Н. П. Слетовъ

Преподаватель Рижской городской гимназіи.

СБОРНИКЪ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ

и упражненій

съ приложеніемъ

Краткаго сборника физическихъ задачъ, рѣшаемыхъ съ примѣненіемъ тригонометріи.

Учен. Ком. Мин. Нар. Просв. **допущено** въ качествѣ **учебнаго пособія** для среднихъ учебныхъ заведеній.
(Отнош. за № 9854. Ж. М. Н. Пр. Мартъ 1914 г.).

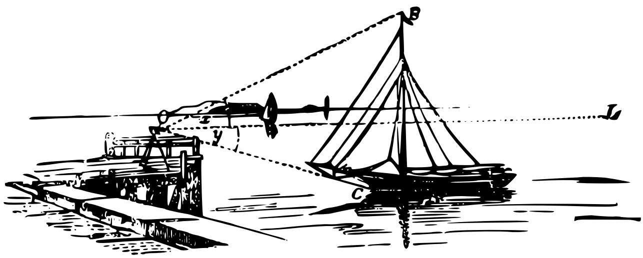
Книгоиздательство „Сотрудникъ".
Петербургъ—Кіевъ.
1914.

Типографія Акц. О-ва „Петръ Барскій въ Кіевѣ", Крещатикъ № 40. 1914 г.

Опредѣленія нѣкоторыхъ, встрѣчающихся въ задачахъ, терминовъ.

Установимъ нѣсколько спеціальныхъ терминовъ, которые придется встрѣчать въ задачахъ настоящаго сборника.

Точка O (см. *рисунокъ*), въ которой находится глазъ наблюдателя или, точнѣе—центръ лимба угломѣрнаго снаряда, называется *точкой зрѣнія*. Прямыя OB, OC и OL, проведенныя изъ точки зрѣнія, называются *лучами зрѣнія*.



Уголъ LOB, образованный горизонтальнымъ лучомъ зрѣнія OL и лучомъ OB, проведеннымъ къ такой точкѣ B, которая находится въ той же вертикальной плоскости *выше* горизонтальнаго луча, называется *угломъ высоты*, или *угловой высотой* этой точки B.

Уголъ LOC, между горизонтальнымъ лучомъ зрѣнія и лучомъ, проведеннымъ къ такой точкѣ C, которая находится въ той же вертикальной плоскости *ниже* горизонтальнаго луча, называется *угломъ пониженія* къ горизонту, или *угловымъ пониженіемъ* этой точки C.

Такимъ образомъ, говорятъ, напримѣръ, что (см. *рисунокъ*) верхушка B мачты видна съ пристани подъ угломъ высоты x^0, а низъ яхты C—подъ угломъ пониженія y^0.

Уголъ BOC и вообще уголъ между лучами зрѣнія, проведенными къ крайнимъ точкамъ какого-либо предмета, называется *угломъ зрѣнія*, подъ которымъ этотъ предметъ виденъ изъ данной точки O. Напримѣръ, можно сказать, что яхта видна съ пристани подъ угломъ зрѣнія $(x+y)^0$.

Греческій алфавитъ.

Буквы	Названія	Буквы	Названія
α	Альфа.	ν	Ни.
β	Бета.	ξ	Кси.
γ	Гамма.	o	Омикронъ.
δ	Дельта.	π	Пи.
ε	Эпсилонъ.	ρ	Ро.
ζ	Цета.	Σ, σ	Сигма.
η	Эта.	τ	Тау.
ϑ	Тета.	υ	Ипсилонъ.
ι	Іота.	φ	Фи.
$\varkappa$	Каппа.	χ	Хи.
λ	Ламбда.	ψ	Пси.
μ	Ми.	ω	Омега.

Опечатки.

Стран.	Строка	Напечатано	Должно быть
35	13 сн.	обѣихъ ихъ	обѣихъ его
41	9 сн.	α, и β	α, β и
16 и 47	На чертежахъ 12 и 28 буквой d должна быть обозначена длина отрѣзка OO_1, а не LO_1.		
117	9 строка св. Отвѣтъ задачи № 6 не O, а $\mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha$.		
124	Отвѣтъ задачи № 46 не 98660, а 1541,5.		

Предисловіе.

Настоящій сборникъ составленъ примѣнительно вообще къ такому преподаванію тригонометріи, при которомъ изученіе ея курса начинается съ рѣшенія треугольниковъ и заканчивается общимъ ученіемъ о тригонометрическихъ функціяхъ, какъ это установлено программами тригонометріи для реальныхъ училищъ (изд. 1906 г.). Въ частности же при составленіи его имѣлся въ виду порядокъ прохожденія курса, принятый въ учебникѣ тригонометріи того же автора. Именно, въ первыхъ главахъ сборника (съ I по IX) *) даются упражненія на рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ, въ слѣдующихъ главахъ (съ X по XVI)—упражненія на рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ въ основныхъ случаяхъ, далѣе три главы (XVII—XIX) съ задачами на преобразованія тригонометрическихъ выраженій въ связи съ рѣшеніемъ треугольниковъ въ особыхъ случаяхъ; въ главахъ XX и XXI приведены упражненія на вычисленіе значеній тригонометрическихъ величинъ. Этимъ заканчивается I часть курса, приноровленная къ первому году изученія тригонометріи (напримѣръ, въ VI классѣ реальныхъ училищъ и въ VII классѣ мужскихъ гимназій). Вторая же часть сборника (главы XXII—XXVIII), для второго года изученія, содержитъ упражненія преимущественно на тригонометрическое изслѣдованіе функціональной зависимости между величинами и на общее рѣшеніе тригонометрическихъ уравненій.

Впрочемъ упражненія на изслѣдованіе функціональной зависимости разбросаны по разнымъ главамъ уже первой части Сборника, такъ какъ этому важному вопросу, подчеркнутому между прочимъ въ одной изъ резолюцій I Всероссійскаго съѣзда преподавателей математики, авторъ вообще старался отвести въ Сборникѣ почетное мѣсто.

*) Счетъ главъ въ Сборникѣ задачъ идетъ параллельно со счетомъ главъ Учебника (2-го изданія), при чемъ нѣкоторыя главы послѣдняго въ сборникѣ соединяются вмѣстѣ.

Точно также, на рѣшеніе тригонометрическихъ уравненій имѣются упражненія не только во II части сборника, но и въ I-ой. Это сдѣлано на основаніи тѣхъ соображеній, что рѣшеніе треугольниковъ во многихъ случаяхъ сводится къ рѣшенію того или другого тригон. уравненія; слѣдовательно, знакомить учениковъ съ рѣшеніемъ тригоном. уравненій приходится постепенно, по мѣрѣ развитія курса рѣшенія треугольниковъ. Поэтому-то, уже въ главѣ IV сборника даются, между прочимъ, простѣйшія уравненія, при рѣшеніи которыхъ предлагается находить пока лишь острые углы, удовлетворяющіе уравненію; затѣмъ въ главѣ XII предлагаются для рѣшенія такія же простыя уравненія, но удовлетворяющіяся тупыми углами; въ главахъ XVII и XVIII помѣщены уравненія, рѣшеніе которыхъ требуетъ болѣе сложныхъ тригон. преобразованій. Наконецъ, послѣдняя, XXVIII глава содержитъ уравненія, которыя (почти всѣ) учащіеся могли бы рѣшать и въ теченіе перваго года, съ тою только разницей, что въ теченіе второго года отъ нихъ нужно уже требовать составленія общихъ выраженій угловъ, удовлетворяющихъ даннымъ уравненіямъ.

Упражненія авторъ старался располагать въ строгой послѣдовательности перехода отъ простого къ болѣе сложному, отъ частнаго къ общему. Въ предѣлахъ каждой главы задачи расположены по типамъ; номера типичныхъ задачъ отпечатаны жирнымъ шрифтомъ, а слѣдующія за типичной задачи (съ номерами, отпечатанными обыкновеннымъ шрифтомъ) представляютъ изъ себя или видоизмѣненіе типичной, или ближайшее развитіе того же типа.

Преслѣдуя между прочимъ цѣль, чтобы сборникъ не содержалъ въ себѣ слишкомъ обильнаго матеріала, (въ которомъ было бы трудно оріентироваться не только ученикамъ, но и преподавателямъ), авторъ почти совсѣмъ избѣгалъ повтореній и допускалъ ихъ только въ случаяхъ необходимости; и тогда онъ старался, чтобы даже задачи совершенно одинаковаго типа отличались другъ отъ друга или инымъ расположеніемъ условія, или особымъ подборомъ числовыхъ данныхъ.

Кромѣ обычныхъ задачъ отвлеченнаго характера въ сборникѣ помѣщены, и притомъ въ сравнительно большомъ числѣ, разнообразныя задачи, характера болѣе или менѣе практическаго, съ условіями, взятыми изъ области низшей геодезіи, космографіи, механики и физики.

Такъ какъ при этомъ классификація задачъ по типамъ съ точки зрѣнія физики не совпадала съ классификаціей съ точки зрѣнія тригонометріи, то задачи изъ области физики выдѣлены въ особое приложеніе къ сборнику. Но при этомъ въ концѣ почти каждой задачи этого приложенія указана та глава основного сборника, къ которой данная задача могла бы быть отнесена. Этимъ послѣднимъ имѣлось въ виду облегчить трудъ преподавателя при выборѣ упражненій для учащихся.

Кромѣ матеріала, разработаннаго всецѣло самимъ авторомъ, въ настоящій сборникъ вошли задачи, сюжеты которыхъ заимствованы изъ слѣдующихъ руководствъ и пособій:

1) F. Reidt. Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie.

2) Учебники и сборники упражненій по тригонометріи: E. Borel, C. Bourlet, S. Serret, Верещагина, проф. Глазенапа, Злотчанскаго, Лямина, Минина, Мрочека, Пржевальскаго, Рыбкина, Торопова, проф. Шапошникова и Шмулевича.

3) Руководство къ рѣшенію задачъ по физикѣ Маракуева, а также сборники физическихъ задачъ Цингера и Тумасова.

4) Введеніе въ акустику и оптику профес. Столѣтова.

За указаніе какихъ-либо недостатковъ въ настоящемъ сборникѣ, для устраненія ихъ при слѣдующемъ его изданіи, авторъ будетъ всѣмъ глубоко признателенъ.

Н. Слетовъ.

Оглавленіе.

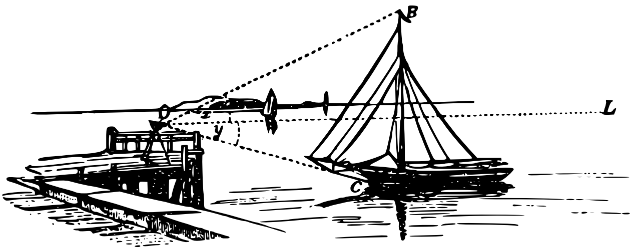
ЧАСТЬ I.—**Рѣшеніе треугольниковъ.**

ЧАСТЬ II.—**Гоніометрія.**

Опредѣленія нѣкоторыхъ, встрѣчающихся въ задачахъ терминовъ.

Установимъ нѣсколько спеціальныхъ терминовъ, которые придется встрѣчать въ задачахъ настоящаго сборника.

Точка O (см. *рисунокъ*), въ которой находится глазъ наблюдателя или, точнѣе—центръ лимба угломѣрнаго снаряда, называется **точкой зрѣнія**. Прямыя OB, OC и OL, проведенныя изъ точки зрѣнія, назыв. **лучами зрѣнія**.



Уголъ LOB, образованный горизонтальнымъ лучомъ зрѣнія OL и лучемъ OB, проведеннымъ къ такой точкѣ B, которая находится въ той же вертикальной плоскости **выше** горизонтальнаго луча, назыв. **угломъ высоты**, или **угловой высотой** этой точки B.

Уголъ LOC, между горизонтальнымъ лучомъ зрѣнія и лучомъ, проведеннымъ къ такой точкѣ C, которая находится въ той же вертикальной плоскости **ниже** горизонтальнаго луча, называется **угломъ пониженія** къ горизонту, или **угловымъ пониженіемъ** этой точки C.

Такимъ образомъ, говорятъ, напримѣръ, что (см. *рисунокъ*) верхушка B мачты видна съ пристани подъ угломъ высоты x^0, а низъ яхты C—подъ угломъ пониженія y^0.

Уголъ BOC, и вообще уголъ между лучами зрѣнія, проведенными къ крайнимъ точкамъ какого-либо предмета, называется **угломъ зрѣнія**, подъ которымъ этотъ предметъ виденъ изъ данной точки O. Напримѣръ, можно сказать, что яхта видна съ пристани подъ угломъ зрѣнія $(x+y)^0$.

Греческій алфавитъ.

Буквы	Названія	Буквы	Названія
α	Альфа.	ν	Ни.
β	Бета.	ξ	Кси.
γ	Гамма.	ο	Омикронъ.
δ	Дельта.	π	Пи.
ε	Эпсилонъ.	ρ	Ро.
ζ	Цета.	Σ, ς	Сигма.
η	Эта.	τ	Тау.
θ	Тета.	υ	Ипсилонъ.
ι	Іота	φ	Фи.
κ	Каппа.	χ	Хи.
λ	Ламбда.	ψ	Пси.
μ	Ми.	ω	Омега.

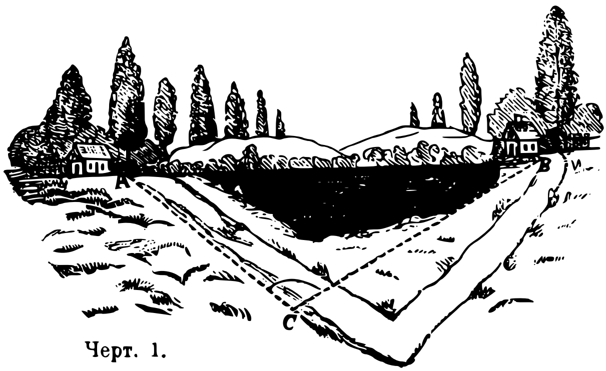
Опечатки.

Стран.	Строка.	Напечатано	Должно быть
35	13 сн.	обѣихъ ихъ	обѣихъ его
41	9 сн.	α, и β	α, β и

Часть I.—Рѣшеніе треугольниковъ.

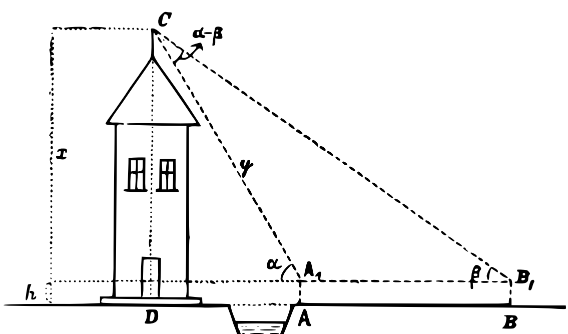
ВВЕДЕНІЕ.

1. Для опредѣленія длины озера (*черт.* 1) намѣтили на двухъ противоположныхъ берегахъ его два дерева A и B; затѣмъ, выбравъ пунктъ C такъ, что изъ него видны и доступны оба дерева



Черт. 1.

A и B, измѣрили разстоянія AC и BC и уголъ ACB и нашли, что длина $AC=28$ саж., $BC=37$ саж., уголъ же ACB равенъ 67^0. Опредѣлить графически разстояніе AB.



Черт. 2.

2. Изъ точки B, лежащей на одной горизонтальной плоскости съ основаніемъ башни (*черт.* 2), вершина башни C видна

подъ угломъ въ 35^0 къ горизонтальной плоскости. Приблизившись къ основанію башни такъ, что разстояніе до нея уменьшилось на длину AB, равную 76 фут., видимъ вершину башни уже подъ угломъ высоты $56^0 30'$. Найти графически высоту башни, полагая при этомъ, что вышина угломѣрнаго снаряда $AA_1 = BB_1 = 3$ фут.

Глава I.—Предварительныя упражненія.

1. Взять два какихъ-нибудь отрѣзка прямой и, найдя общую мѣру ихъ, опредѣлить отношеніе длины перваго къ длинѣ второго, и обратно.

2. Опредѣлить отношеніе между двумя какими-нибудь произвольно взятыми отрѣзками съ точностью 1) до $1/4$ и 2) до $1/10$.

3. Построить прямоугольный $\triangle ABC$, у котораго острый уголъ $A = 54^0$ и затѣмъ опредѣлить посредствомъ измѣренія отношеніе катета BC къ гипотенузѣ AB.

4. Вычислить отношеніе длины стороны квадрата къ длинѣ его діагонали съ точностью до 0,001.

5. Въ прямоугольномъ $\triangle ABC$ уголъ A равенъ $\alpha^0 = 30^0$, а длина гипотенузы равна $c = 26$ mm. Опредѣлить длину катета BC.

6. То же, если: 1) $c = 8$ и $\alpha^0 = 45^0$; 2) $c = 38$ и $\alpha^0 = 60^0$; 3) $c = 16$ и $\alpha^0 = 18^0$.

Глава II.—Основныя тригонометрическія величины.

1. Въ прямоугольномъ $\triangle ABC$ уголъ $A = \alpha^0$, уголъ $B = \beta^0$, катетъ $BC = a$ mm., катетъ $AC = b$ mm. и гипотенуза $AB = c$ mm.*). Опредѣлить: 1) $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $a = 48$, $b = 14$ и $c = 50$; 2) $\operatorname{tg} \alpha$ и $\sec \alpha$, если $a = 15$; $b = 20$ и $c = 25$ и 3) $\sin \beta$ и $\operatorname{tg} \beta$, если $a = 13$, $b = 84$ и $c = 85$.

2. Въ прямоугольномъ $\triangle ABC$ $a = 15$, $b = 20$ и $c = 25$. Опредѣлить $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\sec \alpha$, а также $\sin \beta$, $\operatorname{tg} \beta$ и $\sec \beta$.

3. Длины сторонъ прямоугольнаго $\triangle ABC$ въ сантиметрахъ выражаются числами $a = 7^1/_5$, $b = 15^2/_5$ и $c = 17$. Опредѣлить $\sin \beta$, $\operatorname{tg} \beta$ и $\sec \beta$.

4. Вычислить sin и tg угла α^0 въ прямоуг. $\triangle ABC$ въ каждомъ изъ двухъ случаевъ: 1) если $a = {}^2/_3 c$ и 2) если $a = 2b$.

---

*) Такія обозначенія сохраняются и въ слѣдующихъ за этой задачахъ.

5. Измѣняя уголъ A въ прямоугольномъ $\triangle ABC$ и оставляя длину гипотенузы постоянной, прослѣдить за тѣмъ, что̀ будетъ дѣлаться съ синусомъ угла A при увеличеніи и что̀—при уменьшеніи этого угла.

6. Подобнымъ образомъ (зад. 5) наглядно показать, что будетъ дѣлаться съ $\operatorname{tg}\alpha$ и $\sec\alpha$ при увеличеніи угла α и что при уменьшеніи. При какомъ значеніи α значеніе $\operatorname{tg}\alpha=1$?

7. Въ прямоугольномъ $\triangle ABC$ вычислить: 1) катетъ a по гипотенузѣ $c=30{,}5$ и $\sin\alpha={}^2/_3$; 2) a по $c=47{,}5$ и $\sin\alpha=0{,}32$; 3) c по $a=51$ и $\sin\alpha=0{,}75$.

8. Въ прямоуг. $\triangle ABC$ вычислить катетъ a, если: 1) $b=14$ и $\operatorname{tg}\alpha=0{,}72$ и 2) $b=20{,}4$ и $\operatorname{tg}\alpha=1{,}5$.

9. Въ прямоугольномъ $\triangle ABC$ катетъ $b=15$ дм., а $\operatorname{tg}\alpha={}^2/_3$. Опредѣлить площадь $\triangle ABC$.

10. Площадь прямоугольнаго $\triangle$-ка равна 12 кв. сантим., а тангенсъ одного изъ острыхъ угловъ равенъ $1^1/_2$. Вычислить катеты.

Глава III.—**Тригоном. величины дополнит. угла.**

1—10. Задачи за №№ 1—10 рѣшить въ общемъ видѣ, полагая, что значенія всѣхъ нужныхъ для этого тригоном. величинъ данныхъ угловъ (или половинъ этихъ угловъ) извѣстны.

1. Въ прямоугольномъ $\triangle ABC$, съ прямымъ угломъ при вершинѣ C и съ острымъ угломъ A, равнымъ α^0, опредѣлить: 1) a по c; 2) b по c; 3) a по b; 4) c по a; 5) b по a и 6) c по b.

2. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-ка равна a сант. и уголъ при вершинѣ равенъ β^0. Опредѣлить длину высоты $\triangle$-ка, опущенной на одну изъ боковыхъ (равныхъ) его сторонъ.

3. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-ка равна a дм., а уголъ при основаніи α^0. Опредѣлить длину основанія.

4. Въ равнобедренномъ $\triangle$-кѣ основаніе равно b дм., и уголъ при основаніи α^0. Опредѣлить длину каждой изъ равныхъ сторонъ $\triangle$-ка.

5. Опредѣлить площадь прямоугольника $ABCD$, у котораго сторона $AB=a$ дм., а діагональ BD наклонена къ сторонѣ AD подъ угломъ α^0.

6. Меньшая діагональ ромба равна d дм., и острый его уголъ равенъ α^0. Опредѣлить длину бо̀льшей діагонали.

7. Въ равнобедренномъ $\triangle$-кѣ каждая изъ равныхъ его сторонъ равна a дм., а уголъ при основаніи α^0. Опредѣлить главную высоту $\triangle$-ка и площадь его.

8. Острый уголъ ромба$=\alpha^0$, бо́льшая діагональ его равна d дм. Опредѣлить длину меньшей діагонали, а также длину стороны ромба.

9. Высота равнобедренной трапеціи равна h дм., острый уголъ при основаніи α^0, а меньшее основаніе$=b$ дм. Опредѣлить длину боковой стороны и бо́льшаго основанія трапеціи.

Указаніе. Опустить высоты изъ обоихъ концовъ меньшаго основанія.

10. Хорда, стягивающая дугу круга въ α^0, отстоитъ отъ центра на разстояніи d дм. Опредѣлить длину хорды.

Глава IV.—Примѣненіе формулъ соотношенія и формулъ приведенія къ дополнительному углу при вычисленіи тригон. величинъ и при рѣшеніи тригоном. уравненій.

1—6. Вычислить значенія всѣхъ тригоном. величинъ остраго угла α^0 при условіи, что:

1. $\sin\alpha=\frac{3}{4}$. 2. $\operatorname{tg}\alpha=2$. 3. $\cos\alpha=0{,}28$. 4. $\operatorname{ctg}\alpha=1{,}05$.
5. $\sec\alpha=2{,}5$. 6. $\csc\alpha=\frac{3}{2}$.

7—17. Упростить выраженія:

7. $1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$.
8. $1-\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$.
9. $(1+\operatorname{tg}^2\alpha).\ \cos^2\alpha$.
10. $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)\sin^2\alpha$.
11. $(\operatorname{tg}\alpha\,.\cos\alpha)^2+(\operatorname{ctg}\alpha\,.\sin\alpha)^2$.
12. $(\operatorname{ctg}\alpha\,.\sin\alpha)^2+(\operatorname{tg}\alpha\,.\cos\alpha)^2$.
13. $(\operatorname{tg}\alpha\,.\csc\alpha)^2-1$.
14. $\sin^2\alpha\,.\sec^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.
15. $\dfrac{\sin\alpha\,.\sin\beta}{\cos\alpha\,.\cos\beta}\cdot\operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{ctg}\beta+1$.
16. $\dfrac{\sin\alpha\ \cos\beta}{\cos\alpha\ \sin\beta}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta+1$.
17. $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{ctg}\alpha$.

18. Зная, что $\sin\alpha+\cos\alpha=m$, опредѣлить $\sin\alpha\,.\cos\alpha$.

19. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$, опредѣлить $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$.

20. Въ равенствѣ $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=m$ исключить сперва $\sin\alpha$, а потомъ $\cos\alpha$.

21—23. Преобразовать данныя выраженія такъ, чтобы они зависѣли только отъ $\sin\alpha$:

21. $\operatorname{ctg}\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\sin^{-1}\alpha$ (?). 22. $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\csc\alpha}$.

23. $\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha$.

24—25. Данныя выраженія преобразовать такъ, чтобы они зависѣли только отъ $\cos\alpha$:

24. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}+\sec\alpha-\dfrac{1}{\cos\alpha}$. 25. $\sin\alpha\,.\cos\alpha\,.\operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{ctg}\alpha$.

26—27. Слѣдующія выраженія преобразовать такъ, чтобы они зависѣли только отъ $\operatorname{tg}\alpha$:

26. $\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha$.

27. $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\cos^2\alpha}\cdot\cos\alpha$.

28. Преобразовать выраженіе такъ, чтобы оно зависѣло только отъ $\operatorname{ctg}\alpha$: $\dfrac{1}{\sec^2\alpha-1}+\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

29—39. Показать справедливость слѣдующихъ формулъ (посредствомъ упрощающихъ преобразованій только одной, болѣе сложной части формулы):

29. $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sec\alpha+\csc\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$.

30. $\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

31. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

32. $\dfrac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\sec\alpha}{1+\csc\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

33. $\sqrt{(1-\cos^2\alpha):(1-\sin^2\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$.

34. $\dfrac{\sec^2\alpha}{\csc^2\alpha}+1=\sec^2\alpha$.

35. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\sec\alpha\csc\alpha$.

36. $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$.

37. $\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$.

38. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.

39. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=2\operatorname{tg}\alpha$.

Указаніе. Прежде всего вынести знаменатели изъ-подъ знака корня; затѣмъ привести дроби къ общему знаменателю.

40. Упростить выраженіе:

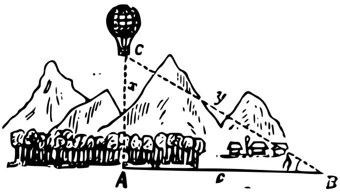
$$\frac{\sin(90^0-\alpha)\cos(90^0-\beta)\operatorname{tg}(90^0-\alpha)}{\operatorname{ctg}(90^0-\beta)\cos(90^0-\alpha)}.$$

41. Привести къ наименьшему углу:

$\sin 80^0$; $\operatorname{tg}76^0$; $\cos 68^030'$; $\operatorname{ctg}75^038'$; $\operatorname{tg}69^038'30''$; $\sin 85^023'45''$; $\sec 73^023'38''$; $\csc 47^045'57''$.

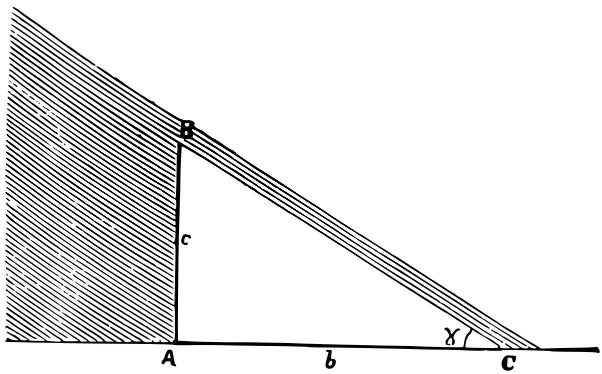
42. Опредѣлить значенія тригонометрическихъ величинъ остраго угла β^0 прямоугольнаго $\triangle ABC$, если извѣстны значенія триг. величинъ другого остраго угла α^0 того же $\triangle$-ка, именно: $\sin\alpha=0{,}31$; $\operatorname{tg}\alpha=0{,}32$; $\cos\alpha=0{,}95$ и $\operatorname{ctg}\alpha=3{,}08$.

43. *) Изъ нѣкотораго пункта B воздушный шаръ C виденъ подъ угломъ высоты δ^0, а изъ пункта A по вертикальному направленію. Разстояніе AB равно c саж. Опредѣлить высоту поднятія шара и разстояніе шара отъ пункта B по прямой линіи, если $c=100$ и $\delta^0=30^0$. (*черт.* 3).



Черт. 3.

44. При высотѣ солнца γ^0 тѣнь, отбрасываемая деревомъ, имѣетъ длину b саж. Опредѣлить вышину дерева, если $b=2$ и $\gamma^0=72^0$. (*черт.* 4). (См. поясненіе къ зад. 11 гл. VII).



Черт. 4.

45. Какова длина горизонтальной тѣни отъ нѣкотораго предмета, имѣющаго вышину 15 метр., въ то время, когда высота солнца равна $\alpha^0=60^0$.

46. Разстояніе отъ нѣкоторой точки A до центра круга O равно m дм., а касательная AB къ этому кругу составляетъ съ линіей AO уголъ α^0. Опредѣлить радіусъ круга и длину касательной, если $m=10$ и $\alpha^0=18^0$.

47. Высота башни равна a метр.; изъ окна дома, изъ точки, находящейся на высотѣ b метр. надъ плоскостью основанія башни, верхушка ея видна подъ угломъ высоты α^0. Опредѣлить разстояніе (x) башни отъ дома и разстояніе (y) ея верхушки отъ глаза наблюдателя. ($a=30,3$; $b=10$; $\alpha^0=60^0$). (См. черт. 7 на стр. 11).

---

*) При рѣшеніи задачъ за №№ 43—70 можно пользоваться табличками значеній тригонометрическихъ величинъ, помѣщенными въ § 27 моего учебника „Прямолинейной тригонометріи“.

Простѣйшія тригонометрическія уравненія *).

48. $2\sin\varphi - 1 = 0$;
49. $2\sin\varphi - \sqrt{2} = 0$.
50. $\sqrt{2}\sin\varphi - 1 = 0$.
51. $2\cos\varphi - \sqrt{3} = 0$.
52. $3\operatorname{tg}\varphi - \sqrt{3} = 0$.
53. $\operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}\varphi = 0$.
54. $2\sin^2\varphi - \sin\varphi = 0$.
55. $\sin^2\varphi - \sin\varphi = 0$.
56. $\sin^2\varphi - 4\sin\varphi + 3 = 0$.
57. $2 - 2\cos^2\varphi = 3\cos\varphi$.
58. $1 - \sin\varphi = \cos^2\varphi$.
59. $3\sin\varphi = 2\cos^2\varphi$.
60. $\cos\varphi + 2\sec\varphi = 4{,}5$.
61. $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi = 2$.
62. $\sin\varphi = \cos\varphi$.
63. $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\varphi$.
64. $\csc\varphi = \sec\varphi$.
65. $2\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi$.
66. $2\cos\varphi = \operatorname{ctg}\varphi$.
67. $2\sec\varphi - \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\varphi$.
68. $\sqrt{3}\,.\,\sin\varphi = \cos\varphi$.
69. $1 + 2\operatorname{tg}\varphi\cos\varphi = \operatorname{tg}\varphi + 2\cos\varphi$.
70. $\sin\varphi + \cos\varphi = \sec\varphi$.

Указ. къ зад. 68. Раздѣлить обѣ части ур-ія на $\sin\varphi$.

Указ. къ зад. 69. Представить урав-ніе въ видѣ $(\operatorname{tg}\varphi - 1)(2\cos\varphi - 1) = 0$, откуда: 1) $\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0$ и 2) $2\cos\varphi - 1 = 0$ и т. д.

Указ. къ зад. 70. Послѣ преобразованій урав-ніе разлагается на два: 1) $\sin\varphi = 0$ и 2) $\cos\varphi = \sin\varphi$.

Глава V.—Примѣненіе таблицы натуральныхъ тригонометр. величинъ.

1. Построить при помощи транспортира углы въ 10^0, 20^0, 35^0, 40^0, 50^0 и 65^0 и затѣмъ, послѣ соотвѣтствующихъ построеній, при цѣлесообразно выбранномъ масштабѣ **), опредѣлить посредствомъ измѣреній значенія sin, cos, tg и ctg этихъ угловъ, а результаты сравнить съ соотвѣтствующими данными приложенной къ нашему учебнику трехзначной таблицы натуральныхъ тригоном. величинъ (при этомъ, конечно, имѣть въ виду неизбѣжность ошибки при такого рода графическомъ опредѣленіи значеній тригоном. величинъ).

2—5. По таблицѣ натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ найти значенія слѣдующихъ величинъ:

2. $\sin 15^0$; $\cos 43^0$; $\operatorname{tg} 38^0$; $\sec 23^0$; $\csc 35^0$.

3. $\sin 65^0$; $\cos 57^0$; $\operatorname{tg} 75^0$; $\operatorname{ctg} 58^0$, $\sec 75^0$; $\csc 63^0$.

4. $\sin 35^0 5'$; $\cos 37^0 8'$; $\operatorname{tg} 46^0 28'$; $\operatorname{ctg} 75^0 30'$; $\sec 28^0 30'$.

5. $\csc 75^0 28'$; $\cos 65^0 38'$; $\operatorname{ctg} 25^0 43'$; $\operatorname{tg} 72^0 54'$.

---

*) При рѣшеніи этихъ уравненій предполагать, что искомый уголъ φ^0— острый.

**) Лучше всего это сдѣлать на миллиметровой бумагѣ, описавъ изъ вершины угла дугу радіусомъ въ 10 сантиметровъ.

6—10. Найти углы по значеніямъ слѣдующихъ тригоном. величинъ:

6. $\sin\alpha=0{,}342$; $\operatorname{tg}\beta=0{,}445$; $\operatorname{ctg}\gamma=2{,}747$; $\csc\delta=2{,}063$.

7. $\sin\alpha=0{,}595$; $\sec\beta=1{,}108$; $\operatorname{tg}\gamma=0{,}414$.

8. $\cos\alpha=0{,}910$; $\csc\beta=1{,}722$; $\operatorname{ctg}\gamma=1{,}768$.

9. $\cos\alpha=0{,}636$; $\operatorname{tg}\beta=1{,}497$; $\operatorname{ctg}\gamma=0{,}695$; $\csc\delta=1{,}170$.

10. $\sin\alpha=0{,}842$; $\sec\beta=1{,}735$; $\operatorname{ctg}\gamma=1{,}650$; $\sec\delta=0{,}857$.

Примѣч.: **Упражненіями къ этой главѣ могутъ служить также задачи, относящіяся къ VII главѣ (и отчасти VI), но въ нихъ нужно во всѣхъ численныхъ значеніяхъ угловъ отбрасывать секунды, если ихъ не больше 30, или дополнять секунды до цѣлой минуты, если ихъ больше 30, т. е. надо всѣ численныя значенія угловъ брать съ точностью до 1/2 минуты. Напримѣръ, вмѣсто угла 43°25′17″ брать 43°25′, а вмѣсто 29°27′38″—29°28′.**

Глава VI.—**Примѣненіе таблицы логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ.**

1—4. Найти въ таблицахъ логариѳмы значеній слѣдующихъ тригонометрическихъ величинъ.

1. $\sin 25^0$; $\cos 35^0$; $\sin 42^0 30'$; $\cos 43^0 15'$; $\sin 48^0 10'$; $\cos 65^0 20'$.

2. $\sin 25^0 15'30''$; $\cos 37^0 23'30''$; $\sin 40^0 27'38''$; $\cos 43^0 53'42''$.

3. $\sin 48^0 28'37''$; $\cos 52^0 0'45''$; $\operatorname{tg} 35^0 27'23''$; $\operatorname{ctg} 15^0 28'48''$.

4. $\operatorname{tg} 48^0 28'37''$; $\operatorname{ctg} 48^0 28'37''$; $\sin 5^0 44'21''$; $\cos 78^0 28'53''$.

5—8. Найти въ таблицахъ углы по слѣдующимъ значеніямъ log-овъ тригоном. величинъ:

5. $\lg\sin\varphi=\overline{1},54601$; $\lg\operatorname{tg}\varphi=\overline{1},93814$; $\lg\operatorname{ctg}\varphi=0{,}06492$; $\lg\cos\varphi=$ $=\overline{1},99680$.

6. $\lg\sin\varphi=\overline{1},95873$; $\lg\cos\varphi=\overline{1},81475$; $\lg\operatorname{tg}\varphi=0{,}29753$; $\lg\operatorname{ctg}\varphi=$ $=\overline{1},41784$.

7. $\lg\operatorname{tg}\varphi=\overline{1},41535$; $\lg\operatorname{tg}\varphi=0{,}06685$; $\lg\sin\varphi=\overline{1},95180$; $\lg\sin\varphi=$ $=\overline{1},87250$.

8. $\lg\cos\varphi=\overline{1},86711$; $\lg\cos\varphi=\overline{1},00000$; $\lg\operatorname{ctg}\varphi=0{,}81713$; $\lg\operatorname{ctg}\varphi=$ $=\overline{1},00000$.

9—12. Найти неизвѣстные углы по слѣдующимъ значеніямъ ихъ тригонометрическихъ величинъ:

9. $\sin\alpha=0{,}602$; $\cos\beta=0{,}2857$; $\operatorname{tg}\gamma=1{,}5814$; $\operatorname{ctg}\delta=0{,}2$.

10. $\sin\alpha=5/6$; $\cos\beta=3/4$; $\operatorname{tg}\gamma=1\,2/3$; $\operatorname{ctg}\delta=3/4$.

11. $\sin\alpha=\operatorname{tg}30^0$; $\cos\beta=\operatorname{ctg}60^0$; $\operatorname{tg}\gamma=\sin 45^0$; $\operatorname{ctg}\delta=\cos 48^0 15'18''$.

12. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0{,}15587$, при чемъ $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^0=43^0 28'15''$. Найти α и β.

13. Уголъ въ 90^0 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы sin одной изъ нихъ былъ въ 3 раза больше, чѣмъ sin другой.

14. Если какое-нибудь тѣло будетъ брошено вверхъ подъ угломъ α^0 къ плоскости горизонта, то разстояніе до того мѣста, куда оно упадетъ, можно вычислить (если пренебрегать сопротивленіемъ воздуха) по формулѣ:

$$l=\frac{v^2 \sin 2\alpha}{g},$$

гдѣ l—искомое разстояніе, v—первоначальная скорость отъ той силы, съ которой брошено тѣло, а g—такъ назыв., ускореніе отъ силы тяжести

Вычислить искомое разстояніе (l) при $\alpha^0=42^0 25'$; $g=9{,}81$ (метра въ сек.) и $v=200$ (метр. въ сек.).

15. Подъ какимъ угломъ къ плоскости горизонта надо бросить тѣло съ первоначальной скоростью $v=300$ метр. въ секунду для того, чтобы оно долетѣло до цѣли, отстоящей на разстояніи $l=5000$ метр. (см. формулу зад. 14).

16. Если принимать землю за шаръ, то кратчайшее по земной поверхности разстояніе (l) между двумя ея пунктами можно вычислить по формулѣ

$$l=105\,\varphi \text{ (верстъ)},$$

гдѣ φ есть число градусовъ въ дугѣ большого круга, проведенной между данными пунктами. Зная, что φ^0 опредѣляется изъ слѣдующаго уравненія сферической тригонометріи:

$$\cos\varphi=\sin\beta\sin\beta_1+\cos\beta\cos\beta_1\cos(\alpha-\alpha_1).$$

въ которомъ α^0 и β^0 суть соотвѣтственно долгота и широта I-го пункта, а $\alpha_1{}^0$ и $\beta_1{}^0$—долгота и широта II-го пункта, вычислить разстояніе между Москвой ($\alpha^0=37^0 34'$; $\beta^0=55^0 45'$) и С.-Петербургомъ ($\alpha^0=30^0 18'$; $\beta^0=59^0 57'$).

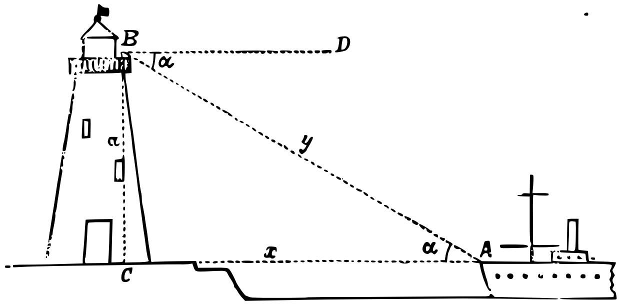
17. Такъ же вычислить разстояніе между С.-Петербургомъ и Ригой ($\alpha^0=24^0 7'$; $\beta^0=56^0 57'$). (См. данныя задачи 16.).

18. Опредѣлить такъ же разстояніе между Москвой и Ригой (См. данныя задачъ 16 и 17).

Глава VII.—**Основные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ.**

1. Фонарь маяка (*черт.* 5) находится на высотѣ $a=27{,}4$ метра надъ его основаніемъ. Изъ него виденъ корабль A подъ угломъ пониженія $DBA=\alpha^0=14^0 16' 30''$. Опредѣлить разстояніе (x) корабля отъ основанія и отъ фонаря маяка (если считать основаніе маяка и палубу корабля на одномъ и томъ же уровнѣ).

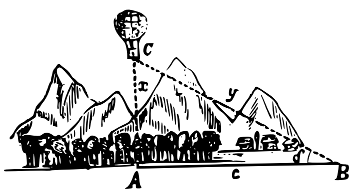
2. Изъ фонаря маяка (*черт.* 5) виденъ корабль подъ угломъ α^0 пониженія къ горизонту. Зная, что разстояніе корабля отъ



Черт. 5.

маяка равно d метр., и полагая, что основаніе маяка находится на одномъ уровнѣ съ палубой корабля, опредѣлить высоту маяка и разстояніе корабля отъ его фонаря (d=246,84; α^0=6⁰14′32″).

3. Аэростатъ C (*черт.* 6) виденъ изъ нѣкотораго пункта A по вертикальному направленію, а изъ пункта B подъ угломъ высоты $\delta^0=25^0 27'47''$. Разстояніе отъ A до B равно c=42 саж. Найти высоту поднятія аэростата и разстояніе его отъ пункта B по прямой линіи.



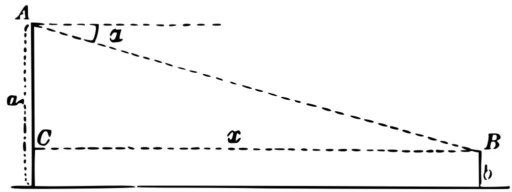
Черт. 6.

4. Чтобы опредѣлить ширину рѣки, проводятъ на одномъ берегу ея, непосредственно у воды, базисъ AB, равный a метр.; изъ конца A базиса, по перпендикулярному къ нему направленію, на противоположномъ берегу у самой воды видно дерево C; изъ другого же конца B базиса это дерево видно подъ угломъ β^0 къ нему. Вычислить ширину рѣки, если a=42 и $\beta^0=25^0 28'$.

5. Изъ точки, отстоящей на горизонтальномъ разстояніи a метр. отъ центра основанія башни, верхушка башни, видна подъ угломъ высоты α^0. Опредѣлить высоту башни. (a=86,63; $\alpha^0=22^0 16'42''$).

6. Вершина A горы (*черт.* 7) находится на a метр. выше, чѣмъ основаніе башни, высота которой равна b метр. Верхушка же B башни видна съ вершины горы подъ угломъ α^0 пониженія

къ горизонту. Опредѣлить горизонтальное разстояніе между центрами основанія горы и башни. ($a=90$; $b=19{,}9$; $\alpha^0=15^0 43' 29''$).



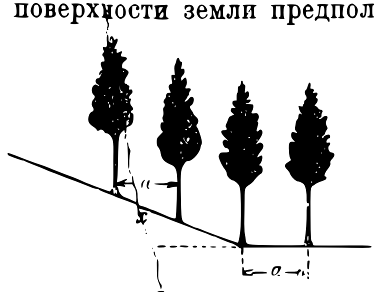
Черт. 7.

7. На горкѣ стоитъ шестъ длиною въ a саж. Изъ нѣкоторой точки, находящейся на горизонтальной плоскости основанія горки и отстоящей отъ верхняго конца шеста на разстояніи b сажен., этотъ конецъ виденъ подъ угломъ высоты α^0. Опредѣлить высоту горки ($a=1$; $b=7$; $\alpha^0=63^0 18' 28''$).

8. На прямой MN взята точка A, и изъ нея, подъ острымъ угломъ α^0 къ прямой MN, проведенъ отрѣзокъ AB, длиною въ a фут.; опредѣлить проекцію (x) отрѣзка AB на прямую MN и прослѣдить измѣненіе этой проекціи при измѣненіи угла α^0 отъ 60^0 до 0 и обратно отъ 0 до 90^0.

9. По одной сторонѣ угла α^0 отъ его вершины движется точка съ равномѣрной скоростью v метр. въ секунду. Сколько метровъ въ секунду проходитъ ея проекція на другую сторону того же угла? ($\alpha^0=48^0 24'$; $v=15$).

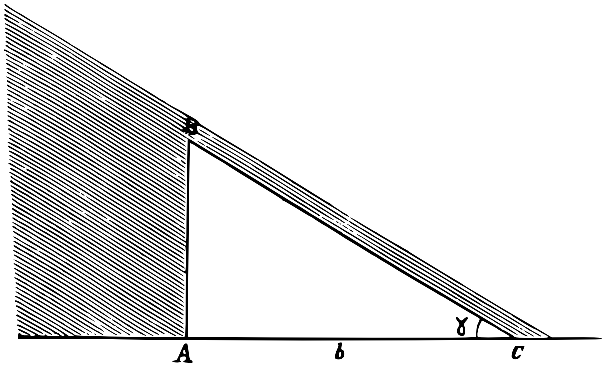
10. Если на горизонтальной поверхности земли предполагается разсаживать деревья на разстояніи a метр. одно отъ другого, то на какомъ разстояніи одну отъ другой, соотвѣтственно съ этимъ, слѣдуетъ копать ямки для посадки деревьевъ по склону холма (*черт.* 8), имѣющему наклонъ къ горизонту α^0 ($a=3{,}5$; $\alpha^0=$ $=25^0 18'$).



Черт. 8.

11. Опредѣлить высоту солнца въ то время, когда горизонтальная тѣнь, падающая отъ человѣка, ростомъ въ 2 арш. 12 вершк., имѣетъ длину 4 арш. 8 вершк. (*черт.* 9).

Рѣш. Пусть AB представляетъ ростъ человѣка, равный, положимъ, c аршинамъ; такъ какъ солнце находится отъ земли на огромномъ, сравнительно съ ростомъ человѣка, разстояніи, то лучи его можно считать параллельными (на чертежѣ это—тонкія параллельныя линіи). Тогда AC представляетъ длину тѣни отъ человѣка: пусть она $=b$ арш. Уголъ BCA, образуемый однимъ



Черт. 9.

изъ лучей солнца съ плоскостью горизонта, есть искомая высота солнца; пусть она равна γ^0. Тогда отношеніе $\frac{AB}{AC}=\operatorname{tg}\gamma$; $\operatorname{tg}\gamma=$ $=\frac{c}{b}=\frac{2{,}75}{4{,}5}=\frac{11}{18}$; $\gamma^0=31^0 25' 47''$.

12. Какова длина горизонтальной тѣни отъ нѣкотораго предмета, имѣющаго вышину a метр., въ то время, когда высота солнца равна α^0?($a=8{,}5$; $\alpha^0=25^0 32' 36''$).

13 Въ нѣкоторый моментъ длина горизонтальной тѣни, падающей отъ колонны, высотою въ b метр., равна a метр. Опредѣлить высоту солнца въ это время. ($a=17{,}275$; $b=23{,}625$).

14. Въ полдень 9 іюня въ Москвѣ замѣтили, что тѣнь, отбрасываемая на горизонтальную плоскость вертикальнымъ шестомъ, имѣющимъ длину въ $4^1/_2$ арш., равна 2 арш. $13^1/_2$ вершк. Какой уголъ составляли тогда лучи солнца съ плоскостью горизонта Москвы?

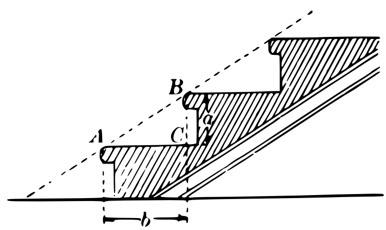
15. Какова высота солнца въ то время, 1) когда длина тѣни отъ стоящаго человѣка равна половинѣ его роста? 2) когда она вдвое больше его роста и 3) когда она въ $2^1/_2$ раза больше его роста?

16. Тѣнь отъ вертикальнаго шеста короче его самого на $\frac{1}{n}$ его длины. Какова высота солнца? ($n=10{,}5$).

17. Изъ вершины прямого угла вышли одновременно двѣ точки и движутся равномѣрно, одна по одной, а другая—по другой сторонѣ этого угла; первая проходитъ по a метр., а вторая— по b метровъ въ секунду. Подъ какимъ угломъ (φ) къ направленію движенія первой точки видна изъ нея вторая точка?

18. Со станціи одновременно выходятъ 2 поѣзда, товарный и пассажирскій, по взаимно-перпендикулярнымъ направленіямъ. Черезъ $^1/_4$ часа задній вагонъ пассажирскаго поѣзда былъ на разстояніи 10 верстъ отъ станціи, при чемъ послѣдній вагонъ товарнаго поѣзда былъ виденъ тогда съ задней площадки пассажирскаго подъ угломъ въ $26^0 12'$ къ направленію движенія пассажирскаго поѣзда. Съ какой средней часовой скоростью двигался въ первую четверть часа товарный поѣздъ?

19. Каменная домовая лѣстница (*черт.* 10) имѣетъ въ каждомъ маршѣ (т. е. между каждыми двумя поворотными площадками) по 15 ступенекъ, при чемъ полезная ширина каждой ступеньки (такъ наз. прóступь) равна $b = 5^7/_8$ вершка, а высота ступеньки $a = 3^3/_4$ в. Опредѣлить уголъ подъема этой лѣстницы. (Какое изъ числовыхъ данныхъ задачи излишне?).



Черт. 10.

20. Ширина каждой ступеньки домовой лѣстницы равна 10 дм. Какова должна быть высота ступеньки для того, чтобы уголъ подъема лѣстницы былъ равенъ 40^0?

21. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго Δ-ка равенъ β^0, а биссектриса его—d дм. Опредѣлить длину катетовъ (a и b) и гипотенузы (c).

22. Опредѣлить площадь равнобедреннаго прямоугольнаго Δ-ка по биссектрисѣ m дм. одного изъ острыхъ его угловъ. ($m = 15{,}247$).

23. У равнобедренной трапеціи проекція бока на основаніе равна a фут., а высота h фут. Опредѣлить уголъ наклона бока къ основанію.

24. Желѣзнодорожная насыпь (*черт.* 11) имѣетъ, такъ назыв., полуторные откосы (т. е. такіе, у которыхъ горизонтальная проекція (a) въ $1^1/_2$ раза больше вертикальной (h)). Какой уголъ (φ) образуетъ откосъ съ горизонтальной плоскостью?

Черт. 11.

25. Ширина желѣзнодорожной насыпи при основаніи ея

равна a фут., а ширина ея по верху — b фут., высота же насыпи — h фут. Опредѣлить уголъ (φ) наклона боковыхъ откосовъ насыпи.

26. Оба бока дамбы, имѣющей высоту въ h метр. и ширину по верху въ b метр., наклонены къ горизонтальной плоскости основанія дамбы подъ угломъ α^0. Какова ширина (x) ея основанія? ($h=2{,}04$; $b=0{,}94$; $\alpha^0=39^0 52' 48''$).

27. Прямая AO, соединяющая нѣкоторую внѣшнюю точку A съ центромъ O даннаго круга, имѣетъ длину $c=2{,}53$ метра; изъ точки A проведена къ кругу касательная AC, образующая съ прямою AO уголъ $\alpha^0=38^0 45' 36''$. Опредѣлить длины радіуса (r) круга и касательной (x), а также $\angle AOC$, подъ которымъ касательная видна изъ центра круга.

28. Подъ какимъ угломъ зрѣнія (φ) виденъ шаръ, радіуса R верстъ, изъ той точки, кратчайшее разстояніе которой отъ поверхности шара равно a верстамъ? ($R=6000$; $a=18000$).

29. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго Δ-ка равенъ α^0; основаніе его — a фут. Опредѣлить длину боковой стороны.

30. Два паровоза отправляются одновременно съ одной и той же станціи и съ одною и тою же скоростью, по v верстъ въ часъ, но по разнымъ направленіямъ, образующимъ между собой уголъ α^0. Черезъ сколько минутъ они будутъ находиться на разстояніи a верстъ одинъ отъ другого? ($a=10$; $v=30$; $\alpha^0=67^0 20'$).

31. По основанію (b) и боковой сторонѣ (a) равнобедреннаго Δ-ка опредѣлить уголъ при основаніи ($b=28{,}13$; $a=17{,}534$).

32. По основанію (b) и по высотѣ (h) равнобедреннаго Δ-ка опредѣлить уголъ при его вершинѣ ($b=31{,}26$ и $h=20{,}75$).

33. Подъ какимъ угломъ зрѣнія (φ^0) видна башня, высотою въ $h=7{,}2$ метра, съ разстоянія $a=25$ метр., если глазъ наблюдателя находился на высотѣ $\frac{h}{2}$ метр. надъ горизонтальной плоскостью основанія башни?

34. Опредѣлить радіусъ круга, описаннаго около прямоугольнаго Δ-ка, у котораго одинъ катетъ равенъ a дм., а прилежащій къ нему острый уголъ β^0.

35. Въ кругѣ радіуса R дм. опредѣлить длину хорды, стягивающей дугу въ α^0. [1) $R=4{,}175$; $\alpha^0=37^0 41' 38''$; 2) $R=14{,}47$; $\alpha^0=168^0 15' 42''$].

36. Въ кругѣ радіуса $R=35{,}8$ дм. проведена хорда, длиною въ $a=28{,}7$ дм. Найти разстояніе хорды отъ центра и стягиваемую ею дугу (въ градусахъ, минутахъ и секундахъ).

37. Хорда равна $^{3}/_{4}$ діаметра круга. Опредѣлить число градусовъ, минутъ и секундъ въ дугѣ, которая стягивается этой хордой.

38. Хорда дѣлитъ окружность на двѣ части, относящіяся между собой, какъ $m:n$. Длина окружности равна c фут. Опредѣлить разстояніе (x) хорды отъ центра. ($m:n=3:7$; $c=120$).

39. Опредѣлить длину радіуса круга, если уголъ α^0, вписанный въ этотъ кругъ, опирается на хорду, длина которой a сант.

Указ. Одной изъ сторонъ угла α^0 пусть служитъ діаметръ.

40. Опредѣлить площадь прямоугольнаго Δ-ка по его катету b дм. и прилежащему къ нему острому углу α^0.

41. Опредѣлить площадь прямоугольнаго Δ-ка по его катету b дм. и противолежащему углу β^0.

42. Опредѣлить площадь равнобедреннаго Δ-ка, если его основаніе равно b дм., а каждый изъ угловъ при основаніи—α^0.

43. По основанію b дм. и по углу β^0 при вершинѣ равнобедреннаго Δ-ка опредѣлить его площадь.

44. Опредѣлить площадь правильнаго n-угольника по его сторонѣ a дм. ($n=7$; $a=20$).

45. Основаніе равнобедреннаго Δ-ка равно b дм. а высота, опущенная на одну изъ равныхъ его сторонъ, равна h_1 дм. Опредѣлить углы (α) при основаніи Δ-ка и площадь его (Q).

46. Опредѣлить площадь трапеціи $ABCD$, основанія которой AD и BC равны соотвѣтственно a и b дм. ($a>b$), уголъ $A=90^0$, $\angle D=\alpha^0$ ($a=42$; $b=37$; $\alpha^0=48^0 28' 37''$).

Указаніе: Опустить высоту CE, тогда $ED=(a-b)$ дм.

47. Бóльшее основаніе AD равнобедренной трапеціи $ABCD$ равно a дм., а меньшее $BC=b$ дм. Опредѣлить каждый уголъ (φ) при большемъ основаніи, если площадь трапеціи равна Q кв. дм. ($a=7$; $b=3$; $Q=20$).

Указаніе. Провести $CE \parallel AB$ и между прочимъ рѣшать равнобедренный ΔECD.

48. Опредѣлить наименьшую діагональ правильнаго n-угольника, сторона котораго равна a дм.

49. Опредѣлить длину наибольшей діагонали (D) правильнаго n-угольника, сторона котораго равна a фут., для двухъ случаевъ: 1) когда n—число четное и 2) когда n—число нечетное.

50. Опредѣливъ сторону и апоѳему, вычислить площадь (Q) правильнаго n—угольника, вписаннаго въ кругъ радіуса R дм. [1) $n=12$; $R=7$. 2) $n=7$; $R=7$].

51. Опредѣлить площадь правильнаго n—угольника, описаннаго около круга радіуса R дм.

52. Опредѣлить отношеніе (x) между площадями двухъ правильныхъ n-угольниковъ, изъ которыхъ первый описанъ около круга радіуса R дм., а другой вписанъ въ тотъ же кругъ. [1) $n=4$; 2) $n=6$; 3) $n=10$]. (См. зад. 50 и 51).

53. Въ кругѣ радіуса R дм. взятъ секторъ съ дугой α^0. Опредѣлить площадь сектора (q_1) и соотвѣтствующаго ему сегмента (q_2).

Указ. При опредѣленіи площади равнобедреннаго $\triangle$-ка за основаніе его принять боковую сторону.

54. Хорда, длиною въ a дм., дѣлитъ кругъ радіуса R дм. на два сегмента. Найти площадь меньшаго изъ нихъ. ($a=3{,}5475$; $R=6{,}2474$).

55. Въ кругѣ радіуса R фут. проведены двѣ параллельныя хорды, изъ которыхъ каждая стягиваетъ дугу въ α^0. Опредѣлить ту часть площади круга, которая заключена между хордами.

56. По сторонамъ a и b дм. прямоугольника опредѣлить углы, которые его діагональ образуетъ со сторонами ($a=75{,}2$; $b=63{,}6$).

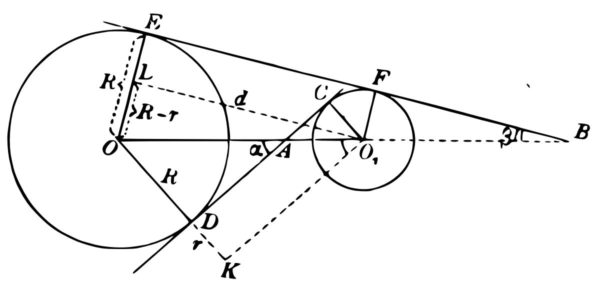
57. Стороны прямоугольника равны a и b дм. Вычислить уголъ между его діагоналями ($a=13{,}5$; $b=7{,}4$).

58. Въ прямоугольникѣ середины сторонъ, равныхъ a и b линіямъ, служатъ вершинами ромба. Опредѣлить углы, которые стороны этого ромба образуютъ со сторонами прямоугольника ($a=23{,}758$; $b=58{,}275$).

59. Вычислить углы ромба по его діагоналямъ, которыя равны d и d_1 дюйм. ($d=28$; $d_1=49$).

60. Опредѣлить уголъ, образуемый 2-мя касательными къ данному кругу, если радіусъ круга равенъ r дм., а разстояніе вершины искомаго угла отъ центра круга равно a дм. ($r=3{,}35$; $a=8{,}32$).

61. Линія центровъ двухъ круговъ (*черт.* 12) равна d сантим.,



Черт. 12.

а радіусы ихъ—R и r см. Опредѣлить тѣ углы (α^0 и β^0), подъ которыми общія внутренняя и внѣшняя касательныя этихъ круговъ пересѣкаютъ линію ихъ центровъ. ($R=3{,}065$; $r=1{,}007$; $d=6{,}245$).

62. Изъ нѣкоторой точки A окружности круга O, котораго радіусъ равенъ 5 фут., проведены 2 хорды, длиною въ 7 и 8 фут. Вычислить уголъ, образуемый этими хордами, разсмотрѣвъ 2 случая: 1) когда хорды находятся по обѣ стороны радіуса AO и 2) когда по одну сторону его.

63. Въ равнобедренномъ Δ-кѣ главная высота равна h дм., а высота относительно боковой стороны—h_1 дм. Опредѣлить углы при основаніи Δ-ка. ($h=2{,}5$; $h_1=3$).

64. По боковой сторонѣ a см. равнобедреннаго Δ-ка и по углу при вершинѣ β^0 опредѣлить радіусы круговъ, описаннаго (R) и вписаннаго (r).

65. Катетъ прямоугольнаго Δ-ка равенъ b метр., а перпендикуляръ, опущенный изъ вершины его прямого угла на гипотенузу, равенъ h метр. Опредѣлить одинъ изъ острыхъ угловъ Δ-ка и затѣмъ другой катетъ (a) и гипотенузу (c).

66. Въ прямоугольномъ Δ-кѣ высота, опущенная на гипотенузу, дѣлитъ ее на два отрѣзка p и q дюйм. Опредѣлить острые углы Δ-ка ($p=3{,}42$; $q=5{,}18$).

Рѣшеніе. $h_c=p\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha=q\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, а такъ какъ $\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$,

то отсюда $\mathrm{ctg}\,\alpha=\sqrt{\dfrac{p}{q}}$.

67. Площадь прямоугольнаго Δ-ка равна Q кв. фут., а одинъ изъ острыхъ угловъ α^0. Опредѣлить катеты ($Q=500$; $\alpha^0=25^0 20' 48''$).

68. Опредѣлить высоту равнобедреннаго Δ-ка, если его площадь равна Q кв. фут., а уголъ при вершинѣ β^0. ($Q=174{,}35$; $\beta^0=74^0 28' 36''$).

69. Площадь равнобедреннаго Δ-ка равна Q кв. дм., а основаніе b дм. Опредѣлить высоту и уголъ (β) при вершинѣ Δ-ка. ($Q=75{,}284$; $b=18{,}35$).

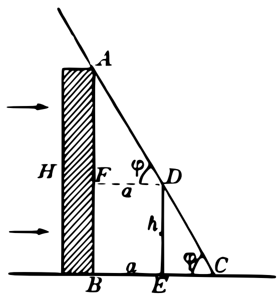
70. Боковая сторона равнобедреннаго Δ-ка равна a метр., а площадь его Q кв. м. Опредѣлить уголъ (β) при вершинѣ Δ-ка. ($a=0{,}9754$; $Q=0{,}6489$).

Указ.: Опустить высоту на боковую сторону.

71. По діаметру земного шара, равному $2R=1719$ геогр. мил., и по широтѣ мѣста φ^0 опредѣлить длину окружности соотвѣтствующаго этому мѣсту параллельнаго круга, а также то разстояніе, которое проходитъ оно въ 1 часъ вслѣдствіе суточнаго вращенія земли ($\varphi^0=56^0 57'$).

72. Два мѣста поверхности земного шара лежатъ оба подъ одной и той же сѣв. широтой φ^0 и имѣютъ восточную долготу (отн. Ферро) соотвѣтственно α и $\alpha_1{}^0$. На какомъ разстояніи по параллельному кругу эти пункты находятся другъ отъ друга? ($\varphi^0=55^045'$; $\alpha^0=85^024'$; $\alpha_1{}^0=65^012'$). (См. зад. 71).

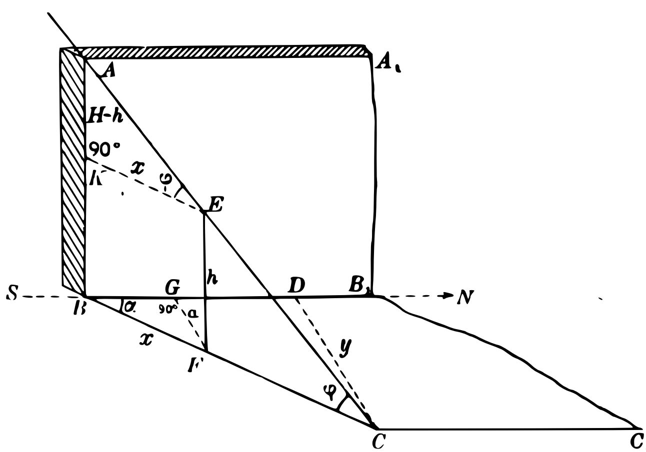
73. Человѣкъ, ростомъ въ $h=5^1/_4$ ф., могъ укрыться отъ дождя, стоя у стѣны (*черт.* 13), высота которой равна $H=14$ фут., если онъ находился не далѣе $a=5$ фут. отъ нея; при этомъ вѣ-



Черт. 13.

теръ дулъ по направленію, перпендикулярному къ стѣнѣ. Подъ какимъ угломъ (φ) къ плоскости горизонта падалъ тогда дождь? (Сравн. съ зад. 75).

74. Къ сѣверу отъ нѣкотораго пункта тянется каменная



Черт. 14.

стѣна высотою H метр. (*черт.* 14). Какую ширину (y) имѣетъ падающая отъ нея тѣнь въ тотъ моментъ, когда солнце видно въ юго-западномъ направленіи подъ угломъ высоты φ^0? (На чертежѣ: ABA_1B_1—стѣна, BCB_1C_1—тѣнь отъ нея; BC—направленіе тѣни отъ вертикальнаго предмета; CD—ширина тѣни; $\alpha^0=45^0$).

75. Человѣкъ EF (*черт.* 14), ростомъ въ $h=5^1/_4$ фут., могъ укрыться отъ дождя, стоя у стѣны ABA_1B_1 (*черт.* 14), высота которой равна $H=14$ фут., если онъ находился не далѣе $a=5$ фут. отъ нея ($GF=a$ фут.); при этомъ вѣтеръ дулъ подъ угломъ $B_1BC=$ $=\alpha^0=75^0$ къ направленію стѣны. Подъ какимъ угломъ (φ^0) къ плоскости горизонта падалъ тогда дождь?

Глава IX.—**Тригонометрическія величины малыхъ угловъ.** (Формулы Делямбра).

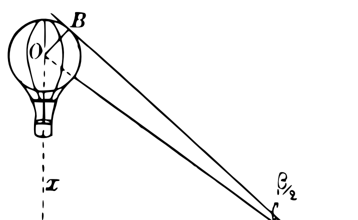
1—6. Вычислить слѣдующіе логариѳмы:

1. $\lg \sin 1^0 15' 28''$. 2. $\lg \sin 0^0 2' 35'',4$. 3. $\lg \operatorname{tg} 0^0 28' 35'',5$.
4. $\lg \cos 87^0 21' 45''$. 5. $\lg \operatorname{ctg} 88^0 35' 43''$. 6. $\lg \operatorname{ctg} 1^0 57' 23''$.

7—11. Вычислить уголъ φ^0 по слѣдующимъ даннымъ:

7. $\lg \sin \varphi=\bar{2},07135$. 8. $\lg \operatorname{tg} \varphi=\bar{2},47028$. 9. $\lg \cos \varphi=\bar{2},65207$.
10. $\lg \operatorname{ctg} \varphi=\bar{2},41575$. 11. $\lg \operatorname{ctg} \varphi=1,65938$.

12. Изъ даннаго пункта воздушный шаръ, съ діаметромъ въ d метровъ, виденъ подъ угломъ зрѣнія β^0 (*черт.* 15); а центръ



Черт. 15.

его подъ угломъ высоты α^0. Опредѣлить высоту (x) поднятія шара ($d=3$; $\beta^0=0^0 6' 34'',4$; $\alpha^0=61^0 26' 39'',3$).

13. Вычислить высоту башни, если наблюдателю, отстоящему отъ центра ея основанія на разстояніи 250 саж., верхушка башни видна подъ угломъ высоты въ $1^0 25' 30''$. Точка зрѣнія при измѣреніи угла находилась на высотѣ $1^1/_2$ арш. надъ поверхностью земли.

14. Вертикально стоящій шестъ виденъ подъ угломъ зрѣнія въ $1^0 42'35''$. Во сколько разъ разстояніе до этого шеста больше его длины, если извѣстно, что лучъ зрѣнія, перпендикулярный къ шесту, проходитъ черезъ верхній его конецъ?

15. Опредѣлить, подъ какимъ угломъ зрѣнія виденъ сигнальный шестъ, разстояніе до котораго въ 3000 разъ больше его длины, если при этомъ лучъ зрѣнія, перпендикулярный къ шесту, проходитъ черезъ его середину.

16. Для того, чтобы предметъ былъ замѣтенъ для невооруженнаго глаза, онъ долженъ быть виденъ подъ угломъ зрѣнія, содержащимъ не менѣе $40''$. Поэтому, каковъ долженъ быть наименьшій поперечникъ тѣла для того, чтобы оно было замѣтно съ, такъ называемаго, разстоянія яснаго зрѣнія, равнаго 25 сантим.?

17. Аллея имѣетъ 364 метра длины и 5,2 метра ширины. Подъ какимъ угломъ зрѣнія виденъ одинъ изъ концовъ аллеи изъ середины другого ея конца?

18. Зная, что предѣлъ замѣтнаго угла зрѣнія равенъ $40''$, опредѣлить, какова должна бы быть длина прямого тоннеля, имѣющаго ширину въ 4 метра, чтобы человѣкъ, стоящій по серединѣ при входѣ въ тоннель, видѣлъ противоположные концы его стѣнъ сливающимися.

19. Пусть діаметръ монеты равенъ 1 сант., а кажущійся діаметръ луннаго диска равенъ $31'7''$. На какомъ разстояніи отъ глаза придется держать монету, чтобы она закрыла лунный дискъ?

20. Луна изъ центра земли была бы видна подъ угломъ зрѣнія $30'58''$. Опредѣлить діаметръ луны, принимая разстояніе между центрами земли и луны равнымъ 51 797 милямъ.

21. Какъ великъ діаметръ свѣтила, если его видимая съ земли величина равна $\alpha = 31'59'',4$, а разстояніе его центра отъ земли $l = 20\,665\,840$ милямъ?

22. Полагая, что разстояніе между центрами солнца и земли равно $l = 24\,063,33$ радіуса земли, опредѣлить, какой величины будетъ казаться изъ центра земли радіусъ солнца, если онъ изъ ближайшей къ солнцу точки поверхности земли кажется равнымъ $16'0'',5$.

23. Разстояніе между центрами солнца и земли пусть равняется a мил.; радіусъ солнца изъ центра земли виденъ подъ угломъ зрѣнія $\alpha = 16'0'',46$, радіусъ же земли изъ центра солнца— подъ угломъ $\beta = 8'',81$. Во сколько разъ діаметръ солнца больше діаметра земли?

Главы X—XII.—Тригоном. величины тупого и отрицат. угла и формулы соотношенія между ними. Приведеніе триг. величинъ тупого и отрицат. угла къ острому положит. углу.

1. $\sin\alpha = 3/4$, при чемъ уголъ α^0—тупой. Опредѣлить $\cos\alpha$.

2. Зная, что $\sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, вычислить значенія всѣхъ остальныхъ тригоном. величинъ угла въ 120^0.

3. По $\operatorname{tg}\alpha = -1^1/_2$, при чемъ $90^0 < \alpha^0 < 180^0$, вычислить значенія остальныхъ тригон. величинъ угла α^0.

4. То же по $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$.

5—8. Упростить выраженія:

5. $\cos(180^0-\alpha)\sin(90^0+\alpha)\operatorname{tg}(180^0-\alpha)\operatorname{ctg}(90^0+\alpha)$.

6. $\operatorname{tg}(90^0+\alpha)\operatorname{ctg}(180^0-\alpha)+\operatorname{tg}(180^0-\alpha)\operatorname{ctg}(90^0-\alpha)$.

7. $\dfrac{2\cos(90^0-\alpha)\sin(90^0+\alpha)\operatorname{tg}(180^0-\alpha)}{\operatorname{ctg}(90^0+\alpha)\sin(180^0-\alpha)}$.

8. $\dfrac{\operatorname{tg}(180^0-\alpha)\cos(180^0-\alpha)\operatorname{tg}(90^0-\alpha)}{\sin(90^0+\alpha)\operatorname{ctg}(90^0+\alpha)\operatorname{tg}(90^0+\alpha)}$.

9—10. Привести къ углу, меньшему 45^0, слѣдующія тригон. величины:

9. $\sin 112^0 20'$; $\cos 99^0 25' 35''$; $\operatorname{tg} 108^0 48' 36''$.

10. $\sin 150^0 28'$; $\cos 158^0 17' 30''$; $\operatorname{tg} 160^0 27' 32''$; $\operatorname{ctg} 140^0 28' 42''$.

11—12. Привести къ положительному углу, меньшему 45^0:

11. $\sin(-31^0)$; $\cos(-67^0 28')$; $\operatorname{tg}(-78^0 27' 35'')$; $\operatorname{ctg}(-81^0 15' 38'')$.

12. $\cos(-120^0 15' 40'')$; $\operatorname{ctg}(-152^0 17' 38'')$; $\operatorname{tg}(-102^0 7' 27'')$.

13—14. Упростить выраженія:

13. $\sin(\alpha-90^0)$; $\cos(\alpha-180^0)$; $\operatorname{tg}(\alpha-90^0)$; $\operatorname{ctg}(-90^0-\alpha)$.

14. $\dfrac{\sin(\alpha-180^0)\cos(\alpha-90^0)\operatorname{tg}(-\alpha-90^0)}{\cos(90^0+\alpha)\operatorname{ctg}(\alpha-180^0)}$.

15—22. Опредѣлить уголъ α^0 по слѣдующимъ даннымъ, полагая при этомъ, что искомый уголъ можетъ быть и острымъ, и тупымъ:

15. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 16. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 17. $\sin\alpha = 0{,}75$.

18. $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}487$. 19. $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$;

Указ.: Замѣнить прежде всего $\operatorname{tg}\alpha$ выраженіемъ: $-\operatorname{tg}(180^0-\alpha)$.

20. $\operatorname{ctg}\alpha = -1{,}05$. 21. $\cos\alpha = -1/2$; 22. $\cos\alpha = -0{,}5783$.

Тригоном. уравненія *) (зад. 23—33).

23. $\cos^2\varphi = 1/4$. 24. $tg^2\varphi = 3$. 25. $\cos^2\varphi = 1/2$.
26. $\sin^2\varphi = 3\cos^2\varphi$. 27. $3\sin\varphi = 2\cos^2\varphi$. 28. $\sec\varphi = 4\cos\varphi$.
29. $tg^2\varphi + \sec^2\varphi = 7$. 30. $ctg^2\varphi + \csc^2\varphi = 3$.

Указ.: $\sec^2\varphi = 1 + tg^2\varphi$.

31. $\sin\varphi + 4 ctg\,\varphi = 2\csc\varphi$.

32. $3\sin^2\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi = 7\cos^2\varphi$.

Указ.: Раздѣлить обѣ части ур-ія на $\sin\varphi\cos\varphi$ съ тѣмъ, чтобы рѣшать его относительно $tg\,\varphi$.

33. $\cos^2\varphi = 12\sin^4\varphi$.

Указ. Исключить $\sin\varphi$, представивъ $\sin^4\varphi$ въ видѣ $(1-\cos^2\varphi)^2$.

Главы XIII—XV.—Основные случаи рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ.

I. Рѣшеніе треугольника по даннымъ: одной сторонѣ и двумъ угламъ.

1. Для опредѣленія разстоянія между двумя пунктами A и B, изъ которыхъ только пунктъ A былъ доступенъ, провели базисъ AC, длиною въ b саж., и измѣрили углы $BAC = \alpha^0$ и $ACB = \gamma^0$. Вычислить разстояніе AB при: $b = 120$; $\alpha^0 = 74^0 28' 42''$; $\gamma^0 = 86^0 56' 20''$.

2—6. Рѣшить Δ-къ по слѣдующимъ даннымъ:

2. $b = 283{,}25$; $\alpha^0 = 56^0 38' 47''$; $\beta^0 = 63^0 38' 56''$.
3. $a = 13{,}876$; $\beta^0 = 123^0 17' 23''$; $\gamma^0 = 35^0 28' 47''$.
4. $b = 0{,}137$; $\beta^0 = 68^0 48' 35''$; $\gamma^0 = 85^0 27' 47''$.
5. $c = 343{,}25$; $\beta^0 = 43^0 25' 23''$; $\gamma^0 = 135^0 28' 16''$.
6. $a = 7{,}3584$; $\alpha^0 = 113^0 48' 36''$; $\beta^0 = 68^0 35' 42''$.

Указ. Воспользоваться одной изъ формулъ Делямбра.

7. Одна изъ діагоналей параллелограма равна d фут. и раздѣляетъ одинъ изъ его угловъ на части α^0 и β^0. Опредѣлить стороны параллелограма.

8. Въ Δ-кѣ даны одна сторона и два прилежащихъ къ ней угла: a, β и γ. Опредѣлить биссектрисы всѣхъ угловъ Δ-ка (x_a, x_b и x_c).

9. Для опредѣленія высоты вертикальнаго предмета AB отъ основанія его A проведенъ базисъ AC, равный b саж. и повы-

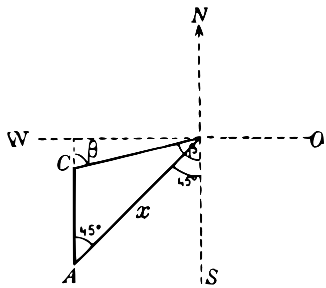
---

*) При рѣшеніи этихъ уравненій предполагать, что искомый уголъ φ^0 служитъ угломъ треугольника.

шающійся отъ точки A къ C подъ угломъ α^0 къ плоскости горизонта. Изъ конца C базиса верхушка предмета видна подъ угломъ высоты β^0. Опредѣлить высоту предмета.

10. На горѣ, склонъ которой понижается къ горизонту подъ угломъ β^0, стоитъ дерево. Опредѣлить высоту дерева, если тѣнь его, падающая на склонъ горы при высотѣ солнца α^0, имѣетъ длину l фут.

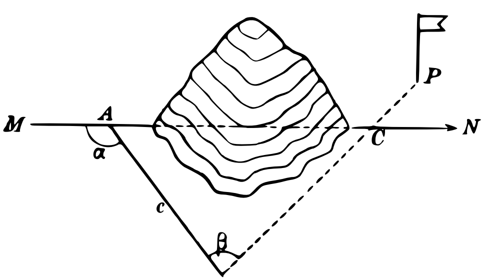
11. Маякъ C, находящійся отъ корабля на разстояніи a миль, виденъ съ корабля (*черт.* 16) по направленію, образующему съ направленіемъ на югъ уголъ β^0 ($\beta^0 > 45^0$), съ западной стороны



Черт. 16.

отъ этого направленія. Сколько миль долженъ проѣхать корабль въ юго-западномъ направленіи для того, чтобы маякъ былъ виденъ съ него по направленію на сѣверъ? ($a = 4{,}475$; $\beta^0 = 52^0 14'$).

12. Желая продолжить взятую на поверхности земли прямую линію MA (*черт.* 17) за препятствіе (наприм. за гору), производятъ слѣдующія операціи: отъ конечной точки A данной линіи проводятъ базисъ AB, выбравъ его конецъ B такъ, что изъ него видно и доступно было пространство, находящееся по другую сторону препятствія, и потомъ измѣряютъ: 1) базисъ $AB = c$ метр., 2) уголъ α^0, образуемый базисомъ съ данной прямой MA и 3) уголъ β^0, который базисъ образуетъ съ лучемъ зрѣнія, проведеннымъ изъ его конца B къ какому-нибудь предмету P, находящемуся по другую сторону препятствія. Какія послѣ этого вычисленія нужно



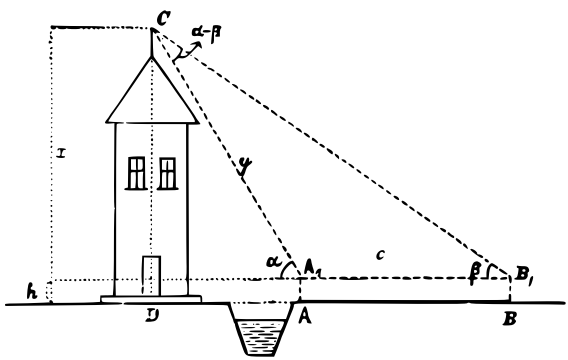
Черт. 17.

произвести для того, чтобы потомъ, послѣ соотвѣтствующихъ измѣреній, можно было указать направленіе продолженія линіи MA?

Ходъ рѣшенія: Вычислить изъ $\triangle ABC$ длину $BC=x$ м. и уголъ $NCB=\gamma$, именно: $x=\frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ и $\gamma=180^0-(\alpha-\beta)$. Тогда на прямой BP можно отмѣрить отрѣзокъ BC, равный x метр., а далѣе построить $\angle NCB$, равный γ^0.

12[a]. Рѣшить предыдущую задачу при слѣдующихъ результатахъ измѣреній: $c=325$ (метр.), $\alpha^0=128^036'$ и $\beta^0=75^042'$. Послѣ этого, для наглядной провѣрки, ту же задачу рѣшить графически.

13. Желая опредѣлить высоту башни CD (*черт.* 18), къ которой подойти было нельзя, провели по направленію къ ней горизонтальный базисъ AB, длиною въ c фут.; изъ концовъ базиса



Черт. 18.

вершина башни C видна подъ углами высоты α^0 и β^0 ($\alpha>\beta$); при измѣреніи угловъ глазъ наблюдателя былъ на высотѣ h фут. отъ земли. Вычислить высоту башни, если $c=65$, $\alpha^0=38^035'$, $\beta^0=$ $=22^030'$ и $h=4$.

Рѣш. Пусть искомая высота башни $CD=H$ фут. и пусть разность между нею и высотою (h) глаза надъ плоскостью основанія башни равна x фут., т. е. $H-h=x(=CD_1)$. Тогда $H=h+x$. Здѣсь x можно будетъ опредѣлить изъ прямоугольнаго $\triangle$-ка CA_1D_1, если, кромѣ угла α^0, будетъ извѣстна гипотенуза CA_1, равная, положимъ, y фут.; тогда

$$x=y\sin\alpha.$$

Значеніе же y опредѣлимъ изъ $\triangle CA_1B_1$, въ которомъ извѣстна сторона A_1B_1, равная c фут., и $\angle CB_1A_1=\beta^0$. Слѣдуетъ знать еще третій элементъ, напримѣръ, $\angle A_1CB_1$.

Уголъ α^0—внѣшній уголъ $\triangle A_1CB_1$ и потому

$$\alpha^0=\beta^0+\angle A_1CB_1,$$

откуда $\angle A_1CB_1=(\alpha-\beta)^0$.

Итакъ, въ $\triangle$-кѣ A_1CB_1 извѣстны одна сторона и 2 угла. Поэтому y опредѣлимъ по формулѣ sin-овъ.

$$\frac{y}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)};\ y=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

А такъ какъ $x=y\sin\alpha$, то

$$x=\frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},\ \text{а}\ H=h+x.$$

Послѣ вычисленій получимъ: $H=4+55{,}996=59{,}996$ (фут.).

14. **Изъ точки B, лежащей на одной горизонтальной плоскости съ основаніемъ башни (*черт.* 18), верхушка ея видна подъ угломъ высоты въ 35^0. Приблизившись къ основанію башни такъ, что разстояніе до нея уменьшилось на 76 фут., видимъ верхушку башни уже подъ угломъ въ $56^030'$. Найти высоту башни, полагая при этомъ, что вышина угломѣрнаго снаряда $AA_1=BB_1=3$ фут. (Сравнить отвѣтъ съ результатомъ задачи № 2 къ введенію, рѣшенной учащимися ранѣе графически).**

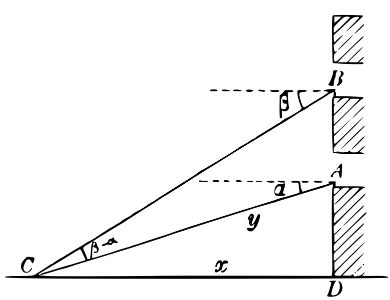
15. Дано основаніе $\triangle$-ка длиною въ 147,57 фута и прилежащіе къ нему углы въ $48^017'27''$ и $102^023'47''$. Опредѣлить высоту.

16. Въ $\triangle ABC$ даны: b, α и γ. Опредѣлить h_b, h_c и h_a.

17. Для того, чтобы опредѣлить ширину рѣки, непосредственно у воды по берегу рѣки провели базисъ AB, длиною въ c метр., и намѣтили дерево C, стоявшее на другомъ берегу у самой воды; затѣмъ измѣрили $\angle CAB=\alpha^0$ и $\angle ABC=\beta^0$. Вычислить ширину рѣки противъ дерева C, если $c=412$, $\alpha^0=68^04'$ и $\beta=73^013'$.

18. Вычислить наименьшую высоту такого $\triangle$-ка, въ которомъ одна сторона равна $a=15$ дм., противолежащій ей уголъ $\alpha^0=78^025'$, а одинъ изъ прилежащихъ угловъ $\beta^0=65^038'$.

19. Разстояніе между двумя находящимися другъ надъ другомъ подоконниками дома A и B (*черт.* 19) равно a арш., а про-



Черт. 19.

веденные съ нихъ къ одной и той же точкѣ C, лежащей въ плоскости основанія дома, лучи зрѣнія имѣютъ пониженіе въ α^0 и β^0 ($\beta > \alpha$). На какомъ разстояніи отъ дома находится эта точка C? ($a=7$; $\alpha^0=3^0 31'$; $\beta^0=16^0 55' 38''$).

20. Опредѣлить разстояніе отъ данной точки A до дома, если изъ этой точки верхній край одного изъ оконъ этого дома виденъ подъ угломъ высоты α^0, а нижній—подъ угломъ высоты β^0, и если вышина окна была равна a арш.

21. Землемѣръ шелъ по прямой дорогѣ MN и хотѣлъ, не сходя съ нея, опредѣлить разстояніе между двумя находящимися вдали пунктами C и D. Пунктъ D находился какъ разъ у дороги, а C въ сторонѣ отъ нея, при чемъ прямая CD была перпендикулярна къ направленію MN. (Другими словами, онъ хотѣлъ опредѣлить разстояніе пункта C отъ дороги). Съ одной точки B дороги искомое разстояніе онъ видѣлъ подъ угломъ зрѣнія β^0, а съ другой точки A, расположенной ближе къ D на c сажен., подъ угломъ зрѣнія α^0. Вычислить CD, если $c=160$, $\alpha^0= =53^0 13'$ и $\beta^0=32^0 28'$.

22. Въ $\triangle ABC$ даны: $\angle A=\alpha^0$ и $\angle C=\gamma^0$ и высота $AD=h_a$ фут. Опредѣлить длины трехъ его сторонъ.

23. Въ $\triangle ABC$ уголъ при B—тупой. Высота его относительно стороны BC равна h_a mm. и образуетъ со сторонами AB и AC углы соотвѣтственно равные α и β^0. Опредѣлить длину стороны $BC (=a$ mm.).

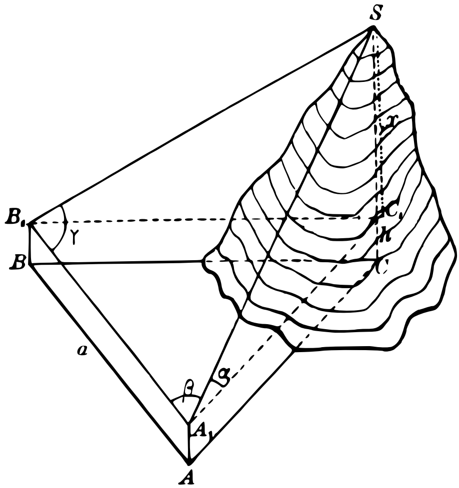
24. Два пункта находятся въ одной горизонтальной плоскости съ основаніемъ башни и въ одномъ и томъ же направленіи отъ нея; высота башни равна h метр. Съ верху башни эти пункты видны подъ углами пониженія къ горизонту α и β^0 ($\alpha > \beta$). Найти разстояніе между ними. ($h=35,7$; $\alpha^0=50^0 17' 30''$; $\beta^0=40^0 28' 15''$).

25. Длина меньшаго основанія BC трапеціи $ABCD$ равна b дм., прилежащіе къ бо́льшему основанію углы $=\alpha$ и β^0, а высота трапеціи h дм. Опредѣлить площадь ея (Q).

Указ. Провести $CE \parallel AB$ и $CF \perp AD$. Вычислить отдѣльно длину $ED=x$ дм.

26. Вычислить рѣшеніе предыдущей задачи при $b=23$; $h=12$; $\alpha^0=45^0 28' 17''$ и $\beta^0=60^0 25' 38''$.

27. Для опредѣленія высоты горы SC (*черт.* 20) поступили слѣдующимъ образомъ: провели базисъ AB въ одной плоскости съ основаніемъ горы и измѣрили длину этого базиса a фут. и углы: $SA_1C_1=\alpha^0$, $SA_1B_1=\beta^0$ и $SB_1A_1=\gamma^0$. ($AA_1=BB_1=CC_1$=высотѣ угломѣрнаго снаряда h фут.).



Черт. 20.

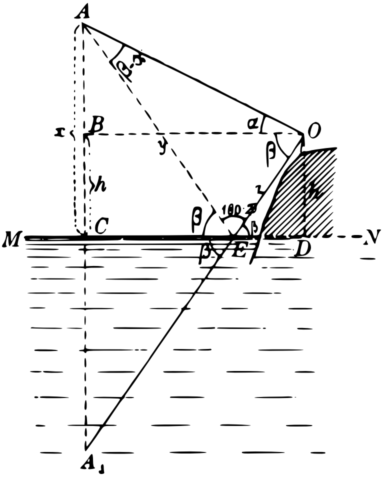
28. Для опредѣленія высоты недоступной башни AB проведенъ въ плоскости ея основанія базисъ CD, продолженіе котораго не проходитъ черезъ основаніе башни. Длина базиса=a фут. Изъ точки C верхушка башни A видна подъ угломъ высоты α^0, середина же B основанія башни изъ концовъ базиса C и D видна подъ углами $BCD=\beta^0$ и $BDC=\gamma^0$ къ направленію базиса. Вычислить высоту башни при $a=35$; $\alpha^0=67^0 13'$; $\beta^0=110^0 28'$ и $\gamma^0=47^0 43'$.

29. Вычислить ширину рѣки AB, если изъ точки C, лежащей на продолженіи прямой AB, подъ угломъ α^0 къ ней, проведенъ базисъ $CD=a$ фут., образующій съ лучами зрѣнія изъ точки D къ точкамъ A и B углы $CDB=\beta^0$ и $CDA=\gamma^0$ ($\gamma>\beta$). ($a=56$; $\alpha^0=57^0 13'$; $\beta^0=15^0 32'$; $\gamma^0=53^0 8'$).

30. Вычислить разстояніе между недоступными пунктами A и B, если относительно пунктовъ C и D извѣстно, что C лежитъ на прямой AB, между пунктами A и B, а пунктъ D въ сторонѣ отъ AB, и притомъ $CD=d$ саж., $\angle BCD=\alpha^0$, $\angle ADC=\beta^0$ и $\angle BDC=\gamma^0$ ($d=460{,}7$; $\alpha^0=95^0 16'$; $\beta^0=52^0 48'$; $\gamma^0=24^0 39'$).

31. Въ $\triangle$-кѣ ABC уголъ $A=\alpha^0$, а $\angle ABC=\beta^0$. Уголъ ABC раздѣленъ прямыми BM и BN на три равныя части. Найти отношеніе длины каждой изъ 3-хъ частей стороны AC (т. е. отрѣзковъ AM, MN и NC) къ длинѣ всей этой стороны.

32. Наблюдатель, находясь на высотѣ h метр. надъ уровнемъ воды въ озерѣ, видитъ облако подъ угломъ высоты α^0, а отраженіе облака въ водѣ озера подъ угломъ β^0 пониженія къ горизонту. (Извѣстно, что предметъ и его мнимое изображеніе въ зеркалѣ находятся на одинаковомъ разстояніи отъ поверхности зеркала). Опредѣлить высоту облака надъ уровнемъ воды въ озерѣ. ($h=76{,}8$; $\alpha^0=53^0 27'$; $\beta^0=55^0 42'$).



Черт. 21.

Рѣшеніе. На *чертежѣ* 21 точка O есть точка зрѣнія; MN—поверхность воды озера; A—наблюдаемая точка облака, а A_1—ея отраженіе въ водѣ.

Изъ подобія $\triangle$-ковъ ACE и ODE имѣемъ: $\frac{AC}{OD}=\frac{AE}{OE}$ или $\frac{x}{h}=\frac{y}{z}$, откуда $x=h.\frac{y}{z}$; изъ $\triangle$-ка же AOE: $\frac{y}{z}=\frac{\sin AOE}{\sin EAO}$ или $\frac{y}{z}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$, такъ что $x=\frac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}=1848$ (м.).

33. *) Какова высота (x) креста, находящагося на колокольнѣ, вышина которой до основанія креста равна h метр., если изъ точки, находящейся на горизонтальной плоскости основанія колокольни на разстояніи d метр. отъ центра этого основанія, крестъ виденъ подъ угломъ зрѣнія β^0. ($h=42{,}5$; $d=67{,}4$; $\beta^0=0^0 48' 53'',4$).

34. *) На горѣ стоитъ башня высотою въ a метровъ. Съ корабля подножіе башни видно подъ угломъ высоты α^0, а верхушка подъ угломъ высоты β^0. Какъ велико горизонтальное разстояніе (x) между кораблемъ и башней и какова высота горы (y)? ($a=28$; $\alpha^0=13^0 12' 21'',2$; $\beta^0=14^0 44' 37'',5$).

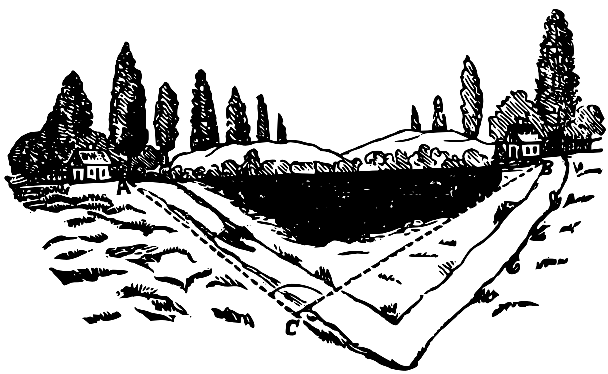
35. *) Основанія башни и столба, находящагося на нѣкоторомъ разстояніи отъ нея, лежатъ въ одной и той же горизонтальной плоскости; высота столба равна h метр. Опредѣлить высоту башни (x) и ея разстояніе (y) отъ столба, если съ верхушки

*) При вычисленіи численныхъ рѣшеній задачъ подъ №№ 33—35 приходится пользоваться формулами Делямбра (для малыхъ угловъ).

башни верхній конецъ столба виденъ подъ угломъ пониженія α^0, а подножіе столба—подъ угломъ пониженія β^0. ($h=2$; $\alpha^0=3^0 45' 42'',6$ и $\beta^0=4^0 11' 22'',1$).

II. Рѣшеніе треугольника по даннымъ двумъ сторонамъ и углу между ними.

36. Для того чтобы опредѣлить разстояніе между двумя пунктами A и B, между которыми пройти было нельзя (*черт.* 22), выбрали третій пунктъ C такъ, что изъ него видны и доступны оба пункта A и B; затѣмъ измѣрили разстояніе $BC=a$ саж.,



Черт. 22.

$AC=b$ саж. и $\angle ACB=\gamma^0$. Вычислить искомое разстояніе AB, а также углы зрѣнія α и β^0, подъ которыми изъ пунктовъ A и B видны разстоянія BC и AC, если извѣстно, что $a=100$, $b=80$ и $\gamma^0=48^0 57' 28''$.

Рѣш. Для $\triangle ABC$ дано: $a=100$; $b=80$ и $\gamma^0=48^0 57' 28''$. Требуется опредѣлить c, α и β.

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

$$c=\sqrt{100^2+80^2-2\,.\,100\,.\,80\cos\gamma}.$$

$$c=\sqrt{16400-16000\cos 48^0 57' 28''}.$$

Обозначимъ выраженіе $16000\cos 48^0 57' 28''$ черезъ x и вычислимъ его: $x=10506$.

Поэтому $c=\sqrt{16400-10506}=\sqrt{5894}=76,773$ (саж.).

Далѣе $\sin\alpha=\dfrac{a\sin\gamma}{c}=\dfrac{100\sin 48^0 57' 28''}{c}$, откуда $\alpha^0=79^0 14'$;

такъ же найдемъ уголъ β^0. $\sin\beta=\dfrac{b\sin\gamma}{c}$, откуда $\beta^0=51^0 48' 30''$.

Провѣрка.
$\alpha=74^0 14'$
$\beta=51^0 48'30''$
$\gamma=48^0 57'28''$
$179^0 59'58''$
погрѣшн. $+2''$.

Примѣчаніе. Если бы при провѣркѣ сумма угловъ оказалась значительно меньше 180^0, то вмѣсто найденнаго значенія искомаго угла, лежащаго противъ наибольшей стороны (въ данномъ случаѣ α), надо было бы взять соотвѣтствующій пополнительный уголъ, такъ какъ углы здѣсь опредѣляются по значенію синуса [$\sin\alpha=\sin(180^0-\alpha)$].

37—41. Рѣшить $\triangle ABC$ по слѣдующимъ даннымъ:

37. $b=7$; $c=10$; $\alpha^0=56^0 28'46''$.

38. $a=10$; $b=15$; $\gamma^0=123^0 17'28''$.

39. $b={}^2/_5$; $c={}^1/_2$; $\alpha^0=128^0 35'$. Рѣшить и провѣрить.

40. $a=0,2$; $c=0,6$; $\beta^0=23^0 27'34''$.

41. $c=40$; $a=100$; $\beta^0=16^0 28'17''$.

Примѣчаніе. Къ этому же отдѣлу могутъ быть отнесены и задачи главы XVI.

III. Рѣшеніе треугольника по даннымъ 3-мъ сторонамъ.

42. Подъ какимъ угломъ зрѣнія представляется предметъ, въ 28 фут. длиною, для наблюдателя, глазъ котораго отъ одного конца предмета отстоитъ на 45 фут., а отъ другого на 37 фут.?

43—46. *) Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ:

43. $a=3,475$; $b=2,8135$; $c=3,0086$.

44. $a=22,2$; $b=39$; $c=55,8$.

45. $a=333$; $b=666$; $c=777$.

46. $a={}^3/_7$; $b={}^1/_2$; $c={}^4/_5$.

Указ. къ зад. 45. Каждую сторону $\triangle$-ка уменьшить въ 111 разъ и такимъ образомъ вмѣсто даннаго $\triangle$-ка рѣшать $\triangle$-къ, ему подобный.

Указ. къ зад. 46. Рѣшать $\triangle$-къ $A_1B_1C_1$, подобный данному $\triangle ABC$, по слѣдующимъ даннымъ: $a_1=30$; $b_1=35$ и $c_1=56$.

47. Вычислить углы $\triangle$-ка ABC, у котораго стороны равны 1,3 фута; 1 фут. 4 дм. 8 лин. и 1 ф. 6 дм.

48. Стороны $\triangle$-ка относятся между собой, какъ $8:13:17$. Вычислить его углы.

49. Каждая изъ трехъ данныхъ окружностей имѣетъ внѣшнее касаніе съ каждой изъ остальныхъ; радіусы ихъ равны R_1, R_2 и R_3 дюйм. Опредѣлить углы между ихъ линіями центровъ. ($R_1=280$; $R_2=350$; $R_3=490$).

50. Стороны параллелограма равны a и b дюйм., а одна изъ діагоналей его d дюйм. Опредѣлить углы параллелограма. ($a=35,5$; $b=23,7$: $d=43,2$).

---

*) Отвѣты для этихъ задачъ не даются, такъ какъ въ вѣрности ихъ рѣшенія легко убѣдиться провѣркой.

51. Длина минутной стрѣлки стѣнныхъ часовъ равна 66 mm., а длина часовой—54 mm. Черезъ сколько времени послѣ полудня разстояніе между концами стрѣлокъ будетъ равно 90 mm.?

Указаніе. Такъ какъ въ 1 минуту конецъ минутной стрѣлки проходитъ дугу въ 6^0, а конецъ часовой стрѣлки—$^1/_2{}^0$, то въ каждую минуту уголъ между стрѣлками увеличивается на $5^1/_2{}^0$. Рѣшеніе задачи сведется къ вычисленію угла γ^0 между стрѣлками въ искомый моментъ и затѣмъ къ дѣленію γ^0 на $5^1/_2{}^0$.

52. Въ четыреугольникѣ $ABCD$ даны четыре его стороны и одна изъ діагоналей. Опредѣлить его углы. ($AB=8{,}7$ дм.; $BC=10{,}3$ дм.; $CD=13{,}2$ дм.; $DA=9{,}5$ дм. и $AC=15$ дм.).

53. Рѣшить $\triangle ABC$ по тремъ его высотамъ (h_a, h_b и h_c).

Ходъ рѣшенія. Такъ какъ площадь $\triangle$-ка $Q=\frac{ah_a}{2}=$ $=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$, то $a:b=h_b:h_a$ и $a:c=h_c:h_a$, т. е. стороны $\triangle$-ка обратно пропорціональны соотвѣтствующимъ его высотамъ, что можно выразить и такъ:

$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}.$$

Положимъ, что послѣ упрощенія отношеній правой части этого равенства, получимъ:

$$a:b:c=a_1:b_1:c_1.$$

Если теперь представить себѣ такой новый $\triangle$-къ, длины сторонъ котораго выражались бы черезъ a_1, b_1 и c_1, то этотъ $\triangle$-къ будетъ подобенъ рѣшаемому нами $\triangle$-ку и потому будетъ имѣть съ нимъ одинаковые углы (α, β и γ). Значитъ углы нашего $\triangle$-ка можно опредѣлить по тремъ сторонамъ (a_1, b_1 и c_1) воображаемаго $\triangle$-ка, пользуясь формулой:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{p-a},\quad \text{гдѣ}\quad r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Опредѣливъ такимъ образомъ углы $\triangle$-ка и зная его высоты, можемъ опредѣлить затѣмъ его стороны, пользуясь формулой $h_a=b\sin\gamma$, откуда $b=\frac{h_a}{\sin\gamma}$.

Для примѣра рѣшить слѣдующую за этимъ задачу.

54. Въ $\triangle ABC$: $h_a=43{,}5$; $h_b=50{,}8$ и $h_c=48{,}7$ (дм.). Опредѣлить углы и стороны $\triangle$-ка.

Рѣшеніе. $a:b:c=\frac{1}{43{,}5}:\frac{1}{50{,}8}:\frac{1}{48{,}7}$.

Ариѳметическихъ сокращеній въ этихъ отношеніяхъ не предвидится; поэтому при помощи логариѳмовъ вычислимъ каждый ихъ членъ отдѣльно:

$$\lg \frac{1}{43{,}5} = -1{,}63849 = \overline{2}{,}36151 = \lg 0{,}022988;$$

$$\lg \frac{1}{50{,}8} = -1{,}70586 = \overline{2}{,}29414 = \lg 0{,}019685;$$

$$\lg \frac{1}{48{,}7} = -1{,}68753 = \overline{2}{,}31247 = \lg 0{,}020534;$$

поэтому $a : b : c = 22988 : 19685 : 20534$.

$$\begin{array}{lll|l}
a_1 = 22988 & & p_1 - a_1 = 8615{,}5 & \lg(p_1 - a_1) = 3{,}93529 \\
b_1 = 19685 & & p_1 - b_1 = 11918{,}5 & \lg(p_1 - b_1) = 4{,}07622 \\
c_1 = 20534 & & p_1 - c_1 = 11069{,}5 & \lg(p_1 - c_1) = 4{,}04413 \\
\hline
2p_1 = 63207 & & p_1 \quad = 31603{,}5 & \lg p_1 \quad = 4{,}49974. \\
p_1 = 31603{,}5 & & &
\end{array}$$

1) $\lg r_1 = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{l} \lg(p_1 - a_1) = 3{,}93529 \\ +\lg(p_1 - b_1) = 4{,}07622 \\ +\lg(p_1 - c_1) = 4{,}04413 \\ -\lg p_1 \quad = \overline{5}{,}50026 \end{array} \right.$

$\lg r_1 = \frac{1}{2} \,.\, 7{,}55590$

$\lg r_1 = 3{,}77795.$

2) $\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \left| \begin{array}{ll} \lg r_1 & = \ \ 3{,}77795 \\ -\lg(p_1 - a_1) & = -3{,}93529 \end{array} \right.$

$\overline{1}{,}84266$

$\lg \operatorname{tg} 34^\circ 50' \ldots \overline{1}{,}84254$

$+20''$ 8.7

$+\ 8''$ 3.5

$\frac{\alpha^\circ}{2} = 34^\circ 50' 28''$

3) $\lg \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \left| \begin{array}{ll} \lg r_1 & = 3{,}77795 \\ -\lg(p_1 - b_1) & = -4{,}07622 \end{array} \right.$

$\overline{1}{,}70173$

$\lg \operatorname{tg} 26^\circ 42' \ldots\ldots\ldots 152$

$+30'' \ldots\ldots\ 16$

$+\ 9'' \ldots\ldots\ 4.8$

$\frac{\beta^\circ}{2} = 26^\circ 42' 39''$

4) $\lg \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \left| \begin{array}{ll} \lg r_1 & = 3{,}77795 \\ -\lg(p_1 - c_1) & = -4{,}04413 \end{array} \right.$

$\overline{1}{,}73382$

$28^\circ 26' \ldots\ldots\ldots 56$

$+50'' \ldots\ldots\ldots 25$

$+\ 2'' \ldots\ldots\ldots 1$

$\frac{\gamma^\circ}{2} = 28^\circ 26' 52''.$

5) $\alpha^\circ = 69^\circ 40' 56''$
$\beta^\circ = 53^\circ 25' 18''$
$\gamma^\circ = 56^\circ 53' 44''$
$179^\circ 59' 58''$

погрѣшн. $= +2''$

6) $a = \frac{h_b}{\sin \gamma}$; $\lg a = \left| \begin{array}{ll} \lg 50{,}8 & = 1{,}70586 \\ -\lg \sin 56^\circ 53' 44'' & = -\overline{1}{,}92308 \end{array} \right.$

$a = 60{,}643 \ldots\ldots 1{,}78278$

7) $b = \frac{h_c}{\sin \alpha}$; $\lg b = \left| \begin{array}{ll} \lg 48{,}7 & = 1{,}68753 \\ -\lg \sin 69^\circ 40' 56'' & = -\overline{1}{,}97210 \end{array} \right.$

$\lg b = \ 1{,}71543 \ldots 51{,}931.$

8) $c = \frac{h_a}{\sin \beta}$; $\lg c = \left| \begin{array}{ll} \lg 43{,}5 & = 1{,}63849 \\ -\lg \sin 53^\circ 25' 18'' & = -\overline{1}{,}90474 \end{array} \right.$

$\lg c = \ 1{,}73375 \ldots 54{,}169.$

Итакъ: $a = 60{,}643$; $b = 51{,}931$; $c = 54{,}169$.

Для провѣрки можно показать, что $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$ и т. п.

55. О трехъ пунктахъ A, B и C извѣстно, 1) что разстоянія между ними соотвѣтственно равны c, b и a саж. и 2) что четвертый пунктъ D лежитъ такъ, что изъ него точки B и C видны въ одномъ и томъ же направленіи (при чемъ къ D ближе пунктъ B, чѣмъ C), пунктъ же A виденъ подъ угломъ $ADB=\delta^0$ въ сторону отъ DB. Какъ велико разстояніе $DB=x$ саж. ($a=82,73$; $b=65,48$; $c=73,24$; $\delta^0=27^0 18'$).

56. Основанія трапеціи соотвѣтственно равны a и b дм. ($a>b$), боковыя же стороны—c и d дм. Опредѣлить углы трапеціи. ($a=25$; $b=14$; $c=13$; $d=10$).

Указаніе. Черезъ одинъ изъ концовъ меньшаго основанія провести прямую, параллельную боковой сторонѣ, и рѣшать получившійся при этомъ $\triangle$-къ по тремъ его сторонамъ.

57. Вывести формулу для площади трапеціи по даннымъ четыремъ ея сторонамъ (a, b, c и d, при чемъ a и b выражаютъ основанія).

Рѣшеніе. Пусть въ трапеціи $ABCD$ (слѣдуетъ ее начертить) основаніе $AD=a$ дм., а $BC=b$ дм., боковая сторона $AB=c$ дм., а $CD=d$ дм.; уголъ же $A=\alpha^0$. Проведемъ $BF \parallel CD$; тогда $BE=d$ дм. Пусть высота $BE=h$ дм., а площадь трапеціи—Q кв. дм.

$$Q=\frac{(a+b)h}{2}=\frac{(a+b)c\sin\alpha}{2} \quad \ldots\ldots \text{(I)}.$$

Исключимъ отсюда $\sin\alpha$, воспользовавшись уравненіемъ:

$$d^2=c^2+(a-b)^2-2(a-b)c\cos\alpha,$$

откуда $\cos\alpha=\dfrac{(a-b)^2+c^2-d^2}{2(a-b)c}$.

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{4(a-b)^2c^2-[(a-b)^2+c^2-d^2]^2}{4(a-b)^2c^2}.$$

$$\sin^2\alpha=\frac{[d^2-(a-b-c)^2]\,[(a-b+c)^2-d^2]}{4(a-b)^2c^2}.$$

$$\sin^2\alpha=\frac{(d+a-b-c)(d-a+b+c)(a-b+c+d)(a-b+c-d)}{4(a-b)^2c^2}.$$

Далѣе, если $a+b+c+d=2p$, то

$$\sin^2\alpha=\frac{2(p-b-c)\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-b-d)}{4(a-b)^2c^2},$$

такъ что $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}}{(a-b)c}$

Подставляя это выраженіе $\sin\alpha$ въ ур—іе (I), получимъ послѣ упрощенія:

$$Q=\frac{a+b}{a-b}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}.$$

IV. Рѣшеніе треугольника по даннымъ двумъ сторонамъ и по углу, лежащему противъ одной изъ нихъ.

58—61. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ:

58. $a=222$; $b=149$; $\alpha^0=70^0 42' 30''$.

59. $a=134,28$; $b=155,44$; $\alpha^0=59^0 45' 20''$.

60. $a=485,3$; $b=572,14$; $\alpha^0=35^0 43'$.

61. $a=23$; $b=64$; $\alpha^0=25^0 35' 30''$.

62. Двѣ стороны $\triangle$-ка—длиною въ 9 арш. и 13 арш., а уголъ, противолежащій меньшей изъ нихъ, равенъ $125^0 17' 38''$. Рѣшить $\triangle$-къ.

63. Одна изъ сторонъ параллелограма равна 17,8 дм., а одна изъ діагоналей—28,3 дм., уголъ же между этой діагональю и другой, неизвѣстной стороной параллелограма равенъ $28^0 28'$. Опредѣлить эту сторону параллелограма.

64. Основанія AD и BC трапеціи $ABCD$ равны 52 и 18 дюйм., одна изъ боковыхъ сторонъ, напр., AB равна 23 дм., а другая CD составляетъ съ бóльшимъ основаніемъ уголъ въ $23^0 18'$. Вычислить четвертую сторону трапеціи.

65. На продолженіи діаметра круга, равнаго $2R$ дм., взята точка на разстояніи a дм. отъ центра, и черезъ эту точку проведена сѣкущая подъ угломъ въ α^0 къ продолженію діаметра. Найти отрѣзки сѣкущей. ($2R=26$; $a=19$; $\alpha^0=35^0 18' 43''$).

Задачи на вычисленіе площади.

66. Для опредѣленія площади треугольнаго участка земли измѣрили двѣ изъ его границъ a и b саж. и уголъ между ними γ^0. Вычислить эту площадь при $a=158{,}45$; $b=264{,}78$ и $\gamma^0=60^0 25'$.

67. Вычислить площадь $\triangle$-ка по даннымъ: $b=27{,}346$; $c=49{,}178$ (фут.); $\alpha^0=117^0 28' 35''$.

68. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-ка равна b дм., а уголъ при вершинѣ равенъ α^0. Опредѣлить площадь его.

69. Если длины двухъ сторонъ $\triangle$-ка (a и b) будутъ оставаться постоянными, уголъ же γ^0, составленный ими, будетъ измѣняться въ предѣлахъ отъ 0 до 180^0, то при какомъ значеніи γ площадь $\triangle$-ка будетъ наибольшей?

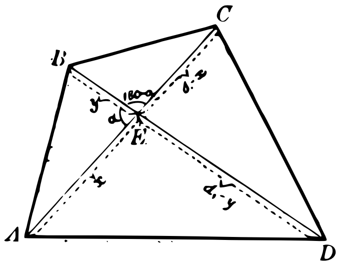
70. Опредѣлить площадь параллелограма, двѣ стороны котораго соотвѣтственно равны a и b саж., а уголъ между ними равенъ α^0 ($a=75{,}874$; $b=83{,}578$; $\alpha^0=138^0 15' 58''$).

71. Опредѣлить площадь ромба по его сторонѣ (a) и по углу (α).

72. Опредѣлить площадь трапеціи, если основанія ея равны a и b дм., одна изъ боковыхъ сторонъ c дм., а прилежащій къ послѣдней острый уголъ$=\alpha^0$.

Указаніе. Прежде всего, продолживъ въ одномъ направленіи оба основанія, дополнить трапецію до такого параллелограма, площадь котораго вдвое больше площади данной трапеціи.

73. Опредѣлить площадь (Q) четыреугольника $ABCD$ (*черт.* 23),



Черт. 23.

если его діагонали AC и BD равны d и d_1 метр., а острый уголъ между ними α^0.

Рѣшеніе. Разсматриваемъ площадь четыреугольника, какъ сумму площадей четырехъ треугольниковъ: AEB, BEC и т. д., гдѣ E—точка пересѣченія діагоналей. Предположимъ, что $AE=x$ метр., а $BE=y$ метр.; тогда $EC=(d-x)$ метр. и $ED=(d_1-y)$ м. Поэтому

$$Q=\frac{1}{2}xy\sin\alpha+\frac{1}{2}y(d-x)\sin(180^0-\alpha)+\frac{1}{2}(d-x)(d_1-y)\sin\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}(d_1-y)x\sin(180^0-\alpha),$$ а такъ какъ $\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$, то

$$Q=\frac{1}{2}\sin\alpha\,(xy+dy-xy+dd_1-d_1x-dy+xy+d_1x-xy),$$

такъ что послѣ приведенія подобныхъ членовъ $Q=\frac{1}{2}dd_1\sin\alpha$,

т. е. площадь всякаго четыреугольника равна $\frac{1}{2}$ произведенія обѣихъ ихъ діагоналей и синуса угла между ними.

74. Опредѣлить площадь параллелограма, у котораго діагонали равны соотвѣтственно 75,4 и 93,84 саж., уголъ же между ними равенъ $75^0 43' 38''$.

75. Опредѣлить площадь ромба, у котораго діагонали равны соотвѣтственно 36,8 и 48,7 метра.

76. Опредѣлить площадь (Q) прямоугольника по длинѣ его діагонали (d) и по углу (φ) между діагоналями. Опредѣлить maximum Q при измѣненіи φ отъ 0 до 180^0.

77. Опредѣлить наименьшій отрѣзокъ, на которомъ, какъ на діагонали, можетъ быть построенъ прямоугольникъ съ данной площадью (Q).

Указаніе. Прежде всего рѣшить задачу, обратную предыдущей, т. е. опредѣлить діагональ прямоугольника по его площади (Q) и по углу между діагоналями (φ), и затѣмъ изслѣдовать измѣненіе этой діагонали при измѣненіи угла φ.

78. Опредѣлить площадь треугольнаго участка земли, одна изъ границъ котораго равна c саж., а остальныя границы образуютъ съ данной углы α и β^0. (c=175,75; $\alpha^0=83^0 57' 35''$; $\beta^0=58^0 35' 46''$).

79. Опредѣлить площадь трапеціи, основанія которой равны a и b фут., боковыя же стороны образуютъ съ бо́льшимъ основаніемъ (a) углы α и β^0. (a=75,287; b=40,243; $\alpha^0=63^0 28' 47''$; $\beta^0=48^0 19' 13''$).

Указаніе. Продолжить непараллельныя стороны трапеціи до пересѣченія и разсматривать площадь трапеціи, какъ разность площадей полученныхъ при этомъ двухъ треугольниковъ.

80. Опредѣлить площадь $\triangle$-ка, у котораго двѣ стороны равны a и b фут., а уголъ противъ первой стороны равенъ α^0. (a=75; b=40; $\alpha^0=75^0$).

Указаніе. Вычислить сначала уголъ β^0 противъ второй данной стороны, затѣмъ третій уголъ γ^0; площадь же опредѣлить по a, b и γ.

81. Рѣшить предыдущую задачу при a=40; b=48 и $\alpha^0=36^0 48'$.

82. Площадь треугольника равна Q кв. ед., а его углы—α, β и γ^0. Опредѣлить стороны $\triangle$-ка.

83. Двѣ изъ прямолинейныхъ границъ лѣсного участка сходятся подъ угломъ $BAC=\alpha^0$. Требуется отъ этого участка отрѣзать площадь DAE въ Q кв. саж. при помощи прямой ED, наклоненной къ сторонѣ AC подъ угломъ $AED=\gamma^0$. Такую прямую легко провѣшить, если будутъ извѣстны стороны AE и AD, и потому требуется опредѣлить ихъ длины. (Q=4565,7; $\alpha^0=29^0 30$; $\gamma^0=45^0$).

84. Въ $\triangle ABC$: $\angle A=123^0 17'$; $\angle B=24^0 17' 53''$; площадь равна Q=174,85 кв. фут. Опредѣлить длину стороны AC.

85. Площадь $\triangle$-ка равна Q кв. фут. Подъ какимъ угломъ (γ) пересѣкаются двѣ его стороны, имѣющія данныя длины въ a и b фут.? (a=174,8; b=427; Q=9536,4).

86. Въ $\triangle ABC$ даны: h_a, h_b и уголъ γ^0. Опредѣлить площадь треугольника.

87. Опредѣлить площадь $\triangle$-ка ABC по даннымъ угламъ $A=\alpha^0$ и $B=\beta^0$ и по высотѣ $BD=h_b$ дюйм.

88. Опредѣлить площадь $\triangle$-ка по его высотѣ (h_b) и по двумъ угламъ, прилежащимъ къ основанію (α и γ).

89. Въ $\triangle ABC$ высота BD=27,37 фут., углы A и C соотвѣтственно равны $37^0 28' 35''$ и $78^0 39' 25''$. Опредѣлить площадь $\triangle$-ка.

Задачи на опредѣленіе радіусовъ круговъ: описаннаго около треугольника, вписаннаго и внѣвписаннаго.

90. Доказать непосредственно, что любая изъ сторонъ $\triangle$-ка равна діаметру описаннаго около него круга, умноженному на sin угла, противолежащаго искомой сторонѣ. ($a=2R\sin\alpha$).

Указаніе. Черезъ одинъ изъ концовъ искомой стороны провести діаметръ, а другой конецъ стороны соединить прямою съ другимъ концомъ этого діаметра *).

91. Въ $\triangle ABC$ даны: a, β и γ. Опредѣлить радіусъ круга описаннаго (R).

92. Опредѣлить площадь $\triangle ABC$ по радіусу (R) описаннаго около него круга и по тремъ его угламъ (α, β и γ).

93. По тремъ сторонамъ $\triangle$-ка опредѣлить радіусъ описаннаго около него круга.

Рѣшеніе. $R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

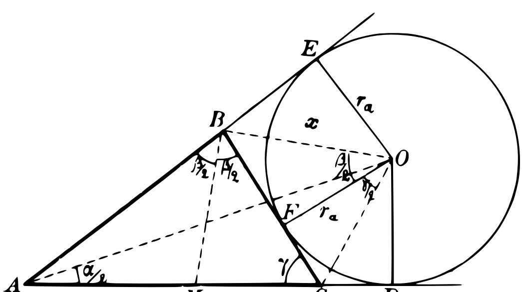
$$Q=\frac{bc\sin\alpha}{2},\ \text{откуда}\ \sin\alpha=\frac{2Q}{bc}.$$

Поэтому послѣ подстановки:

$$R=\frac{abc}{4Q}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

94. Въ $\triangle ABC$ даны: a, β и γ. Опредѣлить радіусъ (r) круга, вписаннаго въ $\triangle$-къ.

95. Въ $\triangle ABC$ (*черт.* 24) даны: a, β и γ. Опредѣлить радіусъ



Черт. 24.

(r_a) круга, внѣвписаннаго при данной сторонѣ a, и затѣмъ выведенную формулу примѣнить для аналогичнаго выраженія r_b и r_c.

---

*) Въ моемъ учебникѣ „Прямолинейная тригонометрія“, (§ 65) эта теорема доказывается иначе. *Авторъ.*

Рѣшеніе. Сперва доказать, что $\angle BOF = \angle KBC = \frac{1}{2}\beta^0$ и $\angle FOC = \frac{\gamma^0}{2}$. Затѣмъ изъ $\triangle OBF: r_a = x\cos\frac{\beta}{2}$, а изъ $\triangle OBC$:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}},\ \text{такъ что}\ r_a = \frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

96. Опредѣлить радіусы внѣвписанныхъ круговъ (r_a, r_b и r_c) $\triangle$-ка ABC по тремъ его сторонамъ (a, b и c).

Рѣшеніе. Центръ круга, внѣвписаннаго при сторонѣ BC треуг-ка ABC (*черт.* 24), лежитъ въ точкѣ пересѣченія биссектрисъ 3-хъ угловъ: внутренняго при вершинѣ A и внѣшнихъ при вершинахъ B и C.

Поэтому изъ прямоугольнаго $\triangle AOD: OD = AD\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Легко доказать, что сторона AD равна половинѣ периметра $\triangle ABC$. Въ самомъ дѣлѣ, принявъ во вниманіе, что касательныя къ кругу, проведенныя изъ одной и той же внѣшней точки, равны между собой, имѣемъ:

$$AD = AC + CD = AC + CF$$
$$\text{и}\ \ AE = AB + BE = AB + BF$$

Слѣдов. $AD + AE = AB + BC + AC$, а такъ какъ $AD = AE$, то $AD = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$, т. е., если $AD = x$ ед. дл., то $x = p$.

Поэтому $r_a = x\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

А такъ какъ $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$,

то $r_a = p\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}$, т. е.

$r_a = \frac{Q}{p-a}$. По аналогіи $r_b = \frac{Q}{p-b}$ и $r_c = \frac{Q}{p-c}$, гдѣ Q выражаетъ площадь $\triangle$-ка.

Глава XVI.—Примѣненіе формулы тангенсовъ къ рѣшенію треугольниковъ.

1—3. Рѣшить $\triangle$-къ по даннымъ:

1. $a = 87{,}208$; $b = 15{,}489$; $\gamma^0 = 63^0 58' 37''$.

2. $b=28,747$; $c=35,289$; $\alpha^0=49^0 58'43''$.

3. $a=1,987$; $c=2,487$; $\beta^0=112^0 58'24''$.

4. Чтобы опредѣлить разстояніе между двумя пунктами A и B (см. черт. на стр. 1), выбрали такой третій пунктъ C, изъ котораго видны и доступны оба пункта A и B, а затѣмъ послѣ измѣреній получили слѣдующія данныя: $AC=257,4$ саж., $BC=308$ саж. и $\angle ACB=68^0 35'$. Вычислить разстояніе AB.

5. Въ четыреугольникѣ $ABCD$ даны: двѣ противоположныхъ стороны $AB=a$ дм. и $CD=c$ дм. и діагональ $AC=d$ дюйм., а также углы $BAC=\alpha^0$ и $ACD=\beta^0$, образуемые этой діагональю съ каждой изъ данныхъ сторонъ. Вычислить остальныя стороны и всѣ углы четыреугольника, если $a=12$; $c=7$; $d=15$; $\alpha^0=58^0 18'46''$; $\beta^0=47^0 35'34''$.

6. Вычислить бо̀льшую діагональ параллелограма, у котораго двѣ стороны равны соотвѣтственно 45,286 сант. и 28,764 сант., а одинъ изъ угловъ содержитъ $125^0 28'34''$.

7. Стороны параллелограма соотвѣтственно равны a и b сантим., а одинъ изъ его угловъ γ^0. Опредѣлить обѣ его діагонали. ($a=57,345$; $b=38,527$; $\gamma^0=63^0 28'48''$).

8. Длины двухъ изъ сторонъ параллелограма равны $a=28$ и $b=35$ дюйм.; уголъ между ними $\gamma^0=135^0 28'47''$. Опредѣлить обѣ его діагонали. Сдѣлать провѣрку, опредѣливъ площадь параллелограма, во 1) по даннымъ задачи, а во 2) по найденнымъ діагоналямъ и углу между ними.

9. Въ параллелограмѣ діагонали равны d и d_1 дюйм. ($d>d_1$), а уголъ между ними α^0. Вычислить стороны его, если $d=52,448$; $d_1=38,226$ и $\alpha^0=75^0$.

10. То же, если $d=42,448$; $d_1=28,226$ и $\alpha^0=77^0$.

11. Діагонали параллелограма равны d и d_1 дюйм., а длина одной изъ его сторонъ равна a дюйм. Опредѣлить углы параллелограма. (I) $d=28$; $d_1=70$ и $a=49$; II) $d=28$; $d_1=70$; $a=42$).

12. Двѣ стороны треугольника соотвѣтственно равны 48 и 75 саж., а уголъ между ними $38^0 52'48''$. Вычислить высоту, опущенную изъ вершины даннаго угла.

13. Въ $\triangle ABC$ даны: b, c и α. Какъ опредѣлить h_a, h_b и h_c?

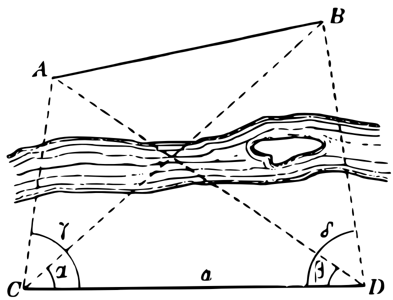
14. Опредѣлить радіусы вписаннаго въ $\triangle$-къ и описаннаго около него круговъ, если двѣ изъ сторонъ этого $\triangle$-ка равны a и b фут., а уголъ между ними γ^0. Указать ходъ рѣшенія задачъ.

15. Рѣшить $\triangle ABC$, если извѣстно, что $a=17,95$; $b=38,5$ и $Q=143,48$.

16. Опредѣлить площадь круга, если извѣстно, что двѣ его хорды, длиною одна въ a дм., а другая въ b дм., имѣя общую точку на окружности, образуютъ между собою уголъ γ^0. ($a=68{,}3$; $b=40{,}5$; $\gamma^0=68^0 29' 48''$).

17. Опредѣлить площадь круга, описаннаго около $\triangle$-ка, если извѣстно, что одна изъ сторонъ этого $\triangle$-ка равна c дм., одинъ изъ прилежащихъ къ ней угловъ—α^0, а площадь равна q кв. дм. (Указать ходъ рѣшенія).

18. Для опредѣленія разстоянія между двумя недоступными пунктами A и B (*черт.* 25) измѣрили базисъ CD, не проходящій



Черт. 25.

между пунктами A и B и равный a фут., и углы: $ACD=\gamma^0$, $BCD=\alpha^0$, $ADC=\beta^0$ и $BDC=\delta^0$. Вычислить AB, если $a=2000$; $\alpha^0=52^0 40'$; $\beta^0=42^0 1'$; $\gamma^0=86^0 40'$ и $\delta^0=81^0 15'$.

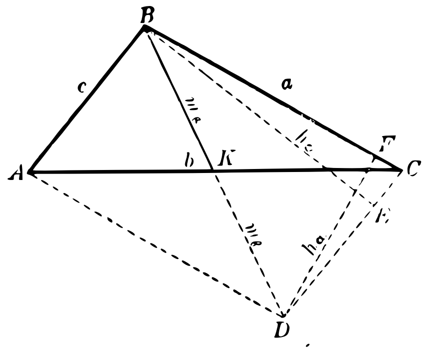
Указаніе. 1) Изъ $\triangle BCD$ опредѣлить BD по сторонѣ CD и двумъ прилежащимъ къ ней угламъ; 2) точно такъ же изъ $\triangle ACD$ опредѣлить AD и 3) рѣшать относительно AB тр-къ ABD по двумъ сторонамъ BD и AD и по углу между ними $(\delta-\beta)^0$.

19. Вычислить разстояніе между двумя пунктами A и B по слѣдующимъ даннымъ: 1) базисъ CD, проходящій между пунктами A и B, равенъ a саж.; 2) $\angle BCD=\alpha^0$; $\angle BDC=\beta^0$; $\angle ACD=\gamma^0$ и $\angle ADC=\delta^0$. ($a=350$, $\alpha^0=24^0 16' 23''$; $\beta^0=39^0 42' 11''$; $\gamma^0=20^0$ и $\delta^0=$ $=91^0 56' 24''$.

20. Для опредѣленія разстоянія AB между береговыми устоями желѣзнодорожнаго моста были измѣрены на лѣвомъ берегу рѣки базисъ CD, равный 103,142 саж., и углы: $ACD=27^0 53'$; $BCD=45^0 22'$; $CDA=37^0 31'$ и $CDB=53^0 49'$. (Устой A—на лѣвомъ берегу; при продолженіи прямая AB проходитъ между пунктами C и D). Вычислить AB.

21. Въ $\triangle ABC$ даны: медіана BK (m_b), сторона BC (a) и уголъ $ABC=\beta^0$. Рѣшить $\triangle ABC$.

Ходъ рѣшенія. Продолжимъ (*черт.* 26) медіану BK и на продолженіи отложимъ отрѣзокъ KD, равный BK; конецъ D соединимъ съ вершинами A и C. Тогда получимъ параллелограмъ $ABCD$, въ которомъ извѣстны одна сторона BC, діагональ BD и уголъ при B (слѣдовательно, легко опредѣлить и остальные углы); требуется опредѣлить другую сторону $AB=CD$, другую діагональ AC и углы, образуемые этой діагональю со сторонами.



Черт. 26.

Сторону CD опредѣлимъ изъ $\triangle BCD$, въ которомъ извѣстны двѣ стороны и уголъ противъ одной изъ нихъ: $2m_b$, a и $(180^0-\beta)$. Затѣмъ рѣшимъ $\triangle ABC$ по двумъ сторонамъ и углу между ними.

22. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: c, m_b и h_c.

Указаніе. Изъ $\triangle DBE$ (*черт.* 26) по h_c и $2m_b$ опредѣлимъ $\angle BDC$. Затѣмъ рѣшимъ $\triangle BDC$ по двумъ сторонамъ и углу между ними: т. е по c, $2m_b$ и по $\angle BDC$; далѣе, такъ же по двумъ сторонамъ и углу между ними рѣшимъ $\triangle ABC$ (т. е. по a, c и β).

23—25. Намѣтить ходъ рѣшенія $\triangle$-ка ABC по даннымъ:

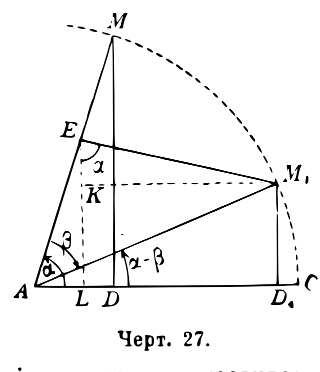
23. a, c и m_b.

24. β, m_b и h_a.

25. h_a, h_c и m_b.

Глава XVII.—Формулы преобразованія и ихъ примѣненіе при упрощеніи тригоном. выраженій и при рѣшеніи тригоном. уравненій.

1. Вывести формулы для $\sin(\alpha-\beta)$ непосредственно изъ *чертежа* 27. [аналогично имѣющемуся въ учебникѣ выводу формулъ для $\sin$ и $\cos(\alpha+\beta)$].



Черт. 27.

Рѣшеніе. Построимъ углы α, и β $(\alpha-\beta)^0$, разсматривая ихъ какъ углы центральные; при этомъ обращаемъ вниманіе на ихъ направленіе съ тѣмъ, чтобы выяснить, какую изъ двухъ сторонъ каждаго изъ этихъ угловъ нужно считать неподвижнымъ радіусомъ и какую—подвижнымъ. Сообразно съ этимъ построимъ ихъ линіи синусовъ и косинусовъ (*черт.* 27). Тогда формулы для sin и cos $(\alpha-\beta)$ можно вывести слѣдующимъ образомъ:

$$\sin(\alpha-\beta)=\text{отн. }\frac{M_1D}{AM_1}=\text{отн. }\frac{EL}{AM_1}-\text{отн. }\frac{EK}{AM_1}=\text{отн. }\frac{AE\,.\sin\alpha}{AM_1}-$$

$$-\text{отн. }\frac{EM_1\cos\alpha}{AM_1}=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\text{отн. }\frac{AD_1}{AM_1}=\text{отн. }\frac{AL}{AM_1}+\text{отн. }\frac{LD_1}{AM_1}=\text{отн. }\frac{AE}{AM_1}\cos\alpha+$$

$$+\text{отн. }\frac{EM_1}{AM_1}\sin\alpha=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

2. Зная значенія sin и cos 30^0 и 45^0, опредѣлить $\sin 75^0$ $\cos 75^0$, $\sin 15^0$ и $\cos 15^0$.

3—6. Упростить:

3. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$.

4. $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

5. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

6. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$.

7. Показать, что $\dfrac{\sin(45^0+\alpha)-\cos(45^0+\alpha)}{\sin(45^0+\alpha)+\cos(45^0+\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$.

Указаніе. I способъ: Разложить sin и cos суммы, а далѣе, воспользовавшись тѣмъ, что $\sin 45^0=\cos 45^0$, сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ; II способъ: Замѣнить $\cos(45^0+\alpha)$ синусомъ дополнительнаго угла $(45^0-\alpha)$ и рѣшать далѣе, какъ задачу 5.

8. Показать, что $\dfrac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}.\sin\alpha)=\cos(60^0-\alpha)$.

Указаніе. Воспользоваться тѣмъ, что $\dfrac{1}{2}=\cos 60^0$, а $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^0$.

9. Выразить $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ черезъ $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$.

10. Зная, что $\operatorname{tg}30^0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ и $\operatorname{tg}45^0=1$, вычислить $\operatorname{tg}75^0$ и $\operatorname{tg}15^0$.

11. $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha}$ (?).

12—22. Упростить выраженія:

12. $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$.

13. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

14. $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

15. $2\sin\alpha\cos\alpha$.

16. $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

17. $\sin\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

18. $\sin\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^0+\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

19. $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

20. $\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

21. $\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}$.

22. $1-2\sin^2\alpha$.

23—25. Разложить выраженія:

23. $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

24. $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

25. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$.

26—29. Доказать справедливость равенствъ:

26. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

27. $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ и $\cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$.

28. $\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

29. $\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$.

30. Зная, что $\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, вычислить $\sin 15^0$ и $\cos 15^0$.

31. Пользуясь формулами $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, доказать, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ или $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

(См. далѣе зад. № 21 гл. XXVII).

32. Вычислить $\operatorname{tg}22^0 30'$.

33. Доказать, что

$$\sin\frac{180^0}{2^n}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2}$$

и $$\cos\frac{180^0}{2^n}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2},$$ гдѣ n—число цѣлое, большее 1, а число знаковъ радикала равно $(n-1)$.

Указаніе. Непосредственно доказать справедливость этихъ формулъ лишь при $n=2$ и при $n=3$ и 4, пользуясь формулами для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, а затѣмъ обобщить формулы, примѣняя методъ, такъ назыв., полной индукціи, т. е. способъ перехода отъ n къ $(n+1)$.

---

34. Какъ измѣняется $y=\sin\alpha\cos\alpha$ при увеличеніи α^0 отъ 0 до 90^0?

Указаніе. Прежде всего преобразовать $\sin\alpha\cos\alpha$ въ выраженіе $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

35. Какъ измѣняется $y=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ при измѣненіи α отъ 0 до 90 и далѣе до 180°?

36. Между какими предѣлами измѣняется $y=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ при измѣненіи α^0 отъ 0 до 45° и далѣе до 90°?

---

37 *). Опредѣлить площадь прям-ка, діагональ котораго равна d mm. и наклонена къ его сторонѣ подъ угломъ α^0. ($d=65{,}5$; $\alpha^0=25^0 42' 48''$).

38. Опредѣлить площадь прямоуг. $\triangle$-ка по его гипотенузѣ (c) и острому углу (α).

39. Гипотенуза прямоуг. $\triangle$-ка равна $c=25$ дм., а разность его острыхъ угловъ равна $\mu^0=8^0 25' 46''$. Опредѣлить его площадь.

40. Опредѣлить площадь правильнаго n-угольника, вписаннаго въ кругъ радіуса R дм.

41. Въ кругѣ радіуса R дм. проведены 2 діаметра AB и CD подъ острымъ угломъ α^0 одинъ къ другому; конецъ A діаметра AB соединенъ прямыми съ обоими концами діаметра CD. Опредѣлить площадь $\triangle ACD$. ($R=12{,}78$; $\alpha^0=48^0 28' 43''$).

42. Опредѣлить биссектрису прямого угла прямоугольн. $\triangle$-ка по гипотенузѣ c дм. и по острому углу α^0.

43. Опредѣлить площадь правильнаго 5-тиугольника, если діагональ его равна d фут.

44. По тремъ угламъ $\triangle$-ка и по радіусу описаннаго около него круга (R) опредѣлить радіусъ вписаннаго круга (r). (см. зад. 94 гл. XIII—XV).

45. Опредѣлить радіусъ круга, описаннаго около $\triangle ABC$, если $\angle A=\alpha^0=123^0 17' 45''$; $\angle B=\beta^0=38^0 17' 38''$, а радіусъ круга, вписаннаго въ $\triangle$-къ, равенъ $r=17{,}28$ дм. (см. пред. зад.).

46. Опредѣлить радіусъ (r_c) круга, внѣвписаннаго при сторонѣ AB треуг-ка ABC, по даннымъ: α, β и R (радіусъ описаннаго круга). (см. зад. 95 гл. XIII—XV).

Уравненія.

47. Рѣшить ур-іе $\sin\varphi\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

48. $4\sin\varphi\cos\varphi=\sqrt{3}(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)$.

49. $2\cos 2\varphi=3\cos\varphi$.

---

*) Общія рѣшенія задачъ отъ № 37 до 46 требуется упрощать.

50. $\operatorname{tg} 2\varphi = 3\operatorname{tg}\varphi$.

51. $3\operatorname{ctg}\varphi = 5\operatorname{tg} 2\varphi$.

52. Площадь прямоуг-ка равна 25 кв. дм.; длина его діагонали 13,5 дм. Опредѣлить углы, составляемые діагональю со сторонами прямоуг-ка.

53. По гипотенузѣ c сантим. и по высотѣ h сантим., опущенной на гипотенузу, опредѣлить углы прямоугольнаго $\triangle$-ка. При какомъ предѣльномъ условіи относительно c и h рѣшеніе задачи возможно?

54. Высота, опущенная изъ главной вершины равнобедреннаго $\triangle$-ка, равна h дюйм., а высота, опущенная на боковую его сторону, равна h_1 дюйм. Опредѣлить уголъ (α^0) при главной вершинѣ $\triangle$-ка. Въ какихъ предѣлахъ можетъ измѣняться отношеніе между упомянутыми высотами $\left(\frac{h_1}{h}\right)$?

Глава XVIII.—Примѣненіе формулъ приведенія къ логариѳмируемому виду при вычисленіи выраженій и при рѣшеніи тригоном. уравненій.

1. Вычислить $x = \sin\alpha + \sin\beta$ при $\alpha^0 = 48^0 25' 27''$ и $\beta^0 = 59^0 37' 37''$.

2. $y = \cos\alpha - \cos\beta$ при $\alpha^0 = 48^0 59' 38''$ и $\beta^0 = 63^0 18' 46''$.

3—8. Доказать справедливость формулъ:

3. $\sin\frac{\alpha+\varphi}{2} + \sin\frac{\alpha-\varphi}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$.

4. $\sin\frac{\alpha+\varphi}{2} - \sin\frac{\alpha-\varphi}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$.

5. $\cos\frac{\alpha-\varphi}{2} + \cos\frac{\alpha+\varphi}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$.

6. $\cos\frac{\alpha-\varphi}{2} - \cos\frac{\alpha+\varphi}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$.

7. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

8. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

9—30. Привести къ логариѳмир. виду:

9. $\sin\alpha + \cos\alpha$.

10. $\sin\alpha - \cos\alpha$.

11. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\alpha$.

12. $1 + \sqrt{2}\,.\sin\alpha$.

13. $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$.

14. $\sqrt{2}\,.\sin\alpha - 1$.

15. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. $2 - \sqrt{2}$.

17. $2 - \sqrt{3}$.

18. $\sqrt{6} + \sqrt{3}$.

19. $1+\sin\alpha$.

Указаніе. Здѣсь можно воспользоваться формулой: $1+\cos\alpha=$ $=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

20. $1-\sin\alpha$.

21. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ (?).

22. $\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Указаніе. къ № 22. Прежде всего умножить числитель и знаменатель на $\sin\alpha$.

23. $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

24. $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

25. $\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos\alpha)}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (?).

26. $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$ (?).

27. $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^0-\alpha)$. (?).

28. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}(\alpha-45^0)$(?).

29. $\sqrt{3}-3\operatorname{tg}\alpha$.

30. $\sqrt{3}-\operatorname{ctg}\alpha$.

31. Вывести формулу тангенсовъ, исходя изъ формулы синусовъ, т. е. формулу $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$ вывести изъ формулы $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Указаніе. Изъ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ составить производную: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$ и сдѣлать соотв. преобразованія.

32. $\operatorname{tg}(45^0+\alpha)-\operatorname{tg}(45^0-\alpha)=2\operatorname{tg}2\alpha$ (?).

33. $\frac{\operatorname{tg}(45^0+\alpha)-\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^0+\alpha)+\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}=\sin 2\alpha$ (?).

34. $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^0+\alpha)$ (?).

35. $(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$.

36. $1+\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{8}\,.\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-45^0\right)$?

Указаніе. Воспользоваться прежде всего формулами

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\text{ и }\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

37. $1-\sin\alpha-\cos\alpha$.

38. $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$.

39. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$.

40. $\cos\alpha+\cos(\alpha+\varphi)+\cos(\alpha+2\varphi)=4\cos(\alpha+\varphi)\cos\left(30^0+\dfrac{\varphi}{2}\right)\cdot$ $\cdot\cos\left(30^0-\dfrac{\varphi}{2}\right)$?

41—46. При условіи, что $(\alpha+\beta+\gamma)^0=180^0$, показать, что:

41. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$. (см. учебникъ).

42. $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

43. $\sin\alpha-\sin\beta-\sin\gamma=-4\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

44. $1+\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=4\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta$.

45. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$ (см. учебникъ).

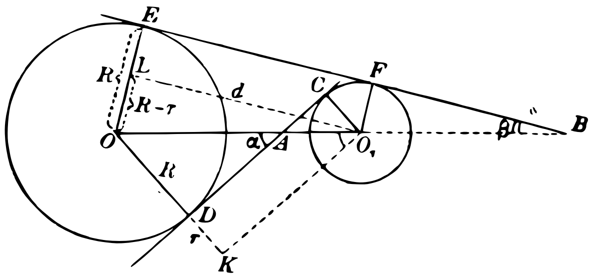
46. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$.

47. Вычислить уголъ φ^0 изъ ур-ія:

$\operatorname{ctg}\varphi=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin^2\beta-\cos^2\gamma}$, если $\alpha^0=46^048'6''$; $\beta^0=40^05'12''$ и $\gamma^0=30^040'28''$.

---

48. Разстояніе между центрами двухъ непересѣкающихся круговъ (*черт.* 28) равно d дюйм.; уголъ, составленный двумя об-



Черт. 28.

щими внутренними касательными этихъ круговъ, равенъ $2\alpha^0$, а уголъ между двумя внѣшними касательными $2\beta^0$. Опредѣлить радіусы этихъ круговъ.

49. Къ двумъ окружностямъ, имѣющимъ внѣшнее касаніе, проведена общая касательная, составляющая съ продолженіемъ ихъ линіи центровъ уголъ α^0. Разность между радіусами этихъ окружностей равна d линіямъ. Найти длины этихъ радіусовъ (R и r).

50. На какомъ разстояніи отъ поверхности шара, радіуса R верстъ, находится точка, изъ которой этотъ шаръ виденъ подъ угломъ зрѣнія α^0.

51. Изъ точки B, взятой на сторонѣ угла BAM, опущенъ перпендикуляръ BC (h_1) на сторону AM; изъ основанія C этого 1-го перпендикуляра опущенъ 2-ой перпендикуляръ CD (h_2) на AB; изъ основанія 2-го перпендикуляра опущенъ 3-ій перпендикуляръ (h_3) на AM, и т. д. безъ конца. Найти предѣлъ суммы длинъ этихъ перпендикуляровъ, зная, что разстояніе точки B отъ вершины угла A равно a mm., а уголъ $BAM=\alpha^0$.

Тригонометрическія уравненія.

52. $\sin(\varphi^{*)}+\alpha)+\sin(\varphi-\alpha)=\cos\alpha$.

53. $\sin\varphi-\cos\varphi=-1$.

Указаніе. $\sin\varphi-\cos\varphi=\sin\varphi-\sin(90^0-\varphi)=\ldots$

54. $\sin\varphi+\cos\varphi=\sqrt{2}$.

55. $\sin\varphi+\cos\varphi=\frac{3}{5}$.

56. $3\sin\varphi=2(1-\cos\varphi)$.

Указаніе. Принять во вниманіе, что $\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$ и $1-\cos\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}$.

57. $2\cos\varphi\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{3}{4}$.

Указаніе. $2\cos^2\frac{\varphi}{2}=1+\cos\varphi$.

58. $\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}=\frac{a}{b}$.

Указаніе. Составить производную пропорцію

$\frac{\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)-\sin(\alpha-\varphi)}=\frac{a+b}{a-b}$, откуда получится ур-іе $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{(a+b)\operatorname{ctg}\alpha}{a-b}$.

59. $\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\alpha+\varphi)}=\frac{a}{b}$.

---

*) Буквой φ, и вообще послѣдними буквами греческаго алфавита, въ уравненіяхъ обозначаются искомые углы.

60. Уголъ въ 72^0 раздѣлить на 2 части такъ, чтобы отношеніе между ихъ синусами было равно $\frac{3}{4}$.

61. Уголъ въ 74^0 раздѣлить на 2 части такъ, чтобы sin одной былъ въ 3 раза больше, чѣмъ sin другой.

62. $a\sin(\alpha-\varphi)=b\sin(\beta-\varphi)$.

Указаніе. Рѣшать ур-іе $\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}=\frac{b}{a}$.

63. $\sin\varphi\cos(30^0-\varphi)=0,3$.

Рѣшеніе. Выраженіе $\sin\varphi\cos(30^0-\varphi)$ представимъ въ видѣ $\frac{1}{2}(\sin\mu+\sin\nu)=\sin\frac{\mu+\nu}{2}\cos\frac{\mu-\nu}{2}$, такъ что углы μ и ν найдутся изъ системы уравненій: $\frac{\mu+\nu}{2}=\varphi$ и $\frac{\mu-\nu}{2}=30^0-\varphi$, откуда $\mu=30^0$ и $\nu=2\varphi-30^0$. Поэтому данное ур-іе представится въ видѣ: $\frac{1}{2}[\sin 30^0+\sin(2\varphi-30^0)]=0,3$, откуда $\sin(2\varphi-30^0)=0,1$ и $\varphi^0=17^052'10''$.

64. $\cos\varphi\cos(\varphi-60^0)=0,4$.

Указаніе. $\cos\varphi\cos(\varphi-60^0)$ представить въ видѣ $\frac{1}{2}(\cos\mu+\cos\nu)=$ $=\frac{1}{2}[\cos(2\varphi-60^0)+\cos 60^0]$.

65. $\sin\varphi\sin(45^0-\varphi)=0,125$.

Указ. $\sin\varphi\sin(45^0-\varphi)=\frac{1}{2}(\cos\mu-\cos\nu)=\frac{1}{2}[\cos(2\varphi-45^0)-\cos 45^0]$

66. $\sin(80^0+\varphi)\sin(20^0+\varphi)=0,125$.

67—83. Рѣшить слѣдующія системы уравненій:

67. $\varphi+\psi=\alpha$; $\sin\varphi+\sin\psi=m$. ($\alpha^0=76^012'$; $m=1,5$).

Указаніе. Второе ур-іе преобразуется въ такое: $2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}=$ $=m$, такъ что $\cos\frac{\varphi-\psi}{2}=\frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Отсюда опредѣлимъ $\frac{\varphi-\psi}{2}$, а далѣе, зная также, что $\frac{\varphi+\psi}{2}=\frac{\alpha}{2}$, опредѣлимъ φ и ψ.

68. $\varphi-\psi=\delta$; $\sin\varphi+\sin\psi=m$ ($\delta^0=21^0$; $m=1,2784$).

69. $\varphi+\psi=\alpha$; $\sin^2\varphi-\sin^2\psi=d$ ($\alpha^0=68^015'$; $d=0,578$).

70. $\varphi-\psi=\delta$; $\cos\psi-\cos\varphi=d$ ($\delta^0=30^0$; $d=0,3468$).

71. $\varphi+\psi=\alpha$; $\sin^2\varphi+\sin^2\psi=b$.

Указаніе. Второе ур-іе преобразуется въ такое: $\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)+$ $+\frac{1}{2}(1-\cos 2\psi)=b$, откуда $\cos 2\varphi+\cos 2\psi=2-2b$; а отсюда $\cos(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)=1-b$ и т. д.

72. $\varphi+\psi=\alpha$; $\sin\varphi+\cos\psi=m$. ($\alpha^0=112^0 50'$; $m=1{,}4875$).

Указаніе. $\sin\varphi+\cos\psi=\sin\varphi+\sin(90^0-\psi)=\ldots$

73. $\varphi+\psi=\alpha$; $\sin\varphi-\cos\psi=d$.

74. $\varphi-\psi=\delta$; $\cos\psi-\sin\varphi=d$. ($\delta^0=6^0 15'$; $d=0{,}57347$).

75. $\varphi-\psi=\delta$; $\sin\varphi\cos\psi=p$ ($\delta^0=30^0 20'$; $p=0{,}5$).

Указаніе. $2\sin\varphi\cos\psi=\sin(\varphi+\psi)+\sin(\varphi-\psi)=2p$, такъ что $\sin(\varphi+\psi)=2p-\sin\delta$ и т. д.

76. $\varphi+\psi=\alpha$; $\cos\varphi\cos\psi=p$ ($\alpha^0=132^0 16'$; $p=0{,}15$).

77. $\varphi+\psi=\alpha$; $\sin\varphi\sin\psi=p$ ($\alpha^0=135^0$; $p=0{,}68$).

Указаніе. $2\sin\varphi\sin\psi=\cos(\varphi-\psi)-\cos(\varphi+\psi)=2p$.

78. $\varphi+\psi=\alpha$; $\sin\varphi:\sin\psi=m:n$ ($\alpha^0=150^0$; $m:n=2:1$).

Указаніе. Изъ 2-го ур-ія получается: $\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi}=\frac{m+n}{m-n}$;

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}}=\frac{m+n}{m-n},\text{ откуда } \operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\frac{(m-n)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{m+n}\text{ и т. д.}$$

79. $\varphi-\psi=\delta$; $\cos\varphi:\cos\psi=m:n$ ($\delta^0=21^0$; $m:n=0{,}947:1$).

80. $\varphi+\psi=\alpha$; $\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi=m$.

Указаніе. $\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi=\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\varphi\cos\psi}=m$; $\cos\varphi\cos\psi=\frac{\sin\alpha}{m}$; далѣе такъ же, какъ зад. 76.

81. $\varphi-\psi=\delta$; $\operatorname{ctg}\psi-\operatorname{ctg}\varphi=d$,

82. $\varphi+\psi=\alpha$; $\operatorname{tg}\varphi:\operatorname{tg}\psi=m:n$.

Указаніе. $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi}=\frac{m}{n}$; $\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\psi}=\frac{m+n}{m-n}$; $\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin(\varphi-\psi)}=\frac{m+n}{m-n}$, откуда $\sin(\varphi-\psi)=\frac{(m-n)\sin\alpha}{m+n}$.

83. $\varphi-\psi=\delta$; $\operatorname{ctg}\varphi:\operatorname{ctg}\psi=m:n$.

Способъ вспомогательнаго угла.

84. Вычислить $y=a-b\sin^2\alpha$ при $a=2$; $b=0{,}754$ и $\alpha^0=29^0 15' 38''$.

85. Вычислить $y=2\sin\alpha-3\cos\alpha$ при $\alpha^0=128^0 15'$.

86. $y=a\sin\alpha\mp b\cos\alpha$.

Указаніе. Вынести a за скобку, и $\frac{b}{a}$ приравнять $\operatorname{tg}\varphi$; тогда $y=\frac{a\sin(\alpha\mp\varphi)}{\cos\varphi}$, при чемъ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

87. $y=5\sin 28^0 15'-2\cos 28^0 15'$.

88. $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$.

Указаніе. Къ подкоренному выраженію прибавить члены $-2ab+2ab$. Тогда $c=\sqrt{(a-b)^2+2ab(1-\cos\gamma)}$ и т. д. Въ результатѣ $c=\frac{a-b}{\cos\varphi}$, при чемъ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{ab}}{a-b}$.

89. Въ $\triangle ABC$ опредѣлить сторону AB, если $a=75{,}287$; $b=24{,}713$ и $\gamma^0=63^0 28'35''$. (См. предыд. зад. № 88).

90. Вычислить выраженіе $x=\frac{\sin(\alpha+\beta)+3\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)-3\sin\alpha}$ при $\alpha^0=$ $=20^0 17'23''$ и $\beta^0=63^0 45'48''$.

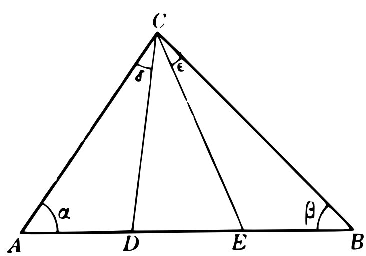
91. Изъ уравненія $\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin\varphi}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\alpha}$ опредѣлить уголъ φ^0, если $\alpha^0=24^0 17'48''$ и $\beta^0=72^0 12'52''$.

Указаніе. Изъ даннаго уравненія, имѣющаго видъ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, составить производную пропорцію вида $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$; а затѣмъ обѣ части ея привести къ логариѳмируемому виду. Имѣть при этомъ въ виду способъ рѣшенія предыдущей задачи (№ 90).

92. У треугольнаго участка земли ABC одна граница AB имѣетъ длину въ c саж. и образуетъ съ двумя другими границами углы α и β^0. Требуется отъ площади этого участка отрѣзать половину (1/2) ея такою прямой DE, которая отсѣкала бы отъ границы AB часть DB, равную 1/3 AB. Подъ какимъ угломъ δ^0 къ границѣ AB должна быть проведена эта прямая DE?

93. Въ $\triangle ABC$ извѣстны: высота $BD=h_b=46$ см.; $b=48$ см. и $\alpha^0=58^0 12'34''$. Опредѣлить уголъ γ^0.

94.*) Въ $\triangle ABC$ (*черт.* 29) углы A и B равны соотв. α и β^0.



Черт. 29.

Изъ вершины C проведены двѣ прямыя CD и CE, разсѣкающія

*) Сравни съ задачей 31 главъ XIII—XV.

въ точкахъ D и E сторону AB на 3 равныя части. Опредѣлить тѣ части угла ACB, на которыя разсѣкаютъ его прямыя CD и CE.

Тригонометрическій способъ рѣшенія квадратныхъ уравненій.

95—105. Рѣшить уравненія:

95. $x^2+px+q=0$ *), гдѣ $\frac{p^2}{4}>q$.

Рѣшеніе. $x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\sqrt{1-\frac{4q}{p^2}}=$
$=-\frac{p}{2}\left(1-\sqrt{1-\sin^2\varphi}\right)=-\frac{p}{2}(1-\cos\varphi)=-p\sin^2\frac{\varphi}{2}$, при чемъ $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$.

Точно также получимъ: $x_2=-p\cos^2\frac{\varphi}{2}$. Но полученныя рѣшенія можно упростить еще, пользуясь тѣмъ, что $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$, откуда $p=\frac{2\sqrt{q}}{\sin\varphi}$. Тогда $x_1=-p\sin^2\frac{\varphi}{2}=-\frac{2\sqrt{q}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}=$
$=-\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$; $x_2=-\sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$. Итакъ корни уравненія x^2+px+
$+q=0$ имѣютъ видъ: $x_1=-\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$; $x_2=-\sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$, при чемъ $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$.

96. $x^2-px+q=0$, гдѣ $\frac{p^2}{4}>q$.

Отвѣтъ. $x_1=\sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$; $x_2=\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$, при чемъ $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$.

97. $x^2+px-q=0$.

Рѣшеніе. $x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}=-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\sqrt{1+\frac{4q}{p^2}}=$
$=-\frac{p}{2}(1-\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi})=-\frac{p}{2}(1-\sec\varphi)=\frac{p(1-\cos\varphi)}{2\cos\varphi}=$
$=\frac{p\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$, при чемъ $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$; $x_2=-\frac{p\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$.

---

*) Какъ въ этомъ ур-іи, такъ и въ слѣдующихъ за нимъ, буквами p и q обозначены числа положительныя.

Полученныя рѣшенія можно упростить въ такія:

$$x_1=\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2};\ x_2=-\sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2},\ \text{при чемъ}\ \mathrm{tg}\,\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

98. $x^2-px-q=0$.

Отвѣтъ: $x_1=\sqrt{q}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2};\ x_2=-\sqrt{q}\cdot\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$, при чемъ $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$.

99. $x^2+25{,}8x+12{,}65=0$.
100. $x^2-161{,}5x+4491{,}06=0$.
101. $x^2+230{,}9x-400056=0$.
102. $x^2-17{,}293x-5{,}04546=0$.
103. $x^2-25{,}412x-8{,}7035=0$.
104. $x^2+73{,}3x+984{,}5=0$.
105. $x^2+93x+2160=0$.

Глава XIX.—Рѣшеніе треугольниковъ въ особыхъ случаяхъ съ примѣненіемъ формулъ преобразованія тригон. выраженій.

1. По сторонѣ (c) треугольника ABC и по двумъ прилежащимъ къ ней угламъ (α и β) опредѣлить сумму двухъ другихъ сторонъ ($a+b$).

Рѣшеніе. $a+b=\frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}+\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{c(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=$

$$=\frac{2c\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}},$$ откуда послѣ сокращенія $a+b=$

$$=\frac{c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

2. Два угла $\triangle ABC$ равны α и β^0; сторона, прилежащая къ нимъ, $=c$ дм. Опредѣлить площадь круга, діаметръ котораго равенъ разности двухъ остальныхъ сторонъ этого $\triangle$-ка.

3. Рѣшить $\triangle ABC$ по слѣд. даннымъ: $a+b=m=7{,}58$; $\alpha^0=75^028'$; $\beta^0=28^053'18''$.

Рѣшеніе. Имѣемъ систему ур-ій:

1) $a+b=m$.

2) $b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Отсюда послѣ подстановки $\frac{a(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\alpha}=m$, такъ что

$$a=\frac{m\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$ Далѣе $c=\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}=$

$$=\frac{m\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\alpha}=\frac{2m\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=$$

$$=\frac{m\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}};\quad b=m-a.$$

4. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: $b-c=d=0{,}75$; $\gamma^0=38^0 28' 34''$ и $\alpha^0=89^0 25'$.

5. Въ $\triangle ABC$ извѣстны: 2 угла (α и β) и сумма двухъ противолежащихъ имъ сторонъ ($a+b=m$). Опредѣлить площадь $\triangle$-ка.

6. Въ прямоугольномъ $\triangle$-кѣ ABC, съ прямымъ угломъ при C, извѣстны: сумма гипотенузы и одного катета и уголъ, противолежащій этому катету. Рѣшить $\triangle$-къ.

Рѣшеніе. 1) $c+a=m$
2) $a=c\sin\alpha$

$$c(1+\sin\alpha)=m;\quad c=\frac{m}{1+\sin\alpha}=\frac{m}{2\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$a=\frac{m\sin\alpha}{2\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)};\quad b=c\cos\alpha=\frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2m\sin\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}=m\,\mathrm{tg}\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right).$$

7. Рѣшить прямоугольный $\triangle ABC$, съ прямымъ угломъ C, по даннымъ: $c-b=d$ и α^0.

8. То же по даннымъ: $a+b=m=25{,}487$ и $\alpha^0=63^0 28' 48''$.

Рѣш. 1) $a+b=m$; 2) $b=a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, откуда $a(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)=m$;

$$a=\frac{m}{1+\mathrm{ctg}\,\alpha}=\frac{m\sin 45^0\sin\alpha}{\sin(45^0+\alpha)};\quad c=\frac{a}{\sin\alpha}=\ \ldots$$

9. То же, если $a-b=d=4{,}85$ и $\beta^0=39^0 28' 36''$.

10. Въ кругѣ проведены 2 діаметра AB и CD подъ острымъ угломъ α^0 одинъ къ другому; конецъ A діаметра AB соединенъ прямыми съ обоими концами CD. Опредѣлить площадь $\triangle ACD$, если разность $AC-AD=d$ дюйм. ($d=75{,}845$; $\alpha^0=58^0 47' 38''$).

11. Въ равнобедренномъ $\triangle ABC$ сумма основанія и одной боковой стороны равна s дюйм. ($b+a=s$), а уголъ при вершинѣ—β^0. Опредѣлить основаніе (b). (см. рѣш. на стр. 55).

Рѣшеніе. Изъ ур-ія $b+a=s$ исключимъ a.

Тогда имѣемъ: $b+\dfrac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}=s,$

откуда $b=\dfrac{2s\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}+1}=\dfrac{s\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin\left(15^0+\frac{\beta}{4}\right)\cos\left(15^0-\frac{\beta}{4}\right)}.$

12. По данной суммѣ двухъ неравныхъ высотъ равнобедреннаго $\triangle$-ка и по углу при основаніи опредѣлить боковую сторону $\triangle$-ка.

Рѣш. Дано $h+h_1=m$ и α. Опредѣлить a.

$$a=\frac{b}{2\cos\alpha}.$$

Значитъ, чтобы опредѣлить a, надо раньше найти b. А для этого въ ур-іи $h+h_1=m$ исключимъ h и h_1, выразивъ ихъ черезъ b. Получимъ ур-іе: $\frac{b}{2}\operatorname{tg}\alpha+b\sin\alpha=m$, откуда

$$b=\frac{2m}{\operatorname{tg}\alpha+2\sin\alpha}=\frac{2m\cos\alpha}{\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2m\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{2m\cos\alpha}{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}},\text{ такъ что }a=\frac{b}{2\cos\alpha}=\frac{m}{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

13. Опредѣлить периметръ $\triangle$-ка по одной изъ его сторонъ (**a**) и по 3-мъ угламъ.

Рѣш. $2p=a+b+c=a+\dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}+\dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}=$

$$=\frac{a(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{\sin\alpha}=\frac{4a\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

14. Опредѣлить периметръ $\triangle$-ка, у котораго одна сторона равна a дм., а прилежащіе къ ней углы β и γ^0.

15. Опредѣлить периметръ прямоуг. $\triangle$-ка по его гипотенузѣ (c) и острому углу.

16. Вычислить периметръ прямоуг. $\triangle ABC$, зная, что сумма ($b+h$) его катета и высоты, опущенной на гипотенузу, равна s дм., а уголъ A равенъ α^0 ($s=17{,}7805$; $\alpha^0=77^0 19'12''$).

17. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: $2p=17{,}28$; $\alpha^0=35^0 29' 48''$ и $\gamma^0=29^0 34' 26''$.

18. Периметръ равнобедреннаго $\triangle$-ка равенъ $2p$ фут., а уголъ при вершинѣ—β^0. Опредѣлить стороны.

19. Опредѣлить площадь $\triangle$-ка (Q) по его периметру и по угламъ ($2p$, α, β и γ).

Рѣш. $Q=\dfrac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}$, такъ что надо раньше опредѣлить c. Для этого, исключая изъ ур-ія $a+b+c=2p$ неизвѣстныя a и b, получимъ: $\dfrac{c(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{\sin\gamma}=2p$, откуда

$$c=\frac{2p\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{4p\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{p\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Тогда $Q=\dfrac{p^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\sin\alpha\sin\beta}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\gamma}$, откуда $Q=p^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

20. Въ $\triangle ABC$ даны: 2 угла α и β^0 и избытокъ (m) суммы двухъ противолежащихъ имъ сторонъ надъ третьей стороной ($a+b-c=m$). Опредѣлить стороны и площадь $\triangle$-ка.

21. Периметръ равнобедреннаго $\triangle$-ка равенъ $2p$ дм., а уголъ при вершинѣ β^0. Опредѣлить площадь $\triangle$-ка.

22. Опредѣлить радіусъ (R) круга, описаннаго около $\triangle$-ка, по его периметру и угламъ.

Указаніе. Сложить всѣ стороны, выразивъ ихъ черезъ R на основаніи формулы $a=2R\sin\alpha$.

23. Въ прямоугольномъ $\triangle ABC$ сумма катетовъ равна s фут. ($a+b=s$), а гипотенуза—c фут. Опредѣлить острый уголъ A. ($s=50$; $c=41$).

Рѣш. Изъ ур-ія $a+b=s$, послѣ исключенія a и b, имѣемъ: $c\sin\alpha+c\cos\alpha=s$, откуда $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{s}{c}$, а далѣе

$$2\sin 45^0\cos(45^0-\alpha)=\frac{s}{c};\quad \cos(45^0-\alpha)=\frac{s\sqrt{2}}{2c}=\frac{\sqrt{2}}{1{,}64}.$$

24. Опредѣлить углы прямоугольнаго $\triangle$-ка, въ которомъ гипотенуза равна c фут., а разность катетовъ ($a-b$) равна d фут. ($c=439{,}2$; $d=217{,}4$).

25. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: $a+b=m$, c и γ. (См. въ учебникъ выводъ формулъ Мольвейде).

26. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: $a-b=d$, c и γ.

27. То же, если $a+b=m=8{,}15$; $c=5{,}4$ и $\gamma^0=68^0 28' 34''$.

Указаніе. Воспользоваться формулой Мольвейде безъ вывода ея.

28. То же, если $c-a=d=3{,}5$; $b=6{,}75$; $\beta^0=52^0 35' 46''$.

29. То же, если $b+c=m=7{,}5$; $a=2{,}9$; $\alpha^0=48^0 28'$.

30. Рѣшить параллелограмъ, если извѣстно, что сумма двухъ смежныхъ его сторонъ равна m дм., уголъ между ними—γ^0, а противолежащая ему діагональ—d дм. ($m=55{,}8$; $d=49{,}9$; $\gamma^0=100^0 28' 34''$.

31. Рѣшить $\triangle$-къ по одной изъ его сторонъ (c), по суммѣ двухъ другихъ сторонъ ($a+b=m$) и разности угловъ, противолежащихъ этимъ двумъ сторонамъ ($\alpha-\beta=\delta$).

32. Опредѣлить площадь $\triangle ABC$ по углу α^0, сторонѣ a дм. и разности двухъ другихъ сторонъ ($b-c=$)d дм.

33. Периметръ параллелограма $ABCD$ равенъ $2p$ саж., меньшая діагональ его$=a$ саж., а острый уголъ его$=\alpha^0$. Опредѣлить площадь параллелограма. ($2p=90{,}65$; $a=27{,}48$; $\alpha^0=48^0 35' 25''$).

34. Въ $\triangle$-кѣ ABC извѣстны: уголъ α^0, сторона c дм. и сумма двухъ другихъ сторонъ ($a+b=$)m дм. Опредѣлить остальные углы (β и γ).

Рѣш. Беремъ I формулу Мольвейде и преобразуемъ ее въ такую: $\frac{m}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$. Составляя изъ этой пропорціи производную, имѣемъ:

$$\frac{m+c}{m-c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=$$

$=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$; отсюда $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{(m+c)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{m-c}$, такъ что можно опредѣлить β, а далѣе и γ.

35. Рѣшить $\triangle$-къ ABC по даннымъ: a, $b+c=m$ и β.

36. Въ $\triangle ABC$ извѣстны: α, c и $a-b=d$. Опредѣлить β и γ.

37. Въ $\triangle ABC$ дано: $a=753{,}47$ (саж.), $\beta^0=40^0 53' 48''$ и $b+c=m=928{,}3$ (саж.). Опредѣлить площадь.

38. Опредѣлить площадь $\triangle ABC$ по даннымъ: $\alpha^0=45^0 18' 34''$; $c=2{,}4$ (сант.); $a-b=d=1{,}7$ (сант.).

39. Данныя $\triangle$-ка ABC: $b=78{,}43$ (дм.); $a-c=d=13{,}4$ (дм.) и $\alpha^0=63^0 28' 16''$. Опредѣлить радіусъ круга, описаннаго около $\triangle$-ка.

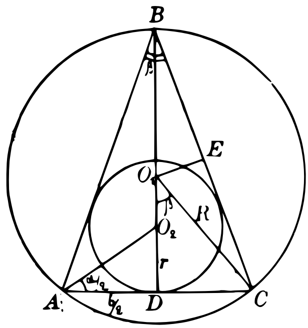
40. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: $a+b+c=2p$, h_a и β.

Указаніе. Зная высоту h_a и уголъ β, можно опредѣлить c: $c=\frac{h_a}{\sin\beta}$. А тогда у насъ будутъ данныя: $a+b=2p-c$, c и β, т. е. рѣшеніе сведется къ задачѣ, подобной задачѣ 34.

---

41. Опредѣлить радіусъ (R) круга, описаннаго около равнобедреннаго $\triangle$-ка ABC (*черт*. 30), если извѣстно, что уголъ BCA при его основаніи равенъ α^0 и что сумма основанія $\triangle$-ка съ діаметромъ вписаннаго въ него круга равна m дм. ($\alpha^0=65^0 28'36''$; $b+2r=m=36,287$).

Рѣшеніе. Изъ $\triangle O_1DC$ (*черт*. 30): $R=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{b}{2\sin 2\alpha}$.



Черт. 30.

По условію: $b+2r=m$,

а изъ $\triangle AO_2D$: $r=\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Отсюда $b+b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$,

$$\text{и } b=\frac{m}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{m\cos 45^0\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)},$$

такъ что послѣ подстановки въ выраженіе для R, имѣемъ

$$R=\frac{m\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)\sin 2\alpha}=58,49 \text{ (дм.)}.$$

42. Опредѣлить площадь $\triangle$-ка, если разность между одной изъ его сторонъ и радіусомъ круга, описаннаго около него, равна d сантим., а углы, прилежащіе къ упомянутой сторонѣ, равны α и β^0. ($d=25$; $\alpha^0=63^0 15'47''$; $\beta^0=48^0 28'49''$).

43. Сумма основанія равнобедреннаго $\triangle$-ка и діаметра круга, вписаннаго въ него, равна m дм.; уголъ при основаніи $\triangle$-ка$=\alpha^0$. Опредѣлить площадь $\triangle$-ка.

44. Разность между основаніемъ равнобедреннаго $\triangle$-ка и діаметромъ круга, вписаннаго въ него, равна d дм., а уголъ при основаніи $\triangle$-ка$=\alpha^0$. Опредѣлить площадь $\triangle$-ка.

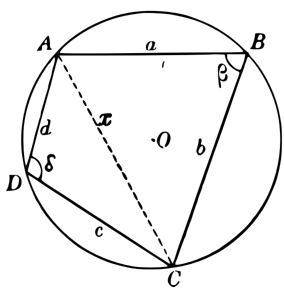
45. Опредѣлить площадь равнобедреннаго $\triangle$-ка, если извѣстно, что уголъ при его вершинѣ равенъ β^0 и что сумма его боковой стороны и радіуса круга, описаннаго около него, равна m дм. ($m=24{,}347$; $\beta^0=63^0 29'32''$).

46. Въ равнобедренномъ $\triangle$-кѣ разность между боковой стороной и радіусомъ круга, описаннаго около $\triangle$-ка, равна d дм., а уголъ при вершинѣ—β^0. Опредѣлить площадь $\triangle$-ка. ($d=25{,}756$; $\beta^0=58^0 13'36''$).

---

47. По даннымъ сторонамъ вписаннаго въ кругъ четыреугольника опредѣлить его углы и площадь.

Рѣш. Изъ $\triangle$ ABC (*черт.* 31), а потомъ изъ $\triangle$ ADC



Черт. 31.

имѣемъ:

$$a^2+b^2-2\,ab\cos\beta=x^2=c^2+d^2-2\,cd\cos\delta,$$

а такъ какъ $\delta=180^0-\beta$, то $\cos\delta=-\cos\beta$; слѣдовательно

$$a^2+b^2-2\,ab\cos\beta=c^2+d^2+2\,cd\cos\beta.$$

Отсюда: $$\cos\beta=\frac{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)}{2\,ab+2\,cd}\quad\ldots\ldots\quad (A).$$

Дополнимъ (a^2+b^2) и (c^2+d^2) до $(a+b)^2$ и $(c+d)^2$, [можно и до $(a-b)^2$ и $(c-d)^2$]. Для этого къ обѣимъ частямъ формулы (A) прибавимъ по 1 и послѣ этого въ правой части сдѣлаемъ приведеніе къ общему знаменателю.

$$1+\cos\beta=\frac{(a^2+2\,ab+b^2)-(c^2-2\,cd+d^2)}{2\,(ab+cd)}.$$

Лѣвую и правую части приведемъ къ логариѳмируемому виду и извлечемъ изъ нихъ квадр. корень:

$$2\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2(ab+cd)}.$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=+\sqrt{\frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)}{4\,(ab+cd)}}\quad\ldots(B)$$

(почему передъ корнемъ только $+$?).

Если же обѣ части равенства (A) вычтемъ изъ 1, то получимъ:

$$1-\cos\beta=\frac{2\,ab-a^2-b^2+2\,cd+c^2+d^2}{2\,(ab+cd)}=\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{2\,(ab+cd)}.$$

$$2\sin^2\frac{\beta}{2}=\frac{(c+d+a-b)(c+d-a+b)}{2\,(ab+cd)}.$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=+\sqrt{\frac{(c+d-a+b)(c+d+a-b)}{4\,(ab+cd)}}\quad\ldots(C).$$

Если выраженіе периметра $(a+b+c+d)$ обозначимъ черезъ $2\,p$, то формулы (B) и (C) послѣ подстановки и сокращеній представятся въ видѣ:

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}}\quad\ldots\ldots(C).$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}}\quad\ldots\ldots(B).$$

А тогда $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}\quad\ldots\ldots(D)$

При разсмотрѣніи формулы (D) обратить вниманіе на то, что стороны a и b образуютъ опредѣляемый уголъ β, а c и d— уголъ пополнительный къ опредѣляемому.

Поэтому по аналогіи съ формулой (D) можно написать, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-d)(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

Углы же γ и δ могутъ быть опредѣлены, какъ пополнительные къ α и β.

Опредѣлимъ теперь площадь четыреугольника $ABCD$:

$$Q_{ABCD}=Q_{1ABC}+Q_{2CDA}=\frac{ab\sin\beta}{2}+\frac{cd\sin\delta}{2},$$

а такъ какъ $\sin\delta = \sin(180^0 - \beta) = \sin\beta$, то

$$Q_{ABCD} = \frac{(ab+cd)\sin\beta}{2} = (ab+cd)\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Тогда, на основаніи формулъ (C) и (B):

$$Q = (ab+cd)\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+cd)^2}};$$

$$\mathbf{Q = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

48. Вывести формулу $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, для опредѣленія угловъ $\triangle$-ка по тремъ его сторонамъ, тѣмъ способомъ, какимъ рѣшена предыдущая задача № 47.

49. Опредѣлить діагонали вписаннаго въ кругъ четыреугольника по его сторонамъ a, b, c и d фут. ($a=17,4$; $b=20,3$; $c=13,2$; $d=10,7$).

Указаніе. На основаніи рѣшенія задачи 47 вычислить сперва углы чет—ка; тогда діагонали можно будетъ опредѣлить изъ $\triangle$-ковъ по двумъ сторонамъ и углу между ними.

---

50. Въ $\triangle ABC$ даны: a, h_a и $b+c=m$. Опредѣлить углы.

Рѣшеніе. Зная a и h_a, можемъ опредѣлить площадь $\triangle$-ка: $Q = \frac{ah_a}{2}$. Съ другой стороны площадь $\triangle$-ка опредѣляется по формулѣ $Q=pr$, гдѣ p—полупериметръ, а r—радіусъ вписаннаго круга. Такимъ образомъ, имѣемъ ур-іе:

$$pr = \frac{1}{2}ah_a \ldots\ldots\ldots\ldots (A).$$

Здѣсь $p = \frac{a+(b+c)}{2} = \frac{a+m}{2}$, а r—выразимъ по формулѣ:

$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m-a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; тогда послѣ подстановки этихъ выраженій p и r въ ур-іе (A) имѣемъ:

$$\frac{(m+a)(m-a)}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{ah_a}{2}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\,a\,h_a}{(m+a)(m-a)}$, такъ что отсюда можемъ опредѣлить уголъ α.

Для опредѣленія же β и γ беремъ во-первыхъ ур-іе

$$\beta+\gamma = 180^0 - \alpha,$$

а затѣмъ ур-іе, составленное на основаніи формулы Мольвейде:

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ \text{изъ котораго}\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{m\sin\frac{\alpha}{2}}{a},$$

и потому можно опредѣлить $\frac{\beta-\gamma}{2}=\mu$.

Тогда β и γ можно будетъ найти изъ системы ур-ій:

$$\frac{\beta+\gamma}{2}=90^0-\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{и}\quad \frac{\beta-\gamma}{2}=\mu,$$

и т. д.

51. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: b, β и h_b.

Начало рѣшенія. $b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$, а такъ какъ $c=\frac{h_b}{\sin\alpha}$, то $b=\frac{h_b\,.\,\sin\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}$, отсюда:

$$2\sin\alpha\sin\gamma=\frac{2\,h_b\sin\beta}{b},$$

а такъ какъ $2\sin\alpha\sin\gamma=\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)$, то и

$$\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)=\frac{2\,h_b\sin\beta}{b},$$

такъ что $\cos(\alpha-\gamma)=\frac{2\,h_b\sin\beta}{b}-\cos\beta$.

Отсюда опредѣлимъ $\alpha-\gamma$. Потомъ, зная также $\alpha+\gamma$, легко найти α и γ и пр.

52. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: $a+b+c=2p$, Q (площадь) и $\angle\alpha$.

Ходъ рѣшенія. $Q=pr=p(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

откуда $p-a=\frac{Q}{p}\,.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Зная p и $p-a$ опредѣлимъ a, а далѣе $b+c=2p-a$, такъ что будемъ знать $b+c$, a и α. Послѣ этого задача рѣшается по формулѣ Мольвейде.

53. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: r, $2p$ и α.

Ходъ рѣшенія. $r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и потому $p-a=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Отсюда опредѣлимъ $(p-a)$, потомъ a и $b+c=2p-a$, а далѣе по формулѣ Мольвейде опредѣлимъ $\frac{\beta-\gamma}{2}$; слѣдовательно, зная еще, что $\frac{\beta+\gamma}{2}=90^0-\frac{\alpha}{2}$, можно найти β и γ, а потомъ b и c найдемъ по формулѣ sin-овъ.

54. Опредѣлить периметръ треугольника по радіусу вписаннаго круга и по 3-мъ угламъ.

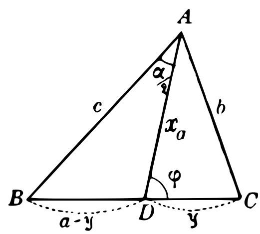
55. Опредѣлить площадь $\triangle$-ка по радіусу вписаннаго круга и по 3-мъ угламъ.

Указаніе. Воспользоваться формулой $Q=pr$ и рѣшеніемъ предыдущей задачи № 54.

---

56. По тремъ сторонамъ $\triangle$-ка ABC опредѣлить длину биссектрисы угла A.

Рѣшеніе. Чтобы опредѣлить биссектрису угла A, надо постараться получить ур-іе, въ которомъ неизвѣстной была бы длина этой биссектрисы AD. (*черт*. 32). Пусть эта длина выражается числомъ x_a, длина $DC—y$, а уголъ $ADC=\varphi^0$.



Черт. 32.

Тогда изъ $\triangle ADC$:

$$b^2=x^2+y^2-2xy\cos\varphi,$$

а изъ $\triangle ADB$:

$$c^2=x^2+(a-y)^2+2x(a-y)\cos\varphi.$$

Исключимъ изъ этой системы уравненій $\cos\varphi$; для этого обѣ части 1-го ур-ія умножимъ на $(a-y)$, а обѣ части 2-го—на y, и затѣмъ сложимъ почленно эти ур-ія:

$$(a-y)b^2=(a-y)x^2+(a-y)y^2-2xy(a-y)\cos\varphi$$
$$c^2y=\quad yx^2+(a-y)^2y+2xy(a-y)\cos\varphi$$
$$\overline{b^2(a-y)+c^2y=ax^2+a(a-y)y.}$$

Отсюда опредѣлимъ x^2.

$$x^2=\frac{1}{a}\,[ay^2-(a^2+b^2-c^2)y+ab^2]\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(A).$$

Теперь выразимъ y черезъ a, b и c. Для этого, по извѣстному свойству биссектрисы $\triangle$-ка, имѣемъ:

$$\frac{a-y}{y}=\frac{c}{b},\ \text{откуда}\ \frac{a}{y}=\frac{b+c}{b},\ \text{такъ что}\ y=\frac{ab}{b+c}.$$

Поэтому, послѣ подстановки въ ур-іе (A):

$$x^2=\frac{1}{a}\left[\frac{a^3b^2}{(b+c)^2}-\frac{(a^2+b^2-c^2)ab}{b+c}+ab^2\right].$$

Далѣе, послѣ приведенія членовъ къ общему знаменателю, послѣ сокращенія, раскрытія скобокъ и приведенія подобныхъ членовъ, получимъ:

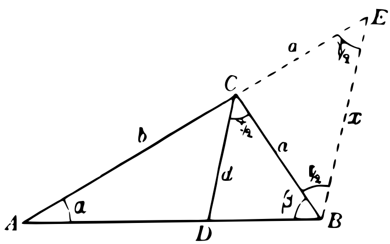
$$x^2=\frac{b(2bc^2+b^2c-a^2c+c^3)}{(b+c)^2}.$$ Послѣ же разложенія на множители:

$$x^2=\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}.$$

Поэтому $x_a=\dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$. По аналогіи $x_b=\dfrac{2\sqrt{cap(p-b)}}{c+a}$.

57. Въ $\triangle ABC$ даны: сторона $AC=b$ дм., сторона $CB=a$ дм. и биссектриса CD угла ACB, равная d дм. Опредѣлить углы $\triangle$-ка. ($a=20$; $b=15$; $d=12$).

Рѣшеніе. Даны b, a и d (*черт.* 33).



Черт. 33.

Проведемъ черезъ B прямую $BE \parallel CD$ и продолжимъ AC до пересѣченія съ BE. Тогда можно доказать, что $CE=BC=a$ дм. Пусть $BE=x$ дм. Изъ $\triangle BCE$:

$$x=2a\cos\frac{\gamma}{2},$$ такъ что

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{x}{2a}.$$

Значитъ, чтобы опредѣлить γ, нужно раньше по даннымъ задачи опредѣлить x. Для этого изъ разсмотрѣнія подобныхъ $\triangle\triangle AEB$ и ACD пишемъ: $\dfrac{x}{d}=\dfrac{a+b}{b}$; $x=\dfrac{(a+b)d}{b}$. Поэтому $\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{(a+b)d}{2ab}$.

Отсюда и опредѣлимъ γ, послѣ чего задача сводится къ рѣшенію $\triangle ABC$ по двумъ сторонамъ и углу между ними: a, b и γ.

58. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: $2p$, γ и h_c.

Рѣшеніе. Чтобы можно было опредѣлить стороны $\triangle$-ка по данной высотѣ, постараемся прежде всего опредѣлить углы α и β. Для этого имѣемъ, во-первыхъ, ур-іе

$$\alpha+\beta=180^0-\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Чтобы получить другое ур-іе съ α и β, опредѣлимъ одну изъ сторонъ $\triangle$-ка, наприм., c, съ одной стороны по данному периметру $\triangle$-ка, а съ другой—по данной высотѣ, вводя при этомъ и искомые углы α и β. Тогда и получимъ еще одно ур-іе съ α и β. Итакъ:

1) $a+b+c=2p$.

$$\frac{c(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{\sin\gamma}=2p, \quad \text{откуда } c=\frac{p\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}}$$

и 2) $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{h_c\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Отсюда $\frac{p\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{2h_c\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$, такъ что

$$p = \frac{h_c\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}, \text{ откуда } 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{h_c\cos\frac{\gamma}{2}}{p} \quad . \quad . \quad (A)$$

Такъ какъ $2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ (см. зад. 63—65 гл. XVIII), то ур-іе (A) преобразуется въ такое:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{h_c\cos\frac{\gamma}{2}}{p} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{h_c\cos\frac{\gamma}{2} + p\sin\frac{\gamma}{2}}{p}.$$

Отсюда и опредѣлимъ $\frac{\alpha-\beta}{2} = \mu$. Тогда изъ ур-ія (1) опредѣлимъ α и β. И т. д.

59. Периметръ прямоугольнаго $\triangle$-ка равенъ $2p$ сант., и высота его, опущенная на гипотенузу, равна h сант. Опредѣлить острые углы $\triangle$-ка. ($2p=50$; $h=10$).

При какомъ условіи относительно p и h рѣшеніе задачи возможно?

Указаніе. Разсматривать эту задачу, какъ частный видъ предыдущей.

60. По данному радіусу (r) круга, вписаннаго въ прямоуг. $\triangle$-къ, и по высотѣ (h), опущенной на гипотенузу, опредѣлить острые углы этого прямоугольнаго $\triangle$-ка.

Рѣшеніе. $r=(p-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=p-c$, такъ какъ $\gamma=90^0$. Поэтому

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a(\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma)}{2\sin\alpha} = \frac{4a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

(см. зад. 42 гл. XVIII).

$$r = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sin\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)\cos 45^0}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Но $a = \frac{h}{\cos\alpha}$; поэтому $r = \frac{h\sin\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\cos 45^0}{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Отсюда $\frac{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{h\cos 45^0}{r}$.

Послѣ сокращенія дроби въ лѣвой части этого уравненія (гл. XVII зад. 14) имѣемъ:

$$2\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h\cos 45^0}{r}.$$

Такъ какъ $2\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = \cos 45^0 + \cos\left(45^0 - \alpha\right)$

(см. зад. № 63—64 гл. XVIII),

то отсюда имѣемъ ур-іе: $\cos 45^0 + \cos(45 - \alpha) = \frac{h\cos 45^0}{r}$ и

$$\cos(45^0 - \alpha) = \frac{(h - r)\cos 45^0}{r},$$

и т. д.

---

61. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: $a+b+c=2p$, $bc=q$ и $\angle A=\alpha$.

Указаніе. Зная bc и α, можно опредѣлить площадь $Q = \frac{bc\sin\alpha}{2}$. А тогда будемъ знать $2p$, Q и α, и рѣшеніе сводится къ задачѣ 52.

62. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: $b+c=m$, $bc=q$ и $\angle A=\alpha^0$.

Ходъ рѣшенія. Зная α, найдемъ $\beta+\gamma$ и $\frac{\beta+\gamma}{2}$. Затѣмъ изъ данной системы 2 уравненій

$$b+c=m$$
$$bc=q$$

опредѣлимъ: разность сторонъ $b-c=\sqrt{m^2-4q}$, а далѣе b и c въ отдѣльности. Зная же двѣ стороны b и c и уголъ между ними α, рѣшимъ $\triangle$-къ по формулѣ тангенсовъ.

63. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: a, $b^2+c^2=n^2$ и $\angle A=\alpha^0$.

Ходъ рѣшенія. Знаемъ, что $a^2=b^2+c^2-2bc\,.\cos\alpha$;

отсюда $2bc = \frac{n^2-a^2}{\cos\alpha}$, а дано еще

$b^2+c^2=n^2$

такъ что найдемъ b и c. Зная же b и c и уголъ α, опредѣлимъ углы β и γ по формулѣ тангенсовъ.

Но можно углы β и γ опредѣлить по формулѣ sin-овъ: такъ, $\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}$. Но тогда придется имѣть въ виду и 2-ое рѣшеніе этого уравненія, на основаніи того, что $\sin\beta=\sin(180^0-\beta)$.

64. Рѣшить $\triangle ABC$ по даннымъ: a, $b^2+c^2=n^2$ и Q (площадь).

---

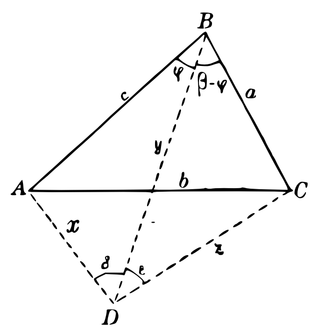
65. Вершина утеса видна съ горизонтальнаго разстоянія a метр. подъ нѣкоторымъ угломъ высоты, который при приближеніи къ утесу на b метр. удваивается. Опредѣлить этотъ уголъ, а также высоту (x) утеса. (a 250; $b=175$).

66. Для измѣренія высоты горы, въ плоскости ея основанія былъ проведенъ базисъ въ d фут. Изъ одного конца базиса вершина горы видна въ направленіи къ юго-западу подъ угломъ высоты α^0, а изъ другого—къ западу подъ угломъ высоты β^0. Опредѣлить высоту (h) горы. ($d=500$; $\alpha^0=58^034'$; $\beta^0=42^032'$).

67. Колонна, высотою въ a фут., изъ точки, возвышающейся надъ горизонтальной плоскостью ея основанія на h фут., видна подъ угломъ зрѣнія α^0. Опредѣлить разстояніе (x) этой точки отъ колонны (если $a>h$).

68. *Задачи Потенота*. На горизонтальной плоскости находятся три точки A, B и C (*черт.* 34), не лежащія на одной прямой, при чемъ разстоянія между ними равны соотвѣтственно a, b и c метр. Опредѣлить разстояніе до каждой изъ этихъ точекъ отъ нѣкоторой 4-ой точки D, которая лежитъ въ той же плоскости и изъ которой разстоянія AB и BC видны подъ углами зрѣнія δ^0 и ε^0, при чемъ $\delta+\varepsilon<180^0$.

Рѣшеніе. Пусть искомыя разстоянія AD, BD и CD соотв. равны x, y и z метр. Ихъ можно будетъ опредѣлить по формулѣ синусовъ изъ $\triangle$-овъ ABD и CBD, если кромѣ данныхъ задачи будемъ знать еще по одному углу въ каждомъ $\triangle$-кѣ, напримѣръ, углы ABD и DBC. Весь уголъ ABC можемъ опредѣлить изъ $\triangle$ ABC по тремъ его сторонамъ; пусть онъ $=\beta^0$. Поэтому, если предположить, что $\angle ABD=\varphi^0$, то $\angle DBC=(\beta-\varphi)^0$, такъ что прежде всего надо опредѣлить уголъ φ^0. Съ этой цѣлью составимъ выраженія для одного и того же разстоянія BD (y) изъ двухъ $\triangle$-овъ: DBC и ABD.



Черт. 34.

$$y = \frac{a \sin(\beta+\varepsilon-\varphi)}{\sin\varepsilon} = \frac{c \sin(\delta+\varphi)}{\sin\delta}.$$

Тогда получимъ ур-іе:

$$\frac{\sin(\beta+\varepsilon-\varphi)}{\sin(\delta+\varphi)} = \frac{c \sin\varepsilon}{a \sin\delta},$$

которое и надо рѣшить относительно φ. Составимъ для этого производную пропорцію вида $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$;

$$\frac{\sin(\beta+\varepsilon-\varphi)+\sin(\delta+\varphi)}{\sin(\beta+\varepsilon-\varphi)-\sin(\delta+\varphi)} = \frac{c\sin\varepsilon + a\sin\delta}{c\sin\varepsilon - a\sin\delta}.$$

Это ур-іе послѣ преобразованій приметъ видъ:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\delta+\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\varepsilon-\delta}{2}-\varphi\right)} = \frac{1+\frac{a\sin\delta}{c\sin\varepsilon}}{1-\frac{a\sin\delta}{c\sin\varepsilon}}.$$

Пусть $\frac{a\sin\delta}{c\sin\varepsilon} = \operatorname{tg}\psi$, гдѣ уголъ ψ^0—вспомогательный.

Тогда ур-іе приметъ видъ:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\delta+\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\varepsilon-\delta}{2}-\varphi\right)} = \frac{\sin(45^0+\psi)}{\sin(45^0-\psi)} = \operatorname{tg}(45^0+\psi);$$

такъ что $\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\varepsilon-\delta}{2}-\varphi\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\delta+\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg}(45^0+\psi)}$ . . . . . . (A).

Итакъ, по этой формулѣ (A) можно будетъ опредѣлить уголъ φ^0, если ранѣе будутъ опредѣлены уголъ β^0 по тремъ сторонамъ $\triangle\ ABC$ и уголъ ψ^0 изъ ур-ія

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a\sin\delta}{c\sin\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B).$$

Послѣ же этого, какъ уже сказано, можно будетъ опредѣлить и искомыя разстоянія (x, y и z).

Примѣчаніе. Заслуживаетъ вниманія тотъ случай, когда уголъ, стоящій подъ знакомъ tg-a въ числителѣ дроби правой части ур-ія (A) равенъ 90^0, т. е. когда $\frac{\beta+\delta+\varepsilon}{2} = 90^0$.

Тогда числитель $\operatorname{tg}\frac{\beta+\delta+\varepsilon}{2} = \infty$.

Но легко доказать, что въ этомъ случаѣ и знаменатель дроби (A): $\operatorname{tg}(45^0+\psi)$ тоже будетъ равенъ ∞.

Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{\beta+\delta+\varepsilon}{2}=90^0$, то $\beta+(\delta+\varepsilon)=180^0$, т. е. четыреугольникъ $ABCD$ можетъ быть разсматриваемъ, какъ вписанный въ кругъ. А потому, діаметръ круга, описаннаго около $\triangle\ DBC$, выражаемый черезъ $\frac{a}{\sin\varepsilon}$, будетъ равенъ діаметру круга, описаннаго около $\triangle\ DAB$; этотъ же діаметръ выражается черезъ $\frac{c}{\sin\delta}$. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть равенство:

$$\frac{a}{\sin\varepsilon}=\frac{c}{\sin\delta},$$

откуда $a\sin\delta=c\sin\varepsilon$, и потому ур-іе ($B$) представится въ видѣ:

$$\operatorname{tg}\psi=1,$$

такъ что $\psi^0=45^0$, а тогда

$$\operatorname{tg}(45^0+\psi)=\infty.$$

Итакъ, если числитель дроби въ ур-іи (A) равенъ ∞, то и знаменатель ея равенъ ∞, и потому ур-іе представится въ видѣ:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\varepsilon-\delta}{2}-\varphi\right)=\frac{\infty}{\infty},$$

т. е. оно будетъ удовлетворяться неограниченнымъ числомъ значеній искомаго угла φ.

Это, какъ сказано, будетъ въ томъ случаѣ, если данная точка D лежитъ на окружности, описанной около $\triangle\ ABC$. Въ этомъ же случаѣ, дѣйствительно, точка D можетъ занимать любое положеніе на дугѣ ADC, такъ чтобы стороны AB и BC были видны изъ нея подъ одними и тѣми же данными углами δ и ε^0.

Разобранный случай, конечно, не можетъ имѣть мѣста при томъ условіи, если $\delta+\varepsilon>180^0$, ибо тогда точка D будетъ лежать внутри $\triangle\ ABC$.

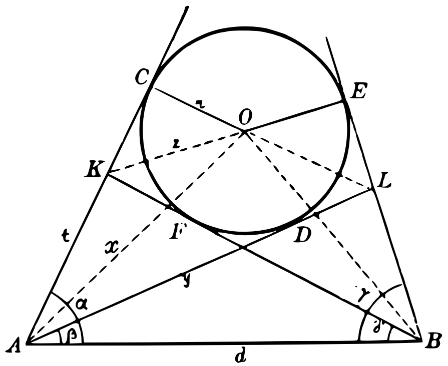
69. Рѣшить предыдущую задачу при томъ условіи, что $\delta+\varepsilon>180^0$, т. е. что пунктъ D лежитъ внутри $\triangle$-ка ABC.

70. Рѣшить задачу 68 при слѣдующихъ данныхъ: $BC=1056$ фут., $AC=1120$ фут., $AB=960$ фут., $\angle ADB=25^032'$ и $\angle BDC=40^0$.

71. То же, если $AB=735$ саж., $BC=617{,}37$ саж., $AC=1010{,}05$ с., $\angle ADB=46^020'$ и $\angle BDC=37^025'$.

---

72. Для опредѣленія радіуса круглаго основанія недоступнаго предмета (напримѣръ, башни) проводятъ базисъ AB, равный d метр. (*черт.* 35), и измѣряютъ углы, которые базисъ образуетъ съ проведенными изъ концовъ его лучами зрѣнія, касательными къ основанію предмета именно измѣряютъ: $\angle CAB=\alpha^0$,



Черт. 35.

$\angle DAB=\beta^0$, $\angle EBA=\gamma^0$ и $\angle FBA=\delta^0$. Опредѣлить искомый радіусъ.

Отвѣтъ. 1) $r=\dfrac{d\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}}$, или 2) $r=\dfrac{d\sin\gamma\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}$,

или 3) $r=\dfrac{d\sin\delta\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\delta}{2}\sin\dfrac{\beta+\delta}{2}}$.

Указаніе. Задачу можно рѣшить: 1) изъ разсмотрѣнія $\triangle\triangle$-овъ AOC и AOB; 2) изъ разсмотрѣнія $\triangle\triangle$-овъ AOC, AOL и ALB; и 3) изъ $\triangle\triangle$-овъ OCK, OKA и ABK.

73. При сравненіи двухъ послѣднихъ рѣшеній предыдущей задачи видно, что изъ четырехъ данныхъ въ ней угловъ α, β, γ и δ^0 для рѣшенія задачи достаточно знать только три, наприм. α, β, γ^0. Отсюда слѣдуетъ, что четвертый уголъ можетъ быть, безъ непосредственнаго измѣренія, опредѣленъ по размѣрамъ остальныхъ трехъ угловъ.

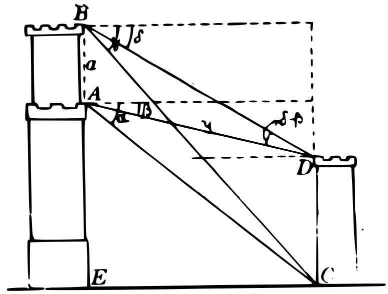
Требуется вывести уравненіе для такого вычисленія угла δ^0 по угламъ α, β и γ^0 и примѣнить его къ частному случаю, когда $d=25$; $\alpha^0=71^0 12'$; $\beta^0=54^0 12'$ и $\gamma^0=57^0$, а затѣмъ для провѣрки вычислить два изъ рѣшеній предыдущей задачи.

Указаніе. Изъ ур-ія, составленнаго изъ 2-хъ рѣшеній предыдущей задачи, $\dfrac{d\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\gamma+\delta}{2}\right)}=\dfrac{d\sin\gamma\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}$, посредствомъ соотвѣтствующихъ преобразованій получаемъ для опредѣленія δ новое ур-іе:

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{\sqrt{8}\,.\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin(45^\circ-\varphi)}{\sin\gamma\,.\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\varphi},$$ при чемъ вспомогательный уголъ φ^0 опредѣляется изъ ур-ія

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\gamma\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

74. Находясь на одной башнѣ BE (*черт.* 36), хотѣли опредѣлить высоту (x) другой башни DC, расположенной вдали, и для этого дѣлали измѣренія, при чемъ оказалось, что съ площадки A первой башни основаніе и верхушка второй башни были видны подъ углами пониженія въ α и β^0 ($\alpha>\beta$), съ другой же площадки B, находившейся на той же первой башнѣ на a фут. выше площадки A, тѣ же точки были видны подъ углами пониженія γ и δ^0 ($\gamma>\delta$). Вычислить высоту 2-ой башни, если $a=56{,}5$; $\alpha^0=35^0 18' 16''$; $\beta^0=19^0 30'$; $\gamma^0=39^0 48'$ и $\delta^0=25^0 36'$.



Черт. 36.

75. Вывести формулу для опредѣленія одного изъ четырехъ угловъ, данныхъ въ предыдущей задачѣ, по остальнымъ тремъ.

Главы XX—XXI.—Радіальное измѣреніе угловъ и вычисленіе значеній тригоном. величинъ.

1. Выразить въ радіанахъ углы, содержащіе: a) 15^0; b) 10^0; c) 40^0; d) 75^0; e) $22^0 30'$; f) 120^0; g) 150^0; h) 100^0. При вычисленіи принимать, что $\pi=3{,}1416$ съ точностью до половины $\frac{1}{10000}$ съ избыткомъ.

2. Формулы приведенія 1) къ дополнительному, 2) къ пополнительному углу и 3) къ избытку, выведенныя въ учебникѣ при градусномъ значеніи угловъ, написать при радіальномъ значеніи этихъ угловъ.

3. Опредѣлить градусное значеніе угла, если его радіальное значеніе равно: a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\frac{\pi}{9}$; c) $\frac{3\pi}{5}$ и d) $\frac{5}{6}\pi$.

4. То же, если радіальное значеніе угла равно: a) 1,5708; b) $\frac{1}{2}$; c) 2; d) $1\frac{1}{2}$. ($\pi=3{,}1416$).

5—6 Пользуясь между прочимъ таблицами проф. Глазенапа (стр. 107), рѣшить задачи:

5. Выразить въ радіанахъ углы, содержащіе: a) $37^{0}30'$; b) $25^{0}10'$; c) $80^{0}20'$; d) $114^{0}35'30''$, e) $38^{0}29'37''$.

6. Выразить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ углы, радіальныя значенія которыхъ равны: a) 1,431 17; b) 0,745 2556; c) 1,550 0850; d) 2,597 3578.

7. Вычислить $\sin 10'$ и опредѣлить предѣлъ допущенной при этомъ погрѣшности.

8. При помощи формулъ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

$$\text{и } \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$$

вычислить $\sin 28^{0}$ и $\cos 28^{0}$ съ точностью до 0,001, а результатъ сравнить съ данными таблицъ.

Часть II.—Гоніометрія.

Глава XXII.—**Расширеніе понятій объ углѣ и о тригонометрическихъ функціяхъ.**

1. Опредѣлить, въ какой четверти оканчиваются углы, содержащіе 150^0; 230^0; $295^0 18'$; -135^0; -150^0; -200^0.

2. То же относительно угловъ, содержащихъ 2275^0; 4548^0; -1275^0; -5275^0.

3. Опредѣлить, въ какихъ четвертяхъ оканчиваются углы, радіальное значеніе которыхъ равно: a) $\frac{2}{3}\pi$; b) $\frac{5}{6}\pi$; c) $\frac{7}{4}\pi$; d) $2\frac{1}{4}\pi$; e) $3\frac{1}{3}\pi$; f) $-\frac{\pi}{3}$; g) $-1\frac{1}{4}\pi$.

4. Какія гоніом. функціи угла α^0 имѣютъ отрицательное значеніе при $\alpha=120^0$, а какія—положительное?

5. То же при $\alpha=240^0$?

6. То же при $\alpha=1270^0$?

7. То же при $\alpha=-250^0$?

8. То же при $\alpha=-1340^0$?

9. Сказать, если это возможно, въ какой четверти оканчивается уголъ, для котораго значенія гоніом. функцій имѣютъ слѣдующіе знаки ($\mp$):

a) sin знакъ —, и cos —; b) tg +, a sin —; c) cos +, и sec +; d) cos —, a sec +; e) tg —, a ctg +; f) cos —, a ctg +.

10. Сказать, въ какой четверти оканчивается уголъ φ^0, если 1) дробь $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\varphi}<0$; 2) если $\frac{\cos\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}>0$; 3) если $\frac{\cos\varphi}{\operatorname{ctg}\varphi}<0$ и 4) если $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{ctg}\varphi}<0$.

11. Измѣняется ли при измѣненіи угла φ^0 знакъ произведенія: 1) $\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}\varphi$; 2) $\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi$; 3) $\sec\varphi\cos\varphi$? Если измѣняется, то какъ?

Глава XXIII.—Обобщеніе формулъ соотношенія между значеніями гоніом. функцій одного и того же угла.

1. Зная, что уголъ α^0 оканчивается въ III четверти и что $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, вычислить значенія всѣхъ остальныхъ гоніом. функцій этого угла.

2. Зная, что уголъ α^0 оканчивается въ IV четверти и что $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$, вычислить значенія всѣхъ остальныхъ гоніом. функцій этого угла.

3. Что дѣлается съ абсолютной величиной значенія $\cos\alpha$, если уголъ α^0 измѣняется такъ, что $\sin\alpha$ по абсолютной величинѣ увеличивается?

4. Что дѣлается съ абсолютной величиной $\operatorname{tg}\alpha$ при увеличеніи абсолютной величины $\sin\alpha$? Что быстрѣе увеличивается: $\sin\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha$?

Глава XXIV.—Формулы приведенія гоніометрическихъ функцій.

1. Привести къ углу α^0: $\sin(180^0-\alpha)$; $\sin(\alpha-180^0)$; $\operatorname{tg}(\alpha-270^0)$; $\cos(\alpha-90^0)$; $\operatorname{ctg}(\alpha-360^0)$; $\sin(\alpha-360^0)$; $\cos(\alpha-270^0)$.

2. Привести къ углу x: $\sin(\pi-x)$; $\cos(\pi+x)$; $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)$; $\operatorname{tg}(x-2\pi)$; $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$.

3. Привести къ наименьшему положительному углу: $\sin 280^0$; $\cos 350^0$; $\sin 425^0$; $\operatorname{tg} 1080^0$; $\operatorname{ctg} 500^0$; $\sin 3750^0$.

4. Привести къ наименьшему положительному углу: $\sin(-300^0)$; $\cos(-520^0)$; $\operatorname{tg}(-4500^0)$; $\operatorname{ctg}(-3260^0)$.

5—8. Наглядно убѣдиться въ справедливости формулъ:

5. $\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$, при $\alpha=240^0$.

6. $\cos(180^0+\alpha)=-\cos\alpha$, при $\alpha=300^0$.

7. $\sin(270^0-\alpha)=-\cos\alpha$, при $\alpha=300^0$.

8. $\cos(90^0+\alpha)=-\sin\alpha$, при $\alpha=-120^0$.

9—11. Упростить выраженія:

9. $$\frac{\sin(270^0-\alpha)\operatorname{tg}(-\beta)}{\operatorname{tg}(180^0+\beta)\cos(180^0+\alpha)}+\frac{\operatorname{ctg}(\alpha-270^0)\sin(\beta-90^0)}{\cos(180^0+\beta)\operatorname{tg}(-\alpha)}.$$

10. $$\frac{\operatorname{tg}(\pi-x)\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)}{\operatorname{ctg}(\pi+x)\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)}.$$

11. $$\frac{\sin(x-2\pi)\,\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\operatorname{tg}\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)\operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi\,.\cos(-\pi-x)}.$$

12. Найти по таблицамъ значеніе: $\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi$; $\operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi$; $\cos\frac{3}{2}\pi$; $\sin\frac{5}{6}\pi$; $\operatorname{tg}\frac{7}{4}\pi$; $\operatorname{ctg}\frac{11}{6}\pi$.

Глава XXV.—**Распространеніе формулъ преобразованія триг. выраженій на любые размѣры угловъ.**

1. Исходя изъ того, что $\cos 120^0 = -\frac{1}{2}$, вычислить sin и $\cos 60^0$ $\left(\text{по формуламъ для } \sin\frac{\alpha}{2} \text{ и } \cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

2. Зная, что $\cos 240^0 = -\frac{1}{2}$, вычислить sin и $\cos 120^0$.

3. Зная, что $\sin 390^0 = \frac{1}{2}$, вычислить sin и $\cos 195^0$.

4. Зная, что $\sin 600^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, вычислить sin и $\cos 300^0$.

Глава XXVI.—**Задачи на изслѣдованіе функціональной зависимости.**

1—4. Упростить выраженія:

1. $a\cos 270^0 - b\sin 90^0 + c\operatorname{ctg} 90^0$.

2. $\cos 180^0 \sin 270^0 + 2\sin 180^0 \operatorname{ctg} 270^0$.

3. $a^2\cos 360^0 - b^2\sin 270^0 - ab\cos 180^0 + ab\cos 0$.

4. $c^2\sin\pi - 2cd\cos\frac{3\pi}{2} + d^2\sin\frac{3}{2}\pi\cos 2\pi$.

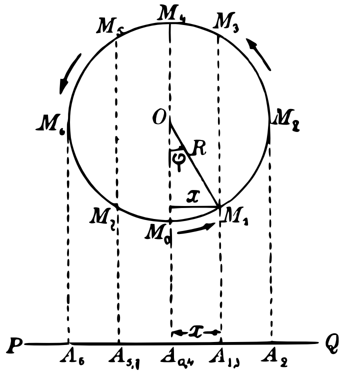
5—11. Возможно ли каждое изъ слѣдующихъ равенствъ? Если возможно, то опредѣлить, въ какой четверти оканчивается уголъ φ^0?

5. $4-\sin\varphi=4{,}25$; 6. $4-\sin\varphi=5{,}25$; 7. $1+\cos\varphi=2$.

8. $1-\cos\varphi=2$; 9. $1+\cos\varphi=-0{,}75$; 10. $1+\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{4}$.

11. $\sin\varphi+\cos\varphi=-0{,}25$.

12. Точка M движется равномѣрно по окружности радіуса R ед. дл. (*черт.* 37), въ направленіи, указанномъ стрѣлкой, и совершаетъ полный оборотъ въ періодъ времени T сек. Ея проекція A на нѣкоторую прямую PQ также, конечно, передвигается по этой прямой. Въ началѣ движенія точка M находится въ положеніи M_0, а ея проекція въ положеніи A_0 (при чемъ центръ O и точки M_0 и A_0 лежатъ на одной прямой). Опредѣлить положеніе проекціи движущейся точки M черезъ t сек. послѣ начала движенія (т. е. опредѣлить ея разстояніе (x) отъ A_0) и прослѣдить затѣмъ, какъ измѣняется это разстояніе при непрерывномъ измѣненіи t. Равномѣрно ли движется точка A?



Черт. 37.

13. Полагая въ предыдущей задачѣ, что $T=1$ (сек.), опредѣлить x при $t=\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 1; 2; $2\frac{5}{6}$; $15\frac{3}{8}$ . . .

14—16. Какъ измѣняется функція y при измѣненіи угла φ^0 отъ 0 до 360^0, если:

14. $y=1+\cos\varphi$. 15. $y=1+\sin\varphi$. 16. $y=1-\sin\varphi$.

Указаніе къ зад. 14—16. Предварительно преобразовать данныя выраженія.

17. Колесо, радіуса R фут., вращается около горизонтальной оси съ равномѣрной скоростью 1^0 въ секунду (по направленію движенія часовой стрѣлки). Колесо въ наивысшей своей точкѣ касается горизонтально расположенной неподвижной доски. На какомъ разстояніи (x) отъ доски будетъ находиться первоначальная точка касанія колеса черезъ t секундъ послѣ начала вращенія? ($R=1$; $t=2$ ч. 33 м. 36 сек.).

18. Прослѣдить измѣненіе искомаго въ предыдущей задачѣ разстоянія (x) при измѣненіи промежутка времени t сек. отъ 0 до 90 сек. и далѣе до 180, 270, 360 и т. д. сек.

Задачи на нахожденіе наибольшаго и наименьшаго значенія функцій.

19. Пусть $y=\sin\varphi\cos\varphi$ *). Прослѣдить измѣненіе этой функ-

*) Во всѣхъ задачахъ этого отдѣла (зад. 19—48) буквой φ или x обозначено число градусовъ или радіановъ въ томъ углѣ, который разсматривается, какъ независимое перемѣнное каждой данной функціи, буквой же a, и вообще начальными буквами греческаго или латинскаго алфавита,—постоянныя количества.

ціи при измѣненіи φ въ предѣлахъ отъ 0 до 45^0, а потомъ отъ 45 до 90^0. Опредѣлить, при какомъ значеніи φ значеніе y будетъ наибольшимъ и при какомъ наименьшимъ. Также найти эти значенія y.

Указаніе. Предварительно преобразовать выраженіе y.

20. То же для функціи $y=\sin\varphi+\cos\varphi$.

Указаніе. $y=\sin\varphi+\cos\varphi=\sqrt{2}\cos(\varphi-45^0)$.

21. То же и для той же функціи $y=\sin\varphi+\cos\varphi$, но при измѣненіи φ^0 отъ 90 до 135^0 и далѣе до 180^0.

22. $y=\sin\varphi-\cos\varphi$. Какъ измѣняется y при измѣненіи φ^0 въ предѣлахъ отъ 0 до 90^0?

23. $y=\sin\varphi-\cos\varphi$. Какъ измѣняется y при измѣненіи φ^0 отъ 90 до 135^0, а затѣмъ отъ 135 до 180^0?

24. $y=\sin\varphi+\sin(\varphi-\alpha)$. При какомъ значеніи φ значеніе y будетъ наибольшимъ? Найти это наибольшее значеніе y.

25. $y=\sin\varphi+c\cos\varphi$. Опредѣлить наибольшее значеніе y.

Указаніе. Прежде всего представить c въ видѣ $\operatorname{tg}\alpha$, гдѣ уголъ α^0—вспомогательный, а потомъ преобразовать выраженіе y въ $y=\dfrac{\sin(\varphi+\alpha)}{\cos\alpha}$.

26. $y=\cos\varphi-c\sin\varphi$. Опредѣлить наибольшее значеніе y.

27. То же для $y=\sin\varphi-c\cos\varphi$.

28. То же для $y=\sin\varphi\cos(\alpha+\varphi)$.

Указаніе. Представить y прежде всего въ видѣ
$y=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+2\varphi)-\cos\alpha]$ (см. зад. 63—66 гл. XVIII).

29. То же для $y=\sin\varphi\cos(\alpha-\varphi)$.

30. То же для $y=\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)$.

31. То же для $y=\sin\varphi\sin(\alpha+\varphi)$.

32. $y=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\varphi}{2}$. Опредѣлить наибольшее значеніе y.

Рѣшеніе. Преобразуемъ выраженіе y слѣдующимъ образомъ

$$y=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\varphi}{2}=\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\alpha+\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\alpha+\varphi}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)-\sin\frac{\alpha}{2}\right]}{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\right]}.$$

(см. зад. 63—66 гл. XVIII).

$$\text{Далѣе } y=\frac{1-\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)}}{1+\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)}}.$$

Отсюда видно, что при возрастаніи положительнаго значенія $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)$ значеніе y будетъ тоже возрастать, такъ какъ числитель полученной для y дроби будетъ при этомъ увеличиваться, а знаменатель уменьшаться. Значитъ y будетъ имѣть наибольшее значеніе при наибольшемъ же значеніи $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)$, т. е. когда $\frac{\alpha}{2}+\varphi=90^0$, или $\varphi=90^0-\frac{\alpha}{2}$. Отсюда max. $y=\operatorname{tg}^2\left(45^0-\frac{\alpha}{4}\right)$.

33. $y=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\varphi}{2}$. Опредѣлить наименьшее значеніе y.

Указаніе. Сравнить съ выраженіемъ y въ предыдущей задачѣ.

34. Вершина $\triangle$-ка находится въ центрѣ даннаго круга радіуса R дм., а основаніемъ его служитъ хорда этого круга. Какой уголъ долженъ быть при вершинѣ $\triangle$-ка для того, чтобы площадь его была наибольшей?

Указаніе. Выразить площадь $\triangle$-ка черезъ искомый уголъ φ и данный радіусъ (R) и слѣдить за ея измѣненіемъ при измѣненіи φ.

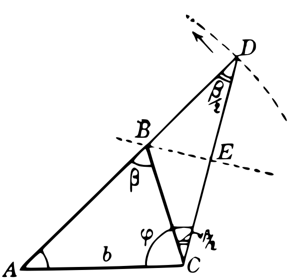
35. При какомъ углѣ между данными діагоналями параллелограма онъ имѣетъ наибольшую площадь? Какую форму имѣетъ параллелограмъ въ этомъ случаѣ?

Указаніе. См. зад. 73 гл. XIII—XV.

36. Какую форму имѣетъ параллелограмъ, имѣющій наибольшую площадь при данной длинѣ (a) одной изъ его сторонъ и (d) одной изъ діагоналей.

37. Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ одно и то же данное основаніе (b) и одну и ту же данную сумму (m) двухъ остальныхъ сторонъ, выбрать $\triangle$-къ съ наибольшимъ угломъ противъ основанія.

Указаніе. Рѣшить предварительно извѣстную геом. задачу на по-



Черт. 38.

строеніе тр-ка по основанію (b), по суммѣ (m) двухъ остальныхъ сторонъ и по какому-нибудь углу при основаніи (см. *черт.* 38); затѣмъ, составивъ изъ полученнаго при этомъ вспомогат. $\triangle$-ка ADC ур-іе $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{b\sin\varphi}{m}$, слѣдить за измѣненіемъ β при измѣненіи φ.

38. Въ кругѣ O, съ радіусомъ R mm., проведенъ радіусъ OA и на немъ отложенъ отрѣзокъ OB, равный a mm., при чемъ $a<R$. Опредѣлить наибольшій изъ вписанныхъ въ этотъ кругъ угловъ (φ), опирающихся на отрѣзокъ OB.

39. Вписанъ въ кругъ даннаго радіуса (R) прямоугольникъ. Пусть одна изъ его діагоналей остается неподвижной, а другая вращается около точки ихъ пересѣченія. При какомъ углѣ (φ^0) между діагоналями периметръ (P) и площадь (Q) прямоугольника будутъ наибольшими? Опредѣлить также max. P и max. Q. Какой формы тогда будетъ прямоугольникъ?

40. Изъ всѣхъ вписанныхъ въ данный кругъ угловъ, равныхъ каждый α^0, выбрать такой, у котораго сумма образующихъ его хордъ наибольшая.

41. На дугѣ даннаго кругового сектора выбрать точку такъ, чтобы сумма хордъ, проведенныхъ изъ нея къ концамъ крайнихъ радіусовъ сектора, была наибольшей.

42. На дугѣ даннаго кругового сектора выбрать точку такъ, чтобы прямоугольникъ, построенный на двухъ хордахъ, проведенныхъ изъ этой точки къ концамъ крайнихъ радіусовъ сектора, имѣлъ наибольшую площадь.

43. Въ данный круговой секторъ вписать прямоугольникъ такъ, чтобы двѣ его стороны были параллельны биссектрисѣ центральнаго угла сектора и чтобы при этомъ площадь его была наибольшей.

Указаніе. Предположивъ, 1) что одна изъ тѣхъ двухъ сторонъ искомаго прям-ка, которыя перпендикулярны къ упомянутой биссектрисѣ центральнаго угла, стягиваетъ дугу φ^0, 2) что радіусъ сектора$=R$ ед. дл., а центральный его уголъ—α^0, выразить по этимъ обозначеніямъ площадь (Q) разсматриваемаго прямоуг-ка, и затѣмъ изслѣдовать измѣненіе Q при измѣненіи φ.

44. Данъ уголъ BAC, равный α^0, и между его сторонами взята точка, отстоящая отъ нихъ на данныхъ разстояніяхъ a и b mm. Въ какомъ направленіи черезъ эту точку надо провести прямую линію между сторонами угла такъ, чтобы на отрѣзкахъ ея можно было построить прямоугольникъ съ наименьшей площадью?

45. Основаніе $\triangle$-ка равно a ед. дл., а противолежащій ему уголъ—α^0. Опредѣлить maximum площади $\triangle$-ка (Q), а также maxim.

его периметра (P) при измѣненіи одного изъ остальныхъ угловъ этого $\triangle$-ка. Какой формы тогда будетъ этотъ $\triangle$-къ?

Указаніе. Разсматривать $\triangle$-къ вписаннымъ въ кругъ.

46. Въ круговой секторъ AOB, даннаго радіуса (R) и съ даннымъ угломъ α^0 при центрѣ, вписанъ параллелограмъ $CODM$ такъ, что уголъ O сектора служитъ однимъ изъ угловъ парал—ма, а вершина противолежащаго угла M лежитъ на дугѣ сектора. При какомъ положеніи вершины M площадь (Q) параллелограма будетъ наибольшей? Опредѣлить также max. Q.

47. Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ данный периметръ ($2p$) и одинъ данный уголъ α^0, выбрать такой, у котораго площадь (Q) наибольшая.

Указаніе. Воспользоваться рѣшеніемъ задачъ № 19 гл. XIX и 32 настоящей главы XXVI.

48. Изъ всѣхъ $\triangle$-ковъ, описанныхъ около даннаго круга и имѣющихъ одинъ данный уголъ α^0, выбрать такой, периметръ котораго былъ бы наименьшимъ.

Указаніе. Предположивъ, что радіусъ даннаго круга$=r$ ед. дл. и что одинъ изъ перемѣнныхъ угловъ $\triangle$-ка равенъ φ^0, опредѣлить по r, φ и α периметръ $\triangle$-ка и затѣмъ слѣдить за его измѣненіемъ при измѣненіи φ. При этомъ воспользоваться рѣшеніемъ зад. 45 гл. XIX и 33 настоящей главы.

Раскрытіе неопредѣленности тригонометрическихъ выраженій.

$$\left(\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\,.\,\infty \text{ и } \infty-\infty\right).$$

49. Отрѣзокъ AB (*черт.* 39), длина котораго равна a ед. дл., вращается вокругъ оси XY, отстоящей отъ конца A даннаго отрѣзка на разстояніи AO, равномъ R ед. дл., при чемъ $\angle BAO=\alpha^0$.

Извѣстно, что поверхность, получаемую отъ упомянутаго вращенія отрѣзка AB, можно выразить слѣдующей формулой:

$$S_{(AB)}=2\pi\rho h\ ^{*})$$

(гдѣ $S_{(AB)}$ выражаетъ эту искомую поверхность, ρ—длину перпендикуляра MN, возставленнаго къ образующему отрѣзку AB изъ его середины до пересѣченія съ осью, а h—проекцію OO_1 того же отрѣзка AB на ось XY).

Прослѣдить измѣненіе элементовъ ρ и h сперва при уменьшеніи угла α^0 до 0, а потомъ при увеличеніи α^0 до 180^0.

Затѣмъ, раскрыть неопредѣленность выраженія упомянутой поверхности, получающуюся какъ при $\alpha=0$, такъ и при $\alpha=180^0$.

---

*) См., наприм., Геометрію А. Давидова (§ 292) или А. Киселева (§ 446).

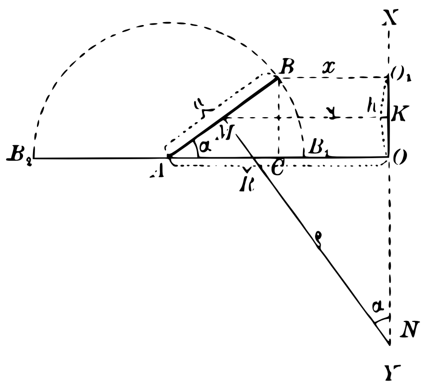
Рѣшеніе. Имѣемъ формулу

$$S = 2\pi\rho h \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

гдѣ ρ выражаетъ длину MN (*черт.* 39), а h—длину OO_1.

Изъ чертежа видно, что, если уголъ α^0 будетъ уменьшаться до 0 (или увеличиваться до 180^0), то линейный элементъ ρ будетъ неограниченно увеличиваться; а h—уменьшаться до 0, и потому при $\alpha=0$ (или 180^0), т. е. когда AB займетъ положеніе AB_1 (или AB_2), выраженіе S приметъ видъ неопредѣленности

$$S = 2\pi \, . \, \infty \, . \, 0.$$



Черт. 39.

Но очевидно, что эта неопредѣленность только кажущаяся, такъ какъ и при этомъ, перпендикулярномъ къ оси, положеніи отрѣзка AB, поверхность, образуемая при его вращеніи, будетъ имѣть вполнѣ опредѣленные размѣры, именно она будетъ представлять изъ себя площадь кругового кольца. Требуется теперь раскрыть истинное значеніе этой кажущейся неопредѣленности.

Съ этой цѣлью выразимъ прежде всего элементы ρ и h черезъ перемѣнное количество α и черезъ постоянныя a и R. А для того, чтобы получить нужные для этого $\triangle$-ки, опустимъ изъ точекъ M и B перпендикуляры MK и BO_1 на ось XY, а также изъ B—перпендикуляръ BC на AO.

Пусть длина $BO_1=x$ ед. дл., и $MK=y$ ед. дл.; $\angle MNK = \angle BAC = \alpha^0$, какъ углы съ соотв. перпендикулярными сторонами.

Тогда изъ $\triangle$ MNK: $\qquad \rho = \dfrac{y}{\sin\alpha}$,

но такъ какъ, по свойству средней линіи трапеціи, $y = \dfrac{R+x}{2}$, то $\rho = \dfrac{R+x}{2\sin\alpha}$. Далѣе, такъ какъ $BO_1=CO$, то $AC=(R-x)$ ед. дл.; изъ тр-ка же ABC: $R-x=a\cos\alpha$, такъ что $x=R-a\cos\alpha$.

Подставляя это въ выраженіе ρ, получимъ:

$$\rho = \frac{2R-a\cos\alpha}{2\sin\alpha} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B).$$

Далѣе, $OO_1 = BC$; поэтому изъ $\triangle\ ABC$:

$$h = a \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (C).$$

Подставляя теперь выраженія (B) и (C) въ формулу (A), имѣемъ:

$$S = \frac{2\pi\,(2R - a\cos\alpha)}{2\sin\alpha} \cdot a\sin\alpha \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{I}).$$

$$\text{или } S = \frac{2\pi a\,(2R - a\cos\alpha)\sin\alpha}{2\sin\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{II}).$$

Если теперь мы по-прежнему будемъ измѣнять уголъ α^0 до 0, или обратно до 180^0, то при $\alpha = 0$ и 180^0 значеніе S приметъ видъ неопредѣленности:

I выраженіе: $S = \infty \cdot 0$

II выраженіе: $S = \frac{0}{0}$.

Но, очевидно, это происходитъ отъ того, что въ полученномъ для S выраженіи одно и то же количество, $\sin\alpha$ входитъ множителемъ и дѣлителемъ, при чемъ это количество при $\alpha = 0$ или 180^0 обращается въ 0; между тѣмъ ясно, что измѣненіе $\sin\alpha$ не вліяетъ на значеніе S, такъ какъ $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}$ при всѣхъ значеніяхъ α равно 1. Слѣдовательно, мы найдемъ истинное значеніе S при $\alpha = 0$ и 180^0, если до подстановки сократимъ полученную для S дробь (II) на $2\sin\alpha$.

$$S = \pi a\,(2R - a\cos\alpha),$$

и тогда 1) при $\alpha = 0$, $S = \pi a\,(2R - a)$,

и 2) при $\alpha = 180^0$, $S = \pi a\,(2R + a)$,

чѣмъ задача и рѣшена.

50—70. Раскрыть кажущуюся неопредѣленность значеній слѣдующихъ функцій при указанномъ предѣльномъ значеніи ихъ аргумента:

50. $\left[\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]_{\alpha=180^0}$.

51. $\left[\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]_{\alpha=0}$.

52. $\left[\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right]_{\alpha=270^0}$.

53. $\left[\frac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]_{\alpha=180^0}$.

54. $\left[\frac{1-\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right]_{\alpha=90^0}$.

55. $\left[\frac{1+\cos 2\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}\right]_{\alpha=90^0}$.

56. $\left[\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right]_{\alpha=45^0}$.

57. $\left[\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\sec\alpha}\right]_{\alpha=180^0}$.

58. $\left[\frac{1-\cos\alpha}{\sec\alpha-1}\right]_{\alpha=0}$.

59. $\left[\frac{4\cos^2\alpha-1}{\sin(60^0-\alpha)}\right]_{\alpha=60^0}$.

60. $\left[\dfrac{\cos\alpha+\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\right]_{\alpha=180^0}$ **61.** $\left[\dfrac{\cos 3\alpha}{\sin(\alpha-30^0)}\right]_{\alpha=30^0}$.

Указаніе къ зад. 61. Преобразовывать только числитель.

62. $[\operatorname{tg}\alpha\sin 2\alpha]_{\alpha=90^0}$. **63.** $[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha]_{\alpha=90^0}$.

64. $[\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha]_{\alpha=270^0}$. **65.** $\left[\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}$.

66. $\left[\dfrac{\cos x-\cos\dfrac{\pi}{4}}{\cos 2x}\right]_{x=\frac{\pi}{4}}$.

Указаніе. Представить $\cos 2x$ въ видѣ $2\left[\cos^2x-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$ и послѣ преобразованія сократить дробь на $\cos x-\cos\dfrac{\pi}{4}$.

67. $\left[\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}\right]_{y=-x}$.

Рѣш. $\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}=\dfrac{2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}{x+y}=\cos\dfrac{x-y}{2}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{x+y}{2}}{\dfrac{x+y}{2}}$.

Такъ какъ предѣлъ $\dfrac{\sin\dfrac{x+y}{2}}{\dfrac{x+y}{2}}$, при неограниченномъ уменьшеніи $\dfrac{x+y}{2}$, равенъ 1, то

$$\left[\cos\frac{x-y}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{x+y}{2}}{\dfrac{x+y}{2}}\right]_{y=-x}=\cos\frac{x+x}{2}\cdot 1=\cos x.$$

68. $\left[\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}\right]_{y=x}$. 69. $\left[\dfrac{\cos x-\cos y}{x-y}\right]_{y=x}$.

70. $\left[\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^2}\right]_{x=0}$. **71.** $\left[\dfrac{\sin a-\sin(a-x)}{x}\right]_{x=0}$.

Глава XXVII.—Обратныя круговыя функціи и ихъ многозначность.

1—5. Построить углы по слѣдующимъ значеніямъ ихъ гоніометрическихъ функцій:

1. $\varphi=\text{arc}\sin\frac{3}{4}$. 2. $\varphi=\text{arc}\cos\left(-\frac{3}{4}\right)$. 3. $\varphi=\text{arc}\,\text{tg}\,2$.

4. $\varphi=\text{arc}\sec(-2)$. 5. $\varphi=\text{arc}\,\text{ctg}\,\frac{3}{4}$.

6—11. Написать общія выраженія всѣхъ значеній слѣдующихъ функцій (какъ въ градусахъ, такъ и въ радіанахъ):

6. $x=\text{arc}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$. 7. $x=\text{arc}\cos\frac{1}{2}$. 8. $x=\text{arc}\,\text{tg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. $x=\text{arc}\sec\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 10. $x=\text{arc}\sin\frac{3}{4}$. 11. $x=\text{arc}\,\text{ctg}\,0{,}6$.

12. Сколько различныхъ выраженій можетъ имѣть $\sin\frac{x}{2}$, какъ функція отъ $\sin x$? Другими словами: сколько различныхъ значеній можетъ имѣть $\sin\frac{x}{2}$ при каждомъ данномъ значеніи $\sin x$, въ зависимости отъ того или другого значенія угла x?

Рѣшеніе. Положимъ, что $\sin x=m$. Это уравненіе будетъ удовлетворяться различными значеніями x, которыя, какъ извѣстно, распадаются на двѣ группы:

$$\text{I.}\quad x=2n\pi+x_0$$
$$\text{и II.}\quad x=(2n+1)\pi-x_0,$$

гдѣ x_0 есть одно опредѣленное (напримѣръ, положительное, наименьшее) изъ всѣхъ значеній x, удовлетворяющихъ ур-ію $\sin x=m$, а n—какое-угодно цѣлое число, положительное или отрицательное.

Тогда всѣ значенія $\sin\frac{x}{2}$ также распадаются на двѣ группы:

$$\text{I.}\ \sin\frac{x}{2}=\sin\left(n\pi+\frac{x_0}{2}\right)$$
$$\text{и II.}\ \sin\frac{x}{2}=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{x_0}{2}\right).$$

Въ каждой изъ этихъ группъ $\sin\frac{x}{2}$ будетъ имѣть различныя значенія въ зависимости отъ того, будетъ ли n числомъ четнымъ, или нечетнымъ.

Такъ, если $n=2k$, то

$$\text{I.}\ \sin\frac{x}{2}=\sin\left(2k\pi+\frac{x_0}{2}\right)=\sin\frac{x_0}{2}.$$

$$\text{и II.}\ \sin\frac{x}{2}=\sin\left[2k\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x_0}{2}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x_0}{2}\right)=\cos\frac{x_0}{2}.$$

Если же $n=2k+1$, то

$$\text{I. } \sin\frac{x}{2}=\sin\left(2k\pi+\pi+\frac{x_0}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{x_0}{2}\right)=-\sin\frac{x_0}{2}.$$

$$\text{и II. } \sin\frac{x}{2}=\sin\left(2k\pi+\frac{3}{2}\pi-\frac{x_0}{2}\right)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{x_0}{2}\right)=-\cos\frac{x_0}{2}.$$

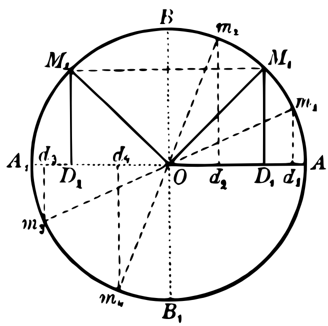
Итакъ, для каждаго даннаго значенія $\sin x$, функція $\sin\frac{x}{2}$ можетъ имѣть 4 различныхъ значенія, которыя попарно равны по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку.

Пояснимъ это на примѣрѣ. Пусть $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда уголъ φ^0 можетъ имѣть, напримѣръ, такія значенія:

	$\varphi^0=45^0$	135^0	405^0	495^0	765^0	855^0	и т. д.
слѣдов.,	$\frac{\varphi^0}{2}=22^1/_2{}^0$	$67^1/_2{}^0$	$202^1/_2{}^0$	$247^1/_2{}^0$	$382^1/_2{}^0$	$427^1/_2{}^0$	и т. д.
такъ что	$\sin\frac{\varphi}{2}=\sin 22^1/_2{}^0$	$\cos 22^1/_2{}^0$	$-\sin 22^1/_2{}^0$	$-\cos 22^1/_2{}^0$	$\sin 22^1/_2{}^0$	$\cos 22^1/_2{}^0$	и т. д.

т. е. первыя четыре значенія $\sin\frac{\varphi}{2}$ различны, а 5-ое равно 1-му, 6-ое—2-му и т. д.; итакъ, различныхъ значеній $\sin\frac{\varphi}{2}$, при



Черт. 40.

условіи, что $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, имѣетъ четыре. Предоставляемъ учащимся пояснить этотъ примѣръ на *чертежѣ* 40.

13. Выразить $\sin\frac{\varphi}{2}$ черезъ $\sin\varphi$ и примѣнить полученную формулу для случая, когда: 1) $\varphi^0=30^0$; 2) $\varphi=150^0$; 3) $\varphi=390^0$ и 4) $\varphi=510^0$.

Указаніе. Рѣшать относительно $\sin\frac{\varphi}{2}$ слѣдующую систему ур-ій: $2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=\sin\varphi$ и $\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}=1$.

14. Сколько различныхъ выраженій могутъ имѣть $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$, какъ функціи отъ $\cos x$?

15. Сколько различныхъ выраженій можетъ имѣть $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, какъ функція отъ $\operatorname{tg} x$?

16. Сколько различныхъ выраженій можетъ имѣть каждая изъ 6 тригонометрическихъ величинъ угла x, какъ функція отъ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$?

Рѣшеніе. Пусть $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=m$; тогда $\frac{x}{2}=k\pi+\frac{x_0}{2}$, гдѣ $\frac{x_0}{2}$ есть одно изъ рѣшеній ур-ія $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=m$, а потому $x=2k\pi+x_0$, такъ что $\sin x=\sin(2k\pi+x_0)=\sin x_0$, при всякомъ цѣломъ значеніи k; $\cos x=\cos x_0$, тоже при всякомъ цѣломъ значеніи k; и т. д.

Отвѣтъ. Только по одному, т. е. каждая тригоном. функція угла x можетъ быть представлена, какъ однозначная функція отъ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

17. Выразить всѣ тригонометрическія функціи угла x черезъ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Рѣшеніе. Намъ достаточно будетъ выразить черезъ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ только $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, такъ какъ тогда легко будетъ выразить и соотвѣтственно обратныя имъ функціи $\csc x$, $\sec x$ и $\operatorname{ctg} x$. Выразимъ прежде всего $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ вообще черезъ тригоном. функціи угла $\frac{x}{2}$.

1) $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; 2) $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ и

$$3)\quad \operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Раздѣлимъ правыя части первыхъ двухъ формулъ на выраженіе $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}$, равное 1, а затѣмъ раздѣлимъ числитель и знаменатель каждой изъ полученныхъ дробей на $\cos^2\frac{x}{2}$.

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \csc x = \frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \sec x = \frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \mathrm{ctg}\, x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$$

Такимъ образомъ, изъ рѣшенія задачъ 16 и 17 видимъ, что **всѣ гоніом. функціи даннаго угла могутъ быть выражены черезъ tg половины этого угла, притомъ раціонально и однозначно.**

18. Сколько различныхъ выраженій можетъ имѣть $\cos\frac{x}{4}$, какъ функція отъ $\cos x$?

19. Сколько различныхъ выраженій можетъ имѣть $\sin\frac{3}{2}x$, какъ функція отъ $\sin x$?

20. Сколько различныхъ выраженій можетъ имѣть $\cos\frac{3}{2}x$, какъ функція отъ $\cos x$?

21. Доказать, что формула $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, выведенная при рѣшеніи задачи 31 гл. XVII, справедлива и относительно знаковъ ($\pm$), т. е. показать, что знакъ $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ всегда совпадаетъ со знакомъ $\sin\alpha$, (такъ какъ, очевидно, знакъ каждой изъ данныхъ дробей отъ знака $\cos\alpha$ не зависитъ. Почему?).

Рѣшеніе. I случай. Пусть $\sin\alpha>0$; *тр. док.*, что и $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}>0$ (?).

Док. Если $\sin\alpha>0$, то $\alpha=180^0.m+(-1)^m\alpha_0$, гдѣ $0<\alpha_0<180^0$.

Тогда $\frac{\alpha}{2}=90^0.m+(-1)^m.\frac{\alpha_0}{2}$, а $0<\frac{\alpha_0}{2}<90^0$.

Здѣсь можетъ быть 2 случая: 1) m—число четное и 2) m—число нечетное. 1) Если $m=2k$, то $\frac{\alpha}{2}=180^0k+\frac{\alpha_0}{2}$, а тогда $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=$

$=\mathrm{tg}\frac{\alpha_0}{2}$, такъ что и $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}>0$, такъ какъ $\frac{\alpha_0}{2}$—уголъ острый.

2) Если $m=2k+1$, то $\frac{\alpha}{2}=180^0k+90^0-\frac{\alpha_0}{2}$, а тогда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$ $=\operatorname{ctg}\frac{\alpha_0}{2}>0$, такъ что и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>0$.

II случай. Пусть $\sin\alpha<0$; *треб. док.*, что и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<0$ (?).

Док. Если $\sin\alpha<0$, то $\alpha=180^0m+(-1)^m\alpha_0$, гдѣ $180^0<\alpha^0<360^0$. Тогда $\frac{\alpha}{2}=90^0.m+(-1)^m.\frac{\alpha_0}{2}$, при чемъ $90^0<\frac{\alpha_0}{2}<180^0$, т. е. уголъ $\frac{\alpha_0}{2}$—тупой. Здѣсь также можетъ быть два случая: 1) $m=2k$ и 2) $m=2k+1$.

1) Если $m=2k$, то $\frac{\alpha}{2}=180^0k+\frac{\alpha_0}{2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2}<0$, такъ что и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<0$.

2) Если $m=2k+1$, то $\frac{\alpha}{2}=180^0m+90^0-\frac{\alpha_0}{2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$ $=\operatorname{ctg}\frac{\alpha_0}{2}<0$, такъ что и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<0$.

Глава XXVIII.—Гоніометрическія уравненія.

1. Рѣшить уравненіе:

$$\sin\varphi+\cos\varphi+\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi+\sec\varphi+\csc\varphi+2=0.$$

Рѣшеніе. Въ данномъ уравненіи искомый уголъ φ входитъ подъ знакомъ каждой изъ 6 тригоном. функцій, а такъ какъ черезъ одну изъ нихъ не всѣ остальныя выражаются раціонально, то при исключеніи функцій угла φ, посредствомъ выраженія ихъ черезъ одну изъ нихъ, будутъ въ уравненіе введены радикалы. А это, какъ извѣстно, неудобно. Между тѣмъ изъ рѣшенія задачи 17 предыдущей главы XXVII извѣстно, что всѣ тригонометрическія функціи даннаго угла черезъ tg половины этого угла выражаются раціонально. Поэтому въ данномъ случаѣ выразимъ въ ур-іи всѣ функціи угла φ черезъ $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Тогда получимъ ур-іе:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}+\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}+$$

$$+\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}+2=0.$$

Для облегченія дальнѣйшихъ преобразованій обозначимъ $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ черезъ x.

$$\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{2x}{1-x^2}+\frac{1-x^2}{2x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}+\frac{1+x^2}{2x}+2=0.$$

Соединимъ отдѣльно 1-ый и 2-ой члены, 3-й и 5-ый, 4-ой и 6-ой, а 7-ой членъ оставимъ пока отдѣльно.

$$\frac{1+2x-x^2}{1+x^2}+\frac{1+2x+x^2}{1-x^2}+\frac{1}{x}+2=0.$$

Послѣ сокращенія второй дроби и соединенія двухъ послѣднихъ членовъ имѣемъ:

$$\frac{1+2x-x^2}{1+x^2}+\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+2x}{x}=0.$$

Послѣ приведенія всѣхъ членовъ ур-ія къ общему знаменателю и послѣ упрощеній получаемъ ур-іе:

$$\frac{1+3x+x^2-x^3}{x(1-x)(1+x^2)}=0.$$

Убѣдившись въ томъ, что дробь въ лѣвой части этого ур-ія несократима, приравниваемъ числитель нулю.

$$1+3x+x^2-x^3=0.$$

Разлагая выраженіе на множители, имѣемъ:

$$(1+x)(1+2x-x^2)=0.$$

Откуда: 1) $1+x=0$, такъ что $x_1=-1$.

1 и 2) $+2x-x^2=0$; $x=1\pm\sqrt{2}$; $x_2=\sqrt{2}+1$;

$x_3=-(\sqrt{2}-1)$.

Такимъ образомъ рѣшеніе даннаго уравненія сводится къ рѣшенію слѣдующихъ 3-хъ простыхъ ур-ій:

1) $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=-1$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{2}+1$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=-(\sqrt{2}-1)$.

Откуда: $\varphi_1=270^0$; $\varphi_2=135^0$; $\varphi_3=315^0$.

Провѣрка. Такъ какъ при рѣшеніи уравненія мы освобождали его отъ знаменателя, содержащаго неизвѣстное, то необходимо сдѣлать провѣрку, посредствомъ подстановки каждаго изъ найденныхъ значеній φ въ первоначально данное ур-іе. Тогда увидимъ, что 2-ой и 3-ій корни несомнѣнно этому ур-ію удовлетворяютъ. Что же касается перваго корня ($\varphi_1=270^0$), то онъ обращаетъ 3-ій и 5-ый члены ур-ія ($\operatorname{tg}\varphi+\sec\varphi$) одинъ въ $+\infty$, а другой въ $-\infty$, такъ что совокупность ихъ принимаетъ видъ неопредѣленности $(\infty-\infty)$.

Раскроемъ истинное значеніе этой неопредѣленности:

$$\operatorname{tg}\varphi+\sec\varphi=\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{2\cos^2\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)}{2\sin\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)}=$$

$$=\operatorname{ctg}\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right).$$

А это выраженіе при $\varphi=270^0$ равно—0, такъ что лѣвая часть даннаго ур-ія

$\sin\varphi+\cos\varphi+(\operatorname{tg}\varphi+\sec\varphi)+\operatorname{ctg}\varphi+\csc\varphi+2$ при $\varphi=270^0$ равна $-1+0 \quad -0+0-1+2=0$, т. е. и при $\varphi_1=270^0$ ур-іе удовлетворяется.

Въ *заключеніе* найдемъ общія выраженія корней даннаго уравненія.

Корень $\varphi_1=270^0$ есть частный видъ корня

$$\varphi_1=2(180^0m+135^0)=360^0m+270^0;$$

вмѣсто корня $\varphi_2=135^0$ беремъ общее выраженіе его: $\varphi_2=360^0m+135^0$, а вмѣсто корня $\varphi_3=315^0$ беремъ: $\varphi_3=360^0m+315^0$; здѣсь вездѣ m есть произвольное цѣлое число въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Уравненія вида $\sin M=\sin N$; $\operatorname{tg} M=\operatorname{tg} N$ и т. п. (гдѣ M и N алгебраическія выраженія, содержащія неизвѣстный уголъ) рѣшаются, такъ называемымъ, способомъ сравненія на основаніи условій равенства одноименныхъ гоніом. функцій двухъ угловъ. Эти условія выводятся при рѣшеніи задачъ 2—4.

2. Вывести необходимое и достаточное условіе равенства синусовъ (или csc) двухъ угловъ.

Рѣшеніе. Положимъ, что имѣемъ уравненіе: $\sin x=\sin y$. Отсюда получаемъ ур-іе $\sin x-\sin y=0$, которое преобразуется въ такое:

$$2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=0.$$

Это же уравненіе разлагается на два ур-ія: 1) $\cos\frac{x+y}{2}=0$ и 2) $\sin\frac{x-y}{2}=0$. Общее рѣшеніе перваго изъ нихъ есть: $\frac{x+y}{2}=$

$=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, откуда $x+y=(2k+1)\pi$; общее же рѣшеніе второго есть: $\frac{x-y}{2}=k\pi$, откуда $x-y=2k\pi$.

Итакъ ур-іе $\sin x=\sin y$ удовлетворяется въ двухъ случаяхъ: 1) если $x+y=(2k+1)\pi$ и 2) если $x-y=2k\pi$, гдѣ k— какое-угодно цѣлое число. Отсюда искомое условіе равенства синусовъ: Для того, чтобы синусы (или косекансы) двухъ угловъ были равны между собой, необходимо и достаточно, чтобы развернутый уголъ (180^0 или π) содержался или нечетное число разъ въ суммѣ этихъ угловъ, или же четное число разъ въ ихъ разности.

Мнемоническое указаніе. Припомнить формулы:

1) $\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$, гдѣ сумма угловъ $=(180^0-\alpha)+\alpha=180^0=\pi.1$ (1—число нечетное).

2) $\sin(360^0+\alpha)=\sin\alpha$, гдѣ разность угловъ$=(360^0+\alpha)-\alpha=180^0.2=\pi.2$ (2—число четное).

3. Вывести необходимое и достаточное условіе равенства косинусовъ (или секансовъ) двухъ угловъ.

Рѣшеніе. $\cos x=\cos y$; $\cos x-\cos y=0$; $2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}=0$;

Отсюда 2 ур-ія: 1) $\sin\frac{x+y}{2}=0$; 2) $\sin\frac{y-x}{2}=0$.

Первое удовлетворяется, если $\frac{x+y}{2}=k\pi$, т. е. если $x+y=2k\pi$, а второе, если $\frac{y-x}{2}=k\pi$, т. е. если $y-x=2k\pi$.

Отсюда условіе равенства косинусовъ:

Для того, чтобы были равны между собой косинусы (или секансы) двухъ угловъ, необходимо и достаточно, чтобы развернутый уголъ содержался четное число разъ въ ихъ суммѣ или въ ихъ разности.

Мнемоническое указаніе.

$\cos(360^0-\alpha)=\cos\alpha$, гдѣ $(360^0-\alpha)+\alpha=180^0.2$. ⎫ 2—число
$\cos(360^0+\alpha)=\cos\alpha$, гдѣ $(360^0+\alpha)-\alpha=180^0.2$. ⎭ четное.

4. Вывести необходимое и достаточное условіе равенства тангенсовъ (или котангенсовъ) двухъ угловъ.

Рѣшеніе. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y$; $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=0$; $\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}=0$, отсюда $\sin(x-y)=0$; $x-y=k\pi$.

Отсюда искомое условіе: Для того, чтобы были равны между собой тангенсы (или котангенсы) двухъ угловъ, необходимо и достаточно, чтобы разность этихъ угловъ была равна любому цѣлому числу развернутыхъ угловъ.

5—16. Рѣшить уравненія на основаніи условій равенства одноименныхъ тригоном. функцій двухъ угловъ. (См. зад. 2—4).

5. $\sin 2x = \sin x$ *).

6. $\sin 3\varphi = \sin 5\varphi$.

7. $\sin(\alpha + \varphi) = \sin(\beta - \varphi)$.

8. $\sin(\alpha + \varphi) = \sin(\beta + \varphi)$

9. $\cos 5\varphi = \cos 3\varphi$.

10. $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \operatorname{tg}(\beta + \varphi)$.

11. $\sin 3\varphi = -\sin 2\varphi$.

Указаніе. Рѣшать ур-іе: $\sin 3\varphi = \sin(-2\varphi)$.

12. $\cos 6\varphi = -\cos 4\varphi$.

Указаніе. Замѣнить ур-іемъ $\cos 6\varphi = \cos(180^\circ - 4\varphi)$.

13. $\sin 3\varphi = \cos 2\varphi$.

Указаніе. Замѣнить ур-іемъ $\sin 3\varphi = \sin(90^\circ - 2\varphi)$.

14. $\cos 2\varphi = -\sin\varphi$.

15. $\cos\varphi = -\sin\alpha$.

16. $\sin(\varphi - \alpha) = \sin\varphi - \sin\alpha$.

Рѣшить уравненія:

17. $\sin 2\varphi = \operatorname{tg}\varphi$.

18. $2\sin 2\varphi = \operatorname{ctg}\varphi$.

19. $4\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 3\sin\varphi$.

20. $\sin^2 2\varphi + 2\sin^2\varphi = 2$.

21. $3\sin^2\varphi - 4\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$.

22. $\operatorname{tg}^2\varphi + 4\sin^2\varphi - 6 = 0$.

23. $\sin\varphi - 1 = \cos\varphi\sqrt{3}$.

24. $\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

25. $\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = \operatorname{tg}^2\varphi - 1$.

Указаніе. $\operatorname{tg}\varphi$ представить въ видѣ $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$; тогда ур-іе можетъ быть разложено на два: 1) $\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = 0$ и 2) $\cos^2\varphi - 1 = 0$.

26. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

27. $\operatorname{tg} 2x = 3\operatorname{tg} x$.

28. $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\varphi = 0$.

---

*) При рѣшеніи уравненій этой главы условимся въ слѣдующемъ: если искомый уголъ обозначенъ латинской буквой (x, y, . . .), то при рѣшеніи ур-ія онъ долженъ быть выражаемъ въ радіанахъ; если же онъ обозначенъ греческой буквой (φ, ψ, . . .), то—въ градусахъ.

Рѣшеніе. На первый взглядъ можетъ показаться, что данное ур-іе удовлетворяется въ двухъ случаяхъ: 1) если $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=0$ и 2) если $\operatorname{ctg}\varphi=0$.

Но разберемъ 1-ый случай. Если $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=0$, то $\varphi=0$, а тогда $\operatorname{ctg}\varphi=\infty$, такъ что лѣвая часть ур-ія при $\varphi=0$ принимаетъ видъ неопредѣленности $0.\infty$. Раскроемъ истинное значеніе этой неопредѣленности. Для этого $\operatorname{ctg}\varphi$ выразимъ черезъ $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Тогда лѣвая часть преобразуется такъ:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

А это выраженіе при $\varphi=0$ обращается въ $\frac{1}{2}$, т. е. не равно нулю. Значитъ $\varphi=0$ не удовлетворяетъ ур-ію, и потому 1-ый случай отпадаетъ.

При этомъ видимъ, что данное ур-іе преобразуется въ такое: $\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)=0$, откуда $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\mp 1$, такъ что 1) $\frac{\varphi}{2}=180^0m+45^0$ и $\varphi_1=360^0m+90^0$ и 2) $\frac{\varphi}{2}=180^0m+135^0$ и $\varphi_2=360^0m+270^0$, такъ что вообще $\varphi=90^0(2k+1)$, гдѣ k—какое-угодно цѣлое число отъ $-\infty$ до $+\infty$.

29. $2\sin\varphi=3\operatorname{tg}^2\varphi$.

30. $2\operatorname{tg}\varphi+\cos\varphi=0$.

31. $\sin\varphi+4\operatorname{ctg}\varphi=\frac{2}{\sin\varphi}$.

32. $a\sin 3\varphi=b\sin\varphi$.

Указаніе къ зад. 32. Примѣнить формулу $\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$ (см. рѣш. зад. 27 гл. XVII).

33. $a\cos 3\varphi=b\cos\varphi$.

34. $\cos\varphi=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi$.

Указаніе. Послѣ преобразованій можно рѣшить ур-іе относительно $\cos\varphi$, при чемъ получится, что $\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=2\sin 18^0$.

35. $3\operatorname{tg}2\varphi=7\sin\varphi$.

36. $a\sin\varphi+b\cos\varphi=c$, при чемъ a, b и c могутъ имѣть какія-угодно вещественныя значенія, положительныя или отрицательныя.

Рѣшеніе. Раздѣлимъ обѣ части на a и представимъ $\frac{b}{a}$ въ видѣ $\operatorname{tg}\mu=\frac{\sin\mu}{\cos\mu}$. Тогда имѣемъ ур-іе:

$$\sin\varphi+\frac{\sin\mu}{\cos\mu}\cos\varphi=\frac{c}{a},\text{ а потомъ}$$

$$\sin(\varphi+\mu)=\frac{c}{a}\cos\mu;$$

отсюда и опредѣлимъ φ, вычисливъ раньше μ изъ условія, что $\operatorname{tg}\mu=\frac{b}{a}$.

37. $3\cos\varphi+8\sin\varphi=7$. 38. $7\cos\varphi+2\sin\varphi=6$.

39. $\sin\varphi+\cos\varphi=\frac{5}{4}$.

Указаніе. Передъ $\cos\varphi$ поставить $1=\operatorname{tg}45^0$. Тогда ур-іе преобразуется въ такое: $\sin(45^0+\varphi)=1{,}25\cos45^0$. (Сравни со способомъ рѣшенія зад. 53 гл. XVIII).

40. $13\sin\varphi-15\cos\varphi=5$.

41. $3\sin\varphi+4\cos\varphi=3$.

42. $10\cos\varphi-7\sin\varphi=5$.

43. $3(\sin\varphi+\cos\varphi)=2\sin2\varphi$.

Рѣшеніе. Исключимъ изъ ур-ія $\sin2\varphi$, выразивъ его черезъ $\sin\varphi+\cos\varphi$. Для этого воспользуемся тѣмъ, что $(\sin\varphi+\cos\varphi)^2=1+\sin2\varphi$, такъ что $\sin2\varphi=(\sin\varphi+\cos\varphi)^2-1$.

Тогда послѣ подстановки въ данное ур-іе получимъ:

$$3(\sin\varphi+\cos\varphi)=2(\sin\varphi+\cos\varphi)^2-2.$$

Обозначимъ $\sin\varphi+\cos\varphi$ черезъ z. Тогда имѣемъ ур-іе:

$$2z^2-3z-2=0,\text{ откуда } z_1=2 \text{ и } z_2=-\frac{1}{2}.$$

Но $\sin\varphi+\cos\varphi$ не можетъ быть больше $\sqrt{2}$ (см. зад. 20 гл. XXVI). Поэтому имѣемъ только, что $\sin\varphi+\cos\varphi=-\frac{1}{2}$.

Рѣшаемъ это ур-іе: $\sin\varphi+\sin(90^0-\varphi)=-\frac{1}{2}$.

$$2\sin45^0\cos(45^0-\varphi)=-\frac{1}{2}.$$

$$\cos(45^0-\varphi)=-\sqrt{0{,}125}.$$

$$\cos[180^0+(45^0-\varphi)]=\sqrt{0,125};$$

$$225^0-\varphi^0=69^017'43''; \quad \varphi^0=155^042'17'',$$

а вообще $\varphi^0=225^0-(360^0m\pm69^017'43'')$

или $\varphi=360^0m+225^0\pm69^017'43''$.

44. $4\sin 2\varphi=15(\sin\varphi-\cos\varphi)$.

45. $\sec\varphi+\csc\varphi=0,5$.

46. $\sin\varphi+\cos\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi$.

Приложеніе.

Краткій сборникъ физическихъ задачъ, рѣшаемыхъ съ примѣненіемъ тригонометріи.

1. Двѣ силы, въ P и Q пудовъ, дѣйствуютъ на одну и ту же точку нѣкотораго тѣла такъ, что уголъ между ихъ направленіями равенъ 90^0. Вычислить равнодѣйствующую и углы, образуемые ею съ каждой изъ данныхъ, составляющихъ силъ. ($P=7{,}25$; $Q=10{,}3$). (VII) *).

2. Двѣ силы, въ P и Q килограммовъ, дѣйствуютъ на одну и ту же точку тѣла, образуя своими направленіями уголъ въ φ^0. Найти выраженіе равнодѣйствующей (x) этихъ силъ и maximum и minimum ея при измѣненіи угла φ въ предѣлахъ отъ 0 до 180^0. (XIII—XV).

3. Двѣ силы, въ P и Q пудовъ, дѣйствуютъ на одну и ту же точку тѣла, образуя между собой уголъ α^0. Вычислить равнодѣйствующую (R) ихъ и углы, образуемые ею съ каждой изъ составляющихъ силъ, при $P=8{,}125$; $Q=6{,}625$ и $\alpha^0=68^0 48' 14''$. (XVI).

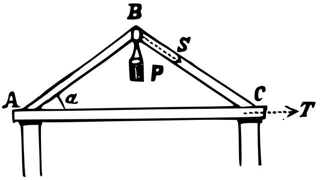
4. Сила въ a килограммовъ должна быть разложена на двѣ, дѣйствующія подъ прямымъ угломъ другъ къ другу, составляющія силы, при чемъ одна изъ нихъ образуетъ съ направленіемъ данной, разлагаемой силы уголъ α^0. Вычислить размѣры составляющихъ силъ (при $a=5$ и $\alpha^0=46^0 52' 10''$). (VII).

5. Стропила BA и BC (*черт.* 41) составляютъ углы въ α^0 съ горизонтальной балкой AC; къ коньку B подвѣшенъ грузъ P. Опредѣлить: 1) силу S, прижимающую стропильную ногу къ балкѣ AC и 2) силу T, которая растягиваетъ балку AC.

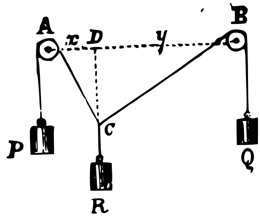
---

*) Римскія цифры въ скобкахъ въ концѣ текста каждой задачи этого отдѣла указываютъ тѣ главы основной части настоящаго Сборника тригоном. задачъ, къ которымъ данная задача могла бы быть отнесена.

Какъ измѣняется величина силы T при измѣненіи угла α^0 отъ размѣровъ какого-нибудь остраго угла до 0 и до 90^0? (VII).



Черт 41.



Черт. 42.

6. На нити, перекинутой черезъ блоки A и B, подвѣшены грузы P, Q и R (*черт.* 42). Блоки расположены на одномъ горизонтальномъ уровнѣ AB. Пренебрегая размѣрами блоковъ, выразить черезъ величины грузовъ P, Q и R отношеніе между тѣми отрѣзками x и y, на которые дѣлится разстояніе AB между блоками направленіемъ силы тяжести средняго груза R. (VII и XIII—XV).

7. Сила, равная P килограм., разложена на двѣ составляющія, которыя образуютъ съ направленіемъ этой силы P углы α и β^0. Вычислить величину каждой изъ составляющихъ силъ при $P=23$, $\alpha=46^0 33' 22''$ и $\beta=54^0 14' 22''$. (XIII—XV).

8. Какой уголъ должны составлять между собой двѣ силы въ P и Q klgr., дѣйствующія на одну и ту же точку тѣла, для того, чтобы ихъ равнодѣйствующая была равна R klgr. ($P=17$, $Q=23$ и $R=15$). (XIII—XV).

9. Силу въ 20 пудовъ требуется разложить на такія двѣ, изъ которыхъ одна равнялась бы 12,6 пуда, а другая составляла бы съ направленіемъ разлагаемой силы уголъ въ $30^0 15' 40''$. Найти вторую изъ составляющихъ силъ. (XIII—XV).

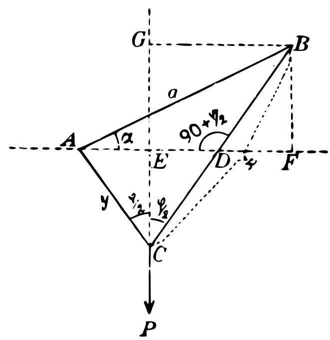
Указаніе: Задача имѣетъ два рѣшенія.

10. На нѣкоторую точку дѣйствуютъ двѣ силы подъ прямымъ угломъ одна къ другой; величины этихъ силъ относятся между собой, какъ $m:n$. Вычислить отношеніе равнодѣйствующей къ первой силѣ и уголъ, образуемый ею съ направленіемъ второй силы. ($m=28$ и $n=95$). (VII).

11. Какія двѣ, равныя между собою силы (x), дѣйствующія на одну и ту же точку A подъ угломъ α^0 одна къ другой, будутъ уравновѣшивать данную силу въ P klgr., приложенную къ той же точкѣ A?

Изслѣдовать измѣненіе x при измѣненіи α^0 отъ 0 до 180^0, разсмотрѣвъ при этомъ случаи, когда $\alpha^0=0$, 60^0, 90^0, 120^0 и 180^0. Какъ надо понимать значеніе x при $\alpha=180^0$? (XVIII).

12. Взяты двѣ точки A и B (*черт.* 43), разстояніе между которыми равно a метр., при чемъ точка B видна изъ точки A подъ



Черт. 43.

угломъ высоты α^0. Къ этимъ точкамъ прикрѣплены концы нити ACB, длиною въ l метр. (конечно, $l>a$). Нить эта несетъ блокъ C, къ которому привѣшенъ грузъ P.

Опредѣлить положеніе равновѣсія груза, пренебрегая размѣрами блока, т. е. опредѣлить, на какія двѣ части (x и y) блокъ дѣлитъ нить и какой уголъ φ^0 образуется между этими частями. (XIII—XV).

Ходъ рѣшенія. На основаніи того, что 1) $AF=AE+GB$ (см. черт. 43) и 2) $x+y=l$, составляется уравненіе

$$a\cos\alpha=y\sin\frac{\varphi}{2}+x\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$\text{или } a\cos\alpha=l\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда опредѣляется уголъ φ.

Далѣе для опредѣленія x и y, въ дополненіе къ уравненію $x+y=l$ изъ $\triangle BDA$ составляется уравненіе $x-y=\dfrac{a\sin\alpha}{\cos\frac{\varphi}{2}}$; изъ этой системы двухъ уравненій и опредѣляются x и y.

13. Лодочникъ, желая переправиться черезъ рѣку, гребъ съ такой силой, что въ стоячей водѣ лодка подвигалась бы подъ дѣйствіемъ одной этой силы со скоростью 0,3 метра въ секунду, и при этомъ онъ все время направлялъ лодку поперекъ рѣки.

На какой уголъ (φ) отъ этого направленія лодка будетъ отнесена теченіемъ рѣки, если скорость послѣдняго равна 1 метру въ секунду? (VII).

14. Поѣздъ идетъ со скоростью v метровъ въ секунду, и потому наблюдателю изъ вагона, несмотря на совершенно безвѣтренную погоду, кажется, что дождь падаетъ наклонно, подъ угломъ α^0 къ отвѣсному направленію. Опредѣлить среднюю скорость (x) паденія дождя передъ окномъ. ($v=20$; $\alpha^0=28^0 30'$). (VII).

15. Поѣздъ идетъ со скоростью 20 метр. въ секунду; дождь падаетъ отвѣсно съ средней скоростью $26^2/_3$ метра въ сек., но наблюдателю изъ вагона кажется, что дождь падаетъ наклонно. Опредѣлить уголъ (φ) кажущагося отклоненія дождя отъ отвѣснаго направленія. (VII).

16. Пушка въ данный моментъ направлена на опредѣленную точку движущагося корабля перпендикулярно къ направленію его движенія. Опредѣлить, на какой уголъ и въ какую сторону нужно повернуть дуло пушки, чтобы ядро попало въ цѣль, если извѣстно, что скорость выпущеннаго снаряда равна 400 метр. въ сек., а скорость корабля—8 метр. въ секунду. (Условимся сопротивленіемъ воздуха и дѣйствіемъ силы тяжести на ядро, пока оно летитъ до корабля, пренебрегать). (IX).

17. Полагая, что скорость движенія земли по ея орбитѣ равна 30 klm. въ секунду, а скорость свѣта 300 000 klm. въ сек., опредѣлить уголъ (α) аберраціи свѣта при наблюденіи такой звѣзды, которая въ данный моментъ находится въ направленіи, перпендикулярномъ къ направленію движенія земли. (IX).

18. Изъ астрономическихъ наблюденій извѣстно, что уголъ аберраціи для звѣздъ, лежащихъ 1) въ полюсѣ эклиптики и 2) въ плоскости эклиптики, равенъ 20″,4.

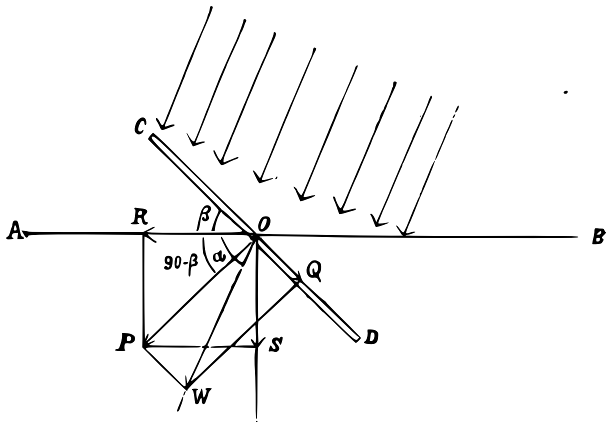
На этомъ основаніи, принимая эклиптику за кругъ, съ радіусомъ въ $150 . 10^6$ килом., и считая годъ равнымъ 365,25 сутокъ, опредѣлить скорость (V) свѣта въ секунду. (IX).

19. Къ тѣлу, висящему на нити и имѣющему вѣсъ въ 20 грам., приложена горизонтально направленная сила въ 15 грам. Опредѣлить величину (x) и направленіе равнодѣйствующей этой силы и силы тяжести тѣла. (VII).

20. Пусть W есть равнодѣйствующая силъ давленія вѣтра на парусъ CD (*черт.* 44); α^0—уголъ, образуемый килевой линіей судна AB съ направленіемъ вѣтра OW; β^0—уголъ килевой линіи AB съ парусомъ CD.

Опредѣлить, съ какой силой вѣтеръ гонитъ лодку, и затѣмъ, при какомъ положеніи паруса, т. е. при какомъ значеніи β эта сила будетъ наибольшей? (VII и XXVI).

Рѣшеніе. Сила вѣтра $W = OW$ (*черт.* 44). Эта сила разлагается на двѣ Q и P, изъ которыхъ только P оказываетъ дѣй-



Черт. 44.

ствіе на парусъ. Сила OP въ свою очередь разлагается на двѣ: S и R, изъ которыхъ только R гонитъ судно впередъ.

Изъ $\triangle$ ORP: $R = P\cos(90^0 - \beta) = P . \sin\beta$,

а изъ $\triangle$ OPW: $P = W\cos[\alpha - (90^0 - \beta)] = W\sin(\alpha + \beta)$;

такъ что $R = W\sin(\alpha + \beta)\sin\beta$.

Изъ рѣшенія задачи 31 гл. XXVI слѣдуетъ, что maximum R будетъ при $\beta = \dfrac{180^0 - \alpha}{2}$, т. е. когда парусъ дѣлитъ пополамъ уголъ между направленіемъ вѣтра и тѣмъ направленіемъ, по которому должно двигаться судно.

21. Повозка, вѣсомъ въ p klgr., для передвиженія по гладкой горизонтальной дорогѣ требуетъ тяги въ q klgr. Опредѣлить 1) какая потребуется тяга для подъема той же повозки и по такой же дорогѣ, но наклоненной къ горизонтальной плоскости подъ угломъ α^0, и 2) какое давленіе повозка производитъ на эту дорогу. ($p = 3000$; $q = 150$; $\alpha^0 = 2^0 32'$). (VII).

22. На плоскости, имѣющей наклонъ въ α^0, лежитъ тяжесть въ p klgr. Съ какой силой (x) тяжесть эта стремится скользить внизъ по наклонной плоскости и какое давленіе (y) она оказываетъ на эту плоскость? ($p = 40{,}5$; $\alpha^0 = 26^0 28' 51''$). (Треніе во вниманіе не принимается). (VII).

23. Какая нужна сила для того, чтобы удерживать вагонетку, вѣсомъ въ 700 klgr., отъ скатыванія съ рельсоваго пути, имѣющаго подъемъ въ $^1/_{300}$. [1) Треніе во вниманіе не принимается.

2) Подъемомъ наклоннаго пути называемъ отношеніе вертикальной проекціи его длины къ горизонтальной]. (IX).

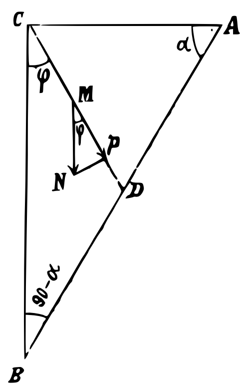
24. Тѣло при свободномъ паденіи въ первую секунду проходитъ пространство въ 4,904 метра, а при скатываніи съ данной наклонной плоскости 1,8371 метра. Вычислить уголъ наклона плоскости къ горизонту, если пренебрегать треніемъ. (VII).

25. Какой длины путь пройдетъ шаръ въ t сек., скатываясь по плоскости, имѣющей наклонъ въ α^0? ($g=9,808$; $t=5$ и $\alpha^0=$ $=3^0 40' 43''$). (VII).

26. На плоскости, наклоненной къ горизонту подъ угломъ α^0, находится шаръ вѣсомъ въ p gr. Чтобы удержать шаръ на этой наклонной плоскости, его прижимаютъ къ ней съ силой, составляющей съ плоскостью уголъ φ^0. Опредѣлить, какъ велика эта сила (x) и какъ она измѣняется при измѣненіи угла φ отъ 0 до 90^0. Какъ нужно понимать ея значеніе при $\varphi=90^0$? (VII).

27. Шаръ, вѣсомъ въ p gr., находится на плоскости, наклоненной къ горизонту подъ угломъ α^0. Опредѣлить, съ какой силой (x) этотъ шаръ давитъ на плоскость и съ какой силой (y) онъ стремится двигать эту плоскость въ горизонтальномъ направленіи. При какомъ значеніи угла α^0 эта послѣдняя сила будетъ наибольшей? (XVII).

28. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC (*черт*. 45) катетъ CB расположенъ вертикально, а другой катетъ CA имѣетъ длину b сант. и образуетъ съ гипотенузой уголъ α^0; въ этомъ треугольникѣ проведена изъ вершины прямого угла до гипотенузы прямая CD подъ угломъ φ^0 къ катету CB. По этой прямой CD изъ точки C начинаетъ двигаться матеріальная точка M безъ начальной скорости, только подъ вліяніемъ силы тяжести.



Черт. 45.

Опредѣлить: 1) въ теченіе какого времени точка M пробѣжитъ путь CD и 2) при какомъ значеніи угла φ это время будетъ наименьшимъ. (XV и XXVI).

Рѣшеніе. По CD точка M будетъ двигаться съ ускореніемъ $g\cos\varphi$; значитъ путь CD, равный, положимъ, x см., она пробѣжитъ во время, опредѣляемое изъ ур-ія:

$$x=\frac{1}{2}g\cos\varphi\,.\,t^2,$$

откуда $t = \sqrt{\dfrac{2x}{g\cos\varphi}}$

По изъ $\triangle ACD$: $\dfrac{x}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(90-\alpha+\varphi)}$, такъ что $x = \dfrac{b\sin\alpha}{\cos(\alpha-\varphi)}$.

Поэтому $t = \sqrt{\dfrac{2b\sin\alpha}{g\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)}}$.

Отсюда minimum t будетъ при maximum $\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)$. Это же выраженіе, какъ видно изъ рѣшенія задачи 30 гл. XXVI, имѣетъ maximum при $\varphi = \dfrac{\alpha}{2}$.

Значитъ minimum $t = \sqrt{\dfrac{2b\sin\alpha}{g\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\dfrac{4b\,\mathrm{tg}\,{}^{\alpha}/_{2}}{g}}$.

29. На одно плечо прямолинейнаго рычага, имѣющее длину въ a метр., подъ угломъ въ α^0 къ нему, дѣйствуетъ сила въ p klgr., а въ противовѣсъ ей на другое плечо дѣйствуетъ сила въ q klgr. подъ угломъ β^0 къ нему. Какова длина (x) второго плеча въ случаѣ равновѣсія и какое давленіе (r) испытывается точкой опоры? (VII).

Указаніе. Воспользоваться условіемъ равновѣсія рычага: моменты дѣйствія и противодѣйствія относительно точки опоры должны быть равны между собой.

30. На одно плечо прямолинейнаго рычага, имѣющее длину въ a метр., дѣйствуетъ сила въ p klgr. подъ угломъ α^0 къ нему, а на другое плечо, длиною въ b метр., другая сила въ q klgr., уравновѣшивающая первую. Какой уголъ (β) образуетъ направленіе второй силы съ плечомъ рычага? ($a=2$; $b=5$; $p=83$; $q=50$; $\alpha^0=68^0 2'$). (VII).

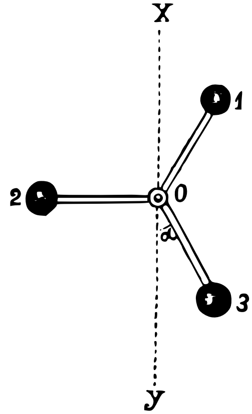
31. Длина каждаго плеча коромысла вѣсовъ равна l сантим.; вѣсъ коромысла$=P$ gr., при чемъ его центръ тяжести на d см. ниже точки опоры. Какъ велико будетъ отклоненіе (φ) коромысла, если на одну изъ чашекъ положить грузъ въ p gr. ($P=300$; $l=20$; d см.$=2$ mm.; p gr.$=10$ mgr.). (IX).

32. Кривой рычагъ имѣетъ прямолинейныя плечи, образующія между собой уголъ α^0, при чемъ одно плечо вдвое длиннѣе другого. Рычагъ находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ двухъ грузовъ p и q klgr., изъ которыхъ грузъ p привѣшенъ къ концу болѣе короткаго плеча. Какіе углы образуютъ плечи съ горизонтальной плоскостью? (Частный случай: $\alpha^0=120^0$; $p=q$). (XXVIII).

33. Двѣ силы въ p и q klgr. дѣйствуютъ на концы A и B прямого невѣсомаго рычага AB, длина котораго равна a см., при

чемъ первая сила дѣйствуетъ на конецъ A и образуетъ съ рычагомъ уголъ α^0, а вторая, дѣйствующая на конецъ B,—уголъ β^0. Въ какой точкѣ нужно подпереть рычагъ для того, чтобы онъ находился въ равновѣсіи? (XVIII).

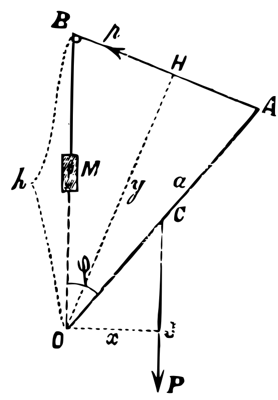
34. На оси O (*черт.* 46) можетъ свободно вращаться система, состоящая изъ трехъ одинаковой длины невѣсомыхъ стержней,



Черт. 46.

образующихъ между собою попарно углы въ 120^0, и изъ грузовъ въ 1 kgr., 2 kgr. и 3 kgr., прикрѣпленныхъ къ концамъ этихъ стержней. При какомъ значеніи угла α между третьимъ стержнемъ и вертикалью XY система будетъ въ равновѣсіи? (XVII).

35. Однородный тяжелый стержень OA (*черт.* 47), вѣсъ котораго равенъ P klgr., а длина a см., можетъ вращаться около своего конца O. Къ другому его концу A прикрѣплена нить ABM, перекинутая черезъ блокъ B, расположенный на одной вертикальной линіи съ точкой O на высотѣ h см. надъ ней. Къ концу нити привязанъ грузъ M, вѣсомъ въ p klgr. Считая нить нерастяжимой и пренебрегая размѣрами блока и вѣсомъ нити, опредѣлить уголъ стержня съ вертикальной линіей при равновѣсіи системы, т. е. $\angle AOB$ равный, положимъ, φ^0. (XIII—XV).



Черт. 47.

Рѣшеніе. Дѣйствіе груза M можно замѣнить силой Ap (*черт.* 47). Такимъ образомъ, стержень находится подъ дѣйствіемъ двухъ силъ: 1) силы p, приложенной къ точкѣ A, и 2) вѣса стержня P, приложеннаго къ его центру тяжести C, находящемуся въ серединѣ стержня. Для равновѣсія рычага моменты силъ должны быть равны; слѣдовательно

$$CP \,.\, OJ = Ap \,.\, OH \text{ или } Px = py \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{I}).$$

Изъ $\triangle\ OCJ$: $x = \frac{a}{2} \sin\varphi$.

А для того, чтобы опредѣлить y, т. е. OH, составимъ ур-іе, выразивъ для этого площадь $\triangle\ ABO$ двояко: 1) черезъ высоту OH и 2) черезъ высоту, опущенную изъ точки A, каковая высота вдвое больше OJ. Полагая для этого, что $AB = z$ см., имѣемъ ур-іе:

$$zy = 2hx,$$

откуда $y = \frac{2hx}{z} = \frac{ha\sin\varphi}{\sqrt{a^2+h^2-2ah\cos\varphi}}$.

Подставляя выраженія x и y въ ур-іе I, имѣемъ ур-іе:

$$\frac{Pa\sin\varphi}{2} = \frac{pha\sin\varphi}{\sqrt{a^2+h^2-2ah\cos\varphi}},$$

которое распадается на два ур-ія:

1) $\sin\varphi = 0$, откуда $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 180^0$

и 2) $\frac{P}{2} = \frac{ph}{\sqrt{a^2+h^2-2ah\cos\varphi}}$,

откуда $\cos\varphi = \frac{P^2(a^2+h^2)-4p^2h^2}{2ahP^2}$ . . . . . (II).

Отсюда опредѣлимъ третье значеніе φ.

Такимъ образомъ, стержень будетъ въ равновѣсіи въ 3-хъ случаяхъ: 1) если онъ совпадаетъ съ направленіемъ OB, 2) если онъ виситъ на продолженіи OB и 3) если онъ находится въ нѣкоторомъ промежуточномъ положеніи, образуя съ OB уголъ φ^0, опредѣляемый изъ уравненія (II).

Изслѣдованіе. Для того, чтобы имѣло мѣсто третье положеніе равновѣсія, выраженіе $\cos\varphi$ (II) должно удовлетворять неравенствамъ:

$$-1 \leqslant \frac{P^2(a^2+h^2)-4p^2h^2}{2ahP^2} \leqslant +1.$$

Рѣшая эти неравенства относительно p, имѣемъ:

$$\frac{P(h-a)}{2h} \leqslant p \leqslant \frac{P(h+a)}{2}.$$

При этомъ предѣльные случаи даютъ: 1) $\cos\varphi = +1$, откуда $\varphi = 0$ и 2) $\cos\varphi = -1$, откуда $\varphi = 180^0$, т. е. въ этихъ случаяхъ 3-ье положеніе равновѣсія совпадаетъ съ однимъ изъ двухъ первыхъ.

Стержень будетъ въ горизонтальномъ положеніи, если $\varphi=90^0$, а это будетъ, если числитель дроби (II) будетъ равенъ 0, т. е. если $P^2(a^2+h^2)-4p^2h^2=0$,

$$\text{откуда } p=\frac{P\sqrt{a^2+h^2}}{2h}.$$

---

36. Лучи, исходящіе изъ высшей и низшей точекъ нѣкотораго свѣтящагося тѣла, проходя черезъ верхушку вертикальнаго стержня, высотой a вершк., образуютъ съ горизонтальной плоскостью, на которой стоитъ этотъ стержень, углы α и β^0 ($\alpha>\beta$). Опредѣлить длину полутѣни, падающей отъ стержня. ($a=28$; $\alpha=38^0 15'16''$; $\beta=38^0 13'33''$). (XIII—XV и IX).

37. Лучъ, исходящій изъ верхняго края солнца и проходящій черезъ верхушку нѣкотораго вертикальнаго стержня, длиною въ a метр., падаетъ подъ угломъ α^0 къ той горизонтальной плоскости, на которой стоитъ стержень; солнце при этомъ видно подъ угломъ зрѣнія β^0. Опредѣлить длину полутѣни отъ стержня. ($a=5{,}65$; $\alpha=38^0 28'35''$; $\beta^0=0^0 31'1'',8$). (XIII—XV и IX).

38. Подъ какимъ угломъ (φ) должны падать на плоскость (параллельные) лучи солнца для того, чтобы сила освѣщенія составляла $\frac{1}{n}$ той силы освѣщенія, которая была бы при перпендикулярномъ къ направленію лучей положеніи плоскости? (VII).

39. Верхняя доска стола имѣетъ форму круга, радіусъ котораго равенъ $R=1^1/_4$ аршина. Надъ самымъ центромъ этой доски виситъ электрическая лампочка, на разстояніи $a=0{,}75$ арш. отъ поверхности доски. Если принять за единицу силу освѣщенія центра доски, то какъ выразится сила освѣщенія (x) каждой точки ея края?

40. При какомъ-нибудь данномъ направленіи луча, падающаго на плоскую поверхность нѣкоторой среды, построить ходъ преломленнаго луча, если показатель преломленія этой среды равенъ $^3/_2$.

41. То же при показателѣ преломленія $\mu=^4/_3$.

42. Вычислить уголъ преломленія (r) свѣтового луча, падающаго подъ угломъ въ $\alpha^0=32^0$ къ поверхности нѣкоторой среды, показатель преломленія которой равенъ $\mu=1{,}65$. (VI).

43. Лучъ, падающій изъ воздуха на плоскую границу между воздухомъ и стекломъ (показатель преломленія котораго равенъ $\mu=1{,}5$) частью отражается отъ стекла, а частью, преломившись, входитъ внутрь стекла. При какомъ углѣ паденія i преломленный лучъ будетъ перпендикуляренъ къ отраженному? (VI).

44. Глазъ наблюдателя помѣщенъ такъ, что стѣнка AB пустого кубической формы сосуда $ABCD$ какъ разъ загораживаетъ все дно сосуда BC. Опредѣлить, какая часть дна окажется видимой наблюдателю при томъ же положеніи его глаза, но послѣ того какъ сосудъ будетъ наполненъ спиртомъ, показатель преломленія котораго равенъ $\mu=1{,}36$. (VII).

45. Глазъ наблюдателя помѣщенъ такъ, что стѣнка AB пустого кубическаго сосуда $ABCD$ какъ разъ загораживаетъ все дно сосуда BC; если же сосудъ наполнить нѣкоторой жидкостью, то наблюдатель, при томъ же положеніи его глаза, будетъ видѣть половину дна. Опредѣлить показатель преломленія той жидкости. (VII).

46. Зная показатель преломленія среды μ, при данномъ углѣ паденія i луча вычислить его отклоненіе при преломленіи, т. е. вычислить разность $(i-r)$ между угломъ паденія и угломъ преломленія ($\mu=1{,}5$; $i=25^0$). (VI).

47. Доказать, что отклоненіе луча при преломленіи (см. предыд. задачу) увеличивается при увеличеніи угла паденія и, наоборотъ, уменьшается при его уменьшеніи. (XVIII).

Рѣшеніе. Пусть уголъ паденія i уменьшился до размѣровъ i_1, такъ что $i>i_1$; а соотвѣтствующіе углы преломленія r и r_1, при чемъ, очевидно, $r>r_1$. Требуется доказать, что

$$i-r>i_1-r_1 \ (?).$$

Доказ. $$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{\sin i_1}{\sin r_1}=\mu.$$

Составляемъ производную пропорцію:

$$\frac{\sin i-\sin r}{\sin r}=\frac{\sin i_1-\sin r_1}{\sin r_1};$$

отсюда $$\frac{\sin\frac{i-r}{2}\cos\frac{i+r}{2}}{\sin\frac{i_1-r_1}{2}\cos\frac{i_1+r_1}{2}}=\frac{\sin r}{\sin r_1}$$ и

$$\frac{\sin\frac{i-r}{2}}{\sin\frac{i_1-r_1}{2}}=\frac{\sin r}{\sin r_1}\cdot\frac{\cos\frac{i_1+r_1}{2}}{\cos\frac{i+r}{2}} \quad \ldots\ldots (I)$$

Такъ какъ $r<r_1$, при чемъ r и r_1 углы острые, то

$$\frac{\sin r}{\sin r_1}>1.$$

Такъ какъ $\frac{i_1+r_1}{2}<\frac{i+r}{2}$, и притомъ эти углы $\frac{i+r}{2}$ и

$\frac{i_1+r_1}{2}$ — углы острые, то $\cos\frac{i_1+r_1}{2} > \cos\frac{i+r}{2}$,

$$\text{т. е. } \frac{\cos\frac{i_1+r_1}{2}}{\cos\frac{i+r}{2}} > 1.$$

Значитъ, оба сомножителя правой части равенства (I) больше 1; слѣдовательно и вся эта правая часть больше 1, и потому

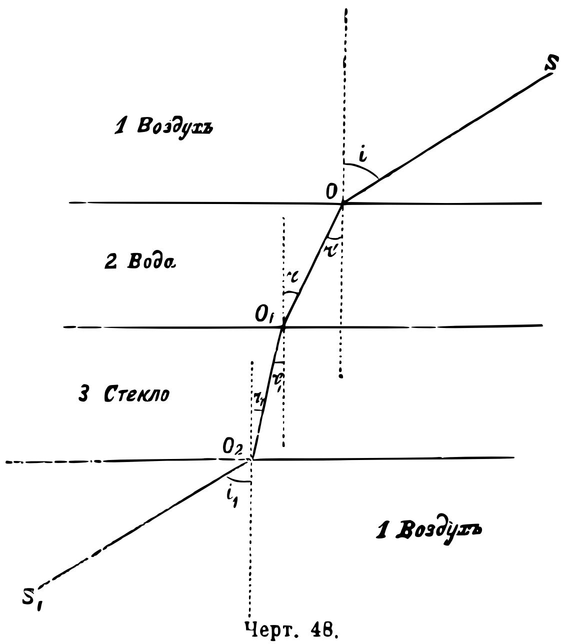
$$\sin\frac{i-r}{2} > \sin\frac{i_1-r_1}{2}.$$

такъ что $i-r > i_1-r_1$, что и требовалось доказать.

48. Монохроматическій лучъ падаетъ подъ угломъ паденія i на стеклянную пластинку, толщина которой равна b см, а показатель преломленія μ. Вычислить боковое смѣщеніе (x) падающаго луча послѣ выхода его изъ пластинки, если $i=30^0$, $b=2$ и $\mu=1,5$. (VII).

49. То же при $i=65^0$; $b=2$ и $\mu=1,5$.

50. Монохроматическій лучъ падаетъ на стеклянную пластинку, толщина которой равна b mm., подъ угломъ паденія i. Вычислить показатель преломленія (μ) пластинки, зная, что послѣ прохожденія черезъ нее лучъ имѣетъ параллельное смѣщеніе въ m mm. ($b=20$; $i=30^0$; $m=3,88$). (XVIII).



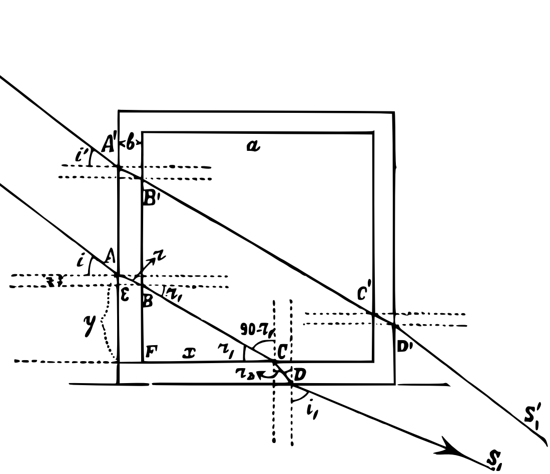
Черт. 48.

51. Извѣстно, что, если имѣемъ 3 среды, напримѣръ, воздухъ, воду и стекло (*черт.* 48), то показатель преломленія при переходѣ свѣтового луча изъ второй среды въ третью равенъ обратному отношенію показателей преломленія при переходѣ изъ первой среды въ каждую изъ остальныхъ ($\mu_{2,3}=\mu_{1,3}:\mu_{1,2}$).

Опредѣлить на этомъ основаніи показатель преломленія при переходѣ луча изъ воды въ стекло, зная, что показатели преломленія при переходѣ изъ воздуха въ воду и изъ воздуха въ стекло равны соотвѣтственно $^4/_3$ и $^3/_2$.

52. Лучъ свѣта изъ воздуха переходитъ черезъ слои воды и стекла опять въ воздухъ (*черт.* 48). Зная, что уголъ паденія луча изъ воздуха въ воду равнялся i, опредѣлить уголъ преломленія (i_1) при выходѣ луча изъ стекла въ воздухъ (см. условіе предыдущей задачи).

53. Дно стекляннаго призматическаго сосуда съ водой имѣетъ форму квадрата, длина стороны котораго (внутри) равна $a=100$ mm.; стѣнки сосуда имѣютъ толщину $b=4$ mm. (На *чертежѣ* 49 гори-



Черт. 49.

зонтальный разрѣзъ сосуда). Найти ходъ луча $S'A'$, падающаго въ горизонтальной плоскости на стѣнку сосуда подъ угломъ паденія $i'=20^0$ и выходящаго черезъ противоположную стѣнку, т. е. опредѣлить длину каждой части пути луча, зная при этомъ, что показатель преломленія воды (относительно воздуха) равенъ 1,336, а показатель преломленія стекла 1,5.

54. Опредѣлить наименьшій, предѣльный уголъ паденія i, при которомъ при переходѣ луча изъ стекла въ воздухъ будетъ имѣть мѣсто, такъ называемое, полное внутреннее отраженіе (показатель преломленія стекла относительно воздуха равенъ $\mu=^3/_2$). (VI).

55. То же, что и въ задачѣ 54, но при переходѣ изъ воды въ воздухъ (показатель преломленія воды $^4/_3$). (VI).

56. То же, но при переходѣ изъ стекла въ воду (см. рѣшеніе задачи 51).

57. Имѣемъ наполненный водою стеклянный призматическій сосудъ съ квадратнымъ основаніемъ (*черт.* 49); длина стороны основанія внутри равна a=100 mm., толщина же стѣнокъ сосуда—b=4 mm. На одну изъ стѣнокъ его въ точкѣ A падаетъ въ горизонтальной плоскости лучъ свѣта подъ угломъ паденія i. Показатель преломленія стекла (относительно воздуха) равенъ μ=1,557, а показатель преломленія воды μ_1=1,336. Вслѣдствіе преломленія луча, при данномъ углѣ паденія i, этотъ лучъ, пройдя черезъ воду, можетъ преломляться или въ противоположной стѣнкѣ, или въ сосѣдней, смотря по положенію точки паденія A. Опредѣлить: 1) предѣльное значеніе угла паденія i, при которомъ лучъ послѣ преломленія въ сосѣдней стѣнкѣ будетъ имѣть въ ней полное внутреннее отраженіе отъ воздуха и 2) предѣльное положеніе точки паденія A, при которомъ лучъ будетъ преломляться въ сосѣдней стѣнкѣ, если уголъ паденія i имѣетъ раньше найденное, вышеупомянутое предѣльное значеніе. (VII).

Краткая запись рѣшенія.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \dfrac{\sin i}{\sin r}=\mu \\[2mm] 2)\ \dfrac{\sin r}{\sin r_1}=\dfrac{\mu_1}{\mu} \end{array}\right\}\quad 3)\ \frac{\sin i}{\sin r_1}=\mu_1. \qquad \begin{array}{l} 4)\ \dfrac{\sin(90^0-r_1)}{\sin r_2}=\dfrac{\mu}{\mu_1}; \\[2mm] 5)\ \dfrac{\sin r_2}{\sin i_1}=\dfrac{1}{\mu}. \end{array}$$

I. max. $i_1=90$.

Ур-іе 5) даетъ: $\dfrac{\sin r_2}{\sin 90^0}=\dfrac{1}{\mu}$, такъ что предѣлъ $\sin r_2=\dfrac{1}{\mu}$

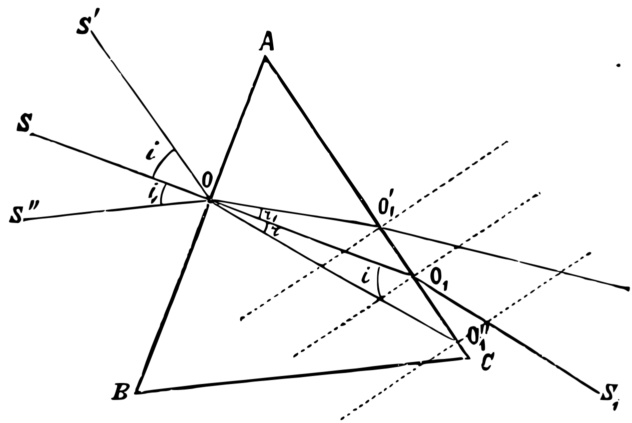
Ур-іе 4) $\dfrac{\cos r_1}{\sin r_2}=\dfrac{\mu}{\mu_1}$; пред. $\cos r_1=\dfrac{1}{\mu_1}$

Поэтому изъ ур-ія 3): пред. $\sin i=\mu_1$. пред. $\sin r_1$;

$$\text{пред. } \sin i=\mu_1 . \sqrt{1-\text{пред. }\cos^2 r_1}=\mu_1\sqrt{1-\frac{1}{\mu_1^2}}=\sqrt{(\mu_1+1)(\mu_1-1)}.$$

58. Монохроматическій свѣтовой лучъ SO падаетъ нормально (перпендикулярно) на грань AB прозрачной треугольной призмы ABC (*черт.* 50), показатель преломленія которой $\mu=^3/_2$; преломляющій уголъ A призмы дается ур-іемъ $\sin A=^2/_3$.

Какъ будетъ итти преломленный лучъ при выходѣ изъ призмы?



Черт. 50.

59. Какъ, при данныхъ предыдущей задачи, будутъ итти лучи, падающіе на точку O въ углѣ SOA, и какъ—лучи, падающіе въ углѣ SOB?

60. У стеклянной треугольной призмы перпендикулярное сѣченіе представляетъ изъ себя правильный треугольникъ со стороной a см.; показатель преломленія призмы $\mu=1,792$. Монохроматическій лучъ свѣта падаетъ въ середину одной изъ граней призмы, въ плоскости ея перпендикулярнаго сѣченія, подъ угломъ паденія $i=40^0$. Опредѣлить ходъ луча въ призмѣ.

61. Свѣтовой монохроматическій лучъ преломляется, проходя черезъ стеклянную треугольную призму въ плоскости ея перпендикулярнаго сѣченія. Вывести условія, при которыхъ уголъ отклоненія его имѣетъ наименьшую величину. Затѣмъ опредѣлить это наименьшее значеніе угла отклоненія по данному преломляющему углу призмы α и по соотвѣтствующему значенію угла паденія i. (XXVI).

Рѣшеніе. Пусть углы паденія и преломленія луча при входѣ его въ призму равны i и r, а при выходѣ изъ нея r_1 и i_1; показатель же преломленія стекла$=\mu$. (*черт.* 51).

Тогда имѣемъ уравненія:

$$\sin i=\mu \sin r$$
$$\sin i_1=\mu \sin r_1,$$

$$\text{откуда } \sin i-\sin i_1=\mu (\sin r-\sin r_1)$$

$$\text{и } \sin\frac{i-i_1}{2}\cos\frac{i+i_1}{2}=\mu\,.\sin\frac{r-r_1}{2}\cos\frac{r+r_1}{2}\quad .\ .\ .\ (\mathrm{I})$$

Преобразуемъ это уравненіе (I), введя въ него уголъ отклоненія δ ($\angle CDS_1$).

Такъ какъ уголъ δ есть внѣшній уголъ $\triangle\ JDJ_1$, то

$$\delta=(i-r)+(i_1-r_1)$$

$$\text{и } \delta=(i+i_1)-(r+r_1)$$

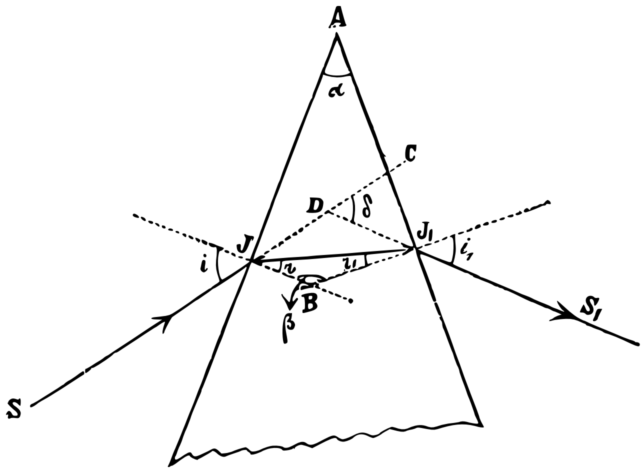
А такъ какъ сумма угловъ $\alpha+\beta=180^0$

и также $r+r_1+\beta=180^0$,

то $r+r_1=\alpha$

и потому $\delta=(i+i_1)-\alpha$,

откуда $\delta+\alpha=i+i_1$ . . . . (II).



Черт. 51.

Поэтому уравненіе (I) преобразуется въ такое:

$$\sin\frac{i-i_1}{2}\,.\,\cos\frac{\delta+\alpha}{2}=\mu\,.\sin\frac{r-r_1}{2}\,.\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\text{откуда } \cos\frac{\delta+\alpha}{2}=\mu\,.\cos\frac{\alpha}{2}\,.\,\frac{\sin\frac{r-r}{2}}{\sin\frac{i-i_1}{2}}\quad .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{III})$$

Уголъ α есть величина постоянная, такъ что $\cos\frac{\delta+\alpha}{2}$ зависитъ только отъ δ.

А такъ какъ углы i и i_1—острые, то

$$i+i_1<180^0,$$

и потому изъ ур-ія (II) $\delta+\alpha<180^0$, а $\frac{\delta+\alpha}{2}$ — уголъ острый.

Слѣдовательно, при наименьшемъ значеніи δ лѣвая часть ур-ія (III) должны имѣть maximum, а это будетъ въ томъ случаѣ, если будетъ имѣть maximum и дробь $\dfrac{\sin\frac{r-r_1}{2}}{\sin\frac{i-i_1}{2}}$.

Изъ рѣшенія же задачи 47 мы знаемъ, что $i-r$ возрастаетъ вмѣстѣ съ i. Поэтому, если $i \geqslant i_1$, то и $i-r \geqslant i_1-r_1$,

$$\text{откуда } \frac{i-i_1}{2} \geqslant \frac{r-r_1}{2},$$

а такъ какъ

$$\text{углы } \frac{i-i_1}{2} \text{ и } \frac{r-r_1}{2} \text{ — острые,}$$

$$\text{то } \sin\frac{i-i_1}{2} \geqslant \sin\frac{r-r_1}{2}.$$

Слѣдовательно, дробь $\dfrac{\sin\frac{r-r_1}{2}}{\sin\frac{i-i_1}{2}} \leqslant 1$, т. е. ея maximum равенъ 1.

А это будетъ въ томъ случаѣ, если

$$i-i_1=r-r_1$$

$$\text{или } i-r=i_1-r_1.$$

Но такъ какъ $i-r \lesseqgtr i_1-r_1$, только пока $i \lesseqgtr i_1$ (зад. 47), то $i-r= =i_1-r_1$, только въ томъ случаѣ, если

$$i=i_1 \text{ и } r=r_1$$

А тогда $\triangle AJJ_1$ (*черт.* 51) будетъ равнобедреннымъ, и уголъ r будетъ равняться $\frac{\alpha}{2}$, т. е. уголъ отклоненія δ будетъ имѣть minimum, если $\sin i=\mu \sin\frac{\alpha}{2}$.

Опредѣливъ отсюда i, изъ уравненія (II) найдемъ minimum δ.

$$\text{minimum } \delta=2i-\alpha.$$

62. Показатель преломленія правильной треугольной призмы равенъ 1,5. Каковъ наименьшій уголъ отклоненія луча?

63. Показатель преломленія правильной треугольной призмы равенъ 1,8. Лучъ свѣта падаетъ на грань ея въ плоскости перпендикулярнаго сѣченія подъ угломъ паденія въ 70°. Найти уголъ отклоненія луча.

64. Преломляющій уголъ призмы равенъ $\alpha^0=21^0 12'$; показатель преломленія ея $\mu=2,123$. Опредѣлить уголъ наименьшаго отклоненія луча.

65. Полая стеклянная призма съ преломляющимъ угломъ α, равнымъ 54^0, наполнена сѣроуглеродомъ. Уголъ наименьшаго отклоненія при прохожденіи луча черезъ такую призму оказывается равнымъ $\delta=41^0 28'$. Пренебрегая толщиной стеклянныхъ стѣнокъ призмы, опредѣлить показатель преломленія сѣроуглерода μ.

66. Какъ велико поле зрѣнія (φ^0) подзорной трубы, если оптическая ширина ея равна 10 mm., а длина 250 mm.? (Шириной трубы называется діаметръ діафрагмы, помѣщенной передъ окуляромъ въ плоскости изображенія, даваемаго объективомъ, а длиною—разстояніе діафрагмы отъ оптическаго центра объектива). (VII и IX).

Отвѣты.

Часть I.—Рѣшеніе треугольниковъ.

ГЛАВА I.

4. 0,707. **6**. 1) 5,66; 2) 32,91; 3) 4,94.

ГЛАВА II.

9. 75 кв. дм. **10**. 4 и 6 сантим.

ГЛАВА III.

2. $a \sin\beta$. **3**. $2a\cos\alpha$. **4**. $\dfrac{b}{2\cos\alpha}$. **5**. $a^2\operatorname{ctg}\alpha$. **6**. $d\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **7**. $a^2\sin\alpha\cos\alpha$. **8**. $d\operatorname{tg}\alpha$; $\dfrac{1}{2}d\sec\dfrac{\alpha}{2}$ или $\dfrac{d}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. **9**. $\dfrac{h}{\sin\alpha}$ и $b+2h\operatorname{ctg}\alpha$. **10**. $2d\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

ГЛАВА IV.

7. $2\sin^2\alpha$. **8**. $2\cos^2\alpha$. **9**. 1. **10**. $\operatorname{tg}^2\alpha$. **11**. 1. **12**. 1. **13**. $\operatorname{tg}^2\alpha$. **14**. $\cos^{-2}\alpha$. **15**. $\sec^2\alpha$. **16**. $\csc^2\beta$. **17**. $\sec^2\alpha$. **18**. $\dfrac{1}{2}(m^2-1)$. **19**. m^2-2. **20**. 1) $1-2\cos^2\alpha=m$; 2) $2\sin^2\alpha-1=m$. **22**. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$. **23**. $3-\sin^2\alpha-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. **24**. $\dfrac{1}{\cos\alpha}$. **25**. $\cos\alpha\,.\,\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. **26**. $\left(\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$. **27**. $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha}$. **28**. $3\operatorname{ctg}^2\alpha$. **40**. $\operatorname{ctg}^2\alpha\cos\beta$.

43. 58 и 115 саж. **44**. 6,16 саж. **45**. 8,7 метр. **46**. 3,1 и 9,5 дм. **47**. $x=(a-b)\operatorname{ctg}\alpha=11{,}77$ (метра); $y=23{,}35$ (м.).
53. *Рѣшеніе.* $\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{tg}\varphi-1)=0$, откуда 1) $\operatorname{tg}\varphi=0$; $\varphi_1=0$ и 2) $\operatorname{tg}\varphi-1=0$; $\varphi_2=45^0$. **54**. $\varphi_1=0$; $\varphi_2=30^0$; **55**. $\varphi_1=0$; $\varphi_2=90^0$. **56**. 90^0. **57**. 60^0.
58. *Указ.* $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$; $\varphi_1=0$; $\varphi_2=90^0$. **59**. 30^0. **60**. 60^0. **61**. 45^0.
62. *Рѣшеніе.* $\sin\varphi=\sin(90^0-\varphi)$; $\varphi=90^0-\varphi$; $\varphi=45^0$. **63**. 45^0.
65. *Рѣшеніе.* $2\sin\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$; $\sin\varphi(2\cos\varphi-1)=0$; 1) $\sin\varphi=0$; $\varphi_1=0$. 2) $2\cos\varphi-1=0$; $\varphi_2=60^0$. **66**. 30^0 и 90^0. **67**. 30^0. **68**. 30^0. **69**. 45^0 и 60^0. **70**. 0 и 45^0.

ГЛАВА VI.

12. $\alpha^0=52^019'50''$; $\beta=34^036'40''$. **13**. Если большая часть угла равна φ^0, то $\operatorname{tg}\varphi=3$, такъ что $\varphi=71^033'54''$. **14**. 4060,9 метра. **15**. $16^030'45''$. **16**. 599 верст. **17**. 462 верст. **18**. 791 верст.

ГЛАВА VII.

1. 107,69 и 111,12 метр. **2**. 27 м. и 248,31 метр. **3**. 20 саж.; 46,519 саж. **4**. 20,003 метр. **5**. 35,491 м. **6**. 248,98 м. **7**. $x+a=b\sin\alpha$; $x=5{,}254$ (саж.). **9**. 9,9588 м. **10**. 3,8713 метр. **12**. 17,786 м. **13**. $53^049'31''$. **14**. $57^042'34''$. **15**. 1) $63^026'6''$; 2) $26^033'54''$; 3) $21^048'5''$. **16**. $47^051'46''$. **17**. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$. **18**. 19 верст. 341 саж. **19**. $32^033'$.
20. 8 дм. 3,9 лин. **21**. $b=a\operatorname{tg}\beta=d\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta$; $c=d\cos\frac{\beta}{2}\sec\beta$.
22. $\frac{1}{2}m^2\cos^2 22^030'=99{,}19$ (кв. дм.). **23**. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{h}{a}$. **24**. $33^041'24''$.
25. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2h}{a-b}$. **26**. $x=b+2h\operatorname{ctg}\alpha=5{,}823$ (метр.). **27**. $r=1{,}5839$; $x=1{,}9728$; $51^014'24''$. **28**. $\sin\frac{\varphi}{2}=0{,}25$. **29**. $\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **30**. $\frac{30\,a}{v\sin\frac{\alpha}{2}}=$ $=18{,}039$ (мин.). **31**. $36^039'48''$. **32**. $73^058'41''$. **33**. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{h}{2a}$; $16^023'19''$.
34. $R=\frac{1}{2}a\sec\beta$. **35**. 1) 2,6974; 2) 28,789. **36**. 32,798; $47^015'39''$.
37. $97^010'50''$. **38**. $x=\frac{c}{2\pi}\cos\frac{180^0m}{m+n}=11{,}226$ (фут.).
39. $\frac{1}{2}a\csc\alpha$. **40**. $\frac{1}{2}b^2\operatorname{tg}\alpha$. **41**. $\frac{b^2\operatorname{ctg}\beta}{2}$. **42**. $\frac{1}{4}b^2\operatorname{tg}\alpha$.

43. $\frac{1}{4}b^2\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$. **44**. $\frac{1}{4}na^2\mathrm{ctg}\frac{180^0}{n}=1453{,}6$ (кв. дм.). **45**. $\sin\alpha=\frac{h_1}{b}$;

$Q=\frac{b^2h_1}{4\sqrt{(b+h_1)(b-h_1)}}$. **46**. $\frac{1}{2}(a+b)(a-b)\,\mathrm{tg}\,\alpha=223{,}055$ (кв. дм.).

47. $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{4\,Q}{(a+b)(a-b)}$; $\varphi^0=63^026'6''$. **48**. $2\,a\cos\frac{180^0}{n}$.

49. 1) $D=2\,R=\frac{a}{\sin\frac{180^0}{n}}$ и 2) $D=\frac{a}{2\sin\frac{90^0}{n}}$.

50. $Q=n\,R^2\sin\frac{180^0}{n}\cos\frac{180^0}{n}$; 1) 147; 2) 134,08 кв. дм.

51. $n\,R^2\mathrm{tg}\frac{180^0}{n}$. **52**. $x=\sec^2\frac{180^0}{n}$; 1) $x=2$; 2) $x=1^1/_3$; 3) 1,1056.

53. $\frac{\pi R^2\alpha}{360}-\frac{R^2\sin\alpha}{2}$. **54**. $q=\frac{\pi R^2\alpha}{360}-\frac{R^2\sin\alpha}{2}$, при чемъ

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2\,R}$; $q=0{,}61$ (кв. дм.). **55**. $\frac{\pi R^2(180-\alpha)}{180}+R^2\sin\alpha$.

56. $49^046'38''$; $40^013'22''$. **57**. $\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{b}{a}$; $\varphi=57^027'32''$. **58**. $22^010'48''$; $67^049'12''$. **59**. $59^029'23''$ и $120^030'37''$. **60**. $47^029'14''$.

61. Изъ $\triangle OKO_1:\sin\alpha=\frac{R+r}{d}$; $\alpha=40^041'47''$.

Изъ $\triangle OLO_1:\sin\beta=\frac{R-r}{d}$; $\beta=19^014'29''$.

62. 1) $82^026'35''$; 2) $8^042'11''$. **63**. $\cos\varphi=\frac{h_1}{2\,h}=0{,}6$.

64. $R=\frac{1}{2}a\sec\frac{\beta}{2}$; $r=a\sin\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\left(45^0-\frac{\beta}{4}\right)$. **65**. $\sin\alpha=\frac{h}{b}$;

$a=\frac{h}{\cos\alpha}=\frac{b\,h}{\sqrt{b^2-h^2}}$; $c=\frac{b^2}{\sqrt{b^2-h^2}}$. **66**. $\alpha=50^054'16''$.

67. $a=\sqrt{2\,Q\,\mathrm{tg}\,\alpha}=21{,}765$; $b=45{,}946$. **68**. $h=\sqrt{Q\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}}$.

69. $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{b^2}{4\,Q}$. **70**. $\sin\beta=\frac{2\,Q}{a^2}$; числовыя данныя—невозможны.

71. 1) 2945,2; 2) 122,72 мили въ 1 часъ.

72. $x=\frac{2\pi R\cos\varphi(\alpha-\alpha_1)}{360}=170{,}55$ (мил.). **73**. $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{H-h}{a}$;

$\varphi=60^015'19''$. **74**. $y=H\,\mathrm{ctg}\,\varphi\,.\sin 45^0$. **75**. $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{(H-h)\sin\alpha}{a}$;

$\varphi=59^023'31''$.

ГЛАВА IX.

1. $\bar{2},34145$. **2.** $\bar{4},87702._5$. **3.** $\bar{3},91997._5$. **4.** $\bar{2},66291$. **5.** $\bar{2},38955$. **6.** $\bar{2},53350$. **7.** $0^o41'31''$. **8.** $1^o41'29'',4$. **9** $87^o25'39'',4$. **10.** $88^o30'28'',7$. **11.** $1^o15'18'',3$. **12.** $x=\dfrac{d\sin\alpha}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}=1378,1$. **13.** 6,719 саж.

14. Въ 33,502 раза. **15.** $0^o1'8'',75$. **16.** 0,04848 mm. **17.** $0^o49'6'',6$. **18.** Не менѣе 20,626 килом. **19.** Не дальше 110,48 сантим. **20.** 466,586 мил. **21.** 192 308 миль. **22.** $0^o16'0'',46$. **23.** Въ 109,02 раза.

ГЛАВЫ X—XII.

1. $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **5.** $-\sin^2\alpha$. **6.** 0. **7.** $2\cos\alpha$. **8.** 1. **14.** $-\sin\alpha$. **15.** 60^o и 120^o. **16.** 45^o и 135^o. **17.** $48^o35'25''$ и $131^o24'35''$. **18.** $25^o57'58''$. **19.** 120^o. **20.** $136^o23'50''$. **21.** 120^o. **22.** $125^o19'50''$. **23** и **24.** 60^o и 120^o. **25.** 45^o и 135^o. **26.** 60^o и 120^o. **27.** 30^o и 150^o. **28** и **29.** 60^o и 120^o. **30.** 45^o и 135^o. **31.** $74^o27'28''$. **32.** $66^o48'5''$ и 135^o. **33.** 30^o и 150^o.

ГЛАВЫ XIII—XV.

1. 376,02 саж. **2.** $a=264,03$; $c=272,925$; $\gamma^0=59^o42'17''$. **3.** $\alpha^0=21^o13'50''$; $b=32,031$; $c=22,241$. **4.** $\alpha^0=25^o43'38''$; $a=0,063782$; $c=0,14647$. **5.** $\alpha^0=1^o6'21''$; $a=9,4463$; $b=336,45$. **6.** Задача невозможна. **7.** $\dfrac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **8.** $x_b=\dfrac{a\sin\gamma}{\sin\left(\dfrac{\beta}{2}+\gamma\right)}$; $x_a=\dfrac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$.

9. $\dfrac{b\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$. **10.** $\dfrac{l\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}$. **11.** $\dfrac{a\sin\beta}{\sin 45^o}=5,0028$ (мили). **14.** 99,182 ф. **15.** 219,78 фут. **16.** $h_b=\dfrac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$; $h_a=b\sin\gamma$; $h_c=b\sin\alpha$.

17. $\dfrac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=585$ (метр.). **18.** $h_a=8,1886$ (дм.). Почему наименьшая высота соотвѣтствуетъ именно вершинѣ A? **19.** $\dfrac{a\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}=28,819$ (арш.).

20. $\dfrac{a\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **21.** $\dfrac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=194,16$ (саж.). **22.** $a=\dfrac{h_a\sin\alpha}{\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma)}$; $b=\dfrac{h_a}{\sin\gamma}$; $c=\dfrac{h_a}{\sin(\alpha+\gamma)}$. **23.** $a=\dfrac{h_a\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta}$. **24.** $\dfrac{h\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=$ $=12,195$ (м.). **25.** $Q=\dfrac{(2b+x)h}{2}$, при чемъ $x=\dfrac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

26. 387,68 кв. дм. **27**. $H=x+h$; $x=\frac{a\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}$. **28**. $\frac{b\sin\gamma\operatorname{tg}\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}=$ $=165,89$ (ф.). **29**. $\frac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)}=32,081$. **30**. $\frac{d\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\beta)}=$ $=765,22$ саж. **31**. Если число линейныхъ единицъ, содержащихся въ AC, равно b, въ $AM-x$, а въ $MN-y$, то отн. $\frac{x}{b}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{3}}{\sin\beta\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{3}\right)}$ и отн. $\frac{y}{b}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\frac{\beta}{3}}{\sin\beta\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{3}\right)\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\beta\right)}$. **33**. $x=\frac{d\sin\beta}{\cos(\varphi+\beta)\cos\varphi}$, при чемъ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{h}{d}$; $x=1,3518$ (м.). **34**. $x=z\cos\alpha$ и $y=z\sin\alpha$, при чемъ $z=\frac{a\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$; $x=982,3$; $y=230,5$. **35**. $x=z\sin\beta$; $y=z\cos\beta$, при чемъ $z=\frac{h\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$; $x=19,534$; $y=266,68$. **37**. $a=8,4668$; $\beta=43^0 34'17''$; $\gamma^0=79^0 57'$. **38**. $c=22,128$; $\alpha^0=22^0 11'39''$; $\beta^0=34^0 30'53''$. **40**. $b=0,42407$; $\alpha^0=10^0 49'17''$; $\gamma^0=145^0 43'9''$. **41**. $b=62,676$; $\alpha^0=153^0 6'12''$; $\gamma^0=10^0 25'31''$. **42**. $38^0 23'31''$. **47**. $53^0 7'48''$; $59^0 29'23''$; $67^0 22'48''$. **49**. $45^0 48'56''$; $72^0 58'$; $61^0 13'4''$. **50**. $91^0 30'30''$; $88^0 29'30''$. **51**. Черезъ 17 мин. 34,5 сек. **52**. $\angle A=102^0 8'7''$; $\angle B=103^0 57'16''$; $\angle C=72^0 58'9''$; $\angle D=80^0 56'26''$. **55**. $x=\frac{c\sin(\beta-\delta)}{\sin\delta}$, при чемъ $\angle\beta^0$ опредѣляется изъ $\triangle ABC$ по 3-мъ даннымъ сторонамъ. $x=59,522$ (саж.). **56**. $48^0 22'7''$; $131^0 37'53''$; $103^0 40'19''$; $76^0 19'41''$. **58**. $\beta=39^0 18'30''$; $c=221$. **59**. $\beta^0=90^0$; $c=78,29$. **60**. $\beta_1{}^0=43^0 29'28''$; $c_1=816,6$ и $\beta_2{}^0=136^0 30'32''$; $c_2=112,45$.

61—62. Задачи невозможны. **63**. 36,492 или 13,265 дм. **64**. 49,885 или 12,569 дм. **65**. 22,46 и 8,5486 дм. **66**. 18 243 кв. саж. **67**. 596,57 кв. ф. **68**. $\frac{b^2\sin\alpha}{2}$. **69**. При $\gamma=90^0$. **70**. $ab\sin\alpha=4221,2$ (кв. саж.).

71. $a^2\sin\alpha$. **72**. $(a+b)c\sin\alpha$. **74**. 3428,6 кв. саж. **75**. 896,08 кв. м. **76**. $\frac{1}{2}d^2\sin\varphi$; max. $Q=\frac{1}{2}d^2$. **77**. min. $d=\sqrt{2Q}$.

78. $\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$; 8 дес. 2360,5 кв. с. **79**. $\frac{(a+b)(a-b)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$; 29 кв. с. 36 кв. ф. **80**. $\frac{ab\sin\gamma}{2}=1441,9$ (кв. ф.). **81**. $Q_1=952,34$; $Q_2=152,78$. **82**. $a=\sqrt{\frac{2Q\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$. **83**. 158,97 и 116,65 саж.

84. 17,919 фут. **85**. $\gamma_1^0=14^0 48'18''$; $\gamma_2^0=180^0-\gamma_1^0$. **86**. $\dfrac{h_a h_b}{2\sin\gamma}$.

87. $\dfrac{h^2_b \sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **88**. $\dfrac{h^2_b \sin(\alpha+\gamma)}{2\sin\alpha\sin\gamma}$. **89**. 563,69 кв. ф.

91. $\dfrac{a}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **92**. $Q=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. **94**. $r=\dfrac{a\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}}$.

ГЛАВА XVI.

1. $\alpha^0=91^0 25'52''$; $c=33,447$; **2**. $\gamma^0=77^0 22'26'',5$; $a=27,694$. **3**. $\alpha^0=29^0 16'51''$; $b=3,7404$. **4**. 321,28 саж. **5**. $BC=13,413$ дм.; $AD=11,505$ дм.; $\angle A=85^0 0'24''$; $\angle B=72^0 6'27''$; $\angle C=97^0 10'21''$; $\angle D=105^0 42'48''$. **6**. 66,26 сант. **7**. 52,914 и 82,134 сант. **9**. 28,17 и 36,228 дм.; **10**. 22,691 и 28,007. **11**. I. Параллелограмъ невозможенъ. II. $41^0 44'18''$ и $138^0 15'44''$. **12**. 46,873 саж. **13**. $h_b=c\sin\alpha$; $h_c=b\sin\alpha$; высота же $h_a=c\sin\beta$ или $b\sin\gamma$, такъ что предварительно придется опредѣлить уголъ β или γ по двумъ даннымъ сторонамъ $\triangle$-ка и по углу между ними. **15**. Одно изъ 2-хъ рѣшенiй дастъ: $\alpha^0=16^0 25'44''$ $\beta^0=140^0 34'16''$; $c=23,713$. **16**. 3880,7 кв. дм. **18**. 1633,5 фут. **19**. 264,1 саж. **20**. 27,764 саж.

ГЛАВА XVII.

3. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. **4**. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. **5**. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. **6**. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. **9**. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$.

10. $2+\sqrt{3}$. **12**. $2\sin\alpha$. **13**. $2\cos\dfrac{\alpha}{2}$. **14**. $2\cos\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **16**. $\dfrac{1}{2}.\sin\alpha$.

17 и 18. $\dfrac{1}{2}\cos\alpha$. **20**. $\cos\alpha$. **21**. $\cos\alpha$. **22**. $\cos 2\alpha$. **23**. $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. **24**. $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$.

25. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha}$.

30. $\sin 15^0=\dfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $\cos 15^0=\dfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

32. $\sqrt{2}-1$. **34**. При увеличенiи α отъ 0 до 45^0 значенiе y увеличивается отъ 0 до $\dfrac{1}{2}$, а при дальнѣйшемъ увеличенiи α до 90^0 умень-

шается отъ $\frac{1}{2}$ до 0. **36**. Уменьшается отъ 1 до 0 и далѣе до —1. **37**. $0{,}5\,d^2\sin 2\alpha = 1677$. **38**. $0{,}25\,c^2\sin 2\alpha$. **39**. 154,56 кв. дм.
40. $0{,}5\,n\,R^2\sin\frac{360^0}{n}$. **41**. $R^2\sin\alpha = 122{,}28$. **42**. $\frac{c\sin 2\alpha}{2\sin(45^0+\alpha)}$.
43. $\frac{5d^2}{8\sin 108^0}$. **44**. $r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{\beta}{2}\ \sin\frac{\gamma}{2}$.
45. 93,558 дм. **46**. $r_c = 4\,R\cos\frac{\alpha}{2}\ \cos\frac{\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

---

47 и **48**. 30^0 и 60^0. **49**. $115^0 10' 31''$; **50**. $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = 30^0$; $\varphi_3 = 150^0$. **51**. $\varphi_1 = 25^0 39' 32''$; $\varphi_2 = 180^0 - \varphi_1$. **52**. $7^0 57' 42''$ и $82^0 2' 18''$.
53. $\sin 2\alpha = \frac{2h}{c}$. Задача возможна, пока $2h \ngtr c$.
54. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{h_1}{2h}$. Между 0 и 2.

ГЛАВА XVIII.

1. 1,6108. **2**. 0,20702. **9**. $\sqrt{2}\cos(\alpha - 45^0)$. **10**. $\sqrt{2}\,.\sin(\alpha - 45^0)$.
11. $2\cos\left(22^0 30' + \frac{\alpha}{2}\right)\ \cos\left(22^0 30' - \frac{\alpha}{2}\right)$.
12. $\sqrt{8}\,.\sin\left(22^0 30' + \frac{\alpha}{2}\right)\ \cos\left(22^0 30' - \frac{\alpha}{2}\right)$.
13. $4\cos\left(30^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\ \sin\left(30^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$.
14. $\sqrt{8}\,.\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 22^0 30'\right)\ \cos\left(\frac{\alpha}{2} + 22^0 30'\right)$. **15**. $2\cos^2 22^0 30'$.
16. $4\sin^2 22^0 30'$. **17**. $4\sin^2 15^0$. **18**. $\sqrt{24}\,.\cos^2 22^0 30'$.
19. $2\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$. **20**. $2\sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$. **23**. $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.
24. $2\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$. **29**. $\frac{\sqrt{12}\,.\sin(30^0 - \alpha)}{\cos\alpha}$. **30**. $\frac{2\sin(\alpha - 30^0)}{\sin\alpha}$.
35. $4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$. **37**. $\sqrt{8}\,.\sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45^0\right)$.
38. $\sqrt{8}\,.\cos^2\frac{\alpha}{2}\,.\sin(45^0 + \alpha)\,.\sec\alpha$. **39**. $\operatorname{tg} 2\alpha$.

47. $\operatorname{ctg}\varphi = -\dfrac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma)}$; $\varphi^0 = 169^0 4' 41''$.

48. $R = d\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $r = d\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

49. $R = \dfrac{d\cos^2\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$; $r = \dfrac{d\sin^2\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$.

50. $\dfrac{2R\sin^2\left(45^0-\dfrac{\alpha}{4}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **51.** $\lim\sum h = a\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

---

52. 30^0. **53.** $\sin(45^0-\varphi) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = -90^0$. **54.** $\varphi^0 = 45^0$;

55. $\varphi_1 = 109^0 53' 46''$; $\varphi_2 = -19^0 53' 46''$. **56.** $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = 112^0 37' 12''$. **57.** 60^0.

59. $\operatorname{tg}(45^0-\varphi) = \dfrac{(a+b)\operatorname{tg}(\alpha-45^0)}{a-b}$. **60.** $41^0 55' 32''$ и $30^0 4' 28''$.

61. $57^0 38' 43''$ и $16^0 21' 17''$. **62.** $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\varphi\right) = \dfrac{(b+a)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{b-a}$.

63. $17^0 52' 10''$. **64.** $66^0 16' 16''$. **65.** $30^0 55' 7''$. **66.** $\varphi = -12^0 14' 19''$. **67.** Числовыя данныя невозможны. **68.** $\varphi = 51^0 2' 52''$; $\psi = 30^0 2' 52''$. **69.** $\varphi = 53^0 22' 2''$ $\psi = 14^0 52' 58''$. **70.** $57^0 3' 51''$ и $27^0 3' 51''$. **72.** $60^0 46' 22''$ и $52^0 3' 38''$.

73. $\cos\left(\dfrac{\varphi-\psi}{2}+45^0\right) = \dfrac{d}{2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-45^0\right)}$. **74.** $22^0 41' 8''$ и $16^0 26' 8''$.

75. $\varphi = 90^0 19' 58''$, $\psi = 59^0 59' 58''$. **76.** $\varphi = 72^0 51' 20''$; $\psi = 59^0 24' 40''$.
77. $\varphi = 92^0 7' 12''$; $\psi = 42^0 52' 48''$. **78.** $\varphi = 126^0 12' 23''$; $\psi = 23^0 47' 37''$.
79. $\varphi = 18^0 51' 20''$; $\psi = -2^0 8' 40''$. **81.** Рѣшеніе сводится къ задачѣ, подобной № 77. **83.** Задача сводится къ рѣшенію ур-ія $\sin(\varphi+\psi) = \dfrac{(n+m)\sin\delta}{n-m}$.

Способъ вспомогательнаго угла.

84. $y = a\sin^2\varphi$, при чемъ $\cos\varphi = \sin\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{b}{a}}$; $y = 1{,}8199$.

85. $y = \dfrac{\sqrt{8}\sin\alpha\sin(45^0-\varphi)}{\cos\varphi}$, при чемъ $\operatorname{tg}\varphi = 1{,}5\operatorname{ctg}\alpha$; $y = 3{,}4278$.

87. $y=0{,}60482$. **89.** $c=67{,}95$. **90.** $x=\operatorname{tg}(45^0+\varphi)$, при чемъ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; при вычисленіи x приходится пользоваться формулой Делямбра для малыхъ угловъ; $x=-44{,}522$. **91.** Въ концѣ придется рѣшать относит. φ ур. $\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{tg}(45^0+\psi)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, при чемъ уголъ ψ^0 опредѣлится предварительно изъ уравненія $\operatorname{tg}\psi=\frac{3\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\varphi=62^0 19' 20''$. **92.** Уголъ δ^0 опредѣлится изъ ур-ія $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\delta\right)=\operatorname{tg}(45^0+\varphi)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если раньше найти уголъ φ изъ уравненія $\operatorname{tg}\varphi=\frac{9\sin\beta}{8\sin(\alpha+\beta)}$. **93.** Можно опредѣлить искомый уголъ γ, рѣшая $\triangle\ ABC$ по двумъ сторонамъ b и c и по углу α между ними, если раньше опредѣлить сторону c изъ прямоугольнаго $\triangle\ ABD$ по h и α. Но можно уголъ γ опредѣлить и изъ ур-ія $\operatorname{ctg}\gamma=\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi\sin\alpha}$, при чемъ $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{b}{h}$ **94.** Если часть угла ACB, прилежащая къ сторонѣ AC, равна δ^0, то $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\delta\right)=\operatorname{tg}(45^0+\varphi)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ при чемъ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\beta}$. **99.** $x_1=-0{,}5$; $x_2=-25{,}3$.

100. $x_1=125{,}8$; $x_2=35{,}7$. **101.** $x_1=527{,}5$; $x_2=-758{,}4$.
102. $x_1=17{,}58$; $x_2=-0{,}287$. **103.** $x_1=25{,}75$; $x_2=-0{,}338$.
104. $x_1=-27{,}5$; $x_2=-35{,}8$. **105.** $x_1=-45$; $x_2=-48$.

ГЛАВА XIX.

2. $\dfrac{\pi c^2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$. **3.** $a=5{,}0565$; $c=5{,}0606$.

4. $b=\dfrac{d\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)\sin\frac{\alpha}{2}}=3{,}5447$; $a=\dfrac{d\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)}=4{,}4916$.

5. $\dfrac{m^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\alpha\sin\beta}{4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}$. **7.** $c=\dfrac{d}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; $a=d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

8. $a=17{,}003$; $c=19{,}002$. **9**. $b=22{,}653$; $c=35{,}631$.

10. $\dfrac{d^2 \sin\alpha}{8\sin^2\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)}=8501{,}2$. **15**. $2p=c\sqrt{8}\,.\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

16. $\dfrac{s\sqrt{2}\,.\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)}=90{,}004$. **17**. $a=\dfrac{p\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}}=5{,}0646$;

$b=7{,}9093$. **18**. $a=\dfrac{p}{2\cos^2\left(45^0-\dfrac{\beta}{4}\right)}$; $b=\dfrac{p\sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos^2\left(45^0-\dfrac{\beta}{4}\right)}$.

19. $Q=p^2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

20. $c=\dfrac{m\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}}$ и $Q=\dfrac{1}{4}m^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

21. $Q=\dfrac{p^2\sin\beta}{8\cos^4\left(45^0-\dfrac{\beta}{4}\right)}$. **22**. $R=\dfrac{p}{4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}}$.

24. $\sin(\alpha-45^0)=\dfrac{d\sqrt{2}}{2c}$. **27**. $\alpha^0=87^0 38'28''$; $b=2{,}3501$.

28. $\alpha=36^0 0'4'',5$; $a=4{,}9946$. **29**. Числовыя данныя невозможны.

30. $a=47{,}832$; $b=7{,}967$; $\alpha=70^0 29'28''$. **31**. $\sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{c\cos\dfrac{\delta}{2}}{m}$.

32. $Q=\dfrac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$, при чемъ β и γ опредѣляются изъ системы ур-ій: $\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}=\dfrac{d\cos\dfrac{\alpha}{2}}{a}$ и $\dfrac{\beta+\gamma}{2}=90^0-\dfrac{\alpha}{2}$. **33**. 293,28 кв. с.

35. $\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{(m+a)\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{m-a}$; отсюда опредѣляется γ; далѣе α, b и c.

36. $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{c-d}{c+d}\,.\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$; отсюда β и далѣе. **37**. 101070 кв. саж.

38. 0,36136 кв. сант. **39**. $R=41{,}942$ (дм.).

42. $Q=\dfrac{d^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{8\sin^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-15^0\right)\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+15^0\right)}=1055{,}3.$

43. $Q=\left[\dfrac{m\cos\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{8}\,.\sin\left(45^0+\dfrac{\alpha}{2}\right)}\right]^2$. **44.** $\left[\dfrac{d\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\,.\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{8}\,.\sin\left(45^2-\dfrac{\alpha}{2}\right)}\right]^2$

45. $\left[\dfrac{m\cos\dfrac{\beta}{2}\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{8}\,.\cos\left(30^0+\dfrac{\beta}{4}\right)\cos\left(30^0-\dfrac{\beta}{4}\right)}\right]^2=6731{,}6.$

46. $\left[\dfrac{d\cos\dfrac{\beta}{2}\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{8}\,.\sin\left(30^0+\dfrac{\beta}{4}\right)\sin\left(30^0-\dfrac{\beta}{4}\right)}\right]^2=98660.$ **49.** 22,058 и 20,2595.

54. *Рѣшеніе.* $p-a=r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$

$$p-b=r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

$$p-c=r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

отсюда $3p-2p=p=r\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}\right)=$

$=r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$ (см. зад. № 46 гл. XVIII).

Поэтому $2p=2r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$. **55.** $Q=r^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$.

59. $\cos(45^0-\alpha)=\dfrac{h+p}{p\sqrt{2}}$.

64. *Ходъ рѣшенія.* $Q=\dfrac{bc\sin\alpha}{2}$, такъ что

$bc\sin\alpha=2Q$, а по формулѣ косинуса

$bc\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$. Раздѣливъ почленно 1-ое изъ этихъ ур-ій на 2-ое, получимъ:

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4Q}{n^2-a^2}$, откуда найдемъ α. Значитъ, будемъ знать a, b^2+c^2 и α, такъ что далѣе рѣшеніе сводится къ предыдущей задачѣ (№ 63). **65**. $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{2b-a}{a}}$; $\varphi=32^0 18'40'',6$; $x=\sqrt{(2b-a)a}=$ $=158,11$ (метр.). **66**. $h=\frac{d \sin\varphi \operatorname{tg}\alpha}{\sin 45^0}$, при чемъ φ опредѣляется изъ уравненія $\operatorname{tg}(22^0 30'+\varphi)=\frac{\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}22^0 30'}{\sin(\alpha-\beta)}$; $h=635,23$ (фут.).

67. $x=\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\alpha+\sqrt{\frac{1}{4}a^2\operatorname{ctg}^2\alpha+h(a-h)}=\frac{a\operatorname{ctg}\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$, при чемъ Q опредѣляется изъ уравненія $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{4h(a-h)}{a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}}$.

69. Рѣшеніе такое же, какъ и для задачи 68.

70. $AD=827,18$ фут. **71**. Задача неопредѣл., такъ какъ оказывается, что пунктъ D лежитъ на окружности, описанной около $\triangle$ ABC; радіусъ этой окружности равенъ 508 фут. **73**. $\delta^0=42^0 25'18''$; $r=3,049$.

74. $x=\frac{a\cos\delta\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\delta-\beta)\cos\alpha}$ или $\frac{a\cos\beta\sin(\gamma-\delta)}{\sin(\delta-\beta)\cos\gamma}=160,03$ (фут.). Значитъ измѣреніе одного изъ 4-хъ угловъ было излишнимъ.

75. Уголъ δ можно вычислить изъ уравненія: $\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\gamma}{2}-\delta\right)=$ $=\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\gamma}{2}\right)\operatorname{tg}(45^0+\varphi)$, если раньше опредѣлить уголъ φ изъ уравненія $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}$.

ГЛАВЫ XX и XXI.

1. a) 0,2618. b) 0,1745. c) 0,6981. d) 1,309. e) 0,3927. f) 1,0944. g) 2,618. h) 1,7453.
3. a) $22^0 30'$. b) 20^0. c) 108^0. d) 150^0.
4. a) 90^0. b) $28^0 38'52''$. c) $114^0 35'30''$. d) $85^0 56'36''$.
7. $\sin 10'=0,002908882...$

ГЛАВА XXIV.

9. 0. **10** и **11**.$-\operatorname{tg}^3 x$.

ГЛАВА XXVI.

1. $-b$. **2.** 1. **3.** $(a+b)^2$. **4.** $-d^2$. **12.** $x=R\sin\frac{360^0 t}{T}=R\sin\frac{2\pi t}{T}$.

13. Если $t=2\frac{5}{6}$, то $x=-R\frac{\sqrt{3}}{2}$; если $t=15\frac{3}{8}$, то $x=\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

17. $x=2R\sin\frac{2t^0}{2}=1{,}809$ (фут.). **19.** min. $y=0$, при $\varphi=0$ и 90^0;

max $y=\frac{1}{2}$ при $\varphi=45^0$. **20.** max. $y=\sqrt{2}$ при $\varphi=45^0$.

21. y измѣняется непрерывно въ предѣлахъ отъ 1 до 0 и далѣе до -1.

22. y измѣняется непрерывно въ предѣлахъ отъ -1 до $+1$.

23. Отъ 1 до $\sqrt{2}$ и отъ $\sqrt{2}$ до 1.

24. max $y=2\cos\frac{\alpha}{2}$ при $\varphi=90^0+\frac{\alpha}{2}$.

25. max $y=\sqrt{1+c^2}$, при $\varphi=90^0-\alpha$, гдѣ α — вспомогательный уголъ, опредѣляемый изъ ур-ія $\operatorname{tg}\alpha=c$.

26. max $y=\sqrt{1+c^2}$ при $\varphi=\alpha-90^0$, гдѣ α опредѣляется изъ ур-ія $\operatorname{ctg}\alpha=c$.

27. max $y=\sqrt{1+c^2}$ при $\varphi=90^0+\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha=c$.

28. max $y=\sin^2\frac{\alpha}{2}$ при $\varphi=45^0-\frac{\alpha}{2}$.

29. max. $y=\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)$ при $\varphi=45^0+\frac{\alpha}{2}$.

30. max. $y=\cos^2\frac{\alpha}{2}$ при $\varphi=\frac{\alpha}{2}$. **31.** max $y=\cos^2\frac{\alpha}{2}$ при $\varphi=90^0-\frac{\alpha}{2}$.

33. min. $y=\operatorname{ctg}^2\left(45^0-\frac{\alpha}{4}\right)$ при $\varphi=90^0-\frac{\alpha}{2}$. **35.** Форму ромба.

36. Когда данная діагональ его перпендикулярна къ данной сторонѣ.

37. Искомый $\triangle$-къ—равнобедренный съ угломъ β при вершинѣ, при чемъ $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{b}{m}$.

38. max. $\sin\varphi=\frac{a}{R}$. Искомый уголъ OCB образованъ радіусомъ OC и перпендикуляромъ BC, возставленнымъ къ данному радіусу OA изъ данной точки B. **39.** max. $P=4R\sqrt{2}$, max. $Q=2R^2$. **40.** Искомый уголъ образованъ равными хордами. **41.** Искомая точка дѣлитъ дугу сектора пополамъ. **42.** Отвѣтъ такой же, какъ и на предыдущую задачу № 41. **43.** max. $Q=R^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ при $\varphi=\frac{\alpha}{2}$. **44.** Искомая прямая линія образуетъ со сторонами даннаго угла равнобедренный $\triangle$-къ.

45. max. $Q=\frac{1}{4}a^2\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$; max. $P=\dfrac{2a\sin\left(15^0+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15^0-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

$\triangle$—равнобедренный. **46**. Когда M дѣлитъ дугу сектора пополамъ. max. $Q=\frac{1}{2}R^2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. **47**. Искомый $\triangle$-къ равнобедренный съ даннымъ угломъ α^0 при вершинѣ. max. $Q=p^2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}^2\left(45^0-\frac{\alpha}{4}\right)$. **48**. Искомый $\triangle$-къ—равнобедренный съ угломъ α^0 при вершинѣ. **50**. 0. **51**. 0. **52**. 0. **53**. $\frac{1}{2}$. **54**. $\frac{1}{2}$. **55**. 0. **56**. $-\sqrt{2}$. **57**. -2. **58**. 1. **59**. $2\sqrt{3}$. **60**. 0. **61**. -3. **62**. 2. **63**. ∞. **64**. 0. **65**. ∞. **66**. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **67**. $\cos x$. **68**. $\cos x$. **69**. $-\sin x$. **70**. 0. **71**. $\cos a$.

ГЛАВА XXVII.

13. $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin\varphi}\pm\sqrt{1-\sin\varphi})$;

$\sin 15^0=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $\sin 75^0=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; $\sin 195^0=$ $=-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $\sin 255^0=-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. **14**. По два, именно $\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, а $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$. **15**. Два. **18**. Четыре. **19**. Четыре. **20**. Два.

ГЛАВА XXVIII.

5. $x_1=(2m+1)\cdot\frac{\pi}{3}$; $x_2=2m\pi$. **6**. $\varphi_1=22^0 30'\cdot(2m+1)$; $\varphi_2=180^0\cdot m$. **7**. $\varphi=180^0 m+\frac{\beta-\alpha}{2}$. **8**. $\varphi=90^0\cdot(2m+1)-\frac{\alpha+\beta}{2}$. **9**. $\varphi_1=45^0 m$; $\varphi_2=180^0 m$, при чемъ второе рѣшеніе заключается уже въ первомъ, такъ что вообще $\varphi=45^0\cdot m$. **10**. $\varphi=90^0 m+\frac{\alpha-\beta}{2}$. **11**. $\varphi_1=180^0(2m+1)$; $\varphi_2=72^0\cdot m$. **12**. $\varphi_1=90^0\cdot(2m+1)$; $\varphi_2=18^0\cdot(2m+1)$, при чемъ первое рѣшеніе заключается во второмъ, такъ что вообще $\varphi=18^0\cdot(2m+1)$. **13**. Вообще $\varphi=18^0\cdot(4m+1)$. **14**. Вообще $\varphi=30^0\cdot(4m-1)$.

15. $\varphi = \pm[360^0 . m-(90^0+\alpha)]$. **16**. $\varphi_1=360^0m+\alpha$; $\varphi_2=360^0m$.
17. $\varphi_1=180^0m$; $\varphi_2=360^0m\pm45^0$; $\varphi_3=360^0m\pm135^0$. **18**. $\varphi_1=360^0m\pm90^0$; $\varphi_2=180^0m+(-1)^m30^0$; $\varphi_3=180^0m+(-1)^m210^0$. **19**. $\varphi_1=360^0m$; $\varphi_2=360^0 . 2m\mp70^031'40''$; $\varphi_3=360^0 . 2m\mp289^028'20''$. **20**. $\varphi=45^0 . m$.
21. $\varphi_1=180^0m+53^07'49''$; $\varphi_2=180^0 . m+135^0$. **22**. $\varphi_1=180^0m+(-1)^m60^0$; $\varphi_2=180^0m+(-1)^m240^0$. **23**. $\varphi_1=360^0m+90^0$; $\varphi_2=360^0m-150^0$.

24. $x_1=\left(2m\mp\frac{1}{3}\right)\pi$; $x_2=(2m\mp1)\pi$. **25**. $\varphi_1=180^0m\mp45^0$; $\varphi_2=180^0m$.

26. $x_1=\left(m+\frac{3}{4}\right)\pi$; $x_2=\left(m+\frac{1}{3}\right)\pi$; $x_3=\left(m+\frac{2}{3}\right)\pi$. **27**. $x_1=m\pi$; $x_{2\cdot3}=\left(m\mp\frac{1}{6}\right)\pi$. **28**. $\varphi=90^0(2m+1)$. **29**. $\varphi_1=180^0 . m$; $\varphi_2=180^0m+(-1)^m30^0$. **30**. $\varphi=180^0(m-1)+(-1)^m24^028'11''$.

31. $\varphi=360^0m\mp74^027'28''$. **32**. $\varphi_1=180^0m$; $\varphi_2=arc\sin\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3-\frac{b}{a}}\right)$, при этомъ $2\leqslant\frac{b}{a}<3$. **33**. $\varphi_1=360^0m\mp90^0$;
$\varphi_2=arc\cos\left(\pm\sqrt{\frac{3a+b}{4a}}\right)$, при чемъ $-3<\frac{b}{a}\leqslant1$. **34**. $\varphi=360^0m\mp$ $\mp51^049'37''$. **35**. $\varphi_1=360^0m$; $\varphi_2=360^0m\mp17^036'30''$; $\varphi_3=360^0m\mp$ $\mp121^038'20''$. **37**. $\varphi=180^0 . m_1+(-1)^{m_1}55^00'54''-20^033'22''$.
38. $\varphi=180^0m+(-1)^m55^030'10''-74^03'17''$. **39**. $\varphi=180^0m+(-1)^m62^07'-$ -45^0. **40**. $\varphi=180^0m+(-1)^m14^035'25''+49^05'9''$.
41. $\varphi_1=90^0 . (4m+1)$; $\varphi_2=360^0m-16^015'38''$. **42**. $\varphi=180^0m-$ $-(-1)^m24^010'49''+55^00'29''$. **44**. $\varphi=180^0m+(-1)^m10^010'55''+45^0$.
45. $\varphi=180^0m+(-1)^m9^036'34''-225^0$. **46**. $\varphi=360^0m\mp64^05'9''+225^0$.

Отвѣты.

Физическія задачи, рѣшаемыя съ примѣненіемъ тригонометріи.

1. 12,596 пуда; $35^0 8' 28''$; $54^0 51' 32''$. **2**. $x = \mp \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\varphi}$; max. $x = P + Q$; min. $x = \mp(P - Q)$. **3**. $R = 12{,}199$ пуда; $38^0 23' 8''$; $30^0 25' 6''$. **4**. 3,649; 3,4183. **5**. 1) $S = \frac{P}{2\sin\alpha}$; 2) $T = \frac{1}{2} P \, . \operatorname{ctg}\alpha$.

6. $\frac{x}{y} = \frac{Q^2 + R^2 - P^2}{R^2 + P^2 - Q^2}$, гдѣ x и y отрѣзки прямой AB, прилежащіе соотвѣтственно къ точкамъ приложенія силъ P и Q. **7**. 19 и 17 klgr. **8**. $139^0 18' 56''$. **9**. 1) 24,836 пуд.; 2) 9,713 пуда. **10**. 3,5372; $16^0 25' 20''$. **11**. $x = \frac{1}{2} P \, . \sec\frac{\alpha}{2}$; $x = \frac{1}{2} P$; $\frac{1}{3} P \sqrt{3}$; $\frac{1}{2} P \sqrt{2}$; P; ∞.

13. $\operatorname{ctg}\varphi = 0{,}3$; $\varphi = 73^0 18' 3''$. **14**. $x = V \, . \operatorname{ctg}\alpha$; около 37 метр. въ сек. **15**. $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}75$; $36^0 52' 12''$. **16**. На $1^0 8' 45'',5$. **17**. $20'',62$. **18**. 301970 klm. въ сек. **19**. 25 gr.; равнодѣйствующая направлена подъ угломъ въ $36^0 52' 18''$ къ вертикальному направленію. **21**. 1) $p\sin\alpha + q = 282{,}6$ klgr. и 2) $p\cos\alpha = 2997{,}1$ klgr. **22**. $x = 18{,}059$ klgr.; $y = 36{,}251$ klgr. **23**. 2,333 klgr. **24**. 22^0. **25**. $\frac{1}{2} gt^2 \, . \sin\alpha = 7{,}866$ м. **26**. $x = \frac{p\sin\alpha}{\cos\varphi}$.

27. 1) $x = p\cos\alpha$; 2) $y = \frac{1}{2} p \, . \sin 2\alpha$ и 3) при $\alpha = 45^0$. **29**. $x = \frac{ap\sin\alpha}{q\sin\beta}$; $r = p\sin\alpha + q\sin\beta$. **30**. $\sin\beta = \frac{pa\sin\alpha}{qb}$; $\beta = 38^0 0' 37''$.

31. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{pl}{Pd} = \frac{1}{300}$; $\varphi = 0^0 11' 27'',5$. **32**. Если уголъ наклоненія болѣе длиннаго плеча къ горизонтальной плоскости равенъ φ^0, то вообще $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2q + p\cos\alpha}{p\sin\alpha}$, а въ данномъ частномъ случаѣ $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$; отсюда $\varphi = 180^0 \, . m + 60^0$, гдѣ m—любое цѣлое число. **33**. Если разстояніе точки опоры отъ конца A равно x см., то $x = \frac{a\cos 45^0 \cos\varphi}{\sin(45^0 + \varphi)}$, причемъ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{p\sin\alpha}{q\sin\beta}$. **34**. Для рѣшенія задачи составляется уравненіе:

$3\sin\alpha - 2\sin(60^0+\alpha) + \sin(60^0-\alpha) = 0$, откуда $\alpha = 30^0$. **36.** $\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} =$ $=0{,}036496$ (вершка). **37.** $\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)} = 0{,}13325$ м.

38. $\varphi = arc\sin\frac{1}{n}$. **39**. $x = \frac{a^2\cos i}{a^2+R^2}$, при чемъ $\cos i = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$, такъ что $x = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)^3$. **42.** $\sin r = \frac{\cos\alpha}{\mu}$; $r = 30^055'43''$.

43. При $56^018'36''$. **44**. 0,39133. **45**. $\frac{\sqrt{10}}{2} = 1{,}58$. **46**. $8^038'8''$.

48. $x = \frac{b\sin(i-r)}{\cos r}$, при чемъ $\sin r = \frac{\sin i}{\mu}$; $x = 0{,}38762$ см. **49**. 1,1717.

50. $\mu = \frac{\sin i}{\sin r}$, при чемъ $\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} i\,.\,\sin^2\varphi$, а $\cos\varphi = \sqrt{\frac{m}{b\sin i}}$; $\mu = 1{,}586$. **51**. $\frac{9}{8}$. **52**. $i_1 = i$. **53**. Преломившись при переходѣ изъ воздуха въ стеклянную стѣнку сосуда, лучъ пройдетъ въ этой стѣнкѣ 4,108 mm.; затѣмъ, преломившись при переходѣ изъ стѣнки сосуда въ воду, онъ пройдетъ въ водѣ 103,45 mm.; наконецъ, въ противоположной стѣнкѣ сосуда онъ пройдетъ опять 4,108 mm., послѣ чего выйдетъ изъ сосуда. **54**. При $i = 41^048'38''$. **55**. При $i = 48^035'25''$. **56**. При $i = 62^044'$. **57**. Пред. $\sin i = \sqrt{(\mu_1+1)(\mu_1-1)}$; I. Пред. $i = \min$. $i = 62^022'5''$. II. Пред. $y = 91{,}362$ mm. **58**. По грани AC. **59**. Первые лучи будутъ имѣть полное внутреннее отраженіе отъ грани AC, а вторые выйдутъ изъ призмы. **60**. Лучъ, войдя въ призму черезъ одну ея грань, отклонится отъ своего первоначальнаго направленія на уголъ въ $18^058'47''$; далѣе онъ будетъ имѣть полное внутреннее отраженіе отъ второй грани въ точкѣ, отстоящей отъ вершины преломляющаго угла на разстояніи, равномъ 0,6 a см.; наконецъ, онъ выйдетъ изъ призмы, преломившись при прохожденіи черезъ третью грань. **62**. $37^010'50''$. **63**. $69^017'$. **64**. $24^046'28''$. **65**. 1,63. **66**. $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 0{,}02$; $\varphi = 2^017'30''$.

(3)