} \text{ или } \frac{BD}{B_1D_1}=\frac{AD}{A_1D_1},$$

откуда слѣдуетъ, что прямоугольные тре-ки ABD и $A_1B_1D_1$ подобны, т. е. $\angle B=\angle B_1$, а слѣд. подобны и равнобедренные тре-ки ABC и $A_1B_1C_1$, что и треб. доказать.

42. Раздѣлить параллелограммъ на три равновеликія части прямыми, исходящими изъ его вершины.

Анализъ. Допустимъ, что задача рѣшена и пусть прямыя BF и BE (черт. 56) дѣлятъ данный параллелограммъ на три равновеликія части, такъ что

$$\triangle BAE \equiv \triangle BCF \equiv \text{четыреуг. } BFDE \equiv \tfrac{1}{3}ABCD.$$

Проведя діагональ BD, имѣемъ:

$$\frac{\triangle BAE}{\triangle BAD}=\frac{\frac{1}{3}ABCD}{\frac{1}{2}ABCD}=\frac{2}{3}.$$

Но тре-ки BAE и BAD, имѣющіе общую высоту, относятся, какъ основанія, а потому

$$\frac{AE}{AD}=\frac{2}{3}, \text{ т. е. } AE=\frac{2}{3}AD.$$

Подобнымъ же образомъ разсмотрѣвъ $\triangle\triangle\ BCF$ и BCD, найдемъ, что $CF=\frac{2}{3}CD$, а слѣд. положеніе точекъ E и F можетъ быть опредѣлено.

Построеніе. Дѣлимъ сторону AD даннаго параллелограмма въ точкѣ E въ отношеніи $2:1$ такъ что $AE = \frac{2}{3} AD$; также сторону CD дѣлимъ точкою F въ томъ же отношеніи, такъ что $CF = \frac{2}{3} CD$.

Прямыя, соединяющія вершину B съ полученными точками E и F, раздѣлятъ параллелограммъ въ требуемомъ отношеніи.

Доказательство. Изъ $\triangle\triangle BAE$ и BAD имѣемъ:

$$\frac{\triangle BAE}{\triangle BAD} = \frac{AE}{AD} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } \triangle BAE = \frac{2}{3} \triangle BAD = \frac{1}{3} ABCD.$$

Также изъ $\triangle\triangle BCF$ и BCD:

$$\frac{\triangle BCF}{\triangle BCD} = \frac{CF}{CD} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } \triangle BCF = \frac{2}{3} \triangle BCD = \frac{1}{3} ABCD.$$

Изслѣдованіе. Задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе.

43. Раздѣлить параллелограммъ на три равновеликія части прямыми, параллельными діагонали.

Анализъ. Допустимъ, что прямыми EF и GH (черт. 57), параллельными діагонали AC данный параллелограммъ $ABCD$ раздѣленъ на три равновеликія части. Сравнивая площади подобныхъ тре-ковъ BEF и BAC, имѣемъ:

$$\frac{\triangle BEF}{\triangle BAC} = \frac{\frac{1}{3} ABCD}{\frac{1}{2} ABCD} = \frac{2}{3};$$

но площади двухъ подобныхъ тре-ковъ относятся, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ, а потому

$$\frac{BF^2}{BC^2} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } BF = \sqrt{\tfrac{2}{3} BC^2} = \sqrt{\tfrac{2}{3} BC \,.\, BC}.$$

Итакъ, BF есть средняя пропорціональная между двумя извѣстными отрѣзками: BC и $\frac{2}{3} BC$, а потому положеніе точки F можетъ быть опредѣлено; также изъ сравненія площадей тре-ковъ DGH и DAC, слѣдуетъ

$$DH = \sqrt{\tfrac{2}{3} DC \,.\, DC}.$$

Построеніе. Дѣлимъ сторону BC въ точкѣ K въ отношеніи $2:1$, т. е. такъ, чтобы $BK=\frac{2}{3}BC$; описываемъ на BC, какъ на діаметрѣ полуокружность и въ точкѣ K возставляемъ до пересѣченія съ ней перпендикуляръ KL. Изъ B радіусомъ BL описываемъ дугу, пересѣкающую BC въ точкѣ F; изъ F проводимъ $FE \parallel AC$. Найдя при помощи аналогичнаго построенія точку H на CD и проведя $HG \parallel AC$, раздѣлимъ параллелограммъ на три равновеликія части.

Доказательство. Тре-ки BAC и BEF подобны, а потому

$$\frac{\triangle BEF}{\triangle BAC}=\frac{BF^2}{BC^2}=\frac{BL^2}{BC^2}. \tag{1}$$

Но хорда BL есть средняя пропорціональная между діаметромъ BC и прилежащимъ отрѣзкомъ BK, а потому

$$BL^2=BC\,.\,\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}BC^2.$$

Подставляя найденное значеніе BL въ равенство (1), получаемъ:

$$\frac{\triangle BEF}{\triangle BAC}=\frac{2}{3}, \text{ откуда } \triangle BEF=\frac{2}{3}\triangle BAC=\frac{1}{3}ABCD.$$

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что $\triangle DGH=\frac{1}{3}ABCD.$

Изслѣдованіе. Задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе.

44. Раздѣлить треугольникъ пополамъ прямою, проходящею черезъ данную точку на одной изъ его сторонъ.

Анализъ. Пусть прямая KE (черт. 58), проведенная изъ данной точки K дѣлитъ площадь $\triangle ABC$ пополамъ. Если D есть середина стороны BC, то прямая AD дѣлитъ площадь тре-ка ABC тоже пополамъ *), а потому

$$\triangle CKE = \triangle CAD. \tag{1}$$

Соединяя точки D и E, замѣчаемъ, что равновеликіе тре-ки CKE и CAD имѣютъ общую часть $\triangle CDE$ (заштрихо-

*) Тре-ки ABD и ACD, имѣя общую высоту, относятся какъ ихъ основанія BD и CD, а потому равновелики.

ванную на чертежѣ), а потому вычитая изъ обѣихъ частей равенства (1) по CDE, получаемъ:

$$\triangle KDE \equiv \triangle ADE;$$

но тре-ки эти имѣютъ общее основаніе DE, а потому и высоты ихъ равны, откуда заключаемъ, что прямая KA должна быть параллельна прямой DE.

Построеніе. Соединяемъ данную точку K съ противолежащей вершиной A и изъ точки D, середины прямой BC, проводимъ $DE \parallel AK$. Прямая, соединяющая точки K и E раздѣлитъ площадь даннаго тре-ка пополамъ.

Доказательство. Соединяя A съ D, имѣемъ:

$$\triangle DKE \equiv \triangle DAE,$$

такъ какъ у нихъ общее основаніе DE и высоты равны.

Прибавляя къ обѣимъ частямъ равенства по $\triangle DEC$, имѣемъ:

$$\triangle CKE \equiv \triangle DAC \equiv \tfrac{1}{2} ABC,$$ что и треб. док.

Изслѣдованіе. Задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе.

45. Построить равносторонній треугольникъ равновеликій данному треугольнику.

Анализъ. Предположимъ, что задача рѣшена и пусть AMN (черт. 59) будетъ равносторонній тре-къ, равновеликій данному $\triangle ABC$. Проведя изъ точки B прямую, параллельно AC, пересѣкающую AM въ точкѣ D и соединяя D съ C, получаемъ $\triangle ADC$, равновеликій $\triangle ABC$ и $\triangle AMN$.

Но $\triangle AMN$ и $\triangle ADC$ имѣютъ общій уголъ MAN, равный 60^0, а потому площади ихъ относятся, какъ произведенія сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ; слѣд.:

$$\frac{\triangle AMN}{\triangle ADC} = \frac{AM \,.\, AN}{AD \,.\, AC} = \frac{AM^2}{AD \,.\, AC} = 1,$$

откуда $AM = \sqrt{AD \,.\, AC}$, т. е. сторона искомаго равносторонняго тре-ка можетъ быть найдена построеніемъ, какъ средняя пропорціональная между двумя извѣстными отрѣзками AD и AC.

Построеніе. Изъ вершины B даннаго тре-ка проводимъ прямую, параллельно основанію, а изъ вершины A проводимъ прямую, подъ угломъ въ 60° къ AC до пересѣченія съ проведенною прямою BD въ точкѣ D. Строимъ среднюю пропорціональную между отрѣзками AD и AC: для этого изъ A радіусомъ AD описываемъ дугу, пересѣкающую AC въ точкѣ E, въ E возставляемъ перпендикуляръ къ AC, пересѣкающій окружность описанную на AC, какъ на діаметрѣ въ точкѣ F. Послѣ этого радіусомъ AF описываемъ дугу, пересѣкающую AC въ точкѣ N и AD въ точкѣ M. Тре-къ AMN—искомый.

Доказательство. Тре-къ AMN есть тре-къ равнобедренный, такъ какъ по построенію $AM=AN$, уголъ $MAN=60^\circ$, а потому $\triangle AMN$ — и равносторонній. Изъ сравненія площадей тре-ковъ AMN и ADC имѣемъ:

$$\frac{\triangle AMN}{\triangle ADC}=\frac{AM\,.\,AN}{AD\,.\,AC}=\frac{AM^2}{AD\,.\,AC}=\frac{AF^2}{AE\,.\,AC}=1,$$

откуда $$\triangle AMN \equiv \triangle ADC \equiv \triangle ABC.$$

Изслѣдованіе. Задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе.

46. Построить многоугольникъ, подобный одному изъ данныхъ многоугольниковъ и равновеликій другому данному.

Анализъ. Пусть данные многоугольники будутъ I и II (см. черт. 60); мы должны построить многоугольникъ подобный I и равновеликій II. Если обозначимъ площадь многоугольника I черезъ S^2, а II черезъ P^2, то условіе задачи можетъ быть измѣнено такъ:

Построить многоугольникъ подобный данному и имѣющій данную площадь P^2.

Для построенія же многоугольника, подобнаго данному, достаточно найти одну изъ его сторонъ, что можетъ быть сдѣлано изъ слѣдующихъ соображеній: если обозначимъ сторону искомаго многоугольника, сходственную сторонѣ AB

даннаго многоугольника I буквой x, то на основаніи теоремы объ отношеніи площадей подобныхъ многоуг. имѣемъ:

$$\frac{P^2}{S^2}=\frac{x^2}{AB^2}, \quad \text{откуда} \quad x=\frac{P \,.\, AB}{S},$$

гдѣ буквами P и S обозначены стороны квадратовъ, равновеликихъ даннымъ многоугольникамъ I и II.

Построеніе. Прежде всего опредѣляемъ стороны квадратовъ. равновеликихъ даннымъ многоугольникамъ I и II. Для этого обращаемъ каждый изъ данныхъ многоугольниковъ, при помощи извѣстныхъ изъ Геометріи преобразованій, въ равновеликій треугольникъ, а затѣмъ ищемъ сторону квадрата, равновеликаго полученному тре-ку, какъ среднюю пропорціональную между основаніемъ его и половиной высоты *).

Найдя эти стороны P и S, строимъ четвертую пропорціональную къ прямымъ P, S и AB. Проводимъ изъ вершины A многоуг. I діагонали, откладываемъ на AB отрѣзокъ равный построенной четвертой пропорціональной и проводя параллели сторонамъ многоугольника $ABCDE$, получаемъ многоуг. $AB_1C_1D_1E_1$ искомый.

Доказательство. Многоуг. $AB_1C_1D_1E_1$ подобенъ многоуг. $ABCDE$ по построенію. Для опредѣленія его площади имѣемъ:

$$\frac{AB_1C_1D_1E_1}{ABCDE}=\frac{AB_1^{\,2}}{AB^2},$$

но AB_1 по отложенію равна $\dfrac{P \,.\, AB}{S}$,

а потому

$$\frac{AB_1C_1D_1E_1}{ABCDE}=\frac{P^2}{S^2},$$

откуда

$$AB_1C_1D_1E_1 = ABCDE \,.\, \frac{P^2}{S^2} = P^2.$$

---

*) На чертежѣ построенія эти произведены только для многоугольника II; для многоуг. же I построеніе производится точно также.

Итакъ, многоуг. $AB_1C_1D_1E_1$ подобенъ одному изъ данныхъ (I) и равновеликъ другому (II).

Изслѣдованіе. Задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе.

47. Если двѣ діагонали и углы между ними, одного четыреугольника соотвѣтственно равны двумъ діагоналямъ и углу между ними другого четыреугольника, то четыреугольники равновелики *)

Дано: *въ четыреуг.* $ABCD$ и $EFGH$ (черт. 61) : $AC = EG$; $DB = HF$; $\angle AOB = \angle ESF$.

Доказать: *четыр.* $ABCD \equiv$ *четыр.* $EFGH$?

Опустивъ изъ точекъ D и B перпенд. DK и BL на AC и точекъ H и F перпенд. HM и FN на EG, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} &\textit{площ. четыр. } ABCD = \triangle ACD + \triangle ACB = \frac{AC}{2}(DK+BL) \\ &\textit{площ. четыр. } EFGH = \triangle EHG + \triangle EFG = \frac{EG}{2}(HM+FN) \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I}$$

Проведя $BP \parallel AC$ до пересѣченія съ продолженіемъ DK въ точкѣ P и $FQ \parallel EG$ до пересѣченія съ продолженіемъ HM въ точкѣ Q, замѣчаемъ, что

$$DK + BL = DP; \quad HM + FN = HQ$$

и слѣд. формулы (I) можно переписать такъ:

$$\left.\begin{aligned} &\textit{площ. четыр. } ABCD = \tfrac{1}{2} AC \,.\, DP \\ &\textit{площ. четыр. } EFGH = \tfrac{1}{2} EG \,.\, HQ \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \; \mathrm{II}$$

Но прямоугольные тре-ки DBP и HFQ равны ($DB = HF$ по условію; $\angle DBP = \angle HFQ$, такъ какъ каждый изъ нихъ равенъ углу между діагоналями), а слѣд. $DP = HQ$. Слѣд. изъ равенства (II) слѣдуетъ:

площ. четыр. $ABCD =$ *площ. четыр.* $EFGH$, что и тр. дбк.

*) Теорема эта проще всего доказывается при помощи тригонометріи, такъ какъ площадь всякаго четыреугольника равна половинѣ произведенія діагоналей на *Sin* угла между ними.

48. Если площади двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ относятся какъ квадраты ихъ гипотенузъ, то треугольники подобны.

Дано: $\triangle ABC : \triangle A_1B_1C_1 = BC^2 : B_1C_1^2$ ($\angle A = \angle A_1 = 90°$).

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Такъ какъ площади двухъ треугольниковъ относятся какъ произведенія основанія на высоту, то опустивъ изъ вершинъ A и A_1 (черт. 62) перпендикуляры AD и A_1D_1 на гипотенузу, имѣемъ:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{BC \,.\, AD}{B_1C_1 \,.\, A_1D_1} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2} \text{ по условію.}$$

Сравнивая послѣднія два равенства, получаемъ:

$$\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

или, дѣля оба члена правой части на 2:

$$\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}B_1C_1} = \frac{BE}{B_1E_1}. \qquad (1)$$

Но во всякомъ прямоугольномъ тре-кѣ медіана гипотенузы равна половинѣ гипотенузы, а потому, обозначивъ буквами E и E_1 середины сторонъ BC и B_1C_1, изъ равенства (1) получаемъ:

$$\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{AE}{A_1E_1},$$

откуда слѣдуетъ, что прямоугольные тре-ки ADE и $A_1D_1E_1$ подобны, а потому $\angle AED = \angle A_1E_1D_1$.

Но $\angle AED = \angle ACE + \angle EAC = 2\angle ACE$ (такъ какъ $\triangle EAC$— равнобедренный).

Также $\angle A_1E_1D_1 = 2\angle A_1C_1E_1$. Слѣдовательно изъ равенства угловъ AED и $A_1E_1D_1$ слѣдуетъ, что углы C и C_1 прямоуг. тре-ковъ ABC и $A_1B_1C_1$, тоже равны, а потому треугольники эти подобны, что и треб. доказать.

49. Прямою, параллельною заданному направленію отсѣчь отъ даннаго треугольника такой треугольникъ, площадь котораго относилась бы къ площади даннаго, какъ $m : n$.

Анализъ. Предположимъ, что задача рѣшена и пусть прямая KL (черт. 63) параллельная данной прямой XY, отсѣкаетъ отъ площади даннаго $\triangle ABC$ тре-къ CKL, относящійся къ площади даннаго, какъ $m : n$. Итакъ:

$$\frac{\triangle CKL}{\triangle ABC}=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

Проведя изъ вершины A прямую $AD \parallel XY$, раздѣливъ основаніе BC въ точкѣ E такъ, чтобы $EC : BC=m : n$, и соединивъ точки E и A, имѣемъ:

$$\frac{\triangle AEC}{\triangle ABC}=\frac{EC}{BC}=\frac{m}{n}. \tag{2}$$

Изъ сравненія равенствъ (1) и (2) слѣдуетъ:

$$\triangle CKL \equiv \triangle CAE. \tag{3}$$

Соединяя точки E и L, видимъ, что у этихъ тре-ковъ имѣется общая часть CEL, а потому, вычитая CEL изъ равенства (3), получаемъ:

$$\triangle ELK \equiv \triangle ELA;$$

но тре-ки эти имѣютъ общее основаніе EL, а потому и высоты ихъ должны быть равны, изъ чего слѣдуетъ, что вершины A и K лежатъ на линіи, параллельной основанію EL. Итакъ, прямая AK параллельна EL.

Теперь имѣемъ 2 пары параллельныхъ прямыхъ

1) $LK \parallel AD$ и 2) $LE \parallel AK$.

Такъ какъ двѣ параллельныя прямыя отсѣкаютъ отъ сторонъ угла пропорціональныя части, то можно написать:

$$KC : EC = AC : LC \tag{4}$$
$$DC : KC = AC : LC \tag{5}$$

Изъ пропорцій (4) и (5) получаемъ:

$$KC : EC=DC : KC, \text{ откуда } KC=DC \,.\, EC,$$

т. е. отрѣзокъ KC можетъ быть найденъ какъ средняя пропорціональная между двумя извѣстными отрѣзками DC и EC. Когда точка K найдена, задача рѣшается проведеніемъ черезъ K прямой параллельной заданному направленію XY или что одно и тоже $\parallel$ прямой AD.

Построеніе. Проводимъ черезъ вершину A даннаго тре-ка прямую $AD \parallel$ данной прямой XY до пересѣченія со стороной

BC въ точкѣ D. Дѣлимъ основанія BC въ точкѣ E такъ, чтобы $EC : BC = m : n$. Строимъ среднюю пропорціональную между DC и EC: описываемъ на DC, какъ на діаметрѣ полуокружность и изъ E возставляемъ перпендикуляръ EF пересѣкающій эту полуокружность въ точкѣ F. Изъ точки C радіусомъ CF описываемъ дугу, пересѣкающую BC въ точкѣ K. Прямая KL, проведенная изъ точки $K \parallel AD$ отдѣлитъ отъ даннаго тре-ка $\triangle CKL$, площадь котораго будетъ относиться къ площади даннаго, какъ $m : n$.

Доказательство. Соединимъ точку A съ K и съ E. По построенію мы знаемъ, что отрѣзокъ $KC (= CF)$ есть средняя пропорціональная между CD и CE, т. е.

$$CD : KC = KC : CE \tag{1}$$

По построенію $KL \parallel AD$, а потому

$$CD : KC = AC : LC \tag{2}$$

Сравнивая пропорціи (1) и (2), получаемъ:

$$KC : CE = AC : LC. \tag{3}$$

Такъ какъ отрѣзки KC, EC, AC, LC, отложенныя на сторонахъ угла ACD пропорціональны, то на основаніи извѣстной теоремы (Кис. § 193) заключаемъ, что прямыя AK и EL параллельны между собой. Изъ этого слѣдуетъ, что тре-ки ELK и ELA, имѣя общее основаніе EL и вершины на прямой, параллельной основанію, равновелики, т. е.

$$\triangle EKL \equiv \triangle ELA \tag{4}$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ равенства по площади $\triangle ELC$, получаемъ:

$$\triangle CKL \equiv \triangle CAE.$$

Но $\triangle CAE$ и $\triangle ABC$ имѣютъ равныя высоты, а потому площади ихъ относятся какъ основанія, т. е.

$$\triangle CAE : \triangle ABC = CE : BC = m : n.$$

Замѣняя въ этой пропорціи $\triangle CAE$ равновеликимъ ему (по доказанному) тре-комъ CKL, получаемъ:

$$\triangle CKL : \triangle ABC = m : n,$$ что и треб. док.

Изслѣдованіе. Задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе. Если данная прямая YX параллельна одной изъ сторонъ $\triangle ABC$, то задача приводится къ слѣдующей: прямой, *параллельной основанію тре-ка* отдѣлить отъ него тре-къ, площадь котораго относилась бы къ площади даннаго, какъ $m : n$. Рѣшеніе этой задачи производится какъ указано въ геометріи Киселева § 293.

50. Если три стороны одного треугольника равны тремъ медіанамъ другого треугольника, то площадь перваго относится къ площади другого, какъ 3 : 4.

Возьмемъ какой нибудь $\triangle ABC$ (черт. 64), проведемъ въ немъ медіаны AE, BD, CF, пересѣкающіяся въ точкѣ O. Продолжимъ медіану BD до точки H такъ, чтобы $DH = OD$ и соединимъ H съ A и C.

$$\triangle OHC \equiv OAC, \tag{1}$$

такъ какъ каждый изъ нихъ составляетъ половину параллелограмма $AOCH$. Въ тре-кахъ ABC и AOC основаніе AC общее, а потому площади ихъ относятся какъ высоты; поэтому опустивъ перпендикуляры BL и OK, имѣемъ:

$$\triangle ABC : \triangle AOC = BL : OK \tag{2}$$

Но изъ подобія прямоуг. тре-ковъ, BDL и ODK слѣдуетъ:

$$BL : OK = BD : OD = 3 : 1 \text{ (по свойству медіанъ).}$$

Поэтому изъ равенства (2) слѣдуетъ:

$$\triangle ABC = 3 \triangle AOC,$$

или на основаніи равенства (1):

$$\triangle ABC = 3 \triangle OCH. \tag{3}$$

Вообразимъ теперь другой тре-къ, сторонами котораго были бы медіаны тре-ка ABC, т. е. линіи AE, BD, CF. Треугольникъ этотъ будетъ непремѣнно подобенъ тре-ку OCH*)

*) Такъ какъ у нихъ стороны пропорціональны сторонамъ тре-ка OCH; въ самомъ дѣлѣ стороны его будутъ AE, BD, CF а стороны $\triangle OCH$ по свойству медіаны суть: $\frac{2}{3}AE$, $\frac{2}{3}BD$, $\frac{2}{3}CF$.

Обозначая площадь этого тре-ка буквой S, имѣемъ на основаніи теоремы объ отношеніи площадей подобныхъ тре-ковъ:

$$S : OCH = AE^2 : (\tfrac{2}{3} AE)^2 = 1 : \tfrac{4}{9} = 9 : 4$$

откуда $OCH = \frac{4}{9} S$.

Подставляя это значеніе вмѣсто OCH въ равенство (3), получаемъ:

$$\triangle ABC = 3 \,.\, (\tfrac{4}{9} S) = \tfrac{4}{3} S,$$

откуда $S : ABC = 3 : 4$, что и требовалось доказать.

ГЛАВА II.

Задачи на построеніе, предлагаемыя въ Технологическомъ Институтѣ.

1. Раздѣлить данный отрѣзокъ пополамъ.
См. „Геометрія Киселева", § 65, зад. № 7.

2. Изъ середины даннаго отрѣзка возставить къ нему перпендикуляръ.
См. „Геометрія Киселева", § 65, зад. № 6.

3. Черезъ произвольную точку прямой провести къ ней перпендикуляръ.
См. „Геометрія Киселева", § 65, зад. № 4.

4. Изъ точки, лежащей внѣ прямой, опустить на нее перпендикуляръ.
См. „Геометрія Киселева", § 65, зад. № 5.

5. При данной точкѣ прямой построить уголъ, равный данному углу.
См. „Геометрія Киселева", § 65, зад. № 2.

6. Построить уголъ, равный суммѣ нѣсколькихъ угловъ.
Способъ рѣшенія очевиденъ.

7. Построить уголъ, равный данному углу, повторенному нѣсколько разъ.
Способъ построенія очевиденъ.

8. Построить уголъ, равный разности двухъ угловъ.
Способъ построенія очевиденъ.

9. Раздѣлить данный уголъ пополамъ.

См. „Геометрія Киселева“, § 65, зад. № 3.

10. Построить треугольникъ по тремъ даннымъ его сторонамъ.

См. „Геометрія Киселева“, § 65, зад. № 1.

11. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ сторонамъ и углу, заключенному между ними.

Способъ построенія очевиденъ.

12. Построить треугольникъ по данной сторонѣ и двумъ прилежащимъ къ ней угламъ.

Способъ построенія очевиденъ.

13. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ.

Дано: a, b, $\angle A$.

Рѣшеніе. На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ AC, равный данной сторонѣ b и строимъ при точкѣ A уголъ CAX, равный $\angle A$. Изъ точки C радіусомъ a описываемъ дугу, пересѣкающую AX въ искомой вершинѣ B.

Изслѣдованіе. Если изъ точки C опустить на AX перпендикуляръ CD и обозначить $CD = h$, то при $a < h$ задача рѣшеній не имѣетъ; при $a = h$ — рѣшеніе одно — прямоугольный $\triangle ACD$; при $a > h$ — два рѣшенія. Такъ какъ изъ прямоуг. $\triangle ACD$ катетъ $h = b \,.\, Sin\, A$, то условіе возможности задачи выражается неравенствомъ: $a \geqslant b \,.\, Sin\ A$.

14. Построить прямоугольный треугольникъ по данной гипотенузѣ и данному катету.

См. „Геометрія Киселева“, § 158,

15. Построить прямоугольный треугольникъ по данной гипотенузѣ и данному острому углу.

Способъ построенія очевиденъ.

16. Черезъ точку, данную внѣ прямой, провести прямую, параллельную этой прямой.

См. „Геометрія Киселева“, § 80.

17. Черезъ произвольную точку провести прямую, пересѣкающую данную прямую подъ даннымъ угломъ.

Способъ построенія очевиденъ.

18. Построить многоугольникъ, равный данному многоугольнику.

Рѣшеніе. Можно разбить данный многоугольникъ діагоналями на треугольники и строить ихъ послѣдовательно одинъ за другимъ; можно и непосредственно строить требуемый многоугольникъ, откладывая его стороны и углы.

19. Раздѣлить данный отрѣзокъ на n равныхъ частей.

См. „Геометрія Киселева", § 101.

20. Построить равнобедренный треугольникъ по данному основанію и углу при вершинѣ.

Способъ построенія очевиденъ.

21. Найти отрѣзокъ, четвертый пропорціональный къ тремъ даннымъ.

См. „Геометрія Киселева", § 196.

22. Найти отрѣзокъ, третій пропорціональный къ двумъ даннымъ.

См. „Геометрія Киселева", § 224, форм. 4 (или § 203).

23. Раздѣлить отрѣзокъ на двѣ части въ данномъ отношеніи.

Способъ рѣшенія очевиденъ.

24. Раздѣлить отрѣзокъ на части, пропорціональныя нѣсколькимъ даннымъ отрѣзкамъ.

См. „Геометрія Киселева", § 195.

25. Построить по сторонѣ многоугольникъ, подобный данному многоугольнику.

См. „Геометрія Киселева", § 190.

26. Черезъ точку, лежащую внутри круга, провести хорду, которая въ этой точкѣ дѣлилась бы пополамъ.

Рѣшеніе. Соединяемъ данную точку A съ центромъ круга O и возставляемъ въ точкѣ A къ линіи AO перпендикуляръ, пересѣкающійся съ окружностью въ двухъ точкахъ B и C. Прямая BC и есть искомая хорда.

27. Раздѣлить дугу на двѣ равныя части.

См. „Геометрія Киселева“, § 118.

28a. Описать даннымъ радіусомъ окружность, проходящую черезъ двѣ данныя точки.

Рѣшеніе. Соединяемъ данныя точки A и B и возставляемъ въ серединѣ прямой AB перпендикуляръ CX (*Г. М.* № II). Изъ точки A (или B) даннымъ радіусомъ X описываемъ дугу пересѣкающую CX въ точкѣ O, которая и будетъ центромъ искомой окружности.

28b. Описать окружность, проходящую черезъ три данныя точки.

См. „Геометрія Киселева“, § 109.

29. Найти центръ дуги или окружности.

См. „Геометрія Киселева“, § 111.

30. Описать даннымъ радіусомъ окружность, касательную къ данной прямой въ данной на ней точкѣ.

Рѣшеніе. Въ данной точкѣ M на данной прямой AB возставляемъ къ этой прямой перпендикуляръ (*Г. М.* № V) и откладываемъ на немъ отрѣзокъ MO, равный данному R. Точка O есть центръ искомой окружности.

31. Описать окружность проходящую черезъ данную точку и касательную къ прямой въ данной на ней точкѣ.

Построеніе. Такъ какъ окружность должна касаться прямой AB въ точкѣ M, то центръ ея долженъ лежать гдѣ нибудь на перпендикулярѣ MX къ прямой AB. (*Г. М.* № V). Кромѣ того, такъ какъ окружность должна пройти черезъ точки M и C, то центръ ея долженъ находиться гдѣ нибудь на перпендикулярѣ NY, возставленномъ къ прямой CM въ точкѣ N, ея серединѣ. Поэтому искомый центръ O, находясь одновременно на прямыхъ MX и NY, опредѣлится ихъ пересѣченіемъ.

Изслѣдованіе. Задача возможна и имѣетъ одно рѣшеніе во всѣхъ случаяхъ, если только точка C не лежитъ на данной прямой AB.

32. Описать даннымъ радіусомъ окружность, касательную къ данной окружности въ данной на ней точкѣ.

Построеніе. Соединяемъ данную на окружности точку M съ центромъ O (*Г. М.* № VI) и откладываемъ на линіи MO по обѣ стороны отъ M отрѣзки MC_1 и MC_2 равные данному радіусу R.

Точки C_1 и C_2 будутъ искомыми центрами, соотвѣтствующими внутреннему и внѣшнему касанію.

Изслѣдованіе. Задача всегда возможна и имѣетъ два рѣшенія (внутреннее и внѣшнее касанія). Въ томъ только случаѣ, если радіусъ искомой окружности равенъ радіусу данной рѣшеніе будетъ всего одно—внѣшнее касаніе.

33. Описать окружность, проходящую черезъ данную точку и касательную къ данной окружности въ данной на ней точкѣ.

Дано: окружность O, на ней точка M и точка C внѣ ея.

Построеніе. Центръ искомой окружности найдется въ пересѣченіи прямой OM (*Г. М.* № VI) съ перпендикуляромъ, возставленнымъ въ серединѣ прямой CM (*Г. М.* № II).

Изслѣдованіе. Если точка C дана не на данной окружности O, то задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе. Касаніе будетъ внѣшнее или внутреннее, смотря по тому, лежитъ ли точка C внѣ или внутри круга O. Если же C лежитъ на данной окружности, то задача невозможна (искомая окружность сливается съ данной). Если O совпадаетъ съ M— задача становится неопредѣленной.

34. Провести къ окружности касательную черезъ точку, данную на ней или внѣ ея.

См. „Геометрія Киселева“ § 126.

35. Провести къ окружности касательную, параллельную данной прямой.

См. „Геометрія Киселева“ § 128.

36. Провести черезъ какую либо точку сѣкущую въ кругу такъ, чтобы часть сѣкущей внутри круга равнялась данному отрѣзку a.

Построеніе. Въ произвольной точкѣ A на данной окружности ставимъ ножку циркуля и засѣкаемъ окружность въ точкѣ B радіусомъ равнымъ данному отрѣзку a. Изъ центра O опускаемъ на хорду AB перпендикуляръ AC и описываемъ изъ O окружность радіусомъ, равнымъ AD (*Г. М.* № VШ). Изъ данной точки M проводимъ къ этой окружности 2 касательныя пересѣкающія данную окружность въ точкахъ E, F, E_1 F_1. Хорды EF и E_1F_1—будутъ искомыми.

Изслѣдованіе. Задача возможна и имѣетъ два рѣшенія, если длина данной хорды a не превышаетъ длину діаметра $2R$ данной окружности O. При a, равномъ $2R$, рѣшеніе будетъ всего одно.

37. На данномъ отрѣзкѣ описать дугу, вмѣщающую данный уголъ.

См. „Геометрія Киселева“ § 165.

38. Построить треугольникъ по данной высотѣ, данному основанію и углу, противолежащему основанію.

Дано: a, A, h_a.

Построеніе. На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ BC, равный данному основанію a, описываемъ на этомъ отрѣзкѣ дугу, вмѣщающую уголъ A, и приводимъ прямую XY, параллельную BC, на разстояніи h_a отъ нея. Пересѣченіе этой прямой съ дугой опредѣлитъ положеніе вершины A.

Изслѣдованіе. Задача возможна, если прямая XY пересѣчется съ дугой или коснется ея.

Если въ точкѣ D, серединѣ BC, возставить къ ней перпендикуляръ, пересѣкающій дугу въ точкѣ E, то условіе возможности построенія выражается неравенствомъ:

$$h_a \leqslant DE.$$

Соединяя E съ B, замѣчаемъ, что въ прямоугольномъ тре-кѣ BDE катетъ $DE = BD \,.\, Cotg BED = \frac{a}{2} \,.\, Cotg\ \frac{A}{2}.$

Поэтому условіе возможности построенія выразится неравенствомъ

$$h_a \leqslant \frac{a}{2} \cdot Cotg \frac{A}{2}.$$

39. Провести общую касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ.

См. „Геометрія Киселева“ § 129.

40. Построить отрѣзокъ средній пропорціональный къ двумъ даннымъ.

См. „Геометрія Киселева“ § 203.

41. Вписать въ кругъ правильный многоугольникъ о 3, 4, 6 и 10 сторонахъ.

См. „Геометрія Киселева“ §§ 235, 233, 234, 236.

42. Описать около круга правильный многоугольникъ о 3, 4, 6 и 10 сторонахъ.

См. „Геометрія Киселева“ § 226.

43. По данной сторонѣ правильнаго многоугольника о 3, 4, 6 и 10 сторонахъ построить самый многоугольникъ.

Построеніе. Беремъ произвольную окружность и вписываемъ въ нее по извѣстнымъ правиламъ правильные многоугольники о 3, 4, 6 и 10 сторонахъ. Послѣ этого задача сводится къ разсмотрѣнной выше (см. № 25), такъ какъ всѣ одноименные правильные многоугольники подобны между собой.

ГЛАВА III.

Задачи на вычисленіе, предлагавшіяся на вступительныхъ экзаменахъ въ институтахъ: Горномъ, Технологическомъ, Путей Сообщенія и др. въ 1900—1904 годахъ.

1. Даны двѣ стороны треугольника:

1) $a = 7$; $b = 3$
2) $a = 5$; $b = 12$
3) $a = 18$; $b = 40$.

найти, между какими предѣлами должна заключаться третья сторона (c)?

2. Даны три стороны треугольника:

1) $a = 8$; $b = 10$; $c = 12$
2) $a = 3$; $b = 5$; $c = 7$
3) $a = 14$; $b = 5$; $c = 8$
4) $a = 12$; $b = 13$; $c = 5$
5) $a = 7$; $b = 8$; $c = 13$.

Опредѣлить, будетъ ли данный треугольникъ прямоугольный, тупоугольный или остроугольный.

3. Даны двѣ стороны треугольника:

1) $a = 5$; $b = 7$
2) $a = 9$; $b = 4$
3) $a = 8$; $b = 10$.

Опредѣлить, между какими предѣлами должна заключаться третья сторона (c), чтобы всѣ углы въ тре-кѣ были острые?

4. Даны двѣ стороны треугольника:

1) $a=5$; $b=7$
2) $a=9$; $b=4$
3) $a=8$; $b=10$.

Опредѣлить, между какими предѣлами должна заключаться третья сторона (c), чтобы $\angle C$ былъ тупой.

5. Даны двѣ стороны треугольника:

1) $a=11$; $b=6$
2) $a=15$; $b=10$
3) $a=9$; $b=12$.

Опредѣлить, между какими предѣлами должна заключаться третья сторона (c), чтобы $\angle A$ былъ тупой.

6. Радіусы двухъ окружностей соотвѣтственно равны 10 и 15 сантиметрамъ. Опредѣлить, между какими предѣлами должна находиться длина прямой, соединяющей ихъ центры, чтобы

1) данныя окружности пересѣклись;
2) „ „ касались внутренне;
3) „ „ касались внѣшне;
4) находились бы одна внутри другой;
5) были бы одна внѣ другой.

7. Число всѣхъ діагоналей, которыя можно провести изъ вершины нѣкотораго многоугольника, на 5 больше половины его сторонъ. Опредѣлить, сколько сторонъ имѣетъ этотъ многоугольникъ.

8. Число всѣхъ діагоналей, которыя можно провести изъ вершины нѣкотораго многоугольника на 25 меньше утроеннаго числа его сторонъ. Опредѣлить сумму внутреннихъ угловъ этого многоугольника.

9. Опредѣлить число *всѣхъ* діагоналей, которыя можно провести: 1) въ десятиугольникѣ; 2) въ пятнадцатиугольникѣ; 3) въ двадцатичетыреугольникѣ.

10. Сколько сторонъ имѣетъ многоугольникъ, сумма внутреннихъ угловъ котораго равна 1) $16d$; 2) $24d$; 3) $44d$ и чему равна сумма внѣшнихъ угловъ каждаго изъ этихъ многоугольниковъ.

11. Сколько сторонъ имѣетъ правильный многоугольникъ, каждый изъ внутреннихъ угловъ котораго равенъ: 1) 144°; 2) 108°; 3) 165°; 4) 170°.

12. Сколько сторонъ имѣетъ многоугольникъ, въ которомъ сумма всѣхъ внутреннихъ и одного изъ внѣшнихъ угловъ равна 1) 423°; 2) 2000°.

13. Сколько сторонъ имѣетъ многоугольникъ, въ которомъ сумма внутреннихъ угловъ на $16\frac{4}{5}d$ больше одного изъ его внѣшнихъ угловъ.

14. Даны три стороны треугольника:

1) $a=29$; $b=25$; $c=36$
2) $a=12$; $b=10$; $c=20$
3) $a=10$; $b=12$; $c=7$
4) $a=8$; $b=23$; $c=13$.

Опредѣлить площадь (S) треугольника.

15. Даны три стороны треугольника:

1) $a=29$; $b=25$; $c=36$.
2) $a=12$; $b=10$; $c=20$.
3) $a=17$; $b=10$; $c=6$.
4) $a=10$; $b=12$; $c=7$.

Опредѣлить высоты (h_a, h_b, h_c) треугольника.

16. Даны три стороны треугольника:

1) $a=32$; $b=17$; $c=14$.
2) $a=29$; $b=25$; $c=36$.
3) $a=12$; $b=10$; $c=20$.
4) $a=10$; $b=12$; $c=7$.

Опредѣлить медіаны (m_a, m_b, m_c) треугольника.

17. Даны три стороны треугольника:

1) $a = 29$; $b = 25$; $c = 36$.
2) $a = 41$; $b = 97$; $c = 56$.
3) $a = 12$; $b = 10$; $c = 20$.
4) $a = 10$; $b = 12$; $c = 7$.

Опредѣлить биссектриссы (β_A, β_B, β_C) треугольника.

18. Даны три стороны треугольника:

1) $a = 29$; $b = 25$; $c = 36$.
2) $a = 12$; $b = 10$; $c = 20$.
3) $a = 10$; $b = 12$; $c = 7$.

Опредѣлить радіусы круговъ описанныхъ (R) и вписанныхъ (r) въ треугольникъ.

19. Даны три стороны треугольника:

1) $a = 29$; $b = 25$; $c = 36$.
2) $a = 12$; $b = 10$; $c = 20$.
3) $a = 10$; $b = 12$; $c = 7$.

Опредѣлить радіусы внѣвписанныхъ въ треугольникъ круговъ (ρ_a, ρ_b, ρ_c).

20. Опредѣлить площадь треугольника по тремъ его высотамъ.

21. Опредѣлить площадь треугольника по тремъ его медіанамъ.

22. Опредѣлить площадь треугольника по двумъ сторонамъ и медіанѣ на третью сторону.

23. Опредѣлить площадь треугольника по двумъ сторонамъ и биссектриссѣ угла между ними.

24. Опредѣлить площадь треугольника по двумъ сторонамъ a и b и углу между ними C, равному:

1) 18°; 2) 30°; 3) 45°; 4) 60°; 5) 75°;
6) 162°; 7) 150°; 8) 135°; 9) 120°; 10) 105°.

25. По даннымъ въ предыдущей задачѣ величинамъ, опредѣлить третью сторону треугольника.

26. Въ треугольникѣ даны: сторона a, уголъ $B=30^\circ$; $\angle C=45^\circ$. Найти площадь и остальныя 2 стороны треугольника.

27. Въ треугольникѣ даны 2 стороны и радіусъ описаннаго круга:

1) $a=7$; $b=12$; $R=15$.
2) $a=8$; $b=20$; $R=16$.

Опредѣлить третью сторону треугольника.

28. Возможенъ-ли треугольникъ, у котораго три медіаны соотвѣтственно равны:

1) $m_a=5$; $m_b=7$; $m_c=11$.
2) $m_a=9$; $m_b=5$; $m_c=2$.

29. Вычислить площадь трапеціи по четыремъ сторонамъ.

30. Вычислить діагонали трапеціи по четыремъ сторонамъ.

31. Вычислить площадь трапеціи по двумъ діагоналямъ и высотѣ.

32. По четыремъ сторонамъ трапеціи вычислить длину прямой, соединяющей середины ея основаній.

33. Основанія трапеціи соотвѣтственно равны a и b. Опредѣлить длину прямой, проведенной параллельно основаніямъ черезъ точку пересѣченія діагоналей.

34. На основаніи AD трапеціи взята точка M, дѣлящая AD на двѣ части $AM=a$ и $MD=b$. Изъ M проведена прямая пересѣкающая основаніе $BC=c$ въ точкѣ N такъ, что прямой MN площадь трапеціи дѣлится пополамъ.

Найти отрѣзки BN и CN.

35. Прямая, параллельная основаніямъ трапеціи, дѣлитъ a на двѣ части, площади которыхъ относятся какъ $m:n$. Найти длину этой прямой, если основанія трапеціи соотвѣтственно равны a и b.

36. Въ четыреугольникѣ діагонали a и b пересѣкаются подъ угломъ $120°$. Найти его площадь.

37. На общей хордѣ AB построены по одну сторону два сегмента, изъ которыхъ одинъ вмѣщаетъ уголъ въ $135°$, а другой $\angle 120°$. Найти площадь луночки, заключенной между дугами сегментовъ.

38. На окружности радіуса R отложены отъ точки A по обѣ стороны отъ нея двѣ дуги: $\smile AC = 30°$ и $\smile AB = 60°$. Найти площадь треугольника ABC.

39. Найти площадь круга, зная, что его дуга въ $120°$ стягивается хордой въ a метровъ.

40. Стороны четыреугольника, вписаннаго въ окружность, соотвѣтственно равны a, b, c, d. Вычислить его діагонали.

41. Три стороны четыреугольника $KLMN$ раздѣлены пополамъ въ точкахъ A, B, C. Опредѣлить отношеніе площадей тре-ка ABC и четыреугольника $KLMN$.

42. Площадь кругового кольца $= S$. Радіусъ большей окружности равенъ длинѣ меньшей окружности. Найти длины этихъ окружностей.

43. Вычислить сторону правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругъ, радіуса R.

44. Вычислить стороны правильныхъ восьмиугольника и шестнадцатиугольника, вписанныхъ въ кругъ радіуса R.

45. Вычислить сторону правильнаго двѣнадцатиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса R, и описаннаго около него.

46. Вычислить сторону правильнаго пятнадцатиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса R.

47. Въ квадратъ со стороной a вписанъ кругъ. Опредѣлить сторону правильнаго двѣнадцатиугольника, вписаннаго въ этотъ кругъ.

48. Сторона правильнаго треугольника, описаннаго около круга, превышаетъ сторону вписаннаго въ этотъ кругъ квадрата на a. Найти радіусъ круга.

49. Вывести формулу для опредѣленія стороны правильнаго многоугольника въ зависимости отъ радіуса круга и отъ стороны одноименнаго правильнаго описаннаго многоугольника.

50. Вычислить діагонали правильнаго шестиугольника, описаннаго около круга радіуса R.

51. Бо̀льшая діагональ правильнаго шестиугольника превышаетъ меньшую на a. Найти радіусъ описаннаго круга.

52. Сторона правильнаго многоугольника равна a. Опредѣлить радіусъ описаннаго круга въ случаѣ: 1) треугольника; 2) четыреугольника; 3) пятиугольника; 4) шестиугольника; 5) восьмиугольника; 6) десятиугольника; 7) двѣнадцатиугольника.

53. Сторона правильнаго многоугольника равна a Опредѣлить радіусъ вписаннаго круга въ случаѣ: 1) треугольника; 2) четыреугольника; 3) пятиугольника; 4) шестиугольника; 5) восьмиугольника; 6) десятиугольника; 7) двѣнадцатиугольника.

54. Даны радіусы r и R круга вписаннаго въ правильный многоугольника и описаннаго около него. Найти радіусъ круга, вписаннаго въ многоугольникъ того же периметра, но имѣющаго вдвое больше сторонъ, и радіусъ круга, описаннаго около него.

55. По даннымъ хордамъ a и b, стягивающимъ двѣ дуги въ кругѣ, радіусъ котораго $R = 1$, найти длину хорды, стягивающей сумму или разность этихъ дугъ.

56. Хорда дѣлитъ окружность въ отношеніи $2:3$; другая, параллельная ей хорда, дѣлитъ окружность въ отношеніи $7:8$. Опредѣлить, сколько градусовъ содержится въ каждой изъ двухъ равныхъ дугъ, заключенныхъ между этими хордами.

57. Двѣ хорды пересѣкаются внутри круга подъ прямымъ угломъ. Одна дѣлитъ меньшую дугу стягиваемую другой, въ отношеніи 1 : 2; вторая — дѣлить меньшую дугу, стягиваемую первой въ отношеніи 1 : 3. Опредѣлить дуги, стягиваемыя этими хордами.

58. Изъ вершины треугольника проведена къ его основанію прямая, дѣлящая основаніе на двѣ части m и n. Найти длину этой прямой, если стороны треугольника, прилежащія къ m и n соотвѣтственно равны a и b.

59. Изъ точки, дѣлящей основаніе треугольника въ отношеніи $m : n$, проведены прямыя, параллельныя другимъ сторонамъ его. Найти отношеніе площади каждой изъ частей, на которыя дѣлится треугольникъ, къ площади треугольника.

60. Въ прямоугольномъ треугольникѣ извѣстны гипотенуза a и катетъ b. Въ вершинѣ его построенъ другой треугольникъ со сторонами, перпендикулярными сторонамъ перваго; гипотенуза этого тре-ка $= a_1$. Найти его катеты.

61. Катеты прямоугольнаго треугольника равны 5 и 12. Найти площадь круга, котораго окружность проходитъ черезъ середину меньшаго катета и касается гипотенузы въ ея серединѣ.

62. Гипотенуза прямоугольнаго треугольника на 4 больше одного и на 2 больше другого катета. Опредѣлить площадь круга, вписаннаго въ этотъ треугольникъ.

63. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC изъ вершины A прямого угла опущенъ перпендикуляръ AD на гипотенузу BC. Зная радіусы r_1 и r_2 окружностей, вписанныхъ въ треугольники ABD и ACD, найти радіусъ r окружности, вписанной въ $\triangle ABC$.

64. Опредѣлить стороны равнобедреннаго треугольника, если высоты его равны h_a и h_b.

65. Въ равнобедренномъ треугольникѣ дано основаніе a и боковая сторона b. Опредѣлить разстояніе центровъ окружности, вписанной въ этотъ тре-къ и описанной около него.

66. Въ остроугольный треугольникъ вписанъ квадратъ такъ, что одна сторона его лежитъ на основаніи тре-ка. Найти сторону квадрата, если основаніе тре-ка $= a$ и высота его $= h_a$.

67. Въ кругъ радіуса R вписаны два правильныхъ тре-ка, которые пересѣкаются между собой такъ, что каждая сторона разсѣкается на три равныя части. Найти площадь фигуры образованной ихъ пересѣченіемъ.

68. Въ треугольникѣ, котораго стороны равны 4, 5 и 6, проведены биссектриссы меньшаго угла и смежнаго съ нимъ внѣшняго угла. Найти отрѣзокъ противоположной стороны, заключенный между этими биссектриссами, и биссектриссу внѣшняго угла.

69. Стороны треугольника ABC продолжены въ одномъ направленіи: сторона AB за точку B и отложена часть $BM = m \,.\, AB$; сторона AC за точку A и отложена часть $AN = n \,.\, AC$; сторона BC за точку C и отложена часть $CK = k \,.\, BC$. Найти отношеніе площадей треугольниковъ KMN и ABC

70. Въ какомъ положеніи находятся двѣ окружности, если разность ихъ радіусовъ $= 10\frac{4}{15}$, а разстояніе между центрами составляетъ $\frac{3}{8}$ большаго и $\frac{5}{4}$ меньшаго радіуса.

71. Три окружности радіусовъ 8,4; 3,2; 3,2 находятся во внѣшнемъ соприкосновеніи. Найти длину окружности, проходящей черезъ ихъ центры.

72. Кругъ радіуса R обложенъ тремя равными кругами, касающимися даннаго круга и другъ друга. Найти радіусъ этихъ круговъ.

73. Стороны двухъ квадратовъ относятся, какъ 5 : 3. Площадь перваго превышаетъ площадь второго на 784 кв. един. Найти стороны этихъ квадратовъ.

74. Въ треугольникѣ ABC сторона AB продолжена за вершину B и проведена биссектрисса внѣшняго угла CBD, пересѣкающая продолженіе стороны AC въ точкѣ E. Оставляя основаніе AC постояннымъ, измѣняютъ стороны AB и

BC такъ, что точка E удаляется въ безконечность. Найти предѣлъ, къ которому стремится неопредѣленное отношеніе $AE : CE$.

75. Въ кубѣ проведена діагональная плоскость; площадь ея равна S. Вычислить: 1) ребро куба; 2) діагональ основанія; 3) діагональ куба; 4) поверхность куба; 5) объемъ его.

76. По боковой поверхности S_1 и полной поверхности S прямой призмы, основаніемъ которой служитъ правильный треугольникъ, вычислить: 1) сторону основанія; 2) боковое ребро; 3) объемъ призмы.

77. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ правильной шестиугольной пирамиды, у которой высота равна 1 метру, а апоѳема составляетъ съ высотой уголъ въ 30^0.

78. Вычислить объемъ треугольной усѣченной призмы, у которой стороны основанія равны $7^1/_2$; 7; $6^1/_2$ и ребра, перпендикулярныя къ основанію соотвѣтственно равны 2, 3 и 4.

79. Высота усѣченной правильной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ равна h. Сторона нижняго основанія равна a, верхняго b. Вычислить полную поверхность и объемъ.

80. Въ правильной шестигранной усѣченной пирамидѣ сторона нижняго основанія равна a, высота $= h$; уголъ наклона между апоѳемой и основаніемъ равенъ 30^0. Найти объемъ усѣченной пирамиды.

81. Въ четырехгранной правильной усѣченной пирамидѣ дана апоѳема l, уголъ образуемый ею съ плоскостью основанія равенъ 60^0 и сторона бо́льшаго основанія a. Вычислить объемъ усѣченной пирамиды.

82. Высота пирамиды равна h. Вычислить разстояніе отъ вершины пирамиды до плоскости, параллельной основанію, и дѣлящей объемъ пирамиды пополамъ.

83. Пирамида дѣлится на n равновеликихъ частей плоскостями, параллельными основанію. Зная, что одна изъ сторонъ ея основанія равна a, вычислить сходственныя стороны этихъ сѣченій.

84. Высота усѣченной треугольной пирамиды равна 6. Площади верхняго и нижняго основаній соотвѣтственно равны 8 и 18.

Пирамида разсѣчена плоскостью, параллельной основаніямъ и дѣлящей высоту пополамъ. Вычислить площадь сѣченія.

85. Правильная шестиугольная пирамида, у которой высота равна 25, а сторона основанія равна 5, разсѣчена плоскостью, параллельной основанію. Вычислить разстояніе этого сѣченія отъ вершины пирамиды, зная, что площадь его равна $10\sqrt{3}$.

86. Въ трехгранномъ углѣ $SABC$ всѣ плоскіе углы прямые. На ребрахъ его отложены части $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$. Черезъ точки A, B, C проведена плоскость. Вычислить объемъ пирамиды $SABC$.

87. Въ трехгранномъ углѣ каждый изъ плоскихъ угловъ равенъ 60^0. Опредѣлить двугранные углы.

88. Въ трехгранномъ углѣ даны 3 плоскихъ угла въ 45^0, 60^0 и 45^0. Опредѣлить двугранный уголъ, заключенный между двумя плоскими углами въ 45^0.

89. Найти отношеніе площади основанія, боковой и полной поверхности равносторонняго *) конуса.

90. Сумма объемовъ двухъ конусовъ равна V; радіусъ ихъ общаго основанія $=R$ Найти высоты этихъ конусовъ, если извѣстно, что отношеніе ихъ равно $m:n$.

91. Опредѣлить отношеніе объемовъ равностороннихъ конуса и цилиндра **), полныя поверхности которыхъ равны.

92. Боковая поверхность конуса равна S, высота его $=h$. Найти боковую поверхность цилиндра, имѣющаго одинаковыя съ конусомъ основаніе и высоту.

*) Конусъ называется *равностороннимъ*, если его образующая равна діаметру основанія.

**) Цилиндръ называется *равностороннимъ*, если его образующая равна діаметру основанія.

93. Радіусъ основанія равенъ R. Плоскость, параллельная основанію, дѣлитъ высоту конуса на двѣ части, находящіяся въ отношеніи $m : n$. Найти площадь этого сѣченія.

94. Конусъ, радіусъ основанія котораго равенъ R, раздѣленъ пополамъ плоскостью, параллельной основанію. Опредѣлить радіусъ этого сѣченія.

95. Въ усѣченномъ конусѣ образующая равна b; радіусы основаній равны R и r. Найти его объемъ.

96. Въ сосудъ, имѣющій форму конуса вливаютъ 340 граммъ ртути. Уголъ при вершинѣ конуса $= 60^\circ$, удѣльный вѣсъ ртути $= 13{,}6$. Вычислить высоту, до которой налита ртуть.

97. Объемъ конуса равенъ V; боковая поверхность его вдвое больше площади основанія. Найти радіусъ основанія и высоту конуса.

98. Цилиндръ пересѣченъ плоскостью, параллельной основанію. Центры окружностей основаній приняты за вершины конусовъ, основаніями которыхъ служитъ проведенное сѣченіе. Вычислить отношеніе суммы объемовъ этихъ конусовъ къ объему цилиндра.

99. Цилиндръ и усѣченный конусъ имѣютъ общее нижнее основаніе, равное 36π и общую высоту h. Объемы ихъ относятся какъ $12 : 7$. Вычислить радіусъ верхняго основанія усѣченнаго конуса.

100. Опредѣлить объемъ конуса, боковая поверхность котораго, будучи развернута въ плоскость, представляетъ круговой секторъ, радіуса a, съ угломъ при вершинѣ въ h°.

101. Боковая поверхность конуса $= S$; будучи развернута въ плоскость, она представляетъ круговой секторъ съ угломъ въ 36°. Найти объемъ конуса.

102. Уголъ при вершинѣ конуса $= 60^\circ$. Найти центральный уголъ его развертки.

103. Боковая поверхность конуса вдвое больше площади его основанія. Найти центральный уголъ его развертки.

104. Поверхность шарового пояса $= S$; высота его $= h$ Опредѣлить объемъ того шара, поверхности котораго принадлежитъ этотъ поясъ.

105. Опредѣлить разстояніе отъ центра шара до плоскости, отсѣкающей отъ него шаровой сегментъ, поверхность котораго $= S$.

106. Разность объемовъ двухъ концентрическихъ шаровъ равна v. Толщина слоя $= m$. Найти радіусы шаровъ.

107. Два равныхъ шара пересѣкаются такъ, что каждый шаръ проходитъ черезъ центръ другого. Найти, какой части каждаго шара равенъ объемъ части, общей обоимъ шарамъ.

108. Въ шарѣ радіуса R сдѣланъ цилиндрическій вырѣзъ; діаметръ вырѣза равенъ радіусу шара. Вычислить отношеніе объемовъ шара и вырѣза.

109. Около прямой призмы, высота которой $= h$ и основаніемъ которой служитъ треугольникъ со сторонами a, b, c, описанъ цилиндръ. Вычислить его объемъ.

110. Шаръ радіуса R усѣченъ плоскостью, проведенной на разстояніи a отъ центра. Въ каждый изъ образовавшихся шаровыхъ сегментовъ вписанъ шаръ наибольшаго діаметра. Вычислить отношеніе суммы объемовъ вписанныхъ шаровъ къ объему той части даннаго шара, которая не занята вписанными шарами.

111. Усѣченная правильная шестигранная пирамида, имѣюшая высоту $a\sqrt{2}$, сторону нижняго основанія $2a$ и сторону верхняго основанія a, достроена до полной пирамиды. Вычислить радіусъ шара, описаннаго около этой дополнительной пирамиды.

112. Въ конусъ, высота котораго $= 12$ вписанъ шаръ; радіусъ его $= 3$. Вычислить объемъ конуса.

113. Въ шаръ радіуса R вписанъ конусъ, высота котораго равна радіусу основанія. Опредѣлить радіусъ шара, вписаннаго въ этотъ конусъ.

114. Въ конусъ вписанъ шаръ радіуса r. Высота конуса $= 4r$. Найти отношеніе поверхностей и объемовъ конуса.

115. Уголъ растворенія конуса равенъ 90°. Найти отношеніе объемовъ конуса и вписаннаго въ него шара.

116. Уголъ растворенія конуса равенъ 60°. Черезъ центръ вписаннаго шара проведено сѣченіе, параллельное основанію. Найти отношеніе боковыхъ поверхностей частей, на которыя конусъ дѣлится проведенной плоскостью.

117. Въ шаръ вписанъ конусъ съ угломъ растворенія въ 120°. Найти отношеніе объемовъ шара и конуса.

118. Въ шаръ вписанъ конусъ, высота котораго, проходя черезъ центръ шара, дѣлится въ немъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Опредѣлить отношеніе объемовъ шара и конуса.

119. Въ конусъ, дающій въ сѣченіи равносторонній треугольникъ, положенъ шаръ радіуса R и налита вода, уровень которой касается шара. Опредѣлить высоту воды въ конусѣ, если шаръ будетъ вынутъ.

120. Въ правильной треугольной призмѣ, помѣщены 3 шара радіуса R. Каждый шаръ касается двухъ боковыхъ граней, двухъ другихъ шаровъ и обоихъ основаній призмы. Вычислить объемъ призмы.

121. Цилиндръ радіуса R стоитъ на столѣ и обложенъ кругомъ четырьмя равными между собой шарами. Вычислить поверхность каждаго изъ этихъ шаровъ.

122. На дно пустого цилиндра съ радіусомъ основанія r положено 10 равныхъ шаровъ, изъ коихъ каждый соприкасается къ двумъ ближайшимъ шарамъ и внутренней поверхности цилиндра. Вычислить поверхность такого шара.

123. Четыре равныхъ шара лежатъ на плоскости и касаются другъ друга. На нихъ положенъ сверху шаръ того же радіуса. Вычислить разстояніе центра его до плоскости.

124. Въ прямую призму, основаніе которой есть правильный шестиугольникъ, положены 7 равныхъ шаровъ радіуса R, которые касаются обоихъ основаній. Каждый изъ шести шаровъ касается двухъ боковыхъ граней, двухъ изъ шести шаровъ и седьмого шара, который, лежа посерединѣ, касается всѣхъ остальныхъ шести шаровъ. Вычислить объемъ призмы.

125. Въ прямую призму, основаніе которой есть правильный шестиугольникъ, положены 7 равныхъ шаровъ радіуса R. Шары эти расположены такъ: три изъ нихъ касаются попарно другъ друга и нижняго основанія; три другіе касаются попарно другъ друга и верхняго основанія, седьмой шаръ лежитъ по серединѣ и касается остальныхъ шести шаровъ. Вычислить объемъ призмы.

126. Пустой металлическій шаръ, радіусъ внѣшней поверхности котораго $= R$, погружается въ воду ровно на половину. Опредѣлить толщину оболочки шара, зная удѣльный вѣсъ металла d,

127. Пустой металлическій шаръ, толщина оболочки котораго $= m$, погружается въ воду ровно на половину. Опредѣлить радіусы внѣшней и внутренней поверхностей оболочки шара, зная удѣльный вѣсъ металла d.

128. Объемы тѣлъ, происшедшихъ отъ вращенія прямоугольнаго треугольника около двухъ катетовъ, относятся какъ $1:2$. Гипотенуза тре-ка $= a$. Опредѣлить катеты.

129. Опредѣлить объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія равносторонняго треугольника около одной изъ его сторонъ.

130. Опредѣлить отношеніе объемовъ двухъ тѣлъ, происходящихъ отъ вращенія равносторонняго треугольника вокругъ его стороны и вокругъ его высоты.

131. Стороны треугольника равны a, b, c. Опредѣлить отношеніе объемовъ тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія треугольника поочередно около каждой изъ его сторонъ.

132. Опредѣлить поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія правильнаго шестиугольника около его стороны a.

133. Опредѣлить объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія правильнаго шестиугольника около его стороны a.

134. Вычислить боковую поверхность и объемъ усѣченнаго конуса, происходящаго отъ вращенія прямоугольной трапеціи $ABCD$ (прямые углы при A и B), въ которой сторона $CD = 2a$ и радіусъ вписаннаго круга $= r$.

135. Найти отношеніе высоты равнобедреннаго треугольника къ его основанію, если извѣстно, что поверхность тѣла происшедшаго отъ вращенія тре-ка вокругъ основанія, равна поверхности шара, діаметромъ котораго служитъ основаніе этого треугольника.

136. По данному ребру a куба вычислить поверхность и объемъ вписаннаго въ него шара.

137. По данному ребру a куба вычислить поверхность и объемъ описаннаго около него шара.

138. По данному ребру a правильнаго тетраэдра вычислить его полную поверхность.

139. По данному ребру a правильнаго тетраэдра вычислить его объемъ.

140. По данной высотѣ h правильнаго тетраэдра вычислить его полную поверхность и объемъ.

141. По данному ребру a правильнаго октаэдра вычислить его поверхность.

142. По данному ребру a правильнаго октаэдра вычислить его объемъ.

143. По данному ребру a правильнаго тетраэдра вычислить поверхность и объемъ вписаннаго въ него шара.

144. По данному ребру *a* правильнаго тетраэдра вычислить поверхность и объемъ описаннаго около него шара.

145. Найти отношеніе поверхностей и объемовъ правильнаго тетраэдра и вписаннаго въ него шара.

146. Найти отношеніе поверхностей и объемовъ правильнаго тетраэдра и описаннаго около него шара.

147. Найти отношеніе боковыхъ поверхностей, полныхъ поверхностей и объемовъ конусовъ, вписанныхъ въ правильный тетраэдръ и описанныхъ около него.

148. Сторона правильнаго тетраэдра равна *a*. Вычислить сторону другого правильнаго тетраэдра, имѣющаго вдвое большую поверхность.

149. По данному ребру *a* правильнаго октаэдра найти поверхность и объемъ вписаннаго въ него шара.

150. По данному ребру *a* правильнаго октаэдра найти поверхность и объемъ описаннаго около него шара.

151. Найти отношеніе поверхностей и объемовъ октаэдра и вписаннаго въ него шара.

152. Найти отношеніе поверхностей и объемовъ октаэдра и описаннаго около него шара.

153. Найти отношеніе сторонъ правильныхъ тетраэдра и октаэдра, у которыхъ поверхности равны между собой.

154. Найти отношеніе сторонъ правильныхъ тетраэдра и октаэдра, которыхъ объемы равны между собой.

155. Найти отношеніе объемовъ правильныхъ тетраэдра и октаэдра, у которыхъ поверхности равны между собой.

156. Вычислить радіусы шаровъ, описанныхъ около правильныхъ икосаэдра и додекаэдра, а также радіусы шаровъ вписанныхъ въ эти многогранники въ зависимгсти отъ ребра ихъ a.

157. Вывести *общую формулу* для вычисленія объемовъ правильныхъ многогранниковъ по ребру ихъ a и примѣнить эту формулу ко всѣмъ правильнымъ многогранникамъ (къ кубу, тетраэдру, октаэдру, икосаэдру и додекаэдру).

158. Длины сторонъ треугольника относятся между собой какъ числа $3:4:5$; площадь треугольника равна 600. Вычислить стороны.

159. По данной площади S круга, вписаннаго въ равнобедренный треугольникъ и данному отношенію $m:n$ основанія этого треугольника къ высотѣ вычислить его площадь.

160. Въ окружность радіуса r вписанъ квадратъ; въ этотъ квадратъ вписана другая окружность, въ которую опять вписанъ квадратъ и т. д. Требуется вычислить: 1) сумму радіусовъ всѣхъ этихъ окружностей и 2) доказать, что сумма площадей всѣхъ этихъ круговъ вдвое больше площади даннаго круга.

161. Въ правильномъ шестиугольникѣ проведена меньшая діагональ и вписана окружность въ треугольникъ, отдѣленный этой діагональю. По данному радіусу $r=2\sqrt{3}-3$ вписанной въ этотъ треугольникъ окружности вычислить площадь круга, вписаннаго въ данный шестиугольникъ.

162. Вычислить радіусъ окружности, вписанной въ секторъ круга радіуса r, если уголъ при вершинѣ сектора $=60^\circ$.

163. Вычислить площадь круга, вписаннаго въ секторъ даннаго круга радіуса $r=1+\sqrt{2}$, если уголъ при вершинѣ сектора $=90^\circ$.

164. По данной площади $S=\sqrt{3}$ круга, касающагося стороны правильнаго треугольника и продолженія двухъ другихъ его сторонъ, вычислить площадь этого треугольника.

165. По даннымъ радіусамъ R и r двухъ пересѣкающихся круговъ и ихъ общей хордѣ a опредѣлить длину прямой, соединяющей центры обоихъ круговъ.

166. По даннымъ радіусамъ R и r двухъ пересѣкающихся, круговъ и длинѣ a прямой, соединяющей ихъ центры, опредѣлить длину ихъ общей хорды.

167. Опредѣлить діагонали вписаннаго въ кругъ четыреугольника, стороны котораго $a=3$, $b=4$, $c=5$, $d=6$.

168. Даны периметры двухъ вписанныхъ въ кругъ правильныхъ многоугольниковъ о n и $2n$ сторонахъ; найти периметръ вписаннаго въ тотъ же кругъ многоугольника о $4n$ сторонахъ.

169. Внутри параллелограмма взята произвольная точка и соединена съ его вершинами; опредѣлить отношеніе суммы площадей двухъ противоположныхъ треугольниковъ къ площади параллелограмма.

170. Опредѣлить площадь треугольника по a, b, m_a.

171. Опредѣлить площадь треугольника по a, b, m_c.

172. Опредѣлить площадь четыреугольника по двумъ его діагоналямъ m и n и двумъ прямымъ a и b, соединяющимъ середины противоположныхъ боковъ.

173. Можно ли составить трехгранный уголъ, котораго плоскіе углы были бы 75^0, 100^0, 130^0.

174. Можно ли составить четырегранный уголъ, у котораго плоскіе углы были бы 96^0, 108^0, 100^0 и 120^0.

175. Можно ли составить пятигранный уголъ, у котораго плоскіе углы были бы 5^0, 6^0, 7^0, 8^0 и 9^0.

176. Изъ нѣкоторой точки проведены въ пространствѣ три прямыя, составляющія углы въ 102^0, 111^0 и 137^0. Лежатъ ли эти прямыя въ одной плоскости?

177. Пирамида раздѣлена на три части въ отношеніи $m : n : p$ плоскостями, параллельными основанію данной пирамиды; опредѣлить разстоянія этихъ плоскостей до вершины пирамиды.

178. Сумма объемовъ двухъ подобныхъ многогранниковъ равна V, а отношеніе ихъ сходственныхъ реберъ $= m : n$; опредѣлить ихъ объемы.

179. Отношеніе объемовъ двухъ подобныхъ многогранниковъ равно $m:n$; разность двухъ сходственныхъ реберъ $= d$; опредѣлить эти ребра.

180. Сумма объемовъ трехъ кубовъ равна V; ребра ихъ относятся какъ $m:n:p$; опредѣлить ихъ объемы.

181. Объемы трехъ кубовъ относятся какъ $m:n:p$; сумма ихъ реберъ, взятыхъ по одному отъ каждаго куба, равна S; опредѣлить ихъ ребра.

182. Сумма поверхностей двухъ подобныхъ цилиндровъ равна P; отношеніе радіусовъ ихъ основаній равно $m : n$; опредѣлить ихъ поверхности.

183. Сумма объемовъ двухъ подобныхъ цилиндровъ равна V; отношеніе ихъ высотъ равно $m:n$; опредѣлить ихъ объемы.

184. Отношеніе поверхностей двухъ подобныхъ цилиндровъ равно $m:n$; опредѣлить ихъ объемы, если высота перваго изъ нихъ равна h, а сумма радіусовъ ихъ основаній равна a.

185. Сумма боковыхъ поверхностей двухъ подобныхъ цилиндровъ равна S; сумма радіусовъ ихъ основаній равна a, высота одного изъ нихъ $= h$; опредѣлить радіусъ его основанія.

186. Что сдѣлается съ боковой поверхностью конуса, если его образующую увеличимъ въ m разъ, а радіусъ основанія увеличимъ въ n разъ.

187. Что сдѣлается съ объемомъ и поверхностью конуса, если радіусъ основанія и высоту увеличимъ въ m разъ?

188. Что сдѣлается съ поверхностью шара, если радіусъ его увеличимъ въ m разъ?

189. Что сдѣлается съ поверхностью шара, если площадь большого круга увеличимъ въ m разъ?

190. Сумма радіусовъ трехъ шаровъ равна a; опредѣлить ихъ поверхности, зная, что онѣ находятся въ отношеніи $m:n:p$.

191. Отношеніе высотъ двухъ сегментовъ, составляющихъ въ суммѣ цѣлую поверхность шара, равно $m:n$; сумма ихъ высотъ $= h$; опредѣлить ихъ поверхности.

192. Въ шарѣ радіуса R проведена плоскость, которая раздѣлила поверхность шара въ отношеніи $m:n$. Опредѣлить объемы полученныхъ сегментовъ.

ГЛАВА IV.

Отвѣты и рѣшенія задачъ на вычисленіе.

1. Такъ какъ въ каждомъ треугольникѣ сумма двухъ сторонъ должна быть больше, а разность меньше третьей стороны, то предѣлы для стороны c будутъ:

$$1)\ 10>c>4;\quad 2)\ 17>c>7;\quad 3)\ 58>c>22.$$

2. Изъ теоріи извѣстно: *уголъ треугольника окажется прямымъ, острымъ или тупымъ, смотря по тому, будетъ ли квадратъ противолежащей стороны равенъ, меньше или больше суммы квадратовъ двухъ другихъ сторонъ* *).

Поэтому имѣемъ:

1) $12^2<10^2+8^2$ . . тре-къ остроугольный

2) $7^2>5^2+3^2$ . . тре-къ тупоугольный

3) треугольникъ невозможенъ $(14>5+8)$

4) $13^2=12^2+5^2$ . . тре-къ прямоугольный

5). $13^2>8^2+7^2$ . . тре-къ тупоугольный.

3. Если въ тре-кѣ сторона $a=5$, сторона $b=7$, то для возможности существованія тре-ка необходимо и достаточно, чтобы c было больше 2 и меньше 12.

$$12>c>2. \qquad (1)$$

Чтобы уголъ, противолежащій сторонѣ c былъ непремѣнно $<90^0$, необходимо и достаточно чтобы $c^2<5^2+7^2$, откуда

$$c<\sqrt{74}. \qquad (2)$$

---

*) См. «Геометрія Киселева» § 210.

Но для того, чтобы уголъ B, противолежащій большей изъ данныхъ сторонъ, не былъ тупымъ, необходимо и достаточно: $7^2 < 5^2 + c^2$, откуда

$$c > \sqrt{24}. \qquad (3)$$

Изъ неравенствъ (1), (2) и (3) видимъ, что сторона c должна быть меньше $\sqrt{74}$ и 12 и больше $\sqrt{24}$ и 2. Итакъ, окончательно, предѣлы для c:

$$\sqrt{74} > c > \sqrt{24}.$$

2) Повторяя тѣ же разсужденія, выводимъ

$$\sqrt{97} > c > \sqrt{65}$$

3) $$\sqrt{164} > c > 6.$$

4. 1) Если въ тре-кѣ сторона $a = 5$, сторона $b = 7$, то для возможности существованія тре-ка сторона c должна удовлетворять неравенству:

$$12 > c > 2 \qquad (1)$$

Если же уголъ C долженъ быть тупымъ, то для этого необходимо и достаточно соблюденіе неравенства $c^2 > 5^2 + 7^2$, т. е.

$$c > \sqrt{74}. \qquad (2)$$

Итакъ, окончательно предѣлы для c:

$$12 > c > \sqrt{74}.$$

2) $13 > c > \sqrt{97}$.

3) $18 > c > \sqrt{164}$.

5. 1) Если въ тре-кѣ сторона $a = 11$, сторона $b = 6$, то для возможности существованія тре-ка необходимо и достаточно:

$$17 > c > 5. \qquad (1)$$

Для того же, чтобы уголъ A былъ $> 90^0$, необходимо и достаточно соблюденіе неравенства $11^2 > c^2 + 6^2$, откуда

$$c < \sqrt{85}. \qquad (2)$$

Изъ соединенія неравенствъ (1) и (2) получаемъ искомые предѣлы для c:

$$\sqrt{85} > c > 5.$$

2) $\sqrt{125} > c > 5.$

3) Задача невозможна, такъ какъ по условію сторона a меньше стороны b.

6. На основаніи извѣстныхъ изъ теоріи необходимыхъ и достаточныхъ признаковъ различныхъ случаевъ относительнаго положенія двухъ окружностей *), имѣемъ:

1) $25>d>5$; 2) $d=5$; 3) $d=25$; 4) $d<5$; 5) $d>25$.

7. Изъ теоріи извѣстно, что *изъ всякой вершины многоугольника можно въ немъ провести столько діагоналей, сколько въ многоугольникѣ имѣется сторонъ безъ трехъ*. На основаніи этого имѣемъ уравненіе:

$$n-3=\frac{n}{2}+5.$$

откуда $n=16$.

8. Изъ уравненія: $n-3=3n-25$, находимъ $n=11$. Сумма внутреннихъ угловъ этого многоугольника $=2d\,.\,(n-2)=$ $=2d\,.\,9=18d$.

9. Изъ каждой вершины десятиугольника можно провести $10-3=7$ діагоналей; но если изъ каждой вершины провести *всѣ* возможныя діагонали, то каждая изъ нихъ повторится два раза (напр. діагональ AE встрѣтится въ числѣ діагоналей, проведенныхъ изъ вершины A, и изъ вершины E). Поэтому число *всѣхъ* діагоналей десятиугольника не будетъ равно 7.10, а будетъ вдвое меньше, т. е. 35.

Вообще, число всѣхъ діагоналей, которыя можно провести въ n—угольникѣ, выражается формулой $\frac{n(n-3)}{2}$.

2) 90; 3) 252.

---

*) См. «Геометрія Киселева» §§ 137 и 138.

10. Изъ уравненія $M=2d\,.\,(n-2)$, гдѣ M означаетъ сумму внутреннихъ угловъ многоугольника, n—число его сторонъ, получаемъ:

1) 10; 2) 14; 3) 24.

11. Каждый внутренній уголъ правильнаго многоугольника о n сторонахъ равенъ $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

Изъ этой формулы находимъ: 1) $n=10$; 2) $n=5$; 3) $n=24$; 4) прав. многоуг. съ угломъ въ 170° невозможенъ. ?

12. 1) Сумма внутреннихъ угловъ многоугольника есть всегда число, кратное 180° между тѣмъ

$$423^\circ=2\,.\,180^\circ+63^\circ;$$

поэтому ясно, что 63° представляетъ собой *внѣшній уголъ*, а сумма внутреннихъ угловъ $=2\,.\,180^\circ$, откуда слѣдуетъ, что данный многоугольникъ есть четыреугольникъ. 2) Также $2000^\circ=180^\circ.11+20^\circ$, откуда видно, что внѣшній уголъ$=20^\circ$, а сумма внутреннихъ угловъ $=180^\circ.11$ т. е. данный многоугольникъ имѣетъ 13 сторонъ.

13. Сумма внутреннихъ угловъ многоугольника есть всегда число, кратное $2d$. Поэтому очевидно, что въ данномъ многоугольникѣ внѣшній уголъ равенъ $1^1/_5 d$, а сумма внутреннихъ угловъ его $=18d$, т. е. это есть одиннадцатиугольникъ.

14. На основаніи извѣстной формулы *)

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

находимъ: 1) $S=360$; 2) $S=3\sqrt{231}$; 3) $S=\frac{3}{4}\sqrt{2175}$
4) треугольникъ невозможенъ $(23>8+13)$.

15. 1) $h_a=24\frac{24}{29}$; $h_b=28{,}8$; $h_c=20$.
2) $h_a=\frac{1}{2}\sqrt{231}$; $h_b=\frac{3}{5}\sqrt{231}$; $h_c=\frac{3}{10}\sqrt{231}$
3) задача невозможная $(17>10+6)$.
4) $h_a=\frac{3}{20}\sqrt{2175}$; $h_b=\frac{1}{8}\sqrt{2175}$; $h_c=\frac{3}{14}\sqrt{2175}$.

*) См. «Геометрія Киселева» § 278.

16 *). 1) Задача невозможная ($32 > 17 + 14$).

2) $m_a = \sqrt{750{,}25}$; $m_b = \sqrt{912{,}25}$; $m_c = \sqrt{409}$.

3) $m_a = \sqrt{214}$; $m_b = \sqrt{247}$; $m_c = \sqrt{22}$.

4) $m_a = \sqrt{71{,}5}$; $m_b = \sqrt{38{,}5}$; $m_c = \sqrt{109{,}75}$.

17 **). 1) $\beta_A = \frac{720\sqrt{5}}{61}$; $\beta_B = \frac{72\sqrt{29}}{13}$; $\beta_C = \frac{5\sqrt{145}}{3}$.

2) Задача невозможная ($97 = 56 + 41$).

3) $\beta_A = 2\sqrt{42}$; $\beta_B = \frac{\sqrt{3465}}{4}$; $\beta_C = \frac{6\sqrt{70}}{11}$.

4) $\beta_A = \frac{6\sqrt{609}}{19}$; $\beta_B = \frac{5\sqrt{409}}{17}$; $\beta_C = \frac{5\sqrt{174}}{11}$.

18 ***). 1) $R = 18\frac{1}{8}$; $r = 8$.

2) $R = \frac{200}{\sqrt{231}}$; $r = \frac{\sqrt{231}}{7}$.

3) $R = \frac{56}{\sqrt{87}}$; $r = \frac{3\sqrt{2175}}{58}$.

19 ****). 1) $\rho_a = 12\frac{1}{2}$; $\rho_b = 18$; $\rho_c = 40$.

2) $\rho_a = \frac{1}{3}\sqrt{231}$; $\rho_b = \frac{3}{11}\sqrt{231}$; $\rho_c = 3\sqrt{231}$.

3) $\rho_a = \frac{1}{6}\sqrt{2175}$; $\rho_b = \frac{3}{10}\sqrt{2175}$; $\rho_c = \frac{1}{10}\sqrt{2175}$.

20. Изъ уравненій

$$2S = a\,.\,h_a;\quad 2S = b\,.\,h_b;\quad 2S = c\,.\,h_c$$

опредѣляемъ:

$$a = \frac{2S}{h_a};\quad b = \frac{2S}{h_b};\quad c = \frac{2S}{h_c}$$

---

*) См. «Геометрія Киселева» § 213.

**) См. «Геометрія Киселева» § 221.

***) См. «Геометрія Киселева» § 221 и 302.

****) См. «Геометрія Киселева» § 302.

и подставляемъ эти значенія въ формулу для площади:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

получаемъ:

$$S = S^2 \sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}$$

откуда опредѣляется S.

21. Если изъ трехъ медіанъ тре-ка составить новый тре-къ, то площадь его будетъ равна $\frac{3}{4}$ площади даннаго *). Но площадь S_1 тре-ка, стороны котораго равны m_a, m_b, m_c выражается формулой

$$S_1 = \sqrt{p_1(p_1-m_a)(p_1-m_b)(p_1-m_c)};$$

гдѣ

$$2p_1 = m_a + m_b + m_c.$$

А потому искомая площадь

$$S = \tfrac{4}{3} S_1 = \tfrac{4}{3}\sqrt{p_1(p_1-m_a)(p_1-m_b)(p_1-m_c)}.$$

22. Если медіану CO даннаго тре-ка ABC (черт. 16) продолжить до точки D, такъ чтобы $OD = OC$ и соединить D съ A и B, то $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$.

Но въ тре-кѣ ADC извѣстны всѣ три стороны

$$(AC = b, \quad AD = BC = a, \quad DC = 2m_c),$$

а потому площадь его можетъ быть опредѣлена.

Обозначивъ $a + b + 2m_c = 2p_1$, имѣемъ

$$\triangle ABC \equiv \triangle ADC = \sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-b)(p_1-2m_c)}.$$

23. Если въ тре-кѣ ABC даны: $BC=a$, $AC=b$ и $CD=\beta_c$, то на основаніи извѣстныхъ теоремъ:

1. Произведеніе двухъ сторонъ тре-ка равно квадрату биссектриссы угла, заключеннаго между ними, сложенному съ произведеніемъ отрѣзковъ третьей стороны. (Кис. § 220).

2. Биссектрисса угла треугольника дѣлитъ противолежащую сторону на части, пропорціональныя двумъ другимъ сторонамъ (Кис. § 198).

$$a \,.\, b = \beta^2 c + AD \,.\, BD \qquad (1)$$

$$AD : BD = b : a \qquad (2)$$

---

*) См. задачу № 50, стр. 76. 80

Изъ этихъ двухъ ур-ій опредѣляются отрѣзки AD и BD, послѣ чего вычисляемъ каждую изъ двухъ площадей ($\triangle ACD$ и $\triangle BCD$) по тремъ сторонамъ, и наконецъ получаемъ сложеніемъ искомую площадь

$$S = \triangle ACD + \triangle BCD.$$

24. Опредѣленіе площади тре-ка по двумъ сторонамъ и углу между ними, при помощи геометріи, можетъ быть произведено только для нѣкоторыхъ значеній угла, напр. для тѣхъ десяти значеній, которые приведены въ условіи и еще для нѣсколькихъ случаевъ. Въ общемъ же видѣ рѣшеніе этого вопроса относится къ тригонометріи, гдѣ выводится формула $S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin C$.

Общій ходъ геометрическаго рѣшенія подобныхъ задачъ состоитъ въ слѣдующемъ.

Положимъ въ тре-кѣ ABC (черт. 65) намъ извѣстны двѣ стороны $BC=a$, $AC=b$ и уголъ между ними C. Проводимъ высоту на одну изъ данныхъ сторонъ и смотримъ, какой изъ двухъ острыхъ угловъ въ прямоугольномъ тре-кѣ ACD дастъ возможность опредѣлить противолежащій катетъ, какъ половину правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса AC. Напр. если $\angle C=18°$, то описываемъ изъ точки C дугу радіусомъ b и продолжаемъ высоту AD до пересѣченія съ этой дугой въ точкѣ E. Тогда $\angle ACE=2 \cdot 18°=36°$, а потому AE есть сторона правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса b, и слѣд.

$$AD = \tfrac{1}{2}AE = b \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Если $\angle C = 75°$, то $\angle CAD = 15°$, а слѣд., если изъ точки A радіусомъ b описать дугу, пересѣкающую BC въ точкѣ F, то $\angle CAF=30°$, а потому CF, есть сторона правильнаго двѣнадцатиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса b и слѣд.

$$CD = \tfrac{1}{2}CF = \frac{b}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

послѣ чего высота AD найдется изъ прямоугольнаго тре-ка ACD:

$$AD=\sqrt{b^2-CD^2}.$$

Примѣняя этотъ способъ, получаемъ слѣдующіе отвѣты:

1) $\frac{ab(\sqrt{5}-1)}{8}$; 2) $\frac{ab}{4}$; 3) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$; 4) $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$; 5) $\frac{ab\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$;

6) То же, что и 1. 7) То же, что 2. 8) То же, что 3. 9) То же, что 4. 10) То же, что 5.

25. Третья сторона c найдется на основаніи извѣстныхъ теоремъ о квадратѣ стороны противъ остраго или тупого угла, причемъ отрѣзокъ отъ вершины остраго или тупого угла до высоты (CD) найдется по способу, указанному при рѣшеніи предыдущей задачи.

Отвѣты:

1) $c=\sqrt{a^2+b^2-\frac{ab}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$; 2) $c=\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{3}}$;

3) $c=\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}$; 4) $c=\sqrt{a^2+b^2-ab}$;

5) $c=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+4b^2-2ab(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$;

6) $c=\sqrt{a^2+b^2+\frac{ab}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$;

7) $c=\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{3}}$; 8) $c=\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$;

9) $c=\sqrt{a^2+b^2+ab}$; 10) $c=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+4b^2+2ab(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$.

26. Опустивъ изъ вершины A (черт. 66) высоту AD на сторону $BC=a$, замѣчаемъ, что въ прямоугольномъ тре-кѣ ABD уголъ $B=30^\circ$, а потому противолежащій этому углу катетъ AD равенъ половинѣ гипотенузы AB. Поэтому, обозначая AD буквой h, имѣемъ:

$$h^2+BD^2=4h^2,\ \text{откуда}\ BD=h\sqrt{3}. \tag{1}$$

Въ прямоуг. тре-кѣ ADC уголъ $C=45^\circ$, а потому этотъ треугольникъ равнобедренный, такъ что

$$DC=h. \tag{2}$$

Складывая равенства (1) и (2) получаемъ:

$$BD + DC = \overset{BC}{\cancel{AC}} = a = h\,(\sqrt{3} + 1), \text{ откуда}$$

$$h = \frac{a}{\sqrt{3}+1} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

Послѣ этого находимъ площадь и стороны:

$$S = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3} - 1);\quad b = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1);\quad c = a\,(\sqrt{3} - 1).$$

27 *). 1) $c = \frac{1}{15}(6\sqrt{851} + 7\sqrt{189});$

2) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}(5\sqrt{13} + 4\sqrt{5}).$

28. Изъ приведеннаго выше (стр. 20 зад. № 7) рѣшенія задачи на построеніе треугольника по даннымъ тремъ его медіанамъ видно, что для возможности построенія, необходимо и достаточно, чтобы сумма двухъ медіанъ была больше, а разность меньше третьей. На основаніи этого заключаемъ: 1) треугольникъ возможенъ; 2) треугольникъ не возможенъ ($m_a > m_b + m_c$).

29. Обозначимъ въ трапеціи $ABCD$ (черт. 32) стороны буквами a, b, c, d. Проведемъ $BE \parallel CD$. Тогда въ тре-кѣ ABE извѣстны всѣ три стороны: $AB = a$, $BE = c$, $AE = d - b$ и слѣд. изъ этого тре-ка можно опредѣлить высоту на сторону AE, которая будетъ также высотой данной трапеціи.

Отвѣтъ:

$$S = \frac{b+d}{4(d-b)}\sqrt{(a+b+c-d)(a-d+c+b)(a+d-c-b)(-a+d+c-b)}.$$

30. Обозначимъ въ трапеціи $ABCD$ (черт. 67) стороны: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ и діагонали $BD = x$ и $AC = y$. Проводимъ высоту AE и прямую $AG \parallel DC$.

Изъ тре-ка ABC имѣемъ:

$$y^2 = a^2 + b^2 - 2b\,.\,BE. \qquad (1)$$

---

*) См. «Геометрія Киселева», § 217.

Изъ тре-ка ABG:

$$AG^2=a^2+BG^2-2BG\,.\,BE, \text{ или}$$
$$c^2=a^2+(b-d)^2-2(b-d)\,.\,BE. \qquad (2)$$

Опредѣливъ изъ равенства (2) BE и подставивъ въ (1), получимъ:

$$y^2=\sqrt{\frac{b(b^2-a^2)+b(c^2-d^2)}{b-d}}.$$

Совершенно тѣмъ же способомъ опредѣлится и другая діагональ BD трапеціи.

31. Назовемъ въ трапеціи $ABCD$ (черт. 67) діагонали $BD=d_1$ и $AC=d_2$ и высоту $AE=DF=h$.

Изъ прямоугольнаго тре-ка BDF имѣемъ:

$$BF=\sqrt{BD^2-DF^2}=\sqrt{d_1{}^2-h^2}.$$

Также изъ $\triangle ACE$:

$$EC=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{d_2{}^2-h^2}.$$

Площадь трапеціи выражается формулой:

$$(AD+BC)\,.\,\frac{h}{2}=(EF+BC)\,.\,\frac{h}{2}=(BF+EC)\,.\,\frac{h}{2}\cdot$$

32. Если въ трапеціи $ABCD$ (черт. 67) провести $AG \parallel DC$ то не трудно доказать, что длина прямой, соединяющей середины двухъ параллельныхъ сторонъ трапеціи, равна длинѣ медіаны стороны BG въ тре-кѣ ABG. Но въ $\triangle ABG$ извѣстны всѣ три стороны ($AB=a$, $BG=b-d$, $AG=c$), а потому

$$BG=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-(b-d)^2}.$$

33. Обозначимъ параллельныя стороны AD и BC трапеціи $ABCD$ (черт. 68) буквами a и b.

Прямая KL, проведенная черезъ точку пересѣченія діагоналей O, параллельно основаніямъ, дѣлится въ этой точкѣ пополамъ.

Обозначимъ каждый изъ равныхъ отрѣзковъ KO и LO буквой x. Проводимъ изъ точки C прямую $CE \parallel BD$ до пере-

---

*) См. рѣш. задачи № 32, стр. 54.

сѣченія съ продолженіемъ AD въ точкѣ E и продолжаемъ KL до пересѣченія съ CE въ точкѣ M.

Изъ подобія тре-ковъ CAD и COL имѣемъ:

$$OL : AD = CL : CD, \text{ или } x : a = CL : CD \qquad (1)$$

Также изъ подобія тре-ковъ CAE и COM:

$$OM : AE = CL : CD, \text{ или } b : (a+b) = CL : CD. \qquad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) слѣдуетъ:

$$x : a = b : (a+b), \text{ откуда } x = \frac{ab}{a+b},$$

а слѣд. искомая прямая $KL = 2x = \dfrac{2ab}{a+b}$.

34. По условію задачи, трапеціи $ABNM$ и $DCNM$ равновелики. Обозначивъ отрѣзокъ BN буквой x и высоту трапеціи буквой h имѣемъ равенство:

$$(x+a)\frac{h}{2} = (c-x+b)\frac{h}{2},$$

откуда $x = \frac{1}{2}(b+c-a)$.

35. Пусть $ABCD$ (черт. 69) есть данная трапеція, въ которой $AD=a$, $BC=b$ и $KL=x$ есть прямая, параллельная основаніямъ и дѣлящая площадь трапеціи въ отношеніи $m : n$. Имѣемъ:

$$\frac{AKLD}{KBCL} = \frac{(x+a) \cdot \dfrac{KF}{2}}{(x+b) \cdot \dfrac{BE}{2}} = \frac{m}{n} \ \ldots \qquad (1)$$

Для того, чтобы опредѣлить отношеніе $\dfrac{KF}{BE}$, проводимъ $BG \parallel CD$ и $KH \parallel CD$. Изъ подобія тре-ковъ KBG и AKH имѣемъ:

$$KF : BE = AH : KG = (a-x) : (x-b).$$

Подставляя это значеніе отношенія $KF : BE$ въ равенство (1) получаемъ:

$$\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2} = \frac{m}{n}, \text{ откуда } x = \sqrt{\frac{na^2+mb^2}{m+n}}.$$

36. Опуская изъ вершинъ B и D четыреугольника $ABCD$ (черт. 70) перпендикуляры DE и BF на діагональ $AC = d_1$, имѣемъ:

$$\text{площ. } ABCD = \triangle ABC + \triangle ADC = \tfrac{1}{2} AC \,.\, BF + \tfrac{1}{2} AC \,.\, DE = \\ = \tfrac{1}{2} AC(BF + DE)\,. \qquad (1)$$

Проведя прямую $DK \parallel AC$ до пересѣченія съ продолженіемъ BF въ точкѣ K, замѣчаемъ, что $BK = BF + DE$, а потому равенство (1) переписываемъ такъ:

$$\text{площ. } ABCD = \tfrac{1}{2} AC \,.\, BK \qquad (2)$$

Но въ прямоугольномъ тре-кѣ DBK уголъ $BDK = \angle AOB = 60^\circ$, слѣд. $DK = \frac{1}{2} BD$, а $BK = BD \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Подставляя это значеніе BK въ равенство (2) получаемъ:

$$\text{площ. } ABCD = \tfrac{1}{4} AC \,.\, BD \sqrt{3} = \tfrac{1}{4} d_1 d_2 \sqrt{3}.$$

37. На хордѣ (черт. 71) $AB = a$ построены два сегмента: AKB (центръ въ точкѣ O), вмѣщающій дугу въ 120° и ALB (центръ въ точкѣ O_1), вмѣщающій дугу въ 135°. Если сегментъ AKB вмѣщаетъ уголъ въ 120°, то дуга $AMB = 240^\circ$, а слѣд. дуга $AKB = 360 - 240 = 120^\circ$, а потому AB есть сторона правильнаго тре-ка, вписаннаго въ кругъ O радіуса AO. Изъ равенства $AB = a = AO \,.\, \sqrt{3}$, получаемъ $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Если сегментъ ALB вмѣщаетъ уголъ въ 135°, то дуга $ANB = 270^\circ$, а слѣд. дуга $ALB = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$, а потому AB есть сторона квадрата, вписаннаго въ кругъ O_1 радіуса AO_1. Изъ равенства $AB = a = AO_1 \,.\, \sqrt{2}$, получаемъ $AO_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Искомая площадь луночки $AKBL$ равна разности площадей двухъ сегментовъ: $AKB - ALB$.

Площ. сегм. $AKB =$ *площ. сект.* $AOBK -$ *площ.* $\triangle AOB$.

Площ. сегм. $ALB =$ *площ. сект.* $AO_1BL -$ *площ.* $\triangle AO_1B$.

Секторъ $AOBK$ составляетъ $\frac{1}{3}$ круга O, а потому

Площ. сект. $AOBK = \frac{1}{3}\pi\, AO^2 = \frac{\pi a^2}{9}$

пл. $\triangle AOB = \frac{1}{2}.AB.OC = \frac{1}{2}a \,.\, \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AC}^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4}} =$

$= \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$

Слѣд. *площ. сегм.* $AKB = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$ (1)

Секторъ AO_1BL составляетъ $\frac{1}{4}$ круга O_1, а потому

Площ. сект. $AO_1BL = \frac{1}{4}\pi \,.\, AO_1^{\,2} = \frac{\pi a^2}{8}$

Пл. $\triangle AO_1B = \frac{1}{2}AB \,.\, O_1C = \frac{1}{2}a \,.\, \sqrt{\overline{O_1A}^2 - \overline{AC}^2} =$

$= \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{4}$

Слѣд. *площ. сегм.* $ALB = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}.$ (2)

Итакъ, площадь искомой луночки выразится:

$$\left(\frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\right) - \left(\frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{72}(18 - 6\sqrt{3} - \pi).$$

38. Очевидно, что хорда AC, стягивающая дугу въ 30°, есть сторона правильнаго двѣнадцатиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса R, т. е. равна $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Также AB — есть сторона правильнаго шестиугольника и слѣд. равна R, и наконецъ BC стягиваетъ дугу въ 90° и слѣд. есть сторона квадрата, т. е. равна $R\sqrt{2}$. Итакъ, въ $\triangle ABC$ извѣстны всѣ три стороны и потому нахожденіе площади его не представитъ затрудненій.

39. Хорда, стягивающая дугу въ 120° есть сторона правильнаго тре-ка. Изъ уравненія $a = R\sqrt{3}$, получаемъ $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, а слѣд. площадь круга $= \pi R^2 = \frac{1}{3}\pi a^2$.

40. Вычисленіе діагоналей вписаннаго четыреугольника по четыремъ сторонамъ см. въ „Геометріи Киселева“, § 214.

41. Если раздѣлить четвертую сторону четыреугольника $KLMN$ пополамъ въ точкѣ D и соединить точку D съ A, B и C, то нетрудно доказать, что фигура $ABCD$ есть параллелограммъ и что площадь этого параллелограмма составляетъ половину площади четыреугольника $KLMN$.

Отсюда ясно, что $\triangle ABC = \frac{1}{4}$ *площ. четыреуг.* $KLMN$.

42. Обозначая радіусъ меньшей окружности буквой x, имѣемъ, по условію, что радіусъ большей окружности$=2\pi x$. Площадь большей окружности $= \pi(2\pi x)^2 = 4\pi^3 x^2$; площадь меньшей $=\pi x^2$. Разность этихъ площадей по условію равна S. Изъ уравненія:

$$4\pi^3 x^2 - \pi x^2 = S, \text{ находимъ } x = \sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}.$$

Слѣд. длина меньшей окружности равна

$$2\pi x = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi^2(4\pi^2-1)}} = 2\sqrt{\frac{S\,.\,\pi}{4\pi^2-1}},$$

длина большей окружности равна

$$2\pi\left(2\sqrt{\frac{S\pi}{4\pi^2-1}}\right) = 4\sqrt{\frac{S\pi^3}{4\pi^2-1}}.$$

43. Обозначая искомую сторону правильнаго пятиугольника буквой x, опредѣляемъ сторону правильнаго десятиугольника по формулѣ удвоенія:

$$a_{10} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}} = R\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}.$$

Возведя обѣ части этого ур-ія въ квадратъ и произведя соотвѣтствующія алгебраическія преобразованія, найдемъ

$$x = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

44. По формулѣ удвоенія найдемъ:

$$a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}};\ a_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

45. По формулѣ удвоенія найдемъ:

$a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; послѣ чего получилъ $b_{12} = 2R(2 - \sqrt{3})$.

46. Вычисленіе стороны правильнаго пятнадцатиугольника въ зависимости отъ радіуса R см. въ „Геометріи Киселева“, § 238.

47. Радіусъ круга, вписаннаго въ квадратъ со стороной a равенъ $\frac{a}{2}$, слѣд. сторона правильнаго двѣнадцатиугольника, вписаннаго въ этотъ кругъ равна $\frac{a}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

48. Если обозначить искомый радіусъ буквой R, то сторона описаннаго правильнаго тре-ка равна $2R\sqrt{3}$; сторона вписаннаго квадрата $= R\sqrt{2}$. Изъ уравненія: $2R\sqrt{3} - R\sqrt{2} = a$ находимъ

$$R = \frac{a}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{a}{10}(2\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

49. См. „Геометрія Киселева“, § 240.

50. Во всякомъ *вписанномъ* въ кругъ шестиугольникѣ одна діагональ равна діаметру круга $2R$, а двѣ другія діагонали представляютъ стороны правильныхъ вписанныхъ треугольниковъ, т. е. равны $R\sqrt{3}$. Такъ какъ прав. описанный шестиугольникъ подобенъ прав. вписанному, то

$$\frac{\textit{діагон. опис. шестиуг.}}{\textit{діагон. впис. шестиуг.}} = \frac{\textit{стор. опис. шест.}}{\textit{стор. впис. шест.}}$$

Но отношеніе сторонъ правильныхъ описаннаго и вписаннаго шестиугольниковъ равно $\frac{2R}{\sqrt{3}} : R = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Слѣд. искомыя діагонали прав. описаннаго шестиугольника равны: 1) $2R \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{4R}{3}\sqrt{3}$; 2 и 3) $R\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = 2R$.

51. Большая діагональ правильнаго, вписаннаго въ кругъ, радіуса R, шестиугольника $=2R$, меньшая $=R\sqrt{3}$. Изъ уравненія $2R-R\sqrt{3}=a$, находимъ $R=\frac{a}{2-\sqrt{3}}=a(2+\sqrt{3})$.

52. 1) $\frac{a}{3}\sqrt{3}$; 2) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$; 3) $\frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$; 4) a;

5) $\frac{a}{2}\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$; 6) $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$; 7) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

53. 1) $\frac{a}{6}\sqrt{3}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$; 4) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$;

$\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})$; 6) $\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; 7) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$.

54. Обозначимъ искомый радіусъ круга вписаннаго буквой x и круга описаннаго буквои y. Замѣтимъ, что между тремя величинами: стороной многоугольника и радіусами круговъ вписаннаго въ него и описаннаго существуетъ всегда опредѣленная зависимость; именно эти три величины образуютъ всегда на чертежѣ прямоугольный тре-къ въ которомъ гипотенузой скужитъ радіусъ описаннаго круга, а катетами— радіусъ вписаннаго круга и половина стороны многоугольника. Итакъ, сторона даннаго правильнаго многоугольника равна $2\sqrt{R^2-r^2}$.

Такъ какъ новый многоугольникъ по условію долженъ имѣть вдвое больше сторонъ при томъ же периметрѣ, то каждая сторона его будетъ вдвое меньше, т. е. равна $\sqrt{R^2-r^2}$. Но эта сторона можетъ быть еще выражена въ зависимости отъ радіусовъ описаннаго (y) и вписаннаго (x) формулой $2\sqrt{y^2-x^2}$. Такимъ образомъ имѣемъ первое уравненіе.

$$\sqrt{R^2-r^2}=2\sqrt{y^2-x^2} \qquad (1)$$

Если мы удвоимъ число сторонъ даннаго правильнаго многоугольника по извѣстной формулѣ удвоенія, то получимъ, что сторона многоугольника съ удвоеннымъ числомъ сторонъ выразится формулой:

$$\sqrt{2R(R-r)}$$

Такъ какъ всѣ правильные многоугольники подобны между собой и стороны ихъ относятся какъ радіусы описанныхъ (или вписанныхъ) круговъ, то

$$\frac{\sqrt{2R(R-r)}}{\sqrt{R^2-r^2}}=\frac{R}{y} \qquad (2)$$

Изъ этого уравненія опредѣляемъ $y=\sqrt{\frac{R(R+r)}{2}}$, а подставляя это значеніе въ ур-іе (1) находимъ:

$$x=\frac{R+r}{2}.$$

55. Проведя въ окружности единичнаго радіуса произвольный діаметръ AB, отложимъ отъ точки A хорды a и b по обѣ стороры (для опредѣленія хорды, стягивающей сумму дугъ) или по одну сторону (для опредѣленія хорды, стягивающей разность дугъ). Соединяя концы этихъ хордъ съ точкой B, получимъ вписанный четыреугольникъ, къ которому примѣняемъ теорему Птоломея *).

Отвѣты: Хорда, соотвѣтствующая суммѣ дугъ =

$$=\frac{1}{2}(a\sqrt{4-b^2}+b\sqrt{4-a^2});$$

хорда, соотвѣтствующая разности дугъ =

$$=\frac{1}{2}(a\sqrt{4-b^2}-b\sqrt{4-a^2}).$$

56. Меньшая изъ двухъ дугъ, стягиваемыхъ хордой, дѣлящей окружность въ отношеніи 2 : 3 содержитъ

$$\frac{2 \cdot 360^\circ}{5}=144^\circ.$$

Меньшая изъ двухъ дугъ, стягиваемыхъ хордой, дѣлящей окружность въ отношеніи 7 : 8 содержитъ

$$\frac{7 \cdot 360^\circ}{15}=168^\circ.$$

*) См. «Геометрія Киселева» § 215.

Такимъ образомъ, двѣ равныя дуги, заключенныя между этими параллельными хордами, содержатъ $168^0 - 144^0 = 24^0$, а потому каждая изъ нихъ содержитъ 12^0.

57. По условію задачи хорда AB (черт. 72) дѣлитъ дугу CD въ точкѣ A въ отношеніи $1 : 2$. Поэтому если обозначить число градусовъ въ дугѣ AC буквой x, то число градусовъ въ дугѣ $AD = 2x$. Хорда DC дѣлитъ по условію дугу AB въ точкѣ C въ отношеніи $1 : 3$, слѣд. число градусовъ въ дугѣ $BC = 3x$.

Уголъ AOD по условію прямой; онъ измѣряется полусуммой AD и BC. Слѣдовательно:

$$\frac{2x+3x}{2} = 90^0, \text{ откуда } x = 36^0.$$

Итакъ, AB стягиваетъ дугу въ $4x$, т. е. въ 144^0, а хорда CD стягиваетъ дугу въ $3x$, т. е. въ 108^0.

58. Соединивъ вершину C тре-ка ABC точкой D дѣлящей его основаніе на два отрѣзка m и n, и проведя высоту CE, пишемъ изъ треугольника CAD:

$$CD^2 = b^2 + n^2 \pm 2n \,.\, AE \text{ *)}.$$

Величина AE опредѣлится ихъ прямоуг. тре-ка ACE : $AE = \sqrt{b^2 - h^2}$, гдѣ h—высота тре-ка, легко опредѣляемая по его сторонамъ.

59. Пусть ABC (черт. 73) есть данный тре-къ и точка D дѣлитъ основаніе AC на двѣ части въ отношеніи $m : n$.

Такъ какъ $DF \parallel BC$, то $\triangle ADF \sim \triangle ABC$, а потому

$$\frac{\triangle ADF}{\triangle ABC} = \frac{AD^2}{AC^2}.$$

---

*) Знакъ $+$ или $-$ зависитъ отъ того, будетъ ли $\angle A$ въ тре-кѣ ABC острымъ или тупымъ, что необходимо опредѣлить заранѣе по даннымъ численнымъ значеніямъ сторонъ треугольника [a, $(m+n)$, b].

Изъ равенства $\frac{AD}{DC}=\frac{m}{n}$, слѣдуетъ: $\frac{AD}{AC}=\frac{m}{m+n}$.

а слѣд.
$$\frac{\triangle ADF}{\triangle ABC}=\left(\frac{m}{m+n}\right)^2$$

Также найдемъ:
$$\frac{\triangle CDE}{\triangle ABC}=\left(\frac{m}{m+n}\right)^2$$

Послѣ чего нетрудно получить:
$$\frac{DFBE}{\triangle ABC}=\frac{2mn}{(m+n)^2}$$

60. Треугольникъ, стороны котораго перпендикулярны сторонамъ даннаго, будетъ ему подобенъ, слѣд. обозначая его катеты буквами b_1 и c_1 имѣемъ:

$$\frac{b_1}{b}=\frac{a_1}{a}, \text{ откуда } b_1=\frac{a_1 b}{a}.$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{a_1}{a}, \text{ откуда } c_1=\frac{a_1\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

61. Пусть окружность O (черт. 74) проходитъ черезъ точку D, середину катета AC и касается гипотенузы BC въ ея серединѣ E. Соединивъ точки O съ E и D съ E и опустивъ изъ O перпендикуляръ OF на DE, замѣчаемъ, что прямоугольные тре-ки OEF и ABC подобны, такъ какъ ихъ стороны взаимно перпендикулярны. Слѣдовательно:

$$OE : EF = BC : AC \qquad (1)$$

Прямая ED, соединяя середины двухъ сторонъ тре-ка ABC параллельная третьей сторонѣ AB и равна ея половинѣ; т. е. $DE=6$; прямая $EF=\frac{1}{2}DE=3$; гипотенуза $BC=\sqrt{5^2+12^2}=13$; катетъ $AC=5$.

Поэтому изъ равенства (1) имѣемъ:
$OE : 3=13 : 5$, откуда OE, т. е. радіусъ проведенной окружности$=\frac{39}{5}$, а слѣд. искомая площадь круга$=\pi\left(\frac{39}{5}\right)^2=$

$$=\frac{1521}{25}\pi.$$

62. Обозначая гипотенузу даннаго тре-ка буквой x, имѣемъ уравненіе:

$$(x-4)^2+(x-2)^2=x^2,$$

откуда $x=10$ (второе рѣшеніе $x=2$ не годится). Слѣд. катеты этого тре-ка равны 6 и 8. Радіусъ вписаннаго круга опредѣлится изъ формулы $r=\frac{S}{p}=\frac{24}{12}=2$. Слѣд. искомая площадь вписаннаго круга $=4\pi$.

63. Опустивъ изъ вершины A прямого угла въ тре-кѣ ABC (черт. 75) перпендикуляръ AD на гипотенузу и проведя биссектриссы угловъ ABC, ACB, BAD и CAD, найдемъ въ пересѣченіи ихъ точки O_1, O_2 и O—центры круговъ, вписанныхъ въ треугольники ABD, ACD и ABC.

Треугольники: AO_1B, AO_2C и BOC подобны между собой такъ какъ

$$\left.\begin{aligned}&\angle ABO_1=\frac{\angle B}{2}\\&\angle CAO_2=\frac{\angle CAD}{2}=\frac{\angle B}{2}\\&\angle OBC=\frac{\angle B}{2}\end{aligned}\right\}\ \angle ABO_1=\angle CAO_2=\angle OBC$$

$$\left.\begin{aligned}&\angle BAO_1=\frac{\angle BAD}{2}=\frac{\angle C}{2}\\&\angle ACO_2=\frac{\angle C}{2}\\&\angle OCB=\frac{\angle C}{2}\end{aligned}\right\}\ \angle BAO_1=\angle ACO_2=\angle OCB.$$

Изъ подобія этихъ тре-ковъ слѣдуетъ, что основанія относятся какъ высоты, т. е.

$$\frac{O_1E}{AB}=\frac{O_2F}{AC}=\frac{OG}{BC}, \text{ или}$$

$$\frac{r_1}{c}=\frac{r_2}{b}=\frac{r}{a} \qquad (1)$$

Изъ равенства (1) имѣемъ:

$$r_1 = r \cdot \frac{c}{a};\ r_2 = r \cdot \frac{b}{a}$$

Возведя каждое изъ этихъ равенствъ въ квадратъ и сложивъ ихъ получаемъ:

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2\left(\frac{c^2+b^2}{a^2}\right) = r^2,$$

откуда искомый радіусъ $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

64. Обозначивъ стороны равнобедреннаго тре-ка буквами x и y имѣемъ для нахожденія ихъ два уравненія:

$$x \cdot h_a = y \cdot h_b;\quad y^2 = h_a^2 + \frac{x^2}{4},\ \text{откуда}$$

$$x = \frac{2h_a \cdot h_b}{\sqrt{4h_a^2 - h_b^2}};\ y = \frac{2h_a^2}{\sqrt{4h_a^2 - h_b^2}}.$$

65. Такъ какъ въ равнобедренномъ тре-кѣ центръ описаннаго и центръ вписаннаго круговъ находятся на высотѣ, то разстояніе между ними равно разности радіусовъ описаннаго и вписаннаго круговъ.

Итакъ, $d = R - r$, гдѣ R и r легко опредѣляются въ зависимости отъ данныхъ сторонъ тре-ка:

$$R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}};\ r = \frac{a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}{2b + a}.$$

66. Обозначивъ сторону искомаго квадрата буквой x, (черт. 76) имѣемъ изъ подобія тре-ковъ AKL и ABC:

$$KL : BC = AE : AD,\ \text{или}$$

$$x : a = (h - x) : h,\ \text{откуда}\ x = \frac{ah}{a+h}.$$

67. Фигура, образованная пересѣченіемъ двухъ данныхъ правильныхъ тре-ковъ есть, очевидно, правильный шестиугольникъ, сторона котораго равна $\frac{1}{3} R \sqrt{3}$. Апофема такого правильнаго шестиугольника равна

$$\sqrt{\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{R}{2},$$

а слѣд., площадь его равна $\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}$.

68. Въ тре-кѣ ABC (черт. 77) сторона $AC = 4$, $AB = 5$, $BC = 6$; BD — биссектрисса угла ABC; BE биссектрисса внѣшняго угла ABK.

На основаніи извѣстной теоремы о биссектриссахъ внутренняго и внѣшняго угловъ въ треугольникѣ (Кис. § 198), можемъ написать:

$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$	$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$
$\frac{AD}{CD} = \frac{5}{6}$	$\frac{AE}{CE} = \frac{5}{6}$
$\frac{AD+CD}{AD} = \frac{5+6}{5}$	$\frac{CE-AE}{AE} = \frac{6-5}{5}$
$\frac{4}{AD} = \frac{11}{5}$, откуда	$\frac{4}{AE} = \frac{1}{5}$, откуда
$AD = \frac{20}{11}$.	$AE = 20$.

Отрѣзокъ прямой AC, заключенный между биссектриссами внутренняго и внѣшняго угла равенъ $ED = AE + AD = 20 + \frac{20}{11} = 21\frac{9}{11}$.

Такъ какъ $\angle EBD$, образованный двумя биссектриссами— прямой, то изъ прямоугольнаго тре-ка EBD имѣемъ:

$$EB = \sqrt{ED^2 - BD^2};$$

$ED = 21\frac{9}{11}$, а BD можно найти по извѣстной формулѣ вычисленія биссектриссы по тремъ сторонамъ. (См. „Геом. Киселева" § 221).

$$BD = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{1775}{2}}.$$

Слѣд. $$EB = \frac{5}{11}\sqrt{2162}.$$

69. Предложенная задача рѣшается на основаніи слѣдующей теоремы: *Если какой нибудь уголъ одного треугольника дополняетъ до* 180° *уголъ другого тре-ка, то площади этихъ треугольниковъ относятся, какъ произведенія сторонъ, заключающихъ дополнительные углы* *).

На основаніи этой теоремы имѣемъ (черт. 78):

$$\frac{\triangle KBM}{\triangle ABC}=\frac{BK\,.\,BM}{BC\,.\,AB}=\frac{(k+1)\,BC\,.\,m\,.\,AB}{BC\,.\,AB}=(k+1)\,.\,m.$$

$$\frac{\triangle NAM}{\triangle ABC}=\frac{NA\,.\,AM}{AC\,.\,AB}=\frac{n\,.\,AC\,.\,(m+1)AB}{AC\,.\,AB}=n\,.\,(m+1).$$

$$\frac{\triangle NCK}{\triangle ABC}=\frac{NC\,.\,CK}{AC\,.\,BC}=\frac{(n+1)\,AC\,.\,k\,.\,BC}{AC\,.\,BC}=(n+1)\,.\,k.$$

Складывая эти три равенства, получаемъ:

$$\frac{\triangle KBM+\triangle NAM+\triangle NCK}{\triangle ABC}=(k+1)m+(m+1)n+(n+1)k.$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ равенства по единицѣ, находимъ искомое отношеніе

$$\frac{\triangle KMN}{\triangle ABC}=(k+1)\,.\,m+(m+1)\,.\,n+(n+1)\,.\,k+1.$$

70. Обозначивъ бо̀льшій радіусъ буквой R, меньшій буквой r, получаемъ изъ условій задачи два уравненія:

$$\frac{3}{8}R=\frac{5}{4}r$$

$$R-r=10\frac{4}{15},$$

откуда

$$r=\frac{22}{5};\ R=\frac{44}{3}.$$

Разстояніе между центрами $=\frac{3}{8}R=\frac{11}{2}.$

*) См. «Геометрія Киселева» § 290.

Такъ какъ разность радіусовъ $10\frac{4}{15}$ больше разстоянія между центрами, то *меньшая окружность находится внутри большей.*

71. Соединивъ центры данныхъ окружностей, получимъ равнобедренный треугольникъ со сторонами 6,4; 11,6; 11,6. Окружность, проходящая черезъ центры данныхъ круговъ— есть окружность, *описанная* около этого равнобедреннаго треугольника. Радіусъ ея

$$r = \frac{S}{p} = \frac{1{,}6\sqrt{124{,}32}}{3{,}9},$$ а слѣд. длина ея равна

$$\frac{2\pi \,.\, 1{,}6\sqrt{124{,}32}}{3{,}9}$$

?

$R = \frac{abc}{4S}$

72. Если центры A и B двухъ касательныхъ круговъ соединить съ центромъ O даннаго круга и между собой, то не трудно доказать, что $\angle AOB = 120^\circ$. Слѣд. обозначивъ искомый радіусъ касательныхъ окружностей буквой x, пишемъ, что прямая AB, какъ сторона правильнаго тре-ка, вписаннаго въ кругъ радіуса OB равна $OB \,.\, \sqrt{3}$.

$$AB = OB \,.\, \sqrt{3}, \text{ или } 2x = (x + R) \,.\, \sqrt{3},$$

откуда получаемъ:

$$x = \frac{R\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = (2\sqrt{3} + 3)\, R.$$

73. Обозначивъ искомыя стороны квадратовъ буквами x и y, имѣемъ два уравненія:

$$x : y = 5 : 3; \; x^2 = y^2 + 784,$$

откуда $x = 35$; $y = 21$.

74. На основаніи свойства биссектриссы внѣшняго угла въ тре-кѣ (Кис. § 198) можемъ написать (черт. 79).

$$AE : CE = AB : BC \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

Если точка пересѣченія прямыхъ BE и AC, т. е. точка E удаляется въ безконечность, то прямая BE стремится къ положенію BE_1, параллельному AC. Въ предѣльномъ положеніи $BE_1 \parallel AC$, и слѣд. имѣемъ:

$$\angle DBE_1 = \angle BAC;$$
$$\angle DBE_1 = \angle CBE_1 = \angle BCA.$$

Изъ этихъ равенствъ видимъ, что въ предѣлѣ углы A и C тре-ка ABC стремятся къ равенству, а потому отношеніе сторонъ $AB : BC$ стремится къ единицѣ. Итакъ, изъ равенства (1) получаемъ:

$$\textit{пред.} \left(\frac{AE}{CE}\right) = 1.$$

75. Если обозначить ребро куба буквой x, то изъ прямоуг. тре-ка EGH (черт. 80), въ которомъ $EH = x$, $GH = x$ слѣдуетъ, что $EG = x\sqrt{2}$. Площадь діагональнаго сѣченія $AEGC$ выразится такъ:

$$x^2\sqrt{2} = S,$$

откуда
$$x = \sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{2}}.$$

Діагональ основанія $EG = x \,.\, \sqrt{2} = \sqrt{S\sqrt{2}}$.

Діагональ куба AG найдется какъ гипотенуза прямоугольнаго тре-ка AEG, въ которомъ извѣстны оба катета: $AE = \sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{2}}$ и $EG = \sqrt{S\sqrt{2}}$, откуда $AG = \sqrt{\frac{3}{2} S\sqrt{2}}$.

Поверхность куба $= 3\, S\sqrt{2}$; объемъ $= \frac{S}{2}\sqrt{S\sqrt{2}}$

76. Обозначимъ сторону треугольнаго основанія призмы буквой x; тогда площадь основанія равна $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$; изъ условія же задачи видно, что площадь эта равна $\frac{1}{2}(S - S_1)$; слѣд.

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{S - S_1}{2},$$

откуда
$$x = \sqrt{\frac{2(S - S_1)}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}(S - S_1)\sqrt{3}}.$$

Обозначивъ боковое ребро буквой h имѣемъ:

$$S_1 = 3 \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}(S-S_1)\sqrt{3}} \cdot h, \text{ откуда } h = \frac{S_1}{\sqrt{6(S-S_1)\sqrt{3}}};$$

объемъ призмы равенъ:

$$\frac{S-S_1}{2} \cdot \frac{S_1}{\sqrt{6(S-S_1)\sqrt{3}}} = \frac{S_1}{6}\sqrt{\frac{(S-S_1)\sqrt{3}}{2}}.$$

77. Проведя плоскость черезъ высоту пирамиды SO и апоѳему SK (черт. 81), пересѣкающуюся съ основаніемъ по прямой OK, получаемъ прямоугольный тре-къ OSK, въ которомъ катетъ $SO=1$ и уголъ $OSK=30^0$. Если OK обозначить буквой x, то $SK=2x$ и слѣдовательно:

$$4x^2 = x^2 + 1, \text{ откуда } x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Послѣ этого изъ прямоуг. тре-ка AOK, въ которомъ $AK = \frac{1}{2}AO$, обозначивъ $AK=y$, имѣемъ:

$$4y^2 = y^2 + \tfrac{1}{3}, \text{ откуда } y = \tfrac{1}{3}.$$

Боковая поверхность данной пирамиды равна произведенію периметра основанія ($6 \cdot \frac{2}{3} = 4$) на половину апоѳемы

$$\left(\tfrac{1}{2}SK = OK = \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \text{ слѣд. } S = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Объемъ V равенъ произведенію $\frac{1}{3}$ площади основанія на высоту. Но площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

высота $SO=1$, а потому $V = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

78. Площадь основанія данной усѣченной призмы, опредѣляемая по тремъ сторонамъ, равна 21, а слѣд. объемъ ея (Кис. § 395) равенъ:

$$7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 63.$$

79. Если разсѣчь данную пирамиду плоскостью, проходящей черезъ центръ основанія и параллельной какой нибудь изъ сторонъ его, то въ сѣченіи получится равнобедренная трапеція $KLMN$ (черт. 82) въ которой основаніе $KN=a$, основаніе $LM=b$ и высота $LP=h$. Бокъ KL этой трапеціи представляетъ апоѳему данной усѣченной пирамиды. Изъ прямоуг. тре-ка KLP, въ которомъ катетъ $KP=\frac{1}{2}(a-b)$, имѣемъ:

$$KL=\sqrt{h^2+\tfrac{1}{4}(a-b)^2}.$$

Слѣд. искомая полная поверхность выразится формулой:

$$S=a^2+b^2+2(a+b)\sqrt{h^2+\tfrac{1}{4}(a-b)^2}.$$

Объемъ $$V=\frac{h}{3}\cdot(a^2+b^2+ab).$$

80. Если разсѣчь данную пирамиду плоскостью, проходящей черезъ центръ основанія, перпендикулярно какой нибудь изъ его сторонъ, то въ сѣченіи получится равнобедренная трапеція $KLMN$ (черт. 82).

Въ этой трапеціи извѣстны: основаніе $KN=a\sqrt{3}$, высота $LP=h$ и $\angle LKN=30^\circ$. Изъ прямоуг. тре-ка KLP, въ которомъ $LP=h$, $KL=2h$, имѣемъ:

$$KP^2=4h^2-h^2,\text{ откуда } KP=h\sqrt{3}.$$

Слѣд. основаніе $LM=KN-2KP=a\sqrt{3}-2h\sqrt{3}$. Но LM равно сторонѣ шестиугольника, служащаго верхнимъ основаніемъ данной пирамиды, а потому искомый объемъ V найдется безъ всякихъ затрудненій по формулѣ:

$$V=\frac{h}{3}(S+s+\sqrt{Ss}),$$

гдѣ S и s означаютъ площади верхняго и нижняго основаній пирамиды.

81. Если разсѣчь данную пирамиду плоскостью, проходящей черезъ центръ основанія параллельно какой нибудь изъ его сторонъ, то въ сѣченіи получится равнобедренная трапеція $KLMN$ (черт. 83) въ которой $KL=l$, $KN=a$, $\angle LKN=60^\circ$.

Изъ прямоуг. тре-ка KLP имѣемъ: $KP = \frac{l}{2}$ и слѣд. высота LP трапеціи, равная высотѣ данной пирамиды $= \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Сторона верхняго основанія пирамиды, равная $LM = KN - 2KP = a - l$. Слѣдовательно искомый объемъ V найдется изъ формулы:

$$V = \frac{l\sqrt{3}}{6} \cdot [a^2 + (a-l)^2 + a(a-l)].$$

82. Обозначимъ площадь основанія данной пирамиды буквой S, площадь параллельнаго сѣченія буквой S_1 и искомое разстояніе этого сѣченія отъ вершины пирамиды буквой x. Тогда имѣемъ: (Геом. Киселева § 371)

$$S_1 : S = x^2 : h^2, \text{ откуда } S_1 = \frac{S \cdot x^2}{h^2}.$$

Такъ какъ объемъ пирамиды дѣлится проведеннымъ сѣченіемъ пополамъ, то

$$\tfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \frac{Sx^2}{h^2} \cdot x,$$

откуда
$$x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}.$$

Замѣчаніе. Еще проще рѣшается эта задача на основаніи теоремы: *объемы двухъ треугольныхъ пирамидъ, имѣющихъ общій трехгранный уголъ, относятся между собой, какъ произведенія реберъ, сходящихся въ вершинѣ этого трехграннаго угла.* Доказательство см. въ Геометріи Давидова § 275. Теорему эту очень часто спрашиваютъ на вступительныхъ экзаменахъ въ Технологическомъ Институтѣ, *хотя въ экзаменаціонныхъ программахъ она не помѣщена.*

83. На основаніи извѣстной изъ теоріи геометріи теоремы о свойствахъ сѣченій, параллельныхъ основанію пирамиды (Геом. Кис. § 371), получаемъ для искомыхъ сходственныхъ сторонъ формулы:

$a \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$; $a \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{n}}$; $a \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{n}}$ и т. д. См. рѣшеніе предыдущей задачи.

84. Дополнимъ данную усѣченную пирамиду $ABCA_1B_1C_1$ до полной пирамиды $SABC$ (черт. 84). На основаніи теоремы о параллельныхъ сѣченіяхъ въ пирамидѣ, имѣемъ:

$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1}=\frac{SO^2}{SO_1^{\,2}},\ \text{или}\ \frac{18}{8}=\frac{SO^2}{(SO-6)^2},$$

откуда высота $SO=18$. Обозначивъ искомую площадь сѣченія DEF буквой x, имѣемъ:

$$\frac{x}{18}=\frac{SO_2^{\,2}}{SO^2}=\frac{225}{324},\ \text{откуда}\ x=\frac{25}{2}=12\tfrac{1}{2}.$$

85. Если сторона правильнаго шестиугольника, служащаго основаніемъ данной пирамиды, равна 5, то площадь этого шестиугольника равна $\frac{75}{2}\sqrt{3}$. Такъ какъ площади параллельныхъ сѣченій относятся какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины пирамиды, то обозначивъ искомое разстояніе буквой x, имѣемъ:

$$\frac{75}{2}\sqrt{3}:10\sqrt{3}=625:x^2,\ \text{откуда}\ x=\sqrt{\frac{500}{3}}=3\tfrac{1}{3}\sqrt{15}.$$

86. Принявъ въ пирамидѣ $SABC$ за основаніе тре-къ SBC; тогда высотой будетъ ребро $SA=a$. Искомый объемъ пирамиды $SABC=\frac{bc}{2}\cdot\frac{a}{3}=\frac{1}{6}abc$.

87. Въ трехгранномъ углѣ $SABC$ (черт. 85) каждый изъ плоскихъ угловъ BSA, CSA и CSB равенъ 60°. Черезъ произвольную точку A на ребрѣ SA проводимъ плоскость, перпендикулярную къ этому ребру. Плоскость эта, пересѣкаясь съ плоскостями трехграннаго угла по прямымъ AB, AC и BC, образуетъ тре-къ ABC, причемъ $\angle BAC$ будетъ линейнымъ угломъ двуграннаго угла $BASC$.

Въ $\triangle SAB$ уголъ $SBA=30°$, а потому, если обозначить SA буквой a, то BS, какъ гипотенуза$=2a$, и катетъ $AB=a\sqrt{3}$; также изъ прямоуг. тре-ка CSA гипотенуза $SC=2a$, а катетъ $AC=a\sqrt{3}$. Треугольникъ SBC очевидно равносторонній, а потому $BC=2a$. Теперь искомый линейный уголъ BAC можетъ быть опредѣленъ изъ равнобедреннаго тре-ка BAC, въ которомъ извѣстны всѣ три стороны: $AB = AC = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Но вычисленіе этого угла нельзя произвести безъ помощи тригонометріи. Тригонометрически же легко находимъ:

$$Sin\,\frac{x}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } x = 70°31'43'',6.$$

88. Пусть въ трехгранномъ углѣ $SABC$ (черт. 85) даны линейные углы $\angle BSA = 45^{\circ}$, $\angle CSA = 45^{\circ}$, $\angle BSC = 60^{\circ}$. Проводимъ черезъ произвольную точку A ребра SA плоскость, перпендикулярную къ нему. Эта плоскость въ пересѣченіи съ плоскостями, образующими трехгранный уголъ, даетъ $\triangle ABC$, причемъ, $\angle BAC$ этого тре-ка есть искомый линейный уголъ двуграннаго угла $BASC$.

Обозначимъ отрѣзокъ SA буквой a; тогда въ прямоугольномъ равнобедренномъ тре-кѣ BAS сторона $BA = a$, сторона $SB = a\sqrt{2}$. Также въ прямоуг. равнобедренномъ тре-кѣ CAS сторона $CA = a$ и сторона $SC = a\sqrt{2}$. Такъ какъ $\triangle SBC$—равносторонній, то $BC = BS = CS = a\sqrt{2}$.

Послѣ этого, въ равнобедренномъ тре-кѣ BAC извѣстны всѣ стороны: $AB = a$, $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

то тре-къ этотъ очевидно прямоугольный, т. е. искомый $\angle BAC = 90°$.

89. Если обозначить радіусъ окружности основанія конуса буквой r, то плоскость основанія$=\pi r^2$; боковая поверхность$=2\pi r^2$; полная поверхность$=3\pi r^2$. Итакъ, искомое отношеніе площадей равно $1:2:3$.

90. Если высоту одного конуса обозначить буквой h, то высота другого равна $\frac{mh}{n}$.

Объемы этихъ конусовъ выразятся формулами:

$$\tfrac{1}{3}\pi R^2 h \text{ и } \tfrac{1}{3}\pi R^2 \frac{mh}{n}.$$

Изъ уравненія

$$\tfrac{1}{3}\pi R^2 h\left(1+\frac{m}{n}\right)=V,$$

находимъ

$$h=\frac{3\,Vn}{\pi R^2(m+n)}\cdot$$

91. Обозначимъ радіусы окружностей основанія равностороннихъ конуса и цилиндра соотвѣтственно буквами r и R. Тогда полная поверхность равносторонняго конуса выразится формулой $3\pi r^2$; полная поверхность цилиндра $=6\pi R^2$. По условію задачи имѣемъ равенство:

$$3\pi r^2=6\pi R^2,\text{ откуда } R=\frac{r}{\sqrt{2}}\cdot$$

Объемъ равносторонняго конуса, съ радіусомъ основанія r выражается формулой: $\tfrac{1}{3}\pi r^3\sqrt{3}$.

Объемъ равносторонняго цилиндра, съ радіусомъ основанія $\frac{r}{\sqrt{2}}$, равенъ $\frac{\pi r^3}{\sqrt{2}}\cdot$ Слѣдовательно искомое отношеніе объемовъ этихъ тѣлъ равно:

$$\tfrac{1}{3}\pi r^3\sqrt{3}:\frac{\pi r^3}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}:3.$$

92. Если обозначить радіусъ основанія даннаго конуса буквой r, то образующая его $=\sqrt{h^2+r^2}$. Для вычисленія r имѣемъ уравненіе:

$$\pi r\sqrt{r^2+h^2}=S,$$

откуда $$r=\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-h^2+\frac{1}{\pi}\sqrt{\pi^2h^2+4S^2}\right)}.$$

Слѣд. искомая боковая поверхность цилиндра, имѣющаго одинаковыя съ конусомъ основаніе и высоту, равна

$$\pi h\sqrt{2\left(-h^2+\frac{1}{\pi}\sqrt{h^2\pi^2+4S^2}\right)}.$$

93. Если высоту даннаго конуса назовемъ буквой h, то высота конуса, полученнаго отъ проведенія плоскости, параллельной основанію, равна по условію $\frac{hm}{m+n}$, а потому и радіусъ полученнаго сѣченія равенъ $\frac{Rm}{m+n}$. Искомая площадь, слѣд. равна $\frac{\pi m^2 R^2}{(m+n)^2}$.

94. Объемы подобныхъ конусовъ относятся какъ кубы ихъ высотъ (Кис. § 435); слѣд. разстояніе отъ вершины конуса до сѣченія, параллельнаго основанію и дѣлящаго объемъ конуса пополамъ, равно $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$, гдѣ буквой h обозначена высота даннаго конуса, а вслѣдствіе подобія и радіусъ полученнаго сѣченія равенъ $\frac{R}{\sqrt[3]{2}}$.

95. Высота усѣченнаго конуса очевидно равна

$$\sqrt{b^2-(R-r)^2},$$

а слѣд., объемъ его равенъ

$$\frac{\pi}{3}(R^2+r^2+Rr)\sqrt{(b+R-r)(b-R+r)}.$$

96. Такъ какъ 340 граммовъ ртути занимаютъ объемъ въ $\frac{340}{13,6}=25$ куб. сентиметровъ, то предложенная задача можетъ быть замѣнена слѣдующей: *опредѣлить высоту конуса съ угломъ при вершинѣ въ* 60^0, *если объемъ его равенъ* 25 *куб. сентиметрамъ.*

Обозначая искомую высоту SK (черт. 86) буквой x, легко найдемъ, что радіусъ окружности основанія этого конуса $KF=\frac{x}{\sqrt{3}}$, а слѣд., объемъ его равенъ

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 . x=25,$$

откуда $$x=\sqrt[3]{\frac{225}{\pi}} \text{ сентиметровъ.}$$

97. Боковая поверхность конуса $=\pi r l$; площадь основанія его $=\pi r^2$. Изъ уравненія

$$\pi r l = 2\pi r^2$$

находимъ, что $l=2r$. Слѣд. высота h конуса $=\sqrt{4r^2-r^2}=$ $=r\sqrt{3}$. Изъ формулы объема конуса

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \,.\, r\sqrt{3}=V$$

находимъ
$$r=\sqrt[3]{\frac{V\sqrt{3}}{\pi}}.$$

98. Искомое отношеніе очевидно равно $\frac{1}{3}$.

99. Изъ уравненія $\pi r^2=36\pi$ находимъ радіусъ общаго нижняго основанія $r=6$. Обозначивъ искомый радіусъ верхняго основанія усѣченнаго конуса буквой x, получаемъ изъ условія задачи уравненіе:

$$\frac{36\pi h}{\frac{\pi h}{3}\,[36+x^2+6x]}=\frac{12}{7},$$

откуда
$$x=3.$$

100. Длина дуги сектора, представляющаго развертку боковой поверхности конуса, равна длинѣ окружности основанія того же конуса. Поэтому, назвавъ радіусъ окружности основанія даннаго конуса буквой r, имѣемъ уравненіе:

$$\frac{2\pi a n}{360}=2\pi r,\ \text{откуда}\ r=\frac{an}{360}.$$

Высота конуса опредѣлится изъ прямоуг. тре-ка, въ которомъ гипотенузой служитъ образующая конуса (a), а другимъ катетомъ радіусъ окружности его основанія $\left(\frac{an}{360}\right)$.

Слѣдов., $h=\sqrt{a^2-\frac{a^2n^2}{360^2}}=\frac{a}{360}\sqrt{360^2-n^2}.$

Итакъ, искомый объемъ равенъ:

$$V=\frac{\pi n^2 a^3}{3\,.\,360^3}\sqrt{(360+n)(360-n)}.$$

101. Назовемъ радіусъ окружности основанія даннаго конуса буквой r. Тогда изъ уравненія

$$\frac{2\pi l\ .\ 36}{360}=2\pi r,$$

выражающаго равенство длины дуги сектора, представляющаго развертку боковой поверхности даннаго конуса, и длины окружности его основанія, получаемъ

$$l=10r.$$

Высота конуса $h=\sqrt{l^2-r^2}=r\sqrt{99}.$

Боковая поверхность конуса

$$\pi rl=\pi 10r^2=S,\ \text{откуда}\ r=\sqrt{\frac{S}{10\pi}}.$$

Слѣд. объемъ конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{99}=\frac{S}{30}\sqrt{\frac{9{,}9\,S}{\pi}}.$$

102. Если уголъ при вершинѣ конуса $=60^\circ$, то радіусъ окружности основанія этого конуса равенъ половинѣ его образующей.

Назвавъ этотъ радіусъ буквой r, находимъ, что длина окружности основанія $=2\pi r$. Обозначимъ буквой x число градусовъ въ центральномъ углѣ развертки боковой поверхности этого конуса въ плоскость. Такъ какъ развертка эта представляетъ круговой секторъ съ радіусомъ, равнымъ образующей конуса $2r$ и центральнымъ угломъ въ x°, то длина этой развертки равна

$$\frac{2\pi\ .\ 2r\ .\ x}{360}.$$

а слѣд. имѣемъ уравненіе

$$\frac{2\pi\ .\ 2r\ .\ x}{360}=2\pi r,$$

откуда $$x=180^\circ.$$

103. Обозначивъ буквами r и l радіусъ окружности основанія даннаго конуса и его образующую, получаемъ на основаніи условія задачи уравненіе

$$\pi r l = 2\pi r^2, \text{ откуда } l = 2r.$$

Если образующая конуса вдвое больше радіуса окружности его основанія, то уголъ при вершинѣ конуса $= 60^0$, а потому предложенная задача приводится къ предыдущей, и слѣд. искомый уголъ развертки равенъ 180^0,

104. Изъ теоріи извѣстно, что *поверхность шарового пояса равна произведенію окружности большого круга на высоту пояса* (Кис. § 448).

Слѣд., обозначивъ радіусъ шара, поверхности котораго принадлежитъ данный поясъ, буквой R, имѣемъ уравненіе

$$2\pi R h = S, \text{ откуда } R = \frac{S}{2\pi h}.$$

Искомый объемъ слѣдовательно равенъ $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{S^3}{6\pi^2 h^3}$.

105. Обозначивъ высоту даннаго сегмента буквой x и радіусъ шара буквой r, имѣемъ

$$2\pi r x = S, \text{ откуда } x = \frac{S}{2\pi r}.$$

Разстояніе отъ центра шара до проведенной плоскости равно разности радіуса шара и высоты сегмента, т. е. равно

$$r - \frac{S}{2\pi r} = \frac{2\pi r^2 - S}{2\pi r}.$$

106. Если радіусъ меньшаго изъ двухъ данныхъ концентрическихъ шаровъ назовемъ буквой r, то большій изъ радіусовъ будетъ равенъ $r + m$.

На основаніи условія задачи имѣемъ уравненіе:

$$\tfrac{4}{3}\pi(r+m)^3 - \tfrac{4}{3}\pi r^3 = V, \text{ или } 3r^2 m + 3m^2 r + m^3 = \frac{3V}{4\pi}.$$

Изъ этого уравненія опредѣляется искомый радіусъ r.

107. Опредѣлимъ объемъ шарового сегмента AOB (черт. 87) въ зависимости отъ радіуса шара R. Какъ извѣстно изъ теоріи (Кис. § 457).

$$V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$

Въ данномъ случаѣ высота сегмента $h=OD=\frac{R}{2}$, а потому

$$V=\frac{\pi R^2}{4}\cdot\left(R-\frac{R}{6}\right)=\frac{5}{24}\pi R^3.$$

Объемъ части, общей обоимъ шарамъ, состоитъ изъ суммы объемовъ двухъ равныхъ шаровыхъ сегментовъ ($AOB+AO_1B$) и слѣд. равенъ $2\,.\,\frac{5}{24}\pi R^3=\frac{5}{12}\pi R^3$. Итакъ, искомое отношеніе будетъ:

$$\frac{5}{12}\pi R^3:\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{5}{16}.$$

108. Объемъ вырѣзка можно разсматривать, какъ сумму объемовъ двухъ равныхъ шаровыхъ сегментовъ AEB и CGD (черт. 88) и цилиндра $ACDB$ *). Если обозначить радіусъ шара буквой r, то въ цилиндрѣ $ABCD$ радіусъ окружности основанія AF равенъ $\frac{r}{2}$, а высота его AC равна $r\sqrt{3}$.

Объемъ каждаго изъ равныхъ шаровыхъ сегментовъ AEB и CGD опредѣлится на основаніи извѣстной изъ теоріи (Кис. § 457) формулы:

$$V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right), \qquad .\ (A)$$

причемъ высота

$$h=EF=OE-OF=r-\frac{r\sqrt{3}}{2}=r\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

---

*) На чертежѣ представлено сѣченіе шара и вырѣзка плоскостью, проходящей черезъ ось послѣдней.

Подставляя это значеніе вмѣсто h въ формулу (A), находимъ объемъ сегмента AEB:

$$V = \pi r^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right).$$

А слѣд. объемъ всего вырѣзка равенъ:

$$\frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{4} + 2\pi r^3\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right) = \pi r^3\left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Объемъ всего шара равенъ $\frac{4}{3}\pi r^3$, а потому искомое отношеніе объемовъ вырѣзка и шара равно

$$\frac{\pi r^3\left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{8 - 3\sqrt{3}}{8}.$$

109. Искомый объемъ равенъ $\pi R^2 h$, гдѣ R, радіусъ окружности основанія цилиндра, найдется изъ формулы $R = \frac{abc}{4S}$.

110. На чертежѣ 89 представлено сѣченіе даннаго шара плоскостью, перпендикулярной къ данной сѣкущей плоскости AB.

Такъ какъ радіусъ шара O есть R, то радіусъ шара O_1 равенъ $\frac{R+a}{2}$ и радіусъ шара O_2 равенъ $\frac{R-a}{2}$. Назвавъ соотвѣтственно буквами V, V_1, V_2 объемы шаровъ O, O_1 и O_2, имѣемъ:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R+a}{2}\right)^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R-a}{2}\right)^3.$$

Искомое отношеніе выражается формулой

$$\frac{V_1 + V_2}{V - (V_1 + V_2)} = \frac{R^2 + 3a^2}{3(R^2 - a^2)}.$$

111. Усѣченная правильная шестигранная пирамида $ABCDEFKLMNRT$ (черт. 90) достроена до полной пирамиды $SKLMNRT$. Такъ какъ по условію сторона нижняго основанія ($2a$) вдвое больше стороны верхняго основанія (a), то отношеніе площадей шестиугольниковъ $KLMNRT$ и $ABCDEF$ равно 4 (Кис. § 291).

Слѣд. на основаніи извѣстной теоремы (Кис. § 371) имѣемъ:

$$\frac{SQ^2}{SP^2} = 4, \text{ откуда } SQ = 2SP,$$

а слѣд. $SP = PQ = a\sqrt{2}$.

Если центръ шара, описаннаго около пирамиды $SABCDEF$ находится въ точкѣ O, лежащей на высотѣ SP, то $SO=AO$, какъ радіусы шара; поэтому, обозначивъ искомый радіусъ буквой R, имѣемъ изъ прямоугольнаго тре-ка AOP:

$$AO = R;\ OP = SP - SO = a\sqrt{2} - R;\ AP = a,$$

а потому:

$$R^2 = (a\sqrt{2} - R)^2 + a^2, \text{ откуда } R = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

112. На чертежѣ 91 представлено сѣченіе конуса плоскостью, проходящей черезъ его ось. Изъ подобія тре-ковъ DBC и OBM находимъ:

$$DC : OM = BD : BM;$$

но BM изъ прямоуг. тре-ка OBM равно $\sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{72}$,

$$\text{а слѣд. } DC = \frac{BD \,.\, OM}{BM} = \frac{12 \,.\, 3}{\sqrt{72}} = \frac{36}{\sqrt{72}}.$$

Искомый объемъ V конуса равенъ $\frac{1}{3}\pi \,.\, DC^2 \,.\, BD = 72\pi$.

113. На черт. 92 представлено сѣченіе шара плоскостью, проходящей черезъ ось конуса ABC. Радіусъ шара O_1, вписаннаго въ конусъ ABC, равенъ радіусу окружности, вписанной въ тре-къ ABC, и слѣд. можетъ быть вычисленъ по формулѣ $r = \frac{S}{p}$, гдѣ S и p — площадь и полупериметръ тре-ка ABC.

По условію $AO=R$; $BC=2R$, а потому $S_{ABC}=\frac{1}{2}\,.\,2R\,.\,R=R^2$. Стороны AC и AB — суть стороны квадрата вписаннаго въ кругъ O, а потому $AC=AB=R\sqrt{2}$. Итакъ, периметръ $2p$ тре-ка ABC равенъ $2R+2R\sqrt{2}$, а слѣд. $p=R(1+\sqrt{2})$. Поэтому искомый радіусъ $r=\dfrac{R^2}{R(1+\sqrt{2})}=R(\sqrt{2}-1)$.

114. На чертежѣ 91 представлено сѣченіе конуса и шара плоскостью, проходящей черезъ ось конуса.

Изъ подобія тре-ковъ BDC и BOM имѣемъ:

$$\frac{DC}{BC}=\frac{OM}{OB}=\frac{r}{3r}=\frac{1}{3},\ \text{откуда}\ BC=3DC.$$

Изъ прямоуг. тре-ка BDC находимъ:

$$BC^2=DC^2+BD^2,\ \text{или}\ 9DC^2=DC^2+16r^2,$$

откуда $$DC=r\sqrt{2}\,;\ \text{слѣд.}\ BC=3r\sqrt{2}.$$

Боковая поверхность конуса ABC равна

$$\pi\,.\,DC\,.\,BC=\pi r\sqrt{2}\,.\,3r\sqrt{2}=6\pi r^2.$$

Полная поверхность конуса равна:

$$6\pi r^2+\pi(r\sqrt{2})^2=8\pi r^2.$$

Слѣд. отношеніе полной поверхности конуса къ поверхности вписаннаго шара равно:

$$\frac{8\pi r^2}{4\pi r^2}=2.$$

Объемъ конуса равенъ $\frac{1}{3}\pi DC^2\,.\,BD=\frac{8}{3}\pi r^3$.

Слѣд. отношеніе объемовъ конуса и шара равно $\frac{8}{3}\pi r^3:\frac{4}{3}\pi r^3=2$.

115. На чертежѣ 92 представлено сѣченіе конуса и шара плоскостью, проходящей черезъ ось конуса. Такъ какъ $\angle BAC$ по условію прямой, то каждый изъ тре-ковъ AOC и AO_1D есть равнобедренный прямоугольный треугольникъ.

Отношеніе объемовъ конуса и шара равно:

$$\frac{\frac{1}{3}\pi OC^2\,.\,AO}{\frac{4}{3}\pi\,.\,OO_1^3}=\frac{1}{4}\left(\frac{OC}{OO_1}\right)^3.$$

Обозначимъ отрѣзокъ OC буквой x и OO_1, буквой y.

Изъ прямоугольнаго тре-ка AO_1D имѣемъ:

$$AO_1^2 = AD^2 + O_1D^2,$$

или, замѣняя $AO_1 = AO - OO_1 = x - y$; $AD = O_1D = y$:

$$(x-y)^2 = 2y^2.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей равенства квадратный корень и дѣля на y, находимъ:

$$\frac{x}{y} = \frac{OC}{OO_1} = 1 + \sqrt{2}.$$

Слѣд., искомое отношеніе объемовъ конуса и шара равно

$$\frac{1}{4}\left(\frac{OC}{OO_1}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right)^3.$$

116. На чертежѣ 93 изображено сѣченіе конуса плоскостью, проходящей черезъ его ось AF.

Искомое отношеніе M равно:

$$M = \frac{\pi(OE+FC) \,.\, EC}{\pi OE \,.\, AE} = \frac{OE+FC}{OE} \cdot \frac{EC}{AE}. \qquad (1)$$

Изъ подобія тре-ковъ AFC и AOE имѣемъ:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{FC}{EO},$$

или, написавъ производную пропорцію:

$$\frac{EC}{AE} = \frac{FC - OE}{OE}.$$

Подставивъ это значеніе вмѣсто $\frac{EC}{AE}$ въ равенство (1), получаемъ:

$$M = \frac{OE+CF}{OE} \cdot \frac{FC-OE}{OE} = \frac{FC^2 - OE^2}{OE^2} = \left(\frac{FC}{OE}\right)^2 - 1. \qquad (2)$$

Отношеніе $\frac{FC}{OE}$ опредѣляется изъ подобія тре-ковъ AFC и AOE:

$$\frac{FC}{OE} = \frac{AF}{AO} = \frac{AO+OF}{AO} = 1 + \frac{OF}{AO} = 1 + \frac{OK}{AO} = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}.$$

Подставляя это значеніе въ равенство (2), находимъ $M = (\tfrac{3}{2})^2 - 1 = 1\tfrac{1}{4}$.

117. На черт. 94 представлено сѣченіе шара и конуса плоскостью, проходящей черезъ ось конуса.

Такъ какъ $\angle ASB$ равенъ по условію 120°, то AB есть сторона правильнаго тре-ка, а BS (и AS) сторона правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругъ O. Обозначимъ радіусъ этого круга буквой r. Тогда $BK=\frac{r\sqrt{3}}{2}$; $KS=\frac{r}{2}$, и слѣд., объемъ конуса SAB выразится формулой:

$$\tfrac{1}{3}\pi KB^2 \cdot KS=\tfrac{1}{3}\pi\frac{3r^2}{4}\cdot\frac{r}{2}=\frac{\pi r^2}{8}\cdot$$

Объемъ шара равенъ $\frac{4}{3}\pi r^3$, а потому искомое отношеніе объемовъ шара и конуса равно $\frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{\pi r^3}{8}=\frac{32}{3}\cdot$

118. На черт. 95 представлено сѣченіе шара O и конуса SAB плоскостью, проходящей черезъ ось конуса. По условію задачи

$$SO^2=SK\;.\;OK.$$

Искомое отношеніе M объемовъ шара и конуса равно:

$$M=\frac{\frac{4}{3}\pi OS^3}{\frac{1}{3}\pi KB^2SK}=\frac{4OS^2}{KB^2}\cdot\frac{OS}{SK}=\frac{4OS^2}{KB^2}\cdot\frac{OK}{OS}=\frac{4OS\;.\;OK}{KB^2}\cdot$$

Но изъ прямоуг. тре-ка OBK имѣемъ:

$$KB^2=OB^2-OK^2=OS^2-OK^2=SK\;.\;OK-OK^2=$$
$$=OK\;(SK-OK)=OK\;.\;OS.$$

Подставляя это значеніе вмѣсто KB^2 въ формулу для M находимъ $M=4$.

119. На черт. 86 представлено сѣченіе конуса и шара по оси конуса, Поверхность налитой въ конусъ воды изображена прямой CE, касательной къ кругу O. Если радіусъ шара O равенъ R, то образующая конуса CS вычисляется какъ сторона правильнаго тре-ка, описаннаго около даннаго круга и слѣд. равна $2R\sqrt{3}$. Такъ какъ конусъ по условію равносторонній, то $CD=R\sqrt{3}$. Объемъ, занимаемый шаромъ и налитой водой, равенъ:

$$\tfrac{1}{3}\pi CD^2 \,.\, SD=\frac{\pi}{3}(R\sqrt{3})^2 \,.\, 3R\ ^{*)}=3\pi R^3.$$

Такъ какъ объемъ шара O равенъ $\frac{4}{3}\pi R^3$, то объемъ воды, налитой въ конусъ, равенъ

$$3\pi R^3-\tfrac{4}{3}\pi R^3=\tfrac{5}{3}\pi R^3.$$

Если вынуть шаръ изъ конуса, то уровень воды понизится и будетъ напр. FG. Обозначимъ высоту воды SK буквой x. Тогда изъ прямоугольнаго тре-ка FKS, въ которомъ $\angle FSK=$ $=30^0$, находимъ $FK=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $FS=\frac{x}{2\sqrt{3}}$ и слѣд. объемъ, занимаемый водой будетъ:

$$\tfrac{1}{3}\pi \,.\, FK^2 \,.\, KS=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{x^2}{3}\,.\,x=\frac{\pi x^3}{9}.$$

Изъ равенства $\frac{\pi x^3}{9}=\frac{5}{3}\pi R^3$ получимъ $x=R\sqrt[3]{15}$.

120. На черт. 96 представлено сѣченіе призмы плоскостью проходящей черезъ центры положенныхъ въ призму шаровъ. Изъ прямоуг. тре-ка AOE, въ которомъ $\angle OAE=30^0$ и катетъ $OE=R$, находимъ $AE=OE\,.\,\sqrt{3}=R\sqrt{3}$. Слѣдовательно сторона $AC=AE+EF+FC=2R(1+\sqrt{3})$. Площадь тре-ка $ABC=\frac{AC^2\sqrt{3}}{4}=2R^2(2\sqrt{3}+3)$. Высота призмы по условію равна $2R$. Слѣдовательно объемъ ея равенъ

$$4R^3(2\sqrt{3}+3).$$

121. На чертежѣ 97 представлено сѣченіе шаровъ и обложеннаго ими цилиндра по плоскости, проходящей черезъ центры шаровъ. Соединивъ точку O пересѣченія этой плоскости съ осью цилиндра съ точками A и B—центрами

---

*) SD вычисляется изъ прямоуг. тре-ка CSD, въ которомъ
$CS=2r\sqrt{3}$; $CD=r\sqrt{3}$.

двухъ шаровъ, получаемъ прямоугольный тре-къ AOB. Если обозначить радіусы шаровъ буквой x, то въ прямоуг. тре-кѣ AOB имѣемъ:

$$AO = OB = R + x;\ AB = 2x.$$

Изъ уравненія

$$4x^2 = 2(R+x)^2, \text{ находимъ } x = R(\sqrt{2}+1).$$

Слѣд. искомая поверхность =

$$= 4\pi x^2 = 4\pi R^2(\sqrt{2}+1)^2 = 4\pi R^2(3+2\sqrt{2}).$$

122. На чертежѣ 98 представлено сѣченіе цилиндра плоскостью, проходящей черезъ центры положенныхъ въ него шаровъ. Если изъ O, точки пересѣченія оси цилиндра съ этой плоскостью, описать окружность радіуса AO, то эта окружность пройдетъ черезъ центры всѣхъ шаровъ A, B, C... и отрѣзокъ AB будетъ представлять собой сторону правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса AO. Обозначивъ радіусъ каждаго изъ десяти равныхъ шаровъ, буквой x, получаемъ уравненіе:

$$AB = AO \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ или } 2x = (r-x)\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

откуда

$$x = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{3+\sqrt{5}}.$$

Искомая поверхность равна $4\pi x^2 = 4\pi r^2(9 - 4\sqrt{5})$.

123. Если соединить центры всѣхъ пяти шаровъ и провести плоскости черезъ полученныя прямыя, то получится правильная четырехгранная пирамида, каждое изъ реберъ которой равно $2r$. Искомое разстояніе отъ центра пятаго шара до плоскости равно суммѣ высоты этой пирамиды и радіуса шара r. Слѣд. вся задача приводится къ опредѣленію высоты правильной четырехгранной пирамиды $SABCD$ (черт. 99) въ которой сторона основанія равна $2r$ и каждое изъ реберъ тоже равно $2r$. Проведя высоту SO имѣемъ изъ прямоуг. тре-ка SBO:

$$SO^2 = SB^2 - BO^2.$$

Но $SB=2r$; BO, какъ половина діагонали квадрата со стороной $2r$ равна $\frac{2r\sqrt{2}}{2}=r\sqrt{2}$, а потому

$$SO^2=4r^2-2r^2=2r^2, \text{ откуда } SO=r\sqrt{2}.$$

Итакъ, искомое разстояніе отъ центра шара до плоскости равно

$$r\sqrt{2}+r=r(1+\sqrt{2}).$$

124. На чертежѣ 100 представлено сѣченіе призмы плоскостью, проходящей черезъ центры положенныхъ въ призму шаровъ. Соединимъ центръ O съ точками E и F, опустимъ перпендикуляръ OD на EF и соединимъ A съ B. Въ прямоуг. тре-кѣ AOC извѣстны: гипотенуза $AO=2R$ и катетъ $AC=R$; слѣд. катетъ $OC=R\sqrt{3}$. Послѣ этого, обозначивъ сторону EF буквой x, имѣемъ въ прямоуг. тре-кѣ EOD: гипотенуза $OE=x$, катетъ $ED=\frac{x}{2}$; катетъ $OD=OC+CD=$

$$=R(1+\sqrt{3}).$$

Изъ уравненія

$$x^2=\frac{x^2}{4}+R^2(1+\sqrt{3})^2$$

находимъ
$$x=\frac{2}{3}R(3+\sqrt{3}).$$

Послѣ этого легко находимъ площадь основанія призмы $S=4R^2(3+2\sqrt{3})$, а такъ какъ высота ея по условію равна $2R$, то искомый объемъ выражается формулой:

$$V=8r^3(3+2\sqrt{3}).$$

125. На чертежѣ 101 представлено сѣченіе призмы плоскостью, проходящей черезъ центры трехъ нижнихъ шаровъ, положенныхъ въ призму. Соединимъ центръ шестиугольника O съ C и F, соединимъ центры шаровъ A и B и опустимъ изъ A перпендикуляръ AD на CF. Изъ равенства прямоуг. тре-ковъ ADC и AOE ($AD=AE=R$; $\angle ACD=\angle AOE=60°$) слѣдуетъ, что $AC=AO$. Въ прямоуг. тре-кѣ ACD катетъ

$AD = R$ и $\angle ACD = 60^\circ$. Если назовемъ CD буквой x, то $AC = 2x$. Изъ уравненія

$$4x^2 = x^2 + R^2$$

находимъ $x = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. Слѣд. $AC = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, а $CO = \frac{4}{3}R\sqrt{3}$. Послѣ этого легко находимъ площадь шестиугольнаго основанія призмы $S = 8R^2\sqrt{3}$.

Для опредѣленія высоты призмы употребляемъ слѣдующій пріемъ. Если соединить центръ седьмого шара (лежащаго по серединѣ) съ центрами всѣхъ остальныхъ шести шаровъ и провести черезъ каждую пару полученныхъ прямыхъ плоскости, а также одну плоскость черезъ центры трехъ нижнихъ, а другую черезъ центры трехъ верхнихъ шаровъ, то получатся два равныхъ правильныхъ тетраэдра со сторонами $2R$. Высота призмы равна суммѣ высотъ этихъ тетраэдровъ + удвоенный радіусъ данныхъ шаровъ. Такъ какъ высота тетраэдра со стороной a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ *), то высота каждаго изъ тетраэдровъ со стороной $2R$ равна $2R\sqrt{\frac{2}{3}}$. Слѣд. высота призмы равна

$$4R\sqrt{\tfrac{2}{3}} + 2R.$$

а потому искомый объемъ призмы выразится формулой

$$8R^2\sqrt{3}\,(4R\sqrt{\tfrac{2}{3}} + 2R) = 16R^3(2\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

126. Объемъ даннаго шара $= \frac{4}{3}\pi R^3$; если искомую толщину его оболочки назовемъ буквой x, то объемъ оболочки равенъ $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R - x)^3 = \frac{4}{3}\pi[R^3 - (R - x)^3]$; вѣсъ же этой оболочки выразится формулой **)

$$\tfrac{4}{3}\pi d[R^3 - (R - x)^3].$$

Объемъ части шара, погруженной въ воду, есть

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{2}{3}\pi R^3;$$

---

*) См. ниже № 139.

**) Если R выражено въ метрической системѣ мѣръ; въ противномъ случаѣ придется умножить это выраженіе еще на вѣсъ единицы объема воды.

такой же формулой выразится въ метрической системѣ и вѣсъ вытѣсненной имъ воды. Такъ какъ шаръ плаваетъ, то по закону Архимеда вѣсъ его равенъ вѣсу, вытѣсняемой имъ воды; слѣд. имѣемъ уравненіе:

$$\tfrac{4}{3}\pi d[R^3-(R-x)^3]=\tfrac{2}{3}\pi R^3,$$

откуда найдемъ: $$x=R\left[1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{2d}}\right].$$

127. Обозначимъ буквами R и r радіусы внѣшней и внутренней поверхности шаровой оболочки. Такъ какъ шаръ плаваетъ, то по закону Архимеда вѣсъ его равенъ вѣсу вытѣсняемой имъ воды. Слѣд. имѣемъ уравненіе:

$$\tfrac{4}{3}\pi(R^3-r^3)d=\tfrac{2}{3}\pi R^3,$$

или $$R^3-r^3=\frac{R^3}{2d} \qquad (1)$$

Кромѣ того, условіе задачи даетъ второе уравненіе:

$$R-r=m. \qquad (2)$$

Изъ этихъ уравненій легко найдемъ

$$R=\frac{m\sqrt[3]{2d}}{\sqrt[3]{2d}-\sqrt[3]{2d-1}} \text{ и } r=\frac{m\sqrt[3]{2d-1}}{\sqrt[3]{2d}-\sqrt[3]{2d-1}}.$$

128. Назовемъ искомые катеты буквами x и y. При вращеніи прямоуг. тре-ка около катета x получится конусъ съ радіусомъ основанія y и высотой x. Объемъ этого конуса выразится формулой $\frac{1}{3}\pi y^2x$. При вращеніи тре-ка около катета y, получится конусъ съ объемомъ $\frac{1}{3}\pi x^2y$. По условію задачи имѣемъ:

$$\tfrac{1}{3}\pi y^2x : \tfrac{1}{3}\pi x^2y = 1 : 2,$$

откуда $$\frac{y}{x}=\tfrac{1}{2}, \text{ т. е. } x=2y.$$

Послѣ этого изъ уравненія: $y^2+4y^2=a^2$,

получаемъ $$y=\frac{a}{5}\sqrt{5}, \text{ а слѣд. } x=\frac{2a}{5}\sqrt{5}.$$

129. Обозначивъ сторону даннаго тре ка буквой a, найдемъ, что искомый объемъ равенъ $\frac{1}{4}\pi a^3$.

130. Если сторона равносторонняго тре-ка равна a, то объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія тре-ка около одной изъ его сторонъ, равенъ $\frac{1}{4}\pi a^3$; объемъ же тѣла, происшедшаго отъ вращенія этого тре-ка около одной изъ его высотъ, равенъ $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$. Слѣдовательно отношеніе объемовъ этихъ тѣлъ вращенія равно $\frac{1}{4}\pi a^3 : \frac{1}{24}\pi a^3 \sqrt{3} = 6 : \sqrt{3}$.

131. Проведемъ въ тре-кѣ ABC высоту BD на сторону AC. Обозначимъ объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія тре-ка ABC около стороны $AC = b$ буквой V_b. Объемъ этотъ равенъ очевидно суммѣ объемовъ двухъ конусовъ: у одного радіусъ окружности основанія $= BF = h_b$, а высота $= AD$, у другого радіусъ окружности основанія тоже $= h_b$, а высота $= CD$. Итакъ:

$$V_b = \frac{\pi}{3}h_b^2 \,.\, AD + \frac{\pi}{3}h_b^2 \,.\, CD = \frac{\pi}{3}h_b^2(AB + CD) = \frac{\pi}{3}h_b^2 b.$$

Но $h_b . b$=удвоенной площади даннаго тре-ка $2S$, а потому

$$h_b = \frac{2S}{b}, \text{ такъ что}$$

$$V_b = \frac{4}{3}\pi \frac{S^2}{b}.$$

Также найдемъ объемы тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія того же тре-ка около сторонъ a и c:

$$V_a = \frac{4}{3}\pi \frac{S^2}{a}, \quad V_c = \frac{4}{3}\pi \frac{S^2}{c}.$$

Слѣдовательно искомое отношеніе равно:

$$V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

132. Если шестиугольникъ $ABCDEF$ (черт. 102) вращается около стороны FE, то поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія равна суммѣ боковой поверхности цилиндра, образованнаго вращеніемъ стороны BC и боковыхъ поверхностей четырехъ конусовъ, образованныхъ вращеніями сторонъ AB, AF, CD и ED.

Боковая поверхность усѣченнаго конуса, образованнаго вращеніемъ CD, равна $\pi(CE+DK)CD=\pi\left(a\sqrt{3}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)a=$ $=\frac{3\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Боковая поверхность конуса, образованнаго вращеніемъ DE, равна $\pi\,.\,DK\,.\,ED=\pi\,.\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot a=\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Боковая поверхность цилиндра, образованнаго вращеніемъ BC, равна $2\pi EC\,.\,BC=2\pi\,.\,a\sqrt{3}\,.\,a=2\pi a^2\sqrt{3}$.

Итакъ, поверхность тѣла, получившагося отъ вращенія шестиугольника, равна:

$$\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}+\frac{3\pi a^2\sqrt{3}}{2}+2\pi a^2\sqrt{3}+\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}+\frac{3\pi a^2\sqrt{3}}{2}=6\pi a^2\sqrt{3}.$$

133. Объемъ тѣла, получающагося отъ вращенія правильнаго шестиугольника $ABCDEF$ (черт. 102) около стороны его FE, состоитъ изъ суммы объемовъ цилиндра, образованнаго вращеніемъ BC и двухъ равныхъ объемовъ тѣлъ, происшедшихъ отъ вращенія тре-ковъ CDE и BAF.

На основаніи извѣстной изъ теоріи геометріи теоремы (Кис. § 453) имѣемъ:

$$\textit{об. тѣла отъ вращ. } CDE=(\textit{поверхн. } CD)\,.\,\frac{DK}{3}=$$

$$=[\pi(CE+DK)\,.\,CD]\,.\,\frac{DK}{3}=$$

$$=\left[\pi\left(a\sqrt{3}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)a\right]\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{3\pi a^3}{4}.$$

Объемъ цилиндра отъ вращенія $BC=$

$$=\pi EC^2\,.\,BC=\pi(a\sqrt{3})^2\,.\,a=3\pi a^3.$$

Слѣдовательно объемъ всего тѣла вращенія равенъ:

$$\frac{3\pi a^3}{4} + 3\pi a^3 + \frac{3\pi a^3}{4} = \frac{9}{2} \cdot \pi a^3.$$

134. Высота трапеціи $ABCD$ (черт. 103) очевидно равна діаметру вписаннаго круга $2r$. Если обозначить сторону BC буквой x, то сторона $AD = AE + ED = x + 2\sqrt{a^2 - r^2}$. Такъ какъ во всякомъ описанномъ четыреугольникѣ суммы противоположныхъ сторонъ должны быть равны (Кис. § 172), то

$$BC + AD = AB + CD, \text{ или}$$

$$x + x + 2\sqrt{a^2 - r^2} = 2r + 2a,$$

откуда получаемъ:

$$BC = a + r - \sqrt{a^2 - r^2},\ AD = a + r + \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Послѣ этого нахожденіе боковой поверхности и объема усѣченнаго конуса не представляетъ никакихъ затрудненій.

135. Обозначимъ основаніе равнобедреннаго тре-ка буквой a, высоту буквой h и бокъ b. Условіе задачи даетъ слѣдующее уравненіе:

$$2\pi hb = \pi a^2, \text{ или } 2h\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = a^2.$$

Возводя это равенство въ квадратъ, получаемъ:

$$4h^4 + h^2a^2 = a^4.$$

Раздѣливъ обѣ части на a^4, получаемъ биквадратное уравненіе:

$$4\left(\frac{h}{a}\right)^4 + \left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1 = 0,$$

откуда находимъ искомое отношеніе

$$\frac{h}{a} = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{8}}.$$

136. Центръ вписаннаго въ кубъ шара очевидно находится въ центрѣ куба, т. е. въ точкѣ пересѣченія его діагоналей; діаметръ его равенъ сторонѣ a куба. Итакъ, поверхность вписаннаго шара $= \pi a^2$; объемъ $= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$.

137. Центръ описаннаго около куба шара находится въ центрѣ куба, т. е. въ точкѣ пересѣченія его діагоналей. Радіусъ его равенъ половинѣ діагонали.

Діагональ куба AG (черт. 80) найдется изъ прямоугольнаго тре-ка AEG, въ которомъ $AE=a$, $EG=a\sqrt{2}$; слѣдов. $AG = a\sqrt{3}$. Итакъ радіусъ описаннаго шара равенъ $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а потому поверхность шара равна $3\pi a^2$. а объемъ $=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

138. Поверхность правильнаго тетраэдра состоитъ изъ четырехъ равныхъ правильныхъ тре-ковъ со сторонами равными a. Такъ какъ площадь каждаго такого трека $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ то искомая поверхность татраэдра равна $a^2\sqrt{3}$.

139. Объемъ тетраэдра $ABCD$ (черт. 104) выражается формулой:

$$V=\tfrac{1}{3}S_{BCD}\cdot AE.$$

Но площадь $\triangle BCD$ равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, высота же AE опредѣляется изъ прямоугольнаго тре-ка AEC:

$$AE=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{EC}^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=a\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Слѣд. искомый объемъ тетраэдра выражается формулой:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\sqrt{\tfrac{2}{3}}=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

140. Въ предыдущихъ задачахъ (№№ 138 и 139) было выведено что высота тетраэдра $h=a\sqrt{\frac{2}{3}}$; поверхность его $=$ $=a^2\sqrt{3}$; объемъ$=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$. Слѣд. если намъ дана высота h, то сторона $a=h\sqrt{\frac{3}{2}}$; послѣ чего находимъ поверхность $S=$ $=a^2\sqrt{3}=\frac{3}{2}h^2\sqrt{3}$ и объемъ $V=\frac{1}{8}h^3\sqrt{3}$.

141. Поверхность правильнаго октаэдра состоитъ изъ восьми равныхъ правильныхъ тре-ковъ. Такъ какъ площадь каждаго изъ такихъ треугольниковъ равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то искомая поверхность октаэдра $=8\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=2a^2\sqrt{3}$.

142. Объемъ правильнаго октаэдра $ABCDEF$ (черт. 105) можетъ быть разсматриваемъ какъ сумма объемовъ двухъ равныхъ пирамидъ: $ABCDE$ и $FBCDE$. Слѣд.

$$V=2\cdot\tfrac{1}{3}\cdot S_{BCDE}\cdot AH=\tfrac{2}{3}a^2\cdot AH.$$

Высота AH можетъ быть опредѣлена изъ прямоугольнаго тре-ка ACH, въ которомъ $AC=a$, $CH=$ половинѣ діагонали квадрата $BCDE=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Слѣдовательно

$$AH=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Подставляя это значеніе высоты AH въ формулу для объема, находимъ $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

143. Для рѣшенія задачъ на опредѣленіе радіусовъ (а слѣд. и поверхностей, и объемовъ) шаровъ, вписанныхъ въ правильные многогранники, или описанныхъ около нихъ, необходимо знать слѣдующія теоремы:

1. Около всякаго правильнаго многогранника можно описать шаръ.

2. Во всякій правильный многогранникъ можно вписать шаръ.

3. Общій центръ этихъ шаровъ находится на пересѣченіи перпендикуляровъ, возставленныхъ къ какимъ нибудь двумъ гранямъ многогранника изъ центровъ этихъ граней.

Послѣдняя теорема въ примѣненіи къ тетраэдру показываетъ, что общій центръ вписаннаго и описаннаго шаровъ находится на высотѣ AH (черт. 106) напр. въ точкѣ O. Соединяемъ центръ O съ вершиной B и точку B съ центромъ H тре-ка BCD. Тогда $BO=AO$ какъ радіусы R шара, описаннаго около тетраэдра; OH есть радіусъ r шара, вписаннаго въ тетраэдръ.

Изъ прямоугольнаго тре-ка BOH имѣемъ:

$$BO^2=BH^2+OH^2, \text{ или}$$

$$(AH-OH)^2=BH^2+OH^2. \tag{1}$$

Но AH—высота тетраэдра равна (см. № 139) $a\sqrt{\frac{2}{3}}$, такъ какъ H есть центръ правильнаго тре-ка BCD, то $BH=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Слѣд. равенство (1) можетъ быть переписано такъ:

$$\left[a\sqrt{\frac{2}{3}}-r\right]^2=\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2+r^2,$$

откуда находимъ $r=\frac{a}{12}\sqrt{6}$.

Слѣд. поверхность вписаннаго шара равна $\frac{\pi a^2}{6}$, а объемъ его$=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{216}$.

144. Изъ чертежа 106 видно, что

$$AO=AH-OH$$

т. е. что радіуть шара, описаннаго около тетраэдра, равенъ разности между высотой и радіусомъ шара, вписаннаго въ него.

Такъ какъ высота тетраэдра въ зависимости отъ его ребра выражается формулой $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ (см. № 139), а радіусъ вписаннаго шара $r=\frac{a}{12}\sqrt{6}$ (см. № 143), то

$$R=a\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{a}{12}\sqrt{6}=\frac{a}{4}\sqrt{6}.$$

Слѣд. поверхность описаннаго шара выражается формулой $\frac{3}{2}\pi a^2$; объемъ шара $= \frac{1}{8}\pi a^3\sqrt{6}$.

145. Если обозначимъ ребро тетраэдра буквой a, то какъ выведено въ №№ 138, 139 и 143, имѣемъ:

поверхность прав. тетраэдра выражается формулой					$a^2\sqrt{3}$.
объемъ	„	„	„	„	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$
поверхность вписаннаго шара		„		„	$\frac{\pi a^2}{6}$
объемъ	„	„	„	„	$\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{216}$.

Слѣдовательно отношеніе поверхностей равно $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$; отношеніе объемовъ $= \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$.

146. Въ предыдущихъ задачахъ (№№ 138, 319, 144) выведено:

поверхность прав. тетраэдра выражается формулой					$a^2\sqrt{3}$
объемъ	„	„	„	„	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
поверхность описаннаго шара		„		„	$\frac{3}{2}\pi a^2$
объемъ	„	„	„	„	$\frac{1}{8}\pi a^3\sqrt{6}$.

Слѣд. искомое отношеніе поверхностей равно $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$; отношеніе объемовъ $= \frac{2\sqrt{3}}{9\pi}$.

147. Въ конусѣ, описанномъ около правильнаго тетраэдра, радіусъ основанія равенъ радіусу круга, описаннаго около правильнаго тре-ка со стороной a, т. е. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; въ конусѣ вписанномъ—радіусъ основанія $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Такъ какъ высота правильнаго тетраэдра съ ребромъ a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ (см. № 139), то образующая описаннаго конуса равна

$$\sqrt{\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = a;$$

также образующая вписаннаго конуса равна

$$\sqrt{\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Слѣд. боковая поверхность описаннаго конуса выразится формулой:

$$\pi \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot a = \frac{\pi a^2}{\sqrt{3}},$$

боковая поверхность вписаннаго конуса:

$$\pi \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Отношеніе боковыхъ поверхностей равно:

$$\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}} : \frac{\pi a^2}{4} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

Также найдемъ отношеніе полныхъ поверхностей:

$$\frac{\pi a^2}{3}(1+\sqrt{3}) : \frac{\pi a^2}{3} = 1 + \sqrt{3}.$$

и отношеніе объемовъ:

$$\frac{\pi a^3}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} : \frac{\pi a^3}{12}\sqrt{\frac{2}{3}} = 4.$$

148. Такъ какъ всѣ правильные тетраэдры подобны между собой, а поверхности подобныхъ тѣлъ относятся какъ квадраты сходственныхъ реберъ (Кис. § 401), то ребро искомаго тетраэдра равно $a\sqrt{2}$.

149. Каждая изъ діагональныхъ плоскостей правильнаго октаэдра, напр. $BCDE$, $AEFC$, $ADFB$ (черт. 107) представляетъ квадратъ со сторонами, равными ребру октаэдра. Слѣд. точка пересѣченія O діагоналей AF, BD, CE одинаково отстоитъ отъ всѣхъ вершинъ октаэдра и потому служитъ центромъ описаннаго шара.

Но центръ шара, описаннаго около правильнаго многогранника всегда совпадаетъ съ центромъ шара, вписаннаго въ него (См. № 143), а потому точка O есть также и центръ вписаннаго шара. Перпендикуляръ OK, опущенный изъ O на грань AED упадетъ въ точку K—центръ правильнаго тре-ка AED и отрѣзокъ OK представляетъ радіусъ шара, вписаннаго въ октаэдръ.

Въ прямоугольномъ тре-кѣ OKL имѣемъ:

$$LK=\frac{1}{3}AL=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$OL=\frac{1}{2}BE=\frac{a}{2}\cdot$$

Слѣдовательно изъ равенства $OK^2=OL^2-KL^2$ находимъ:

$$r^2=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{12}=\frac{a^2}{6},\ \text{откуда}\ r=\frac{a\sqrt{6}}{6}\cdot$$

Искомая поверхность вписаннаго шара равна:

$$4\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2=\frac{2}{3}\pi a^2.$$

Объемъ вписаннаго шара $=\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}\cdot$

150. Въ предыдущей задачѣ мы видѣли, что общій центръ вписаннаго и описаннаго относительно правильнаго октаэдра шаровъ находится въ точкѣ O (черт. 107) пересѣченія его діагоналей.

Эта точка O лежитъ на серединѣ діагонали октаэдра; каждая изъ этихъ діагоналей равна $a\sqrt{2}$, и потому радіусъ шара, описаннаго около правильнаго октаэдра $R=\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Слѣдовательно поверхность описаннаго шара равна $2\pi a^2$; объемъ описаннаго шара$=\frac{1}{3}\pi a^3\sqrt{2}$.

151. Изъ предыдущихъ задачъ (№№ 141, 142, 149) мы знаемъ, что если сторона правильнаго октаэдра равна a, то

поверхн. октаэдра	выражается формулой	$2a^2\sqrt{3}$
объемъ	„ „ „	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
поверхн. вписан. шара	„ „	$\frac{2}{3}\pi a^2$
объемъ „	„ „ „	$\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$.

Слѣд. искомое отношеніе поверхностей равно:

$$2a^2\sqrt{3} : \tfrac{2}{3}\pi a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Отношеніе объемовъ равно:

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{3} : \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

152. Изъ предыдущихъ задачъ (№№ 141, 142, 150) мы знаемъ, что если сторона правильнаго октаэдра a, то

поверхн. октаэдра	выражается формулою	$2a^2\sqrt{3}$
объемъ	„ „ „	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
поверхн. описан. шара	„ „	$2\pi a^2$
объемъ „	„ „ „	$\frac{1}{3}\pi a^3\sqrt{2}$.

Слѣд., искомое отношеніе поверхностей равно:

$$2a^2\sqrt{3} : 2\pi a^2 = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

и отношеніе объемовъ равно:

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{3} : \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{\pi}.$$

153. Обозначимъ ребро тетраэдра буквой x и ребро октаэдра буквой y. Тогда поверхность тетраэдра равна $x^2\sqrt{3}$ (См. № 138); поверхность октаэдра $= 2y^2\sqrt{3}$. (См. № 141).

Такъ какъ по условію поверхности этихъ многогранниковъ равны, то имѣемъ уравненіе:

$$x^2\sqrt{3}=2y^2\sqrt{3},$$

откуда искомое отношеніе $\frac{x}{y}=\sqrt{2}$.

154. Обозначимъ ребро тетраэдра буквой x и ребро октаэдра буквой y. Тогда объемъ тетраэдра на основаніи № 139 выразится формулой $\frac{x^3}{12}\sqrt{2}$; объемъ октаэдра на основаніи № 142 равенъ $\frac{y^3\sqrt{2}}{3}$. Изъ равенства: $\frac{x^3}{12}\sqrt{2}=\frac{y^3}{3}\sqrt{2}$, получимъ искомое отношеніе $\frac{x}{y}=\sqrt[3]{4}$.

155. Если поверхности правильныхъ тетраэдра и октаэдра равны, то, какъ выведено въ № 153 ребро тетраэдра въ $\sqrt{2}$ разъ больше ребра октаэдра. Если обозначимъ ребро октаэдра буквой x, то ребро тетраэдра будетъ $x\sqrt{2}$. Слѣд. на основаніи № 139 и 142 объемы этихъ многогранниковъ выразятся формулами: $\frac{x^3}{3}$ и $\frac{x^3\sqrt{2}}{3}$.

Слѣдов. искомое отношеніе объемовъ равно:

$$\frac{x^3}{3}:\frac{x^3\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

156. Во всякомъ правильномъ многогранникѣ конечныя точки A, B, C, D, E, (черт. 108) всѣхъ реберъ, выходящихъ изъ вершины одного и того же многограннаго угла G, лежатъ въ одной плоскости, отъ пересѣченія которой съ гранями многогранника образуется правильный многоугольникъ $ABCDE$. Перпендикуляръ GH, опущенный изъ вершины G, проходитъ черезъ центръ H многоугольника $ABCDE$, а слѣд. (на основаніи теоремы 3 къ задачѣ 143) и черезъ общій центръ шаровъ, описаннаго около даннаго многогранника и вписаннаго въ него.

На основаніи этого замѣчанія найдемъ R_{20} и r_{20} радіусы шаровъ, описаннаго и вписаннаго въ правильный икосаэдръ. Пусть будетъ G (черт. 108) тѣлесный уголъ икосаэдра; GA,

GB, GC, GD, GE—ребра, исходящія изъ вершины G. Фигура $ABCDE$, образуемая конечными точками этихъ реберъ, есть правильный пятиугольникъ со стороной, равной ребру икосаэдра a. Перпендикуляръ GH проходитъ черезъ центръ этого пятиугольника. Если черезъ три точки A, G, H, представимъ плоскость, пересѣкающуюся съ поверхностью шара, описаннаго около икосаэдра, то эта плоскость, проходя черезъ прямую GH, будетъ перпендикулярна къ $ABCDE$ и дастъ въ пересѣченіи съ шаровой поверхностью окружность большого круга. На основаніи извѣстной изъ геометріи теоремы (Кис. § 202) имѣемъ:

$$2R : AG = AG : GH$$

или, обозначивъ $GH = h$:

$$2R : a = a : h,$$

откуда

$$R = \frac{a^2}{2h}.$$

Обозначимъ радіусъ AH окружности, описанной около правильнаго многоугольника $ABCDE$ буквой K; тогда $h = \sqrt{a^2 - K^2}$, и слѣдовательно

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - K^2}} \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{I}$$

Но K, радіусъ круга, описаннаго около правильнаго пятиугольника, въ зависимости отъ его стороны a, выражается формулой *)

$$K = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу для R, найдемъ:

$$R_{20} = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Для нахожденія радіуса r_{20} шара, вписаннаго въ икосаэдръ, воспользуемся слѣдующей легко провѣряемой изъ чертежа зависимостью, справедливой для всѣхъ правильныхъ многогранниковъ:

*) См. задачу № 52 (3).

Если R, r, ρ выражаютъ соотвѣтственно радіусы: шара описаннаго, шара вписаннаго и круга, описаннаго около грани многогранника, то *)

$$r = \sqrt{R^2 - \rho^2}\,. \qquad \text{II}$$

Въ икосаэдрѣ всѣ грани суть правильные треугольники, а потому радіусъ круга, описаннаго около грани его $\rho = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Подставляя вмѣсто R и ρ въ формулу II соотвѣтственныя значенія, найдемъ:

$$r_{20} = \frac{a\sqrt{3}}{12}\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{3}}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right).$$

Для нахожденія R_{12} и r_{12} радіусовъ шаровъ, описаннаго и вписаннаго относительно правильнаго додекаэдра, воспользуемся тѣмъ же пріемомъ. При этомъ придется вмѣсто пятигранной пирамиды $GABCDE$ разсматривать трехгранную, $GBEF$ (черт. 109) такъ какъ въ додекаэдрѣ тѣлесные углы трехгранные. Основаніе этой пирамиды будетъ правильный треугольникъ BEF, стороны котораго представляютъ собою діагонали правильныхъ пятиугольниковъ со стороной a, т. е. граней додекаэдра.

Формулы I и II, выведенныя для икосаэдра, справедливы и для всѣхъ остальныхъ правильныхъ многогранниковъ, а потому

$$R_{12} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - K^2}}.$$

гдѣ K есть радіусъ круга, описаннаго около основанія трехгранной пирамиды $GBEF$, т. е. около правильнаго тре-ка BEF.

Если сторону этого тре-ка назовемъ буквой b, то $K = \frac{b}{\sqrt{3}}$; но b есть діагональ правильнаго пятиугольника со стороной a. Нетрудно вывести, что діагональ b правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса ρ, выражается формулой:

$$b = \rho\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}},$$

*) См. напр. чертежъ 109, гдѣ $OB = R$, $OA = r$, $AB = \rho$.

а такъ какъ радіусъ ρ въ зависимости отъ стороны a равенъ (см. № 52)

$$\rho = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}},$$

то $b = \dfrac{a(5+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$.

Слѣдовательно радіусъ круга, описаннаго около правильнаго тре-ка BEF со стороной b, выразится формулой:

$$K = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{a(5+\sqrt{5})}{2\sqrt{15}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}(\sqrt{5}+1).$$

Слѣдовательно $K^2 = \dfrac{a^2}{6}(3+\sqrt{5})$.

Подставляя это значеніе K^2 въ формулу для R:

$$R_{12} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-K^2}},$$

получачаемъ: $R_{12} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$.

Когда R_{12} опредѣлено, то при помощи формулы (II)

$$r = \sqrt{R^2-\rho^2},$$

гдѣ ρ—радіусъ круга, описаннаго около грани додекаэдра, т. е. около правильнаго пятиугольника, равенъ $a\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$, безъ труда найдемъ

$$r_{12} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}.$$

157. Если соединить вершины всѣхъ многогранныхъ угловъ какого нибудь правильнаго многогранника съ центромъ вписаннаго шара, то объемъ многогранника можетъ быть разсматриваемъ, какъ сумма объемовъ правильныхъ пирамидъ, имѣющихъ высотой радіусъ вписаннаго шара, а основаніемъ грань разсматриваемаго многогранника. Объемъ каждой такой пирамиды равенъ $\frac{1}{3}S.r$, гдѣ S—площадь одной грани.

Площадь S каждой грани равна половинѣ произведенія ея периметра на апоѳему; апоѳема же во всякомъ правильномъ многоугольникѣ можетъ быть выражена формулой

$$\sqrt{\rho^2-\frac{a^2}{4}},$$

гдѣ ρ есть радіусъ описаннаго около этой грани круга. Итакъ, если каждая грань многогранника имѣетъ n сторонъ, то площадь ея S выразится формулой:

$$S=\tfrac{1}{2}\,.\,n\,.\,a\sqrt{\rho^2-\frac{a^2}{4}}\,.$$

Слѣдовательно, если обозначимъ число всѣхъ граней многогранника буквой N, то общая формула для вычисленія объема имѣетъ видъ:

$$V=\tfrac{1}{6}N\,.\,n\,.\,a\,.\,r\,.\sqrt{\rho^2-\frac{a^2}{4}}\,.$$

Буквы N, n, r, ρ имѣютъ слѣдующія значенія:

Для тетраэдра:

$$N=4;\ n=3;\ r=\frac{a}{12}\sqrt{6};\ \rho=\frac{a}{\sqrt{3}}\,.$$

Для октаэдра:

$$N=8;\ n=3;\ r=\frac{a\sqrt{6}}{6};\ \rho=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Для куба:

$$N=6;\ n=4;\ r=\frac{a}{2};\ \rho=\frac{a}{\sqrt{2}}\,.$$

Для икосаэдра:

$$N=20;\ n=3;\ r=\frac{a\sqrt{3}}{12}\left(3+\sqrt{5}\right);\ \rho=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Для додекаэдра:

$$N=12;\ n=5;\ r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}};\ \rho=a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

Подставивъ эти значенія въ общую формулу для V, найдемъ:

Для тетраэдра: $V=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$.

Для октаэдра: $V=\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$.

Для куба: $V=a^3$.

Для икосаэдра: $V=\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$.

Для додекаэдра: $V=\frac{a^3}{4}(7\sqrt{5}+15)$.

158. По условію задачи стороны тре-ка относятся между собой какъ числа 3:4:5; слѣдов. если общую мѣру ихъ назовемъ буквой x, то стороны выразятся числами $3x$, $4x$, $5x$. По формулѣ площади въ зависимости отъ трехъ сторонъ треуг. имѣемъ:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{; или } 600=\sqrt{6x\,.\,3x\,.\,2x\,.\,x}=$$
$$=\sqrt{36x^4},$$

откуда $x=10$; слѣд. искомыя стороны равны 30, 40 и 50.

159. Если общую мѣру основанія и высоты назовемъ буквой x, то основаніе выразится числомъ mx, высота — nx, площадь $\frac{mnx^2}{2}$, периметръ $=x(m+\sqrt{4n^2+m^2})$.

На основаніи формулы: радіусъ круга, вписаннаго въ $\triangle$ равенъ площади, дѣленной на полупериметръ, имѣемъ:

$$r=\frac{mnx}{m+\sqrt{4n^2+m^2}},$$

слѣдовательно

$$S=\pi r^2=\frac{\pi m^2n^2x^2}{2m^2+4n^2+2m\sqrt{4n^2+m^2}}$$

опредѣляя отсюда x^2 и подставляя его значеніе въ формулу для площади $\frac{mnx^2}{2}$, получаемъ

$$S_{ABC}=\frac{m^2+2n^2+m\sqrt{4n^2+m^2}}{\pi mn}\cdot S$$

160. Сторона квадрата, вписаннаго въ окружность радіуса R, равна $R\sqrt{2}$, сторона же квадрата, описаннаго равна $2R$. Такъ какъ радіусъ данной окружности равенъ r, то сторона впис. квадрата $= r\sqrt{2}$, а слѣд. радіусъ второй окружности $= \frac{r\sqrt{2}}{2}$, также радіусъ третьей окружности $= \frac{r\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{2}$ и т. д. Искомая сумма всѣхъ радіусовъ равна:

$$r + \frac{r\sqrt{2}}{2} + \frac{r}{2} + \frac{r\sqrt{2}}{4} + \cdot$$

Сумма членовъ этой безконечно убыв. геометрич. прогрессіи равна *) $\frac{r}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = r(2+\sqrt{2})$.

Сумма площадей всѣхъ этихъ круговъ выразится формулой:

$$\pi\left(r^2 + \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{8} + \cdot \qquad \infty\right),$$

т. е. равна

$$\frac{\pi r^2}{1-{}^1/_2} = 2\pi r^2.$$

Такъ какъ площадь даннаго круга $= \pi r^2$, то сумма площадей всѣхъ этихъ круговъ вдвое больше площади даннаго круга, что и тр. док.

161. Если радіусъ окружности назовемъ x, то меньшая діагональ шестиугольника, равная сторонѣ правильнаго тре-ка, выразится числомъ $x\sqrt{3}$. Радіусъ круга вписаннаго въ тре-къ со сторонами x, x, $x\sqrt{3}$ по формулѣ $r = \frac{S}{p}$ равенъ:

$$r = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} : \frac{x(2+\sqrt{3})}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}.$$

Изъ уравненія

$$\frac{x\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3,$$

опредѣляемъ $x = 2$.

---

*) См. напр. П. Шмулевичъ «Дополн. къ курсу Алгебры» § 91.

Если радіусъ окружности, вписанной въ правильный шестиугольникъ со стороной 2 назовемъ y, то по формулѣ *)

$$b_n = \frac{Ra_n}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Имѣемъ:

$$2 = \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - \frac{y^2}{4}}} = \frac{2y}{\sqrt{3}},$$

откуда $y = \sqrt{3}$. Слѣдовательно искомая площадь $= \pi y^2 = 3\pi$.

162. Если къ дугѣ сектора въ ея серединѣ провести касательную до пересѣченія ея съ продолженіемъ радіусовъ, ограничивающихъ секторъ, то этотъ отрѣзокъ касательной, находясь противъ угла въ 60°, будетъ представлять собой сторону правильнаго шестиугольника, описаннаго около круга радіуса r и слѣд. будетъ равенъ

$$\frac{r \cdot r}{\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Радіусъ круга, вписаннаго въ правильный $\triangle$ со стороной $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ вычислится по формулѣ: $r = \frac{S}{p} = \left(\frac{r^2}{\sqrt{3}}\right) : r\sqrt{3} = \frac{r}{3}$.

163. Рѣшается также, какъ предыдущая. Отрѣзокъ касательной будетъ представлять сторону квадрата, описаннаго около круга радіуса r, т. е. будетъ равенъ $2r$.

Площадь тре-ка $S = r^2$, полупериметръ $= r(1+\sqrt{2})$, слѣд. искомый радіусъ $= \frac{S}{p} = \frac{r}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 1$, а потому площадь круга $= \pi r^2 = \pi$.

164. Какъ извѣстно изъ теоріи **) радіусъ внѣвписаннаго круга выражается формулой

$$\rho_a = \frac{S}{p-a}.$$

*) См. «Геом. Киселева» § 239 или «Геом. Давидова» § 130.

**) См. напр. «Геом. Киселева» § 302, или «Геом. Давидова» § 161.

Если сторону даннаго правильнаго тре-ка назовемъ x, то площадь его $=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$; $p-a=\frac{3x}{2}-x=\frac{x}{2}$, а потому

$$\rho_a=\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\right):\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Слѣд. площадь этого круга $S=\pi\rho_a{}^2=\frac{3\pi x^2}{4}$, откуда $x^2=\frac{4S}{3\pi}=\frac{4.\sqrt{3}}{3\,.\,\pi}$; искомая площадь тре-ка $=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=$

$$=\frac{4\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}}{3\,.\,\pi\,.\,4}=\frac{1}{\pi}.$$

165. На основаніи Пиѳагоровой теоремы искомая длина равна

$$\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}+\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}.$$

166. Если искомую длину общей хорды назовемъ x, то для опредѣленія x имѣемъ уравненіе

$$\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}+\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}}=a.$$

167. Искомыя діагонали выражаются формулами *):

$$\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Извлеченіе корня съ точностью до 0,01 даетъ: 5,93 и 6,56.

168. Обозначимъ:

сторону прав. впис. мног. о n сторон.$=x$; периметръ его$=2p$;
" " " " " $2n$ " $=y$; " " $=2p_1$;
" " " " " $4n$ " $=z$; " " $=2P$.

Тогда имѣемъ: $x=\frac{2p}{n}$; $y=\frac{2p_1}{2n}$.

---

*) См. «Геометрія Киселева», § 214.

Изъ формулы удвоенія числа сторонъ прав. вписаннаго многоугольника получаемъ:

$$\frac{p_1}{n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{4p^2}{n^2}}},$$

откуда опредѣлится R.

Послѣ этого опредѣляемъ по этой же формулѣ удвоенія сторону z многоугольника о $4n$ сторонахъ въ зависимости отъ R и $y=\frac{p_1}{n}$; искомый периметръ $2P=4nz$.

Отвѣтъ: $2P=2p_1\sqrt{\frac{2p_1}{p+p_1}}$.

169. Искомое отношеніе равно $^1/_2$.

170. $$S=2\sqrt{p_1\left(p_1-\frac{a}{2}\right)\left(p_1-m_a\right)\left(p_1-b\right)},$$

$$\text{гдѣ } 2p_1=\frac{a}{2}+m_a+b.$$

171. $S=\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-b)(p_1-2m_c)}$, гдѣ $2p_1=a+b+2m_c$.

172. $S=\frac{1}{4}\sqrt{16a^2b^2-(m^2-n^2)^2}$.

173. Можно.

174. Нельзя, такъ какъ сумма плоскихъ угловъ больше 360°.

175. Можно.

176. Нѣтъ, такъ какъ сумма плоскихъ угловъ не равна 360°.

177. Разстоянія плоскостей отъ вершины выражаются числами $h\sqrt[3]{\frac{m+n+p}{m}}$ и $h\sqrt[3]{\frac{m+n}{m+n+p}}$, гдѣ h высота пирамиды.

178. $\frac{m^3v}{m^3+n^3}$ и $\frac{n^3v}{m^3+n^3}$. **179.** $\frac{d\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$ и $\frac{d\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$.

180. $\dfrac{m^3V}{m^3+n^3+p^3}$; $\dfrac{n^3V}{m^3+n^3+p^3}$ и $\dfrac{p^3V}{m^3+n^3+p^3}$.

181. $\dfrac{S\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{p}}$; $\dfrac{S\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{p}}$ и $\dfrac{S\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{p}}$.

182. $\dfrac{m^2P}{m^2+n^2}$ и $\dfrac{n^2P}{m^2+n^2}$. **183.** $\dfrac{m^3V}{m^3+n^3}$ и $\dfrac{n^3V}{m^3+n^3}$.

184. $\dfrac{\pi a^2mh}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}$ и $\dfrac{\pi a^2nh\sqrt{n}}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2\sqrt{m}}$.

185. $\dfrac{4\pi ah+S\pm\sqrt{S^2+8\pi aSh-16\pi^2a^2h^2}}{8\pi h}$.

186. Увеличится въ mn разъ.

187. Объемъ увеличится въ m^3 разъ, поверхность увеличится въ m^2 разъ,

188. Увеличится въ m^2 разъ.

189. Увеличится въ m разъ.

190. $\dfrac{4\pi a^2m}{(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p})^2}$; $\dfrac{4\pi a^2n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p})^2}$ и

$$\frac{4\pi a^2p}{(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p})^2}.$$

191. $\dfrac{\pi mh^2}{m+n}$ и $\dfrac{\pi nh^2}{m+n}$.

192. $\dfrac{4\pi R^3m^2(3n+m)}{3(n+m)^3}$ и $\dfrac{4\pi R^3n^2(3m+n)}{3(n+m)^3}$

Построенiе корней полнаго квадратнаго уравненiя.

Такъ какъ уравненiя, получаемыя при алгебраическомъ рѣшенiи геометрическихъ задачъ, всегда однородны *), то квадратныя уравненiя, корни которыхъ приходится строить могутъ имѣть одинъ изъ слѣдующихъ четырехъ видовъ:

1) $x^2 - px + q^2 = 0.$

2) $x^2 - px - q^2 = 0.$

3) $x^2 + px + q^2 = 0.$

4) $x^2 + px - q^2 = 0.$

Во всѣхъ этихъ уравненiяхъ извѣстный членъ обозначенъ q^2, такъ какъ площадь всякой фигуры можетъ быть замѣнена по извѣстнымъ правиламъ площадью равновеликаго квадрата.

1-й способъ: *построенiе алгебраической формулы, представляющей рѣшенiе квадратнаго уравненiя.*

Рѣшивъ уравненiе (1), получаемъ его корни:

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}; \quad x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}.$$

Корни эти будутъ вещественны, если $\frac{p^2}{4} \geqslant q^2$; при соблюденiи этого условiя оба корня будутъ положительны, такъ какъ очевидно

$$\frac{p}{2} > \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}.$$

*) См. объ этомъ въ Геометрiи Киселева, приложенiе въ концѣ книги: „*Главнѣйшiе методы рѣшенiя геометрическихъ задачъ на построенiе*“ **пунктъ 7** „*Алгебраическiй методъ*“.

Построивъ линію $m = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$, т. е. опредѣливъ при помощи чертежа катетъ прямоугольнаго тре-ка, котораго гипотенуза равна $\frac{p}{2}$, а другой катетъ q, найдемъ искомые корни $x_1 = \frac{p}{2} + m$, $x_2 = \frac{p}{2} - m$.

Построеніе это выполнено на чертежѣ 110.

Рѣшивъ уравненіе (2), получаемъ корни:

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2};\ x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}.$$

Оба эти корня вещественны, такъ какъ подкоренная величина, состоя изъ суммы двухъ квадратовъ, всегда положительна. При этомъ, такъ какъ

$$\frac{p}{2} < \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2},$$

то x_1 положительно, x_2—отрицательно.

Построивъ линію $m = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}$, т. е. опредѣливъ при помощи чертежа гипотенузу прямоугольнаго тре-ка, котораго одинъ катетъ равенъ $\frac{p}{2}$, а другой—q, найдемъ искомые корни $x_1 = \frac{p}{2} + m$; $x_2 = \frac{p}{2} - m$.

Построеніе выполнено на черт. 111.

Корни уравненія (3) равны по величинѣ и обратны по знаку корнямъ уравненія (1). Это видно какъ изъ формулы рѣшенія:

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2} = -\left(\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}\right).$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2} = -\left(\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}\right),$$

какъ и изъ самой формы уравненія (на основаніи знаковъ при коэффиціентахъ). Слѣдовательно оба эти корня отрицательны и для построенія ихъ строимъ корни ур-ія (1), какъ показано выше и беремъ ихъ съ обратными знаками.

Корни ур-ія (4) равны по величинѣ и обратны по знаку корнямъ ур-ія (2); слѣд. построивъ корни ур-ія (2), какъ показано выше, и взявъ ихъ съ обратными знаками, получимъ корни ур-ія (4).

2-ой способъ: *построеніе корней квадратнаго уравненія непосредственно,* т. е. не рѣшая уравненія.

Уравненіе (1)

$$x^2-px+q^2=0$$

можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$x(p-x)=q^2.$$

Такъ какъ произведеніе двухъ множителей x и $(p-x)$ равно свободному члену ур-ія (q^2), сумма же ихъ равна коэффиціенту при первой степени неизвѣстнаго, взятому съ обратнымъ знакомъ ($+p$), то на основаніи извѣстной алгебраической зависимости между коэффиціентами и корнями квадратнаго ур-ія, заключаемъ, что, построивъ отрѣзки x и $(p-x)$, мы тѣмъ самымъ построимъ оба корня даннаго ур-ія.

Уравненіе $x(p-x)=q^2$ можетъ быть представлено въ видѣ пропорціи

$$\frac{x}{q}=\frac{q}{p-x}.$$

Изъ этой пропорціи видно, что отрѣзокъ q есть средняя пропорціональная между искомыми корнями и что послѣдніе могутъ быть построены на основаніи извѣстной теоремы:

Перпендикуляръ, опущенный изъ произвольной точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра (Кис. § 202).

Въ этомъ случаѣ отрѣзки x и $p-x$ должны быть отрѣзками діаметра, т. е. діаметромъ должна служить прямая p; линія же q должна быть перпендикуляромъ къ діаметру. Поэтому построеніе производится такъ:

На произвольной прямой XY (черт. 112) откладываемъ отрѣзокъ AB, равный p и описываемъ на p, какъ на діаметрѣ полуокружность; въ произвольной точкѣ, напр. B, прямой

XY возставляемъ къ ней перпендикуляръ, откладываемъ на этомъ перпендикулярѣ отрѣзокъ $BC=q$ и проводимъ прямую $CE \parallel XY$.

Изъ точки пересѣченія этой прямой съ окружностью опускаемъ $DK \perp XY$. Отрѣзки KB и AK будутъ искомыми корнями такъ какъ $AK+BK=p$, $AK \cdot BK=q^2$.

Если $q<\frac{p}{2}$, то прямая CE пересѣчется съ окружностью въ двухъ точкахъ. Если $q=\frac{p}{2}$, то прямая CE коснется окружности и получатся два равныхъ корня. Если $q>\frac{p}{2}$, то прямая и окружность не пересѣкутся и рѣшеній больше не будетъ; это ясно также изъ того, что при $q>\frac{p}{2}$ разность $\frac{p^2}{4}-q^2<0$ и корни ур-ія будутъ мнимые.

Уравненіе II:

$$x^2-px-q^2=0$$

можетъ быть переписано такъ:

$$x(p-x)=-q^2,$$

откуда видно, что отрѣзки x и $(p-x)$ суть корни даннаго ур-ія, такъ какъ сумма ихъ равна p и произведеніе $=-q^2$. Переписавъ это ур-іе въ видѣ пропорціи

$$\frac{x}{q}=\frac{q}{x-p}.$$

заключаемъ, что, построивъ по этой пропорціи отрѣзки x и $(p-x)$ и взявъ второй изъ нихъ съ обратнымъ знакомъ, получимъ искомые корни ур-ія.

Для построенія этихъ отрѣзковъ воспользуемся теоремой: *Касательная есть средняя пропорціональная между всей сѣкущей и ея внѣшней частью* (Кис. § 219).

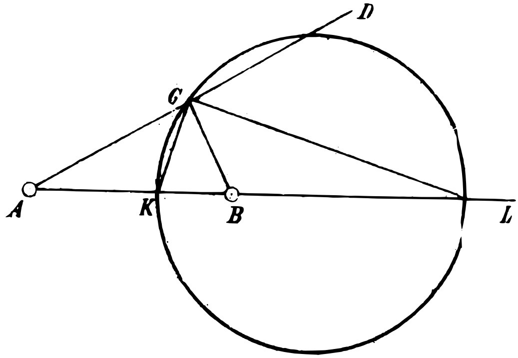
Въ этомъ случаѣ длина касательной должна равняться q, вся сѣкущая $=x$, ея внѣшняя часть $=x-p$; а потому ея внутренняя часть равна p. Слѣдовательно построеніе можетъ быть произведено слѣдующимъ образомъ:

Изъ произвольной точки O (черт. 113) радіусомъ рав нымъ $\frac{p}{2}$ описываемъ окружность и въ произвольной точкѣ A на окружности проводимъ къ ней касательную, на которой откладываемъ отрѣзокъ $AB=q$. Изъ точки B проводимъ сѣкущую BD черезъ центръ O. Тогда отрѣзокъ $BD=x$ и отрѣзокъ $BC=x-p$. Слѣдовательно искомые корни уравненія будутъ $x_1=BD$ и $x_2=p-x=-BC$.

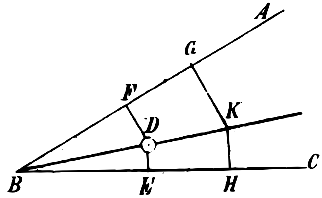
Такъ какъ корни ур-ій (3) и (4) равны по абсолютной величинѣ и обратны по знаку корнямъ ур-ій (1) и (2), то построеніе ихъ производится точно такъ же.

Оглавленіе.

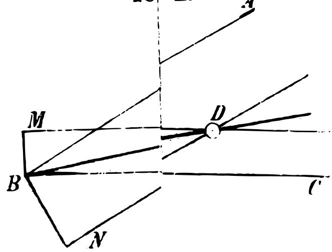
Черт. 1.



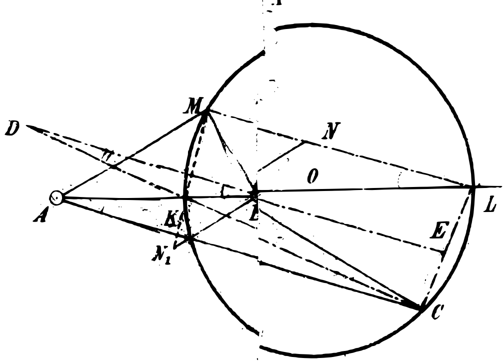
Черт. 3.



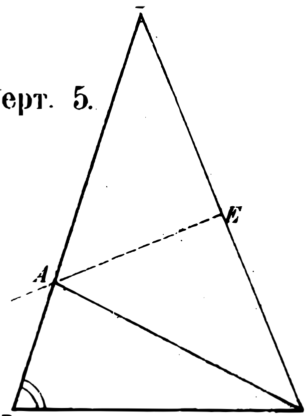
Черт. 4.



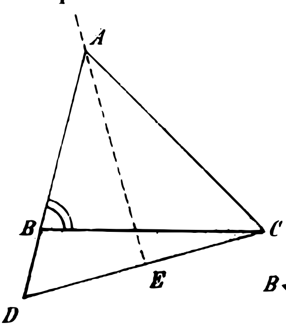
Черт. 2.



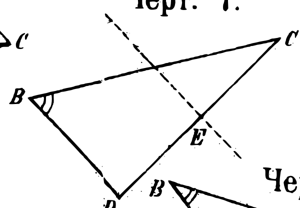
Черт. 5.



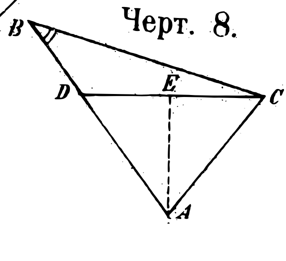
Черт. 6.

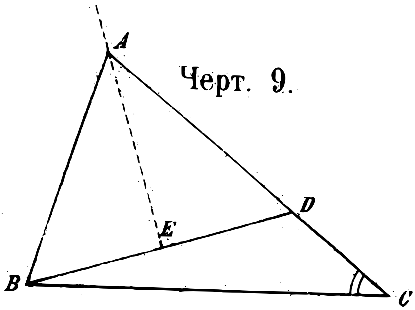


Черт. 7.

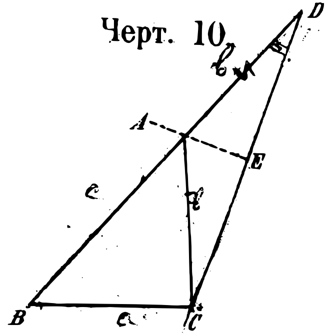


Черт. 8.

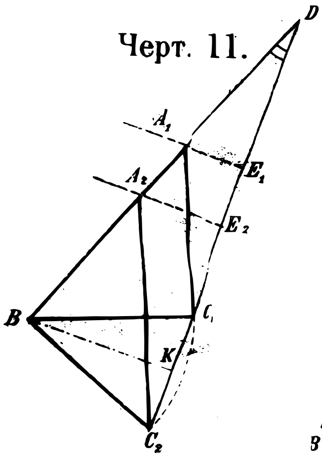




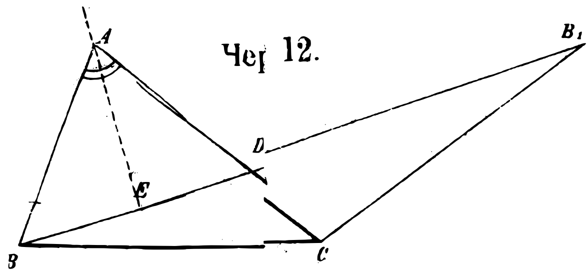
Черт. 9.



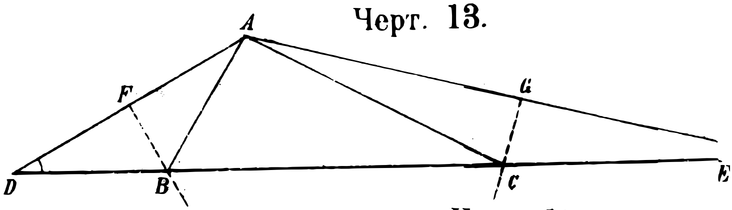
Черт. 10.



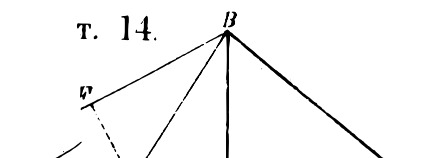
Черт. 11.



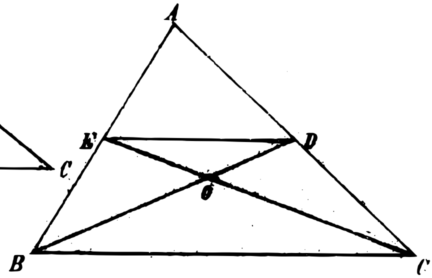
Чер 12.



Черт. 13.

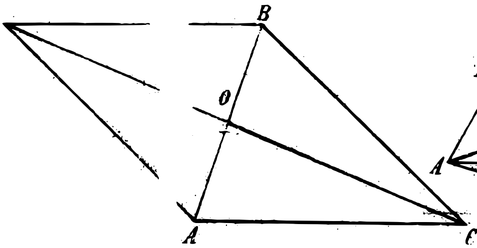


т. 14.

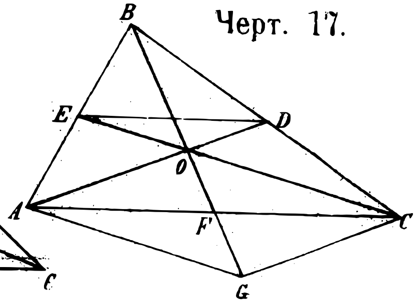


Черт. 15.

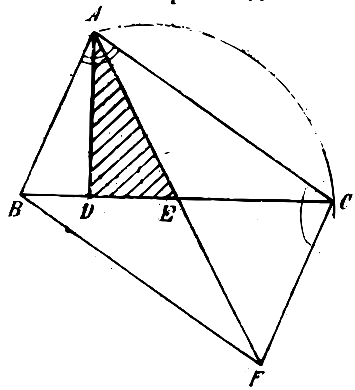
Черт. 16.



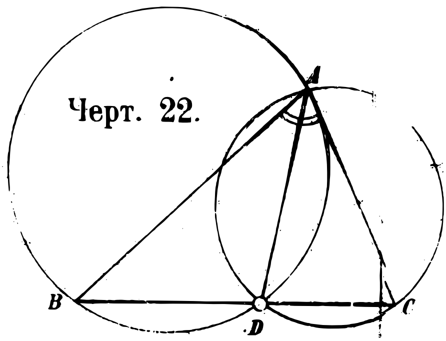
Черт. 17.



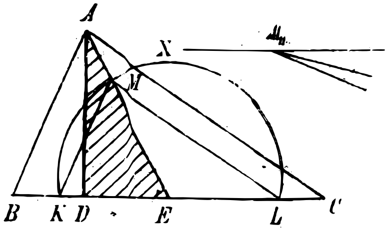
Черт. 18.



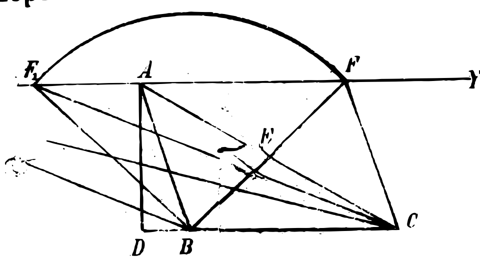
Черт. 22.



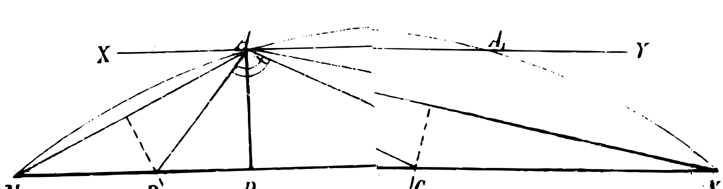
Черт. 19.



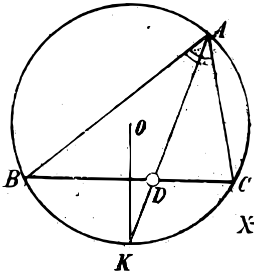
Черт. 20.



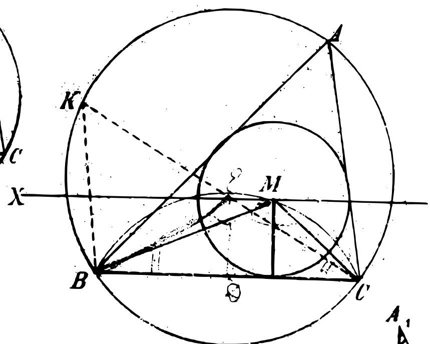
Че1.



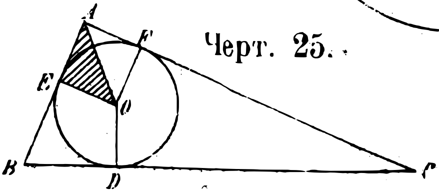
Черт. 23.



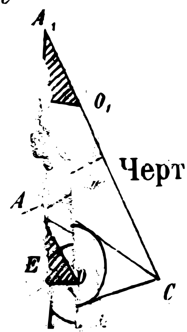
Черт. 24.



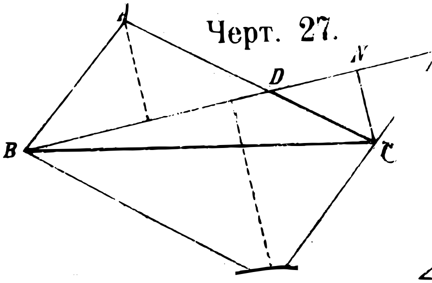
Черт. 25.



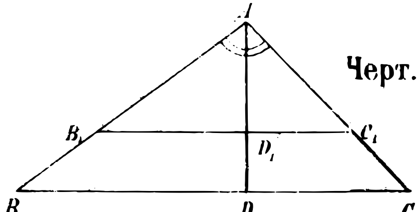
Черт. 26.



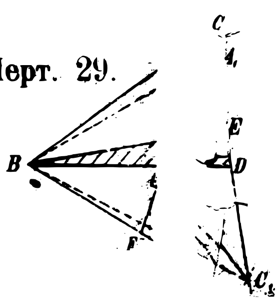
Черт. 27.



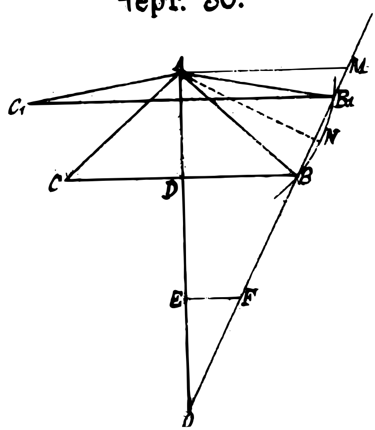
Черт. 28.



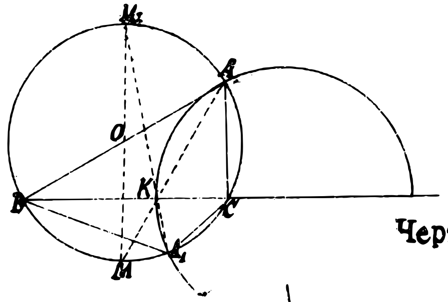
Черт. 29.



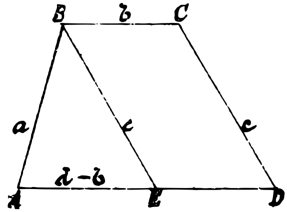
Черт. 30.



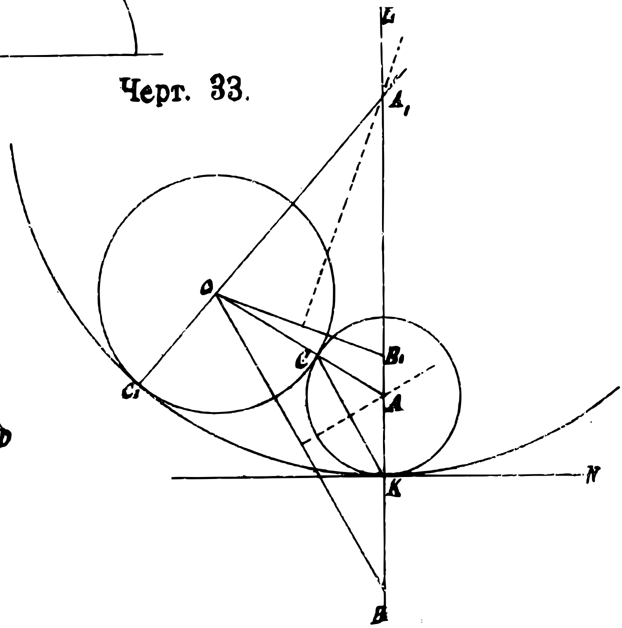
Черт 31.



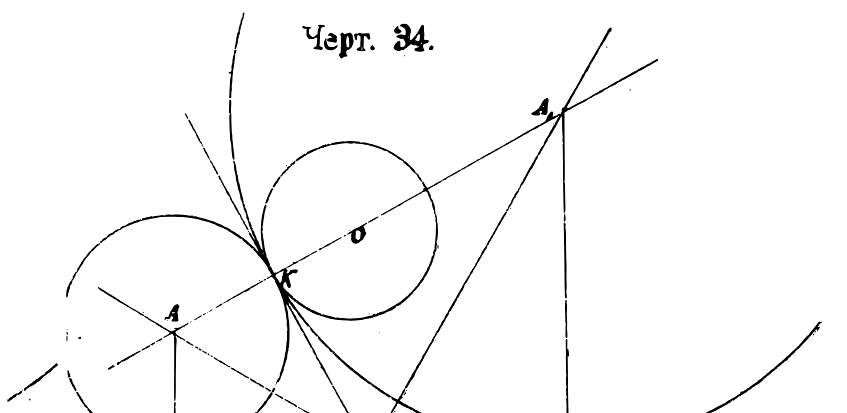
Черт. 32.



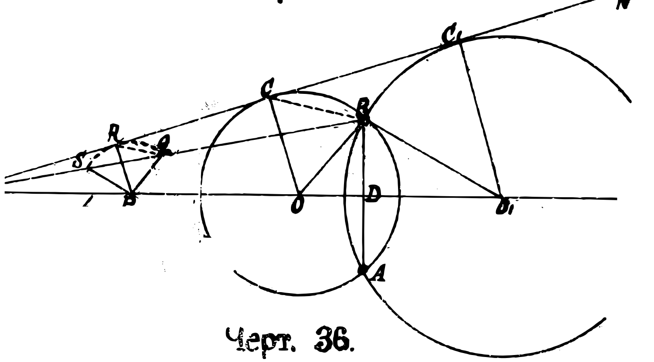
Черт. 33.



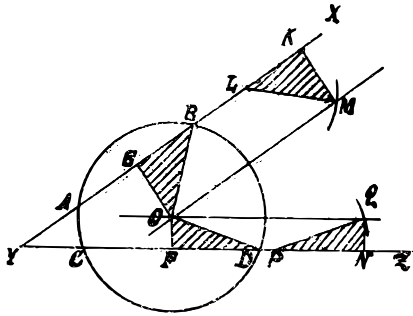
Черт. 34.



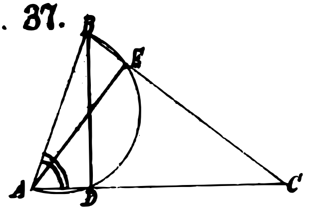
Черт. 35.



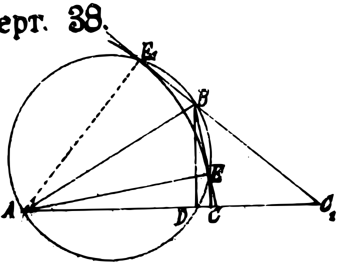
Черт. 36.



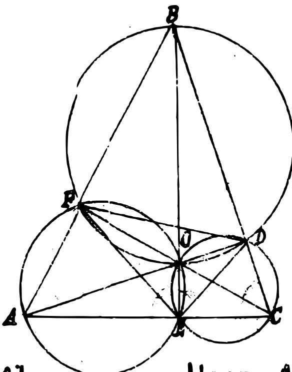
Черт. 37.



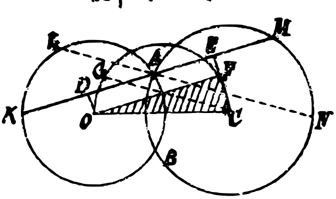
Черт. 38.



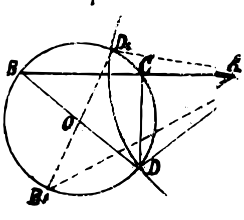
Черт. 39.



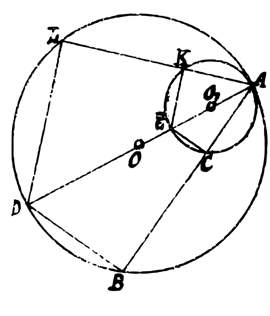
Черт. 40.



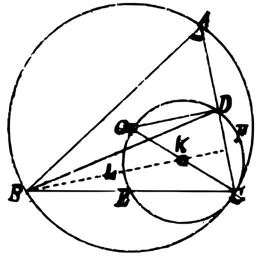
Черт. 41.



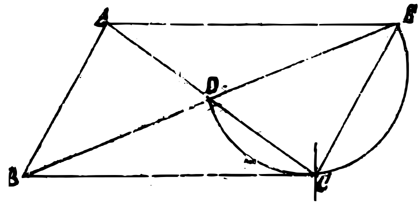
Черт. 42.



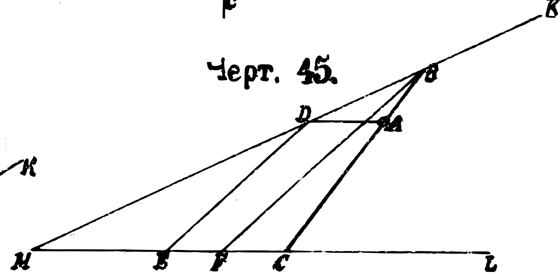
Черт. 43.



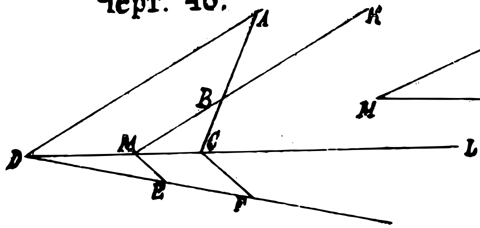
Черт. 44.



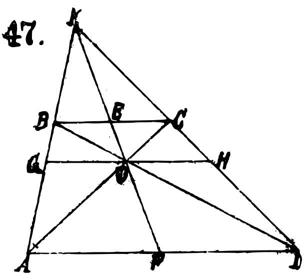
Черт. 45.



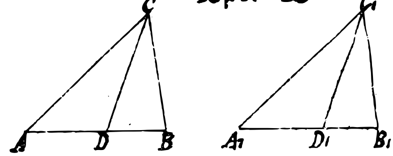
Черт. 46.



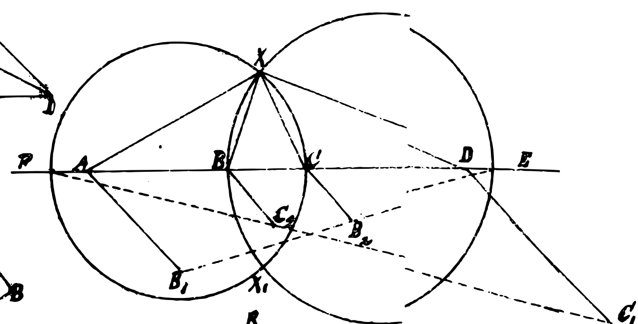
Черт. 47.



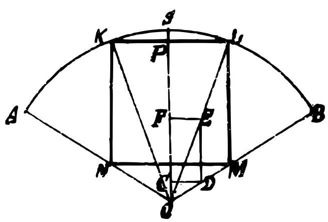
Черт. 48



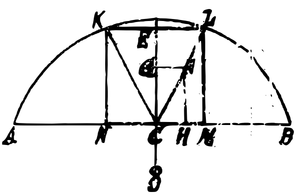
Черт. 49.

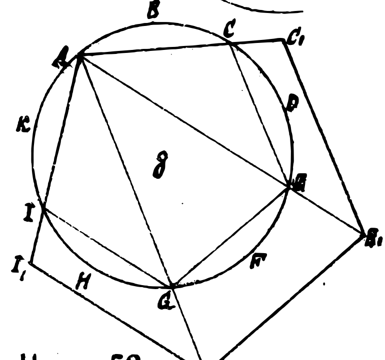


Черт. 50.



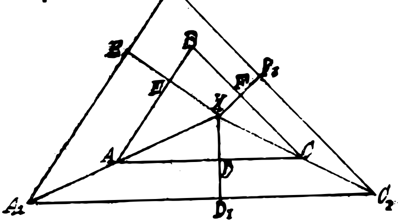
Черт. 51.



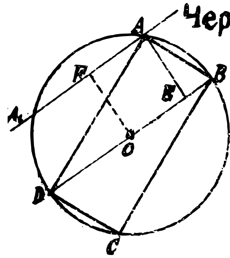


Черт. 52.

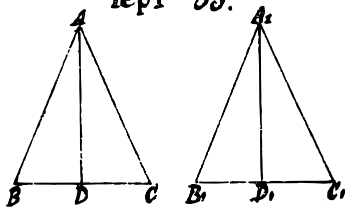
Черт. 53.



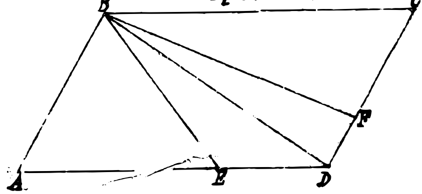
Черт. 54.



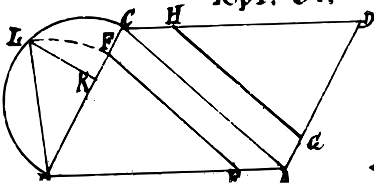
Черт 55.

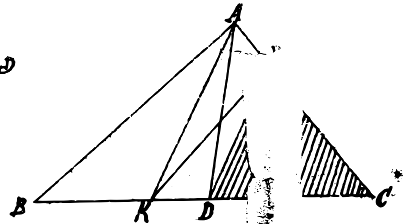


Черт. 56.



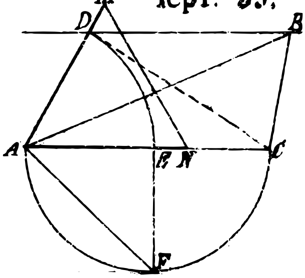
Черт. 57.

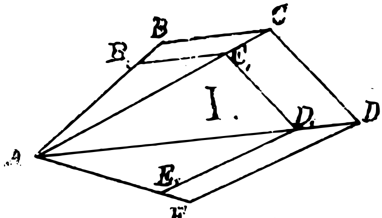




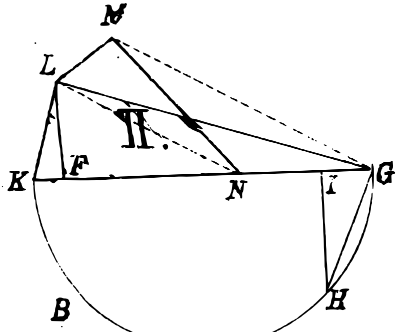
Черт

Черт. 59.



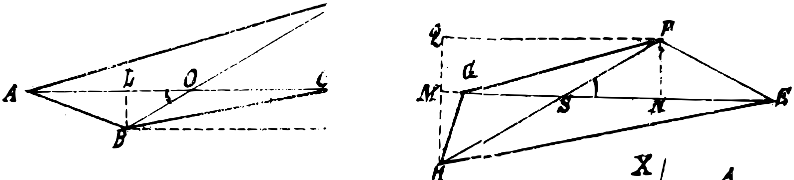


Чер. 60

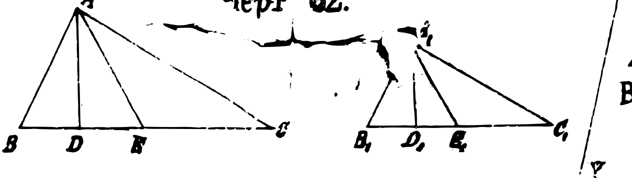


B

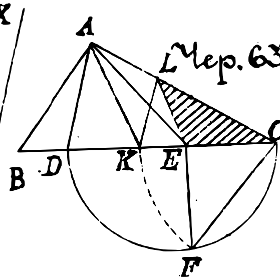
Черт. 61.



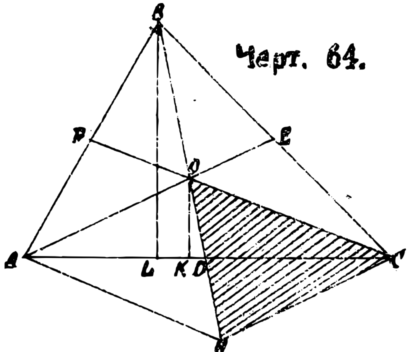
Черт 62.



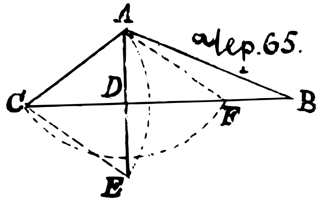
Чер. 63.



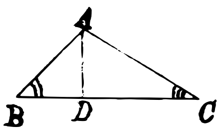
Черт. 64.



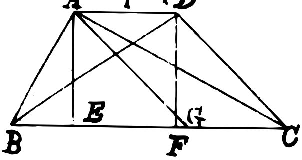
Чер. 65.



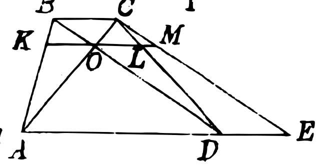
Чер. 66.



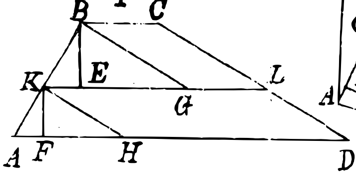
Чер. 67.



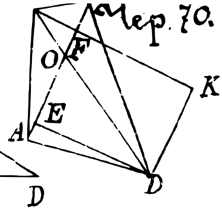
Чер. 68.



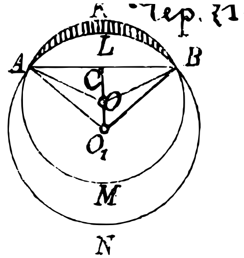
Чер. 69.

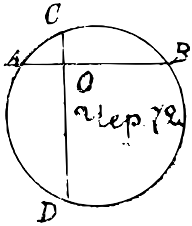


Чер. 70.

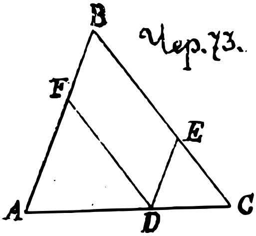


Чер. 71.

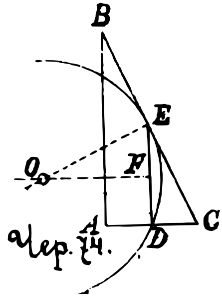




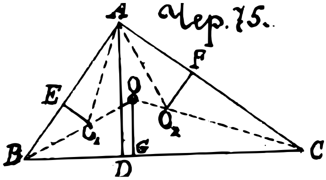
Черт. 72.



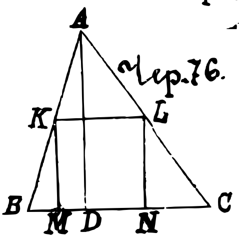
Черт. 73.



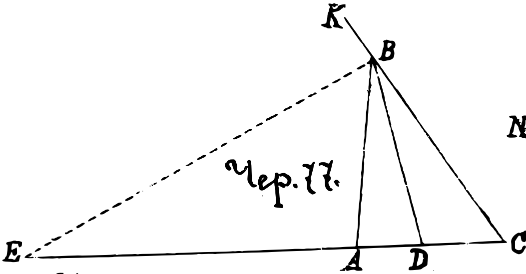
Черт. 74.



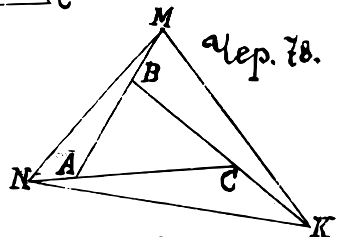
Черт. 75.



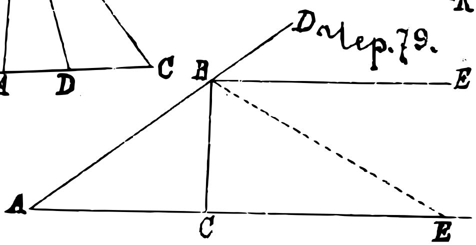
Черт. 76.



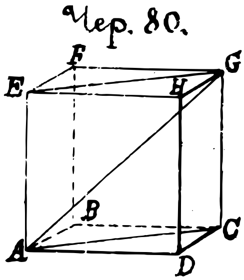
Черт. 77.



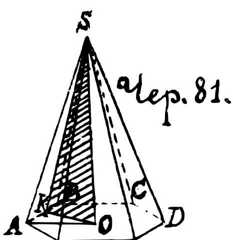
Черт. 78.



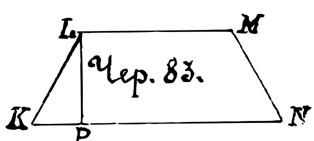
Черт. 79.



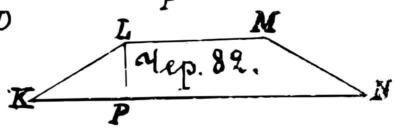
Черт. 80.



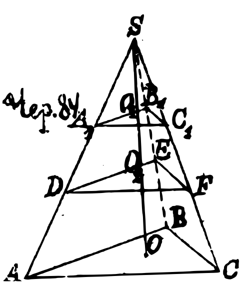
Черт. 81.



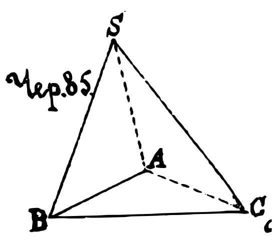
Черт. 83.



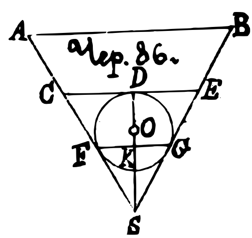
Черт. 82.



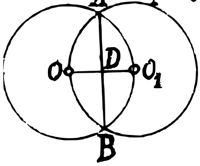
Черт. 84.



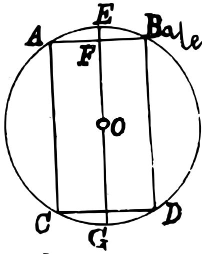
Черт. 85.



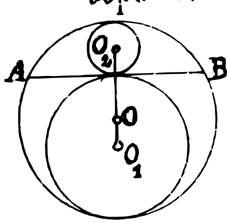
Черт. 86.



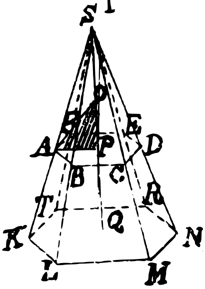
Чер. 87.



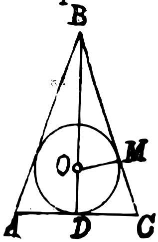
Чер. 88.



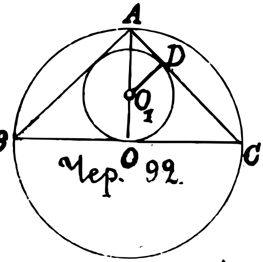
Чер. 89.



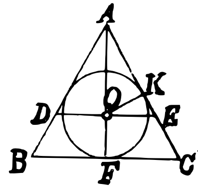
Чер. 90.



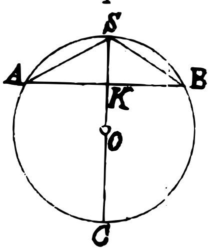
Чер. 91.



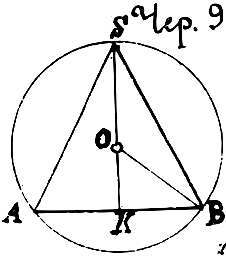
Чер. 92.



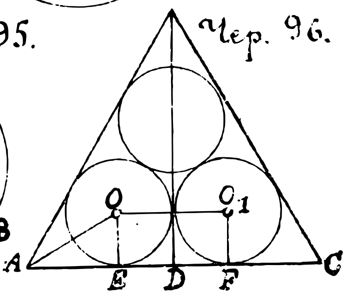
Чер. 93.



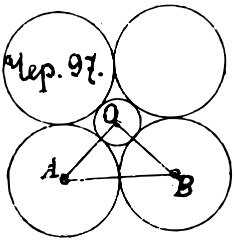
Чер. 94.



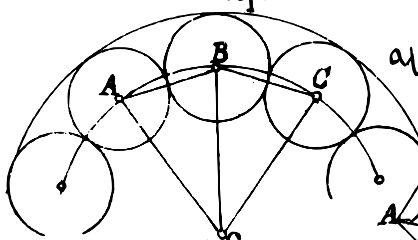
Чер. 95.



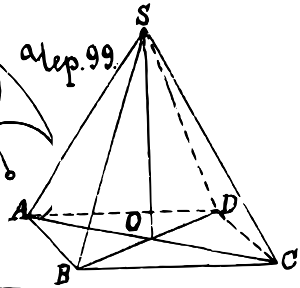
Чер. 96.



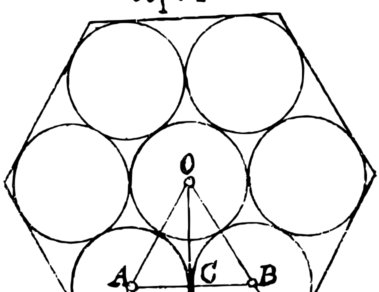
Чер. 97.



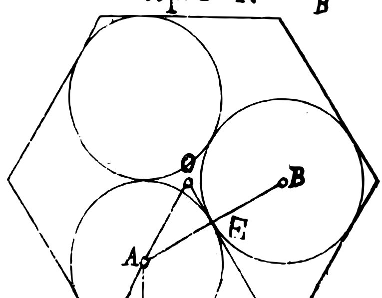
Чер. 98.



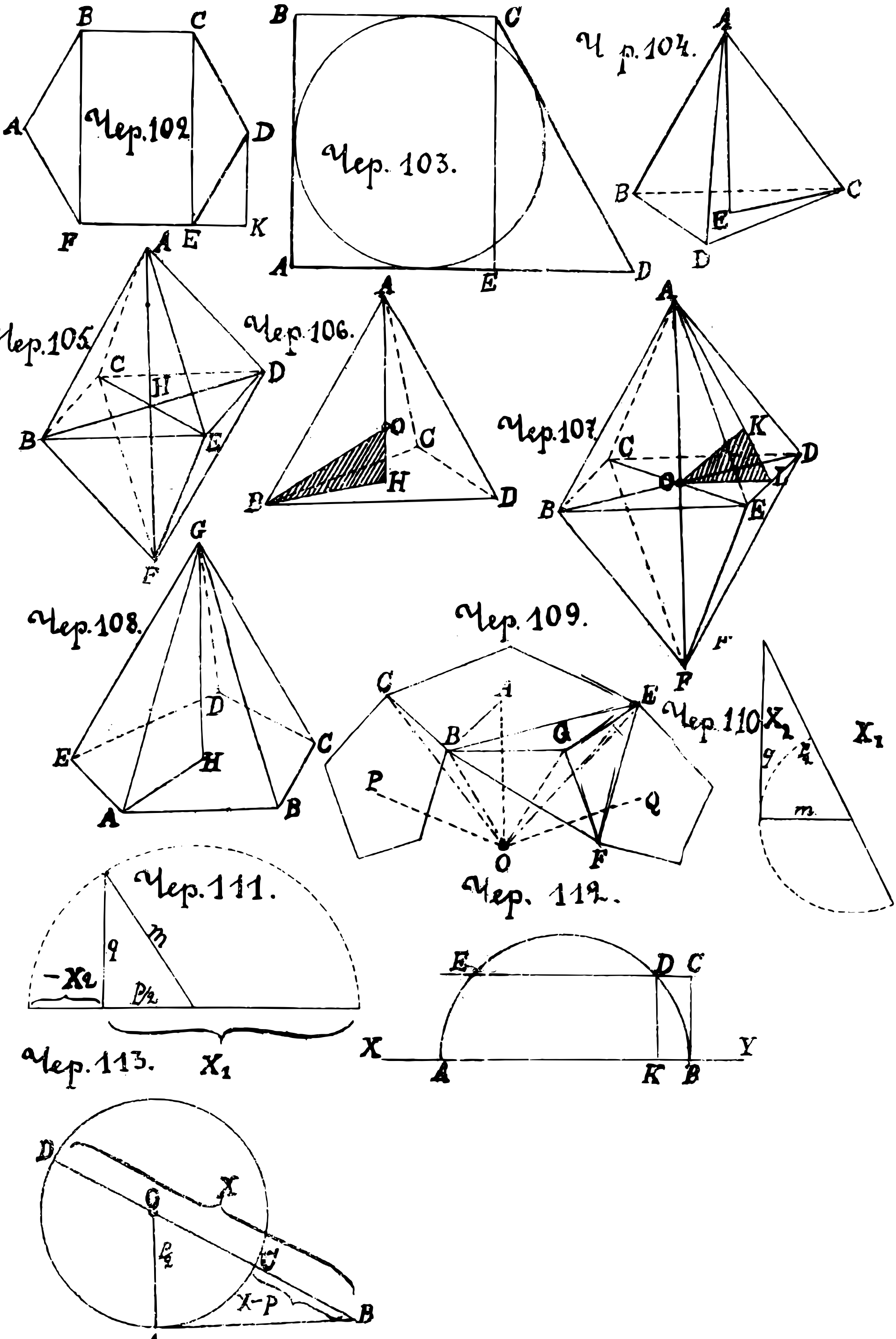
Чер. 99.



Чер. 100.



Чер. 101.


Чер. 102
Чер. 103.
Чер. 104.
Чер. 105
Чер. 106.
Чер. 107
Чер. 108.
Чер. 109.
Чер. 110
Чер. 111.
Чер. 112.
Чер. 113.