И. С. Теръ-Степановъ,
Инженеръ Путей Сообщенія.

СБОРНИКЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ

НА ВЫЧИСЛЕНІЕ

ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

Часть I.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Складъ изданія въ книжн. магаз. Т-ва „Н. П. Карбасниковъ“

Петербургъ, Гостиный дворъ № 19. | **Москва,** Моховая д. Баженова. | **Варшава,** Новый Свѣтъ д. № 69.

1912 г.

Типографія Спб. Т-ва Печ. и Изд. дѣла «Трудъ». Кавалергардская, 40.

Трудъ этотъ, представленный въ рукописи въ **Ученый Комитетъ** Министерства Народнаго Просвѣщенія, былъ удостоенъ слѣдующаго отзыва:

„Сборникъ этотъ содержитъ 1196 задачъ, составленныхъ хорошо и умѣло. Между этими задачами много очень интересныхъ“...

(Извѣщеніе изъ Департамента Народнаго просвѣщенія за № 19728 отъ 12 мая 1912 года).

ВАЖНѢЙШІЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Строк.	Напечатано.	Слѣдуетъ.
25	5 сн.	$\frac{2}{3}$;	$\frac{2}{3}d$;
28	1 „	2;K	2.K;
48	6 „	$OO_1 = 8$	$OO_1=8$,
63	5 „	ON	CN
67	11 св.	Высота	Высоты
107	17 „	$\sqrt{-2\sqrt{3}}$	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$
109	2 „	OC_1	CC_1
119	12 сн.	$\frac{x}{20}$	$\frac{x}{12}$
121	9 „	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{5}$
152	3 св.	$\sqrt{r.\rho_a\cdot\rho_a\cdot\rho_a}$	$\sqrt{r.\rho_a\cdot\rho_b\cdot\rho_c}$
152	12 „	$\rho_a+\rho_a+\rho_c-r=4R$	$\rho_a+\rho_b+\rho_c-r=4R$.
161		Черт. 161.	Черт. 155.
165	16 „	$A.\frac{MN}{2}$	$AB\cdot\frac{NM}{2}$
167	12 „	CB	На CB
181	10 „	$\frac{\sqrt{\ }}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Задачи по геометріи имѣютъ двоякое значеніе. Онѣ прежде всего служатъ для усвоенія теоріи и примѣненія ея къ частнымъ случаямъ; это — ихъ служебная роль. Кромѣ того, онѣ имѣютъ и самостоятельное значеніе, являясь весьма важнымъ орудіемъ въ дѣлѣ развитія мышленія и геометрическаго воображенія. Сообразно этому задачи въ предлагаемомъ сборникѣ помѣщены двоякія. Въ каждомъ отдѣлѣ подъ каждымъ заголовкомъ помѣщены сперва нетрудныя задачи, рѣшающіяся болѣе или менѣе непосредственно на основаніи извѣстныхъ теоремъ и формулъ. За ними слѣдуютъ въ порядкѣ постепенной трудности задачи второго рода; рѣшенія этихъ задачъ основаны на геометрическихъ особенностяхъ, вытекающихъ изъ заданныхъ условій и построеній, причемъ иногда приходится прибѣгать и къ вспомогательнымъ построеніямъ. Для рѣшенія этого рода задачъ въ иныхъ случаяхъ требуется нѣкоторая находчивость, геометрическая догадливость, которыя сразу даютъ ключъ къ рѣшенію задачи; иногда же задача требуетъ методичности мышленія и рѣшается послѣдовательнымъ рядомъ сознательныхъ умозаключеній, которыя постепенно приводятъ къ отвѣту. Эти двѣ способности различны и очень часто не совпадаютъ.

Весьма часто при прохожденіи геометріи учащимся излагаютъ теоремы съ ихъ доказательствами въ готовомъ видѣ, и имъ остается только усвоить готовыя доказательства, что особенно замѣтно въ началѣ курса, гдѣ новизна предмета и его трудность еще болѣе способствуютъ этому. Такой способъ прохожденія теоріи препятствуетъ самодѣятельности мысли. Коррективомъ къ такому положенію дѣла является, между прочимъ, рѣшеніе возможно большаго количества соотвѣтственнымъ образомъ составленныхъ задачъ въ самомъ началѣ курса, по мѣрѣ его прохожденія, чтобы на первыхъ же порахъ вызвать въ ученикѣ самодѣятельность мышленія, геометрическую догадливость. Пріучаясь сперва на задачахъ, учащіеся затѣмъ и къ теоріи будутъ относиться также сознательно. Въ силу этихъ соображеній въ настоящемъ сборникѣ много вниманія удѣлено первымъ отдѣламъ.

При составленіи задачъ числа и условія подбирались такимъ образомъ, чтобы выкладки были возможно простыя и не отвлекали бы вниманія отъ существа вопроса.

Всѣ задачи снабжены отвѣтами, которые помѣщены въ концѣ книжки, а болѣе трудныя — имѣютъ при себѣ указанія или рѣшенія съ чертежами.

Въ заключеніе—авторъ приметъ съ благодарностью всякія замѣчанія и указанія относительно выбора и расположенія матеріала въ этой книжкѣ, а также относительно замѣченныхъ погрѣшностей *).

И. С. Теръ-Степановъ.
1912 г.

*) Адресъ автора: С.-Петербургъ. Загородный пр., д. 23.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стр.

Отдѣлъ I.

Прямая линія. Углы. Фигуры.

ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

1. На неограниченной прямой даны 10 точекъ на разстояніи одного дюйма одна отъ другой. Опредѣлить разстояніе между крайними точками.

2. Данъ отрѣзокъ прямой длиною въ 1 футъ; между крайними точками даны 5 точекъ, которыя дѣлятъ данный отрѣзокъ на равныя части. Опредѣлить эти части.

3. На протяженіи 5 арш. вбиты въ землю колья на разстояніи одного арш. другъ отъ друга. Затѣмъ въ каждомъ промежуткѣ вбиты еще по два кола. Сколько всего вбито кольевъ?

4. На данной прямой отложены отъ точки A въ одну сторону отъ нея два отрѣзка: AB, равный 3 дюйм., и AC, равный 5 дюймамъ. Найти разстояніе отъ B до C.

5. Данъ отрѣзокъ прямой AB, равный 12 дюйм.; на немъ даны двѣ точки C и D такъ, что $AC=3$ дюйм., а $BD=4$ дюйм. Найти длину CD.

6. Данъ отрѣзокъ прямой; на его продолженіи дана точка, отстоящая отъ его концовъ на разстояніи 2 дюйм. и 5 дюйм. Найти длину даннаго отрѣзка.

7. Дана ограниченная прямая AB; на ней даны двѣ точки M и N такъ, что $AM=4$ дюйм., $AN=6$ дюйм. и $BM=5$ дюйм. Опредѣлить длину BN.

8. Данъ отрѣзокъ прямой AB длиною 8 дюйм., на немъ даны точки C и D такъ, что $AC=BD=5$ дюйм. Опредѣлить длину CD.

Замѣчаніе. Обратить вниманіе на расположеніе точекъ C и D.

9. На данномъ отрѣзкѣ дана точка на разстояніи 3 дм. и 7 дм. отъ концовъ его. Опредѣлить разстояніе этой точки отъ середины даннаго отрѣзка.

10. Данъ отрѣзокъ длиною въ 6 дюйм.; на немъ дана точка на разстояніи 1 дюйма отъ его середины. Найти разстояніе этой точки отъ концовъ даннаго отрѣзка.

11. На продолженіи даннаго отрѣзка дана точка на разстояніи 4 дюйм. и 10 дм. отъ концовъ его. Опредѣлить разстояніе этой точки отъ середины даннаго отрѣзка.

12. Отрѣзокъ прямой AB продолженъ въ одну сторону, и на продолженіи его даны двѣ точки C и D такъ, что $AC=10$, $BC=3$ и $AD=12$. Найти разстояніе BD.

13. Данъ отрѣзокъ прямой; на его продолженіи дана точка, которая къ одному изъ концовъ отрѣзка на 4 дюйма ближе, чѣмъ къ серединѣ отрѣзка. Опредѣлить длину отрѣзка.

14. Отрѣзокъ, равный 6, раздѣленъ на двѣ неравныя части. Опредѣлить разстояніе между серединами этихъ частей.

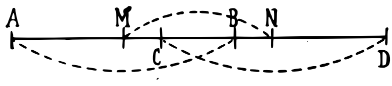
15. Три отрѣзка имѣютъ общее начало; конецъ перваго отрѣзка служитъ серединой второго, а конецъ второго отрѣзка служитъ серединой третьяго. Сумма всѣхъ отрѣзковъ равна 14. Опредѣлить каждый изъ нихъ.

16. Два отрѣзка, каждый длиною въ 15 дюйм., покрываютъ другъ друга на одну треть своей длины. Найти разстояніе между крайними ихъ концами.

17. Два отрѣзка покрываютъ другъ друга на половину своей длины. Разстояніе между ихъ крайними концами равно 18. Опредѣлить длину каждаго отрѣзка.

18. Два равныхъ отрѣзка AB и CD покрываютъ другъ друга на одну треть своей длины (CB); найти длину каждаго отрѣзка, если разстояніе MN между серединами этихъ отрѣзковъ равно 12.

Рѣш. (черт. 1) $MC = \frac{1}{6}AB$, $CN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$; слѣд. $MC + CN = \frac{2}{3}AB$, т. е. $MN = \frac{2}{3}AB$ или $12 = \frac{2}{3}AB$, откуда $AB = 18$.



Черт. 1.

19. На данномъ отрѣзкѣ даны двѣ точки на разстояніи 3 дюйм. и 5 дюйм. отъ одного изъ концовъ его; найти разстоянія этихъ точекъ отъ другого конца, если одно изъ этихъ разстояній 1) вдвое, 2) втрое болѣе другого.

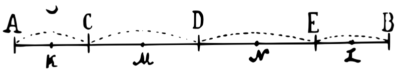
20. На данномъ отрѣзкѣ даны двѣ точки, разстояніе между которыми равно 4; каждая изъ этихъ точекъ дѣлитъ данный отрѣзокъ на двѣ части въ отношеніи 2:1. Опредѣлить его длину.

21. Отрѣзокъ, равный 10, раздѣленъ на три неравныя части; средняя часть равна 4. Найти разстояніе между серединами крайнихъ частей.

22. На прямой отложены послѣдовательно три отрѣзка; сумма ихъ равна 4. Разстояніе между серединами крайнихъ отрѣзковъ равно 3. Опредѣлить средній отрѣзокъ.

23. Отрѣзокъ, равный 24, раздѣленъ на четыре неравныя части; разстояніе между серединами крайнихъ частей равно 20. Найти разстояніе между серединами двухъ среднихъ частей.

Рѣш. (черт. 2) $AB = 24$; части его: AC, CD, DE и EB; K и L — середины крайнихъ частей; M и N — середины средних частей. По условію $KL = 20$; слѣд. $AK + LB = 24 - 20 = 4$, а $AC + EB$ вдвое болѣе, т. е. 8; слѣд. $CD + DE = 24 - 8 = 16$, а $\frac{CD}{2} + \frac{DE}{2} = \frac{16}{2}$ или $MD + DN = 8$, т. е. $MN = 8$.

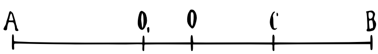


Черт. 2.

24. На прямой отложены послѣдовательно четыре отрѣзка; разстояніе между серединами двухъ среднихъ отрѣзковъ равно 6; а между серединами двухъ крайнихъ равно 20. Опредѣлить сумму всѣхъ отрѣзковъ.

25. На прямой даны два отрѣзка одинъ внѣ другого; разстояніе между внутренними ихъ концами 4 дм., а между крайними концами 20. Найти разстояніе между серединами этихъ отрѣзковъ.

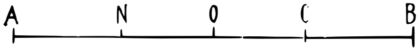
26. На данномъ отрѣзкѣ AB отъ его начала A отложенъ второй AC, который короче перваго на 6. Найти разстояніе между серединами O и O_1 этихъ отрѣзковъ.



Черт. 3.

Рѣш. (черт. 3) $AB - AC = 6$, слѣд. $\frac{AB}{2} - \frac{AC}{2} = \frac{6}{2}$, т. е. $AO - AO_1 = 3$ или $OO_1 = 3$.

27. Нѣкоторый отрѣзокъ прямой раздѣленъ на двѣ части, разность которыхъ равна 8; найти разстояніе отъ точки дѣленія до середины даннаго отрѣзка.



Черт. 4.

Рѣш. (черт. 4). I способъ. Пусть AB — данный отрѣзокъ, C — точка дѣленія; по условію $AC - BC = 8$, O — середина AB. Отложимъ AN, равный BC; слѣд. $AC - AN = 8$, т. е. $CN = 8$, а $CO = \frac{CN}{2} = 4$.

II способъ (*способъ введенія вспомогательной величины*). Обозначимъ меньшую часть т. е. BC буквой K (*произвольная величина*), тогда по условію $AC = K + 8$, $AB = K + K + 8$, а $OB = \frac{AB}{2} = K + 4$; $OC = OB - BC = K + 4 - K = 4$.

28. По данной прямой двигаются взадъ и впередъ отъ одного конца къ другому двѣ точки. Обѣ точки начали двигаться одновременно съ противоположныхъ концовъ, причемъ первая изъ нихъ двигается втрое быстрѣе другой. Опредѣлить мѣста ихъ послѣдовательныхъ встрѣчъ.

29. На плоскости даны 8 точекъ такъ, что никакія три изъ нихъ не лежатъ на одной прямой. Сколько различныхъ прямыхъ получится, если всевозможными способами соединить эти точки попарно прямыми линіями?

Рѣшеніе. Соединивъ первую изъ данныхъ точекъ со всѣми остальными, получимъ 7 прямыхъ; соединивъ каждую изъ 8-ми данныхъ со всѣми остальными точками, получимъ всего $7.8 = 56$ прямыхъ; но каждая прямая будетъ дважды повторяться; слѣд. различныхъ прямыхъ будетъ лишь $\frac{56}{2} = 28$.

30. Опредѣлить наибольшее возможное число точекъ пересѣченія 1) четырехъ прямыхъ, 2) десяти прямыхъ.

Рѣшеніе: 1) 2-я прямая пересѣкаетъ 1-ую въ одной точкѣ; 3-я прямая пересѣкаетъ двѣ первыя въ 2-хъ точкахъ; 4-ая прямая пересѣкаетъ три первыя въ 3-хъ точкахъ. Всего точекъ пересѣченія: $1+2+3=6$.

31. Вѣрно ли слѣдующее опредѣленіе прямой линіи: „прямая линія есть слѣдъ точки, движущейся по одному направленію?“

Рѣш. Нельзя понятіе о прямой линіи опредѣлять посредствомъ понятія о направленіи, такъ какъ понятіе о направленіи само вытекаетъ изъ понятія о прямой линіи.

УГЛЫ.

Опредѣленіе. Биссектриссой угла называется прямая, дѣлящая уголъ пополамъ.

Теорема. Всѣ прямые углы равны. Это значитъ, что прямой уголъ имѣетъ величину постоянную; поэтому онъ принимается за единицу измѣренія угловъ; итакъ всякій уголъ можно выразить въ частяхъ прямого угла (d).

Теорема. Пара смежныхъ угловъ равна $2d$.

Теорема. Сумма всѣхъ угловъ, расположенныхъ вокругъ ихъ общей вершины, равна $4d$.

32. Начертить на глазъ отъ руки 1) прямой уголъ, 2) половину прямого угла, 3) $\frac{d}{3}$, 4) $1\frac{1}{2}d$.

33. Данъ тупой уголъ; перпендикуляръ, возставленный изъ его вершины къ одной изъ сторонъ, дѣлитъ его на двѣ части, изъ которыхъ одна вдвое болѣе другой. Найти данный уголъ.

34. Данъ тупой уголъ, равный $\frac{5}{3}d$. Опред. уголъ между перпендикулярами, возставленными внутри его изъ вершины къ сторонамъ.

35. Данъ тупой уголъ; перпендикуляры, возставленные внутри его изъ вершины къ сторонамъ, дѣлятъ его на три равныя части. Найти данный уголъ.

36. Опредѣлить тупой уголъ, если перпендикуляры, возставленные внутри его изъ вершины къ сторонамъ, составляютъ уголъ $\frac{2}{3}d$.

37. Тупой уголъ равенъ $\frac{3d}{2}$; внутри его изъ вершины проведены двѣ прямыя: биссектрисса угла и перпендикуляръ къ одной изъ его сторонъ. Найти уголъ между ними.

38. Прямой уголъ раздѣленъ на три равныя части; найти уголъ между биссектриссами крайнихъ угловъ.

39. Даны два прилежащихъ острыхъ угла; изъ общей ихъ вершины къ ихъ общей сторонѣ возставленъ перпендикуляръ, который съ двумя другими ихъ сторонами образуетъ два угла $\frac{3d}{2}$ и $\frac{3d}{4}$. Найти данные углы.

40. Каждая изъ сторонъ прямого угла повернута вокругъ вершины угла во внутрь его на $\frac{d}{4}$. Опредѣлить уголъ между новыми положеніями сторонъ.

41. Два прилежащихъ угла вмѣстѣ равны $\frac{6}{5}$ d; опредѣлить уголъ между ихъ биссектриссами.

42. Дана пара смежныхъ угловъ; одинъ изъ нихъ равенъ $\frac{3}{4}$ d; найти другой уголъ.

43. Найти уголъ, который вдвое болѣе своего смежнаго угла.

44. Одинъ изъ смежныхъ угловъ въ 3 раза болѣе другого. Найти каждый изъ нихъ.

45. Найти уголъ, который вдвое менѣе своего смежнаго.

46. Смежные углы относятся какъ 3 : 5; найти каждый изъ нихъ.

47. Опредѣлить уголъ, который болѣе своего смежнаго на d.

48. Разность двухъ смежныхъ угловъ равна $\frac{d}{2}$. Найти каждый изъ нихъ.

49. Найти уголъ, который на $\frac{d}{3}$ менѣе своего смежнаго.

50. Найти уголъ, который равенъ половинѣ своего смежнаго.

51. Одинъ изъ смежныхъ угловъ составляетъ $\frac{2}{3}$ другого. Найти каждый изъ нихъ.

52. Опредѣлить уголъ, который вмѣстѣ съ половиной своего смежнаго угла равенъ $\frac{8}{5}d$.

53. Опредѣлить уголъ между биссектриссами двухъ смежныхъ угловъ.

54. Изъ точки O выходятъ три прямыя: OA, OB и OC, образующія три равныхъ угла. Опредѣлить каждый изъ этихъ угловъ.

55. Изъ точки O выходятъ 5 прямыхъ линій, образующихъ вокругъ точки O пять равныхъ угловъ. Найти каждый изъ иихъ.

56. Опредѣлить уголъ, образуемый часовой и минутной стрѣлкой въ 1) 3 часа, 2) 9 час., 3) 1 часъ, 4) 10 часовъ.

57. Опредѣлить тупой уголъ, который вмѣстѣ съ двумя своими смежными углами равенъ $\frac{11}{4}d$.

58. Данъ тупой уголъ $\frac{3}{2}d$; изъ его вершины внѣ его возставлены перпендикуляры къ сторонамъ; найти острый уголъ между ними.

59. Два равныхъ тупыхъ угла имѣютъ общую вершину, одну общую сторону, а двѣ другія ихъ стороны взаимно перпендикулярны. Опредѣлить эти углы.

60. Опредѣлить смежные углы, если $\frac{1}{3}$ одного изъ нихъ равна 0,2 другого.

61. Даны два смежныхъ угла: $\frac{1}{3}$ одного изъ нихъ болѣе, чѣмъ $\frac{1}{2}$ другого на $\frac{1}{4}d$. Найти данные углы.

62. Опредѣлить два смежныхъ угла, если перпендикуляръ, возставленный въ общей ихъ вершинѣ къ общей сторонѣ, образуетъ съ биссектриссой меньшаго угла уголъ $\frac{5}{4}d$.

63. Два равныхъ 1) острыхъ, 2) тупыхъ угла имѣютъ общую вершину, одна сторона одного угла служитъ продолженіемъ одной стороны другого угла, а двѣ другія стороны взаимно перпендикулярны. Опредѣлить каждый изъ этихъ угловъ.

64. Изъ точки, данной на прямой, выходятъ по одну сторону этой прямой двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя. Опредѣлить уголъ между биссектриссами крайнихъ острыхъ угловъ.

65. Даны два смежныхъ угла; перпендикуляръ, возставленный изъ ихъ вершины къ общей ихъ сторонѣ, образуетъ съ другими сторонами два смежныхъ угла, порознь равныхъ даннымъ двумъ угламъ. Найти данные углы.

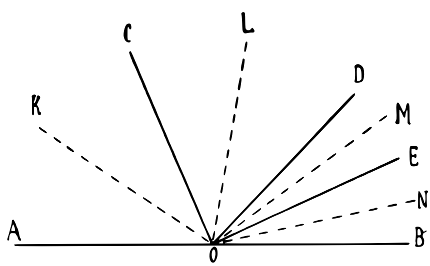
66. Даны два угла съ общей вершиной, одинъ внѣ другого; стороны одного угла перпендикулярны къ сторонамъ другого. Найти каждый изъ нихъ, если одинъ вдвое болѣе другого.

67. Одинъ изъ двухъ равныхъ 1) острыхъ, 2) тупыхъ угловъ наложенъ на другой такъ, что ихъ общая часть равна трети каждаго изъ нихъ; а наружныя стороны ихъ взаимно-перпендикулярны. Опредѣлить данные углы.

68. Опредѣлить острый уголъ между двумя пересѣкающимися прямыми, если перпендикуляръ, возставленный въ точкѣ ихъ пересѣченія къ одной прямой, образуетъ съ другой прямой пару смежныхъ угловъ, изъ которыхъ одинъ вдвое болѣе другого.

69. Уголъ $\frac{5}{3}d$, раздѣленъ на три неравныя части; средняя изъ нихъ равна $\frac{d}{3}$. Опредѣлить уголъ между биссектриссами крайнихъ частей.

70. Изъ точки, данной на прямой по одну сторону ея, выходятъ три прямыя; уголъ между биссектриссами двухъ крайнихъ угловъ $\frac{7}{5}d$. Опредѣлить уголъ между биссектриссами двухъ среднихъ угловъ.



Черт. 5.

Рѣшеніе (черт. 5). Пусть данные углы AOC, COD, DOE и EOB; прямыя OK, OL, OM, ON—ихъ биссектриссы. По условію $\angle KON = \frac{7}{5}d$; слѣд. $\angle AOK +$

$+\angle NOB = 2d - \frac{7}{5}d = \frac{3}{5}d$; $\angle AOC + \angle BOE = \frac{3}{5}d \cdot 2 = \frac{6}{5}d$; $\angle COD + \angle DOE = 2d - \frac{6}{5}d = \frac{4}{5}d$ и $\angle LOD + \angle DOE = \frac{4}{5}d : 2 = \frac{2}{5}d$, т. е. $\angle LOM = \frac{2}{5}d$.

71. Изъ данной точки выходятъ четыре прямыхъ уголъ между биссектриссами двухъ прилежащихъ угловъ равенъ $\frac{3}{4}d$. Опредѣлить уголъ между биссектриссами двухъ другихъ угловъ.

72. Какой уголъ описываетъ часовая стрѣлка въ 1) 1 часъ, 2) 15 мин.?

73. Какой уголъ описываетъ минутная стрѣлка въ 1) 1 мин., 2) 30 сек.?

74. Во сколько разъ минутная стрѣлка вращается быстрѣе часовой?

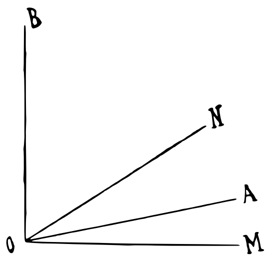
75. Во сколько разъ секундная стрѣлка вращается быстрѣе минутной?

76. Во сколько разъ секундная стрѣлка вращается быстрѣе часовой?

77. Два прямыхъ угла имѣютъ общую вершину и покрываютъ другъ друга 1) на половину, 2) на одну треть своей величины. Опредѣлить уголъ между крайними сторонами.

78. Одинъ острый уголъ наложенъ на другой такъ, что ихъ общая часть составляетъ двѣ трети каждаго изъ нихъ. Уголъ между ихъ крайними сторонами равенъ $\frac{4}{5}d$. Опредѣлить каждый изъ данныхъ угловъ.

79. Одинъ уголъ (MON) наложенъ на другой (AOB) такъ, что каждый изъ нихъ дѣлится одною стороною другого въ отношеніи 2 : 1 (считая по направленію движенія часовой стрѣлки). Крайнія стороны взаимно перпендикулярны; опредѣлить данные углы.



Черт. 6.

Рѣш. (черт. 6). Обозначимъ $\angle MOA$ черезъ x, тогда $\angle AON = 2x$, а $\angle BON = 4x$, $\angle BOM = 7x = d$; $x = \frac{d}{7}$. $\angle MON = \frac{3}{7}d$; $\angle AOB = \frac{6}{7}d$.

80. Опредѣлить острый уголъ, если перпендикуляръ, возставленный изъ его вершины къ его биссектриссѣ, составляетъ со сторонами его два угла, изъ которыхъ тупой вдвое болѣе остраго.

81. Нѣкоторый уголъ раздѣленъ прямой линіей на двѣ части, разность которыхъ равна $\frac{d}{2}$; найти уголъ между этой прямой и биссектриссой даннаго угла.

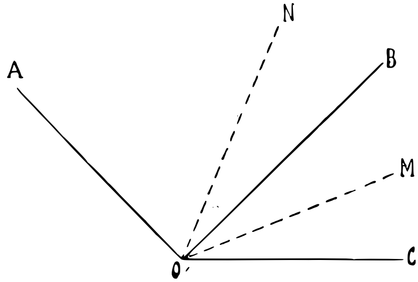
Указаніе. Рѣшается какъ зад. № 27.

82. Острый уголъ наложенъ на прямой такъ, что вершина и одна сторона у нихъ общія. Уголъ между ихъ биссектриссами равенъ $\frac{d}{6}$. Опредѣлить данный острый уголъ.

83. Прямой уголъ наложенъ на тупой такъ, что вершина и одна сторона у нихъ общія. Уголъ между ихъ биссектриссами равенъ $\frac{d}{6}$. Найти данный тупой уголъ.

84. Острый уголъ наложенъ на тупой уголъ такъ, что они имѣютъ одну общую вершину, одну общую сторону, а двѣ другія ихъ стороны взаимно перпендикулярны. Найти уголъ между ихъ биссектриссами.

Рѣшеніе. (черт. 7). 1-й способъ. Пусть OM есть биссектрисса угла COB, а ON— биссектрисса угла COA; тогда: $\angle CON = \frac{\angle COA}{2}$ и $\angle COM = \frac{\angle COB}{2}$; вычтя 2-ое равенство изъ 1-го, получимъ искомый уголъ $MON = \frac{AOB}{2} = \frac{d}{2}$.



Черт. 7.

2-й способъ (*способъ введенія вспомогательной величины*). Замѣтимъ, величина данныхъ угловъ остается произвольной; поэтому обозначимъ острый уголъ произвольной величиной K (*вспомогательная величина*); и примемъ K за данную величину. $\angle COA = K + d$; по условію $\angle CON = \frac{K+d}{2}$, а $\angle COM = \frac{K}{2}$; вычтя второе равенство изъ 1-го, получимъ искомый $\angle MON = = \frac{K+d}{2} - \frac{K}{2} = \frac{d}{2}$ (K при рѣшеніи сократилось).

85. Изъ точки O прямой AB по одну сторону ея проведены двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя OC и OD такъ, что образовались два неравныхъ тупыхъ угла AOC и BOD. Найти уголъ между ихъ биссектриссами.

86. По часовому циферблату вращаются двѣ стрѣлки одна по направленію движенія часовой стрѣлки, другая въ противоположную сторону, причемъ вторая вращается 1) вдвое, 2) втрое быстрѣе первой. Опредѣлить мѣста ихъ послѣдовательныхъ встрѣчъ, если обѣ стрѣлки начали двигаться одновременно съ числа 12.

ФИГУРЫ.

Общія свойства фигуръ.

87. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-а вдвое болѣе основанія. Периметръ равенъ 15 дюйм. Найти основаніе.

88. Стороны $\triangle$-а относятся какъ 4 : 5 : 6. Периметръ его равенъ 60. Найти стороны.

89. Периметръ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ 1 арш.; боковая сторона на 2 верш. болѣе основанія. Опредѣлить стороны $\triangle$-а.

90. Треугольникъ, периметръ котораго равенъ 12 дм., дѣлится высотой на два △-а, периметры которыхъ суть: 7 дюйм. и 9 дюйм. Опредѣлить высоту △-а.

91. Медіана, проведенная къ одной изъ боковыхъ сторонъ равнобедреннаго △-а, дѣлитъ его периметръ на двѣ части 15 и 6. Опредѣлить стороны.

92. Середины основанія и одной изъ боковыхъ сторонъ равнобедреннаго △-а дѣлятъ его периметръ на двѣ части 6 дюйм. и 14 дюйм. Опредѣлить его стороны.

93. Сколько діагоналей можно провести изъ одной вершины 1) пятиугольника, 2) десятиугольника, 3) n-угольника?

94. Сколько получится △-овъ, если провести всѣ діагонали изъ одной вершины 1) шестиугольника, 2) восьмиугольника, 3) n-угольника.

95. Доказать, что въ равнобедренномъ △-ѣ: 1) медіаны боковыхъ сторонъ равны, 2) биссектриссы угловъ при основаніи равны.

96. Двѣ стороны △-а суть 3 дюйм. и 5 дюйм. Между какими предѣлами заключается третья сторона?

97. Стороны △-а выражаются въ цѣлыхъ числахъ дюймовъ; двѣ стороны суть 1 дюйм. и 7 дюйм. Опредѣлить третью сторону.

98. Доказать, что въ равнобедренномъ △-кѣ высоты, опущенныя на боковыя стороны, равны.

99. Четырехугольникъ двумя діагоналями дѣлится на четыре треугольника. Сумма периметровъ этихъ △-ковъ равна 58 дюйм.; сумма діагоналей равна 18 дюйм. Опредѣлить периметръ четырехугольника.

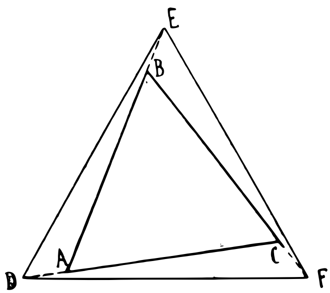
100. Периметръ равнобедреннаго △-ка равенъ 15 дюйм. Медіана одной изъ его боковыхъ сторонъ дѣлитъ его на два △-а, периметры которыхъ разнятся на 3 дюйма. Опредѣлить стороны (2 случая).

101. Сторона равносторонняго △-ка равна 8; найти проекцію каждой стороны на направленіе другихъ сторонъ.

102. Доказать, что одна сторона $\triangle$-а менѣе половины периметра.

103. Опредѣлить видъ $\triangle$-а, вершинами котораго служатъ середины сторонъ даннаго равносторонняго $\triangle$-а.

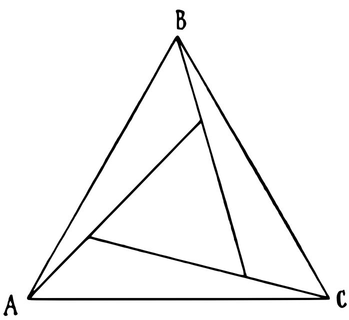
104. Каждая изъ сторонъ равносторонняго $\triangle$-а ABC продолжена: AB — за вершину B, BC — за вершину C, CA — за вершину A; на продолженіяхъ отложены отрѣзки одинаковой длины и концы ихъ соединены между собой. Опредѣлить видъ полученнаго $\triangle$-а.



Черт. 8

Указаніе (чертежъ 8). $\triangle DCF = \triangle DAE$ по двумъ сторонамъ и углу между ними; слѣд. $DF = DE$; аналогично $DE = EF$.

105. Данъ равносторонній $\triangle$-ъ; каждая сторона его повернута на одинъ и тотъ же уголъ вокругъ соотвѣтствующей вершины по направленію движенія часовой стрѣлки во внутрь $\triangle$-а. Какой $\triangle$-ъ образуется новымъ положеніемъ сторонъ? (Черт. 9).

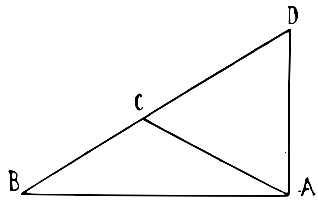


Черт. 9.

106. Данъ равносторонній $\triangle$-ъ, около него описанъ другой $\triangle$-ъ, стороны котораго перпендикулярны къ сторонамъ даннаго. Опредѣлить видъ описаннаго $\triangle$-а.

107. Доказать теорему: если двѣ стороны и уголъ противъ большей изъ нихъ одного $\triangle$-а соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ и углу противъ большей изъ нихъ другого $\triangle$-а, то $\triangle$-ки равны.

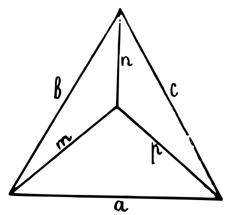
108. Показать, что если двѣ стороны и уголъ противъ меньшей изъ нихъ одного и другого $\triangle$-а соотвѣтственно равны, то $\triangle$-и могутъ быть какъ равными, такъ и неравными (черт. 10).



Черт. 10.

109. Доказать, что сумма разстояній трехъ вершинъ $\triangle$-а отъ произвольной точки внутри его болѣе полупериметра $\triangle$-а и менѣе периметра.

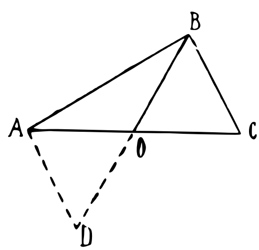
Доказ. Обозначимъ стороны $\triangle$-а черезъ a, b, c (черт. 11); а разстоянія его вершинъ отъ произвольной точки внутри черезъ m, n, p. Треб. док.: $m+n+p>\frac{a+b+c}{2}$ и $m+n+p<a+b+c$. Доказ. 1) $m+p>a$, $m+n>b$, $n+p>c$; сложивъ ихъ почленно, получимъ $2m+2n+2p>a+b+c$, откуда $m+n+p>\frac{a+b+c}{2}$ 2) По свойству ломанной линіи внѣшней и внутренней имѣемъ: $m+p<b+c$, аналогично: $m+n<a+c$ и $n+p<a+b$; сложивъ эти три неравенства почленно, получимъ: $2m+2n+2p<2a+2b+2c$, откуда $m+n+p<a+b+c$.



Черт. 11.

110. Доказать, что медіана $\triangle$-а менѣе полусуммы сторонъ, выходящихъ изъ той же вершины.

Доказ. Пусть BO медіана $\triangle$-а ABC (черт. 12); треб. доказ., что $BO<\frac{AB+BC}{2}$. Продолжимъ BO и отложимъ $OD=OB$; соединимъ D и A; тогда $\triangle$-ки BOC и AOD равны; слѣд. $AD=BC$. Очевид-



Черт. 12.

но, что $BD < AB + AD$, т.-е. $2 . BO < AB + BC$, откуда $BO < \frac{AB + BC}{2}$.

111. Одна сторона $\triangle$-а менѣе суммы двухъ другихъ сторонъ на 3 дюйма, вторая сторона менѣе суммы двухъ другихъ на 5 дюйм. Опредѣлить третью сторону.

Рѣшеніе. Обозначимъ стороны $\triangle$-а черезъ a, b, c; тогда $a + 3 = b + c$ и $b + 5 = a + c$; сложивъ почленно оба равенства, получимъ $a + b + 8 = b + a + 2c$, или $8 = 2c$, т.-е. $c = 4$.

112. Сколькими данными и какими, напримѣръ, опредѣляется $\triangle$ ъ?

Рѣшеніе. $\triangle$-ъ будетъ опредѣленный, напримѣръ, если даны: 1) двѣ стороны и уголъ между ними; или 2) два угла и сторона между ними; или 3) три стороны (и вообще когда даны три независимыхъ элемента $\triangle$-ка; по крайней мѣрѣ одинъ элементъ долженъ быть линейный).

113. Сколькими данными и какими, напримѣръ, опредѣляется прямоугольный $\triangle$?

114. Сколькими данными и какими, напримѣръ, опредѣляется четырехугольникъ?

115. Найти число различныхъ діагоналей 1) пятиугольника, 2) шестиугольника, 3) двадцатиугольника, 4) n-угольника.

Рѣшеніе. 3) Изъ одной вершины 20-тиугольника можно провести 17 діагоналей; изъ 20-ти вершинъ — 17 . 20 діагоналей; но каждая діагональ повторяется дважды; слѣд. число различныхъ діагоналей $= \frac{17 . 20}{2} = 170$.

116. *) Найти число сторонъ многоугольника, если число различныхъ его діагоналей равно 1) 5, 2) 20, 3) 44.

Рѣшеніе. 1) Пусть искомое число сторонъ $= x$; тогда число діагоналей $\frac{x(x-3)}{2}$ (см. предыд. задачу); слѣд. $\frac{x(x-3)}{2} = 5$; рѣшивъ это уравненіе, получимъ $x = 5$.

*) Приводится къ квадратному уравненію.

117. *) Найти число сторонъ многоугольника, если оно 1) равняется числу всѣхъ его разныхъ діагоналей, 2) вдвое менѣе или 3) вдвое болѣе числа діагоналей.

Рѣшеніе. 1) Обозначимъ искомое число сторонъ черезъ x; тогда число діагоналей будетъ $\frac{x(x-3)}{2}$ (см. зад. № 115); по условію: $x = \frac{x(x-3)}{2}$, сократив на x, получимъ: $\frac{x-3}{2} = 1$; откуда $x = 5$.

2) $2x = \frac{x(x-3)}{2}$; слѣд. $2 = \frac{x-3}{2}$; откуда $x = 7$.

3) $\frac{x}{2} = \frac{x(x-3)}{2}$; слѣд. $1 = x - 3$; откуда $x = 4$.

Параллельныя линіи. Сумма угловъ треугольниковъ и многоугольниковъ.

118. Двѣ параллельныя прямыя при пересѣченіи съ третьей образуютъ восемь угловъ; одинъ изъ нихъ равенъ $\frac{3d}{5}$. Опредѣлить всѣ остальные.

119. Двѣ параллельныя прямыя пересѣчены сѣкущей; изъ двухъ внутреннихъ одностороннихъ угловъ одинъ въ три раза болѣе другого. Найти каждый изъ нихъ.

120. Даны два угла съ параллельными сторонами, при чемъ одинъ изъ нихъ болѣе другого 1) на d, 2) въ два раза. Найти каждый изъ нихъ.

121. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ катеты равны; найти каждый изъ острыхъ угловъ.

122. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $\frac{2d}{5}$; найти каждый уголъ при основаніи.

123. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ одинъ изъ острыхъ угловъ вдвое болѣе другого. Найти каждый изъ нихъ.

124. Углы $\triangle$-а относятся какъ 1: 2: 3. Найти каждый изъ нихъ.

---

*) Приводится къ квадратному уравненію.

125. Данъ равносторонній $\triangle$-ъ; найти каждый изъ внѣшнихъ угловъ.

126. Данъ равнобедренный $\triangle$-ъ, у котораго уголъ при вершинѣ равенъ суммѣ угловъ при основаніи; найти каждый изъ послѣднихъ.

127. Въ равнобедренномъ $\triangle$-ѣ уголъ при вершинѣ равенъ своему смежному; найти углы при основаніи.

128. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $\frac{d}{3}$; на боковую сторону опущена высота. Найти уголъ между этой высотой и основаніемъ.

129. Въ равнобедренномъ $\triangle$-ѣ уголъ при основаніи, равный $\frac{4d}{5}$, раздѣленъ пополамъ прямою. Найти острый уголъ между этой прямой и противолежащей боковой стороной.

130. Уголъ при основаніи равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $\frac{d}{3}$; найти уголъ между одной боковой стороной и высотой, опущенной на другую боковую сторону.

131. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ гипотенуза продолжена въ обѣ стороны; вслѣдствіе этого образовались два внѣшнихъ угла; одинъ равенъ $\frac{5}{3}d$. Найти другой.

132. Внѣшній уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $\frac{2d}{3}$; найти внѣшніе углы при основаніи.

133. Данъ равнобедренный прямоугольный $\triangle$-ъ; найти острый уголъ между катетомъ и биссектриссой противолежащаго угла.

134. Въ равностороннемъ $\triangle$-ѣ проведены двѣ медіаны; найти острый уголъ между ними.

135. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго $\triangle$-а равенъ $\frac{d}{3}$; найти острый уголъ между гипотенузой и биссектриссой прямого угла.

136. Въ прямоугольномъ равнобедренномъ $\triangle$-ѣ гипотенуза служитъ основаніемъ и равна a. Найти высоту.

137. Въ равнобедренномъ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ сумма основанія и высоты равна 15 дм. Опредѣлить основаніе.

138. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а вдвое болѣе высоты; найти уголъ при вершинѣ.

139. Въ концѣ гипотенузы a прямоугольнаго равнобедреннаго $\triangle$-а возставленъ перпендикуляръ до пересѣченія съ продолженіемъ противолежащаго катета. Найти длину этого перпендикуляра.

140. Данъ прямоугольный $\triangle$-ъ; изъ вершины прямого угла проведены къ гипотенузѣ высота и биссектрисса; уголъ между ними равенъ $\frac{d}{6}$. Найти острые углы $\triangle$-а.

141. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $\frac{2d}{5}$; къ одной изъ боковыхъ сторонъ проведены изъ противолежащей вершины высота и биссектрисса. Найти уголъ между ними.

142. Найти тупой уголъ между биссектриссами острыхъ угловъ прямоугольнаго $\triangle$-а.

143. Данъ равносторонній $\triangle$-ъ; основаніе его продолжено въ обѣ стороны; образовавшіеся два внѣшнихъ угла раздѣлены пополамъ прямыми, которыя продолжены до взаимной встрѣчи. Найти уголъ между ними.

144. Высота равнобедреннаго $\triangle$-а дѣлить его на два равнобедренныхъ $\triangle$-а. Найти уголъ при вершинѣ даннаго $\triangle$-а.

145. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $\frac{4d}{3}$; изъ этой вершены проведена прямая, которая отсѣкаетъ отъ основанія отрѣзокъ, равный боковой сторонѣ $\triangle$-а. Найти острый уголъ, образуемый проведенной прямой съ основаніемъ $\triangle$-а.

146. Данъ равнобедренный $\triangle$-ъ; къ боковой сторонѣ его проведена изъ противолежащей вершины прямая, равная основанію и образующая съ нимъ уголъ $\frac{d}{2}$. Найти уголъ при вершинѣ $\triangle$-а.

147. Найти сумму внутреннихъ угловъ 1) 4-ехугольника, 2) 5-тиугольника.

148. Найти сумму внутреннихъ угловъ 1) 6-тиугольника, 2) 10-тиугольника, 3) 20-тиугольника.

149. Углы 4-ехугольника относятся какъ 1: 2: 3: 4. Найти каждый изъ нихъ.

150. Внѣшніе углы $\triangle$-а относятся какъ 2:3:3. Найти внутренніе углы.

151. Найти число сторонъ многоугольника, если сумма его угловъ равна: 1) $6d$, 2) $8d$, 3) $20d$.

152. Найти число сторонъ многоугольника, каждый уголъ котораго равенъ 1) $\frac{6}{5}d$, 2) $\frac{4}{3}d$.

153. Каждый изъ внѣшнихъ угловъ многоугольника равенъ: 1) $\frac{4}{3}d$, 2) $\frac{2}{3}d$, 3) $\frac{d}{2}$. Найти число сторонъ многоугольника.

154. Данъ $\triangle$-ъ; изъ вершины его проведена прямая линія, которая дѣлитъ его на два $\triangle$-а: равносторонній и равнобедренный. Найти углы даннаго $\triangle$-а.

155. На гипотенузѣ BC прямоугольнаго равнобедреннаго $\triangle$-а ABC отъ концовъ ея отложены отрѣзки BK и CL, равные катетамъ. Опредѣлить углы $\triangle$-а KAL.

156. Уголъ при вершинѣ $\triangle$-а равенъ $\frac{d}{3}$; найти подъ какимъ угломъ встрѣчаются биссектриссы: 1) внутреннихъ, 2) внѣшнихъ угловъ при основаніи $\triangle$-а.

157. Найти уголъ при вершинѣ $\triangle$-а, если биссектриссы угловъ при основаніи встрѣчаются подъ угломъ $\frac{4d}{3}$.

158. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $\frac{2}{5}d$; изъ концовъ основанія проведены двѣ прямыя до пересѣченія съ противолежащими сторонами; каждая изъ нихъ равна основанію $\triangle$-а. Подъ какимъ угломъ онѣ встрѣчаются?

159. Данъ равнобедренный прямоугольный $\triangle$-ъ ABC; на катетахъ его AB и AC даны точки M и N такъ, что $BM = MN = CN$. Точка M соединена съ C, а точка N съ B. Найти острый уголъ между прямыми BN и CM.

160. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $\frac{3d}{2}$; изъ вершины его проведены двѣ прямыя такъ, что каждая изъ нихъ отсѣкаетъ на основанiи отрѣзокъ, равный боковой сторонѣ. Найти уголъ между этими прямыми.

161. Данъ равнобедренный $\triangle$-ъ; основанiе его продолжено въ обѣ стороны и изъ вершины $\triangle$-а проведены двѣ прямыя, которыя на продолженiяхъ основанiя отсѣкаютъ отрѣзки, равные боковымъ сторонамъ; уголъ между этими прямыми равенъ $\frac{5d}{4}$. Найти уголъ при вершинѣ даннаго $\triangle$-а.

162. Данъ прямоугольный $\triangle$-ъ; найти углы 4-ехугольника, образованнаго биссектриссами внутреннихъ и внѣшнихъ угловъ при гипотенузѣ $\triangle$-а.

163. Биссектрисса одного изъ угловъ при основанiи равнобедреннаго $\triangle$-а равна его основанiю. Найти углы при основанiи $\triangle$-а.

Указ. Обозначить иском. уголъ черезъ x и составить уравненiе.

164. Данъ равнобедренный $\triangle$-ъ; биссектрисса угла при основанiи равна боковой сторонѣ $\triangle$-а. Найти каждый уголъ при основанiи.

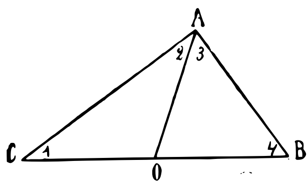
165. Въ $\triangle$-ѣ ABC $BA = BC$; изъ A провели прямую AM до пересѣченiя съ противолежащей стороной такъ, что $AM = BM = AC$. Найти уголъ B.

166. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а раздѣленъ на три равныя части двумя прямыми; каждая изъ этихъ прямыхъ отсѣкаетъ на основанiи отрѣзокъ, равный боковой сторонѣ $\triangle$-а. Найти углы при основанiи $\triangle$-а.

Указ. Можно рѣшить при помощи уравненiя, обозначивъ искомый уголъ черезъ x.

167. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а раздѣленъ на три равныя части двумя прямыми; каждая изъ этихъ прямыхъ дѣлитъ основаніе на двѣ части и равняется: 1) меньшей, 2) большей изъ этихъ частей. Найти уголъ при вершинѣ $\triangle$-а.

168. Доказать теорему: если медіана какой-либо стороны $\triangle$-а равна половинѣ этой стороны, то противолежащій ей уголъ прямой.



Черт. 13.

Доказ. Пусть въ $\triangle$-ѣ ABC медіана $AO = \frac{AB}{2}$. Такъ какъ $AO = OC = OB$, то $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$; сумма $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2d$; слѣд. $\angle 2 + \angle 3 = d$ (черт. 13).

169. Въ $\triangle$-ѣ ABC $AB = AC$; сторона AB продолжена за вершину A на длину $AD = AB$, и точка D соединена съ C. Найти уголъ BCD.

170. Биссектрисса одного изъ угловъ при основаніи равнобедреннаго $\triangle$-а отсѣкаетъ отъ него при боковой сторонѣ равнобедренный $\triangle$-ъ. Найти уголъ при вершинѣ даннаго $\triangle$-а. (2 случая).

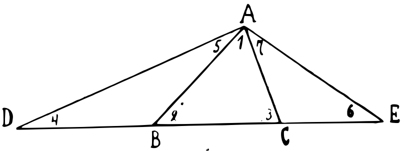
171. Изъ вершины тупого угла равнобедреннаго $\triangle$-а проведена прямая, которая дѣлитъ данный $\triangle$-ъ на два равнобедренныхъ $\triangle$-а. Найти уголъ при вершинѣ даннаго $\triangle$-а.

172. Сколько сторонъ имѣетъ многоугольникъ, если каждый изъ его внутреннихъ угловъ равенъ своему смежному?

173. Найти число сторонъ многоугольника, въ которомъ каждый изъ внутреннихъ угловъ вдвое: 1) болѣе, 2) менѣе своего смежнаго.

174. Въ $\triangle$-ѣ ABC уголъ при вершинѣ A равенъ $\frac{4}{5}d$. Основаніе BC продолжено въ обѣ стороны, и на продолженіяхъ отложены отрѣзки: $BD = BA$ и $CE = CA$. Опредѣлить уголъ DAE.

Рѣш. 1-й способъ. $\angle 1 = \frac{4d}{5}$; слѣд. $\angle 2 + \angle 3 = \frac{6d}{5}$; но $\angle 4 + \angle 5 = \angle 2$; такъ какъ $BD = BA$, то $\angle 4 = \angle 5$; слѣд. $\angle 4 =$ половинѣ $\angle 2$; аналогично $\angle 6 =$ половинѣ $\angle 3$, а $\angle 4 + \angle 6 = \frac{\angle 2 + \angle 3}{2} = \frac{3d}{5}$; слѣд. $\angle DAE = 2d - \frac{3d}{5} = \frac{7d}{5}$ (черт. 14).



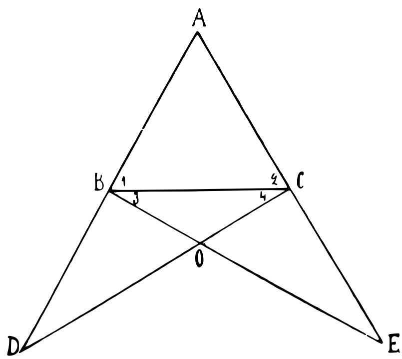
Черт. 14.

2-й способъ. (*Введеніе вспомогательной величины*). Такъ какъ $\angle 2$ остается произвольнымъ, то обозначимъ его буквой K, и будемъ рѣшать задачу, предполагая K извѣстной величиной. $\angle 3 = 2d - \frac{4}{5} d - K = \frac{6}{5} d - K$; $\angle 4 = \frac{K}{2}$; $\angle 6 = \frac{3d}{5} - \frac{K}{2}$; слѣд. $\angle 4 + \angle 6 = \frac{K}{2} + \frac{3d}{5} - \frac{K}{2} = \frac{3d}{5}$ (замѣтимъ, что K сократилось); слѣд. $\angle DAE = \frac{7d}{5}$.

175. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ ABC на гипотенузѣ BC даны точки D и E такъ, что BD равно BA и CE равно CA. Точки D и E соединены съ вершиной A. Опредѣлить уголъ DAE.

Указ. См. предыдущ. зад.

176. Въ $\triangle$-ѣ ABC уголъ при вершинѣ A равенъ $\frac{2d}{3}$. Боковыя стороны продолжены въ сторону основанія и на продолженіяхъ отложены отрѣзки, равные основанію: $BD = CE = BC$. Найти острый уголъ между прямыми CD и BE (черт. 15).



Черт. 15.

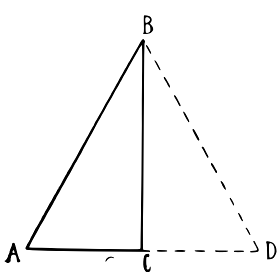
Рѣш. 1-й способъ. $\angle 1 + \angle 2 = \frac{4d}{3}$; въ $\triangle$-ѣ CBD $\angle 4 + \angle D =$ внѣшн. углу 1; но $\angle 4 = \angle D$; слѣд. $\angle 4 = \frac{\angle 1}{2}$; аналогично $\angle 3 = \frac{\angle 2}{2}$; слѣд. $\angle 3 + \angle 4 = \frac{\angle 1 + \angle 2}{2} = \frac{2d}{3}$ и $BOD = \frac{2d}{3}$.

2-й способъ. Можно также примѣнить способъ введенія вспомогат. величины, напр.: пусть $\angle 1 = K$, тогда $\angle 2 = \frac{4d}{3} - K$; $\angle 4 = \frac{\angle 1}{2} = \frac{K}{2}$; а $\angle 3 = \frac{\angle 2}{2} = \frac{2d}{3} - \frac{K}{2}$; $\angle 4 + \angle 3 = \frac{K}{2} + \left(\frac{2d}{3} - \frac{K}{2}\right) = \frac{2d}{3}$ (K сократилось); слѣд. $\angle BOD = \frac{2d}{3}$.

177. Въ $\triangle$-ѣ ABC уголъ при вершинѣ A равенъ $\frac{4d}{9}$, на сторонѣ AB дана точка M, а на сторонѣ AC — точка N такъ, что $BM = MN = NC$. Опредѣлить острый уголъ между прямыми BN и CM.

178. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ ABC каждый изъ катетовъ продолженъ въ сторону прямого угла A и на продолженныхъ катетахъ отложены отрѣзки BD и CE, равные гипотенузѣ BC. Черезъ точки D и E и концы гипотенузы проведены прямыя BE и CD. Найти уголъ между ними.

179. Доказать теорему. Если въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ одинъ изъ острыхъ угловъ равенъ $\frac{d}{3}$ (слѣд. другой $= \frac{2}{3} d$), то противолежащій ему катетъ равенъ половинѣ гипотенузы.



Черт. 16.

Доказ. Пусть въ $\triangle$-ѣ ABC уголъ C — прямой; $\angle B = \frac{d}{3}$, слѣд. $\angle A = \frac{2d}{3}$. Повернемъ данный $\triangle$-ъ вокругъ катета BC, получимъ $\angle ABD$, въ которомъ каждый уголъ $= \frac{2d}{3}$; слѣд.

$\triangle$-ъ ABD — равносторонній; откуда $AC = \frac{AD}{2} = \frac{AB}{2}$ (черт. 16).

Замѣчаніе. Эта теорема (также и слѣдующая) примѣняется къ рѣшенію многихъ изъ послѣдующихъ задачъ.

180. Доказать теорему. Если въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ гипотенуза вдвое болѣе одного изъ катетовъ, то противолежащій ему острый уголъ равенъ $\frac{d}{3}$ (а слѣд. другой $= \frac{2d}{3}$).

Доказ. Пусть въ $\triangle$-ѣ ABC уголъ C—прямой и $AC = \frac{AB}{2}$. Повернемъ $\triangle$-ъ ABC вокругъ катета BC, тогда $AD = AB = BD$, слѣд. $\angle ABD = \frac{2d}{3}$, а $\angle ABC = \frac{d}{3}$ (черт. 16).

181. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-а равна 8, уголъ при вершинѣ равенъ $\frac{4d}{3}$. Опредѣлить высоту.

Указ. См. № 179.

182. Одинъ изъ катетовъ прямоугольнаго $\triangle$-а равенъ 10, противолежащій ему уголъ равенъ $\frac{2d}{3}$. Опредѣлить высоту, опущенную на гипотенузу.

183. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго $\triangle$-а равенъ $\frac{d}{3}$. На какія части дѣлится гипотенуза, равная 12, высотой, на нее опущенной?

184. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго $\triangle$-а равенъ $\frac{d}{3}$; прямой уголъ его раздѣленъ на три равныя части двумя прямыми; на какія части эти прямыя дѣлятъ гипотенузу, равную 12?

185. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ одинъ изъ острыхъ угловъ равенъ $\frac{2}{3}$; его биссектрисса равна 4 дм. Опредѣлить большій катетъ.

186. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ одинъ изъ катетовъ равенъ 12, противолежащій уголъ равенъ $\frac{2d}{3}$. Опредѣлить его биссектриссу.

Указ. Пусть биссектрисса $= x$; см. № 179.

187. Въ равнобедренномъ $\triangle$-ѣ боковая сторона, равная 1 фут., удалена отъ противоположной вершины на разстояніи 6 дм. Опредѣлить углы при основаніи $\triangle$-а.

Указ. См. № 180.

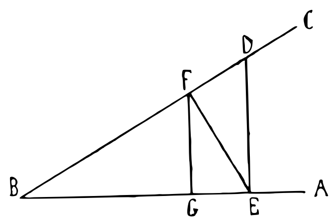
188. Данъ уголъ ABC, равный $\frac{d}{2}$. Изъ точки D, данной на сторонѣ BC, опущенъ $DE \perp BA$, изъ E провели $EF \perp BC$, изъ F провели $FG \perp AB$; $DE = a$. Найти FG.

189. Уголъ $ABC = \frac{2}{3}d$; изъ точки K, данной на сторонѣ AB, опущенъ перпендикуляръ KL на сторону BC, изъ точки L опущенъ перпендикуляръ LM на сторону AB, изъ точки M опущенъ перпендикуляръ MN на сторону BC и т. д. Опредѣлить длину всѣхъ перпендикуляровъ послѣдовательно, если первый изъ нихъ равенъ 16.

190. Въ равностороннемъ $\triangle$-ѣ проведены двѣ высоты; каждая изъ нихъ равна 12. На какія части одна высота дѣлится другою?

Указ. См. № 179.

191. Данъ уголъ ABC, равный $\frac{d}{3}$. Изъ точки D опущенъ перпендикуляръ DE, равный 4, на сторону BA, изъ E опущенъ $EF \perp$ къ сторонѣ BC, изъ F опущенъ перпендикуляръ FG на сторону BA. Найти длину FG. (черт. 17).



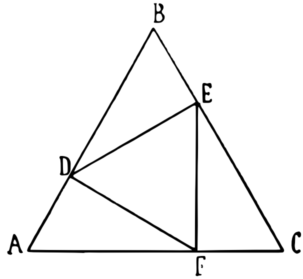
Черт. 17.

Рѣш. $\angle BDE = \frac{2d}{3}$, слѣд. $BD = 2$. $DE = 8$ (см. № 179); $FD = \frac{DE}{2} = 2$. $BF = BD - DF = 6$; слѣд. $FG = \frac{BF}{2} = 3$.

192. Въ данный равносторонній $\triangle$-ъ ABC, сторона котораго равна 6 дм., вписанъ другой равносторонній

$\triangle$-ъ DEF, стороны котораго перпендикулярны къ сторонамъ даннаго $\triangle$-а. На какія части стороны даннаго $\triangle$-а дѣлятся вершинами вписаннаго?

Рѣш. $\triangle$-и ADF, DBE и ECF равны между собою. Обозначимъ AD, BE и FC черезъ x; тогда $AF = CE = BD = 2x$; но $AF + FC = 6$, т. е. $2x + x = 6$; откуда $x = 2$ т. е. $FC = 2$, а $AF = 4$ (черт. 18).



Черт. 18.

193. Около даннаго равносторонняго $\triangle$-а описанъ другой равносторонній $\triangle$-ъ, стороны котораго перпендикулярны къ сторонамъ даннаго. Опредѣлить, въ какомъ отношеніи дѣлятся стороны описаннаго $\triangle$-а въ вершинахъ даннаго.

194. Сколько сторонъ имѣетъ многоугольникъ, если сумма его внутреннихъ угловъ съ однимъ изъ внѣшнихъ равна: 1) $5d$, 2) $9d$.

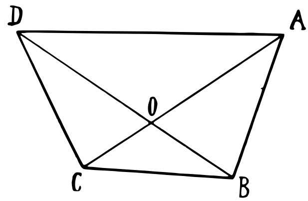
Рѣш. 1) Обозначимъ искомое число сторонъ черезъ x, а данный внѣшній уголъ черезъ m; тогда по условію задачи получимъ: $2d(x-2) + m = 5d$, или $2dx + m = 9d$; слѣд. $2dx < 9d$ или $2x < 9$, а $x < 4\frac{1}{2}$; такъ какъ x — цѣлое число, то беремъ $x = 4$.

Провѣрка: сумма внутреннихъ угловъ 4-ехугольника $= 4d$, данный внѣшній уголъ очевидно $= d$; всего — $5d$.

195. Три стороны 4-ехугольника равны между собой, а сумма угловъ при четвертой сторонѣ равна $\frac{8d}{5}$. Найти острый уголъ между діагоналями.

Рѣш. 1-й способъ. Въ 4-ехугольникѣ $ABCD$ $AB = BC = CD$, а сумма угловъ $A + d = \frac{8d}{5}$; слѣд. $B + C = 4d - \frac{8}{5}d = \frac{12}{5}d$. Въ равнобедр. $\triangle$-ѣ BCD $\angle DBC =$

$\frac{2d-C}{2}$; въ равнобедр. $\triangle$-ѣ ABC $\angle ACB = \frac{2d-B}{2}$; слѣд. $\angle DBC + \angle ACB = \frac{4d-(B+C)}{2} = \frac{4}{5}d$. Искомый уголъ $COD = OCB + OBC = \frac{4}{5}d$ (черт. 19). 2-й способъ (*введеніе вспомогат. величин.*). Обозначимъ уголъ при вершинѣ C буквой K. Тогда весь уголъ $B = 4d - \frac{8}{5}d - K = \frac{12}{5}d - K$. Изъ равнобедр. $\triangle$-а DCB $\angle CBD$ $\frac{2d-K}{2}$; изъ равнобедр. $\triangle$-а ABC $\angle ACB = \frac{2d-B}{2}$; подставивъ вмѣсто B его величину, получимъ: $\angle ACB = \frac{K}{2} - \frac{d}{5}$; искомый уголъ $COD = ACB + OBC = \frac{4}{5}d$.

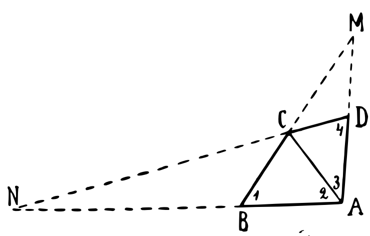


Черт. 19.

196. Въ 4-ехугольникѣ одна изъ сторонъ равна каждой изъ діагоналей, а сумма угловъ при этой сторонѣ равна $\frac{5d}{3}$. Найти углы между діагоналями.

197. Въ 4-ехугольникѣ одна изъ діагоналей равна каждой изъ двухъ взаимно противолежащихъ сторонъ, которыя при продолженіи встрѣчаются подъ угломъ $\frac{d}{5}$. Найти уголъ между продолженіями двухъ другихъ сторонъ.

Рѣш. Пусть въ 4-ехугольн. $ABCD$ $AC = AD = BC$, а $\angle AMB = \frac{d}{5}$. Обозначимъ $\angle$ 1 буквою K (вспомог. велич.); такъ какъ $CA = CB$, то $\angle 2 = K$; изъ $\triangle$-а AMB $\angle 3 = 2d - \angle M - \angle 1 - \angle 2 = \frac{9}{5}d - 2$; K изъ равно-



Черт. 20.

бедр. $\triangle$-а ACD $\angle 4 = \frac{d}{10} + K$. Наконецъ изъ $\triangle$-а AND искомый уголъ $N = 2d - \angle 2 - \angle 3 - \angle 4 = \frac{d}{10}$. (Черт. 20).

198. Въ 4-ехугольникѣ $ABCD$ уголъ A равенъ $\frac{4d}{5}$, діагональ AC равна сторонамъ AB и AD. Найти уголъ BCD.

199. Въ 4-ехугольникѣ $ABCD$ проведены діагонали AC и BD; діагональ AC равна сторонамъ AB и AD, уголъ CBD равенъ $\frac{2d}{5}$. Найти уголъ CAD.

Параллелограммы и трапеціи.

200. Въ параллелограммѣ острый уголъ равенъ $\frac{3d}{4}$; найти его тупой уголъ.

201. Одна изъ сторонъ параллелограмма вдвое болѣе другой; периметръ равенъ 30. Найти каждую изъ сторонъ.

202. Острый уголъ параллелограмма втрое менѣе тупого. Найти каждый изъ нихъ.

203. Неравные углы параллелограмма относятся какъ 3:5. Найти каждый изъ нихъ.

204. Тупой уголъ параллелограмма на d болѣе остраго. Найти каждый изъ нихъ.

205. Стороны параллелограмма 3 и 5; биссектрисса одного изъ угловъ дѣлитъ противолежащую большую сторону на двѣ части. Опредѣлить каждую изъ нихъ.

206. Данъ параллелограммъ; найти уголъ между биссектриссами двухъ угловъ, прилежащихъ къ одной изъ сторонъ его.

207. Въ ромбѣ одна изъ діагоналей равна сторонѣ. Опредѣлить тупой уголъ ромба.

208. Сторона ромба съ одной изъ діагоналей его образуетъ уголъ, равный $\frac{d}{4}$. Найти тупой уголъ ромба.

209. Сторона ромба образуетъ съ діагоналями его два угла, причемъ одинъ втрое болѣе другого. Найти меньшій изъ нихъ.

210. Данъ прямоугольникъ; діагональ его дѣлитъ прямой уголъ на двѣ части въ отношеніи $3:2$. Найти уголъ между діагоналями, обращенный къ большей сторонѣ.

211. Данъ прямоугольникъ; перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на діагональ, дѣлитъ прямой уголъ на двѣ части въ отношеніи $3:1$. Найти уголъ между этимъ перпендикуляромъ и другой діагональю.

212. Данъ прямоугольникъ; перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на одну діагональ, образуетъ съ другой діагональю уголъ, равный $\frac{d}{4}$. Найти уголъ между діагональю и большей стороной.

213. Меньшая сторона прямоугольника равна 4; опредѣлить длину діагоналей, если углы между ними относятся какъ $1:2$.

214. Прямоугольникъ, периметръ котораго равенъ 28, двумя діагоналями дѣлится на четыре $\triangle$-а, сумма периметровъ которыхъ равна 68. Опредѣлить длину каждой діагонали.

215. Опредѣлить видъ четырехугольника, образованнаго биссектриссами 1) внутреннихъ или 2) внѣшнихъ угловъ параллелограмма.

216. Въ прямоугольный $\triangle$-ъ, каждый катетъ котораго 2, вписанъ квадратъ, имѣющій съ нимъ одинъ общій уголъ. Найти его периметръ.

217. Въ равнобедренный прямоугольный $\triangle$-ъ вписанъ квадратъ такъ, что двѣ вершины находятся на гипотенузѣ, равной 12, и двѣ—на катетахъ. Опредѣлить сторону квадрата.

Указ. Гипотенуза состоитъ изъ трехъ равныхъ частей.

218. Острый уголъ равнобедренной трапеціи втрое менѣе тупого; найти тупой уголъ.

219. Периметръ равнобедренной трапеціи равенъ 40; каждая изъ боковыхъ сторонъ равна 5. Опредѣлить среднюю линію трапеціи.

220. Доказать, что въ равнобедренной трапеціи 1) углы при основаніи равны; 2) діагонали равны; 3) діагонали одинаково наклонены къ основанію.

221. Средняя линія трапеціи 5, боковыя стороны 3 и 4. Найти периметръ.

222. Большее основаніе трапеціи вдвое болѣе каждой изъ остальныхъ сторонъ трапеціи; средняя линія его равна 6. Найти периметръ.

223. Діагональ равнобедренной трапеціи перпендикулярна къ боковой сторонѣ и дѣлитъ противолежащій ей острый уголъ пополамъ. Найти острые углы трапеціи.

224. Діагональ равнобедренной трапеціи дѣлитъ острый уголъ пополамъ, а тупой уголъ въ отношеніи 2 : 1. Найти острый уголъ между діагоналями.

225. Стороны $\triangle$-а суть 8, 10, 12. Найти стороны $\triangle$-а, вершинами котораго служатъ середины сторонъ даннаго $\triangle$-а.

226. Периметръ $\triangle$-а равенъ 12; середины сторонъ соединены послѣдовательно. Найти периметръ полученнаго $\triangle$-а.

227. Опредѣлить видъ 4-ехугольника, вершинами котораго служатъ середины сторонъ даннаго 1) произвольнаго 4-ехугольника, 2) прямоугольника, 3) ромба, 4) квадрата.

Указ. Провести діагонали.

228. По разнымъ сторонамъ данной прямой MN даны двѣ точки A и B на разстояніи 10 дюйм. и 4 дюйм. отъ нея. Найти разстояніе середины O отрѣзка AB отъ данной прямой.

Указ. Провести черезъ B прямую, параллельно MN и опустить на нее $\perp$-ы изъ A и O.

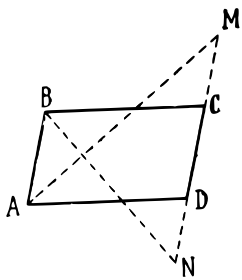
229. Данъ ромбъ; высота, опущенная изъ вершины тупого угла, дѣлитъ противолежащую сторону пополамъ. Найти тупой уголъ ромба.

230. Въ равнобедренный $\triangle$-ъ вписанъ ромбъ съ периметромъ, равнымъ 4; уголъ при вершинѣ $\triangle$-а у нихъ общій. Найти боковую сторону $\triangle$-а.

231. Двѣ стороны параллелограмма суть: 1) 8 и 3, 2) 5 и 3; биссектриссы двухъ угловъ параллелограмма, прилежащихъ къ большей сторонѣ, дѣлятъ противолежащую сторону на три части. Найти каждую изъ нихъ (2 случая).

Указ. Въ первомъ случаѣ данныя биссектриссы въ параллелограммѣ не пересѣкаются; во второмъ случаѣ— пересѣкаются.

232. Стороны параллелограмма 2 и 3; биссектриссы угловъ при меньшей сторонѣ пересѣкаютъ продолженіе противолежащей стороны въ двухъ точкахъ. Опредѣлить разстояніе между этими точками.



Черт. 21.

Указ. AM и BN—данныя биссектриссы; $DM = AD$ и $CN = CB$ (черт. 21).

233. Данъ квадратъ, сторона котораго 1; діагональ служитъ стороной другого квадрата. Найти діагональ послѣдняго.

234. Діагональ квадрата $= 4$. Сторона его служитъ діагональю другого квадрата. Найти сторону послѣдняго.

235. Параллелограммъ діагональю дѣлится на два равнобедренныхъ прямоугольныхъ $\triangle$-а. Большая сторона параллелограмма равна 4. Найти высоту, на нее опущенную.

236. Въ прямоугольный $\triangle$-ъ, каждый катетъ котораго равенъ 6, вписанъ прямоугольникъ, имѣющій съ

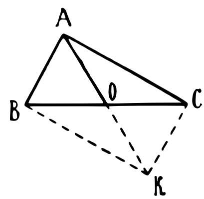
$\triangle$-омъ общій уголъ; одна сторона прямоугольника вдвое болѣе другой. Найти периметръ прямоугольника.

237. Данъ прямоугольникъ; перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на діагональ, дѣлитъ ее на два отрѣзка 1 и 3. Найти меньшую сторону прямоугольника.

Указ. Провести вторую діагональ.

238. Доказать теорему. Во всякомъ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ медіана гипотенузы равна половинѣ гипотенузы.

Доказ. Достроимъ $\triangle$-ъ ABC до прямоугольника; для этого проведемъ $BK \parallel AC$ и $CK \parallel AB$; $AK = BC$; слѣд. $AO = \frac{BC}{2}$ (черт. 22).



Черт. 22.

Замѣчаніе. Эту теорему полезно запомнить; она примѣняется въ нѣкоторыхъ изъ слѣдующихъ задачъ.

239. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ медіана гипотенузы дѣлитъ прямой уголъ на двѣ части, изъ которыхъ одна втрое болѣе другой. Опредѣлить острые углы.

240. Опредѣлить острые углы прямоугольнаго $\triangle$-а, если медіана гипотенузы равна одному изъ катетовъ.

241. Къ вертикальной стѣнѣ прислонена наклонно къ ней лѣстница, длиною въ 10 саж. Найти разстояніе отъ нижняго края стѣны до середины лѣстницы.

242. Основаніе $\triangle$-а равно 12 дюйм.; одна изъ боковыхъ сторонъ раздѣлена на четыре равныя части и черезъ точки дѣленія проведены прямыя $\parallel$-но основанію до пересѣченія съ другой стороной. Опред. эти прямыя.

243. Основанія трапеціи 10 и 6; одна изъ боковыхъ сторонъ раздѣлена на четыре равныя части и черезъ точки дѣленія проведены прямыя параллельно основанію до пересѣченія съ другой боковой стороной. Найти эти прямыя.

Указ. Примѣнить свойство средней линіи трапеціи.

244. Основанія равнобедренной трапеціи a и b; на какія части большее основаніе a дѣлится высотой, опущенной изъ одного конца меньшаго.

245. Вершины даннаго $\triangle$-а отстоятъ на разстояніи 3, 5 и 7 отъ прямой, данной внѣ $\triangle$-а. Опред. разстоянія серединъ всѣхъ сторонъ отъ той же прямой.

246. Черезъ вершину $\triangle$-а проведена внѣ $\triangle$-а прямая на разстояніи 3 и 5 отъ серединъ прилежащихъ сторонъ; найти разстояніе этой прямой отъ середины третьей стороны.

247. Основанія трапеціи суть 10 и 4; на какія части діагонали трапеціи дѣлятъ среднюю линію трапеціи.

248. Основанія трапеціи суть 6 и 14. Найти разстояніе между серединами діагоналей.

249. Въ равнобедренной трапеціи основанія суть 4 и 6; діагонали взаимно перпендикулярны. Опред. высоту.

250. Высота равнобедренной трапеціи равна h; діагонали взаимно перпендикулярны. Найти среднюю линію.

251. Діагонали трапеціи дѣлятъ среднюю линію трапеціи на три части: крайнія части равны по 2, средняя часть $= 3$. Найти основанія трапеціи.

252. Въ равнобедренной трапеціи основанія суть 3 и 7; одинъ изъ угловъ равенъ $\frac{d}{2}$. Найти высоту трапеціи.

253. Стороны прямоугольника 1 и 3. Опред. діагонали 4—ехугольника, образованнаго биссектриссами внутреннихъ угловъ.

254. Высота равнобедренной трапеціи равна 3, средняя линія—8, острый уголъ — $\frac{d}{2}$. Найти основанія.

255. Стороны параллелограмма 6 и 8; одинъ изъ угловъ его равенъ $\frac{d}{3}$. Опред. высоты параллелограмма.

Указ. См. зад. № 179.

256. Высоты параллелограмма суть 3 и 5; тупой уголъ равенъ $\frac{5}{3}$ d. Найти периметръ.

257. Периметръ ромба $= 8$, высота $= 1$. Найти тупой уголъ ромба.

258. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго $\triangle$-а равенъ $\frac{5}{6}\,d$; гипотенуза равна 12. Опред. высоту $\triangle$-а, опущенную на гипотенузу.

Указ. Провести медіану (см. зад. № 238); уголъ между медіаной и высотой $= \frac{2d}{3}$.

259. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ проведены высота и медіана къ гипотенузѣ; уголъ между ними равенъ $\frac{d}{5}$. Опред. острые углы даннаго $\triangle$-а.

260. Трапеція состоитъ изъ трехъ равносторонних $\triangle$-овъ; найти тупой уголъ между діагоналями.

261. Трапеція состоитъ изъ ромба и равносторонняго $\triangle$-а; периметръ ея равенъ 10. Найти среднюю линію.

262. Основанія равнобедренной трапеціи 5 и 3; каждый изъ тупыхъ угловъ равенъ $\frac{4}{3}\,d$. Найти боковыя стороны.

Указ. Изъ одного конца меньшаго основанія провести прямую $\parallel$-но къ боковой сторонѣ.

263. Одна изъ боковыхъ сторонъ прямоугольной трапеціи вдвое болѣе другой. Найти тупой уголъ трапеціи.

264. Дана равнобедренная трапеція; высота, опущенная изъ вершины тупого угла, дѣлитъ большее основаніе на двѣ части 6 и 2. Найти среднюю линію трапеціи.

Указ. Провести еще высоту изъ вершины другого тупого угла.

265. Въ равнобедренной трапеціи каждая діагональ равна 4; тупой уголъ между ними, обращенный къ основанію, равенъ $\frac{4}{3}\,d$. Найти высоту.

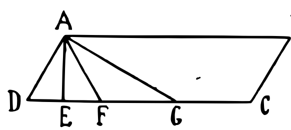
266. Трапеція діагональю дѣлится на два $\triangle$-а: равносторонній и прямоугольный. Средняя линія трапеціи равна 3. Найти основанія трапеціи (2 случая).

Указ. Въ одномъ случаѣ діагональ перпендикулярна къ боковой сторонѣ, въ другомъ—трапеція прямоугольная.

267. Въ равнобедренной трапеціи средняя линія равна 4; діагонали образуютъ уголъ $\frac{2}{3}d$, обращенный къ основаніямъ. Опред. діагонали.

Указ. Діагональ равна суммѣ основаній.

268. Стороны параллелограмма 2 и 6; тупой уголъ его, равный $\frac{4}{3}d$, раздѣленъ на четыре равныя части тремя прямыми; на какія части эти прямыя дѣлятъ большую сторону параллелограмма?

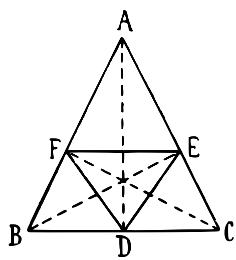


Черт. 23.

Указ. $\angle D = \frac{2}{3}d$; $\angle ADF$ равносторон.; $FG = AF$ (черт. 23).

269. Сторона ромба равна 4; середины его сторонъ служатъ вершинами 2-го 4-ехугольника; середины сторонъ второго служатъ вершинами 3-го 4-ехугольника. Опред. стороны послѣдняго.

270. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $\frac{3d}{5}$; опредѣл. углы $\triangle$-а, вершинами котораго служатъ основанія всѣхъ высотъ.

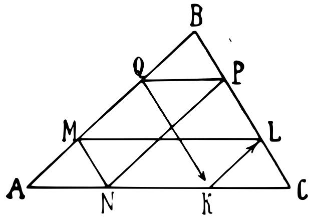


Черт. 24.

Указ. Опустивъ три высоты, получимъ иском. $\triangle$-ъ DEF; въ прямоуг. $\triangle$-ѣ BEC, медіана $DE = DC$ (см. № 238) (черт. 24).

271. Въ равнобедренномъ $\triangle$-ѣ данъ тупой уголъ при вершинѣ, равный $1^1/_2\, d$; опред. углы $\triangle$-а, вершинами котораго служатъ основанія всѣхъ высотъ даннаго $\triangle$-а.

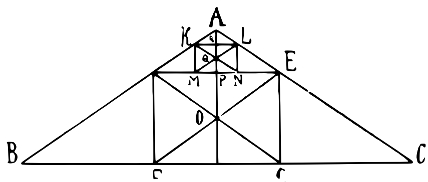
272. Стороны $\triangle$-а суть a, b, c; изъ произвольной точки k, взятой на одной изъ сторонъ $\triangle$-а, проведены, какъ показано на чертежѣ, послѣдовательно: $KL \parallel AB$, $LM \parallel AC$, $MN \parallel BC$ и т. д. Показать, что полученная ломанная есть замкнутая и найти ея длину (черт. 25).



Черт. 25.

273. Въ равнобедренный $\triangle$-ъ вписанъ прямоугольникъ такъ, что каждая діагональ его параллельна къ боковой сторонѣ b; найти длину діагоналей.

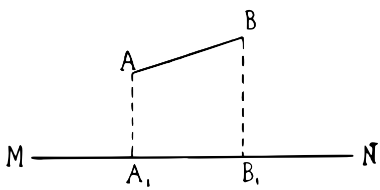
274. Въ $\triangle$-ъ вписаны два прямоугольника, одинъ надъ другимъ; ихъ діагонали параллельны боковымъ сторонамъ $\triangle$-а; стороны большаго прямоугольника суть a и b. Найти стороны меньшаго (черт. 26).



Черт. 26.

Рѣш. Пусть $DE = a$ и $DF = b$, $DKLM$— параллелограммъ, слѣд. $KL = DM$; также $KL = NE = MN$, слѣд. $KL = \frac{a}{3}$; $AP = PO = \frac{b}{2}$; но $AR = RQ = PQ$; слѣд. $PR = \frac{b}{3}$.

Замѣчаніе (къ №№ 275, 276 и др.). Проекціей отрѣзка AB на прямую MN называется разстояніе A_1B_1 между $\perp$-ами, опущенными изъ концовъ даннаго отрѣзка на прямую MN (черт. 27).



Черт. 27.

275. Проекціи двухъ смежныхъ сторонъ квадрата на произвольную данную прямую суть 5 и 2. Опред.

проекціи: 1) остальныхъ сторонъ и 2) діагоналей на ту же прямую.

276. Высота равносторонняго $\triangle$-а равна 6. Найти проекцію данной высоты на другую высоту.

277. Черезъ вершину тупого угла тупоугольнаго $\triangle$-а проведена внѣ его прямая; проекціи прилежащихъ къ тупому углу сторонъ на эту прямую суть 4 и 2. Опред. проекціи всѣхъ медіанъ на ту же прямую.

Отдѣлъ II.

Дуги, хорды, касательныя и пр.

КРУГЪ.

278. Данъ кругъ; его діаметръ на 2 верш. болѣе радіуса. Найти діаметръ.

279. Радіусъ сектора равенъ R; центральный его уголъ равенъ $\frac{2}{3}d$; найти хорду, стягивающую его дугу.

280. Изъ точки, данной на окружности, проведены діаметръ и хорда, равная радіусу. Найти уголъ между ними.

281. Изъ точки, данной на окружности, проведены двѣ хорды; каждая изъ нихъ равна радіусу. Найти уголъ между ними.

282. Данъ секторъ съ прямымъ угломъ при центрѣ; хорда, стягивающая его дугу, равна 6. Найти ея разстояніе отъ центра.

283. Въ кругѣ дана хорда, отсѣкающая 1) четверть, 2) треть окружности. Найти уголъ между радіусами, проведенными черезъ концы хорды.

284. Въ кругѣ даны двѣ равныя взаимно перпендикулярныя хорды; каждая изъ нихъ дѣлится другой на два отрѣзка 3 и 7. Найти разстояніе каждой хорды отъ центра.

285. Въ кругѣ на разстояніи 1 отъ центра даны двѣ взаимно перпендикулярныя хорды; каждая изъ нихъ равна 6. Найти на какія части одна хорда дѣлится другой.

286. Въ кругѣ радіуса R даны два взаимно перпендикулярныхъ діаметра; изъ произвольной точки окружности опущены на нихъ перпендикуляры. Найти разстояніе между основаніями этихъ перпендикуляровъ.

287. Въ кругѣ даны двѣ равныя параллельныя хорды; разстояніе между ними равно радіусу; черезъ ихъ концы проведены два діаметра. Найти уголъ между ними, обращенный къ хордамъ.

288. Радіусъ круга равенъ 2; черезъ середину одного изъ радіусовъ проведена перпендикулярная хорда. Найти периметръ четырехугольника, вершинами котораго служатъ концы хорды и радіуса.

289. Черезъ середину M радіуса OA проведена $\perp$-ная къ нему хорда BC; найти уголъ между хордами AB и AC.

290. Данъ секторъ; въ немъ проведенъ средній радіусъ; хорда, стягивающая дугу сектора, дѣлитъ средній радіусъ сектора пополамъ. Найти уголъ сектора.

291. Данъ сегментъ; его основаніе вдвое болѣе высоты. Найти уголъ между хордами, проведенными изъ середины дуги къ ея концамъ.

292. Изъ внѣшней точки проведены къ кругу радіуса R двѣ взаимно перпендикулярныя касательныя; найти ихъ длину.

293. Изъ внѣшней точки проведены къ кругу двѣ касательныя; каждая изъ нихъ равна радіусу. Найти уголъ между касательными.

294. Изъ точки, данной внѣ круга на разстояніи a отъ его центра, проведены къ кругу двѣ взаимно перпендикулярныя касательныя линіи. Найти разстояніе между точками касанія.

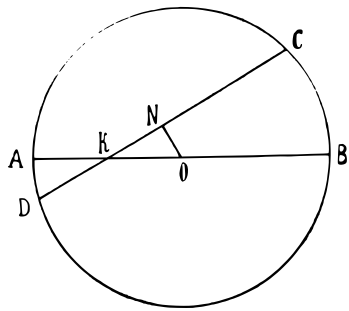
295. Данъ секторъ, равный четверти круга, радіуса R. Опредѣлить длину касательной, проведенной въ серединѣ его дуги до пересѣченія съ продолженіями крайнихъ радіусовъ сектора.

296. Въ прямой уголъ вписанъ кругъ; хорда, соединяющая точки касанія, равна 2. Найти разстояніе этой хорды отъ центра круга.

297. Діаметръ пересѣкаетъ хорду подъ угломъ $\frac{d}{2}$ и дѣлитъ ее на два отрѣзка 3 и 7; найти разстояніе этой хорды отъ центра круга.

298. Хорда пересѣкаетъ діаметръ подъ угломъ $\frac{d}{3}$ и дѣлитъ его на два отрѣзка 2 и 6; найти разстояніе хорды отъ центра.

Рѣш. $AK = 2$; $BK = 6$; слѣд. $AB = 8$; рад. $AO = 4$, $KO = 2$; такъ какъ въ прямоугольн. $\triangle$-ѣ KON $\angle OKN = \frac{d}{3}$, то катаетъ $ON = \frac{OK}{2} = 1$ (см. зад. № 179.) (черт. 28).



Черт. 28.

299. Изъ точки, данной на окружности, проведены діаметръ, равный 4, и хорда; уголъ между ними равенъ $\frac{d}{3}$. Найти разстояніе хорды отъ центра.

300. Данъ сегментъ; высота его равна половинѣ радіуса. Середина его дуги соединена съ ея концами двумя хордами. Найти уголъ между ними.

Указ. Соединить середину и концы дуги съ центромъ.

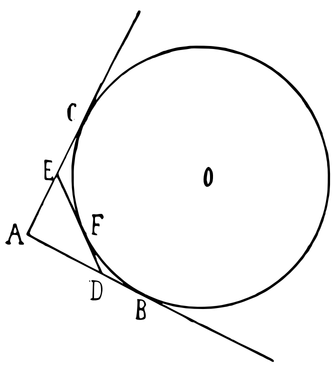
301. Въ уголъ $\frac{4d}{3}$ вписанъ кругъ, діаметръ котораго равенъ 4; найти разстояніе между точками касанія.

302. Въ уголъ, равный $\frac{2}{3}d$, вписанъ кругъ, радіусъ котораго равенъ 1; найти разстояніе его центра отъ вершины угла.

303. Центральный уголъ сектора $\frac{4d}{3}$; хорда, стягивающая его дугу, равна 2. Черезъ середину дуги проведена касательная до пересѣченія съ продолженіями крайнихъ радіусовъ сектора. Найти длину касательной.

304. Внѣ круга дана точка; разстояніе ея отъ круга равно радіусу круга; изъ этой точки проведены къ кругу двѣ касательныя. Опредѣлить уголъ между ними.

305. Данъ кругъ, радіусъ котораго $= 5$; изъ внѣшней точки проведены къ этому кругу двѣ взаимно перпендикулярныя касательныя; затѣмъ проведена между данной точкой и кругомъ третья касательная, которая, пересѣкая данныя, образуетъ прямоугольный $\triangle$-ъ. Опред. периметръ этого $\triangle$-а.



Черт. 29.

Рѣш. AB, AC и EF—данныя касательныя. Если соединить O съ B и C, то получимъ квадратъ, слѣдов. $AB = 5$ и $AC = 5$. Касательныя $DF = DB$; также $EF = EC$, слѣд. $AD + DF = AB = 5$, и $AE + EF = AC = 5$; искомый периметръ $= 10$ (черт. 29).

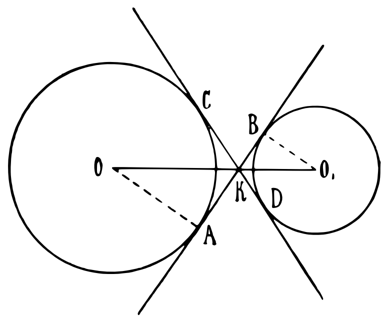
306. Радіусы двухъ круговъ суть 2 и 4; ихъ общія внутреннія касательныя взаимно перпендикулярны. Найти длину каждой изъ нихъ (между точками касанія).

307. Даны два круга; ихъ общія внутреннія касательныя взаимно перпендикулярны; хорды, соединяющія точки касанія, суть 3 и 5. Опред. разстояніе между центрами.

308. Даны два круга радіусовъ R и r — одинъ внѣ другого; къ нимъ проведены двѣ общія внѣшнія касательныя. Найти ихъ длину (между точками касанія), если ихъ продолженія пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

Указ. Провести радіусы въ точки касанія.

309. Къ двумъ даннымъ неравнымъ кругамъ проведены общія внутреннія касательныя, длиною a каждая; углы между ними, обращенные къ кругамъ, равны $\frac{4}{3}d$. Опред. разстояніе между центрами круговъ.

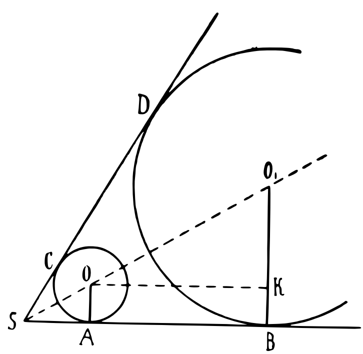


Черт. 30.

Указ. Въ прямоуг. $\triangle$-ѣ $AOK \angle AKO = \frac{2d}{3}$, слѣд. $OK = 2 \,.\, AK$, аналогично: $O_1K = 2KB$; слѣд. $OK + O_1K = 2\ (AK + KB)$; т.-е. $OO_1 = 2 \,.\, AB = 2a$ (черт. 30).

310. Даны два круга радіусовъ 1 и 6, одинъ внѣ другого. Найти разстояніе между ихъ центрами, если уголъ между ихъ общими внѣшними касательными равенъ $\frac{2d}{3}$.

Указ. O и O_1 лежатъ на биссектриссѣ угла S; проведемъ $OK \parallel AB$; тогда въ прямоуг. $\triangle$-ѣ OKO_1 уголъ $O_1OK = \frac{d}{3}$ (черт. 31).

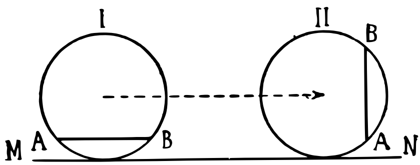


Черт. 31.

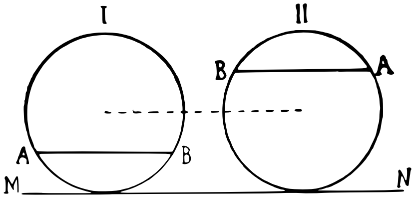
311. Даны два круга радіусовъ 3 и 5, одинъ внѣ другого; разстояніе между ихъ центрами равно 16. Опред. уголъ между ихъ общими внутренними касательными.

Указ. См. рѣш. предыд. задачи.

312. По прямой катится кругъ, окружность котораго равна 12. Насколько долженъ перемѣститься центръ круга, чтобъ кругъ изъ положенія I-го перешелъ въ положеніе II-ое? (Хорда AB въ обоихъ положеніяхъ круга параллельна пути MN). (Черт. 32).



Черт. 32.



Черт. 33.

313. По прямой катится кругъ, окружность котораго равна 12. Насколько долженъ перемѣститься кругъ (т.-е. центръ его), чтобы онъ изъ положенія I-го перешелъ въ положеніе II-ое? Въ I-омъ положеніи хорда AB параллельна MN, во II-омъ — $AB \perp MN$ (черт. 33).

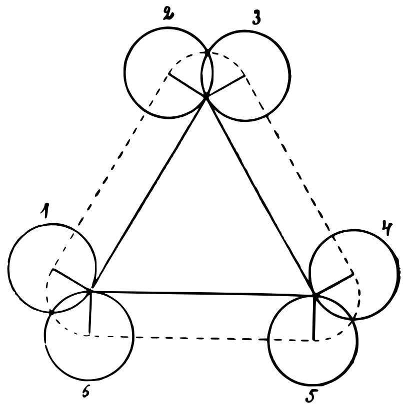
314. Деревянная рама съ внутренней стороны имѣетъ видъ квадрата, каждая сторона котораго равна 12. По этой рамѣ внутри катится (безъ скольженія) деревянный кругъ, радіусъ котораго равенъ 2, со скоростью 4 въ минуту. Черезъ сколько времени кругъ этотъ придетъ въ первоначальное положеніе.

315. По периметру равносторонняго *) $\triangle$-а, равному 24, съ наружной стороны катится безъ скольженія кругъ, окружность котораго равна 4. Кругъ этотъ началъ двигаться съ нѣкотораго мѣста, обкатилъ весь периметръ и вернулся въ первоначальное положеніе. Сколько онъ совершилъ оборотовъ на этомъ пути.

---

*) Условіе равносторонности дается лишь для простоты рѣшенія.

Рѣш. На пути отъ положенія 1-го до 2-го, отъ 3-го до 4-го и отъ 5-го до 6-го, центръ перемѣщается на величину, равную периметру; слѣд. кругъ повернется 6 разъ; но чтобы перейти изъ положенія 2-го въ пол. 3-ье, кругъ долженъ повернуться вокругъ вершины B на уголъ $OBO_1 = \frac{4d}{3}$ (черт. 34); то же самое происходитъ около C и A; слѣд. около всѣхъ вершинъ кругъ дѣлаетъ еще одинъ полный оборотъ, а всего слѣдов. $6 + 1 = 7$ оборотовъ.



Черт. 34.

316. По периметру многоугольника, равному 6, съ наружной стороны катится безъ скольженія кругъ, окружность котораго равна 1. Кругъ этотъ обкатилъ данный периметръ одинъ разъ. Сколько онъ совершилъ оборотовъ?

Указ. Рѣшается аналогично предыд. зад.

Относительное положеніе двухъ окружностей.

317. Какая зависимость существуетъ между разстояніемъ d центровъ двухъ круговъ и ихъ радіусами R и r, если 1) эти круги пересѣкаются, 2) одинъ кругъ находится внутри другого не касаясь?

318. Какое относительное положеніе занимаютъ двѣ окружности, если

1) разст. между центрами 10, а радіусы суть 8 и 2;
2) „ „ „ 4, „ „ „ 11 и 7.
3) „ „ „ 12, „ „ „ 5 и 3.

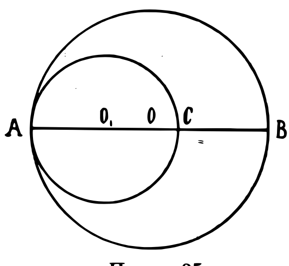
319. Два круга имѣютъ внѣшнее касаніе; ихъ радіусы суть 3 и 2. Найти разстояніе между ихъ центрами.

320. Два круга имѣютъ внутреннее касаніе; разстояніе между центрами равно 1; радіусъ большаго круга равенъ 3. Найти радіусъ меньшаго.

321. Даны два круга; ихъ радіусы суть 2 и 3; разстояніе между центрами равно 8. Найти кратчайшее разстояніе между окружностями (по линіи центровъ).

322. Даны два круга—одинъ внутри другого; черезъ ихъ центры проведенъ въ большемъ кругѣ діаметръ, который окружностью меньшаго круга дѣлится на три части: 5, 8, 1. Найти разстояніе между центрами данныхъ круговъ.

323. Двѣ окружности радіусовъ 10 и 7 имѣютъ внутреннее касаніе. Опред. разстояніе BC между окружностями по направленіи линіи центровъ (черт. 35).



Черт. 35.

324. Двѣ окружности имѣютъ внутреннее касаніе въ точкѣ A (черт. 35). Найти разстояніе BC между окружностями по линіи центровъ, если разстояніе между ихъ центрами равно 1.

Рѣш. OO_1 есть разность радіусовъ, т. е. 1; BC есть разность діаметровъ и $= 2$.

325. Радіусы двухъ окружностей суть 4 и 5, разстояніе между ихъ центрами равно 3. Найти кратчайшее разстояніе между ними по направленіи линіи центровъ.

326. Радіусы двухъ пересѣкающихся круговъ суть 4 и 1; найти разстояніе между ихъ центрами, если оно выражается цѣлымъ числомъ.

Рѣш. Иском. разст. менѣе, чѣмъ $4 + 1$, но болѣе, чѣмъ $4 - 1$; слѣд. оно $= 4$.

327. Даны два концентрическихъ круга; въ большемъ кругѣ даны двѣ взаимно-перпендикулярныя хорды, касательныя къ меньшему; каждая изъ хордъ дѣлится другой на двѣ части 3 и 7. Найти радіусъ меньшаго круга.

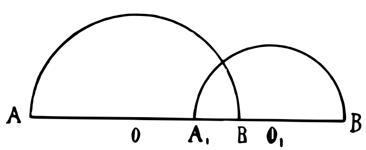
328. Три круга взаимно касаются внѣшнимъ образомъ. Опред. ихъ радіусы, если стороны $\triangle$-а, вершинами котораго служатъ ихъ центры суть 7, 8, 9.

Рѣш. Обозначимъ радіусы черезъ x, y, z; тогда получимъ три ур—ія:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ x + z &= 8 \\ y + z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Откуда $x = 5$, $y = 4$, $z = 3$.

329. Двѣ полуокружности своими діаментрами лежатъ на данной (горизонтальной) прямой; ихъ радіусы суть 6 и 4, а разстояніе между ихъ центрами равно 8. Найти разстояніе между 1) лѣвыми, 2) правыми концами обоихъ полуокружностей.



Черт. 36.

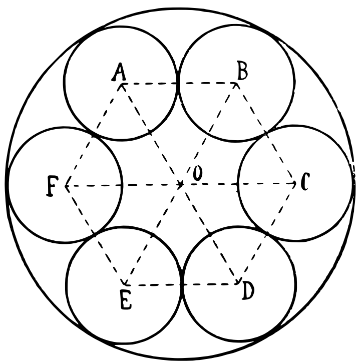
Рѣш. 1) $AA_1 = AO + OO_1 - O_1A_1 = 6 + 8 - 4 = 10$.

330. Двѣ пересѣкающіяся полуокружности своими діаметрами лежатъ на данной прямой. Разстояніе между ихъ внѣшними концами равно 12; разстояніе между внутренними равно 2. Найти разстояніе между центрами.

331. Въ данный кругъ радіуса R помѣщены два круга, которые касаются какъ между собой, такъ и даннаго круга. Опред. периметръ $\triangle$—а, вершинами котораго служатъ центры всѣхъ круговъ.

332. Три равныхъ круга радiуса R касаются другъ друга извнѣ. Опред. стороны и углы $\triangle$-а, вершинами котораго служатъ точки касанiя.

333. Въ данный кругъ, радiусъ котораго равенъ 3, вписано шесть равныхъ круговъ, изъ которыхъ каждый касается даннаго круга и двухъ сосѣднихъ круговъ. Найти ихъ дiаметры.

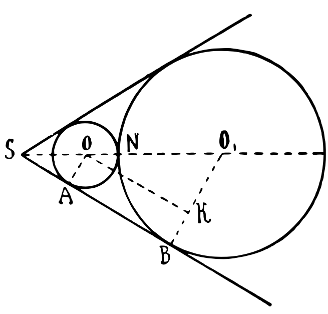


Черт. 37.

Рѣш. Соединимъ центры всѣхъ вписанныхъ круговъ между собой послѣдовательно и съ даннымъ O; тогда получимъ шесть равныхъ равностороннихъ $\triangle$-овъ; обозначимъ искомый радiусъ черезъ x; $AB = AO$ или $x + x = 3 - x$: откуда $x = 1$, а дiаметръ$=2$ (черт. 37).

334. Данный кругъ радiуса 1 обложенъ съ наружной стороны шестью равными кругами, изъ которыхъ каждый касается даннаго круга и двухъ сосѣднихъ. Найти ихъ радiусы.

335. Въ уголъ $\frac{2}{3}d$ вписаны два внѣшнекасательныхъ круга; разстоянiе между ихъ центрами равно 8. Найти ихъ радiусы.

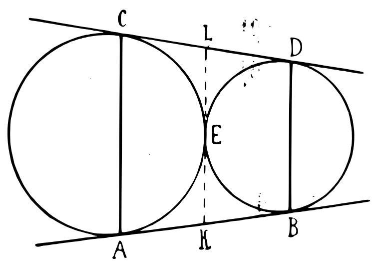


Черт. 38.

Указ. Проведемъ $OK \parallel AB$; $OO_1 = 8$ $\angle KOO_1 = ASO = \frac{d}{3}$, слѣд. $O_1K = \frac{1}{2}OO_1 = 4$; O_1K равна разности радiусовъ (черт. 38).

336. Въ квадрантъ (четверть круга) радiуса R вписанъ полукругъ такъ, что концы его діаметра находятся на крайнихъ радіусахъ квадранта, а дуга его касается дуги квадранта въ ея серединѣ. Опред. радіусъ вписаннаго полукруга.

337. Два круга имѣютъ внѣшнее касаніе; къ нимъ проведены двѣ общія внѣшнія касательныя; хорды, соединяющія точки касанія въ каждомъ кругѣ, суть 3 и 5. Найти длину каждой изъ касательныхъ.



Черт. 39.

Рѣш. Проведемъ внутреннюю общую касательную KL; тогда $KE=KA$ (какъ касательныя), $KE=KB$; слѣд. $KA=KB$; аналогично $LC=LD$; слѣд. KL—средняя линія трапеціи; $KL=\frac{AC+BD}{2}=\frac{5+3}{2}=4$ (черт. 39).

338. Къ двумъ внѣшнекасательнымъ кругамъ проведены двѣ общія внѣшнія касательныя. Точки касанія соединены между собою такъ, что получилась трапеція; ея периметръ равенъ 12. Найти ея боковыя стороны.

Измѣреніе угловъ посредствомъ дугъ *).

Теорема. Центральный уголъ измѣряется соотвѣтствующей ему дугой.

Теорема. Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, на которую онъ опирается.

Теорема. Уголъ, вершина котораго лежитъ внутри круга, измѣряется полусуммою дугъ, заключенныхъ между сторонами и ихъ продолженіями.

*) Въ задачахъ настоящей главы искомые углы и дуги должны быть выражены въ градусныхъ измѣреніяхъ.

Теорема. Уголъ, составленный касательной и хордой, измѣряется половиною дуги, заключенной внутри его.

Теорема. Уголъ, образованный двумя сѣкущими, или двумя касательными, или касательной и сѣкущей, измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между его сторонами.

339. Выразить въ градусахъ: 1) одну пятую часть окружности, 2) восьмую часть, 3) шестнадцатую часть.

340. Сколько градусовъ содержитъ 1) прямой уголъ, 2) половина прямого угла, 3) $\frac{2}{3}d$?

341. Перевести въ градусы, минуты и секунды: 1) $\frac{3}{4}d$, 2) $\frac{1}{16}d$, 3) $1\frac{3}{32}d$.

342. Выразить въ частяхъ прямого угла слѣдующіе углы: 1) 30^0, 2) $22^\circ\ 30'$, 3) 60^0, 4) 1°, 5) 7°.

343. На окружности даны три точки, которыя дѣлятъ ее на три части въ отношеніи 2:3:4. Найти эти части.

344. Углы $\triangle$—а относятся какъ $1:1\frac{1}{2}:2$. Найти эти углы.

345. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$—а равенъ $40^\circ 20' 30''$. Найти каждый изъ угловъ при основаніи.

346. Найти острый уголъ параллелограмма, если онъ составляетъ $\frac{2}{3}$ тупого.

347. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго $\triangle$—а болѣе другого на $19^\circ\ 40'$. Найти каждый изъ нихъ.

348. Найти каждый изъ угловъ равноугольнаго 1) 5-тиугольника, 2) 8-миугольника.

349; Найти углы четырехугольника, если они относятся какъ 3:4:5:6.

350. Сколько градусовъ въ дугѣ, хорда которой равна радіусу.

351. Найти уголъ, образуемый часовыми стрѣлками въ 1) часъ, 2) 4 час., 3) $4\frac{1}{2}$ час., 4) 9 ч. 15 мин.

352. Сколько градусовъ и минутъ описываетъ часовая стрѣлка въ 1 часъ;—въ 1 мин.?

353. Найти уголъ, описываемый минутной стрѣлкой въ 1 минуту; въ 1 сек.

354. Изъ точки, лежащей на окружности, проведены діаметръ и хорда, отсѣкающая дугу въ 100°. Найти уголъ между ними.

355. Найти вписанный уголъ, который опирается на дугу, равную четверти окружности.

356. Найти вписанный уголъ, если одна изъ его сторонъ отсѣкаетъ треть окружности, а другая—четверть окружности.

357. Найти уголъ, который вписанъ въ дугу, равную трети окружности.

358. Окружность раздѣлена на 3 части въ отношеніи 3 : 4 : 5; опред. углы $\triangle$-а, вершинами котораго служатъ точки дѣленія.

359. Окружность раздѣлена на 4 части въ отношеніи 1 : 2 : 3 : 4; точки дѣленія соединены послѣдовательно прямыми. Найти углы полученнаго четырехугольника.

360. Вершины четырехугольника дѣлятъ окружность на 4 части въ отношеніи 1 : 2 : 3 : 4. Найти острый уголъ между діагоналями.

361. Окружность дѣлится въ точкахъ A, B, C на три части въ отношеніи 1 : 3 : 8; найти острый уголъ между хордой AC и діаметромъ, проведеннымъ изъ точки B.

362. Въ кругъ вписанъ четырехугольникъ; одна сторона отсѣкаетъ треть окружности, другая, ей противоположная—четверть окружности. Найти острый уголъ между діагоналями.

363. Въ кругъ вписана трапеція; діаметръ круга служитъ основаніемъ ея; тупой уголъ между діагоналями равенъ 130°. Найти острые углы трапеціи.

364. Изъ внѣшней точки S проведены къ кругу двѣ сѣкущія: SAB и SCD; первая отсѣкаетъ треть окружности, вторая—четверть окружности. Найти острый уголъ между хордами AD и BC.

365. Хорда дѣлитъ окружность на двѣ части въ отношенiи 1 : 4. Найти уголъ между хордой и касательной, проведенной въ одномъ изъ концовъ хорды.

366. Данъ сегментъ; дуга его содержитъ 100°. Найти острый уголъ между хордой и прямой, проведенной изъ одного конца ея касательно къ дугѣ.

367. Двѣ точки дѣлятъ окружность на двѣ части въ отношенiи 2 : 7. Въ точкахъ дѣленiя проведены касательныя къ кругу. Найти уголъ между ними.

368. Хорда отсѣкаетъ пятую часть окружности; въ концахъ проведены касательныя. Найти уголъ между ними.

369. Дуга сегмента равна 100°. Опред. уголъ между касательными, проведенными въ концахъ его.

370. Данъ полукругъ; точки A и B дѣлятъ полуокружность на три части въ отношенiи 2 : 3 : 4; подъ какимъ угломъ пересѣкаются продолженiя хорды AB и дiаметра полукруга?

371. Изъ точки, данной внѣ круга, проведены къ концамъ одного изъ дiаметровъ двѣ сѣкущiя; каждая изъ нихъ отсѣкаетъ дугу въ 40°. Найти уголъ между ними.

372. Основанiе $\triangle$-а служитъ дiаметромъ полуокружности; найти дугу, заключенную въ $\triangle$-ѣ, если уголъ при вершинѣ равенъ 70°.

373. Окружность раздѣлена на 3 части въ отношенiи 6 : 5 : 4; черезъ точки дѣленiя проведены касательныя къ кругу до взаимнаго пересѣченiя. Опредѣлить углы полученнаго $\triangle$-а.

374. Въ прямой уголъ вписанъ кругъ; на какiя части дѣлится окружность въ точкахъ касанiя?

375. Въ уголъ, равный 40°, вписана окружность; найти дуги ея между точками касанiя.

Рѣш. Обозначимъ меньшую черезъ x, тогда большая $= 360 - x$; имѣемъ ур—іе: $\frac{(360 - x) - x}{2} = 40$.

376. Въ $\triangle$-ъ, два угла котораго суть 50^0 и 60^0, вписанъ кругъ. Опред. на какія части дѣлится его окружность въ точкахъ касанія.

377. На какія части дѣлится окружность хордой, проведенной черезъ середину радіуса перпендикулярно къ нему.

378. Радіусъ круга равенъ R; найти разстояніе отъ его центра до хорды, стягивающей дугу въ 120^0.

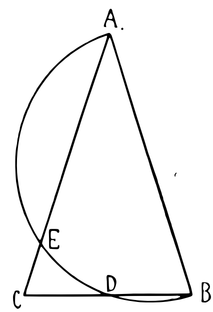
379. Хорда, равная a, стягиваетъ дугу въ 90^0; найти разстояніе ея отъ центра круга.

380. Опредѣлить дугу сегмента, если высота его равна 1) половинѣ основанія, 2) половинѣ радіуса.

381. Опред. углы $\triangle$-а, если полуокружность, построенная на основаніи его, какъ на діаметрѣ, дѣлится боковыми сторонами на три части въ отношеніи $2:3:4$.

382. Діаметръ полукруга служитъ основаніемъ вписанной въ него трапеціи; каждая изъ діагоналей дѣлитъ полуокружность на двѣ части въ отношеніи $1:3$. Опред. острые углы трапеціи.

383. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ 40^0. Одна изъ боковыхъ сторонъ служитъ діаметромъ полукружности, которая дѣлится другими сторонами на три части. Найти эти части.



Черт. 40.

Рѣш. $\angle B = 70^0$; слѣд. $\smile AED = 140^\circ$, а $\smile BD = 40^\circ$; $\angle A = 40^\circ$, слѣд. $\smile BDE = 80$, а $\smile ED = 40^\circ$ (черт. 40).

384. Основаніе равносторонняго $\triangle$-а служитъ діаметромъ полуокружности, пересѣкающей боковыя стороны. Какъ 1) дѣлятся боковыя стороны $\triangle$-а и 2) какъ дѣлится полуокружность.

385. Въ кругѣ пересѣкаются двѣ хорды; каждая изъ нихъ отсѣкаетъ отъ окружности одну пятую часть ея; тупой уголъ между этими хордами равенъ 138^0. На какія части концы хордъ дѣлятъ окружность?

386. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-а стягиваетъ дугу въ 140^0, касательную къ основанію $\triangle$-а; на какія части эта дуга дѣлится другой боковой стороной?

387. Уголъ, вписанный въ данную дугу, по числу градусовъ равняется этой дугѣ; опред. этотъ уголъ.

388. Опред. уголъ, заключенный между касательной и центральной сѣкущей, если онъ по числу градусовъ равенъ меньшей изъ дугъ, заключенной между ними.

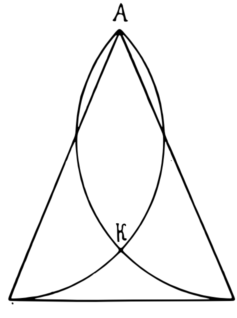
389. Описанный уголъ по числу градусовъ равенъ меньшей изъ дугъ, заключенныхъ между сторонами. Опред. этотъ уголъ.

Указ. Обознач. искомый уголъ черезъ x.

390. Около круга описана равнобедренная трапеція, неравные углы которой относятся какъ 4 : 5. Опред. углы четырехугольника, вершинами котораго служатъ точки касанія.

391. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ 40^0; каждая изъ боковыхъ сторонъ $\triangle$-а стягиваетъ дугу, касательную къ основанію. На какія части дѣлится каждая дуга?

Указ. Точка K лежитъ на биссектриссѣ угла A (черт. 41).

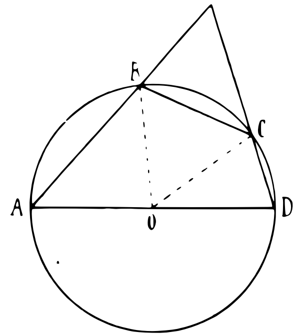


Черт. 41.

392. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ 30^0; каждая боковая сторона $\triangle$-а стягиваетъ дугу, касательную къ другой боковой сторонѣ. На какія части одна дуга дѣлится другой?

393. Въ кругъ вписанъ 4-угольникъ; одна сторона его равна діаметру, а противолежащая равна радіусу; подъ какимъ угломъ встрѣчаются продолженія двухъ другихъ сторонъ?

Указ. Такъ какъ хорда BC равна радіусу, то дуга $BC =$ $= 60^0$ (соединить B и C съ O) (Черт. 42).



Черт. 42.

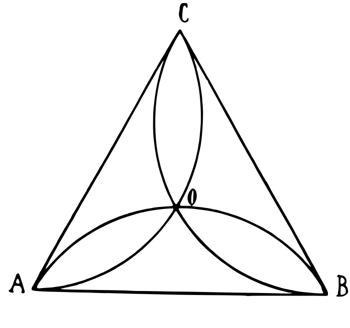
394. Въ полукругъ вписанъ четырехугольникъ, основаніемъ котораго служитъ діаметръ, противоположная ему сторона равна радіусу. Найти острый уголъ между діагоналями.

395. Въ кругъ вписанъ △-ъ такъ, что одна сторона его удалена отъ центра круга на половину своей длины, а другая на разстояніи половины радіуса. Опред. углы △-а.

396. Каждая сторона равносторонняго △-а стягиваетъ полуокружность, пересѣкающую стороны △-а. На какія части каждая полуокружность дѣлится другими?

397. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго △-а равенъ 50^0. Каждый изъ катетовъ служитъ діаметромъ полуокружности; эти полуокружности дѣлятъ другъ друга на двѣ части. Опредѣлить эти части.

398. Каждая сторона △-а стягиваетъ дугу, касательную къ двумъ другимъ сторонамъ. Опред. 1) углы △-а, 2) дуги (черт. 43).



Черт. 43.

Рѣш. 1) $CA=CB$ какъ касательныя къ дугѣ AOB, также $BC = AB$; углы по 60^0. 2) найдемъ дугу AOB; AB—ея хорда, AC—касательная; слѣд. $\angle A = \frac{\smile AOB}{2}$, сл. $\smile AOB = 120^0$.

399. Каждея сторона $\triangle$-а стягиваетъ дугу, касательную къ двумъ другимъ сторонамъ $\triangle$-а. На какія части каждая дуга дѣлится другими?

400. Хорда AB, отсѣкающая четверть окружности, пересѣчена діаметромъ CD. Подъ какимъ угломъ встрѣчаются продолженія хордъ 1) AC и BD, 2) AD и BC?

Указ. Положеніе хорды AB неопредѣленно, поэтому обозначимъ дугу AC (или AD, BC, BD) черезъ K, и примемъ K за данную величину (при рѣшеніи K сократится).

401. Въ кругъ вписанъ 4-угольникъ; одна діагональ стягиваетъ дугу въ 160^0, другая—въ 120^0. Подъ какимъ угломъ встрѣчаются продолженія противоположныхъ сторонъ 4-угольника?

Указ. Рѣшается какъ предыд. зад.

Круги вписанные, описанные и внѣвписанные.

Теорема. Въ вписанномъ четырехугольникѣ сумма противоположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.

Теорема. Въ описанномъ четырехугольникѣ сумма одной пары противоположныхъ сторонъ равна суммѣ другой пары.

Центръ круга, описаннаго вокругъ $\triangle$-а, лежитъ въ точкѣ пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ середины двухъ какихъ-либо сторонъ $\triangle$-а.

Центръ круга, описаннаго вокругъ прямоугольнаго $\triangle$-а, есть середина гипотенузы.

Центръ круга, вписаннаго въ $\triangle$-ъ, лежитъ въ точкѣ пересѣченія биссектриссъ.

402. Два угла вписаннаго въ кругъ 4-угольника суть 70^0 и 50^0. Опред. остальные углы.

403. Въ кругъ вписанъ 4-угольникъ $ABCD$; углы A, B, C относятся какъ $3 : 4 : 6$. Найти уголъ D.

404. Около круга описанъ 4-угольникъ, три последовательныя стороны котораго суть: 5, 6, 8. Опред. четвертую сторону.

405. Около круга описана равнобедренная трапеція; каждая боковая сторона ея равна 1. Опред. среднюю линію трапеціи.

406. Около круга описана равнобедренная трапеція, средняя линія которой равна 1. Опред. периметръ трапеціи.

407. Около круга описана прямоугольная трапеція, большая изъ боковыхъ сторонъ которой равна 5; периметръ ея равенъ 18. Опред. радіусъ круга.

408. Меньшая сторона прямоугольника равна 1; острый уголъ между діагоналями равенъ 60^0. Найти радіусъ описаннаго круга.

409. Гипотенуза прямоугольнаго $\triangle$-а равна 4. Опред. радіусъ описаннаго круга.

410. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-а равна 2; уголъ при вершинѣ равенъ 120^0. Опред. діаметръ описаннаго круга.

411. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго $\triangle$-а равенъ 25^0; подъ какимъ угломъ виденъ каждый катетъ его изъ центра описаннаго круга?

412. Углы $\triangle$-а относятся какъ 1) $2 : 3 : 4$, 2) $1 : 2 : 6$. Подъ какимъ угломъ видна каждая сторона его изъ центра описаннаго круга.

413. Около даннаго $\triangle$-а описанъ кругъ; въ какомъ случаѣ центръ описаннаго круга лежитъ 1) внутри $\triangle$-а, 2) на одной изъ его сторонъ, 3) внѣ $\triangle$-а?

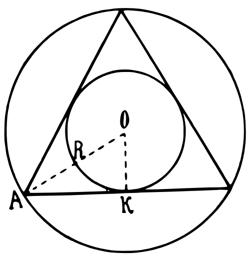
414. Въ уголъ вписанъ кругъ; разстояніе отъ его центра до вершины равно a. Найти радіусъ окружности, проходящей черезъ вершину угла и точки касанія.

415. Два угла $\triangle$-а суть 100^0 и 50^0; подъ какимъ угломъ видна каждая сторона $\triangle$-а изъ центра вписаннаго въ него круга?

416. Каждый изъ катетовъ прямоугольнаго $\triangle$-а равенъ 2; опред. радiусъ круга, касательнаго къ катетамъ, если центръ его лежитъ на гипотенузѣ.

417. Сторона ромба равна 8; острый уголъ его равенъ 30^0. Опред. радiусъ вписаннаго круга.

418. Въ равносторонній $\triangle$-ъ, высота котораго равна 6, вписанъ полукругъ такъ, что центръ его лежитъ на одной изъ сторонъ. Опред. радiусъ полукруга.



Черт. 44.

419. Въ кругъ радiуса R вписанъ равносторонній $\triangle$-ъ, а въ него вписанъ кругъ. Опред. радiусъ этого круга.

Указ. Въ $\triangle$-ѣ $AOK \angle OAK = 30^0$, слѣд. $OK = \frac{AO}{2}$ (черт. 44).

220. Въ кругѣ, радiусъ котораго равенъ 2, вписанъ равносторонній $\triangle$-ъ; найти его высоту.

421. Высота равносторонняго $\triangle$-а равна h; найти радiусы круговъ вписаннаго и описаннаго.

Указ. Радiусъ вписаннаго круга два раза менѣе радiуса описаннаго (см. зад. № 419), а высота = суммѣ этихъ радiусовъ.

422. Въ кругѣ, дiаметръ котораго равенъ a, вписанъ $\triangle$-ъ; одинъ изъ его угловъ равенъ 30^0. Найти противоположную сторону.

Указ. Провести радiусы къ концамъ искомой стороны.

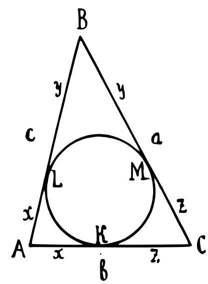
423. Въ трапецiи большее основанiе равно 2, каждая изъ остальныхъ сторонъ равна 1. Найти радiусъ описаннаго круга.

Указ. Центромъ описаннаго круга служитъ середина большаго основанiя.

424. Около круга, радіусъ котораго равенъ 1, описана равнобедренная трапеція, одинъ изъ угловъ которой равенъ 150^0. Опред. периметръ трапеціи.

425. Сторона ромба равна 4; тупой уголъ равенъ 120^0; въ ромбъ вписанъ кругъ. На какія части дѣлится каждая сторона въ точкѣ касанія?

426. Стороны $\triangle$-а суть: a, b, c; въ этотъ $\triangle$-ъ вписанъ кругъ. На какія части дѣлится каждая сторона въ точкѣ касанія круга (черт. 45)?



Черт. 45.

Рѣш. Обозначимъ искомые отрѣзки черезъ x, y, z; тогда получимъ три ур-ія:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=c \\ x+z=b \\ y+z=a \end{array}\right\}$$

сложивъ всѣ эти уравненія и сокративъ на 2, получимъ: $x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$; вычитая изъ этого ур-ія каждое изъ данныхъ, получимъ отвѣтъ.

427. Въ $\triangle$-ъ, стороны котораго 7, 9, 10, вписанъ кругъ; на какія части дѣлится каждая сторона въ точкѣ касанія?

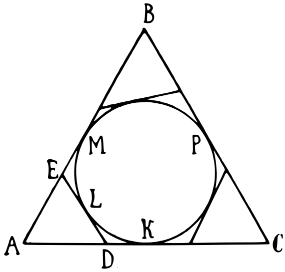
428. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ сумма катетовъ равна m, гипотенуза равна a. Опред. радіусъ вписаннаго круга.

Указ. Соединивъ центръ круга съ точками касанія, получимъ квадратъ; далѣе см. зад. № 426.

429. Около круга, радіусъ котораго равенъ 4, описанъ прямоугольный $\triangle$-ъ, гипотенуза котораго равна 26. Найти периметръ $\triangle$-а.

430. Основаніе $\triangle$-а равно a; периметръ равенъ m; въ этотъ $\triangle$-ъ вписанъ кругъ; прямая, касательная къ этому кругу, пересѣкаетъ боковыя стороны. Найти периметръ отсѣченнаго $\triangle$-а.

431. Въ $\triangle$ ъ вписанъ кругъ; у каждаго угла прямою, касательною къ кругу, отсѣкается по $\triangle$-ку; периметры ихъ суть a, b, c. Найти периметръ даннаго $\triangle$-а.



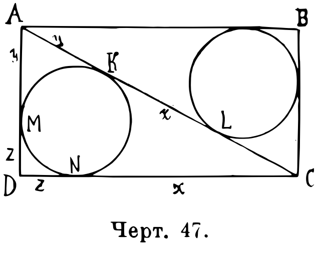
Черт. 46.

Рѣш. $DL = DK$, слѣд. длина ломанной $ADL = AK$, аналогично длина ломанной $AEL = AM$; сложивъ эти два равенства, получимъ: $a = AK + AM$; аналогично $b = BM + BP$ и $c = CP + CK$; сложивъ эти три равенства, получимъ, что периметръ $\triangle$-а $ABC = a + b + c$ (черт. 46).

432. Въ равносторонній $\triangle$-ъ, сторона котораго равна a, вписанъ кругъ; у каждаго угла даннаго $\triangle$-а прямою, касательною къ кругу, отсѣкается по $\triangle$-ку. Опред. периметръ каждаго изъ отсѣченныхъ $\triangle$-овъ.

433. Въ равностороннемъ $\triangle$-ѣ данъ вписанный кругъ радіуса R; затѣмъ въ этотъ $\triangle$-ъ вписаны еще три круга, изъ которыхъ каждый касается даннаго круга и двухъ сторонъ $\triangle$-а. Найти радіусы этихъ круговъ.

434. Большая сторона прямоугольника равна a, меньшая равна b. Діагональю этотъ прямоугольникъ дѣлится на два $\triangle$-а; въ каждомъ изъ нихъ вписано по кругу. Найти разстояніе между точками касанія діагонали съ этими кругами.



Черт. 47.

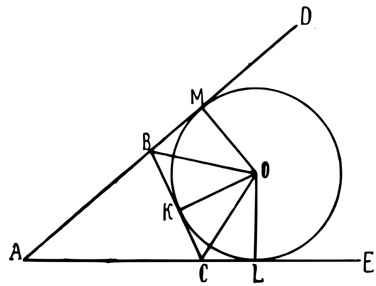
Рѣш. $KL = CK - CL = CK - AK = CN - AM = CD - AD = a - b$ (черт. 47).

435. Два круга имѣютъ внѣшнее касаніе въ точкѣ A; дана прямая, касательная къ этимъ кругамъ въ точкахъ B и C, разстояніе между которыми равно a. Найти радіусъ окружности, проходящей черезъ точки касанія A, B, C.

Ук. Провести общую касательную черезъ точку A.

(Кругъ называется внѣвписаннымъ въ данный треугольникъ, если онъ касается одной стороны $\triangle$-а и продолженій двухъ другихъ сторонъ $\triangle$-а (черт. 48).

436. Данъ $\triangle$ ABC; построить внѣвписанный кругъ, касательный къ сторонѣ BC (черт. 48).

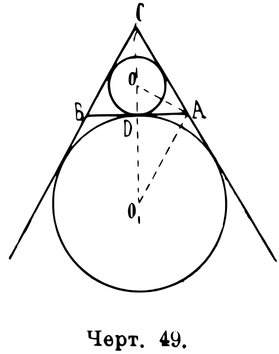


Черт. 48.

Рѣш. Продолжимъ AB и AC; раздѣлимъ пополамъ углы CBD и BCE прямыми BO и CO; и пересѣченіе O и будетъ искомый центръ; опустимъ изъ O перпендикуляры: OK, OL, OM на стороны; они равны по свойству биссекриссъ. Принявъ O за центръ, а за радіусъ любой изъ $\perp$-овъ OK, OL, OM, опишемъ кругъ, который и будетъ искомымъ. Вмѣсто угловъ B и C можно было дѣлить пополамъ углы A и B или углы A и C.

Замѣтимъ, что во всякій $\triangle$-ъ можно вписать три внѣвписанныхъ круга.

437. Данъ равносторонній $\triangle$-ъ; радіусъ круга, вписаннаго въ него, равенъ r. Найти радіусъ внѣвписаннаго круга.



Черт. 49.

Рѣш. $OD = r$; такъ какъ $\angle OAD = 30^0$, то $AO = 2r$; такъ какъ $\angle AO_1D = 30^0$, то $OO_1 = = 2.AO = 4r$; слѣд. $O_1D = 3r$ (черт. 49).

438. Въ кругъ, радіусъ котораго равенъ 2, вписанъ равносторонній $\triangle$-ъ. Опред. радіусъ круга внѣвписаннаго въ этотъ $\triangle$-ъ.

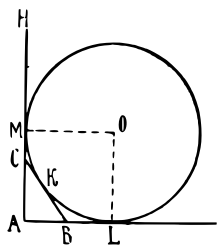
Указ. См. предыд. задачу.

439. Гипотенуза прямоугольнаго равнобедреннаго $\triangle$-а равна 4; найти радіусъ внѣвписаннаго круга, касательнаго къ одному изъ катетовъ.

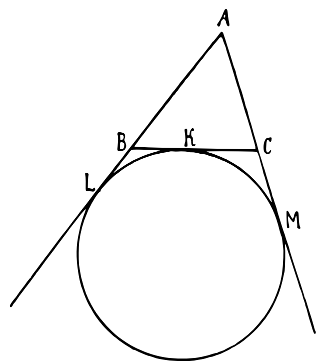
Указ. Центръ искомаго круга лежитъ на биссектриссѣ внѣшняго прямого угла, которая $\parallel$-а гипотенузѣ.

440. Периметръ прямоугольнаго $\triangle$-а равенъ $2p$. Найти радіусъ внѣвписаннаго круга, касательнаго къ гипотенузѣ.

Рѣш. Иск. радіусъ $OL = OM$; касат. $BK = BL$, также $CK = CM$; слѣд. длина $ABK = AL$; также длина $ACK = AL$; периметръ $2p = AL + AM$; но $AL = AM$, слѣд. $AL = p$; $OM = AL = p$. (черт. 50).



Черт. 50.



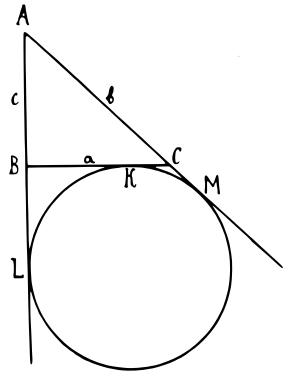
Черт. 51.

441. Въ $\triangle$-ъ, периметръ котораго равенъ $2p$, внѣвписанъ кругъ, касательный къ основанію $\triangle$-а. Опред. каждую часть периметра отъ этой точки касанія до вершины $\triangle$-а (черт. 51).

Рѣш. Касат. $BK = BL$, слѣд. длина $ABK = AL$; также длина $ACK = AM$; но касат. $AL = AM$; слѣд. длина $ABK = ACK = p$.

442. Въ $\triangle$-ъ, периметръ котораго равенъ $2p$, внѣвписанъ кругъ, касательный къ основанію; найти длину каждой изъ продолженныхъ боковыхъ сторонъ отъ вершины $\triangle$-а до точки касанія.

443. Основаніе $\triangle$-а равно a; боковыя стороны суть b и c; въ этотъ $\triangle$-ъ внѣвписанъ кругъ, касательный къ основанію. На какія части дѣлится основаніе въ точкѣ касанія?



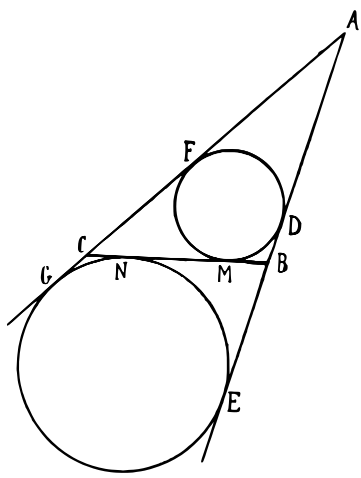
Черт. 52.

Рѣш. Обозначимъ: $BK = BL = x$; тогда $CK = CM = a - x$; $AL = c + x$; $AM = b + a - x$; но $AL = AM$, т. е. $c + x = b + a - x$, откуда найдется x (черт. 52).

444. Основаніе $\triangle$-а равно 4; боковыя стороны суть 6 и 8. Въ этотъ $\triangle$-ъ внѣвписанъ кругъ, касательный къ основанію. На какія части дѣлится основаніе въ точкѣ касанія этого круга?

Указ. См. предыд. зад.

445. Въ $\triangle$-ъ одинъ кругъ вписанъ, другой внѣвписанъ касательно къ основанію; основаніе въ точкахъ касанія этихъ круговъ дѣлится на три части. Доказать, что крайнія части равны.



Черт. 53.

Доказ. Черт. 53. Обозначимъ $BM = m$, $ON = n$ и $MN = p$. Тогда $BD = m$, $BE = BN = m + p$, а $DE = 2m + p$; аналогично: $CG = n$, $CF =$

$= CM = n + p$, а $FG = 2n + p$; но $DE = GF$, т. е. $2m + p = 2n + p$, слѣд. $m = n$.

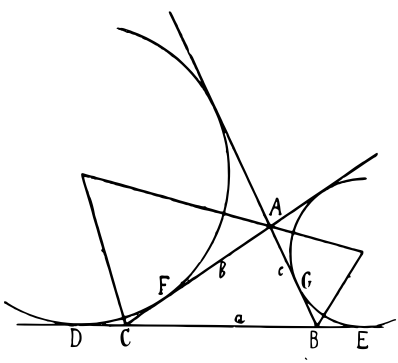
446. Въ уголъ вписаны два круга—одинъ внѣ другого; отрѣзокъ ихъ общей внутренней касательной, заключенной между сторонами угла, равенъ a. Найти отрѣзокъ каждой стороны угла между точками касанія.

Рѣш. Черт. 53. Дано $BC = a$; обозначимъ: $AB = c$, $AC = b$; $BD = BM = \frac{a + c - b}{2}$ (см. зад. № 426); $BE = BN = \frac{a + b - c}{2}$ (см. зад. № 443); сложивъ оба равенства, получимъ $DE = a$.

Второй способъ на основаніи зад. № 445.

447. Большая боковая сторона $\triangle$-а равна b, меньшая—c; въ этотъ $\triangle$-ъ вписанъ кругъ; кромѣ того внѣвписанъ въ него кругъ, касательный къ основанію. Опред. разстояніе между точками касанія основанія $\triangle$-а къ этимъ кругамъ.

448. Въ $\triangle$-ъ внѣвписаны два круга: одинъ касается стороны b, другой стороны—c. Опред. разстояніе между точками касанія этихъ круговъ къ продолженной третьей сторонѣ.



Черт. 54.

Указ. Дано $AC = b$ и $AB = c$; пусть $BC = a$; $CD = CF = \frac{b + c - a}{2}$; $BE = BG = \frac{b + c - a}{2}$ (см. зад. № 443).

449. Въ прямой уголъ вписаны два круга радіусовъ R и r, одинъ внѣ другого; между ними проведена общая касательная. Найти длину ея отрѣзка, заключеннаго между сторонами угла.

450. Въ два вертикальныхъ прямыхъ угла вписано по кругу: ихъ радіусы R и r. Опред. отрѣзокъ ихъ общей внѣшней касательной, заключенный между сторонами данныхъ угловъ.

Указ. $CB = x$; длина $CBG =$ полуперим. p $\triangle$-а ABC (черт. № 54), слѣд. $BG = p - x$, аналогично $CF = p - x$; $AF = R$, $AG = r$; выразимъ периметръ $\triangle$-а ABC и приравняемъ $2p$.

Отдѣлъ III.

Подобіе фигуръ.

Отношенія сторонъ, высотъ, периметровъ и проч. Свойство биссектриссы треугольника.

451. Основаніе $\triangle$-а равно 6, одна изъ боковыхъ сторонъ раздѣлена на три равныя части и черезъ точки дѣленія проведены прямыя параллельно основанію до пересѣченія съ другой боковой стороной. Найти эти прямыя.

452. Основанія трапеціи суть 5 и 3; каждая изъ боковыхъ сторонъ равна 4; боковыя стороны продолжены до взаимнаго пересѣченія. На сколько продолжена каждая сторона?

453. Основанія трапеціи суть 6 и 4; боковыя стороны суть 5 и 3; боковыя стороны продолжены до взаимнаго пересѣченія. На сколько продолжена каждая изъ нихъ?

454. Основаніе $\triangle$-а равно 30; каждая изъ боковыхъ сторонъ раздѣлена на двѣ части въ отношеніи 2 : 3, считая отъ основанія. Опред. разстояніе между точками дѣленія.

455. Основанія трапеціи суть 8 и 4; каждая изъ ея діагоналей равна 6; на какія части каждая діагональ дѣлитъ другую?

456. Стороны $\triangle$-а суть 4, 6, и 8. Наименьшая сторона даннаго $\triangle$-а равна наибольшей сторонѣ второго $\triangle$-а, ему подобнаго. Опред. стороны второго $\triangle$-а.

457. Двѣ стороны $\triangle$-а суть 4 и 8; высота, опущенная на первую изъ нихъ, равна 6. Найти высоту $\triangle$-а, опущенную на вторую сторону.

458. Въ $\triangle$-ѣ даны двѣ высоты; первая, равная 12, вторая—13; первая дѣлится второю пополамъ. На какія части дѣлится вторая?

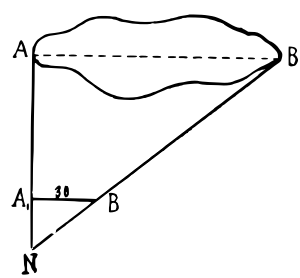
459. Стороны параллелограмма суть 9 и 3; большая изъ высотъ его равна 6. Найти другую высоту.

460. Высота параллелограмма 4 и 5; периметръ его равенъ 36. Опред. его стороны.

461. Основаніе $\triangle$-а равно 20. Параллельно основанію въ $\triangle$-ѣ проведена прямая на разстояніи двухъ пятыхъ высоты отъ основанія. Найти длину проведенной прямой.

462. Основаніе $\triangle$-а равно 20; боковая сторона раздѣлена на три части въ отношеніи 2 : 3 : 5, считая отъ основанія и черезъ точки дѣленія проведены въ $\triangle$-ѣ прямыя параллельно основанію. Найти эти прямыя.

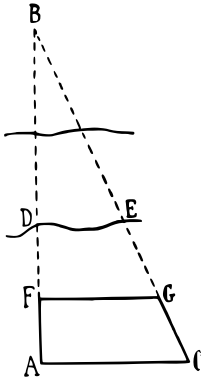
463. Нужно измѣрить длину озера отъ A до B. Для этого выбираютъ точку N; на линіи NA отмѣряютъ длину NA_1, равную четверти NA, а на линіи NB отмѣряютъ длину NB_1, равную четверти NB. Измѣривъ разстояніе A_1B_1, нашли, что оно равно 30 саж. Найти длину озера (черт. 55).



Черт. 55.

464. Башня отбрасываетъ тѣнь длиною въ 20 арш.; рядомъ съ башней вбитъ вертикально въ землю колъ; высота его надъ землей равна 3 арш., а длина его тѣни равна 1 арш. Найти высоту башни.

465. Нужно найти разстояніе отъ точки A до неприступной точки B. Для этого выбираютъ еще точку C; провѣшиваютъ на землѣ прямыя AD и CE по направленію къ точкѣ B; затѣмъ между этими прямыми проводятъ прямую FG параллельно AC. Посредствомъ измѣренія находятъ, что AC равно 15 саж., AF равно 6 саж., FG равно 14 саж. Найти искомое разстояніе AB (черт. 56).



Черт. 56.

466. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 3, а каждая изъ боковыхъ сторонъ равна 6; прямая, параллельная основанію, отсѣкаетъ отъ $\triangle$-а трапецію съ тремя равными сторонами. Найти длину каждой изъ нихъ.

Указ. Обозначить искомую длину черезъ x и составить уравненіе.

467. Основанія трапеціи суть 12 и 18; одна изъ боковыхъ сторонъ раздѣлена на три равныя части и черезъ точки дѣленія проведены прямыя параллельно основаніямъ до пересѣченія съ другой боковой стороной. Опред. эти прямыя.

Указ. Изъ конца меньшаго основанія провести прямую параллельно къ боковой сторонѣ.

468. Въ трапеціи, основанія которой суть 6 и 12, черезъ точку пересѣченія діагоналей проведена прямая параллельно основанію. Опред. ея длину.

469. Стороны даннаго $\triangle$-а суть 6, 6 и 8. Опред. стороны подобнаго $\triangle$-а, если его наибольшая сторона равна периметру даннаго $\triangle$-а.

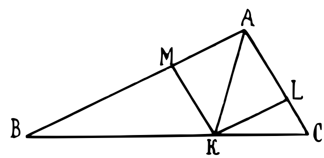
470. Два подобныхъ параллелограмма имѣютъ общую сторону длиною въ 3 дюйм.; периметръ одного изъ нихъ равенъ 8 дюйм. Опред. периметръ другого.

471. Два равнобедренныхъ, подобныхъ между собой $\triangle$-а имѣютъ одну общую сторону, равную 2; периметръ одного равенъ 10. Найти периметръ другого.

472. Основаніе $\triangle$-а равно 4; сумма боковыхъ сторонъ равна 12; прямая, параллельная основанію, отсѣкаетъ отъ него $\triangle$-ъ, периметръ котораго равенъ 4. Опред. отрѣзокъ этой прямой между боковыми сторонами.

473. Основаніе $\triangle$-а равно 6; боковыя стороны суть 4 и 8; на какія части основаніе дѣлится биссектриссой противолежащаго угла?

474. Основаніе $\triangle$-а биссектриссой противолежащаго угла дѣлится на двѣ части 2 и 3; найти боковыя стороны $\triangle$-а, если ихъ сумма равна 10.



Черт. 57.

475. Боковыя стороны даннаго $\triangle$-а суть 3 и 6; биссекрисса угла между ними пересѣкаетъ основаніе $\triangle$-а въ точкѣ K, изъ которой проведены двѣ прямыя параллельно къ боковымъ сторонамъ. Опред. каждую сторону образовавшагося 4-угольника.

Указ. Пусть въ $\triangle$-ѣ ABC $AB = 6$, $AC = 3$ и AK — биссектрисса угла A; $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = 2$; слѣд. $\frac{BC}{KC} = 3$; $\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{KC} = 3$, откуда $KL = 2$; аналогично опредѣляется KM (черт. 57).

476. Неравныя стороны равнобедреннаго $\triangle$-а суть 3 и 6. Найти разстояніе между точками пересѣченія боковыхъ сторонъ съ биссектриссами противолежащихъ имъ угловъ.

477. Основаніе $\triangle$-а равно 9; боковыя стороны 8 и 2; насколько нужно продолжить основаніе до пересѣченія съ биссектриссой внѣшняго угла при вершинѣ?

478. Периметръ параллелограмма равенъ 12. Каждая діагональ раздѣлена на три равныя части; опред. периметръ 4-угольника, вершинами котораго служатъ точки дѣленія діагоналей.

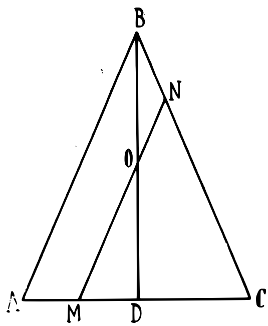
479. Въ трапеціи одно изъ основаній втрое болѣе другого; черезъ середину одной діагонали проведена прямая параллельно къ другой діагонали, равной a. Опред. отрѣзокъ этой прямой, заключенной въ трапеціи.

480. Въ прямоугольный $\triangle$-ъ, катеты котораго a и b, вписанъ квадратъ, имѣющій съ нимъ общій прямой уголъ. Найти сторону квадрата.

481. Основаніе $\triangle$-а—6, высота—3. Въ этотъ $\triangle$-ъ вписанъ квадратъ такъ, что двѣ вершины находятся на основаніи $\triangle$-а и двѣ на боковыхъ сторонахъ. Найти сторону квадрата.

482. Стороны прямоугольника суть 3 и 9. Найти стороны прямоугольника, подобнаго данному, если одна сторона у нихъ—общая.

483. Въ равнобедренный $\triangle$-ъ, основаніе котораго равно a, а высота равна h, вписанъ подобный ему $\triangle$-ъ, основаніе котораго параллельно основанію даннаго $\triangle$-а. Опред. основаніе и высоту вписаннаго $\triangle$-а.



Черт. 58.

484. Основанія трапеціи суть 9 и 4; одна изъ діагоналей дѣлитъ трапецію на два подобныхъ $\triangle$-а. Найти длину этой діаганоли.

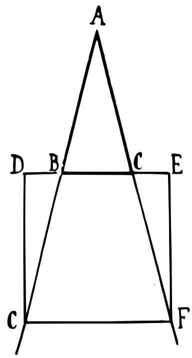
485. Въ равнобедренномъ $\triangle$-ѣ каждая изъ боковыхъ сторонъ равна 12; черезъ середину O высоты проведена прямая MN параллельно одной изъ боковыхъ сторонъ до пересѣченія съ двумя другими сторонами. Опред. ея длину (черт. 58).

Рѣш. Въ $\triangle$-ѣ ABD $BO = OD$; слѣд. $AM = MD = = \frac{AD}{2} = \frac{AC}{4}$, а $CM = \frac{3}{4}AC$; изъ подобія $\triangle$-овъ CMN и CAB : $\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA} = \frac{3}{4}$; слѣд. $MN = 9$.

486. Периметръ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ 16. Черезъ середину высоты проведена прямая параллельно къ одной изъ боковыхъ сторонъ до пересѣченія съ двумя другими сторонами. Опред. периметръ отсѣченнаго $\triangle$-а.

487. Въ прямоугольный $\triangle$-ъ вписанъ квадратъ такъ, что двѣ вершины его находятся на гипотенузѣ на разстояніи 1 и 4 отъ ближайшихъ концовъ ея. Найти сторону квадрата.

488. Основаніе $\triangle$-а равно 1, высота 2; найти сторону квадрата, двѣ вершины котораго находятся на продолженіи основанія, а двѣ другія вершины—на продолженіи боковыхъ сторонъ (черт. 59).

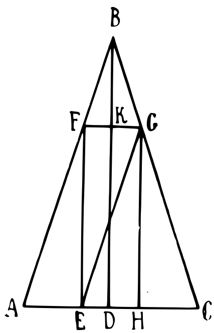


Черт. 59.

Указ. $\triangle$-и ABC и AGF подобны; обозначить сторону квадрата черезъ x и составить уравненіе.

489. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 6, высота—9; найти стороны вписаннаго въ него прямоугольника, діагонали котораго параллельны къ боковымъ сторонамъ $\triangle$-а.

Рѣш. $GE \parallel AB$; $\triangle$-и ABD и EFG подобны, слѣд. $FE : FG = BD : AD = 3$; если $FG = x$, то $FE = 3x$; далѣе $AC : FG = BD : BK$, т. е. $6 : x = 9 : (9 - 3x)$, откуда $x = 2$ (черт. 60).

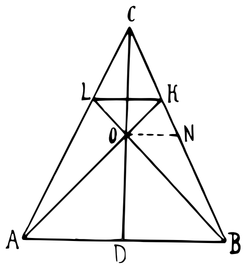


Черт. 60.

490. Основанія трапеціи a и b. Прямая, параллельная основаніямъ трапеціи, дѣлитъ ее на двѣ подобныя между собою трапеціи. Опред. отрѣзокъ этой прямой, заключенный между боковыми сторонами.

Указ. $a : x = x : b$; $x = \sqrt{ab}$.

491. Основанія тропеціи 2 и 8; боковыя стороны 6 и 9. Прямая, параллельная основаніямъ трапеціи, дѣлитъ эту трапецію на двѣ подобныя между собой трапеціи. Опред. ихъ стороны.

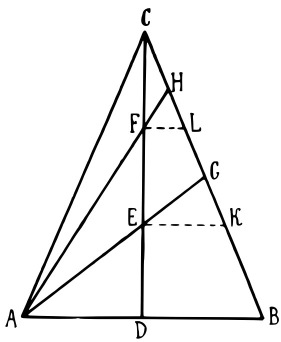


Черт. 61.

Указ. Найти сперва основанія (см. зад. № 490).

492. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 3; изъ концовъ даннаго основанія проведены черезъ середину высоты двѣ прямыя, которыя встрѣчаютъ боковыя стороны въ двухъ точкахъ. Найти разстояніе между ними.

Рѣш. O—серед. высоты. AK и BL—данныя линіи; проведемъ $ON \parallel AB$; т. к. $CO = OD$, то $ON = \frac{BD}{2} = \frac{AB}{4}$; изъ подобія $\triangle$-овъ KON и KAB $\frac{OK}{AK} = \frac{ON}{AB} = \frac{1}{4}$, слѣд. $\frac{OK}{AO} = \frac{1}{3}$; изъ подобія $\triangle$-овъ LOK и AOB $\frac{LK}{AB} = \frac{OK}{AO} = \frac{1}{3}$; слѣд. иском. $LK = \frac{AB}{3} = 1$ (черт. 61).



Черт. 62.

493. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-а равна 30; высота раздѣлена на три равныя части; изъ одного конца основанія черезъ точки дѣленія высоты проведены двѣ прямыя до пересѣченія съ боковой стороной. На какія части эти прямыя дѣлятъ боковую сторону?

Рѣш. Проведемъ EK и $FL \parallel AB$, тогда $BK = KL = LC = 10$.

1) Т. к. $CE = \frac{2}{3}\ CD$, то $EK = \frac{2}{3}\ DB = \frac{AB}{3}$; слѣдов. $GK = \frac{1}{3}\ GB = \frac{1}{2}\ KB = 5$; иском. вел. $BG = 15$.

2) Т. к. $CF = \frac{CD}{3}$, то $FL = \frac{1}{3}\ BD = \frac{1}{6}\ AB$, слѣдова-

тельно $HL = \frac{1}{6} HB = \frac{1}{5} LB = 4$; итакъ $GH = HL + LK - KG = 4 + 10 - 5 = 9$.

3) Наконецъ $CH = CL - HL = 10 - 4 = 6$ (черт. 62).

494. Высота равнобедреннаго $\triangle$-а равна 30. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-а раздѣлена на три равныя части, и изъ точекъ дѣленія проведены двѣ прямыя къ противолежащей вершинѣ. На какія части эти прямыя дѣлятъ высоту?

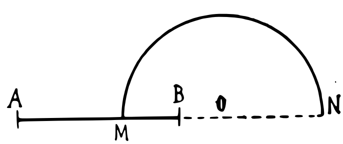
Указ. См. предыдущ. зад.

495. Стороны $\triangle$-а суть 4, 5, 6. Въ какомъ отношеніи каждая биссектрисса дѣлится другими?

496. Въ какомъ отношеніи дѣлятъ другъ друга биссектриссы внѣшнихъ угловъ при основаніи равнобедреннаго $\triangle$-а, если основаніе его равно 1, а боковая сторона равна 2?

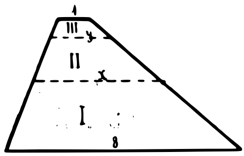
497. Основаніе $\triangle$-а равно 6; одна изъ боковыхъ сторонъ вдвое болѣе другой. Биссектриссы внутренняго и внѣшняго угловъ при вершинѣ $\triangle$-а пересѣкаютъ основаніе и его продолженіе въ двухъ точкахъ. Найти разстояніе между ними.

498. Геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ A и B находятся въ данномъ отношеніи $2:1$ есть, какъ извѣстно, окружность опредѣленнаго радіуса. Найти этотъ радіусъ, если разстояніе AB равно 12.



Черт. 63.

Рѣш. Пусть A и B данныя точки и $AB = 12$. Возьмемъ M такъ, чтобы $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{1}$, слѣд. $MB = 4$; возьмемъ на продолженіи AB точку N такъ, чтобы $\frac{AN}{BN} = 2$, слѣдовательно $BN = 12$, а $MN = 16$; какъ извѣстно MN есть діаметръ искомой окружности, а радіусъ $= 8$ (черт. **63**).



Черт. 64.

499. Основанія трапеціи 8 и 1; въ этой трапеціи параллельно основанію проведены двѣ прямыя, которыя дѣлятъ ее на три подобныя между собой трапеціи. Найти эти прямыя.

Рѣш. Т. к. I и II трапеціи подобны между собой, то ихъ большія основанія относятся какъ меньшія, т. е. $\frac{8}{x} = \frac{x}{y}$ или $8y = x^2$..... (1); аналогично: вслѣдствіе подобія II и III трапецій: $\frac{x}{y} = \frac{y}{1}$ или $x = y^2$..... (2). Подставивъ y^2 вмѣсто x въ 1-ое уравненіе, получимъ $8y = y^4$ или $8 = y^3$, откуда $y = 2$; слѣд. $x = 4$ (черт. 64).

500. Въ трапеціи основанія суть 8 и 1; боковыя стороны 14 и 7. Двѣ прямыя, параллельныя основаніямъ, дѣлятъ эту трапецію на три подобныя между собой трапеціи. Опред. ихъ периметры.

Указ. Найти сперва длину основаній (см. зад. № 499).

---

501. Два круга имѣютъ внѣшнее касаніе; черезъ точку ихъ касанія проведена прямая, образующая въ нихъ двѣ хорды длиною 9 и 6; разстояніе между центрами равно 10. Найти радіусы.

502. Радіусы двухъ круговъ суть 1 и 2; къ этимъ кругамъ проведена общая внутренняя касательная; прямая, соединяющая ихъ центры, равна 6; на какія части эта прямая дѣлится данной касательной?

503. Къ двумъ внѣшнекасательнымъ кругамъ, радіусы которыхъ суть 2 и 3, проведены двѣ общія внѣшнія касательныя. Найти разстоянія отъ точки ихъ пересѣченія до центровъ данныхъ круговъ.

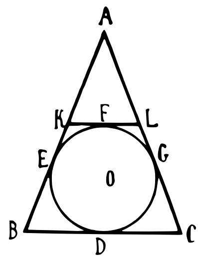
504. Два круга имѣютъ внутреннее касаніе; ихъ радіусы суть 9 и 6; черезъ точку касанія проведена въ большемъ кругѣ хорда, равная 15. На какія части эта хорда дѣлится окружностью меньшаго круга?

505. Въ уголъ вписаны два взаимнокасательныхъ круга; разстояніе отъ ихъ центровъ до вершины угла суть 3 и 6. Опред. ихъ радіусы.

506. Даны два круга, радіусы которыхъ суть 3 и 1; разстояніе между центрами равно 6. Найти кратчайшія разстоянія отъ точки пересѣченія ихъ общихъ внѣшнихъ касательныхъ до каждой изъ данныхъ окружностей.

507. Въ равнобедренный $\triangle$-ъ, основаніе котораго равно 6, а боковая сторона равна 9, вписанъ кругъ. Опред. разстояніе между точками касанія этого круга къ боковымъ сторонамъ.

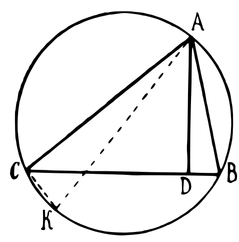
508. Въ $\triangle$-ъ, основаніе котораго равно 2, а периметръ равенъ 8, вписанъ кругъ Опред. длину прямой, проведенной въ $\triangle$-ѣ касательно къ кругу и параллельно къ основанію $\triangle$-а.



Черт. 65.

Рѣш. Пусть въ $\triangle$-ѣ ABC основ. $BC = 2$; тогда $AB + AC = 6$. Очевидно $BE = BD$ и $CD = CG$; слѣд. $AE + AG = 6 - 2 = 4$. Очевидно, также $KF = KE$ и $LF = LG$; слѣд. периметръ $\triangle$-а $AKL = AE + AG = 4$. Периметры подобныхъ $\triangle$-овъ относятся какъ основ. т. е. $\frac{8}{4} = \frac{2}{x}$, откуда $x = 1$ (черт. 65).

509. Въ кругъ, радіусъ котораго равенъ 6, вписанъ $\triangle$-ъ, двѣ стороны котораго суть 9 и 4; опред. высоту, опущенную на третью сторону.

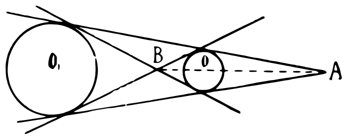


Черт. 66.

Рѣш. Въ $\triangle$-ѣ ABC искомая высота AD. Проведемъ діаметръ AK; прямоугольный $\triangle$-ъ $ABD \infty ACK$; слѣд. $\frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AC}$, откуда $AD = 3$ (черт. 66).

510. Двѣ стороны △-а суть 12 и 9; высота, опущенная на третью сторону, равна 6. Опред. радіусъ описаннаго круга.

511. Даны два круга одинъ внѣ другого; ихъ радіусы 6 и 3 (черт. 67); разстояніе между центрами равно 18. Опред. разстояніе между точкой пересѣченія общихъ внутреннихъ касательныхъ и точкой пересѣченія общихъ внѣшнихъ касательныхъ.



Черт. 67.

Указ. Найти сперва разст. отъ какого-либо центра, напр. O до A и до B ($AO = 18$, $BO = 6$).

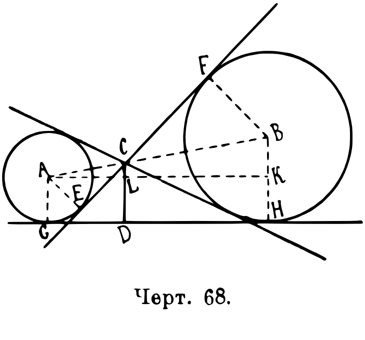
512. Два круга имѣютъ внѣшнее касаніе; радіусъ одного вдвое болѣе радіуса другого. Къ этимъ кругамъ проведены общія внѣшнія касательныя, равныя 3 каждая. Найти хорды, соединяющія точки касанія данныхъ касательныхъ въ каждомъ кругу.

Указ. Сумма искомыхъ хордъ равна длинѣ данной касательной, умноженной на 2 (см. зад. № 337).

513. Изъ точки A, данной на окружности радіуса 8, проведены три хорды. Опред. радіусъ окружности, дѣлящей каждую изъ этихъ хордъ въ отношеніи $3:1$, считая отъ A (большая часть при A).

Указ. Изъ A провести діаметръ и раздѣлить въ томъ же отношеніи.

514. Даны два круга радіусовъ 6 и 3 одинъ внѣ другого. Опред. разстояніе общей ихъ внѣшней касательной отъ точки пересѣченія общихъ ихъ внутреннихъ касательныхъ.



Черт. 68.

Указ. Искомая линія—

CD; $AE \parallel BF$, $AC:CB = AE:BF = 3:6$. Въ трапеціи $ABHG$ основанія AG и BH даны, отношеніе $AC:CB$ найдено, поэтому CD — легко найти; для этого проводимъ $AK \parallel GH$; $CL:BK = AC:AB$, отсюда найдемъ CL, а $LD = AG$ (черт. 68).

515. Даны два круга; ихъ радіусы 4 и 2; найти разстояніе общей ихъ внутренней касательной отъ точки пересѣченія внѣшнихъ касательныхъ.

516. Въ $\triangle$-ъ, высота котораго равна 8, вписанъ кругъ, радіусъ котораго 3; опред. радіусъ внѣвписаннаго круга, касательнаго къ основанію $\triangle$-а.

517. Въ $\triangle$-ъ внѣвписаны два круга, радіусы которыхъ 2 и 6, касательно къ боковымъ сторонамъ. Опред. высоту $\triangle$-а.

Указ. См. зад. № 514.

(Въ задачахъ отъ № 518 до № 526 примѣняется теорема: сходственныя линіи двухъ подобныхъ фигуръ относятся какъ ихъ сходственныя стороны).

518. Въ трапеціи, основанія которой суть 3 и 6, вписаны два круга такъ, что каждый изъ нихъ касается одного изъ основаній трапеціи и двухъ діагоналей; радіусъ меньшаго круга равенъ 1. Найти радіусъ большаго круга.

519. Въ кругъ, радіусъ котораго равенъ 6, вписанъ нѣкоторый $\triangle$-ъ; опред. радіусъ окружности, проходящей черезъ середины всѣхъ сторонъ $\triangle$-а.

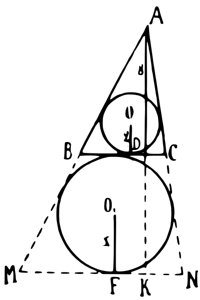
520. Въ кругъ, радіусъ котораго равенъ 4, вписана трапеція; ея діагонали своимъ пересѣченіемъ образуютъ четыре отрѣзка. Найти радіусъ окружности, дѣлящей пополамъ каждый изъ этихъ отрѣзковъ.

521. Трапеція, основанія которой суть 3 и 12, діагональю дѣлится на два подобныхъ $\triangle$-а; въ каждый изъ этихъ $\triangle$-овъ вписано по кругу; радіусъ меньшаго равенъ 1. Найти радіусъ большаго.

Указ. Предварительно найти данную діагональ — x; $12 : x = x : 3$; $x = 6$.

522. Въ равнобедренный $\triangle$-ъ съ высотою 8 вписанъ кругъ радіуса 2. Опред. радіусъ круга, касательнаго къ этому кругу и къ боковымъ сторонамъ даннаго $\triangle$-а.

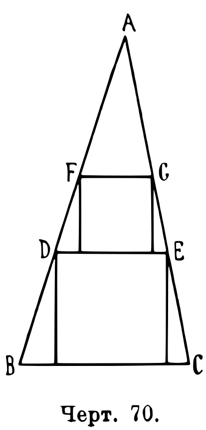
523. Въ $\triangle$-ъ, высота котораго равна 8, вписанъ кругъ радіуса 2. Опред. радіусъ внѣвписаннаго круга, касательнаго къ основанію $\triangle$-а.



Черт. 69.

Рѣш. Пусть ABC—данный $\triangle$-ъ; высота $AE = 8$, рад. впис. круга $OD = 2$; иском. рад. внѣвпис. круга O_1F обозначимъ черезъ x. Проведемъ $MN \parallel BC$ касательно кругу O_1, продолжимъ AE. $\triangle$-и ABC и AMN подобны, слѣд. ихъ сходств. высоты относятся какъ радіусы круговъ, вписанныхъ въ эти $\triangle$-и, т. е. $\frac{AE}{AK} = \frac{OD}{O_1F}$ или $\frac{8}{8 + 2x} = \frac{2}{x}$, откуда $x = 4$ (черт. 69).

524. Въ $\triangle$-ъ, основаніе котораго равно 9, вписаны два квадрата одинъ надъ другимъ (см. черт. № 70). Найти стороны большаго квадрата, если сторона меньшаго равна 4.

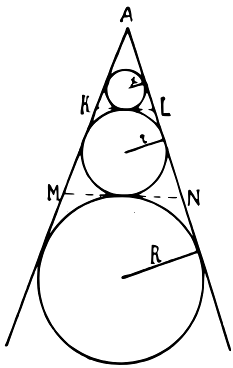


Черт. 70.

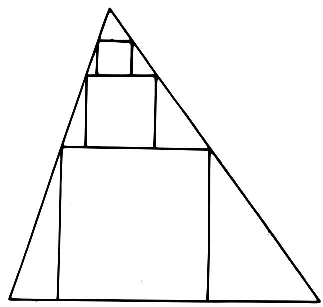
Указ. $\triangle$-и ABC и ADE подобны; поэтому ихъ основанія относятся какъ стороны вписанныхъ квадратовъ (сходств. линіи) т. е. $BC : DE = DE : FG$.

525. Въ данный уголъ A вписаны три круга, послѣдовательно касающихся другъ друга. Опред. радіусъ наименьшаго, если радіусы двухъ другихъ суть R и r.

Указ. KL и MN общія касательныя; $\triangle$-и AKL и AMN подобны; r и x суть ихъ сходств. линіи, какъ радіусы вписанныхъ въ нихъ круговъ, также x и R — ихъ сходств. линіи, какъ ра-



Черт. 71.



Черт. 72.

діусы внѣвписанныхъ въ нихъ круговъ; поэтому $r:x = x:R$ (черт. 71).

526. Въ $\triangle$-ъ вписаны одинъ надъ другимъ три квадрата (черт. 72). Опред. сторону наименьшаго квадвата, если стороны двухъ другихъ суть 4 и 2.

Указ. Рѣшается подобно зад. № 525.

Числовыя зависимости между злементами прямоугольныхъ $\triangle$-овъ и ихъ примѣненіе.

(Свойства $\perp$-а, опущеннаго изъ вершины прямого угла на гипотенузу, зависимость между сторонами прямоугольнаго $\triangle$-а).

527. Данъ прямоугольный $\triangle$-ъ; перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу равенъ 6 и дѣлитъ гипотенузу на двѣ части; одна изъ нихъ равна 4. Найти другую.

528. Данъ прямоугольный △ ъ; высота, опущенная на гипотенузу, дѣлитъ ее на двѣ части длиною 4 и 1; найти длину этой высоты.

529. Гипотенуза прямоугольнаго △-а равна 9; одинъ изъ катетовъ равенъ 6. На какія части гипотенуза дѣлится высотой, на нее опущенной?

530. Данъ прямоугольный △-ъ; высота, опущенная на гипотенузу, дѣлитъ ее на двѣ части 16 и 9. Найти катеты.

531. Катеты прямоугольнаго △-а 2 и 4; въ концахъ гипотенузы возставлены къ ней перпендикуляры, а каждый изъ катетовъ продолженъ до встрѣчи съ ⊥-омъ, возставленнымъ изъ противоположной вершины. На сколько продолженъ каждый катетъ?

532. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольнаго △-а, равна 12 и дѣлитъ гипотенузу на двѣ части въ отношеніи 4 : 9. Найти гипотенузу.

533. Гипотенуза прямоугольнаго △-а равна 10, высота, на нее опущенная, равна 4. Найти отрѣзки гипотенузы.

534. Найти гипотенузу прямоугольнаго △-а, если катеты его суть: 1) 3 и 4, 2) 6 и 8, 3) 5 и 12.

535. Найти гипотенузу прямоугольного △-а, если катеты его равны: 1) 9 и 12, 2) 8 и 15, 3) 7 и 24.

536. Въ прямоугольномъ △-ѣ даны гипотенуза и одинъ изъ катетовъ: 1) 10 и 6, 2) 13 и 12, 3) 15 и 12. Найти другой катетъ.

537. Въ прямоугольномъ △-ѣ даны гипотенуза и одинъ изъ катетовъ: 1) 20 и 16, 2) 17 и 8, 3) 25 и 7. Найти другой катетъ.

538. Катеты прямоугольнаго △-а суть: 5 дюйм. и 1 футъ. Найти гипотенузу.

539. Гипотенуза прямоугольнаго △-а равна 5 арш., одинъ изъ катетовъ равенъ 1 саж.; найти другой катетъ.

540. Катеты прямоугольнаго △-а 6 и 8. На какія части дѣлится гипотенуза высотой, на нее опущенной?

541. Найти гипотенузу прямоугольнаго $\triangle$-а, если высота, на нее опущенная, равна 12, а одинъ изъ катетовъ 20.

542. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а суть 15 и 20; найти высоту, опущенную на гипотенузу.

543. Гипотенуза прямоугольнаго $\triangle$-а равна 26; катеты относятся какъ $5:12$. Найти катеты.

544. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а относятся какъ $3:4$; периметръ $\triangle$-а равенъ 24. Найти стороны $\triangle$-а.

Указ. Обозначимъ катеты черезъ $3x$, $4x$; тогда гипотенуза будетъ равна $\sqrt{9x^2 + 16x^2}$ т. е. $5x$.

545. Высота, опущенная на гипотенузу, дѣлитъ ее на двѣ части въ отношенiи $9:16$; периметръ $\triangle$-а равенъ 120. Найти стороны.

546. Стороны прямоугольнаго $\triangle$-а суть три цѣлыхъ послѣдовательныхъ числа. Найти ихъ.

Рѣш. Обознач. искомыя стороны черезъ x, $x+1$, $x+2$.

547. Гипотенуза прямоугольнаго $\triangle$-а на 2 болѣе одного катета и на 4 болѣе другого катета. Найти стороны $\triangle$-а.

548. Гипотенуза прямоугольнаго $\triangle$-а равна 25, высота, на нее опущенная, равна 12. Найти катеты.

549. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а суть 6 и 8. Въ серединѣ гипотенузы возставленъ $\perp$-ъ. Опред. длину его до пересѣченiя: 1) съ большимъ катетомъ; 2) съ продолженiемъ меньшаго катета.

550. Проэкцiи даннаго отрѣзка на стороны прямого угла суть 5 и 12. Найти длину отрѣзка.

551. Опредѣлить катеты равнобедреннаго прямоугольнаго $\triangle$-а, если ихъ проэкцiи на нѣкоторую прямую суть 12 и 5.

552. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а относятся какъ $2:3$; въ какомъ отношенiи гипотенуза дѣлится высотой, на нее опущенной?

553. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а 6 и 8; на какiя части биссектрисса прямого угла дѣлитъ гипотенузу?

554. Биссектрисса прямого угла прямоугольнаго $\triangle$-а дѣлитъ гипотенузу на двѣ части: 20 и 15. Найти катеты.

555. Биссектрисса остраго угла прямоугольнаго $\triangle$-а дѣлитъ противолежащій катетъ на двѣ части 4 и 5. Найти гипотенузу.

556. Биссектрисса прямого угла прямоугольнаго $\triangle$-а дѣлитъ гипотенузу на двѣ части въ отношеніи 2:5; въ какомъ отношеніи дѣлится гипотенуза высотой, на нее опущенной?

557. Высота, опущенная на гипотенузу даннаго прямоугольнаго $\triangle$-а, дѣлитъ его на два прямоугольныхъ $\triangle$-а; медіаны ихъ, проведенныя къ ихъ гипотенузамъ, суть 3 и 4. Опред. медіану даннаго $\triangle$-а, проведенную къ его гипотенузѣ.

Указ. Медіана гипотенузы равна половинѣ гипотенузы.

---

558. Стороны прямоугольника суть 3 и 4; опред. его діагонали.

559. Сторона квадрата равна 1; найти его діагонали.

560. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 6; периметръ—16. Найти высоту.

561. Опредѣлить высоту равносторонняго $\triangle$-а, сторона котораго равна 2.

562. Діагонали ромба 12 и 16; опред. его сторону.

563. Сторона ромба равна 13, одна изъ діагоналей равна 10; найти другую діагональ.

564. Сторона ромба равна 15; діагонали относятся какъ 3:4. Найти діагонали.

565. Высота, опущенная на боковую сторону равнобедреннаго $\triangle$-а, дѣлитъ ее на два отрѣзка 2 и 3. (3—при вершинѣ). Найти длину этой высоты.

566. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 30; высота, на нее опущенная, равна 20. Опред. высоту, опущенную на боковую сторону.

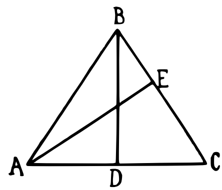
567. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 8; боковая сторона равна 5. Опред. всѣ высоты.

568. Въ равнобедренномъ $\triangle$-ѣ высота, опущенная на боковую сторону, дѣлитъ ее на два отрѣзка длиною 2 и 7 (большій отрѣзокъ при вершинѣ). Опред. основаніе $\triangle$-а.

569. Высота равнобедреннаго $\triangle$-а равна 8, периметръ его равенъ 32. Опред. стороны.

570. Въ равнобедренномъ $\triangle$-ѣ высота, опущенная на основаніе, равна 20; высота, опущенная на боковую сторону, равна 24. Опред. стороны $\triangle$-а.

Указ. $BA = BC$; $\triangle$-и BCD и ACE подобны; слѣд. $AC : BC = AE : BD = 24 : 20 = 6 : 5$; обозначимъ: $AC = 6x$ и $BC = 5x$; $CD = 3x$; далѣе $BC^2 - CD^2 = BD^2$ (черт. 73).



Черт. 73.

571. Основанія прямоугольной трапеціи суть 20 и 8, большая изъ боковыхъ сторонъ равна 13. Найти другую боковую сторону.

572. Въ равнобедренной трапеціи основанія суть 5 и 11; высота равна 4. Опред. боковыя стороны.

573. Основанія трапеціи суть 18 и 8; каждая изъ боковыхъ сторонъ равна 13. Найти высоту трапеціи

574. Сторона ромба равна 25, высота его равна 24. Опред. его діагонали.

575. Въ прямоугольной трапеціи основанія суть 8 и 6; большая изъ боковыхъ сторонъ равна 5. Опред. діагонали трапеціи.

576. Основанія прямоугольной трапеціи 11 и 16, большая изъ боковыхъ сторонъ—13; найти большую діагональ.

577. Въ равнобедренной трапеціи основанія суть 25 и 7, а діагональ равна 20. Опред. боковыя стороны.

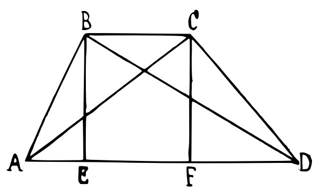
578. Въ равнобедренной трапеціи основанія суть 7 и 25; боковая сторона равна 15. Опред. діагонали.

579. Средняя линія равнобедренной трапеціи равна 4, высота равна 3. Опред. діагонали ея.

Указ. См. зад. № 244.

580. Дана равнобедренная трапеція; боковая сторона ея равна 7; діагональ равна 8, средняя линія 4. Найти основанія.

581. Въ прямоугольной трапеціи діагонали суть 20 и 15; меньшая изъ боковыхъ сторонъ равна 12. Опред. другую боковую сторону.

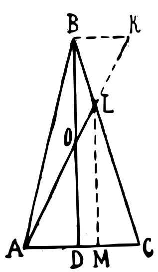


Черт. 74.

582. Въ нѣкоторой трапеціи діагонали суть 15 и 20; средняя линія равна $12\frac{1}{2}$. Опред. высоту трапеціи.

Рѣш. $ABCD$ — дан. трапеція. $BD = 20$, $AC = 15$. Иск выс. CF или BE обозначимъ черезъ x. Изъ пр. $\triangle$-а ACF $AF = \sqrt{225 - x^2}$; изъ пр. $\triangle$-а BDE — $DE = \sqrt{400 - x^2}$; но $AF + DE = AD + EF = AD + BC = 2 . 12\frac{1}{2} = 25$; слѣд.: $\sqrt{225 - x^2} + \sqrt{400 - x^2} = 25$; перенесемъ второй радикалъ въ правую часть ур-ія и возведемъ затѣмъ ур-іе въ квадратъ; послѣ приведенія получимъ : $16 = \sqrt{400 - x^2}$, откуда $x = 12$ (черт. 74).

583. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 18, высота равна 24. Изъ концовъ основанія черезъ середину высоты проведены прямыя до пересѣченія съ боковыми сторонами. Найти длину проведенныхъ прямыхъ.

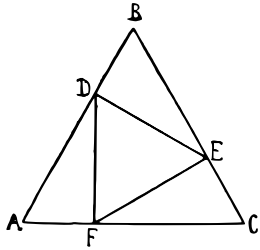


Черт. 75.

Указ. Иском. линія AL; продолжимъ ее, проведемъ $BK \parallel AC$; $CL : BL = AC : BK = 2$; далѣе находимъ : LM, AM, AL (черт. 75).

584. Сторона равносторонняго $\triangle$-а равна 3; въ этотъ $\triangle$-ъ вписанъ другой $\triangle$-ъ такъ, что его стороны $\perp$-ны къ сторонамъ даннаго $\triangle$-а. Найти его стороны.

Указ. $\triangle$-и ADF, BDE, CEF равны; $AD = 2AF = 2BD$ (черт. 76).



Черт. 76.

585. Сторона равносторонняго $\triangle$-а равна 1; около этого $\triangle$-а описанъ другой равносторонній $\triangle$-ъ такъ, что его стороны $\perp$-ны къ сторонамъ даннаго. Найти его стороны.

586. Въ данный квадратъ, сторона котораго равна 7, вписанъ другой квадратъ, сторона котораго равна 5. На какія части дѣлятся стороны перваго квадрата вершинами второго?

587. Сторона даннаго квадрата равна 10; около него описанъ второй квадратъ, стороны котораго дѣлятся въ вершинахъ даннаго въ отношеніи $3:4$. Опред. сторону описаннаго квадрата.

588. Діагонали 4-угольника взаимно $\perp$-ны и равны 6 и 8; опред. діагонали другого 4-угольника, вершинами котораго служатъ середины сторонъ даннаго 4-угольника.

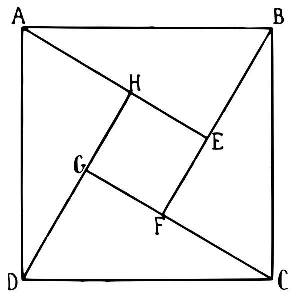
Указ. Искомая фигура есть прямоугольникъ, стороны котораго суть 3 и 4 (т. е. половины діагоналей).

589. Стороны прямоугольника суть 9 и 12; каждая сторона раздѣлена на три равныя части, и черезъ каждую пару точекъ, ближайшихъ къ вершинѣ, проведена прямая. Опред. стороны и діагонали 4-угольника, образованнаго пересѣченіемъ всѣхъ проведенныхъ прямыхъ.

590. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 18, боковая сторона равна 27. Опред. стороны $\triangle$-а, вершинами котораго служатъ основанія высотъ даннаго $\triangle$-а.

Указ. См. зад. № 238.

591. Каждая сторона равносторонняго $\triangle$-а, длиною 2, повернута около своей середины по направленію дви-



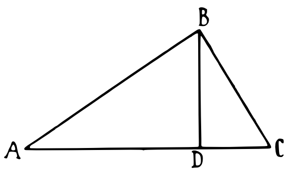
Черт. 77.

женія часовыхъ стрѣлокъ на 30^0. Опред. стороны $\triangle$-а, образованнаго новымъ направленіемъ этихъ сторонъ.

592. Каждая сторона квадрата повернута около соотвѣтствующей вершины на 30^0 по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ во внутрь квадрата (черт. 77). Опред. сторону квадрата, образованнаго новымъ направленіемъ сторонъ, если сторона даннаго квадрата равна 2.

Указ. $\angle BAE = 30^0$, $\angle ABE = 60^0$; слѣд. $BE = \frac{AB}{2} = 1$, а $AE = \sqrt{3}$; аналогично $AH = 1$, а $HE = AE - AH = \sqrt{3} - 1$.

593. Прямоугольный $\triangle$-ъ высотой, опущенной на гипотенузу, дѣлится на два $\triangle$-а, периметры которыхъ суть $m = 3$ и $n = 4$. Опред. периметръ даннаго $\triangle$-а.



Черт. 78.

Рѣш. Пусть въ прям. $\triangle$-ѣ ABC $\angle B$ — прямой и BD — высота. Периметръ $\triangle$-а BDC равенъ 3, периметръ $ABD = 4$; иском. перим. ABC пусть $= x$. $\triangle$-и BDC, ABD и ABC — подобны между собою, слѣд. отнош. гипотенузы кажд. $\triangle$-а къ своему периметру есть величина постоянная — K, т. е. $\frac{BC}{3} = \frac{AB}{4} = \frac{AC}{x} = K$; слѣд. $BC = 3\ K$, $AB = 4.\ K$, $AC = x.\ K$ (гдѣ K произвольное число); но $BC^2 + AB^2 = AC^2$ или $(3\ K)^2 + (4\ K)^2 = (x.\ K)^2$; сокративъ на K^2, получимъ $x = 5$ (черт. 78).

594. Прямоугольный $\triangle$-ъ высотой, опущенной на гипотенузу, дѣлится на два $\triangle$-а; биссектриссы прямыхъ угловъ этихъ двухъ $\triangle$-овъ суть 6 и 8. Опред. биссектриссу прямого угла даннаго $\triangle$-а.

Указ. Рѣш. подобно предыд. задачѣ.

---

595. Въ кругѣ дана хорда, равная 6, на разстояніи 4 отъ центра; найти радіусъ круга.

596. Радіусъ круга равенъ 5; изъ точки, данной на окружности, проведены хорда, равная 8, и діаметръ. Найти разстояніе между ихъ концами.

597. Изъ точки, данной на окружности, проведены двѣ взаимно-перпендикулярныя хорды, длиною 6 и 8; найти радіусъ даннаго круга.

598. Въ кругѣ, радіусъ котораго равенъ 5, даны двѣ равныя параллельныя хорды на разстояніи 6 одна отъ другой. Найти длину каждой хорды.

599. Въ прямой уголъ вписанъ кругъ, радіусъ котораго равенъ единицѣ. Найти разстояніе между точками касанія.

600. Изъ точки, данной на разстояніи 8 отъ окружности, проведена къ ней касательная, равная 12. Найти радіусъ круга.

601. Даны два концентрическихъ круга, радіусы которыхъ суть 5 и 13. Найти длину хорды большаго круга, касательной къ меньшему.

602. Два концентрическихъ круга образуютъ кольцо, ширина котораго равна 8; хорда большаго круга, касательная къ меньшему, равна 24. Опред. радіусы круговъ.

603. Въ кругѣ даны двѣ равныя взаимно перпендикулярныя хорды; каждая изъ нихъ дѣлится на двѣ части 7 и 17. Найти радіусъ круга.

604. Въ кругѣ дана точка на разстояніи 15 отъ центра; черезъ эту точку проведена хорда, которая дѣлится на двѣ части 7 и 25. Найти радіусъ круга.

605. Основаніе даннаго сегмента (т.-е. хорда) равна 16; высота его равна 4. Опред. радіусъ его дуги.

606. Въ кругѣ даны по одну сторону отъ центра двѣ параллельныя хорды, длиною 8 и 6; разстояніе между ними равно 1. Опред. радіусъ круга.

607. Радіусъ круга равенъ 2; опред. длину хорды, проведенной черезъ середину радіуса круга подъ угломъ 60^0 къ нему.

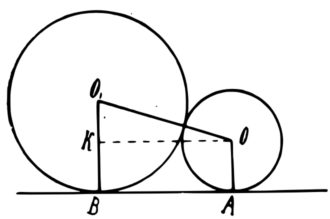
608. Двѣ окружности радіуса R пересѣкаются такъ, что каждая проходитъ черезъ центръ другой. Найти хорду, по которой онѣ пересѣкаются.

609. Радіусы двухъ пересѣкающихся круговъ суть 15 и 20; опред. разстояніе между ихъ центрами, если длина ихъ общей хорды равна 24 (два случая).

Указ. Въ первомъ случаѣ центры расположены по разнымъ сторонамъ общей хорды, во второмъ—по одну сторону.

610. Два круга, радіусы которыхъ 5 и 4, имѣютъ внутреннее касаніе. Опред. наибольшую хорду большаго круга, касательную къ меньшему кругу.

611. Радіусы двухъ внѣшнекасательныхъ круговъ суть 4 и 9. Опред. длину ихъ общей внѣшней касательной.



Черт. 79.

Рѣш. Пусть O и O_1 — данные круги; ихъ радіусы: $OA = 4$, $O_1B = 9$. Иском. касат.—AB. Соединимъ между собой O и O_1 и проведемъ $OK \parallel AB$; тогда $OO_1 = 9 + 4$, $O_1K = O_1B - OA = 5$. Иск. лин. $AB = OK = \sqrt{OO_1^2 - O_1K^2} = 12$ (черт. 79).

612. Радіусы двухъ круговъ 5 и 10; разстояніе между центрами равно 39. Опред. длину ихъ общей внутренней касательной (между точками касанія).

613. На концахъ данной прямой, равной 24, касательно къ ней, стоятъ два круга, радіусы которыхъ суть 3 и 10. Найти разстояніе между ихъ центрами.

614. Въ два смежныхъ прямыхъ угла вписано по кругу, ихъ радіусы суть 7 и 1; найти разстояніе между ихъ центрами.

615. На прямой находятся два деревянныхъ круга, радіусы которыхъ суть 3 и 12; разстояніе между ихъ центрами равно 41. Круги эти одновременно начинаютъ катиться другъ другу навстрѣчу съ одинаковой скоростью 1 въ минуту. Черезъ сколько минутъ они столкнутся?

---

616. Найти радіусъ круга, описаннаго вокругъ прямоугольника, стороны котораго 6 и 8.

617. Сторона квадрата равна 2; найти радіусъ описаннаго круга.

618. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а суть 6 и 8; найти радіусъ описаннаго круга.

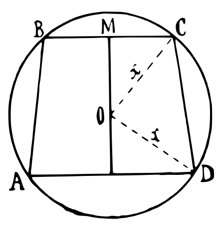
619. Опредѣлить радіусъ круга, описаннаго вокругъ равнобедреннаго $\triangle$-а, если боковая сторона равна 12, а высота 9.

620. Найти радіусъ круга, описаннаго вокругъ равнобедреннаго $\triangle$-а, если основаніе равно 8, а боковая сторона—10.

621. Данъ тупоугольный равнобедренный $\triangle$-ъ; боковая его сторона равна 4, а высота 1. Найти радіусъ описаннаго круга.

622. Въ кругъ радіуса 5 вписанъ прямоугольный $\triangle$-ъ такъ, что одинъ изъ катетовъ вдвое ближе къ центру, чѣмъ другой. Опред. катеты.

623. Въ равнобедренной трапеціи основанія суть 8 и 6, а высота равна 7. Опред. радіусъ описаннаго круга.



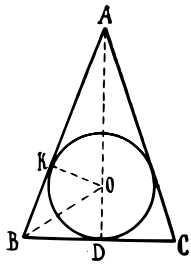
Черт. 80.

Рѣш. Въ равнобед. трапеціи $ABCD$ $AD = 8$; $BC = 6$; высота $MN = 7$; иском. радіусъ OC или OD

обозначимъ черезъ x; тогда $ON = \sqrt{x^2 - 16}$, $OM = \sqrt{x^2 - 9}$; но $\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9} = 7$; откуда $x = 5$ (черт. 80).

624. Основанія равнобедренной трапеціи суть: 56 и 16; каждая боковая сторона равна **25**. Опред. діаметръ описаннаго круга.

625. Діагонали ромба 6 и 8. Опред. радіусъ вписаннаго круга.



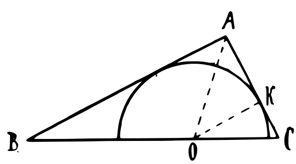
Черт. 81.

626. Опредѣлить радіусъ круга, вписаннаго въ равнобедренный $\triangle$-ъ, основаніе котораго равно 10, а боковая сторона равна 13.

Рѣш. Въ равноб. $\triangle$-ѣ ABC осн. $BC = 10$, бок. стор. $AB = 13$; слѣд. $BD = 5$ и изъ прямоуг. $\triangle$-а ABD $AD = 12$. Обозн. иском. рад. черезъ x; далѣе можно двояко: 1) прямоуг. $\triangle$-и ABD и AOK подобны, слѣд. $\frac{BD}{OK} = \frac{AB}{AO}$, т. е. $\frac{5}{x} = \frac{13}{12-x}$, откуда $x = 3^1/_3$ (черт. 81). 2) BO есть биссектрисса угла B, слѣд. $\frac{OD}{OA} = \frac{BD}{BA}$, т. е. $\frac{x}{12-x} = \frac{5}{13}$, т. е. получимъ то же самое.

627. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а суть 3 и 4; опред. радіусъ вписаннаго круга.

Указ. Гипотен. = 5, далѣе см. № 426.



Черт. 82.

628. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а суть **3** и 6. Опред. радіусъ полукруга, который дугой своей касается катетовъ, а діаметромъ лежитъ на гипотенузѣ.

Рѣш. Центръ O даннаго полукруга лежитъ на биссектр. угла A; слѣд. $\frac{BO}{OC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{3} = 2$, а $\frac{BC}{OC} = 3$. Изъ подобія $\triangle$-овъ OKC и ABC $\frac{AB}{OK}=\frac{BC}{OC}=3$, откуда $OK=$ $=\frac{AB}{3}=2$ (черт. 82).

629. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 6, боковая сторона равна 5. Опред. радіусъ полукруга, который дугой своей касается двухъ сторонъ $\triangle$-а, а діаметромъ лежитъ на третьей сторонѣ (два случая).

630. Около круга радіуса 2 описана равнобедренная трапеція, средняя линія которой равна 5. Опред. основанія трапеціи.

631. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 8; радіусъ внѣвписаннаго круга, касательнаго къ боковой сторонѣ, равенъ 3. Опред. боковую сторону $\triangle$-а.

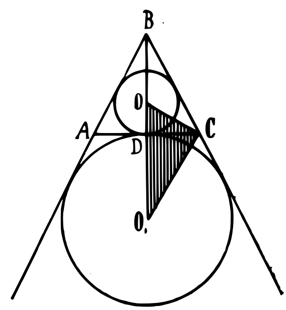
Указ. Очевидно, что радіусъ даннаго внѣвписаннаго круга равенъ высотѣ $\triangle$-а.

632. Опредѣлить радіусъ круга, внѣвписаннаго въ прямоугольный $\triangle$-ъ и касательнаго къ гипотенузѣ, если катеты суть 6 и 8.

Указ. Иск. рад. равенъ полов. перим. даннаго $\triangle$-а (см. рѣш. зад. № 440).

633. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 6, боковая сторона равна 5. Опред. радіусъ внѣвписаннаго круга, касательнаго къ основанію $\triangle$-а.

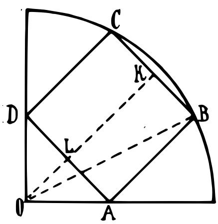
Указ. Въ $\triangle$-ѣ ABC O—центръ круга вписаннаго, O_1 — внѣвписаннаго; $CO \perp CO_1$; $OD:DC=$ $=DC:DO_1$ (черт. 83).



Черт. 83.

634. Въ полукругъ, діаметръ котораго равенъ 5, вписанъ квадратъ, вершины котораго находятся на дугѣ и на діаметрѣ. Опред. его сторону.

635. Въ полукругъ, радіусъ котораго равенъ 2, вписанъ другой полукругъ такъ, что ихъ діаметры параллельны. Найти радіусъ вписаннаго полукруга.



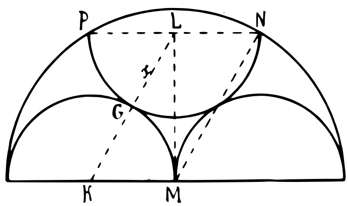
Черт. 84.

636. Въ квадрантъ (четверть круга), радіусъ котораго равенъ **5**, вписанъ квадратъ (черт. 84) такъ, что двѣ вершины его находятся на радіусахъ и двѣ на дугѣ. Опред. сторону его.

Указ. Проведемъ $OK \perp CB$; обозначимъ иском. стор. черезъ $2x$, тогда $OL = AL = KB = x$; изъ прямоуг. $\triangle$-а OKB $OB^2 = KB^2 + OK^2$, т. е. $5^2 = x^2 + (3x)^2$, откуда $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$, а $2x = \sqrt{10}$.

637. Въ данный полукругъ радіуса 1 вписаны два равныхъ взаимно касательныхъ круга. Опредѣл. ихъ радіусы.

638. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 24, боковая сторона равна 20. Опред. радіусъ окружности, проходящей черезъ основанія трехъ высотъ даннаго $\triangle$-а.



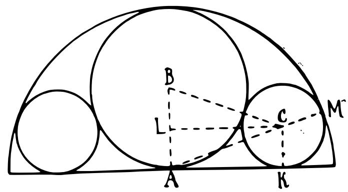
Черт. 85.

639. Дана полуокружность, радіусъ которой равенъ 2. Внутри ея на каждой половинѣ ея діаметра построено по полуокружности (черт. 85). Опред. радіусъ новой полуокружности, которая діаметромъ упирается въ данную полуокружность, а дугой своей касается двухъ меньшихъ полуокружностей.

Указ. Рад. LG искомой полуокр. обознач. черезъ x; $KM = 1$; $KL = 1 + x$, $MN = 2$. Изъ прямоуг. $\triangle$-а LMN $LM^2 = 2^2 - x^2$; слѣд. $(1 + x)^2 - 1 = 2^2 - x^2$, откуда $x = 1$.

640. Дана полуокружность радіуса 12. Внутри ея на каждой половинѣ ея діаметра построено по полуокружности. Опредѣл. радіусъ круга, касательнаго ко всѣмъ тремъ полуокружностямъ.

641. Въ полукругъ радіуса 4 вписаны три круга (черт. 86), касающіеся другъ друга послѣдовательно; крайніе между собой равны. Опред. радіусы вписанныхъ круговъ.



Черт. 86.

Указ. Радіусъ средняго $= 2$; обозначимъ рад. CK черезъ x и проведемъ $CL \perp AB$; тогда $LC^2 = BC^2 - LB^2 = (2+x)^2 - (2-x)^2 = 8x$; кромѣ того $LC^2 = AC^2 - AL^2 = (4-x)^2 - x^2 = 16 - 8x$; слѣд. $8x = 16 - 8x$, откуда $x = 1$.

Числовыя зависимости между элементами косоугольныхъ $\triangle$-овъ и нѣкоторыхъ 4-угольниковъ.

а) Косоугольные $\triangle$-и.

Теорема. Квадратъ стороны противъ остраго угла равняется суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ минусъ удвоенное произведеніе одной изъ нихъ на отрѣзокъ ея отъ вершины остраго угла до основанія высоты.

Теорема. Квадратъ стороны противъ тупого угла равняется суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ плюсъ удвоенное произведеніе одной изъ нихъ на отрѣзокъ ея отъ вершины тупого угла до основанія высоты.

642. Опредѣлить видъ $\triangle$-а, стороны котораго суть: 1) 5, 12, 13, 2) 2, 3, 4; 3) 6, 7, 8.

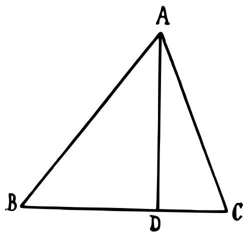
643. Стороны $\triangle$-а: a, b, c; изъ нихъ a—наибольшая. При какомъ соотношеніи между ними данный $\triangle$-ъ будетъ 1) прямоугольный, 2) остроугольный, 3) тупоугольный?

644. Основаніе $\triangle$-а равно 14; боковыя стороны суть 13 и 15. Опред. отрѣзки, на которые основаніе дѣлится высотой.

645. Основаніе $\triangle$-а равно 21; боковыя стороны 10 и 17. На какія части высота дѣлитъ основаніе?

646. Основаніе $\triangle$-а равно 7; боковыя стороны равны 15 и 20; опред. проекціи боковыхъ сторонъ на основаніе.

647. Основаніе $\triangle$-а—8; боковыя стороны 12 и 16. Найти проекціи боковыхъ сторонъ на основаніе.



Черт. 87.

648. Основаніе $\triangle$-а равно 14; боковыя стороны суть 13 и 15. Опред. высоту $\triangle$-а.

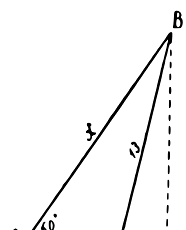
Рѣшеніе. Въ $\triangle$-ѣ $ABC \angle B$— острый; $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2. BC. BD$, откуда $BD = 9$, изъ прямоуг. $\triangle$-а ABD $AD = 12$ (черт. 87).

649. Основаніе $\triangle$-а равно 4; боковыя стороны 13 и 15. Опред. высоту $\triangle$-а.

650. Двѣ стороны $\triangle$-а равны 8 и 15; уголъ между ними равенъ 60°. Опред. третью сторону.

Указаніе. Опустить высоту на сторону, равную 15.

651. Двѣ стороны $\triangle$-а 5 и 8; уголъ между ними равенъ 60°. Найти третью сторону.



Черт. 88.

652. Двѣ стороны $\triangle$-а 7 и 8; уголъ между ними равенъ 120°. Опред. третью сторону.

653. Даны двѣ стороны $\triangle$-а 8 и 13 и уголъ противъ большей изъ нихъ—60°. Опред. третью сторону.

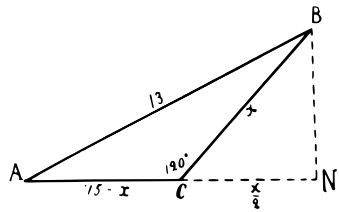
Рѣш. Въ $\triangle$-ѣ ABC $AC = 8$, $BC = 13$, $\angle A = 60°$; $BN \perp AC$. Пусть $AB = x$; тогда $AN = \frac{x}{2}$. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2. AC. AN$, т. е. $169 = x^2 + 64 - 2 . 8 \cdot \frac{x}{2}$, откуда $x = 15$ (черт. 88).

654. Данъ уголъ 120°. Изъ точки, данной внутри угла, на стороны его опущены $\perp$-ы, равные 5 и 8. Опред. разстояніе между ихъ основаніями.

655. Основаніе $\triangle$-а равно 5; прилежащій уголъ равенъ 120°; сумма двухъ другихъ сторонъ равна 10. Опред. эти стороны.

656. Основаніе $\triangle$-а равно 13, противолежащій уголъ равенъ 120°; сумма двухъ другихъ сторонъ равна 15. Опред. эти стороны.

Рѣшеніе. Въ $\triangle$-ѣ ABC $AB=13$, $\angle ACB=120°$, $BN \perp AC$; пусть $BC=x$, тогда $CN=\frac{x}{2} \cdot AB^2=BC^2+AC^2+2.AC.CN$, откуда $x=7$ или 8 (черт. 89).



Черт. 89.

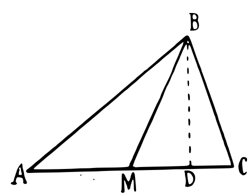
657. Основаніе $\triangle$-а равно 13; противолежащій уголъ равенъ 60°; разность двухъ другихъ сторонъ равна 7. Опред. эти стороны.

658. Даны двѣ стороны $\triangle$-а: 5 и 7 и уголъ противъ меньшей изъ нихъ—45°. Опред. третью сторону (два случая).

659. Основаніе $\triangle$-а равно 8; одинъ изъ прилежащихъ угловъ равенъ 60°; разность двухъ другихъ сторонъ равна 2. Опред. стороны.

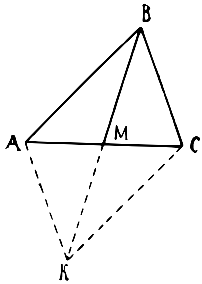
660. Основаніе $\triangle$-а равно 22; боковыя стороны суть 15 и 23; опред. медіану основанія.

Рѣшеніе. Въ $\triangle$-ѣ $ABC: AC = 22$, $BC=15$; $AB^2=BC^2+AC^2-2.AC.CD$; отсюда находимъ CD; затѣмъ найдемъ BD и медіану MB (черт. 90).



Черт. 90.

Другой способъ. Данный $\triangle$-ъ достроимъ до параллелограмма: проведемъ $AK \parallel BC$, $CK \parallel BA$ и соединимъ B съ K.



Черт. 91.

$BM = x$, $BK = 2x$. Извѣстно, что сумма квадратовъ діагоналей параллелогр. = = суммѣ квадратовъ всѣхъ сторонъ его; слѣд. $BK^2 + AC^2 = 2.AB^2 + 2.BC^2$ или $(2x)^2 + 22^2 = 2.23^2 + 2.15^2$; откуда $x = 16$ (черт. 91).

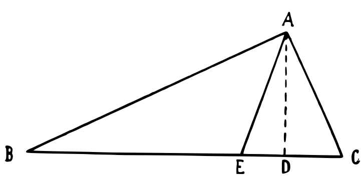
661. Стороны $\triangle$-а 6, 7, 11. Опред. медіану, проведенную къ наибольшей сторонѣ.

662. Стороны $\triangle$-а суть 48, 45, 5. Опред. биссектриссу наибольшаго угла.

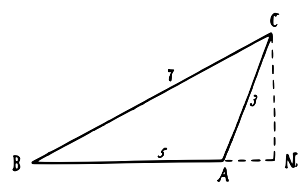
Рѣш. I-й способъ. AE — биссектр. угла A; слѣд. $\frac{EC}{BE} = \frac{AC}{AB}$, т. е. $\frac{EC}{48 - EC} = \frac{45}{5}$, откуда $EC = 4{,}8$; DC находимъ по формулѣ: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \,.\, BC \,.\, DC$, откуда $DC = \frac{19}{6}$, слѣд. $DE = \frac{49}{30}$; $AD^2 = AC^2 - DC^2 = \frac{539}{36}$; наконецъ $AE^2 = DE^2 + AD^2 = \frac{441}{25}$, откуда $AE = \frac{21}{5}$(черт. 92). (2-й способъ. См. зад. № 709 или 710).

663. Двѣ стороны $\triangle$-а 3 и 6; уголъ между ними равенъ 120^0. Опред. биссектриссу этого угла.

Замѣч. Второе рѣш. не пригодно.



Черт. 92.



Черт. 93.

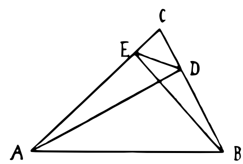
664. Стороны $\triangle$-а суть 3, 5, 7. Опред. наибольшій уголъ.

Указ. Наибольшій уголъ A — тупой. Опустимъ $CN \perp AB$, найдемъ $AN = \frac{3}{2}$; въ прямоуг. $\triangle$-ѣ ACN $AN = \frac{AC}{2}$, слѣд. $\angle CAN = 60^0$, а $\angle BAC = 120^0$ (черт. 93).

665. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 6; каждая изъ боковыхъ сторонъ равна 9. Найти разстояніе между основаніями высотъ, опущенныхъ на боковыя стороны.

Указ. Найти сперва отрѣзки боковыхъ сторонъ.

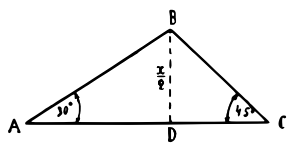
666. Основаніе $\triangle$-а равно 8; боковыя стороны суть 6 и 7; опред. разстояніе между основаніями высотъ, опущенныхъ на боковыя стороны.



Черт. 94.

Рѣш. $AD \perp CB$ и $BE \perp AC$. Найдемъ сперва CD по форм. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$. Далѣе прямоуг. $\triangle$-и ACD и BCE подобны; слѣд. $\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA}$; вслѣдствіе этой пропорціи $\triangle$-и CEA и CAB подобны, а потому $\frac{ED}{AB} = \frac{CD}{AC}$, откуда найдется ED (черт. 94).

667. Основаніе $\triangle$-а равно 2; прилежащіе къ нему углы суть: 30^0 и 45^0. Опред. другія стороны.



Черт. 95.

Рѣш. Въ $\triangle$-ѣ ABC $AC = 2$, $\angle A = 30^0$, $\angle C = 45^0$. Обозначимъ AB черезъ x; изъ прямоуг. $\triangle$-а ABD $x^2 = \frac{x^2}{4} + \left(2 - \frac{x}{2}\right)^2$, откуда $x = 2\sqrt{3} - 2$, а затѣмъ найдется и BC (черт. 95).

668. Даны три стороны $\triangle$-а: 13, 14, 15. Опред. радіусъ описаннаго круга.

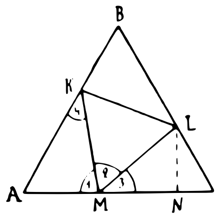
Указ. Найти сперва высоту, а далѣе см. рѣш. зад. № 509.

669. Стороны $\triangle$-а 4, 13, 15. Найти радіусъ описаннаго круга.

670. Стороны $\triangle$-а суть: 4, 13, 15. Опред. сторону вписаннаго въ него квадрата.

671. Въ равносторонній $\triangle$-ъ, сторона котораго равна

13, вписанъ другой равносторонній $\triangle$-ъ, сторона котораго равна 7. На какія части стороны перваго $\triangle$-а дѣлятся вершинами второго?

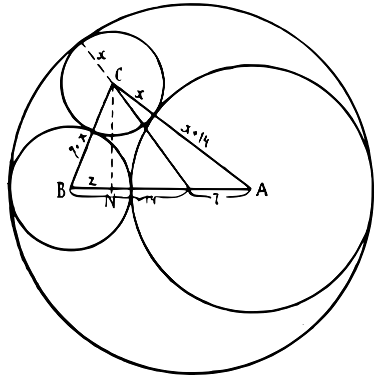


Черт. 96.

Рѣш. $\angle 4 = 180^0 - A - \angle 1 = 120^0 - \angle 1$; $\angle 3 = 180^0 - \angle 2 - \angle 1 = 120^0 - \angle 1$; слѣд. $\angle 3 = \angle 4$; слѣд. $\triangle$-ъ $CML = AKM$; опустимъ $LN \perp AC$; обозначимъ $CL = AM$ черезъ x, тогда $MC = 13 - x$, $CN = \frac{x}{2}$; $ML^2 = MC^2 + CL^2 - 2 \cdot MC \cdot CN$, т. е. $7^2 = x^2 + (13 - x)^2 - 2(13 - x) \cdot \frac{x}{2}$, откуда $x = 5$ или 8 (черт. 96).

672. Изъ точки S, данной на окружности радіуса 6, проведены двѣ хорды: $SA = 8$ и $SB = 9$. Найти разстояніе хорды AB отъ S (два случая).

673. Два круга радіусовъ 7 и 14 касаются другъ друга внѣшнимъ образомъ. Вокругъ нихъ описанъ касательно къ нимъ третій кругъ, центръ котораго лежитъ на линіи центровъ данныхъ круговъ. Найти радіусъ четвертаго круга, касательнаго ко всѣмъ тремъ кругамъ.



Черт. 97.

Рѣш. Иск. рад. — x. Соединимъ всѣ центры между собой; провед. $CN \perp AB$, $BN = z$ (черт. 97).

$$\begin{cases} \text{Изъ } \triangle\text{-а } BCK: (21 - x)^2 = (x + 7)^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot z. \\ \text{Изъ } \triangle\text{-а } ABC: (x + 14)^2 = (x + 7)^2 + 21^2 - 2 \cdot 21 z. \end{cases}$$

b) Параллелограммы и трапеціи.

Теорема. Въ параллелограммѣ сумма квадратовъ діагоналей равна суммѣ квадратовъ всѣхъ его сторонъ.

674. Стороны параллелограмма 6 и 7; одна изъ діагоналей равна 11; опред. другую діагональ.

675. Діагонали параллелограмма 9 и 7; одна изъ сторонъ его равна 4. Опред. другую сторону.

676. Діагонали параллелограмма 7 и 11; периметръ его 26. Опред. его стороны.

677. Стороны параллелограмма 9 и 13; найти діагонали, если одна изъ нихъ вдвое болѣе другой.

678. Основаніе $\triangle$-а равно 12; боковыя стороны суть 11 и 7; найти медіану основанія.

Указ. См. рѣш. зад. № 660.

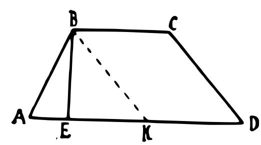
679. Двѣ стороны $\triangle$-а суть 7 и 11; медіана къ третьей сторонѣ равна 6. Опред. третью сторону.

680. Основаніе $\triangle$-а равно 20; медіана, проведенная къ основанію, равна 5; сумма двухъ другихъ сторонъ $\triangle$-а равна 22. Опред. эти стороны.

681. Стороны $\triangle$-а суть: a, b, c. Выразить медіаны ихъ.

682. Основанія трапеціи 9 и 4; боковыя стороны суть 3 и 4; опред. высоту.

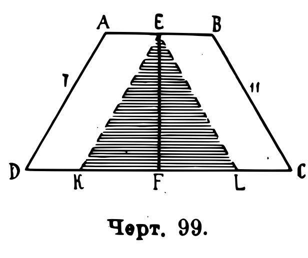
Указ. Въ трап. $ABCD$ проведемъ $BK \parallel CD$, тогда въ $\triangle$-ѣ ABK всѣ три стороны извѣстны; BE найдется какъ высота $\triangle$-а ABK (черт. 98).



Черт. 98.

683. Основанія трапеціи 7 и 21; боковыя стороны 13 и 15. Опред. высоту и діагонали трапеціи.

684. Основанія трапеціи 18 и 6; боковыя стороны 11 и 7. Опред. разстояніе между серединами ея основаній.



Черт. 99.

Указ. Проведемъ въ трапеціи $EK \parallel AD$, $EL \parallel BC$; тогда стороны $\triangle$-а KEL извѣстны и искомое EF — его медіана (см. зад. № 660) (черт. 99).

685. Въ трапеціи основанія суть 56 и 32; боковыя стороны 50 и 34. Опред. стороны 4-угольника, вершины котораго дѣлятъ пополамъ стороны трапеціи.

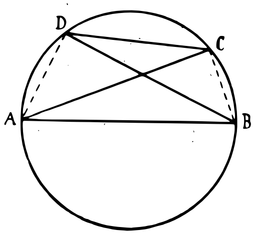
Указ. Искомыя стороны суть половины діагоналей.

с) Вписанные четырехугольники.

Теорема Птоломея. Во всякомъ вписанномъ 4-угольникѣ произведеніе діагоналей равно суммѣ произведеній противоположныхъ сторонъ.

686. Въ кругъ вписанъ 4-угольникъ, стороны котораго послѣдовательно суть 7, 5, 7, 3. Опред. діагонали.

687. Изъ концовъ діаметра, равнаго 25, проведены по одну сторону отъ него двѣ хорды длиною 24 и 20. Опред. разстояніе между ихъ концами.



Черт. 100.

Рѣш. Діам. $AB = 25$, $AC = 24$, $BD = 20$. Изъ прямоуг. $\triangle$-а ACB $BC = 7$, изъ прямоуг. $\triangle$-а ABD $AD = 15$. По теор. Птоломея: $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$; откуда иском. $DC = 15$ (черт. 100).

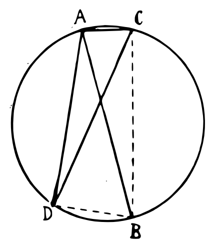
688. Діаметръ полукруга служитъ основаніемъ вписаннаго въ него 4-угольника, діаметръ равенъ 25, прилежащія къ нему стороны суть 7 и 15. Найти периметръ 4-угольника.

689. Три стороны $\triangle$-а суть: 20, 15 и 7. Опред. діаметръ описаннаго круга (при помощи теоремы Птоломея).

Указ. Изъ одной вершины $\triangle$-а провести діаметръ, конецъ котораго соединить съ другими вершинами (другой способъ см. зад. № 509).

690. Въ кругъ, радіусъ котораго равенъ 25, вписанъ $\triangle$-ъ, двѣ стороны котораго 30 и 40. Опред. третью сторону (два случая).

691. Діаметръ круга равенъ 65; въ этомъ кругѣ даны двѣ дуги, хорды которыхъ суть 16 и 52. Найти хорду, стягивающую дугу, равную суммѣ данныхъ дугъ.



Черт. 101.

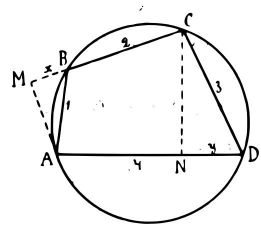
Рѣш. Діам. $AB = 65$; $AC = 16$, $AD = 52$. Найдемъ сперва: $BC = 63$ и $BD = 39$. Иском. CD найдется изъ ур-ія: $CD \,.\, AB = AD \,.\, CB + AC \,.\, BD$ (черт. 101).

692. Въ кругѣ, радіусъ котораго равенъ 5, даны двѣ дуги; ихъ хорды суть 6 и 8. Опред. хорду, стягивающую дугу, равную разности данныхъ дугъ.

(**Рѣш**. аналогично предыд. зад.).

693. Въ кругѣ радіуса 5 дана дуга, хорда которой равна 6; опред. хорду двойной дуги.

694. Стороны вписаннаго въ кругъ 4-угольника послѣдовательно суть: 1, 2, 3, 4. Опред. проекціи первой стороны на вторую и третьей на четвертую.



Черт. 102.

Рѣш. $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \,.\, BC \,.\, BM = 1 + 2^2 + 2 \,.\, 2 \,.\, x = 5 + 4x$; $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 . AD . DN = 3^2 + 4^2 - 2 \,.\, 4 \,.\, y = 25 - 8y$; слѣд. $5 + 4x = 25 - 8y$... (1) (черт. 102); изъ подобія $\triangle$-овъ ABM и CDN $y : x = 3 : 1$... (2); изъ ур-ій (1) и (2) найдутся x и y.

695. Стороны 4-угольника, вписаннаго въ кругъ, суть послѣдовательно 1, 2, 3, 4. Опред. его діагонали.

Указ. Можно свести къ предыд. зад.

ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫЯ ЛИНІИ ВЪ КРУГѢ.

(Произведеніе отрѣзковъ хордъ, произведеніе сѣкущей на внѣшнюю часть и пр.).

696. Перпендикуляръ, опущенный изъ точки, данной на окружности, на діаметръ, дѣлитъ послѣдній на двѣ части 4 и 9. Найти длину этого перпендикуляра.

697. Дана окружность; изъ нѣкоторой точки ея проведены діаметръ, равный 9, и хорда, равная 3. Изъ конца хорды опущенъ перпендикуляръ на діаметръ. На какія части онъ дѣлитъ діаметръ?

698. Перпендикуляръ, длиною 12, опущенный изъ нѣкоторой точки окружности на діаметръ, дѣлитъ его на два отрѣзка въ отношеніи 1 : 4. Опред. радіусъ круга.

699. Въ кругѣ даны двѣ хорды; первая, равная 12, дѣлится второю пополамъ; найти вторую хорду, если одна изъ ея частей равна 4.

700. Изъ точки, данной внѣ круга, проведены касательная къ нему, равная 4, и сѣкущая—8. Найти внѣшнюю часть сѣкущей.

701. Къ данному кругу изъ внѣшней точки проведены двѣ сѣкущія, длиною 6 и 9; первая дѣлится окружностью пополамъ. На какія части дѣлится вторая?

702. Въ одномъ концѣ діаметра даннаго полукруга проведена касательная, а изъ другого конца до пересѣченія съ ней проведена сѣкущая, внутренній отрѣзокъ которой равенъ 2, а внѣшній—6. Опред. радіусъ полукруга.

703. Хорда, $\perp$-ная къ діаметру, дѣлитъ его въ отношеніи 1 : 4; опред. всѣ разстоянія отъ концовъ діаметра до концовъ хорды, если ихъ сумма равна 6.

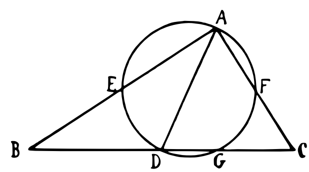
704. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а суть 15 и 20. На какія части дѣлится гипотенуза полуокружностями, построенными на катетахъ?

Указ. Каждая полуокружность проходитъ черезъ основаніе высоты, опущенной на гипотенузу.

705. Гипотенуза прямоугольнаго $\triangle$-а равна 25; высота, на нее опущенная, равна 12, и служитъ діаметромъ окружности, которая дѣлитъ каждый изъ катетовъ на двѣ части. Опред. эти части.

706. Къ данному кругу изъ внѣшней точки проведены двѣ сѣкущія: SAB, равная 6, и SCD, равная 8 (A, B, C, D суть точки пересѣченій сѣкущихъ съ окружностью); хорда BD вдвое болѣе AC. Опред. отрѣзки каждой сѣкущей.

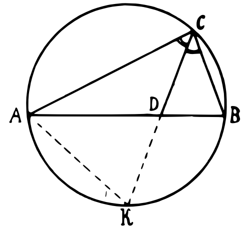
707. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а 30 и 40. На какія части дѣлится каждая изъ сторонъ $\triangle$-а окружностью, діаметромъ которой служитъ медіана гипотенузы (черт. 103)?



Черт. 103.

Указ. Точки E и F соединить съ D, а G съ A; тогда $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ и $AG \perp BC$.

708. Въ кругъ вписанъ 4-угольникъ, стороны котораго послѣдовательно равны: 5, 15, 20, 30; каждая пара противоположныхъ сторонъ продолжена до взаимнаго пересѣченія. Опред. насколько продолжена каждая сторона.



Черт. 104.

709. Стороны $\triangle$-а суть; 12, 15, 18. Опред. биссектриссу наибольшаго угла.

Рѣш. 1-й способъ. Въ $\triangle$-ѣ ABC CD — биссектрисса $= x$; $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$, $AD = 10$, $BD = 8$; $CD \,.\, DK = AD \,.\, BD$; $DK = \frac{80}{x}$. Изъ подобія $\triangle$-овъ ACK и BCD $x : 12 =$

$=15:\left(x+\frac{80}{x}\right)$, откуда $x=10$ (черт. 104). 2-й способ см. зад. № 662.

710. Доказать теорему: квадратъ биссектриссы равенъ произведенію двухъ прилежащихъ къ ней сторонъ безъ произведенія отрѣзковъ третьей стороны.

Доказ. (черт. 104). Пусть въ $\triangle$-ѣ ABC — биссект. CD. Изъ подобія $\triangle$-овъ CBD и ACK:

$(CD+DK):AC=BC:CD$ или

$CD^2+DK.CD=BC.AC$; но $DK.CD=AD.BD$, слѣд. $CD^2=BC.AC-AD.BD$.

Правильные многоугольники и ихъ примѣненіе.

$$b_n=\frac{a_n R}{\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}}$$

$$a^2_{2n}=2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}$$

711. Опредѣлить каждый изъ внутреннихъ угловъ правильнаго 1) 6-угольника, 2) 8-угольника, 3) 12-угольника, 4) n-угольника.

712. Опред. каждый изъ внѣшнихъ угловъ правильнаго 1) 5-угольника, 2) 10-угольника, 3) n-угольника.

713. Опредѣлить число сторонъ правильнаго многоугольника, если внутренній его уголъ вдвое 1) болѣе, 2) менѣе внѣшняго.

714. Внутренніе углы даннаго многоугольника тупые и менѣе 115°. Опред. ихъ.

715. Въ кругъ радіуса R вписанъ правильный многоугольникъ, сторона котораго равна a. Выразить апоѳему.

716. Выразить сторону правильнаго многоугольника, если радіусъ описаннаго круга—R, а радіусъ вписаннаго—r.

717. Радіусъ круга равенъ R. Опред. апоѳему правильнаго вписаннаго 1) 3-угольника, 2) 4-угольника, 3) 6-угольника, 4) 10-угольника.

718. Опред. радіусъ круга, описаннаго около правильнаго многоугольника, сторона котораго равна a, если число сторонъ его равно: 1) 3, 2) 4, 3) 6, 4) 10.

719. Радіусъ круга равенъ r. Опред. сторону правильнаго описаннаго 1) 3-угольника, 2) 4-угольника, 3) 6-угольника, 4) 10-угольника.

720. Радіусъ круга равенъ R. Опред. сторону правильнаго вписаннаго 1) 8-угольника, 2) 12-угольника.

Указ. Примѣнить формулу удвоенія числа сторонъ многоугольника.

721. Радіусъ круга равенъ R. Опред. апоѳему правильнаго вписаннаго 1) 8-угольника, 2) 12-угольника.

722. По данной сторонѣ a правильнаго вписаннаго 1) 3-угольника, 2) 4-угольника, 3) 6-угольника, 4) 8-угольника, 5) 10-угольника, 6) 12-угольника опред. сторону одноименнаго правильнаго многоугольника.

723. Опред. апоѳему по данной сторонѣ a правильнаго 1) 3-угольника, 2) 4-угольника, 3) 6-угольника, 4) 8-угольника, 5) 10-угольника, 6) 12-угольника.

724. Радіусъ круга равенъ 1. Вычислить съ тремя десятичными знаками сторону правильнаго вписаннаго 1) 8-угольника и 2) 12-угольника.

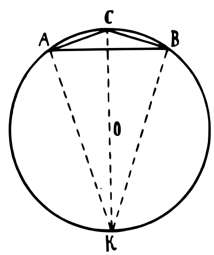
725. Радіусъ круга равенъ R. Опред. сторону правильнаго вписаннаго 5-угольника.

Указ. Беремъ формулу удвоенія числа сторонъ многоугольника, причемъ $a_{2n} = a_{10}$ — извѣстная величина, $a_n = a_5$ — искомая.

726. Радіусъ круга равенъ R. Опред. сторону правильнаго вписаннаго 16-угольника.

Указ. Примѣнить формулу удвоенія числа сторонъ многоуг., гдѣ $a_n = a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (см. зад.№ 720), $a_{2n} = a_{16}$ — искомая.

727. Радіусъ круга равенъ R. Опред. сторону правильнаго вписаннаго 15-угольника.



Черт. 105.

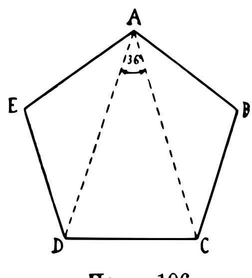
Указ. Отложимъ дугу AB, равную $\frac{1}{6}$ окруж., и дугу AC, равную $\frac{1}{10}$ окруж., тогда дуга BC равна $\frac{1}{15}$ окружности (черт. 105). $AB = R$, $AC = a_{10}$; иском. BC обозначч. черезъ x. Проведемъ діаметръ CK и хорды AK и BK. По теор. Птоломея $CK.AB = AC.BK + BC.AK$... (1); здѣсь AK извѣстна изъ прямоуг. $\triangle$-а ACK, а $BK = \sqrt{4R^2 - x^2}$.

728. Сторона правильнаго 8-угольника равна 1. Опред. его діагонали.

729. Радіусъ круга равенъ R. Опред. діагонали правильнаго вписаннаго 12-угольника.

730. Сторона правильнаго 5-угольника равна 2. Опред. его діагонали.

Рѣш. $\angle DAC = 36^0$; слѣд., если принять A за центръ и радіусомъ AD описать кругъ, то DE будетъ стороной правильнаго вписан. 10-угольника; слѣд. $DC = \frac{AD}{2}(\sqrt{5} - 1)$, откуда найдется AD, т. к. $DC = 2$ (черт. 106).



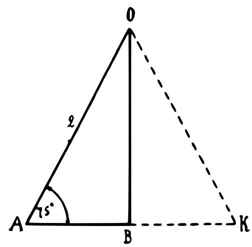
Черт. 106.

731. Діаметръ полукруга 4; дуга его раздѣлена на 6 равныхъ частей. Опред. разстоянія точекъ дѣленія отъ діаметра.

732. Полуокружность, радіусъ которой 1, раздѣлена на 6 равныхъ частей; найти разстоянія отъ точекъ дѣленія до концовъ ея діаметра.

733. Полуокружность, діаметръ которой 4, раздѣлена на 6 равныхъ частей и изъ точекъ дѣленія опущены $\perp$-ы на ея діаметръ. Опред. отрѣзки этого діаметра.

734. Опред. меньшій катетъ прямоугольнаго $\triangle$-а, если гипотенуза равна 2, а одинъ изъ острыхъ угловъ равенъ 1) 75^0, 2) 72^0, 3) 67^030^1.



Черт. 107.

Рѣш. 1) Въ прямоуг. $\triangle$-ѣ OAB $\angle\ A = 75^0$, $\angle\ AOB = 15^0$ (черт. 107); построимъ $\triangle$-ъ OBK, равный AOB, тогда $\angle\ AOK = 30^0$. Замѣтимъ, что $30^0 = \frac{360^0}{12}$; если, принявъ O за центръ, радіусомъ OA опис. кругъ, то $AK = AO.\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (см. зад. № 720), а $AB = \frac{AK}{2} = \sqrt{\quad -2\sqrt{3}}$. Для 2) получ. прав. 10-угольникъ.

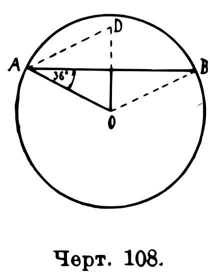
735. Одинъ изъ катетовъ прямоугольнаго $\triangle$-а равенъ 1; противолежащій уголъ равенъ 1) 15^0, 2) $22\,^1/_2{}^0$. Опред. другой катетъ.

736. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-а равна 1; уголъ при вершинѣ равенъ 1) 36^0, 2) 135^0. Опред. основаніе $\triangle$-а.

737. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 2, каждый изъ прилежащихъ угловъ равенъ 1) 72^0, 2) 75^0. Опред. боковыя стороны.

738. Основаніе сегмента равно 2; дуга его равна 1) 90^0, 2) 120^0. Опред. высоту сегмента.

739. Опред. длину хорды, дѣлящей окружность радіуса 2 на двѣ части въ отношеніи 3 : 7.



Черт. 108.

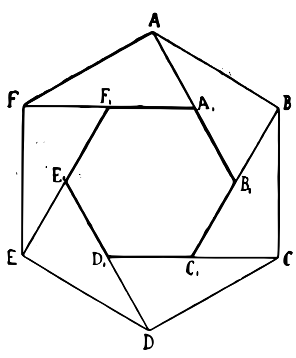
Указ. $\smile AB = 108^0$, слѣд. $\angle AOB = 108$; проведемъ $OC \perp AB$, отложимъ $CD = OC$; $\angle AOC = 54^0$, $\angle OAC = 36^0$, $\angle OAD = 72^0$; слѣд., если изъ центра A радіусомъ AO или AD описать кругъ, то OD буд. стор. прав. впис. 5-уг., а потому $DO = \frac{AO}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ (см. зад. № 725), откуда найдется DO и OC. Зная AO и OC, найдемъ AC и AB (черт. 108).

---

740. Сторона правильнаго 1) 6-угольника, 2) 8-угольника равна 2. Опред. сторону другого многоугольника, вершинами котораго служатъ середины сторонъ даннаго многоугольника.

741. Въ правильный 6-угольникъ, сторона котораго равна 15, вписанъ другой правильный 6-угольникъ, сторона котораго равна 13. На какія части стороны перваго 6-угольника дѣлятся вершинами второго?

742. Сторона квадрата равна 2. Каждая сторона этого квадрата повернута вокругъ своей середины по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ на 30^0. Опред. сторону квадрата, образованнаго новымъ направленіемъ сторонъ.



Черт. 109.

743. Данъ правильный 6-угольникъ, сторона котораго равна 3. Каждая сторона его повернута вокругъ соотвѣтствующей вершины по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ во внутрь фигуры на 30^0 (черт. 109). Опред. сторону правильнаго 6-угольника, образованнаго послѣдовательнымъ пересѣченіемъ повернутыхъ сторонъ.

Рѣш. $BB_1 = \frac{AB_1}{2}$; $CC_1 = \frac{BC_1}{2}$ и т. д.; $\triangle ABB_1 =$

$= \triangle BCC_1 = ...$ Обозначимъ CC_1 черезъ x, тогда $BC_1 = 2.CC_1 = 2x$; $BB_1 = OC_1 = x$; слѣд. $B_1C_1 = x$. Изъ прямоуг. $\triangle$-а BCC_1 $(2x)^2 = x^2 + 3^2$, откуда $x = \sqrt{3}$.

744. Сторона правильнаго 6-угольника равна 1. Каждая сторона его повернута по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ вокругъ соотвѣтствующей вершины внѣ данной фигуры на 30^0. Опред. сторону правильнаго 6-угольника, образованнаго послѣдовательнымъ пересѣченіемъ повернутыхъ сторонъ, если ихъ продолжить.

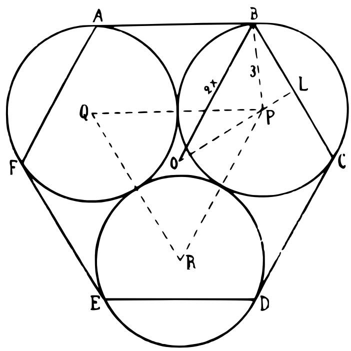
745. Данъ правильный 1) 8-угольникъ, 2) 12-угольникъ; каждая сторона его, длиною 1, повернута вокругъ соотвѣтствующей вершины во внутрь данной фигуры по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ на прямой уголъ. Опред. сторону правильнаго, одноименнаго съ нимъ, многоугольника, образованнаго послѣдовательнымъ пересѣченіемъ повернутыхъ сторонъ.

746. Данъ правильный 6-угольникъ, сторона котораго равна 2. 1) Внутри его, 2) снаружи даны 6 круговъ, изъ которыхъ каждый касается одной стороны 6-угольника въ ея серединѣ и двухъ сосѣднихъ круговъ. Опред. радіусы этихъ круговъ.

747. Данъ квадратъ, сторона котораго равна 2. 1) Внутри его, 2) снаружи даны 4 равныхъ круга, изъ которыхъ каждый касается одной стороны квадрата въ ея серединѣ и двухъ сосѣднихъ круговъ. Опред. радіусы этихъ круговъ.

748. Сторона правильнаго $\triangle$-а равна 2. 1) Внутри его, 2) внѣ даны три равныхъ круга, изъ которыхъ каждый касается одной стороны въ ея серединѣ и двухъ другихъ круговъ. Опред. ихъ радіусы.

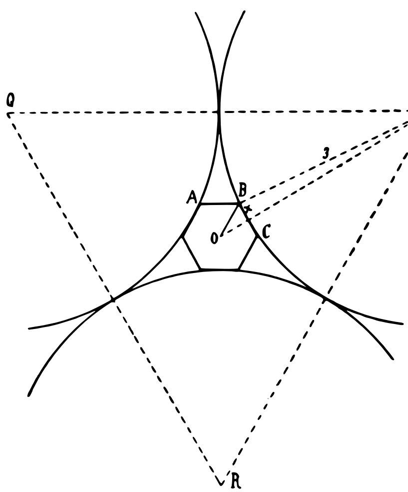
749. Три окружности взаимно касаются; радіусъ каждой равенъ 3; найти сторону правильнаго 6-угольника, вершины котораго лежатъ на этихъ окружностяхъ (2 случая).



Черт. 110.

Рѣш. 1-й случай. Иск. стор. — $2x$; $PQ = 6$; OP есть рад. круга, опис. около $\triangle$-а PQR; $OP = \frac{PQ}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$; $OPL \perp BC$; $PL = \sqrt{9 - x^2}$; но изъ $\triangle$-а OBL $OL = x\sqrt{3}$; слѣд. $x\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \sqrt{9 - x^2}$; освободивъ отъ радикала, получимъ ур-іе : $4x^2 - 12x + 3 = O$, откуда $x = \frac{3+\sqrt{6}}{2}$ (2-й корень $\frac{3-\sqrt{6}}{2}$ ур-ію не удовлетвор.); иск. стор. т. е. $2x = 3 + \sqrt{6}$ (черт. 110).

2-й случай. Иск. стор. $2x$; $PQ = 6$; OP есть радіусъ круга, опис. вокругъ $\triangle$-а PQR; $OP = \frac{PQ}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$; $OP \perp BC$; $PL = \sqrt{9 - x^2}$; изъ $\triangle$-а OBL $OL = x\sqrt{3}$; слѣд. $x\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{9 - x^2}$; освободивъ отъ радикала, получимъ : $4x^2 - 12x + 3 = 0$, откуда $x = \frac{3 - \sqrt{6}}{2}$ (второй корень $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$ не пригоденъ); иск. стор. $2x = 3 - \sqrt{6}$ (черт. 111).

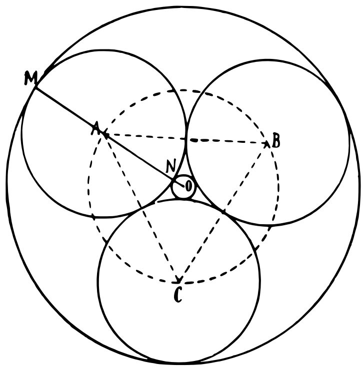


Черт. 111.

750. Въ правильный $\triangle$-ъ, сторона котораго равна 4, вписано три равныхъ круга, изъ которыхъ каждый касается двухъ сторонъ $\triangle$-а и двухъ другихъ круговъ. Опред. ихъ радіусы.

751. Даны три взаимнокасательныхъ круга радіуса r каждый. Опред. радіусъ круга, касательнаго ко всѣмъ даннымъ кругамъ (два случая).

Рѣш. A, B, C—центры данныхъ круговъ; соединимъ ихъ между собой, тогда $AB = BC = AC = = 2r$; опишемъ вокругъ $\triangle$-а ABC кругъ; $AB = = OA \cdot \sqrt{3}$; откуда $OA = = \frac{2r}{\sqrt{3}}$; иском. радіусы: $OM = OA + r$; $ON = OA - r$ (черт. 112).

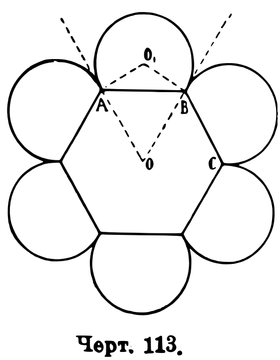


Черт. 112.

752. Радіусъ круга равенъ 1; вокругъ него описаны 1) 4, 2) 6 равныхъ круговъ, изъ которыхъ каждый касается двухъ сосѣднихъ и даннаго круга. Опред. ихъ радіусы.

753. Радіусъ круга равенъ 1; въ него вписаны 1) три, 2) 4 равныхъ круга, изъ которыхъ каждый касается двухъ сосѣднихъ и даннаго круга. Опред. ихъ радіусы.

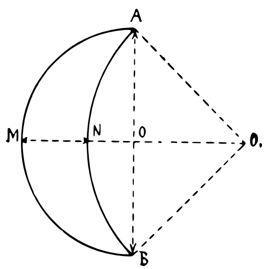
754. Данъ правильный 1) 6-угольникъ (черт. 113), 2) 3-угольникъ, сторона котораго равна 3. Стороны его служатъ основаніями сегментовъ, дуги которыхъ касаются другъ друга послѣдовательно. Опред. ихъ радіусы.



Черт. 113.

Указ. Для 1): продолжить радіусы OA и OB; $O_1A \perp OA$ и $O_1B \perp OB$.

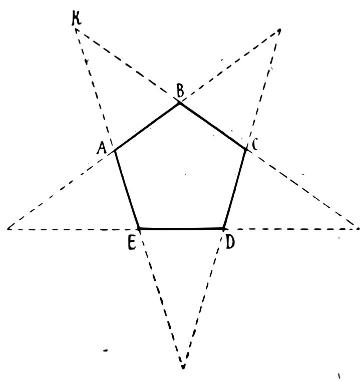
755. Дана фигура *), ограниченная двумя дугами въ 90^0 и 180^0, обращенными въ одну сторону. Опред. разстояніе между ея концами, если ширина луночки $(MN) = 1$ (черт. 114).



Черт. 114.

Рѣш. $\smile AMB = 180^0$, O — ея центръ; $\smile ANB = 90^0$; O_1 — ея центръ. Обозначимъ иском. разст. AB черезъ x; тогда $MO = \frac{x}{2}$; $OO_1 = \frac{x}{2}$; $NO_1 = AO_1 = \frac{x}{2}\sqrt{2}$. Очевидно: $MN + NO_1 = MO + OO_1$, т. е. $1 + \frac{x}{2}\sqrt{2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$; откуда найдется x.

756. Даны два равныхъ квадрата, которые имѣютъ общій центръ и одинъ повернутъ относительно другого на 45^0; каждая изъ сторонъ равна 1. Опред. периметръ „звѣздочки“, образованной ихъ пересѣченіемъ.



Черт. 115.

757. Окружность радіуса 1 раздѣлена на шесть равныхъ частей. Точки дѣленія соединены между собой черезъ одну; такимъ образомъ получилась шестиугольная „звѣздочка“. Опред. ея периметръ.

758. Данъ правильный 5-угольникъ, сторона которого равна 1; стороны его продолжены, вслѣдствіе

*) „Гиппократова луночка“.

чего образовалась пятиугольная „звѣздочка“. Опред. ея периметръ.

Рѣш. $\angle AKB = 36^0$; если изъ K опис. окружность радіусомъ KA, то AB будетъ стор. правильн. 10-тиугольн.; поэтому $AB = \frac{AK}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$, откуда $AK = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; искомый периметръ $= 10 \,.\, AK$ (черт. 115).

Отдѣлъ IV.

Площади прямолинейныхъ фигуръ.

Площадь квадрата, прямоугольника, параллелограмма.

759. Периметръ квадрата равенъ 16; найти площадь его.

760. Площадь квадрата равна 4; найти его периметръ.

761. Площадь квадрата равна 16; найти площадь другого квадрата, вершинами котораго служатъ середины сторонъ даннаго квадрата.

762. Сторона квадрата равна 1. Опред. площадь квадрата, построеннаго на діагонали.

763. Даны два квадрата; ихъ стороны суть 3 и 4; найти сторону квадрата, равновеликаго суммѣ этихъ квадратовъ.

764. Даны три квадрата; ихъ стороны 2, 3 и 6. Найти сторону квадрата, равновеликаго ихъ суммѣ.

765. Даны два квадрата; ихъ діагонали суть 5 и 3; найти діагональ квадрата, равновеликаго разности данныхъ квадратовъ.

766. Площадь квадрата равна 4; сторона его служитъ діагональю второго квадрата. Найти площадь послѣдняго.

767. Найти площадь прямоугольника, если стороны его суть: 1) 1 арш. и 1 саж.; 2) 6 дюймовъ и 4 фута; 3) 12 верш. и 4 арш.

768. Стороны прямоугольника суть 8 и 2; этотъ прямоугольникъ превращенъ въ равновеликій ему квадратъ. Найти сторону этого квадрата.

769. Стороны прямоугольника относятся какъ 2 : 3; площадь его равна 24. Найти стороны.

770. Стороны прямоугольника относятся какъ 3 : 4; площадь его равна 48. Найти діагональ.

771. Площадь прямоугольника равна 4, периметръ равенъ 8. Найти стороны.

772. Периметръ прямоугольника равенъ 14, площадь 12; найти его діагональ.

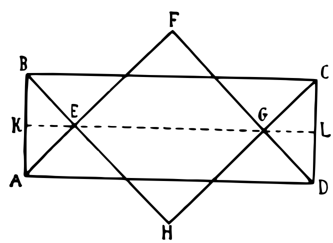
773. Діагональ прямоугольника равна 10; площадь его равна 48. Опред. его периметръ.

774. Стороны прямоугольника суть 3 и 7; на сколько нужно одновременно увеличить первую и уменьшить вторую сторону, чтобы площадь прямоугольника не измѣнилась.

775. Данъ прямоугольникъ; найти отношеніе его сторонъ, если его площадь составляетъ три четверти площади квадрата, имѣющаго такой же периметръ.

Рѣш. Пусть одна сторона—произвольная величина n, другая стор.—nx, гдѣ x—иском. отнош.; стор. соотвѣтст. квадр. $=\frac{nx+n}{2}$; имѣемъ уравн.: $\left(\frac{nx+n}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} =$ $= nx \cdot n$; сокративъ на n^2, получимъ квадр. уравн., откуда $x = 3$ или $\frac{1}{3}$.

776. Стороны прямоугольника 3 и 1; въ немъ проведены биссектриссы всѣхъ угловъ до взаимнаго пересѣченія. Найти площадь образованнаго ими 4-угольника.



Черт. 116.

Указ. Иском. фиг. $EFGH$—квадратъ, діагональ котораго $EG=2$ ($KE=KB=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}$, $GL=\frac{1}{2}$, $EG=2$); иском. площ.$=2$ (черт. 116).

777. Прямоугольникъ, стороны котораго 4 и 17, раздѣленъ прямой на два взаимно подобныхъ прямоугольника. Найти ихъ площади.

778. Основаніе параллелограмма равно 1 арш., а высота 1 фут. Найти его площадь.

779. Основаніе параллелограмма равно 1 футу, высота равна 3 дюймамъ. Найти сторону равновеликаго ему квадрата.

780. Площадь параллелограмма равна 12; высоты его суть 2 и 3. Найти периметръ параллелограмма.

781. Высоты параллелограмма суть 4 и 2; периметръ 18. Найти площадь.

782. Периметръ параллелограмма равенъ 28; высоты его суть 3 и 4. Опред. площадь.

783. Площадь параллелограмма 36; разстояніе отъ сторонъ до точки пересѣченія діагоналей суть 2 и 3. Найти периметръ.

784. Стороны прямоугольника 4 и 6; въ этомъ прямоугольникѣ проведены биссектриссы двухъ противолежащихъ прямыхъ угловъ; на какія части дѣлится площадь прямоугольника?

785. Стороны параллелограмма 1 и 2; одинъ изъ угловъ его равенъ 30^0. Найти илощадь.

786. Стороны параллелограмма 2 и 4; острый уголъ равенъ 45°. Найти площадь.

787. Данъ параллелограммъ; его площадь составляетъ половину площади прямоугольника, имѣющаго такія же стороны. Найти острый уголъ параллелограмма.

788. Діаганали ромба 6 и 8; найти площадь ромба.

789. Периметръ ромба 52; одна изъ его діагоналей 24. Найти площадь его.

790. Площадь ромба 20; периметръ его 20. Найти высоту.

791. Высота ромба 24; одна изъ діагоналей его 30. Найти площадь.

792. Найти площадь ромба, если сторона его равна a, а острые углы равны 1) 30°, 2) 45°, 3) 60°.

793. Сторона ромба равна 2; тупой уголъ равенъ 150°. Опред. его площадь.

794. Площадь ромба 2; острый уголъ его 30°. Найти периметръ.

795. Острый уголъ ромба 45°; разстояніе отъ центра его *) до стороны равно 1; найти площадь ромба.

796. Данъ ромбъ; его площадь вдвое менѣе площади квадрата, имѣющаго такой же периметръ. Найти острый уголъ ромба.

Выраженіе площади $\triangle$-а по основанію и высотѣ.

$$\triangle = \frac{a \cdot h}{2}.$$

797. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а суть 3 и 2; найти его площадь.

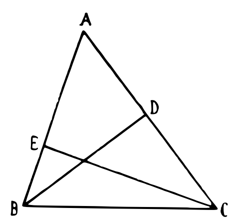
798. Найти площадь равнобедреннаго $\triangle$-а, если основаніе равно 24, а боковая сторона равна 13.

799. Гипотенуза равнобедреннаго прямоугольнаго $\triangle$-а равна 2. Найти его площадь.

800. Сторона равносторонняго $\triangle$-а равна 2. Найти его площадь.

801. Данъ прямоугольный $\triangle$-ъ; высота, опущенная на гипотенузу, дѣлитъ ее на двѣ части 1 и 4. Найти площадь даннаго $\triangle$-а.

802. Двѣ стороны $\triangle$-а 25 и 30; площадь $\triangle$-а 300. Найти третью сторону.



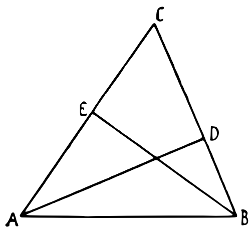
Черт. 117.

---

*) т. е. точка пересѣченія діагоналей.

Рѣш. $AB = 25$, $AC=30$; $\frac{AC \cdot BD}{2} = 300$; сл. $BD = 20$; $AD=15$; $CD=15$; изъ $\triangle$-а CBD $BC=25$ (черт. 117).

803. Площадь $\triangle$-а равна 300; двѣ высоты суть 20 и 24; найти третью высоту.



Черт. 118.

804. Доказать, что двѣ стороны $\triangle$-а обратно пропорціональны соотвѣтственнымъ высотамъ.

Доказ. Треб. док. что $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BE}$ гдѣ AD и BE — высоты (черт. 118).

1-й способъ. Очевидно, $AC \cdot BE = BC \cdot AD$ (двойная площ. $\triangle$-а); слѣд. вышеуказ. пропорція вѣрна; 2-й способъ основанъ на подобіи $\triangle$-овъ ACD и BCE.

805. Сумма двухъ сторонъ $\triangle$-а равна 15; высоты, опущенныя на эти стороны, суть 4 и 6. Опред. площадь $\triangle$-а.

Указ. См. предыд. задачу.

806. Двѣ стороны $\triangle$-а 20 и 25; сумма высотъ, на нихъ опущенныхъ,—27. Найти площадь.

807. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а относится къ боковой сторонѣ какъ 6 : 5, площадь равна 48. Найти периметръ $\triangle$-а.

808. Основаніе $\triangle$-а равно 4; на сколько уменьшится площадь $\triangle$-а, если его высоту уменьшить на 1.

809. Высота $\triangle$-а равна 12; боковыя стороны суть 13 и 20; опред. площадь $\triangle$-а (2 случая).

810. Двѣ стороны $\triangle$-а суть 4 и 2; уголъ между ними равенъ 30°. Найти площадь $\triangle$-а.

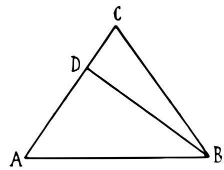
811. Двѣ стороны $\triangle$-а суть 1 и 4; уголъ между ними равенъ 150°. Опредѣлить площадь $\triangle$-а.

812. Двѣ стороны $\triangle$-а суть 10 и 14; уголъ противъ первой изъ нихъ 45°. Найти площадь $\triangle$-а.

Указ. Противъ стороны 14 можетъ быть уголъ острый или тупой.

813. Двѣ высоты $\triangle$-а суть 2 и 3; уголъ между ними, обращенный къ третьей сторонѣ, равенъ $\frac{5}{3}d$. Опред. площадь $\triangle$-а.

814. Опред. площадь равнобедреннаго $\triangle$-а, если основаніе его равно 30, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 24 (черт. 119).

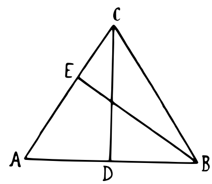


Черт. 119.

Указ. $BD \perp AC$; $AD = 18$; находимъ $BC = AC$; $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$, откуда $AC = 25$.

815. Найти площадь равнобедреннаго $\triangle$-а, если высота, опущенная на основаніе, равна 20, а высота, опущенная на боковую сторону,—24.

Рѣш. 1-й способъ. Изъ подобія $\triangle$-овъ ABE и ACD $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} = \frac{6}{5}$; обознач.: $AB = 6x$, $AC = 5x$, тогда $AD = 3x$; изъ $\triangle$-а ACD $(5x)^2 = (3x)^2 + 20^2$, откуда $x = 5$ и $AB = 30$; сл. пл. $= 300$.

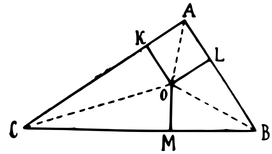


Черт. 120.

2-й способъ. Обозначимъ искомую площадь черезъ x; тогда $AC = \frac{x}{20}$, $AD = \frac{x}{20}$, а $AC^2 - AD^2 = CD^2$, откуда найдется x. (черт. 120).

816. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а равны 6 и 8; въ $\triangle$-ѣ дана точка на разстояніи 2 отъ каждаго катета. Найти разстояніе данной точки отъ гипотенузы.

Рѣш. $AB = 6$, $AC = 8$. Соединимъ данную точку съ вершиной $\triangle$-а; площ. $\triangle$-а $ABC = 24$; площ. AOB + площ. $AOC = 6 + 8 = 14$. Слѣд. пл. $BOC = 10$, а иском. $OM = 2$ (черт. 121).



Черт. 121.

817. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а суть 3 и 4; на какія части дѣлится площадь $\triangle$-а медіаной, проведенной къ гипотенузѣ?

818. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а суть 3 и 6; на какія части дѣлится площадь $\triangle$-а биссектриссой прямого угла?

819. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 2; медіаны боковыхъ сторонъ взаимно перпендикулярны. Найти площадь $\triangle$-а.

820. Медіаны равнобедреннаго $\triangle$-а 18, 15, 15. Найти площадь $\triangle$-а.

Выраженіе площади $\triangle$-а по тремъ сторонамъ.

$$\triangle = \sqrt{p\ (p-a)\ \ (p-b)\ (p-c)},\ \text{гдѣ}\ \ p = \frac{a+b+c}{2}.$$

821. Стороны $\triangle$-а суть : 4, 13, 15. Найти площадь.

822. Опредѣлить площадь $\triangle$-а, если стороны его суть: 1) 13, 14, 15; 2) 6, 25, 29; 3) 9, 10, 17.

823. Основаніе $\triangle$-а 14; боковыя стороны 13 и 15. Найти высоту $\triangle$-а.

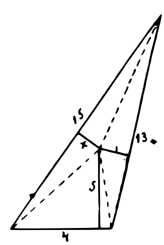
Указ. Предварительно найти площадь, равную 84; другой способъ см. № 648.

824. Стороны $\triangle$-а 7, 15, 20. Найти наибольшую высоту.

825. Стороны $\triangle$-а 13, 20, 21. Найти наименьшую высоту.

826. Сторонѣ $\triangle$-а 4, 13, 15. Внутри его дана точка на разстояніи 5 отъ первой стороны и на разстояніи 1 отъ второй. Найти разстояніе ея отъ третьей стороны.

Указ. По тремъ сторонамъ находимъ площ. = 24. Данную точку соединить со всѣми вершинами и разсмотрѣть полученные три $\triangle$-а (черт. 122).



Черт. 122.

827. Стороны $\triangle$-а относятся какъ $8:29:35$. Периметръ равенъ 144. Найти площадь.

828. Стороны $\triangle$-а относятся какъ $4:13:15$. Площадь $\triangle$-а равна 96. Найти стороны $\triangle$-а.

Указ. Обозначимъ иском. стор. черезъ $4x$, $13x$, $15x$ и примѣнимъ формулу площади: $96 = \sqrt{16x.\ 12x.\ 3x.\ x.}$; откуда $x = 2$; слѣд. иск. стороны: 8, 26, 30.

829. Стороны $\triangle$-а относятся какъ $3:25:26$; площадь $\triangle$-а равна 144. Найти периметръ $\triangle$-а.

830. Стороны $\triangle$-а представляютъ послѣдовательный рядъ цѣлыхъ чиселъ; площадь равна 84. Найти периметръ $\triangle$-а.

Рѣш. Обозначимъ искомыя стороны слѣд. образ.: $2x - 1$, $2x$, $2x + 1$, полупериметръ $3x$. Имѣемъ уравненіе: $84 = \sqrt{3x(x+1).\ x(x-1)}$; $84^2 = 3x^2\ (x^2 - 1)$; $x^4 - x^2 - 2352 = 0$; $x^2 = 49$; $x = 7$; $2x = 14$; стороны—13, 14, 15.

831. Въ $\triangle$-ъ вписанъ кругъ; прямыя, соединяющія центръ его съ вершинами $\triangle$-а, дѣлятъ его на три части, площади которыхъ суть 12, 39, 45. Найти стороны $\triangle$-а.

Указ. Стороны $\triangle$-а относятся какъ данныя числа, а площадь = суммѣ $12 + 39 + 45$.

832. Высоты $\triangle$-а равны: 12, 15, 20. Найти площадь $\triangle$-а.

Рѣш. Обозначимъ иском. площ. черезъ x; тогда стороны будутъ: $\frac{2x}{12}$, $\frac{2x}{15}$, $\frac{2x}{20}$; полупериметръ — $\frac{x}{3}$; примѣнимъ формулу площади $\triangle$-а, получимъ уравненіе: $x = \sqrt{\frac{x}{5} \cdot \frac{x}{30} \cdot \frac{x}{15} \cdot \frac{x}{10}}$ или $x = \sqrt{\frac{x^4}{150^2}}$ т. е. $x = \frac{x^2}{150}$, откуда $x = 150$.

833. Высоты $\triangle$-а суть: m, n, p. Какъ относятся между собой стороны?

Указ. Обозначить площадь черезъ S и выразить стороны.

834. Стороны $\triangle$-а a, b, c. Найти отношеніе высотъ.

835. Стороны $\triangle$-а относятся какъ $3:5:6$. Какъ относятся высоты?

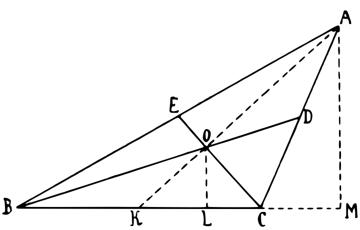
Указ. Обозначимъ стороны черезъ $3k$, $5k$, $6k$, а площадь черезъ S и выразимъ высоты.

836. Высоты $\triangle$-а относятся другъ къ другу какъ $2:3:4$. Какъ относятся стороны.

837. Высоты $\triangle$-а относятся какъ $12:15:20$; периметръ $\triangle$-а равенъ 24. Опред. площадь $\triangle$-а.

838. Высоты $\triangle$-а относятся какъ $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$; площадь $\triangle$-а равна 6. Найти периметръ.

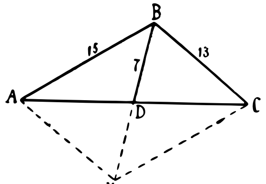
839. Основаніе $\triangle$-а равно 10; медіаны боковыхъ сторонъ суть 9 и 12. Найти площадь $\triangle$-а.



Черт. 123.

Рѣш. Медіаны $BD = 12$ и $CE = 9$. Проведемъ третью медіану AK; проведемъ $AM \perp BC$ и $OL \perp BC$. По свойству медіанъ $BO = \frac{2}{3}\ BD = 8$ и $CO = \frac{2}{3}\ CE = 6$. Площадь $\triangle\ BOC = 24$; $\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } BOC} = \frac{AM}{OL} = \frac{AK}{OK} = 3$; откуда пл. $\triangle$-а $ABC = 72$ (черт. 123).

840. Двѣ стороны $\triangle$-а 13 и 15, медіана, проведенная къ третьей сторонѣ, равна 7. Найти площадь $\triangle$-а.



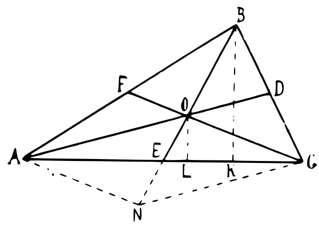
Черт. 124.

Рѣш. Данный $\triangle$-ъ достроимъ до параллелограмма: проведемъ $AK \parallel BC$ и $CK \parallel AB$; тогда площ. ABK опредѣляется по тремъ сторонамъ и $= 84$; пл. $ABCK = 84 \cdot 2$; пл. $ABC = 84$ (черт. 124).

841. Медіаны $\triangle$-а суть: 9, 12, 15. Найти площадь $\triangle$-а.

Рѣш. Въ $\triangle$-ѣ ABC медіаны $AD = 15$, $BE = 12$,

$CF = 9$. Проведемъ OL и $BK \perp$ къ AC. По свойству медіанъ $AO = \frac{2}{3}AD = 10$, $CO = \frac{2}{3}CF = 6$, $OE = \frac{1}{3}BE = = 4$. Достроимъ $\triangle$-ъ AOC до параллелограмма $AOCN$; пл. $\triangle$-а $AON = 24$ (по тремъ сторонамъ 10, 6, 8); пл. $AOCN = 2 \cdot 24$; пл. $AOC = 24$; $\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } AOC} = \frac{BK}{OL} = \frac{BE}{OE} = 3$;откуда пл. $ABC = 72$ (черт. 125).

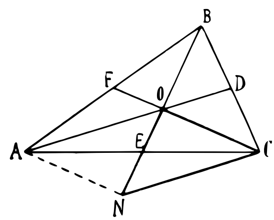


Черт. 125.

842. Высота $\triangle$-а равна 12; медіаны боковыхъ сторонъ суть 10 и $7\frac{1}{2}$. Найти площадь $\triangle$-а (два случая).

843. Данъ $\triangle$-ъ; медіаны его служатъ сторонами другого $\triangle$-а. Найти отношеніе ихъ площадей.

Рѣш. Въ $\triangle$-ѣ ABC медіаны AD, BE, CF; достроимъ $\triangle$-ъ AOC до параллелограмма $AOCN$; (по свойству медіанъ) стороны $\triangle$-а CON составляютъ $\frac{2}{3}$ медіанъ даннаго $\triangle$-а. $\frac{\text{пл. } CON}{\text{пл. } ABC} = \frac{\text{пл. } AOC}{\text{пл. } ABC} = \frac{1}{3}$; если же стороны $\triangle$-а CON увеличить $\frac{3}{2}$ раза (чтобы онѣ равнялись медіанамъ даннаго $\triangle$-а), то иском. отношеніе будетъ $= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ (черт. 126).



Черт. 126.

844. Двѣ медіаны $\triangle$-а равны 9 и 12; площадь $\triangle$-а равна 72. Найти третью медіану.

Указ. См. построеніе на черт. 125.

845. Высоты $\triangle$-а суть m, n, p. Найти площадь $\triangle$-а.

Указ. Обозначимъ стороны $\triangle$-а черезъ x, y, z; площадь—черезъ S; $x = \frac{2S}{m}$, $y = \frac{2S}{n}$, $z = \frac{2S}{p}$; подставивъ эти значенія сторонъ въ формулу площади $\triangle$-а, найдемъ S.

846. Медіаны $\triangle$-а суть m, n, p. Найти площадь $\triangle$-а.

Указ. См. № 841.

847. Площадь $\triangle$-а равна 84; двѣ стороны его 15 и 14; найти третью сторону.

Указ. Принявъ за основаніе сторону, равную 14, опустить на нее высоту; найти эту высоту и отрѣзки основанія.

848. Стороны $\triangle$-а суть 13, 14, 15. Найти радіусъ вписаннаго круга.

Рѣш. Пусть въ данномъ $\triangle$-ѣ ABC O есть центръ вписаннаго круга; обозначимъ искомый радіусъ черезъ x; соединимъ центръ O съ вершинами $\triangle$-а; пл. $\triangle$-а $AOB = \frac{AB \cdot x}{2}$; пл. $\triangle$-а $AOC = \frac{AC \cdot x}{2}$; пл. $\triangle$-а $BOC = \frac{BC \cdot x}{2}$; сложивъ эти равенства, получимъ пл. $\triangle$-а $ABC = (AB + AC + BC) \cdot \frac{x}{2}$, но пл. $\triangle$-а $ABC = 84$, слѣд. $x = 4$.

849. Стороны $\triangle$-а суть 8, 26, 30 Найти радіусъ вписаннаго круга.

850. Стороны $\triangle$-а суть a, b, c. Найти радіусъ вписаннаго круга.

Указ. См. № 848.

851. Стороны $\triangle$-а a, b, c. Найти радіусъ описаннаго круга.

Указ. По тремъ сторонамъ найти сперва площадь, затѣмъ высоту, а далѣе см. № 502. $R = \frac{abc.}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

852. Стороны $\triangle$-а суть 21, 20, 13, Найти радіусъ описаннаго круга.

Площадь трапеціи.

Теорема. Площадь трапеціи равна полусуммѣ ея основаній (или средней линіи), умноженной на высоту.

853. Основанія трапеціи 2 и 4; высота равна 3. Найти площадь трапеціи.

854. Площадь трапеціи равна 6, средняя линія равна 3. Найти высоту трапеціи.

855. Одно изъ основаній трапеціи втрое болѣе другого, высота равна 3, а площадь равна 12. Найти основанія трапеціи.

856. Основанія прямоугольной трапеціи суть 2 и 6; большая изъ боковыхъ сторонъ равна 5. Найти площадь трапеціи.

857. Основанія трапеціи суть 13 и 7; каждая изъ боковыхъ сторонъ равна 5. Найти ея площадь.

858. Основанія равнобедренной трапеціи 3 и 1; острый уголъ ея равенъ 45°. Опред. площадь трапеціи.

859. Основанія прямоугольной трапеціи суть 1 и 3; тупой уголъ ея равенъ 135°. Найти площадь.

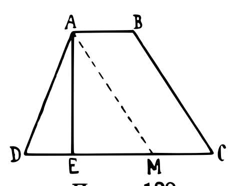
860. Высота равнобедренной трапеціи равна h; діагонали взаимно $\perp$-ны. Опред. площадь трапеціи.

861. Діагональ равнобедренной трапеціи равна 5; сумма основаній равна 8. Найти площадь.

862. Средняя линія трапеціи равна 5; одна изъ боковыхъ сторонъ равна 4 и образуетъ съ большимъ основаніемъ уголъ 30°. Опред. площадь трапеціи.

863. Основанія трапеціи 6 и 20; боковыя стороны 13 и 15. Найти высоту трапеціи.

Указ. Проведя (вспомог. линію) $AM \parallel BC$, получимъ $\triangle$-ъ, всѣ стороны котораго извѣстны: 13, 15, 14; площадь $\triangle$-а$=84$, высота $=12$ (черт. 128).



Черт. 128.

864. Основанія трапеціи 2 и 6; боковыя стороны 13 и 15; найти высоту трапеціи.

865. Основанія трапеціи 10 и 5; боковыя стороны 3 и 4. Найти площадь трапеціи.

Указ. См. № 863.

866. Основанія трапеціи 12 и 3; боковыя стороны 10 и 17. Опред. площадь трапеціи.

867. Большее основаніе трапеціи a, меньшее — b; боковыя стороны c и d. Найти площадь трапеціи.

868. Высота трапеціи равна 12, а діагонали ея суть 20 и 15. Найти ея площадь.

869. Большее основаніе трапеціи равно 4; остальныя стороны равны между собою, острый уголъ трапеціи равенъ 30°. Найти площадь трапеціи.

870. Каждая изъ діагоналей трапеціи равна 2; уголъ между ними, обращенный къ основаніямъ, равенъ 120°. Найти площадь трапеціи.

Площадь неправильнаго многоугольника.

871. Опредѣлить площадь 4-угольника, діагонали котораго взаимно $\perp$-ны и равны a и b.

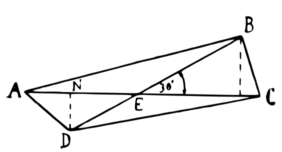
872. Опред. площадь 4-угольника, если одна изъ діагоналей равна 20 и удалена отъ противоположныхъ вершинъ на разстояніе 4 и 6.

873. Около круга, радіусъ котораго r, описанъ многоугольникъ, периметръ котораго m. Найти его площадь.

Указ. Соединить вершины съ центромъ и выразить площадь каждаго $\triangle$-а.

874. Радіусъ круга равенъ 2; найти периметръ описаннаго многоугольника, если его площадь равна 20.

875. Опред. площадь 4-угольника, діагонали котораго суть a и b и образуютъ острый уголъ между собой, равный 30°.



Черт. 129.

Рѣш. Опустимъ $BM \perp AC$ и $DN \perp AC$; $BM = \frac{BE}{2}$ и

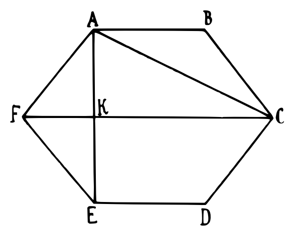
$DN = \frac{DE}{2}$. Площ. $ABC = \frac{1}{2}\ AC \cdot \frac{BE}{2} = \frac{1}{4}\ AC \cdot BE$; площ. $ACD = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{DE}{2} = \frac{1}{4}\ AC \cdot DE$; площ. $ABCD = \frac{1}{4}\ AC \cdot$ $\cdot (BE + DE) = \frac{1}{4} AC \cdot BD = \frac{ab}{4}$ (черт. 129).

876. Радіусъ квадранта *) равенъ 2; его дуга раздѣлена на три равныя части, концы дуги и точки дѣленія соединены послѣдовательно хордами. Найти площадь пятиугольника, сторонами котораго служатъ эти хорды и радіусы.

Указ. Черезъ точки дѣленія провести радіусы, за основаніе каждаго $\triangle$-а принять радіусъ, тогда высота = половинѣ радіуса.

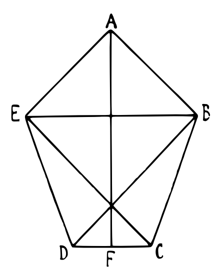
877. Равносторонній шестиугольникъ $ABCDEF$ состоитъ изъ двухъ трапецій, имѣющихъ общее основаніе CF. Даны двѣ діагонали: $AC = 13$ и $AE = 10$. Найти площадь данной фигуры (черт. 130).

Указ. CK равна средней линіи трапеціи; $AK = 5$, $CK = 12$ пл. трап. $= CK \cdot AK = 60$.



Черт. 130.

878. Пятиугольникъ $ABCDE$ состоитъ изъ равнобедренной трапеціи и равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, имѣющихъ общее основаніе BE. Діагонали трапеціи BD и CE взаимно перпендикулярны; меньшее основаніе ея DC равно 2 и разстояніе его AF отъ вершины A прямого угла равно 5. Найти площадь пятиугольника (черт. 131).



Черт. 131.

879. Данъ прямоугольникъ; найти уголъ между его діагоналями, если

*) Квадрантомъ называется четверть круга.

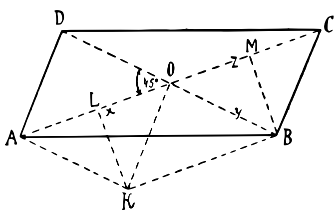
его площадь вдвое менѣе площади квадрата, имѣющаго такую же діагональ.

880. Данъ 4-угольникъ; найти уголъ между его діагоналями, если его площадь вдвое менѣе площади ромба, имѣющаго такія же діагонали.

881. Острый уголъ параллелограмма 45^0; діагонали его 3 и 1. Найти его площадь.

Рѣш. Пусть въ парал. $ABCD$ уг. $A = 45^0$, $AC = 3$, $BD = 1$; DE и $CF \perp$-ны къ AB. Обозначимъ: $AB = x$, $AD = y$, $AE = BF = DE = z$. Изъ $\triangle$-а AED $9 = x^2 + y^2 + 2xz$. Изъ $\triangle$-а ADB $1 = x^2 + y^2 - 2xz$. Вычтя изъ 1-го рав. 2-ое, получимъ: $4xz = 8$, откуда $xz = 2$; $AB . DE = 2$.

882. Стороны параллелограмма 3 и 1; острый уголъ между діагоналями 45^0. Найти площадь.



Черт. 132.

Рѣшеніе. $AB = 3$, $AD=1$, $\angle AOD = 45^0$. Обозначимъ $AO = x$, $BO = y$; иском. пл.$=S$; KL и $BM \perp$ къ AC; $OM= =BM=AL=KL=z$. Достроимъ $\triangle$ AOB до параллелогр. $AOBK$; $OK = AD = 1$. Изъ $\triangle$-а AOK $OK^2=1^2=x^2+y^2- -2xz$. Изъ $\triangle$-а AOB $AB^2 = = 3^2 = x^2 + y^2 + 2xz$ (черт. 132). Вычтя 1-ое урав. изъ 2-го, получ.: $8 = 4xz$; $xz = 2$. Но площ. $\triangle$-а $ABC = \frac{AC}{2}$ $MB = xz = 2$; слѣд. иском. площ. $= 4$.

Площадь правильныхъ многоугольниковъ.

883. По данному радіусу круга R опред. площадь правильнаго вписаннаго 1) 3-угольника, 2) квадрата, 3) 6-угольника, 4) 10-угольника.

884. По данному радіусу круга r опред. площадь правильнаго описаннаго 1) 3-угольника, 2) квадрата, 3) 6-угольника, 4) десятиугольника.

885. По сторонѣ *a* правильнаго 1) 3-угольника, 2) квадрата, 3) 6-угольника, 4) 10-угольника опред. площадь данной фигуры.

(Задачи №№ 886—893 можно рѣшать непосредственно по чертежу безъ вычисленій).

886. Вокругъ квадрата описанъ кругъ, а вокругъ круга описанъ квадратъ. Сколько разъ первый квадратъ содержится во второмъ?

887. Въ правильный △-ъ вписанъ кругъ, а въ него вписанъ второй правильный △-ъ. Сколько разъ послѣдній △-ъ содержится въ первомъ?

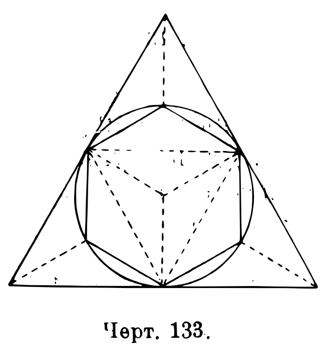
888. Данный отрѣзокъ служитъ стороной правильныхъ △-а и 6-угольника; сколько разъ первая площадь содержится во второй?

889. Въ данный кругъ вписанъ правильный △-ъ и 6-угольникъ; сколько разъ первая площадь содержится во второй?

890. Вокругъ даннаго круга описаны правильные 6-угольникъ и △-ъ; площадь △-а = 9. Найти площадь шестиугольника.

891. Въ правильный △-ъ вписанъ кругъ, а въ него вписанъ правильный 6-угольникъ. Сколько разъ площадь послѣдняго содержится въ площади △-а?

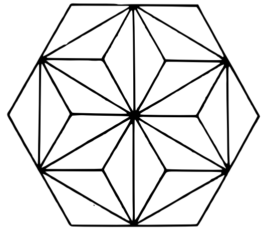
Указ. Данный △-ъ состоитъ изъ 12 равныхъ △-въ; а 6-угольникъ состоитъ изъ 6 такихъ же △-въ (черт. 133).



Черт. 133.

892. Въ правильный шестиугольникъ, площадь котораго равна 24, вписанъ кругъ, а въ него вписанъ второй правильный 6-угольникъ. Найти площадь, заключенную между периметрами этихъ 6-угольниковъ (черт. 134).

893. Площадь правильнаго шестиугольника = 18; вершины соединены черезъ одну діагоналями, которыя своими пересѣченіями образуютъ второй шестиугольникъ. Найти площадь послѣдняго.

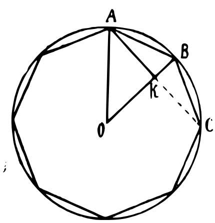


Черт. 134.

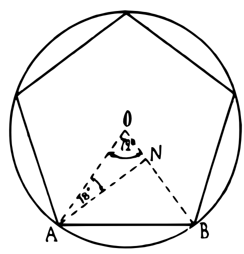
894. Радіусъ круга R. Опред. площадь правильнаго вписаннаго 1) 8-угольника, 2) 12-угольника.

Указ. Для 1) Въ $\triangle$-ѣ AOB примемъ за основаніе радіусъ OB, тогда высота $AK = \frac{AC}{2}$ т. е. = половинѣ стороны вписаннаго квадрата (черт. 135).

895. Радіусъ круга r. Опред. площадь правильнаго описаннаго 1) 8-угольника, 2) 12-угольника.



Черт. 135.



Черт. 136.

896. По сторонѣ a опред. площадь правильнаго 8-угольника; 2) 12-угольника.

897. Данъ кругъ радіуса R. Опред. площадь правильнаго вписаннаго 5-угольника.

Указ. $AN \perp OB$, $\angle OAN = 18^0$; слѣд. $ON = \frac{1}{2} a_{10}$; изъ $\triangle$-а AON найдется AN; площадь $\triangle\ AOB = \frac{1}{2} \cdot OB.AN$ (черт. 136).

898. Окружность, радіусъ которой равенъ 2, дѣлится хордой на двѣ части въ отношеніи 1 : 11; концы хорды соединены съ центромъ. Найти площадь полученнаго △-а.

Указ. См. указ. № 894.

899. Вершины △-а дѣлятъ окружность радіуса 2 на три части въ отношеніи 2 : 5 : 17. Найти площадь △-а.

Указ. Вершины △-а соединить съ центромъ круга.

900. Радіусъ окружности = 1; найти площадь четырехугольника, вершины котораго дѣлятъ окружность въ отношеніи 1 : 5 : 5 : 1.

901. Въ кругъ, радіусъ котораго равенъ 2, вписана трапеція; ея вершины дѣлятъ окружность на части въ отношеніи 1 : 2 : 1 : 8. Найти площадь трапеціи.

902. Въ кругъ, радіусъ котораго равенъ 2, вписанъ △-ъ; два угла этого △-а суть 15^0 и 60^0. Найти площадь этого △-а.

Указ. Принять за основаніе сторону противъ 60^0, тогда высота = полов. радіуса.

903. Въ трапеціи меньшее основаніе равно 2, прилежащіе углы по 135^0; уголъ между діагоналями, обращенный къ основаніямъ,—150^0. Найти площадь трапеціи.

Указ. Если описать кругъ вокругъ трапеціи, то основанія трапеціи будутъ a_6 и a_3, а высота трапеціи—будетъ разность ихъ апоѳемъ.

Отношенія площадей.

904. Высота △-а равна h. На какомъ разстояніи отъ вершины △-а нужно провести прямую параллельно основанію, чтобы раздѣлить площадь △-а пополамъ.

905. Прямая дѣлитъ одну боковую сторону △-а въ отношеніи 2 : 1, а другую въ отношеніи 2 : 3 (считая отъ вершины $\triangle$-а). Въ какомъ отношенiи дѣлится этой прямой площадь $\triangle$-а?

906. Одна изъ боковыхъ сторонъ $\triangle$-а раздѣлена на три равныя части, и черезъ точки дѣленiя проведена прямая параллельно основанiю; въ какомъ отношенiи эта прямая дѣлитъ площадь $\triangle$-а?

907. Боковая сторона $\triangle$-а раздѣлена на 4 равныя части и черезъ точки ихъ дѣленiя проведены прямыя параллельно основанiю. Въ какомъ отношенiи дѣлится площадь $\triangle$-а этими прямыми.

908. Боковая сторона $\triangle$-а раздѣлена на три части въ отношенiи $1:2:3$, считая отъ основанiя, и черезъ точки дѣленiя проведены прямыя параллельно основанiю. Въ какомъ отношенiи дѣлится площадь $\triangle$-а?

909. Площадь даннаго $\triangle$-а равна 16. Каждая сторона его раздѣлена на 3 части въ отношенiи $1:2$ 1 Опред. площадь шестиугольника, вершинами котораго служатъ точки дѣленiя.

Указ. У каждой вершины $\triangle$-а отсѣкается $\triangle$-ъ, площ. котораго $= \frac{1}{16}$ площади даннаго $\triangle$-а.

910. Прямая, параллельная основанiю $\triangle$-а, дѣлитъ площадь его въ отношенiи 7 и 9 (считая отъ основанiя); въ какомъ отношенiи дѣлится боковая сторона?

911. Въ $\triangle$-ѣ проведены прямыя, параллельно основанiю, которыя дѣлятъ его площадь на четыре равныя части. Опред. эти прямыя, если основанiе равно 2.

912. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ изъ вершины прямого угла проведены высота, биссектрисса и медiана. Въ какомъ отношенiи дѣлится этими линiями площадь $\triangle$-а, если одинъ изъ катетовъ вдвое болѣе другого?

913. Въ равнобедренномъ $\triangle$-ѣ черезъ середину высоты проведена прямая параллельно къ боковой сторонѣ. Въ какомъ отношенiи эта прямая дѣлитъ площадь треугольника?

914. Основанiя трапецiи 1 и 3. Въ какомъ отношенiи дѣлится площадь трапецiи средней линiей?

915. Площадь трапеціи равна 18, одно изъ основаній вдвое больше другого. На какія части дѣлятся площадь трапеціи діагоналями?

916. Основанія трапеціи суть 1 и 2. Двѣ діагонали ея дѣлятъ ея площадь на четыре части; найти ихъ отношенія.

917. Основанія трапеціи 2 и 4; изъ конца меньшаго основанія проведена прямая, дѣлящая ея площадь пополамъ. На какія части эта прямая дѣлитъ большее основаніе?

918. Трапеція двумя діагоналями дѣлится на четыре $\triangle$-а, площади $\triangle$-овъ, прилежащихъ къ основаніямъ, суть 1 и 4; найти площадь данной трапеціи.

919. Стороны параллелограмма 2 и 6. Въ какомъ отношеніи дѣлится площадь параллелограмма биссектриссой одного изъ его угловъ.

920. Площадь даннаго 4-угольника равна Q. Опред. площадь другого 4-угольника, вершинами котораго служатъ середины сторонъ даннаго 4-угольника.

921. Площадь параллелограмма равна 9. Каждая изъ діагоналей раздѣлена на три равныя части. Опред. площадь параллелограмма, вершинами котораго служатъ точки дѣленія діагоналей.

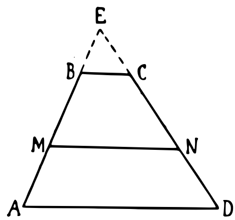
922. Основанія трапеціи равны 2 и 6. Въ какомъ отношеніи дѣлится площадь трапеціи прямою, проведенною параллельно ея основаніямъ черезъ точку пересѣченія діагоналей?

923. Площадь трапеціи равна 21; основанія относятся какъ 2 : 5. На какія части дѣлится площадь трапеціи прямыми, параллельными основаніямъ и дѣлящими боковыя стороны на три равныя части?

924. Основанія трапеціи 1 и 7; найти длину прямой, параллельной къ основаніямъ и дѣлящей площадь трапеціи пополамъ.

Рѣш. Пл. AED: пл. $BEC = 49$; слѣд. пл. $ABCD$: пл.

$BEC = 48$; пл. $MBCN$: пл. $BCE = 24$; пл. MEN : пл. $BEC = 25$; $MN : BC = 5$; и такъ $MN = 5$ (черт. 137).



Черт. 137.

925. Основанія трапеціи a и b прямая, параллельная основаніямъ, дѣлитъ ея площадь пополамъ; найти ея длину.

Указ. См. № 924.

926. Стороны параллелограмма 10 и 4; въ какомъ отношеніи дѣлится площадь параллелограмма прямой, дѣлящей его на два подобныхъ между собой параллелограмма?

927. Одна сторона параллелограмма вдвое болѣе другой. Въ какомъ отношеніи дѣлится его площадь прямою, отсѣкающей отъ него параллелограммъ, ему подобный?

928. Основанія трапеціи 2 и 8, высота равна 5. Прямая, параллельная основанію, дѣлитъ данную трапецію на двѣ подобныя между собой трапеціи. Опред. площадь каждой.

929. Основанія трапецій относятся какъ $m : n$. Прямая, параллельная основанію дѣлитъ данную трапецію на двѣ подобныя между собой трапеціи. Опред. отношеніе ихъ площадей.

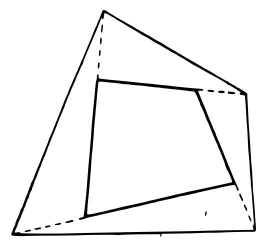
930. Площадь равнобедреннаго $\triangle$-а равна 30. Высота раздѣлена на три равныя части, и изъ одного конца основанія проведены черезъ точки дѣленія высоты двѣ прямыя до пересѣченія съ противолежащей боковой стороной. Найти заключенную между ними площадь.

Указ. См. зад. № 493

931. Площадь $\triangle$-а равна 4. Стороны его продолжены на половину своей длины, каждая по одному направленію (идя по периметру). Концы ихъ соединены между собою. Опред. площадь новаго $\triangle$-а.

932. Площадь даннаго 4-угольника равна 18. Найти площадь вписаннаго въ него 4-угольника, вершины котораго дѣлятъ стороны даннаго 4-угольника въ отношеніи 2 : 1, считая по одному направленію (идя по периметру).

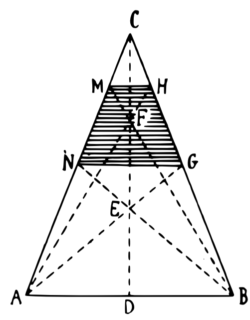
933. Площадь даннаго 4-угольника равна 2. Стороны его продолжены по одному направленію (идя по периметру), каждая на половину своей длины. Опред. площадь 4-угольника (черт. 138), вершинами котораго служатъ концы этихъ продолженныхъ сторонъ.



Черт. 138.

Указ. Провести въ данномъ 4-угольникѣ діагонали.

934. Площадь равнобедреннаго $\triangle$-а равна 100; высота его раздѣлена на три равныя части, изъ концовъ основанія черезъ точки дѣленія высоты проведены четыре прямыхъ до пересѣченія съ боковыми сторонами. Найти площадь трапеціи, вершинами которой служатъ концы проведенныхъ прямыхъ.



Черт. 139.

Указ. Иском. трапеція—$GHMN$; CH, HG, GB относятся какъ 2 : 3 : 5 (см. рѣш. зад. № 493) (черт. 139).

---

935. Въ данный квадратъ вписанъ второй квадратъ; ихъ площади суть 9 и 5. На какія части стороны перваго квадрата дѣлятся вершинами второго?

936. Около даннаго правильнаго $\triangle$-а описанъ второй правильный $\triangle$-ъ, стороны котораго $\perp$-ны къ сторонамъ даннаго. Опред. его площадь, если площадь даннаго равна Q.

937. Около даннаго равносторонняго $\triangle$-а описанъ второй равносторонній $\triangle$-ъ, площадь котораго втрое больше площади даннаго. Въ какомъ отношеніи стороны второго $\triangle$-а дѣлятся вершинами даннаго?

938. Сторона правильнаго 6-угольника равна 2. Вершины его діагоналями соединены черезъ одну. Діагонали эти своимъ пересѣченіемъ образуютъ правильный 6-угольникъ. Опред. его площадь.

939. Двѣ окружности радіусовъ R и r имѣютъ: 1) внѣшнее, 2) внутренное касаніе. Третья окружность дѣлитъ ихъ пополамъ, причемъ всѣ центры лежатъ на одной прямой. Найти площадь 4-угольника, вершинами котораго служатъ точки пересѣченія третьей окружности съ двумя первыми.

940. Данъ правильный 6-угольникъ, площадь котораго $= P$; стороны его продолжены и своимъ пересѣченіемъ образуютъ 6-угольную звѣзду. Найти ея площадь.

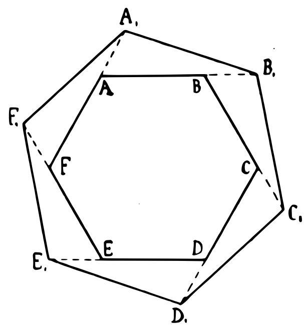
941. Даны два равныхъ правильныхъ $\triangle$-а такъ, что стороны одного дѣлятся сторонами другого на три равныя части; найти площадь образованной ими звѣзды, если площадь каждаго треугольника равна 9.

942. Площадь правильнаго 6-угольника равна 2; середины сторонъ соединены между собой черезъ одну. Прямыя эти своимъ пересѣченіемъ образуютъ 6-угольную звѣзду. Найти ея площадь.

943. Площадь правильнаго 6-угольника $= 4$; стороны его продолжены по одному направленію (идя по периметру) на половину своей длины, и концы ихъ соединены между собой такъ, что получился второй правильный 6-угольникъ. Найти его площадь.

Рѣш. $\triangle AA_1B_1 = \triangle BB_1C_1 =$ и т. д.; $AA_1 = BB_1 = \ldots$ Обозначимъ $AB = 2k$, тогда $BB_1 = k$; $AA_1 = k$; $AB_1 = 3k$.

Изъ $\triangle$-а A_1B_1A $A_1B_1^2 = 7k^2$; но отношеніе иском. площ. къ данной $= \frac{A_1B_1^2}{AB^2} = \frac{7k^2}{4k^2} = \frac{7}{4}$; данн. пл. = 4, иском. пл. = 7 (черт. 140).



Черт. 140.

944. Вокругъ даннаго правильнаго 6-угольника описанъ второй прав. 6-уг.; ихъ площади относятся какъ 49 : 64. Въ какомъ отношеніи стороны второго дѣлятся вершинами перваго?

Указ. Стороны данныхъ 6-угольниковъ относятся какъ 7 : 8; обозначить ихъ черезъ $7k$ и $8k$ и разсмотрѣть $\triangle$-ъ съ угломъ 120^0.

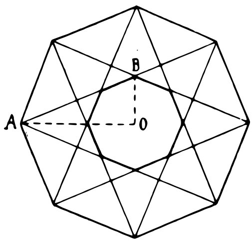
945. Данъ правильный 12-угольникъ, площадь котораго равна 3. Четыре вершины его соединены последовательно черезъ двѣ такъ, что получился квадратъ. Найти его площадь.

Указ. Если обозначить радіусъ описаннаго круга черезъ R, то пл. 12-угольн $= 3R^2$.

946. Данъ квадратъ, сторона котораго равна 2; на каждой сторонѣ квадрата внѣ его построена трапеція такъ, что эти трапеціи вмѣстѣ съ даннымъ квадратомъ образуютъ правильный 12-угольникъ. Найти его площадь.

947. Данъ квадратъ, сторона котораго равна 1. На каждой сторонѣ внѣ его построено по $\triangle$-у такъ, что эти $\triangle$-и вмѣстѣ съ даннымъ квадратомъ образуютъ правильный 8-угольникъ. Найти его площадь.

948. Данъ правильный 8-угольникъ, площадь котораго равна 1. Въ немъ проведены діагонали, соединяющія вершины черезъ двѣ; эти діагонали своимъ

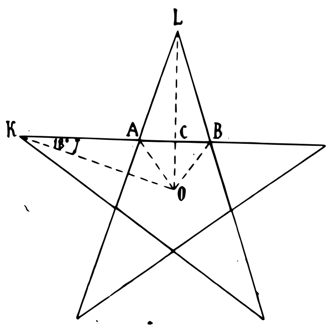


Черт. 141.

пересѣченіемъ образуютъ второй правильный 8-угольникъ. Найти его площадь.

Указ. Ихъ площади относятся какъ квадраты радіусовъ. Отношеніе же радіусовъ $\frac{OB}{OA}$ найдется изъ прямоугольнаго $\triangle$-а AOB, въ которомъ одинъ $= 22\frac{1}{2}^0$ (черт. № 141).

949. Площадь правильнаго 5-угольника равна 1; стороны его, будучи продолжены, своимъ пересѣченіемъ образуютъ 5-угольную звѣзду. Найти ея площадь.



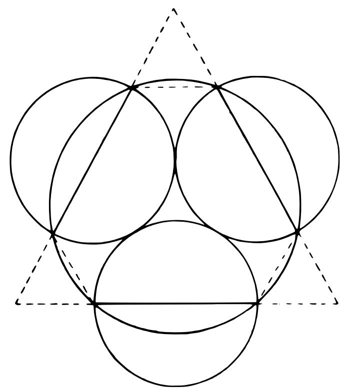
Черт. 142.

Рѣш. Площ. 5-уг. $A = 5 . \frac{AB}{2} . OC$; площ. звѣзды $L = 5 . \frac{AB}{2} . OL$ отнош. $\frac{L}{A} = \frac{OL}{OC} = \frac{OK}{OC}$; $\angle\ OKC = 18^0$. OC есть половина стороны правильнаго впис. 10-угольн., вписаннаго въ кругъ радіуса KO; слѣд. $OC = \frac{OK}{4}(\sqrt{5} - 1)$; поэтому $\frac{K}{A} = \frac{OK}{OC} = \frac{4}{\sqrt{5} - 1} = \sqrt{5} + 1$; но $A = 1$, слѣд. $K = 1 + \sqrt{5}$ (черт. 142).

950. Окружность, радіусъ которой 1, раздѣлена на восемь равныхъ частей; точки дѣленія соединены черезъ двѣ такъ, что образовалась восьмиугольная звѣзда. Найти ея площадь.

951. Три окружности взаимно касаются, радіусъ каждой равенъ 2; четвертая окружность дѣлитъ каждую изъ нихъ пополамъ. Найти площадь 6-угольника, вершинами котораго служатъ точки ихъ пересѣченія.

Рѣш. Продолживъ стороны иском. шестиугольника, получимъ равностор. $\triangle$-ъ, каждая сторона котораго равна учетверенному радіусу т. е. 8, площадь этого $\triangle$-а $= 16\sqrt{3}$; у угловъ отсѣкаются маленькіе $\triangle$-и, площадь каждаго составляетъ $\frac{1}{16}$ часть всего $\triangle$-а. Отнявъ ихъ, получимъ отвѣтъ (черт. 143).



Черт. 143.

Отдѣлъ V.

Длина окружности и площадь круга.

Длина окружности и дуги.

(Во всѣхъ числовыхъ задачахъ принимать $\pi = 3\frac{1}{7}$, если не сдѣлано особаго указанія).

952. Найти длину окружности, если радіусъ ея равенъ 1) 7, 2) 21.

953. Сколько футовъ имѣетъ въ окружности колесо, если діаметръ его равенъ 1 сажени?

954. Длина окружности равна 22. Найти радіусъ.

955. Длина полуокружности равна 110. Найти ея діаметръ.

956. Радіусъ круга равенъ 28; найти длину дуги въ 1) 45^0, 2) $22^0\ 30'$.

957. Радіусъ круга R; найти длину дуги въ 1^0.

958. Дуга въ 30^0 равна 11 дм. Найти радіусъ.

959. Дуга, равная 11 дм., содержитъ $11^0 1/4$. Найти радіусъ дуги.

960. Дуга равна 22, радіусъ ея 28. Сколько градусовъ въ дугѣ?

961. Сколько градусовъ въ дугѣ, равной 77, если радіусъ равенъ 63?

962. Длина окружности на 30 болѣе радіуса. Найти радіусъ.

963. Найти длину окружности, которая на 8 болѣе своего діаметра.

964. Насколько увеличится окружность, если радіусъ ея увеличить на a?

965 Діаметръ задняго колеса экипажа болѣе діаметра передняго на 7 дм; насколько окружность задняго колеса болѣе окружности передняго?

966. Найти ширину кольца, если внѣшняя его окружность на m болѣе внутренней.

967. Радіусъ круга 1 метръ; насколько окружность круга болѣе периметра правильнаго вписаннаго шестиугольника?

968. Радіусъ круга равенъ 1; сколько градусовъ содержитъ дуга, длина котораго равна π; $\frac{\pi}{3}$; 1; 2?

969. Выразить въ градусахъ центральный уголъ, дуга котораго равна радіусу?

970. Хорда, равная a, стягиваетъ дугу 1) въ 60^0, 2) въ 90^0. Найти дугу.

971. Дуга въ 60^0 длиннѣе своей хорды на 14 сантим. Найти хорду ($\pi = 3, 14$).

972. Въ какое время конецъ 1) часовой, 2) минутной стрѣлки опишетъ дугу, равную длинѣ самой стрѣлки?

973. Сколько градусовъ описываетъ 1) минутная, 2) часовая стрѣлка въ 1 минуту?

974. Окружности даннаго кольца суть 5 и 3. Опред. длину средней между ними концентрической окружности.

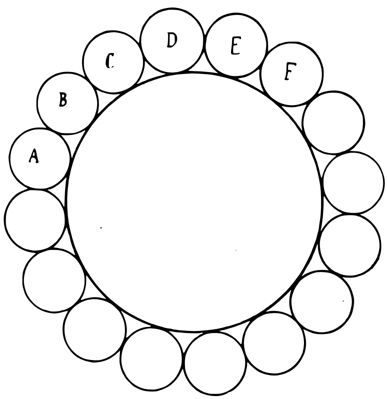
975. Окружности даннаго кольца суть 10 и 16. Опред. длину окружностей, дѣлящихъ ширину кольца на 3 равныя части.

976. Данная прямая a раздѣлена на произвольное число равныхъ (или неравныхъ) частей и на каждой части, какъ на діаметрѣ, построены полуокружности, обращенныя поочередно то въ одну, то въ другую сторону. Найти длину полученной кривой.

977. По полуокружности по разнымъ сторонамъ ея катятся отъ одного конца до другого два равныхъ круга радiуса R. Насколько больше пройдетъ центръ одного круга сравнительно съ центромъ другого?

978. Криволинейный $\triangle$-ъ составленъ изъ трехъ равныхъ взаимно-касательныхъ дугъ радiуса r. Опред. длину каждой дуги.

979. Кругъ радiуса R обложенъ снаружи безконечно-большимъ числомъ равныхъ круговъ, послѣдовательно касающихся другъ друга. Найти предѣлъ суммы ихъ окружностей.



Черт. 144.

Рѣш. Пусть A, B, C, D... центры касательн. окруж., каждая изъ нихъ $= \pi \,.\, AB = \pi \,.\, BC = ...$; сумма ихъ $= \pi\ (AB+BC+...)$; но предѣлъ периметра $ABCD...$ есть данная окружность $2\pi R$; слѣд. иск. сумма$=\pi \,.\, 2\pi R = 2\pi^2 R$ (черт. 144).

980. Внутри даннаго круга радiуса R дано безконечное число равныхъ круговъ, изъ которыхъ каждый касается даннаго круга и двухъ сосѣднихъ. Найти предѣлъ суммы ихъ окружностей.

Указ. См. предыд. зад.

981. Данъ кругъ радiуса R. Найти длину кривой, состоящей изъ ряда полуокружностей, расположенныхъ поочередно то внутри, то внѣ даннаго круга.

Площадь круга и его частей.

982. Найти площадь круга, если радіусъ его равенъ 1) 10 дм., 2) 1 метр. ($\pi = 3{,}14$).

983. Найти площадь полукруга, если діаметръ его равенъ a.

984. Площадь круга равна 1256 кв. дм.; найти радіусъ ($\pi = 3{,}14$).

985. Площадь круга равна Q; найти діаметръ.

986. Длина окружности равна m; найти площадь круга.

987. Площадь круга равна π; найти длину окружности.

988. Найти площадь круга, если площадь описаннаго квадрата равна 400 ($\pi = 3{,}14$).

989. Площадь круга равна 4; на какія части дѣлится эта площадь концентрической окружностью, которая дѣлитъ пополамъ радіусы даннаго круга?

990. Въ данномъ кругѣ, площадь котораго равна 9, проведены двѣ концентрическія съ нимъ окружности, которыя дѣлятъ радіусы на равныя части. Опред. на какія части дѣлится площадь круга.

991. Данъ кругъ радіуса R. Опред. радіусъ концентрической окружности, которая дѣлитъ площадь даннаго круга пополамъ.

992. Данъ кругъ радіуса R. Опред. радіусы концентрическихъ окружностей, которыя дѣлятъ площадь на n равныхъ частей.

993. Опред. площадь кольца, если радіусы окружностей, его образующихъ, суть 3 и 2.

994. Ширина кольца равна 1; площадь его равна 5π. Опред. радіусы его окружностей.

995. Даны два концентрическихъ круга; длина хорды большаго круга касательной къ меньшему равна a. Опред. площадь кольца.

Указ. Искомая площ. $=\pi(R^2-r^2)$; но $R^2-r^2=\frac{a^2}{4}$.

996. Данъ правильный многоугольникъ, сторона котораго равна 2. Опред. площадь кольца между двумя окружностями, изъ которыхъ одна вписана въ него, а другая описана около него.

Указ.. см. зад. № 995.

997. Даны двѣ концентрическія окружности; опред. площадь кольца между ними, если длина средней окружности между данными равна c, а ширина кольца равна d.

998. Окружности кольца относятся какъ 1 : 2. Въ какомъ отношеніи дѣлится площадь кольца средней окружностью?

999. Опред. площадь сектора, радіусъ котораго равенъ 6 и центральный уголъ равенъ 1) 90^0, 2) 10^0, 3) $16^0 40'$.

1000. Радіусъ сектора равенъ 12, дуга равна 1. Опред. площ. сектора.

1001. Найти площадь, описываемую часовой стрѣлкой, длиною a въ 1 часъ.

1002. Площадь сектора 77; длина радіуса 14; сколько градусовъ въ его дугѣ?

1003. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ изъ вершины прямого угла, какъ изъ центра, описана дуга, касательная гипотенузѣ, до пересѣченія съ катетами, равными 1 и 2. Опред. площадь сектора.

1004. Основаніе a прямоугольнаго $\triangle$-а стягиваетъ дугу, центръ которой находится въ вершинѣ $\triangle$-а. Опредѣлить площадь сектора.

1005. Прямоугольный $\triangle$-ъ, гипотенуза котораго равна a, повернутъ вокругъ вершины прямого угла на прямой уголъ. Опред. сумму площадей, описанныхъ при этомъ катетами.

1006. Дуга въ 120° длиною a повернута вокругъ своего конца на 60°. Найти площадь описанной фигуры.

1007. Въ кругѣ радіуса R проведена хорда, стягивающая дугу 1) въ 120° и 2) въ 90°. Опред. площадь сегмента.

1008. Хорда длиною a стягиваетъ дугу въ 1) 90°, 2) 60°. Опред. площадь сегмента.

1009. Данъ кругъ радіуса $R=6$; опред. площадь сегмента, отсѣкаемаго стороной правильнаго вписаннаго въ него 12-угольника.

1010. Двѣ равныя окружности радіуса $R=1$ пересѣкаются такъ, что каждая изъ нихъ проходитъ черезъ центръ другой. Найти площадь общей части обоихъ круговъ.

1011. Гипотенуза прямоугольнаго $\triangle$-а, равная 4, служитъ основаніемъ сегмента, который лежитъ внутри $\triangle$-а и своей дугой касается обоихъ катетовъ. Опред. площадь сегмента.

1012. Данъ полукругъ радіуса $R=1$; дуга его раздѣлена на три равныя части и точки дѣленія соединены съ однимъ изъ концовъ діаметра. Опред. площадь каждой изъ полученныхъ трехъ частей полукруга.

1013. Изъ точки, данной на окружности, проведены двѣ равныя хорды, составляющія уголъ въ 30°. Опред. площадь фигуры, ограниченной этими хордами и дугой между ними.

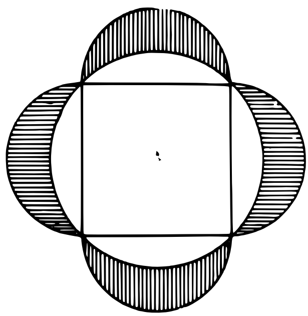
1014. Въ прямой уголъ вписанъ кругъ радіуса R. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и большей изъ дугъ, заключенныхъ между ними.

1015. Изъ точки, данной внѣ круга радіуса 2, проведены къ нему касательная и центральная сѣкущая, образующія между собой уголъ въ 45°. Найти площадь фигуры, ограниченной сѣкущей, касательной и меньшей изъ дугъ, заключенныхъ между ними ($\pi = 3\frac{1}{7}$).

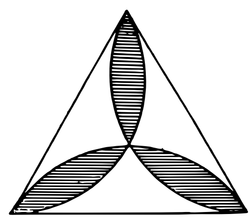
1016. На каждой сторонѣ a квадрата, какъ на діаметрѣ, построенъ снаружи полукругъ; затѣмъ вокругъ квадрата описанъ кругъ. Такимъ образомъ у каждой стороны квадрата образуется по „луночкѣ“ *) (черт. 145). Опред. ихъ сумму.

1017. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а 4 и 6; на гипотенузѣ, какъ на діаметрѣ, построенъ полукругъ вокругъ $\triangle$-а; на каждомъ изъ катетовъ внѣ $\triangle$-а также построено по полукругу. Опред. сумму площадей обѣихъ луночекъ, построенныхъ на катетахъ.

1018. Данъ правильный $\triangle$-къ; вокругъ него описанъ кругъ радіуса R, затѣмъ на каждой сторонѣ,



Черт. 145.



Черт. 146.

какъ на діаметрѣ, построенъ снаружи полукругъ. Опред. сумму площадей всѣхъ луночекъ, образовавшихся на сторонахъ.

1019. Найти площадь фигуры, ограниченной двумя обращенными въ одну сторону дугами въ 180^0 и 90^0, если разстояніе между ихъ концами равно d.

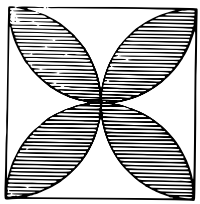
1020. Каждая сторона, равная 1, 1) правильнаго $\triangle$-а, 2) квадрата стягиваетъ дугу, касательную къ двумъ другимъ сторонамъ. Опред. площадь образованной ими розетки (черт. 146 и 147) (на черт. заштриховано).

1021. Сторона квадрата равна a; на сторонахъ его внутри его построены равныя дуги; каждая изъ нихъ

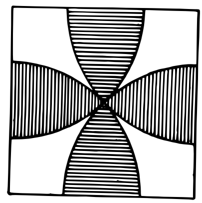
*) Гиппократова луночка.

касательна къ двумъ сосѣднимъ. Найти площадь фигуры, ими образованной.

1022. Сторона квадрата равна 2 (черт. 148); каждая вершина принята за центръ дуги, проведенной черезъ



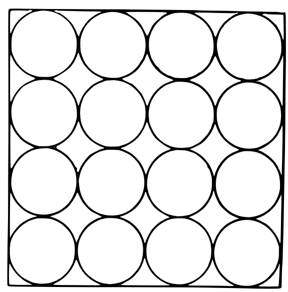
Черт. 147.



Черт. 148.

центръ квадрата. Опредѣлить площадь фигуры (крестъ), ими образованной (на черт. 148 искомая площадь заштрихована).

1023. Сторона квадрата равна a. Въ этотъ квадратъ параллельными рядами вписаны равные взаимнокасательные круги (черт. 149). Къ какому предѣлу стремится сумма площадей всѣхъ круговъ, если ихъ число увеличить до безконечности?



Черт. 149.

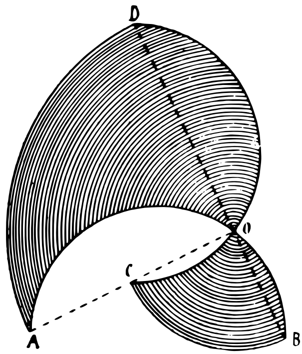
Рѣш. Пусть въ одномъ ряду n круговъ; тогда радіусъ каждаго круга $= \frac{a}{2n}$; площадь каждаго круга $= \frac{\pi a^2}{4n^2}$; число всѣхъ круговъ n^2; сумма ихъ площадей $= \frac{\pi a^2}{4}$.

1024. Полуокружность радіуса R повернута вокругъ произвольной своей точки на 90^0. Опред. площадь описанной ею фигуры.

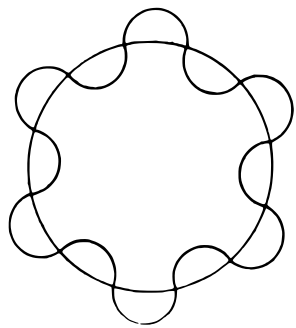
Указ. Сводится къ двумъ секторамъ: $BOC = \frac{\pi}{4} \cdot BO^2$ и $AOD = \frac{\pi}{4} \cdot AO^2$; ихъ сумма $= \frac{\pi}{4} \cdot AB^2$ (черт. 150).

1025. Три равныя дуги, каждая радіуса $R=1$, взаимно касаются своими концами. Опред. площадь фигуры, ими ограниченной.

1026. Кривая линія состоитъ изъ 12 равныхъ полу-



Черт. 150.

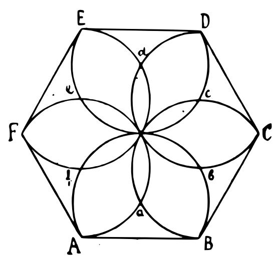


Черт. 151.

окружностей, которыя своими концами дѣлятъ данную окружность радіуса R на 12 равныхъ частей и расположены то внутри, то внѣ. Найти площадь фигуры, ограниченной этой кривой (черт. 151).

Указ. Иском. площ. равна площади прав. вписан. 12-угольника.

1027. Каждая сторона правильнаго 6-угольника, равная 1, стягиваетъ дугу, касательную къ двумъ сосѣднимъ сторонамъ. Опред. 1) площадь фигуры, имѣющей видъ 6-угольнаго лепестка ($Aa\ Bb\ Cc\ldots$); 2) площадь 6-угольной розетки ($abcdef$), вершинами которой служатъ точки пересѣченія построенныхъ дугъ (черт. 152).



Черт. 152.

Отдѣлъ VI.

Опредѣленіе въ $\triangle$-ѣ высотъ, медіанъ, радіусовъ и пр.

1028. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а 6 и 8. Найти радіусы описаннаго и вписаннаго круговъ.

1029. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-а дѣлится высотой, на нее опущенной, на части, равныя 2 и 3 (меньшая часть при основаніи $\triangle$-а). Найти площадь $\triangle$-а.

1030. Высоты равнобедреннаго $\triangle$-а суть 24, 24 и 20. Найти ея стороны.

1031. Высоты равнобедреннаго $\triangle$-а суть 20, 24 и 24. Найти площадь $\triangle$-а.

1032. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-а равна 6, высота—4. Найти радіусъ описаннаго круга.

1033. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 24, высота—9. Найти радіусъ вписаннаго круга.

1034. Боковая сторона равнобедреннаго $\triangle$-а равна 10, основаніе—12. Найти радіусы описаннаго и вписаннаго круговъ.

1035. Медіаны равнобедреннаго $\triangle$-а равны 15, 15, 18. Найти площадь.

1036. Даны двѣ стороны 8 и 5 и уголъ между ними 60^0. Найти третью сторону и площадь $\triangle$-а.

1037. Даны двѣ стороны 7 и 5 и уголъ противъ первой стороны—120^0. Найти третью сторону и площадь $\triangle$-а.

1038. Основаніе $\triangle$-а равно 7, противолежащій уголъ—60^0, сумма двухъ другихъ сторонъ—13. Найти площадь $\triangle$-а.

1039. Стороны $\triangle$-а суть 7, 15, 20. Найти наибольшую высоту.

1040. Даны три стороны $\triangle$-а 10, 15, 17. Найти медіану наибольшей стороны.

1041. Даны двѣ стороны 11 и 23 и медіана третьей стороны - 10. Найти третью сторону.

1042. Основаніе $\triangle$-а равно 23; медіаны боковыхъ сторонъ суть 15 и $22\frac{1}{2}$. Найти третью медіану.

1043. Двѣ стороны $\triangle$-а суть 25 и 29; медіана третьей стороны—18. Найти площадь $\triangle$-а.

1044. Основаніе $\triangle$-а равно 10, а медіаны двухъ другихъ сторонъ сутъ 9 и 12. Найти площадь $\triangle$-а.

1045. По тремъ даннымъ сторонамъ 7, 8, 6 вычислить биссектриссу первой стороны.

1046. Въ данномъ $\triangle$-ѣ двѣ стороны равны 6 и 12, а уголъ между ними 120^0. Опред. биссектриссу даннаго угла.

1047. Въ данномъ $\triangle$-ѣ двѣ стороны равны $6\frac{2}{3}$ и 15, биссектрисса между ними—8. Найти третью сторону.

1048. Стороны $\triangle$-а суть 4, 13, 15. Найти діаметръ вписаннаго круга.

1049. Стороны $\triangle$-а суть 9, 10, 17. Найти радіусъ вписаннаго круга.

1050. Стороны $\triangle$-а суть 7, 15, 20. Найти радіусъ описаннаго круга.

1051. Въ кругѣ радіуса R вписанъ $\triangle$-ъ; одинъ изъ его угловъ равенъ 1) 30^0, 2) 45^0. Найти противолежащую сторону.

1052. Высоты $\triangle$-а суть 12, 15, 20; найти стороны.

1053. Медіаны $\triangle$-а суть 9, 12, 15. Найти площадь $\triangle$-а.

1054. Въ $\triangle$-ъ, стороны котораго 10, 12, 14, вписанъ кругъ; на какія части дѣлятся стороны въ точкахъ касанія?

1055. Доказать, что въ прямоугольномъ △-ѣ радіусъ вписаннаго круга равенъ полупериметру безъ гипотенузы.

1056. Катеты прямоугольнаго △-а 3 и 4; найти радіусы внѣвписанныхъ круговъ (см. № 1063).

1057. Стороны △-а 13, 14, 15. Найти радіусы вписаннаго, описаннаго и внѣвписанныхъ круговъ.

1058 Радіусы внѣвписанныхъ круговъ суть 4, 6, 12. Найти площадь △-а и радіусъ описаннаго круга (см. № 1064).

1059. Радіусы внѣвписанныхъ круговъ суть 6, 9, 18. Найти стороны △-а (см. №№ 1065, 1064, 1063).

1060. Высоты △-а суть 12, 15, 20. Найти радіусы внѣвписанныхъ круговъ (см. № 1066; находимъ r, ρ_a аналогично ρ_b).

1061. Квадратъ биссектриссы угла при вершинѣ △-а равенъ произведенію боковыхъ сторонъ безъ произведенія отрѣзковъ основанія (образованныхъ пересѣченіемъ биссектриссы). Доказать это.

Вывести или провѣрить слѣдующія формулы:

1062. Площадь △-а $S=\frac{a.b.c}{4R}$; $R=\frac{abc}{4S}$.

Указ. Если принять за основаніе a, то высота $h=\frac{b.c}{2R}$ (см. № 509).

1063. Площадь △-а $S=(p-a).\rho_a$; $\rho_a=\frac{S}{p-a}$.

Рѣш. Черт. 48. Соединимъ центръ O съ вершинами A, B, C и опустимъ перпендикуляры OK, OL и OM на стороны. Площадь △ $AOB=\frac{c}{2}.OM=\frac{c}{2}\cdot\rho_a$. Сложимъ первое и второе равенство и вычтемъ третье;

тогда получимъ: пл. $\triangle\ ABC = \frac{b}{2}\cdot\rho_a + \frac{c}{2}\cdot\rho_a - \frac{a}{2}\cdot\rho_a$ или $S = \frac{b+c-a}{2}\cdot\rho_a = (p-a)\cdot\rho_a$.

1064. Площадь $\triangle$-а $S = \sqrt{r\cdot\rho_a\cdot\rho_a\cdot\rho_a}$.

Указ. Сдѣлать подстановку въ правой части: $r = \frac{S}{p}$, $\rho_a = \frac{S}{p-a}$ и т. д.

1065. $\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{r}$.

Указ. Написать вмѣсто радіусовъ ихъ выраженія (по формулѣ № 1063).

1066. $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$; $\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_a} = \frac{2}{h_a}$.

Указ. Выразить всѣ высоты и радіусы; $h_a = \frac{2S}{a}$ и т. п. и подставить.

1067. $\rho_a + \rho_a + \rho_c - r = 4R$.

Указ. Подставить выраженіе всѣхъ радіусовъ (по № 1062 и 1063).

1068. Биссектрисса $l_a = \frac{2}{b+c}\cdot\sqrt{p\cdot b\cdot c\,(p-a)}$.

Указ. См. № 710.

Общій отдѣлъ.

1069. Гипотенуза прямоугольнаго $\triangle$-а на 1 болѣе одного катета и на 8 болѣе другого. Найти площадь этого $\triangle$-а.

1070. Діагонали ромба относятся какъ $1\frac{1}{2} : 2$; периметръ ромба 40. Найти площадь ромба и высоту.

1071. Площадь прямоугольнаго $\triangle$-а равна 6, гипотенуза—5. Найти катеты.

1072. Основанія трапеціи и высота пропорціональны числамъ 4 : 3 : 2; площадь равна 28. Найти основанія.

1073. Катеты прямоугольнаго $\triangle$-а 9 и 12. На какія части дѣлится площадь $\triangle$-а биссектриссой наименьшаго угла?

1074. Стороны параллелограмма 2 и 5. Въ какомъ отношеніи дѣлится площадь параллелограмма биссектриссой одного изъ угловъ?

1075. Средняя линія трапеціи дѣлитъ ея площадь на двѣ части 8 и 12; высота трапеціи равна 4. Найти основанія трапеціи.

1076. Биссектрисса остраго угла прямоугольнаго $\triangle$-а дѣлитъ его площадь на двѣ части 9 и 15. Найти стороны $\triangle$-а.

1077. Высота, опущенная на боковую сторону равнобедреннаго $\triangle$-а, дѣлитъ его площадь на двѣ части 4 и 6 (меньшая часть при основаніи). Найти боковую сторону $\triangle$-а.

1078. Въ рамбъ вписанъ кругъ; каждая сторона дѣлится въ точкѣ касанія на двѣ части a и b. Найти площадь круга.

1079. Основанія трапеціи суть 10 и 5; боковыя стороны 4 и 3; опред. площадь трапеціи.

1080. Средняя линія трапеціи, равная 2, дѣлитъ площадь трапеціи въ отношеніи 3 : 5. Найти ея основанія.

1081. Биссектрисса прямого угла прямоугольнаго $\triangle$-а дѣлитъ гипотенузу на два отрѣзка 15 и 20. Опред. площадь $\triangle$-а.

1082. Діагонали трапеціи суть 20 и 15; высота равна 12. Опред. площадь трапеціи.

1083. Въ правильный $\triangle$-ъ, площадь котораго Q, вписанъ кругъ; найти площадь правильнаго, вписаннаго въ кругъ, 6-угольника.

1084. Основанія равнобедренной трапеціи относятся какъ 4 : 9, боковыя стороны равны средней линіи трапеціи, а площадь 156. Опред. периметръ трапеціи.

1085. Одно изъ основаній равнобедренной трапеціи втрое болѣе другого; высота на 7 менѣе средней линіи; діагональ равна 13. Опред. площадь трапеціи.

1086. Въ $\triangle$-ѣ одинъ изъ угловъ равенъ 120^0, а стороны представляютъ рядъ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ. Найти ихъ.

1087. Въ равнобедренный $\triangle$-ъ, боковая сторона котораго равна a, вписанъ параллелограммъ такъ, что одна изъ его вершинъ находится въ вершинѣ $\triangle$-а, а три другія расположены на трехъ сторонахъ $\triangle$-а. Найти периметръ параллелограмма.

1088. Въ кругъ вписана трапеція, площадь которой равна 2; основанія трапеціи отсѣкаютъ дуги въ 60^0 и 120^0 (по одну сторону центра). Опред. радіусъ круга.

1089. Радіусъ круга равенъ 1. Вычислить площадь правильнаго 1) вписаннаго, 2) описаннаго 8-угольника (съ точностью до 0,001).

1090. Основаніе сегмента равно 8; его высота равна 2. Опред. радіусъ его дуги.

1091. Опредѣлить биссектриссу прямого угла прямоугольнаго △-а, если она дѣлитъ гипотенузу на двѣ части 3 и 4.

1092. Боковыя стороны трапеціи суть 15 и 13; высота равна 12; средняя линія равна 10. Опред. основанія (2 случая).

1093. Основанія и боковая сторона равнобедренной трапеціи относятся какъ 10 : 4 : 5; площадь ея равна 112. Найти периметръ ея.

1094. Двѣ стороны △-а суть 13 и 21; площадь равна 126. Опред. третью сторону.

1095. Опредѣлить площадь △-а, если двѣ стороны его суть 7 и 25, а медіана третьей стороны равна 12.

1096. Основаніе △-а равно 30, а медіаны двухъ другихъ сторонъ суть 39 и 42. Опред. площадь △-а.

1097. Площадь △-а равна 150, двѣ высоты его равны 15 и 12. Опред. третью высоту.

1098. Высоты △-а пропорціональны числамъ $\frac{1}{4}:\frac{1}{13}:\frac{1}{15}$; площадь △-а равна 216. Опред. периметръ △-а.

1099. Основаніе равнобедреннаго △-а равно 6, а боковая сторона равна 5. Опред. радіусъ полукруга, который діаметромъ своимъ лежитъ на боковой сторонѣ, а дугой касается двухъ другихъ сторонъ.

1100. Данъ нѣкоторый правильный многоугольникъ, сторона котораго равна 2. Одинъ кругъ описанъ вокругъ него, другой вписанъ въ него. Опред. площадь образовавшагося кольца.

1101. Двѣ концентрическія окружности длиною 1 и 7 образуютъ кольцо. Опред. длину третьей концентрической съ ними окружности, которая дѣлитъ площадь кольца пополамъ.

1102. Даны два внѣшнекасательныхъ круга радіусовъ 3 и 6. Опред. разстояніе ихъ точки касанія отъ внѣшней общей касательной.

1103. Радіусы двухъ круговъ суть 2 и 1; разстояніе между ихъ центрами равно 5. Опред. длину ихъ общей внутренней касательной.

1104. Въ $\triangle$-ъ, стороны котораго суть 13, 14, 15, вписанъ кругъ; центръ его соединенъ съ вершинами $\triangle$-а, вслѣдствіе чего данный $\triangle$-ъ дѣлится на три части. Найти ихъ площади.

1105. Кругъ, вписанный въ прямоугольный $\triangle$-ъ, въ точкѣ касанія дѣлитъ гипотенузу на два отрѣзка $a=2$ и $b=3$. Опред. площадь треугольника.

1106. Около круга, радіусъ котораго равенъ 4, описана равнобедренная трапеція, боковая сторона которой равна 10. Опред. разстояніе между точками касанія круга къ боковымъ сторонамъ.

1107. Дано круговое кольцо, площадь котораго равна π. Опред. длину хорды большаго круга, касательнаго къ меньшему.

1108. Стороны прямоугольника 1 и 5. Опред. стороны и площадь 4-угольника, образованнаго взаимнымъ пересѣченіемъ биссектриссъ всѣхъ угловъ прямоугольника.

1109. Стороны $\triangle$-а 13, 14, 15. Прямая, параллельная большей сторонѣ $\triangle$-а, отсѣкаетъ отъ него трапецію, периметръ которой равенъ 39. Опред. площадь этой трапеціи.

1110. Средняя линія трапеціи равна 5; одна изъ діагоналей трапеціи, равная 4, дѣлитъ ее на два подобныхъ $\triangle$-а. Опред. основанія трапеціи.

1111. Даны два круга радіусовъ 26 и 17, одинъ внутри другого; разстояніе между ихъ центрами равно

7. Опред. наибольшую и наименьшую хорду большаго круга, касательную къ меньшему.

1112. Данъ кругъ радіуса 20. Найти геометрическое мѣсто точекъ дѣленія хордъ, длиною 32, въ отношеніи 7:25 (т. е. опредѣлить радіусъ искомой окружности).

1113. На прямой AB, длиною 1, даны точки C и D. На AC и AD, какъ на діаметрахъ, построены полуокружности по одну сторону данной прямой; аналогично на BC и BD, какъ на діаметрахъ, построены полуокружности по другую сторону прямой. Найти длину кривой, составленной изъ четырехъ полуокружностей.

1114. Стороны равнобедреннаго $\triangle$-а равны: 6, 5 и 5. Прямая, перпендикулярная къ основанію, дѣлитъ площадь $\triangle$-а на двѣ части въ отношеніи 1:7. Опред. длину этой прямой.

1115. Радіусъ круга равенъ 2. Опред. длину хорды, дѣлящей окружность на двѣ части въ отношеніи 5:7.

1116. Данъ отрѣзокъ длиною a. Геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ данный отрѣзокъ виденъ подъ даннымъ угломъ 30^0, есть дуга опредѣленнаго радіуса. Найти радіусъ этой дуги.

1117. Данъ кругъ; геометрическое мѣсто точекъ, касательныя изъ которыхъ къ данному кругу равны 1, есть окружность, концентрическая съ данной. Опред. площадь кольца между этими окружностями.

1118. Площадь трапеціи равна Q. Прямая, параллельная къ основаніямъ, дѣлить ее на двѣ подобныя трапеціи; опред. площадь каждой изъ нихъ, если одно изъ основаній вдвое больше другого.

1119. Двѣ окружности радіусовъ 15 и 20 пересѣкаются подъ прямымъ угломъ *). Опред. 1) разстояніе между ихъ центрами; 2) длину ихъ общей хорды.

1120. Въ квадратъ, сторона котораго равна 1, впи-

*) Т. е. касательныя къ нимъ въ точкѣ пересѣч. взаимно – перпендекулярны.

санъ правильный △-ъ; одна вершина у нихъ общая. Опред. площадь △-а.

1121. Основанія трапеціи a и b; опред. длину прямыхъ, ‖-ныхъ основаніямъ трапеціи и раздѣляющихъ площадь трапеціи на три равныя части.

1122. Радіусъ круга равенъ единицѣ. Опред. площадь правильнаго вписаннаго 5-угольника.

1123. Данъ кругъ; если его діаметръ увеличить на длину окружности, то окружность увеличится на 1. Опред. площадь даннаго круга.

1124. Въ прямоугольный △-ъ, катеты котораго 6 и 8, вписанъ кругъ; черезъ центръ его проведена прямая параллельно къ гипотенузѣ. На какія части эта прямая дѣлитъ площадь △-а?

1125. Въ △-ъ вписанъ кругъ; центръ его соединенъ съ вершинами △-а, вслѣдствіе чего данный △-ъ дѣлится на три части 26, 28, 30. Опред. стороны даннаго △-а.

1126. Въ кругъ, площадь котораго равна 1, вписанъ правильный 6-угольникъ; меньшая діагональ его служитъ стороной второго правильнаго 6-угольника. Опред. площадь круга, описаннаго около него.

1127. Вокругъ правильнаго 12-угольника, площадь котораго равна 3, описанъ кругъ, а вокругъ него описанъ правильный 8-угольникъ. Опред. его площадь.

1128. Основаніе △-а равно 1, противолежащій уголъ равенъ 30°. Вокругъ этого △-а описанъ кругъ, а вокругъ него описанъ правильный 6-угольникъ. Опред. его площадь.

1129. Катеты прямоугольнаго △-а суть 3 и 6. Найти биссектриссу прямого угла.

1130. Основаніе равнобедреннаго △-а равно 10, боковая сторона равна 13. Въ △-ѣ на каждой боковой сторонѣ, какъ на діаметрѣ, построены круги. Найти ихъ общую хорду.

1131. Около круга описана равнобедренная трапеція, основанія которой суть 8 и 2. Найти радіусъ круга.

1132. Въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ катеты равны 6 и 8; опред. разстояніе между центрами вписаннаго и описаннаго круговъ.

1133. Высота равнобедреннаго $\triangle$-а раздѣлена на три равныя части и черезъ точки дѣленія проведены прямыя параллельно одной изъ боковыхъ сторонъ; въ какомъ отношеніи дѣлится этими прямыми площадь $\triangle$а?

1134. Гипотенуза прямоугольнаго $\triangle$-а равна 4. Опред. площадь круга, окружность котораго проходитъ черезъ середины всѣхъ сторонъ $\triangle$-а.

1135. Внѣ $\triangle$-а проведена прямая на разстояніи 3, 5, 10 отъ вершинъ $\triangle$-а; найти ея разстояніе отъ центра тяжести $\triangle$-а. *)

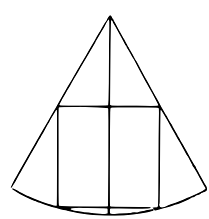
1136. Въ $\triangle$-ѣ даны двѣ стороны 7 и 5 и биссектрисса угла между ними, равная $3^1/_2$. Опред. площадь $\triangle$-а.

1137. Разстоянія центра тяжести *) $\triangle$-а отъ сторонъ его относятся какъ $2:3:4$. Найти стороны, если периметръ $\triangle$-а равенъ 26.

1138. Основаніе $\triangle$-а равно a; противолежащій уголъ равенъ 150°. Опред. радіусъ окружности, проходящей черезъ середины всѣхъ сторонъ $\triangle$-а.

1139. Въ уголъ вписанъ рядъ круговъ, послѣдовательно касающихся другъ друга; радіусы двухъ наименьшихъ суть 1 и 2. Опред. послѣдовательно радіусы слѣдующихъ круговъ.

1140. Центральный уголъ сектора равенъ 60^0, радіусъ равенъ 1 (черт. 153). Въ этотъ секторъ вписанъ квадратъ. Опред. его сторону.



Черт. 153.

1141. Въ сегментъ, дуга котораго

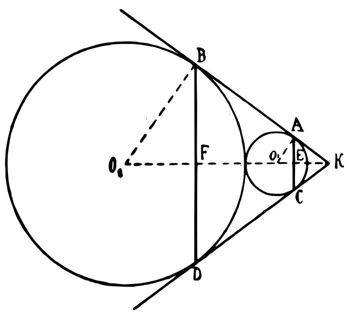
*) Точка пересѣченія медіанъ.

равна 120^0, вписанъ квадратъ, сторона котораго равна 3. Опред. радіусъ дуги сегмента.

1142. Высота равносторонняго $\triangle$-а равна 5; на одной изъ сторонъ дана точка; ея разстояніе отъ другой стороны равно 3. Найти ея разстояніе отъ третьей стороны.

1143. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 6; боковая сторона равна 9. На одной изъ боковыхъ сторонъ, какъ на діаметрѣ, построена окружность; на какія части она дѣлитъ другую боковую сторону и основаніе?

1144. Радіусы двухъ внѣшнекасательныхъ круговъ 20 и 5; къ нимъ проведены двѣ общія внѣшнія касательныя. Найти хорды, соединяющія точки ихъ касанія.



Черт. 154.

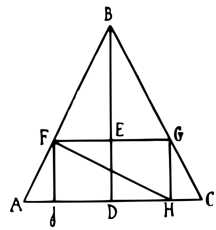
Указ. K—точ. пересѣч. касат. AB (черт.154) и лин. центровъ. $O_2B=20$, $O_1B=5$. Обознач. $O_1K=x$; $\frac{O_2K}{O_1K}=\frac{O_2B}{O_1A}$ т. е. $\frac{25+x}{x}=\frac{20}{5}$; откуда $x=\frac{25}{3}$; изъ прямоуг. $\triangle$-а O_1AK катетъ $AK=\frac{20}{3}$ и $AE=4$, а хорда $AC=8$; $BF:AE=BO_2:AO_1$, откуда $BF=16$, а $BD=32$.

1145. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 24, боковая сторона—20. Найти радіусъ дуги, стягиваемой основаніемъ и касательной къ боковымъ сторонамъ.

1146. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а равно 6, высота—6; въ этотъ $\triangle$-ъ вписанъ прямоугольникъ, основаніе котораго лежитъ на основаніи $\triangle$-а, а діагональ перпендикулярна къ боковой сторонѣ. Найти его стороны.

Указ. Обозначимъ искомую линію FJ (черт. 155) черезъ x и составимъ ур-іе: $GF^2 + FJ^2 = CJ^2 - CG^2$.

1147. Катеты прямоугольнаго △-а суть 5 и 10; гипотенуза, высотой на нее опущенной, дѣлится на два отрѣзка; на нихъ, какъ на діаметрахъ, построены въ △-ѣ два полукруга. Найти хорды, по которымъ эти полукруги пересѣкаются кругомъ, діаметромъ котораго служитъ высота.



Черт 161.

Указ. Искомыя хорды суть ⊥—ы, опущенные изъ основанія данной высоты на катеты.

1148. Прямыя, соединяющія середины противолежащихъ сторонъ 4-угольника, суть 7 и 11; одна изъ діагоналей = 12. Найти другую діагональ.

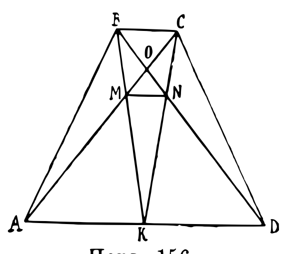
Указ. Соединивъ послѣдовательно середины сторонъ, получимъ параллелограммы; примѣнить теорему о суммѣ квадратовъ діагоналей.

1149. Около круга описана равнобедренная трапеція, основанія которой суть 6 и 2. Найти хорду, соединяющую точки касанія круга къ боковымъ сторонамъ.

1150. Прямыя, соединяющія середины противолежащихъ сторонъ 4-угольника, суть 6 и 8; одна изъ діагоналей равна 10. Найти площадь 4-угольника.

1151. Около круга описана равнобедренная трапеція, у которой одно основаніе вчетверо болѣе другого. Найти отношеніе ихъ площадей.

1152. Основанія равнобедренной трапеціи суть 3 и 12; середина большаго основанія соединена съ концами меньшаго основанія двумя прямыми, пересѣкающими діагонали въ двухъ точкахъ. Найти разстояніе между ними.

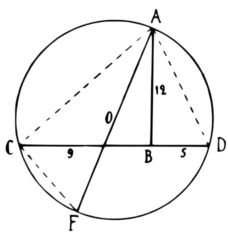


Черт. 156

Указ. $\triangle$-и BMC и AMK подобны (черт. 156); слѣд. $KM : BM = 2$.

1153. Радіусы двухъ круговъ суть 10 и 5; разстояніе между ихъ центрами равно 25; къ этимъ кругамъ проведены общія внутреннія касательныя. Опред. хорды, соединяющія точки касанія.

1154. Въ кругѣ дана хорда; изъ нѣкоторой точки окружности опущенъ на эту хорду перпендикуляръ, равный 12; отрѣзки хорды 9 и 5. Найти діаметръ круга.



Черт. 157.

Рѣш. Отрѣзки хорды суть: $CB = 9$, $BD = 5$ (черт. 157); перпендикуляръ $AB = 12$. Проведемъ діаметръ AF и прямыя AC, AD, CF. Изъ прямоуг. $\triangle$-а ABD $AD = 13$, изъ прямоуг. $\triangle$-а ABC $AC = 15$. Углы F и D равны, т. к. опираются на одну и ту же дугу AC, слѣд. прямоуг. $\triangle$-и ADB и AFC подобны; поэтому $AF : AD = AC : AB$, откуда $AF = 16^1/_4$.

1155. Къ двумъ внѣшнекасательнымъ кругамъ радіусовъ 1 и 4 проведены двѣ общія внѣшнія касательныя. Опред. площадь трапеціи, вершинами которой служатъ точки касанія.

1156. Стороны 4-угольника, вписаннаго въ кругъ, суть a, b, c, d. Опред. его діагонали и площадь.

1157. Въ кругъ вписанъ 4-угольникъ, а въ него вписанъ кругъ, три послѣдовательныя стороны этого 4-угольника суть 2, 3, 4. Опред. площадь.

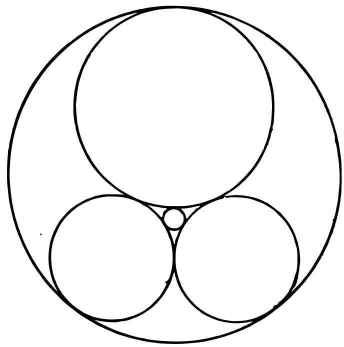
1158. Къ двумъ внѣшнекасательнымъ кругамъ радіусовъ 9 и 36 проведена общая внѣшняя касательная. Опред. радіусъ новаго круга, касательнаго къ даннымъ кругамъ и къ ихъ общей внѣшней касательной (2 рѣш.).

1159. Стороны $\triangle$-а относятся какъ $m : n : p$. Внѣ $\triangle$-а проведена прямая на разстояніи a, b, c отъ вершинъ.

Опред. разстояніе этой прямой отъ центра круга, вписаннаго въ $\triangle$-ъ.

1160. Даны три взаимнокасательныхъ круга; ихъ радіусы: 8, 5, 5 (черт. 158). Опред. радіусъ круга, касательнаго ко всѣмъ даннымъ кругамъ (2 случая).

1161. Геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ находятся въ данномъ отношеніи, есть окружность опредѣленнаго радіуса. Найти этотъ радіусъ, если разстояніе между данными точками равно 6, а данное отношеніе равно 2.



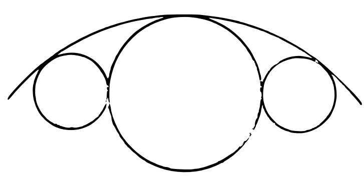
Черт. 158.

1162. Прямоугольникъ, стороны котораго суть 3 и 4, діагональю дѣлится на два $\triangle$-а; въ каждомъ изъ нихъ вписано по кругу. Опред. разстояніе между ихъ центрами.

1163. Въ уголъ вписаны два круга радіусовъ 8 и 4 на нѣкоторомъ разстояніи другъ отъ друга. Опред. разстояніе отъ вершины угла до ихъ общей внутренней касательной.

Указ. Рѣшеніе см. зад. № 514.

1164. Даны три круга, центры которыхъ лежатъ на одной прямой; средній кругъ радіуса 6 касается двухъ крайнихъ радіуса 3 (черт. 159). Опред. радіусъ четвертаго круга, касательнаго ко всѣмъ даннымъ.

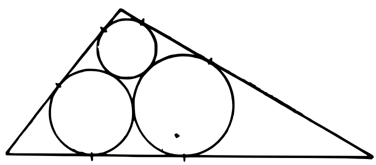


Черт. 159.

1165. Въ два вертикальныхъ угла вписано по кругу; ихъ радіусы суть 3 и 6. Опред. разстояніе отъ вершины этихъ угловъ до общей внѣшней касательной данныхъ круговъ.

1166. Даны три круга, центры которыхъ лежатъ на одной прямой; средній кругъ, радіусъ котораго равенъ 4, касается двухъ крайнихъ одинаковаго радіуса 6. Опред. радіусъ четвертаго круга, касательнаго ко всѣмъ даннымъ кругамъ.

1167. Въ △-къ вписаны три неравныхъ круга (черт. 160), изъ которыхъ каждый касается двухъ сторонъ △-ка и двухъ остальныхъ круговъ. Опред. радіусы этихъ круговъ, если отрѣзки сторонъ между точками касанія суть 24, 30, 40.

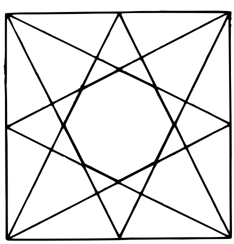


Черт. 160.

1168. Въ кругъ, радіусъ котораго равенъ 5, вписана трапеція; боковая сторона ея равна $5\sqrt{2}$, а площадь равна 49. Найти ея основанія.

1169. Въ △-ѣ дано: $a = 5$, $b = 4$. Найти c, если $\angle B = 2 . c$.

1170. Сторона квадрата равна 6. Середина каждой стороны его соединена двумя прямыми съ концами противолежащей стороны. Проведенныя такимъ образомъ восемь прямыхъ образуютъ 8-угольникъ (черт. 161). Опред. его площадь.



Черт. 161.

(**Замѣч**. Иск. 8-угольникъ неправильный).

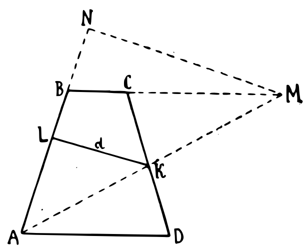
1171. Стороны △-а суть: 7, 8, 9; опред. периметръ △-а, вершинами котораго служатъ основанія всѣхъ сторонъ.

1172. Стороны △-а суть: 13, 14, 15. Опред. діаметръ окружности, проходящей черезъ основанія всѣхъ высотъ даннаго $\triangle$-а.

1173. Стороны $\triangle$-а суть $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{19}$. Опред. разстояніе отъ вершинъ $\triangle$-а до точки, изъ которой всѣ стороны видны подъ одинаковымъ угломъ.

1174. Боковая сторона трапеціи равна a и отстоитъ отъ середины противолежащей стороны на разстояніи d. Найти ея площадь.

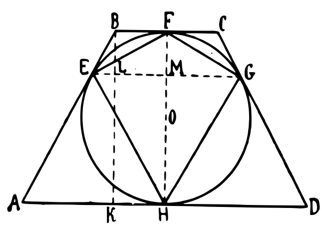
Рѣш. Пусть $AB = a$ (черт. 162), K—середина CD, $LK = d$. Проведемъ AKM и опустимъ $MN \perp AB$. Тогда $\triangle ADK = = \triangle CKN$ и иском. площ. трап.= =площ. $\triangle ABN = A \cdot \frac{MN}{2} = ad$.



Черт. 162.

1175. Около круга описана равнобедренная трапеція; точки касанія соединены послѣдовательно; площадь полученнаго вписаннаго 4-угольника составляетъ $\frac{3}{8}$ площади трапеціи. Найти отношеніе основаній трапеціи.

Указ. Обозначимъ меньшее основаніе черезъ $2k$; искомое отношеніе обозн. черезъ x; тогда большее основаніе $= 2kx$; $AH = AE = k \cdot x$ (черт. 163); $EB = BF = k$; слѣд. $AB = k(x+1)$; $AK = k(x-1)$; изъ прямоуг. $\triangle$-а ABK, $BK = 2k \cdot \sqrt{x}$; площ. трап. $= = \frac{1}{2}(AD+BC) . BK = 2k^2(x+1) \cdot \sqrt{x}$... (1); изъ подобія $\triangle$-овъ



Черт. 163.

ABK и EBL $ED = \frac{x-1}{x+1} \cdot k$; $EM = EL + K = \frac{2kx}{x+1}$;

площ. $EFGH = FH \cdot EM = \frac{4k^2 \cdot x\sqrt{x}}{x+1} \ldots$ (2); но по усло-

вію площ. (2) $= \frac{3}{8}$ площ. (1). Слѣд. (послѣ сокращенія) $2x =$
$= \frac{3}{8}(x+1)^2$, откуда $x = 3$ (или $\frac{1}{3}$).

1176. Около круга, радіусъ котораго равенъ 2, описана равнобедренная трапеція, площадь которой равна 20. Найти площадь вписаннаго въ кругъ 4-угольника, вершинами котораго служатъ ихъ точки касанія.

1177. Найти площадь „луночки", ограниченной дугами въ 270^0 и 180^0, если разстояніе между ихъ концами равно 2.

1178. Основанія трапеціи относятся какъ 7 : 1; высота равна 6. Прямая, параллельная основаніямъ, дѣлитъ ея площадь пополамъ. На какія части эта прямая дѣлитъ высоту?

1179. Гипотенуза прямоугольнаго $\triangle$-а равна 4; изъ данной на гипотенузѣ точки опущены на катеты перпендикуляры, отсѣкающіе отъ $\triangle$-а прямоугольникъ, площадь котораго составляетъ $\frac{3}{8}$ площади даннаго $\triangle$-а. Найти разстояніе отъ данной точки до концовъ гипотенузы.

Рѣш. Иском. разстоянія обозн. черезъ x и $4-x$; катеты обозначимъ черезъ p и q (вспомогат. велич.); тогда опущенные перпендикуляры образуютъ прямоугольникъ съ площадью: $\frac{pq}{16}x(4-x) = \frac{3}{8} \cdot \frac{pq}{2}$; сокративъ на pq, получимъ уравненіе $x^2 - 4x + 3 = 0$, откуда $x = 3$ или 1.

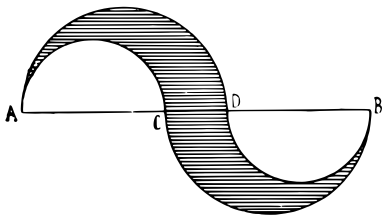
1180. Периметры двухъ подобныхъ $\triangle$-овъ суть 38 и 57. Двѣ стороны одного $\triangle$-а порознь равны двумъ сторонамъ другого. Найти стороны каждаго $\triangle$-а.

1181. Два 4-угольника подобны; три стороны одного порознь равны тремъ сторонамъ другого; ихъ неодинаковыя стороны суть 16 и 81. Найти ихъ одинаковыя стороны.

Рѣш. Пусть стороны меньшаго 4-уг. суть 16., x,

y, z; тогда стороны большаго 4-уг.—x, y, z, 81; вслѣдствіе подобія $\triangle$-овъ имѣемъ $\frac{x}{16} = \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{81}{z}$; пусть каждое отношеніе равно q; тогда, перемноживъ всѣ эти дроби, получимъ $\frac{81}{16} = q^4$, откуда $q = \frac{3}{2}$; $\frac{x}{16} = q$, слѣд. $x = 24$, $\frac{y}{x} = q$, сл. $y = 36$; $\frac{z}{y} = q$, сл. $z = 54$.

1182. На прямой AB даны точки C и D такъ, что $AC = BD$, а $CD = 1$ (черт. 164). На AC и AD, какъ на діаметрахъ, построены полуокружности по одну сторону данной прямой; CB и DB построены полуокружности по другую сторону прямой. Найти площадь криволинейной фигуры, ими образованной, если длина всей кривой равна 16.

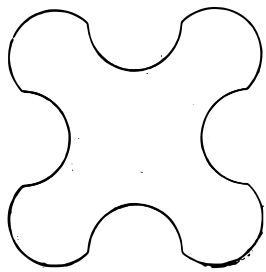


Черт. 164.

Рѣш. Обозн. радіусы — R, r; тогда $CD = 2(R - r)$, длина кривой $AB = 2\pi(R + r)$; иск. пл. $\pi(R^2 - r^2) = = \frac{1}{4} . CD . AB = \frac{1}{4} . 1 . 16 = 4$.

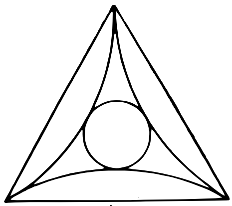
1183. Крестообразная фигура ограничена восьмью равными полуокружностями, концы которыхъ удалены отъ центра креста на разстояніе 1. Найти площадь данной фигуры.

Указ. Соединимъ послѣдовательно концы полуокружностей; получимъ прав. 8-угольн., вписанный въ окружность радіуса 1; иск. пл. = площ. этого 8-уг. (черт. 165).



Черт. 165.

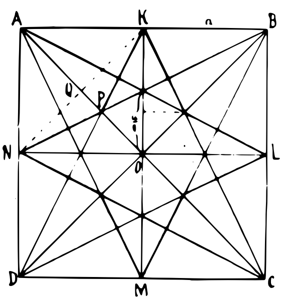
1184. Стороны правильнаго



Черт. 166.

$\triangle$-ка стягиваютъ равныя дуги, изъ которыхъ каждая касается двухъ другихъ. Найти радіусъ окружности, касательной ко всѣмъ дугамъ, если сторона $\triangle$-а равна 1 (черт. 166).

1185. Сторона квадрата равна 3. Середина каждой стороны соединена двумя прямыми съ концами противоположной стороны. Опред. площадь образовавшейся 4-угольной звѣздочки, крайними вершинами которой служатъ середины сторонъ.



Черт. 167.

Рѣш. 1-й способъ. Иском. пл.=пл. квадр. минусъ 8. AKP; $KQ = \frac{BD}{4}$ (черт. 167); по свойству медіанъ AO и DK $\triangle$-а ABD $AP = \frac{2}{3}AO$; площ. $\triangle$ $AKP = \frac{3}{4}$; иск. пл. $= 3$.

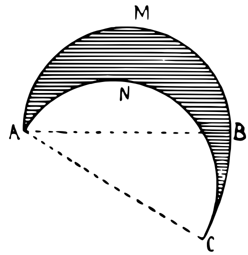
2-й спос. Отнош. пл. звѣзды и квдр.=пл. $\triangle\, OKP : \triangle\, OKA =$ $= OP : OA = \frac{1}{3}$ (AO — медіана $\triangle$-а ABD).

1186. Радіусы двухъ внѣшнекасательныхъ круговъ 4 и 6; къ нимъ проведены двѣ общія внѣшнія касательныя, черезъ точки касанія которыхъ проведена третья окружность. Найти разстояніе ея центра отъ точки касанія данныхъ круговъ.

Указ. Провести линію центровъ данныхъ круговъ; изъ середины данной касат. возстав. $\perp$-ъ и точка пересѣч. этихъ прямыхъ буд. иск. центръ; онъ равно удаленъ отъ обоихъ центровъ (провести радіусы къ касательной).

1187. Въ уголъ, равный 60°, вписаны три окружности; двѣ изъ нихъ касаются другъ друга внѣшнимъ образомъ, третья проходитъ черезъ ихъ центры; радіусъ третьей равенъ 2. Найти радіусы первыхъ двухъ.

1188. Стороны правильнаго $\triangle$-а стягиваютъ взаимно-касательныя дуги (внутри $\triangle$-а). Найти площадь фигуры, ограниченной этими дугами, если сторона $\triangle$-а равна 1.



Черт. 168.

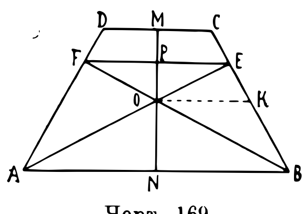
1189. Полуокружность длиною π повернута вокругъ своего одного конца на 30°. Найти площадь, ею описанную.

Указ. Если къ иском. площ. $AMBCNA$ (черт. 168) прибав. полукругъ ANC и вычесть полукругъ AMB, то получ. площ. сектора ABC.

1190. Стороны $\triangle$-а 6, 8, 10. Вершины его служатъ центрами трехъ окружностей, пересѣкающихся въ одной общей точкѣ по хордамъ равной длины. Найти эти хорды.

Указ. Точка пересѣч. окружн. есть центръ вписан. круга, а половина иском. хорды служитъ радіусомъ впис. круга.

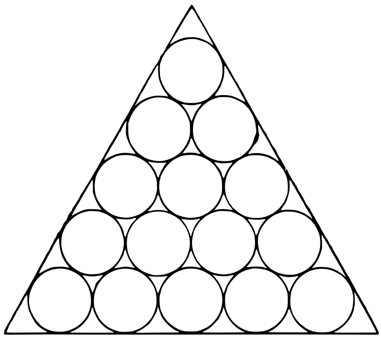
1191. Основанія равнобедренной трапеціи 6 и 2; изъ середины большаго основанія проведена высота и изъ концовъ большаго основанія проведены двѣ прямыя черезъ середину высоты до встрѣчи съ боковыми сторонами въ двухъ точкахъ. Найти разстояніе между этими точками.



Черт. 169.

Рѣш. Проведемъ $OK \parallel AD$ (черт. 169); $OK = 2$, сл $OK = \frac{2}{3}$ $BN = \frac{1}{3}$ AB; $AE : OE = 3$; $AO : OE = 2$, слѣд. $AN : EP = 2$, откуда $EP = \frac{3}{2}$, а $EF = 3$.

1192. Въ равносторонній $\triangle$-ъ, сторона котораго равна a, вписанъ рядъ круговъ, послѣдовательно касающихся другъ друга. Надъ нимъ вписанъ второй параллельный рядъ такихъ же круговъ, однимъ меньше, причемъ каждый изъ нихъ касается двухъ круговъ перваго ряда. Затѣмъ аналогично вписанъ третій рядъ и т. д. (черт. 170); въ послѣднемъ ряду одинъ кругъ. Найти предѣлъ суммы площадей всѣхъ круговъ, когда ихъ число стремится къ безконечности *).



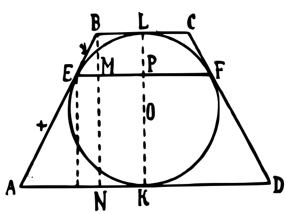
Черт. 170.

1193. Данъ $\triangle$-ъ; радіусы внѣвписанныхъ круговъ равны: 30, 60, 90. Найти высоты $\triangle$-а.

Указ. 1-й способъ—на основ. подобія см. рѣш. зад. № 523; 2-й способъ—посредствомъ площ. $\triangle$-а см. рѣш. зад. № 1066.

1194. Высоты $\triangle$-а суть: 12, 15, 20. Найти радіусы внѣвписанныхъ круговъ.

1195. Около круга, радіусъ котораго 10, описана равнобедренная трапеція. Найти ея площадь, если разстояніе между точками касанія круга къ боковымъ сторонамъ трапеціи равно 16.



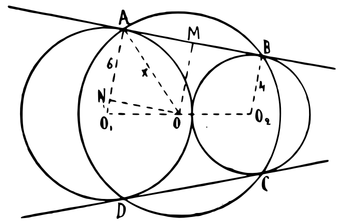
Черт. 171.

Указ. Обознач. $AK = AE = x$, $BE = BL = y$; $AN = x - y$ (чертежъ 171). Изъ подобія $\triangle$-овъ BEM и ABN

---

*) Примѣняется формула суммы членовъ ариѳметич. прогрессіи.

$EM = \frac{y(x-y)}{x+y}$, $EP = \frac{2xy}{x+y}$, $EF = \frac{4xy}{x+y} = 16$; изъ прямоуг. $\triangle$-а ABN $AB^2 - AN^2 = BN^2$; подставимъ сюда $x+y$ вмѣсто AB, $x-y$ вмѣсто AN и 20 вмѣсто BN; найдемъ, что $xy = 100 \ldots (1)$; слѣд. $x + y = 25 \ldots (2)$; изъ (1) и (2) ур-iя имѣемъ $x = 20$, $y = 5$ (или наоборотъ). Слѣд. иск. пл. $= 25 \,.\, 20 = 500$.



Черт. 172.

1196. Къ двумъ внѣшне-касательнымъ кругамъ радiусовъ 6 и 4 проведены двѣ внѣшнiя касательныя. Найти радiусъ окружности, проходящей черезъ всѣ точки касанiя этихъ касательныхъ къ даннымъ кругамъ.

Рѣш. O_1 и O_2 — данные круги (черт. 172); O — иск. центръ. $O_1A = 6$; $O_2B = 4$; M—серед. AB, и $MO \perp AB$, иском. радiусъ $AO = x$, $O_1O_2 = 10$; $O_1O = 5$. Опустимъ $ON \perp AO_1$; $OM = \frac{6+4}{2} = 5$; $O_1N = 1$. Изъ остроуг. $\triangle$-а AOO_1 $x^2 = AO_1^{\,2} + O_1O^2 - 2 \,.\, AO_1 \,.\, NO_1 = 49$; $x = 7$.

Отвѣты.

1. 9 дюйм. **2**. 2 дюйм. **3**. 16 кольевъ. **4**. 2 дюйм. **5**. 5 дюйм. **6**. 3 дюйм. **7**. 3. **8**. 2 дюйм. **9**. 2 дюйм. **10**. 2 дюйм. и 4 дюйм. **11**. 7 дюйм. **12**. 5. **13**. 8 дюйм. **14**. 3. **15**. 2, 4, 8. **16**. 25 дюйм. **17**. 12. **18**. 18. **19**. 1) 2 и 4; 2) 1 и 3. **20**. 12. **21**. 7. **22**. 2. **23**. 8. **24**. 28. **25**. 12. **26**. 3. **27**. 4. **28**. Если раздѣлить данную прямую AB на 4 равныя части въ точкахъ K, L, M (идя отъ A къ B), то 1-ая встрѣча будетъ въ точкѣ K; 2-ая въ точкѣ L; 3-ья въ точкѣ M; 4-ая въ точкѣ K и т. д. **29**. 28. **30**. 1) 6; 2) 45. **33**. $\frac{3}{2}d$. **34**. $\frac{d}{3}$. **35**. $\frac{3}{2}d$. **36**. $\frac{4}{3}d$. **37**. $\frac{d}{4}$. **38**. $\frac{2d}{3}$. **39**. $\frac{d}{4}$ и $\frac{d}{2}$. **40**. $\frac{d}{2}$. **41**. $\frac{3}{5}d$. **42**. $\frac{5}{4}d$. **43**. $\frac{4d}{3}$. **44**. $\frac{d}{2}$ и $\frac{3d}{2}$. **45**. $\frac{2d}{3}$. **46**. $\frac{3}{4}d$ и $\frac{5}{4}d$. **47**. $\frac{3}{2}d$. **48**. $\frac{3}{4}d$ и $\frac{5}{4}d$. **49**. $\frac{5}{6}d$. **50**. $\frac{2}{3}d$. **51**. $\frac{4}{5}d$ и $\frac{6}{5}d$. **52**. $\frac{6}{5}d$. **53**. Прямой. **54**. $\frac{4}{3}d$. **55**. $\frac{4}{5}d$. **56**. 1) d; 2) d; 3) $\frac{d}{3}$; 4) $\frac{2d}{3}$. **57**. $\frac{5}{4}d$. **58**. $\frac{d}{2}$. **59**. $\frac{3}{2}d$. **60**. $\frac{3}{4}d$ и $\frac{5}{4}d$ **61**. $\frac{3d}{2}$ и $\frac{d}{2}$. **62**. $\frac{d}{2}$ и $\frac{3}{2}d$. **63**. 1) $\frac{d}{2}$; 2) $\frac{3}{2}d$. **64**. $\frac{3}{2}d$. **65**. $\frac{d}{2}$ и $\frac{3}{2}d$. **66**. $\frac{2d}{3}$ и $\frac{4d}{3}$. **67**. 1) $\frac{3}{5}d$; 2) $\frac{9}{5}d$. **68**. $\frac{1}{3}d$. **69**. d. **70**. $\frac{2}{5}d$. **71**. $\frac{5}{4}d$. **72**. 1) $\frac{d}{3}$; 2) $\frac{d}{12}$. **73**. 1) $\frac{d}{15}$; 2) $\frac{d}{30}$. **74**. 12 разъ. **75**. 60 разъ. **76**. 720. **77**. 1) $\frac{3}{2}d$; 2) $\frac{5}{3}d$. **78**. $\frac{3}{5}d$. **79**. $\frac{6}{7}d$ и $\frac{3}{7}d$. **80**. $\frac{2}{3}d$. **81**. $\frac{d}{4}$. **82**. $\frac{2d}{3}$. **83**. $\frac{4d}{3}$. **84**. $\frac{d}{2}$. **85**. $\frac{d}{2}$. **86**. Мѣста послѣдовательныхъ встрѣчъ будутъ періодически на цыфрахъ: 1) 4, 8, 12; 2) 3, 6, 9, 12. **87**. 3 дюйм. **88**. 16, 20, 24. **89**. 6 вер., 6 вер. и 4 вер. **90**. 2. **91**. 10, 10, 1. **92**. 4 дм., 8 дм. и 8 дм. **93**. 1) 2; 2) 7; 3) $n-3$. **94**. 1) 4; 2) 6; 3) $n-2$. **96**. Болѣе 2 и менѣе 8. **97**. 7 дм. **99**. 22 дм. **100**. 4, 4, 7 или 6, 6, 3. **101**. 4 дм. **103**. Равносторонній $\triangle$-ъ. **104**. Равносторонній $\triangle$-ъ. **105**. Равносторонній $\triangle$-ъ. **106**. Равносторонній $\triangle$-ъ. **108**. На чер. 10 даны два $\triangle$-а ABC и ABD; у нихъ сторона AB общая, $AC=AD$ и $\angle B$ противъ меньшей стороны — общій; но $\triangle$-и неравны. **111**. 4 дм. **113**. Двумя данными, изъ которыхъ одно должно быть линейное. **114**. 5. **115**. 1) 5, 2) 9, 3) 170, 4) $\frac{n(n-3)}{2}$. **116**. 1) 5, 2) 8, 3) 11. **117**. 1) 5, 2) 7, 3) 4. **118**. $\frac{3d}{5}$ и $\frac{7d}{5}$. **119**. $\frac{d}{2}$ и $\frac{3d}{2}$. **120**. 1) $\frac{d}{2}$ и $\frac{3d}{2}$; 2) $\frac{2d}{3}$ и $\frac{4d}{3}$. **121**. $\frac{d}{2}$. **122**. $\frac{4d}{5}$. **123**. $\frac{d}{3}$ и $\frac{2d}{3}$. **124**. $\frac{d}{3}$, $\frac{2d}{3}$, d. **125**. $\frac{4}{3}d$. **126**. По $\frac{d}{2}$. **127**. По $\frac{d}{2}$. **128**. $\frac{d}{6}$. **129**. $\frac{4d}{5}$. **130**. $\frac{d}{3}$. **131**. $\frac{4}{3}d$. **132**. $\frac{5}{3}d$. **133**. $\frac{3}{4}d$. **134**. $\frac{2}{3}d$. **135**. $\frac{5}{6}d$. **136**. $\frac{a}{2}$. **137**. 10 дм. **138**. d. **139**. a. **140**. $\frac{d}{3}$ и $\frac{2}{3}d$. **141**. $\frac{1}{5}d$. **142**. $\frac{3d}{2}$. **143**. $\frac{2d}{3}$. **144**. d. **145**. $\frac{5d}{6}$. **146**. $\frac{d}{2}$. **147**. 1) $4d$; 2) $6d$. **148**. 1) $8d$; 2) $16d$; 3) $36d$. **149**. $\frac{2d}{5}$, $\frac{4d}{5}$, $\frac{6d}{5}$, $\frac{8d}{5}$. **150**. d, $\frac{1}{2}d$, $\frac{1}{2}d$. **151**. 1) 5; 2) 6; 3) 12. **152**. 1) 5; 2) 6. **153**. 1) 3; 2) 6; 3) 8. **154**. d, $\frac{2d}{3}$, $\frac{d}{3}$. **155**. $\frac{d}{2}$, $\frac{3d}{4}$, $\frac{3d}{4}$. **156**. 1) $\frac{7}{6}d$; 2) $\frac{5}{6}d$. **157**. $\frac{2}{3}d$. **158**. $\frac{6}{5}d$. **159**. $\frac{d}{2}$. **160**. $\frac{d}{4}$. **161**. $\frac{d}{2}$. **162**. d, $1\frac{1}{2}d$, d, $\frac{d}{2}$. **163**. $\frac{4d}{5}$. **164**. $\frac{4}{7}d$. **165**. $\frac{2d}{5}$. **166**. $\frac{2}{5}d$. **167**. 1) $\frac{6}{5}d$; 2) $\frac{6}{7}d$. **169**. Прямой. **170**. $\frac{6}{7}d$ и $\frac{2}{5}d$. **171**. $\frac{6}{5}d$. **172**. 4. **173**. 1) 6; 2) 3. **174**. $\frac{7}{5}d$. **175**. $\frac{d}{2}$. **176**. $\frac{2d}{3}$. **177**. $\frac{7}{9}d$. **178**. $\frac{d}{2}$. **181**. 4. **182**. 5. **183**. 3 и 9. **184**. 3, 3, 6. **185**. 6. **186**. 8. **187**. $\frac{5}{6}d$. **188**. $\frac{a}{2}$. **189**. 8, 4, 2 и т. д. **190**. 4 и 8. **191**. 3. **192**. 2 дм. и 4 дм.

193. 1:2. **194.** 1) 4; 2) 6. **195.** $\frac{4d}{5}$. **196**. $\frac{4}{3}d$ и $\frac{2}{3}d$.
197. $\frac{d}{10}$. **198**. $\frac{8}{5}d$. **199.** $\frac{4d}{5}$. **200.** $\frac{5}{4}d$. **201.** 10 и 5.
202. $\frac{d}{2}$ и $\frac{3d}{2}$. **203.** $\frac{3d}{4}$ и $\frac{5d}{4}$. **204.** $\frac{3}{2}d$ и $\frac{d}{2}$. **205**. 3 и 2.
206. Прямой. **207.** $\frac{4d}{3}$. **208.** $\frac{3d}{2}$. **209.** $\frac{d}{4}$. **210.** $\frac{6}{5}d$.
211. $\frac{d}{2}$. **212**. $\frac{3}{8}d$. **213**. 8. **214.** 10. **215**. Прямоугольникъ.
216. 4. **217**. 4. **218**. $\frac{3d}{2}$. **219**. 15. **221**. 17. **222**. 20.
223. $\frac{2d}{3}$. **224**. $\frac{4}{5}d$. **225.** 4, 5, 6. **226.** 6. **227.** 1) параллелограммъ; 2) ромбъ; 3) прямоугольникъ; 4) квадратъ.
228. 3д. **229**. $\frac{4d}{3}$. **230.** 2. **231**. 1) 3, 2, 3; 2) 2, 1, 2.
232. 4. **233**. 2. **234**. 2. **235**. 2. **236**. 12. **237**. 2. **239**. $\frac{d}{4}$ и $\frac{3d}{4}$. **240**. $\frac{d}{3}$ и $\frac{2d}{3}$. **241**. 5 саж. **242**. 3, 6, 9. **243**. 7, 8, 9.
244. $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$. **245**. 4, 5, 6. **246**. 8. **247**. 2, 3, 2. **248**. 4.
249. 5. **250.** h. **251**. 10 и 4. **252**. 2. **253**. 2. **254**. 5 и 11.
255. 3 и 4. **256**. 32. **257**. $\frac{5}{3}d$. **258**. 3. **259**. $\frac{2d}{5}$ и $\frac{3d}{5}$.
260. $\frac{4d}{3}$. **261**. 3. **262**. 2. **263**. $\frac{5d}{3}$. **264**. 6. **265**. 2. **266**. 4 и 2 (въ обоихъ случаяхъ). **267**. 8. **268**. 1, 1, 2, 2. **269**. 2.
270. $\frac{4d}{5}$, $\frac{3d}{5}$, $\frac{3d}{5}$. **271**. d, $\frac{d}{2}$, $\frac{d}{2}$. **272**. $a+b+c$. **273**. $\frac{2}{3}b$.
274. $\frac{a}{3}$ и $\frac{b}{3}$. **275**. 1) 5 и 2; 2) 7 и 3. **276**. 3. **277**. 4, 5, 1.
278. 4 верш. **279**. R. **280**. $\frac{2d}{3}$. **281**. $\frac{4d}{3}$. **282**. 3. **283**. 1) d; 2) $\frac{4d}{3}$. **284**. 2. **285**. 2 и 4. **286**. R. **287**. $\frac{4}{3}d$. **288**. 8.
289. $\frac{4d}{3}$. **290**. $\frac{4}{3}d$. **291**. d. **292**. R. **293**. d. **294**. a. **295**. $2R$.
296. 1. **297**. 2. **298**. 1. **299**. 1. **300**. $\frac{4}{3}d$. **301**. 2. **302**. 2.
303. 4. **304**. $\frac{2}{3}d$. **305**. 10. **306**. 6. **307**. 8. **308**. $R-r$. **309**. $2a$.
310. 10. **311** $\frac{2}{3}d$. **312**. 6 (полоборота). **313**. 9 (три четверти оборота). **314**. Черезъ 8 минутъ. **315**. 7.
316. 7. **319**. 5. **320**. 2. **321**. 3. **322**. 2. **323**. 6. **324**. 2.

325. 2. **326.** 4. **327.** 2. **328.** 3, 4, 5. **329.** 1) 10; 2) 6. **330.** 5. **331.** $2R$. **332.** R; $\frac{2}{3}d$. **333.** 2. **334.** 1. **335.** 2 и 6. **336.** $\frac{R}{2}$. **337.** 4. **338.** 3. **339.** 1) 72°; 2) 45°); 3) $22^1/_2$°. **340.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 60°. **341.** 1) 67°30′; 2) 5°37′30″; 3) 98°26′15″. **342.** 1) $\frac{d}{3}$; 2) $\frac{d}{4}$; 3) $\frac{2d}{3}$; 4) $\frac{d}{90}$; 5) $\frac{7d}{90}$.
343. 80°, 120°, 160°. **344.** 40°, 60°, 80°. **345.** 69°49′45″. **346.** 72°. **347.** 35°10′ и 54°50′. **348.** 1) 108°; 2) 135°.
349. 60°, 80°, 100°, 120°. **350.** 60°. **351.** 1) 30°; 2) 120°; 3) 45°; 4) 172°30′. **352.** 30°; 30′. **353.** 6°; 6′. **354.** 40°. **355.** 45°. **356.** 75°. **357.** 120°. **358.** 45°, 60°, 75°. **359.** 54°, 90°, 126°, 90°. **360.** 72°. **361.** 60°. **362.** 75°. **363.** 65°. **364.** 75°.
365. 36° и 144°. **366.** 50°. **367.** 100°. **368.** 108. **369.** 80°. **370.** 20°. **371.** 40°. **372.** 40°. **373.** 36°, 60°, 84°. **374.** 90°, 270°. **375.** 140° и 220°. **376.** 110°, 120°, 130°. **377.** 120°, 240°. **378.** $\frac{R}{2}$. **379.** $\frac{a}{2}$. **380.** 1) 180°; 2) 120°. **381.** 70°, 60°, 50°. **382.** $67\frac{1}{2}$°. **383.** 40°, 40°, 100°. **384.** На равныя части. **385.** 30°, 42°, 246°, 42°. **386.** 80° и 60°. **387.** 120°.
388. 45°. **389.** 90°. **390.** 80°, 90°, 100°, 90°. **391.** 40°, 40°, 60°. **392.** 30° и 30°. **393.** 60°. **394.** 60°. **395.** 60°, 45°, 75°. **396.** 60°, 60°, 60°. **397.** 80° и 100°. **398.** 1) По 60°; 2) по 120°. **399.** 60° и 60°. **400.** 45°. **401.** 20° и 40°. **402.** 110°, 130°. **403.** 100°. **404.** 7. **405.** 1. **406.** 4. **407.** 2. **408.** 1. **409.** 2. **410.** 4. **411.** 130° и 50°. **412.** 1) 80°, 120°, 160°; 2) 40°, 80°, 120°. **413.** 1) Въ остроугольномъ △-ѣ; 2) въ прямоугольномъ △-ѣ; 3) въ тупоугольномъ △-ѣ. **414.** $\frac{1}{2}a$. **415.** 105°, 115°, 140°. **416.** 1. **417.** 2. **418.** 3. **419.** $\frac{R}{2}$. **420.** 3. **421.** $\frac{h}{3}$ и $\frac{2h}{3}$. **422.** $\frac{a}{2}$. **423.** 1. **424.** 16. **425.** 1 и 3. **426.** $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a-b+c}{2}$, $\frac{-a+b+c}{2}$. **427.** 6, 4, 3. **428.** $\frac{m-a}{2}$. **429.** 60. **430.** $m-2a$. **431.** $a+b+c$. **432.** a. **433.** $\frac{R}{3}$. **434.** $a-b$. **435.** $\frac{a}{2}$. **437.** $3r$. **438.** 3. **439.** 2. **440.**

441. p. **442**. p. **443**. $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a-b+c}{2}$. **444**. 3 и 1. **446**. a. **447**. $b-c$. **448**. $b+c$. **449**. $R-r$. **450**. $R+r$. **451**. 2 и 4. **452**. На 6. **453**. 10 и 6. **454**. 18. **455**. 4 и 2. **456**. 2, 3, 4. **457**. 3. **458**. 9 и 4. **459**. 2. **460**. 10 и 8. **461**. 12. **462**. 10 и 16. **463**. 120c. **464**. 20 саж. **465**. 90 саж. **466**. 2. **467**. 14 и 16. **468**. 8. **469**. 15, 15 и 20. **470**. 24. **471**. 5. **472**. 1. **473**. 4 и 2. **474**. 4 и 6. **475**. 2. **476**. 2. **477**. 3. **478**. 4. **479**. $\frac{2}{3}a$. **480**. $\frac{ab}{a+b}$. **481**. 2. **482**. 3 и 1 или 9 и 27. **483**. $\frac{a}{2}$ и $\frac{h}{2}$. **484**. 6. **485**. 9. **486**. 12. **487**. 2. **488**. 2. **489**. 2,6. **490**. $\sqrt{ab}$. **491**. 1) 8, 6, 4, 4; 2) 4, 3, 2, 2. **492**. 1. **493**. 15, 9, 6. **494**. 6, 9, 15, **495**. $\frac{11}{4}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$ (считая отъ вершины). **496**. 1 : 2. **497**. 8. **498**. 8 (Аппалоніева окружность). **499**. 4 и 2. **500**. 24, 12, 6.

501. 6 и 4. **502**. 2 и 4. **503**. 10 и 15. **504**. 10 и 5. **505**. 1 и 2. **506**. 2 и 6. **507**. 4. **508**. 1. **509**. 3. **510**. 9. **511**. 24. **512**. 2 и 4. **513**. 6. **514**. 4. **515**. 8. **516**. 12. **517**. 3. **518**. 2. **519**. 3. **520**. 2. **521**. 2. **522**. 1. **523**. 4. **524**. 6. **525**. $\sqrt{Rr}$. **526**. 1. **527**. 9. **528**. 2. **529**. 4 и 5. **530**. 20 и 15. **531**. 1 и 8. **532**. 26. **533**. 2 и 8. **534**. 1) 5; 2) 10; 3) 13. **535**. 1) 15; 2) 17; 3) 25. **536**. 1) 8; 2) 5; 3) 9. **537**. 1) 12; 2) 15; 3) 24. **538**. 13 дм. **539**. 4 арш. **540**. $6\frac{2}{5}$ и $3\frac{3}{5}$. **541**. 25. **542**. 12. **543**. 10 и 24. **544**. 6, 8, 10. **545**. 30, 40, 50. **546**. 3, 4, 5. **547**. 6, 8, 10. **548**. 15 и 20. **549**. 1) $3\frac{3}{4}$; 2) $6\frac{2}{3}$. **550**. 13. **551**. 13. **552**. 4 : 9. **553**. $4\frac{2}{7}$ и $5\frac{5}{7}$. **554**. 21 и 28. **555**. 15. **556**. 4 : 25. **557**. 5. **558**. 5. **559**. $\sqrt{2}$. **560**. 4. **561**. $\sqrt{3}$. **562**. 10. **563**. 24. **564**. 18 и 24. **565**. 4. **566**. 24. **567**. 3, $4\frac{4}{5}$. **568**. 6. **569**. 10, 10, 12. **570**. 30 и 25. **571**. 5. **572**. 5. **573**. 12. **574**. 30 и 40. **575**. 5 и $2\sqrt{13}$. **576**. 20. **577**. 15. **578**. 20. **579**. 5. **580**. 5 и 3. **581**. $\sqrt{193}$. **582**. 12. **583**. 20. **584**. $\sqrt{3}$. **585**. $\sqrt{3}$. **586**. 3 и 4. **587**. 14. **588**. 5. **589**. 10; 12 и 16. **590**. 9, 9, 14.

591. $\sqrt{3}$. **592**. $\sqrt{3}-1$. **593**. $\sqrt{m^2+n^2}=5$. **594**. 10. **595**. 5. **596**. 6. **597**. 5. **598**. 8. **599**. $\sqrt{2}$. **600**. 5. **601**. 24. **602**. 13 и 5. **603**. 13. **604**. 20. **605**. 10. **606**. 5. **607**. $\sqrt{13}$. **608**. $R\sqrt{3}$. **609**. 25 или 7. **610**. 8. **611**. 12. **612**. 36. **613**. 25. **614**. 10. **615**. 14 мин. **616**. 5. **617**. $\sqrt{2}$. **618**. 5. **619**. 8. **620**. $6\frac{1}{4}$. **621**. 8. **622**. $2\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5}$. **623**. 5. **624**. 65. **625**. $2\frac{2}{5}$. **626**. $3\frac{1}{3}$. **627**. 1. **628**. 2. **629**. $2\frac{2}{5}$ и $2\frac{2}{11}$. **630**. 2 и 8. **631**. 5. **632**. 12. **633**. 6. **634**. $\sqrt{5}$. **635**. $\sqrt{2}$. **636**. $\sqrt{10}$. **637**. $\sqrt{2}-1$. **638**. $6\frac{1}{4}$. **639**. 1. **640**. 4. **641**. 2 и 1. **642**. 1) Прямоугольный; 2) тупоугольный; 3) остроугольный. **643**. 1) $a^2=b^2+c^2$; 2) $a^2<b^2+c^2$; 3) $a^2>b^2+c^2$. **644**. 5 и 9. **645**. 15 и 6. **646**. 9 и 16. **647**. 3 и 11. **648**. 12. **649**. 12. **650**. 13. **651**. 7. **652**. 13. **653**. 15. **654**. 7. **655**. 3 и 7. **656**. 7 и 8. **657**. 15 и 8. **658**. $3\sqrt{2}$ или $4\sqrt{2}$. **659**. 15 и 13 или 5 и 7. **660**. 16. **661**. $3\frac{1}{2}$. **662**. 4, 2. **663**. 2. **664**. 120°. **665**. $4\frac{2}{3}$. **666**. 2. **667**. $2\sqrt{3}-2$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}$. **668**. $8\frac{1}{8}$. **669**. $8\frac{1}{8}$. **670**. $2\frac{58}{91}$. **671**. 5 и 8. **672**. 6. **673**. 6. **674**. 7. **675**. 7. **676**. 6 и 7. **677**. 10 и 20. **678**. 7. **679**. 14. **680**. 9 и 13. **681**. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; аналогично m_b и m_c. **682**. $2\frac{2}{5}$. **683**. 12; 20 и $12\sqrt{2}$. **684**. 7. **685**. 39 и 17. **686**. 8. **687**. 15. **688**. 62. **689**. 25. **690**. 14 или 50. **691**. 60. **692**. $2\frac{4}{5}$. **693**. $9\frac{3}{5}$. **694**. $\frac{5}{7}$ и $\frac{15}{7}$. **695**. $\sqrt{\frac{55}{7}}$ и $\sqrt{\frac{77}{5}}$. **696**. 6. **697**. 1 и 8. **698**. 15. **699**. 9. **700**. 2. **701**. 2 и 7. **702**. 2. **703**. 1, 1, 2, 2. **704**. 9 и 16. **705**. 9,6 и 5,4; 7,2 и 12,8. **706**. 4 и 2; 3 и 5. **707**. Каждый катетъ дѣлится пополамъ, а гипотенуза на 3 части: 18, 7, 25. **708**. 10 и 15; 6 и 9. **709**. 10. **711**. 1) 120°; 2) 135°; 3) 150°; 4) $2d-\frac{4d}{n}$. **712**. 1) $\frac{4d}{5}$; 2) $\frac{2d}{5}$; 3) $\frac{4d}{n}$. **713**. 1) 6; 2) 3. **714**. 108°. **715**. $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. **716**. 2. $\sqrt{R^2-r^2}$. **717**. 1) $\frac{R}{2}$;

2) $\frac{R}{2}\sqrt{2}$; 3) $\frac{R}{2}\sqrt{3}$; 4) $\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. **718.** 1) $\frac{a}{3}\sqrt{3}$; 2) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$; 3) a; 4) $\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$. **719.** 1) $2r\sqrt{3}$; 2) $2r$; 3) $\frac{2}{3}r\sqrt{3}$; 4) $2r\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$. **720.** 1) $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 2) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **721.** 1) $\frac{r}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=$ $=\frac{r}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$. **722.** 1) $2a$; 2) $a\sqrt{2}$; 3) $\frac{2}{3}a\sqrt{3}$; 4) $a\sqrt{4-2\sqrt{2}}$; 5) $a\sqrt{2-\sqrt{\frac{4}{5}}}$; 6) $2a\sqrt{2-\sqrt{3}}=$ $=a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$. **723.** 1) $\frac{a}{6}\sqrt{3}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$; 4) $\frac{a}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\frac{a}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$; 5) $\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; 6) $\frac{a}{2}\cdot\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\frac{a}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)$. **724.** 1) 0,765; 2) 0,517. **725.** $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. **726.** $R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. **727.** $\frac{R}{4}\cdot\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$. **728.** $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$; $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **729.** R; $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{3}$; $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2R$. **730.** $1+\sqrt{5}$. **731.** 1; $\sqrt{3}$; 2. **732.** $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **733.** $2-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-1$, 1. **734.** 1) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 3) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **735.** 1) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$. **736.** 1) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **737.** 1) $\sqrt{5}+1$; 2) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **738.** 1) $\sqrt{2}-1$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **739.** $\sqrt{5}+1$. **740.** $\sqrt{3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **741.** 8 и 7. **742.** $\sqrt{3}$. **743.** $\sqrt{3}$. **744.** $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. **745.** 1) $\sqrt{2}-1$; 2) $2-\sqrt{3}$. **746.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\sqrt{3}$. **747.** 1) $\sqrt{2}-1$; 2) $\sqrt{2}+1$. **748.** 1) $2-\sqrt{3}$;

2) $2+\sqrt{3}$. **749.** $3+\sqrt{6}$ или $3-\sqrt{6}$.

750. $\sqrt{3}-1$. **751.** $r.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pm 1\right)$.

752. 1) $\sqrt{2}+1$; 2) 1. **753.** 1) $2\sqrt{3}-3$; 2) $\sqrt{2}-1$. **754.** 1) $\sqrt{3}$;
2) 3. **755.** $2+\sqrt{2}$. **756.** $8(2-\sqrt{2})$. **757.** $4\sqrt{3}$.

758. $5(\sqrt{5}+1)$. **759.** 16. **760.** 8. **761.** 8. **762.** 2. **763.** 5.
764. 7. **765.** 4. **766.** 2. **767.** 1) 3 кв. арш.; 2) 2 кв. фут.;
3) 3 кв. арш. **768.** 4. **769.** 4 и 6. **770.** 10. **771.** 2, 2, **772.** 5.
773. 23. **774.** На 4. **775.** 3. **776.** 2. **777.** 4 и 64.

778. $\frac{1}{21}$ кв. саж. или 336 кв. дм. **779.** 6 дм.

780. 20. **781.** 12. **782.** 24. **783.** 30. **784.** 8, 8, 8. **785.** 1.

786. $4\sqrt{2}$. **787.** 30. **788.** 24. **789.** 120. **790.** 4. **791.** 600

792. 1) $\frac{a^2}{2}$; 2) $\frac{a^2}{2}\sqrt{2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3}$. **793.** 2. **794.** 8. **795.** $4\sqrt{2}$.

796. 30^0. **797.** 3. **798.** 60. **799.** 1. **800.** $\sqrt{3}$. **801.** 5.
802. 25. **803.** 24. **805.** 18. **806.** 150. **807.** 32. **808.** На
2. **809.** 126 или 66. **810.** 2. **811.** 1. **812.** 42 или 56.
813. 6. **814.** 300. **815.** 300. **816.** 2. **817.** 3 и 3. **818.** 3 и 6.
819. 3. **820.** 144. **821.** 24. **822.** 1) 84; 2) 60; 3) 36.

823. 12. **824.** 12. **825.** 12. **826.** 1. **827.** 336. **828.** 8, 26, 30.

829. 108. **830.** 42. **831.** 8, 26, 30. **832.** 150. **833.** $\frac{1}{m}:\frac{1}{n}:\frac{1}{p}$.

834. $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$. **835.** 10 : 6 : 5. **836.** 6 : 4 : 3. **837.** 24. **838.** 12.

839. 72. **840** 84. **841.** 72 **842.** 50 и 14. **843.** 3 : 4. **844.** 15.

845. $1:\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}-\frac{1}{m}\right)}$.

846. $\frac{1}{3}\sqrt{(m+n+p)(m+n-p)\ (m+p-n)(n+p-m)}$.

847. 13. **848.** 4. **849.** 3. **850.** $\frac{1}{p}\sqrt{p\ (p-a)(p-b)(p-c)}$.

852. $10\frac{5}{6}$. **853.** 9. **854.** 2. **855.** 2 и 6. **856.** 12.

857. 40. **858.** 2. **859.** 4. **860.** h^2. **861.** 12. **862.** 10.
863. 12. **864.** 12. **865.** 18. **866.** 60.

867. $\frac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)}$.
868. 150. **869.** 2. **870.** $\sqrt{3}$. **871.** $\frac{ab}{2}$. **872.** 100. **873.** $\frac{r.m}{2}$ **874.** 20.
875. $\frac{ab}{4}$ **876.** 3. **877.** 120. **878.** 13. **879.** 30°. **880.** 30°. **881.** 2. **882.** 4.
883. 1) $\frac{3}{4}\mathrm{R}^2\sqrt{3}$; 2) $2\mathrm{R}^2$; 3) $\frac{3\mathrm{R}^2}{2}\sqrt{3}$; 4) $\frac{5\mathrm{R}^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
884. 1) $3r^2\sqrt{3}$; 2) $4r^2$; 3) $2r^2\sqrt{3}$; 4) $2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$.
885. 1) $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; 2) a^2; 3) $\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$; 4) $\frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.
886. 2 раза. **887.** 4 раза. **888.** 6 разъ. **889.** 2 раза. **890.** 6.
891. 2 раза. **892.** 6. **893.** 6. **894.** 1) $2\mathrm{R}^2\sqrt{2}$; 2) $3\mathrm{R}^2$.
895. 1) $8r^2(\sqrt{2}-1)$; 2) $12r^2(2-\sqrt{3})$. **896.** 1) $2a^2\sqrt{3+2\sqrt{2}}=$
$=2a^2(1+\sqrt{2})$; 2) $3a^2(2+\sqrt{3})$. **897.** $\frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.
898. 1. **899.** 1. **900.** 1. **901.** 2. **902.** $\sqrt{3}$. **903.** 2. **904.** $\frac{h}{\sqrt{2}}$.
905. 4 : 11. **906.** 1 : 3 : 5. **907.** 1 : 3 : 5 : 7. **908.** 11 : 16 : 9 (считая отъ основанія). **909.** 13. **910.** 1 : 3. **911.** 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. **912.** 6 : 4 : 5 : 15. **913.** 7 : 9. **914.** 3 : 5. **915.** 2, 4, 8, 4. **916.** 1 : 2 : 4 : 2. **917.** 3 : 1. **918.** 9. **919.** 1 : 5. **920.** $\frac{Q}{2}$.
921. 1. **922.** 5 : 27. **923.** 5, 7, 9. **924.** 5. **925.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
926. 1 : 4. **927.** 1 : 3. **928.** 5 и 20. **929.** $m:n$. **930.** 9.
931. 13. **932.** 10. **933.** 5. **934.** 21. **935.** 2 и 1. **936.** $3Q$. **937.** 1 : 2.
938. $2\sqrt{3}$ **939.** 1) $(\mathrm{R}+r)^2$; 2) R^2-r^2. **940.** $2P$. **941.** 12.
942. 1. **943.** 7. **944.** 3 : 5. **945.** 2. **946.** 6. **947.** $\sqrt{2}$.
948. $3-2\sqrt{2}$. **949.** $1+\sqrt{5}$. **950.** $4(\sqrt{2}-1)$. **951.** $13\sqrt{3}$.
952. 1) 44; 2) 132. **953.** 22. **954.** $3\frac{1}{2}$. **955.** 70. **956.** 1) 22; 2) 11. **957.** $\frac{\pi\mathrm{R}}{180}$ **958.** 21 дм. **959.** 56 дм. **960.** 45°. **961.** 70°.
962. 14. **963.** 22. **964.** $2\pi a$. **965.** 22 дм. **966.** $\frac{m}{2\pi}$. **967.** $\frac{2}{7}$ м.
968. 180°; 60°; $\frac{180^0}{\pi}$; $\frac{360^0}{\pi}$. **969.** $57\frac{30}{11}$. **970.** 1) $\frac{1}{3}\pi a$; 2) $\frac{1}{4}\cdot$ $\cdot\pi a.\sqrt{2}$. **971.** 3 метра. **972.** 1) $\frac{6}{\pi}$ час.; 2) $\frac{30}{\pi}$ мин. **973.** 1) 6°; 2) $\frac{1}{2}$°. **974.** 4. **975.** 12; 14. **976.** $\frac{\pi a}{2}$. **977.** $2\pi\mathrm{R}$. **978.** $\frac{\pi r}{3}$

979. $2\pi^2R$. **980.** $2\pi^2R$. **981.** π^2R. **982.** 1) 314 кв. дм.; 2) 314 кв. см. **983.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **984.** 20 д. **985.** $2\sqrt{\frac{2Q}{\pi}}$. **986.** $\frac{m^2}{4\pi}$. **987.** 2π. **988.** 314. **989.** 1 и 3. **990.** 1; 3; 5. **991.** $\frac{R}{\sqrt{2}}$. **992.** $R\sqrt{\frac{1}{n}}, R\sqrt{\frac{2}{n}}, R\sqrt{\frac{3}{n}}, \ldots\ldots R\sqrt{\frac{n-1}{n}}$. **993.** $5.\pi$. **994.** 2 и 3. **995.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **996.** π. **997.** Cd. **998.** 7 : 5. **999.** 1) 9π; 2) π; 3) $\frac{5\pi}{3}$. **1000.** 6. **1001.** $\frac{\pi a^2}{12}$. **1002.** 45°. **1003.** $\frac{\pi}{5}$. **1004.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **1005.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **1006.** $\frac{9a^2}{8\pi}$. **1007.** 1) $\frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$. **1008.** 1) $\frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **1009.** $(\pi - 3)\cdot\frac{R^2}{12}$. **1010.** $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **1011.** $2\pi - 4$. **1012.** $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{\ }}{4}$. **1013.** $\frac{\pi r^2}{6} + \frac{r^2}{2}$. **1014.** $R^2 + \frac{3}{4}\pi R^2$. **1015.** $\frac{3}{7}$. **1016.** a^2. **1017.** 12. **1018.** $\frac{R^2}{8}(\pi + 6\sqrt{3})$. **1019.** $\frac{d^2}{4}$. **1020.** 1) $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{\pi}{2} - 1$. **1021.** $\frac{a^2}{4}(4 - \pi)$. **1022.** $2\pi - 4$. **1023.** Сумма постоян. и $= \frac{\pi a^2}{4}$. **1024.** πR^2. **1025.** $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$ или $\frac{5\pi}{2} + \sqrt{3}$. **1026.** $3R^2$. **1027.** 1) $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$; 2) $\frac{2}{3}\pi$. **1028.** 5 и 2. **1029.** 10. **1030.** 25, 25, 30. **1031.** 300. **1032.** $4\frac{1}{2}$. **1033.** 4. **1034.** $6\frac{1}{4}$ и 3. **1035.** 144. **1036.** 7, $10\sqrt{3}$. **1037.** 3, $\frac{15}{4}\sqrt{3}$. **1038.** $10\sqrt{3}$. **1039.** 12. **1040.** $9\frac{1}{2}$. **1041.** 30. **1042.** $16\frac{1}{2}$. **1043.** 360. **1044.** 72. **1045.** 6. **1046.** 4. **1047.** 13. **1048.** 3. **1049.** 2. **1050.** $12\frac{1}{2}$. **1051.** 1) R; 2) $R\sqrt{2}$. **1052.** 15, 20, 25.

1053. 72. **1054.** 8, 6, 4. **1056.** 2; 3; 6. **1057.** 4; $8\frac{1}{8}$; $10\frac{1}{2}$; 12; 14. **1058.** 24; 5. **1059.** 9; 12; 15. **1060.** 30; 15; 10. **1069.** 30. **1070.** 96 и 9,6. **1071.** 3 и 4. **1072.** 8 и 6. **1073.** 24 и 30. **1074.** 1 : 4. **1075.** 3 и 7. **1076.** 6, 8, 10.

1077. 5. **1078.** πab. **1079.** 18. **1080.** 1 и 3. **1081.** 294. **1082.** 150. **1083.** $\frac{1}{2} \cdot Q$. **1084.** 52. **1085.** 60. **1086.** 3, 5, 7. **1087.** $2a$. **1088.** 2. **1089.** 1) $2\sqrt{2} = 2,828$; 2) $8(\sqrt{2} - 1) = 3,314$. **1090.** 5. **1091.** $\frac{12\sqrt{2}}{5}$. **1092.** 3 и 17 или 8 и 12. **1093.** 48. **1094.** 20. **1095.** 84. **1096.** 1008. **1097.** 20. **1098.** 96. **1099.** $2\frac{2}{11}$. **1100.** π. **1101.** 5. **1102.** 4. **1103.** 4. **1104.** 26, 28, 30. **1105.** $ab = 6$. **1106.** $6\frac{2}{5}$. **1107.** 2. **1108.** $2\sqrt{2}$; 8. **1109.** $78\frac{3}{4}$. **1110.** 2 и 8. **1111.** 48; 28. **1112.** 15. **1113.** π. **1114.** 2. **1115.** $R \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. **1116.** a. **1117.** π. **1118.** $\frac{Q}{3}$; $\frac{2Q}{3}$. **1119.** 1) 25; 2) 24. **1120.** $2\sqrt{3} - 3$. **1121.** $\sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{3}}$ и $\sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}}$. **1122.** $\frac{5}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$. **1123.** $\frac{1}{4\pi^3}$. **1124.** $8\frac{1}{6}$ и $15\frac{5}{6}$. **1125.** 13, 14, 15. **1126.** 3. **1127.** $8(\sqrt{2} - 1)$. **1128.** $2\sqrt{3}$. **1129.** $2 \cdot \sqrt{2}$. **1130.** 12, **1131.** 2. **1132.** $\sqrt{5}$. **1133.** 11 : 9 : 16. **1134.** π. **1135.** 6. **1136.** $16\frac{4}{5}$ **1137.** 12, 8, 6. **1138.** $\frac{a}{2}$. **1139.** 4, 8, 16... **1140.** $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. **1141.** $2 + \sqrt{19}$. **1142.** 2. **1143.** 1) 7 и 2; 2) 3 и 3. **1144.** 8 и 32. **1145.** 15. **1146.** 2 и 4. **1147.** 2. и 4. **1148.** 14. **1149.** 3. **1150.** 48. **1151.** $\frac{\pi}{5}$. **1152.** 2. **1153.** 16 и 8. **1154.** $16\frac{1}{4}$. **1155.** $12\frac{4}{5}$.

1156. 1) $\sqrt{\frac{(ac + bd)(bc + ad)}{ab + cd}}$; 2) $\sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{bc + ad}}$; 3) $\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$, причемъ $2p = a + b + c + d$. **1157.** $12\sqrt{3}$. **1158.** 4 и 36. **1159.** $\frac{am + bn + cp}{m + n + p}$. **1160.** $13\frac{1}{3}$ и $\frac{8}{9}$. **1161.** 4. **1162.** $\sqrt{5}$. **1163.** 16. **1164.** 18. **1165.** 4. **1166.** 20. **1167.** 9, 16, 25. **1168.** 8 и 6. **1169.** 6. **1170.** 6. **1171.** $11\frac{3}{7}$. **1172.** $8\frac{1}{8}$. **1173.** 1, 2, 3. **1174.** ad. **1175.** 3. **1176.** $6\frac{2}{5}$. **1177.** $\pi + 1$. **1178.** 4 и 2.

1179. 3 и 1. **1180**. 8, 12, 18; 12, 18, 27. **1181**. 24, 36, 54. **1182**. 4. **1183**. $2\sqrt{2}$. **1184**. $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$. **1185**. 3. **1186**. 1. **1187** 3 и 1. **1188**. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$. **1189**. $\frac{\pi}{3}$. **1190**. 4. **1191**. 3. **1192**. $\frac{\pi a^2}{8}$. **1193**. 40, 45, 72. **1194**. 10, 15, 30. **1195**. 500. **1196**. 7.

ТОГО ЖЕ АВТОРА:

Сборникъ геометрическихъ задачъ. Часть II. Стереометрія.

Сборникъ ариѳметическихъ задачъ. Часть III. Отношенія, пропорціи, правила: тройныя, процентовъ, учета векселей, смѣшенія и пр.

ГОТОВЯТСЯ КЪ ПЕЧАТИ:

Сборникъ ариѳметическихъ задачъ Ч. I. Цѣлыя числа.

Сборникъ ариѳметическихъ задачъ. Ч. II. Дроби.

Сборникъ задачъ по примѣненію тригонометріи къ геометріи.