Н. П. Слетовъ.

Директоръ Митавскаго реальнаго училища въ Пятигорскѣ.

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ

для среднихъ учебныхъ заведеній.

3-е изданіе.

(Безъ перемѣнъ со 2-го исправлен. изд.)

Съ 78 чертежами въ текстѣ.

Учен. Ком. Мин. Нар. Просв. **допущено** въ качествѣ **учебнаго руководства** для среднихъ учебныхъ заведеній.

Учен. Ком. Главн. Управл. Земл. и Землед. **допущено** въ качествѣ **учебнаго пособія** для подвѣдомственныхъ Гл. Упр. среднихъ учебныхъ заведеній.

Книгоиздательство „СОТРУДНИКЪ“

ПЕТРОГРАДЪ—КІЕВЪ.

1918.

Тип. „Міръ Науки“, Кіевъ.

Оглавленіе.

Часть I. Рѣшеніе треугольниковъ.

*) Цифры въ скобкахъ указываютъ §§ учебника.

Часть II. Гоніометрія.

Приложеніе (къ главѣ V).

Часть I. Рѣшеніе треугольниковъ.

Введеніе.

§ 1. **Предметъ тригонометріи**. Слово тригонометрія образовано изъ двухъ греческихъ словъ: τρίγωνον (тригононъ)—треугольникъ и μετρεῖν (метрейнъ)—измѣрять, такъ что „тригонометрія" въ точномъ переводѣ значитъ „измѣреніе треугольника". Измѣрить треугольникъ, или, какъ принято говорить, рѣшить треугольникъ—значитъ по нѣсколькимъ даннымъ его элементамъ опредѣлить прочіе, нужные его элементы. Основные элементы тр-ка—это 3 стороны и 3 угла; но кромѣ нихъ данными и искомыми элементами могутъ служить высоты $\triangle$-ка, его биссектрисы, медіаны, радіусы круговъ, описаннаго и вписаннаго, и проч.

Рѣшать треугольники, вообще говоря, можно двумя способами: 1) способомъ построеній, или, такъ назыв., графическимъ способомъ, и 2) способомъ вычисленій, или собственно тригонометрическимъ способомъ.

Покажемъ прежде всего, въ чемъ состоитъ графическій способъ. Положимъ, что требуется опредѣлить разстояніе отъ нѣкотораго, даннаго на поверхности земли пункта A до другого пункта B, и положимъ, что непосредственно его измѣрить нельзя, такъ какъ между этими пунктами протекаетъ рѣка *(рис. 1)*. Тогда можно поступить слѣдующимъ образомъ. Проводимъ на доступной намъ мѣстности отъ даннаго пункта A въ какомъ-нибудь направленіи прямую линію и на ней отмѣряемъ произвольный отрѣзокъ AC,—произвольный, но не слишкомъ, впрочемъ, малый сравнительно съ опредѣляемымъ разстояніемъ AB. Этотъ отрѣзокъ AC называется базой или базисомъ измѣреній. Затѣмъ, при помощи какого-нибудь изъ особыхъ, такъ называемыхъ, угломѣрныхъ снарядовъ измѣримъ углы BAC и BCA. Положимъ, что всѣ эти измѣренія дали слѣдующіе результаты: длина $AC = 36{,}8$ саж., $\angle A = 57^{\circ}28'$ и $\angle C = 63^{\circ}37'$. Послѣ этого графически опредѣлить искомое разстояніе AB мы можемъ двумя способами:

1) Построимъ на доступной намъ мѣстности $\triangle CDE$ (см. рис. 1), равный $\triangle$-ку ABC, по длинѣ его стороны $AC = CD$ и

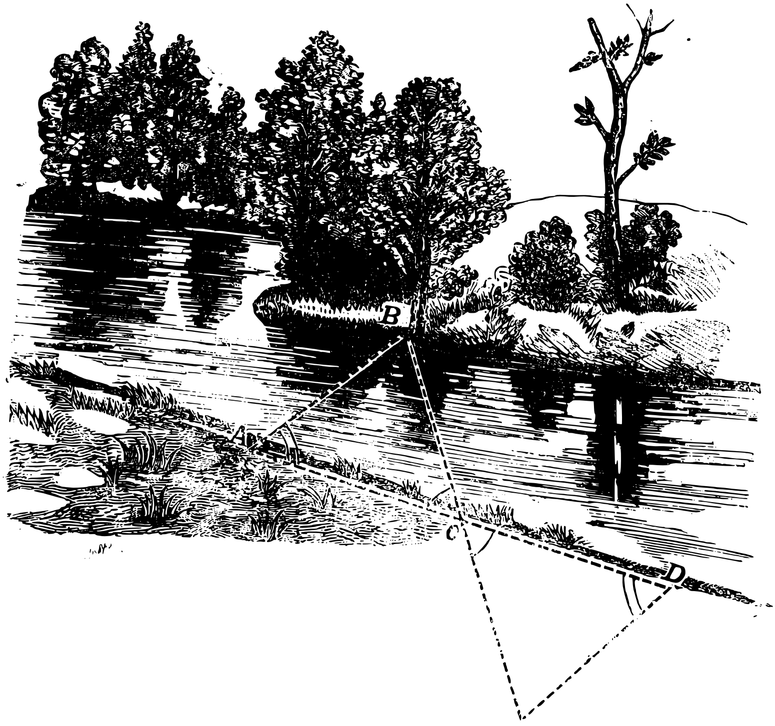


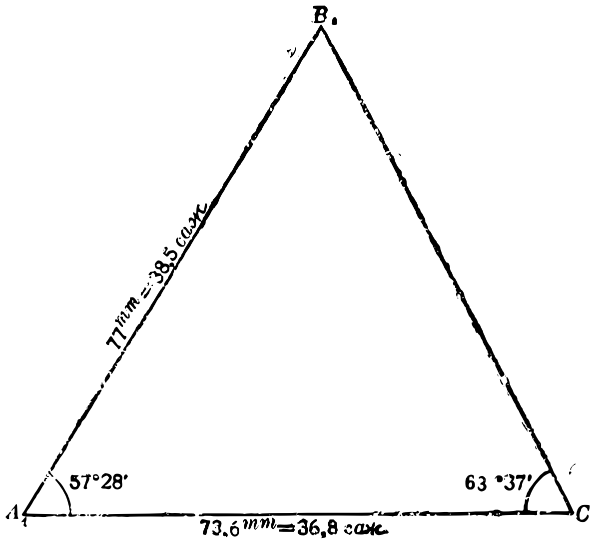
Рис. 1.

по двумъ измѣреннымъ угламъ A и C. Затѣмъ измѣримъ непосредственно длину его стороны DE, которая и будетъ равна искомому разстоянію AB.

2) Построимъ на бумагѣ треугольникъ $A_1B_1C_1$ *(черт. 2)*, подобный $\triangle$-ку ABC, взятому на поверхности земли. Для этого прежде всего выберемъ подходящій масштабъ. Если бы 1 сантиметръ принять за сажень, то сторону AC пришлось бы начертить въ видѣ отрѣзка A_1C_1, длиною въ 36,8 сантим., т. е. длиною болѣе $^1/_3$ метра, что̀, конечно, неудобно. Поэтому масштабъ надо выбрать достаточно малымъ для того, чтобы чертежъ не занималъ на бумагѣ слишкомъ много мѣста. Пусть 1 сантиметръ, т. е. 10 миллиметровъ масштаба представляютъ 5 саж.; тогда 36,8 сажени будутъ соотвѣтствовать $73{,}6^{mm}$.

5	саж.	10^{mm}
1	„	2 „
36,8	„	73,6 „

Итакъ, сторонѣ AC на чертежѣ соотвѣтствуетъ отрѣзокъ A_1C_1, длиною въ 73,6^{mm}. Затѣмъ, при помощи транспортира строимъ на сторонѣ A_1C_1, при концахъ ея, углы, приблизительно равные



Черт. 2.

57°28′ и 63°37′. Тогда пересѣченіе вторыхъ сторонъ этихъ угловъ дастъ точку B_1, соотвѣтствующую въ дѣйствительности пункту B. Послѣ этого измѣряемъ сторону A_1B_1; находимъ, что длина ея равна 77^{mm}, которые въ дѣйствительности соотвѣтствуютъ 38,5 саж. Значитъ, искомое разстояніе отъ пункта A до B (рис. 1) равно 38,5 саж.

Итакъ, нашу задачу мы рѣшили. Но при этомъ мы безусловно дѣлали ошибки: 1) при вычерчиваніи и измѣреніи отрѣзковъ прямой линіи мы могли ошибиться болѣе, чѣмъ на 0,1^{mm}, такъ какъ десятыя доли миллиметра съ трудомъ отличаются на масштабѣ, а вѣдь отрѣзокъ въ 0,1^{mm} въ дѣйствительности соотвѣтствуетъ $^1/_2$ сажени; 2) то же самое можно сказать и о неточности при вычерчиваніи угловъ, такъ какъ ни на одномъ транспортирѣ не нанесены минутныя дѣленія угла, не говоря уже о секундахъ; 3) проводимыя при помощи линейки линіи въ дѣйствительности могутъ оказаться не прямыми; къ тому же, желая начертить линію, мы чертимъ только изображеніе линіи, имѣющее нѣкоторую ширину, вслѣдствіе чего пересѣченіе линій будетъ представлять изъ себя не геометрическую точка, а цѣлую площадку, хотя бы и весьма малую.

Такимъ образомъ, графическій методъ рѣшенія треугольниковъ неточенъ, и предѣлъ ошибокъ при немъ не можетъ быть указанъ болѣе или менѣе точно. Поэтому является необходимость вмѣсто этого, графическаго метода примѣнять другой, болѣе совершенный. Этимъ-то методомъ и служитъ методъ тригонометрическихъ вычисленій.

Вычисленіе мы тоже не всегда въ состояніи производить вполнѣ точно. Напримѣръ, мы не можемъ найти точнаго значенія $\sqrt{5}$ и вычисляемъ его только приблизительно. Но мы можемъ вычислить его, какъ говорятъ, съ желаемой или напередъ заданной степенью точности: можемъ вычислить съ точностью до $^1/_{10}$, $^1/_{100}, \ldots$, а можемъ, если это потребуется, и съ точностью хотя бы до одной триллiонной. Поэтому, главное преимущество метода вычисленій состоитъ въ томъ, что мы, производя вычисленія, можетъ быть, и не точно, имѣемъ возможность указать предѣлъ погрѣшности и по своему желанiю можемъ, смотря по обстоятельствамъ, увеличивать точность, чего о графическомъ методѣ сказать нельзя.

Вотъ, предметомъ тригонометріи и служитъ вычисленіе съ желаемой степенью точности искомыхъ элементовъ треугольника по нѣсколькимъ даннымъ его элементамъ.

§ 2. **Объ измѣреніяхъ на мѣстности.** Прежде чѣмъ приступить къ изученiю курса тригонометріи, полезно познакомиться съ тѣмъ, какимъ образомъ добываются данныя для рѣшенія треугольниковъ, т. е. какимъ образомъ измѣряются тѣ отрѣзки и углы, которые должны служить данными элементами рѣшаемаго треугольника.

При рѣшеніи многихъ практическихъ задачъ для вычисленія какого-либо линейнаго или углового элемента надо имѣть треугольникъ, въ который входилъ бы этотъ элементъ. А для того, чтобы получить этотъ треугольникъ, большею частью приходится направленіе и размѣръ одной изъ его сторонъ брать произвольно. Эта произвольно взятая сторона треугольника, какъ уже сказано раньше, называется базой или базисомъ измѣреній. Для измѣренія длины базиса употребляютъ, такъ назыв., мѣрную цѣпь *(рис. 3)*, для болѣе же точныхъ измѣреній—стальную ленту (рулетку) и другіе приборы.

Употребляемая въ Россіи мѣрная цѣпь состоитъ изъ стальныхъ колѣнъ (a) въ $^1/_{10}$ саж., связанныхъ между собой кольцами (b); вся цѣпь имѣетъ длину въ 10 саженей; черезъ каждую сажень къ цѣпи прикрѣплены мѣдныя бляхи съ обозначеннымъ на нихъ счетомъ саженей отъ одного конца цѣпи до другого; по концамъ цѣпи имѣются большія кольца, за которыя держатъ цѣпь при измѣреніи ею.

Натянувъ по направленію базиса мѣрную цѣпь, по числу ея дѣленій, находящихся между концами базиса, опредѣляютъ его

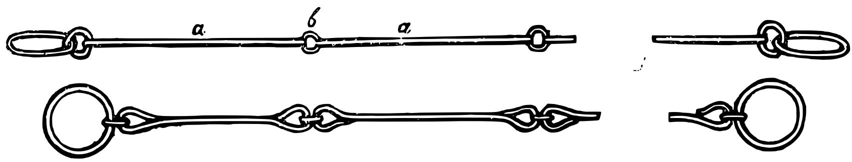
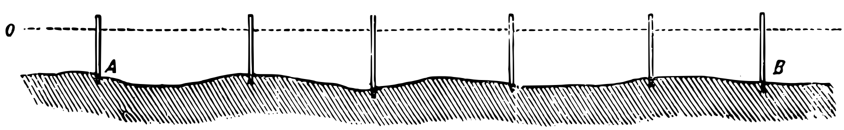


Рис. 3.

длину. Но это, конечно, возможно только въ томъ случаѣ, если длина базиса не превышаетъ длины цѣпи, т. е. 10 саж. Если же базисъ больше 10 саж., то, прежде чѣмъ измѣрять цѣпью, примѣняютъ особый пріемъ, называемый вѣшеніемъ прямой линіи. Это вѣшеніе производится при помощи вѣхъ, или прямыхъ шестовъ, которые втыкаются въ землю одинъ за другимъ по направленію измѣряемаго базиса *(черт. 4)*; вѣхи, конечно, должны



Черт. 4.

быть разставляемы на такомъ разстояніи другъ отъ друга, которое можно было бы измѣрить непосредственно цѣпью.

Для того чтобы вѣхи при установкѣ ихъ стояли по прямой линіи, поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Поставивъ двѣ вѣхи по концамъ базиса A и B *(черт. 4)* въ одной и той же вертикальной плоскости, каждую слѣдующую вѣху между ними ставятъ одну за другою такъ, чтобы, если смотрѣть отъ одной конечной вѣхи по направленію къ другой, всѣ промежуточныя вѣхи были видны въ той же вертикальной плоскости.

§ **3**. Послѣ проведенія и измѣренія базиса приходится измѣрять нужные для рѣшенія $\triangle$-ковъ углы. Они измѣряются помощью различныхъ особыхъ инструментовъ, которые вообще называются угломѣрными.

Одни изъ угломѣрныхъ инструментовъ служатъ для измѣренія угловъ въ горизонтальной плоскости, другіе —въ вертикальной *). Примѣромъ первыхъ служитъ астролябія *(рис. 5)*, примѣромъ вторыхъ—теодолитъ (рис. 7).

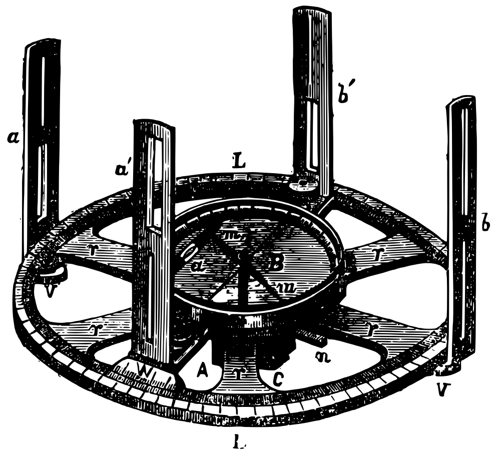


Рис. 5.

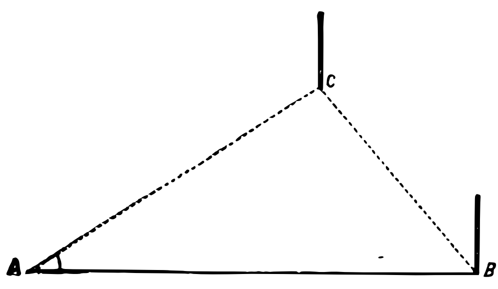
Существенныя части астролябіи *(рис. 5)*:

1) Горизонтально располагаемое, раздѣленное на градусы круговое кольцо L, называемое лимбомъ.

2) Вращающаяся вокругъ центра лимба линейка А—алидада, на концахъ которой W опредѣленнымъ образомъ нанесено нѣсколько штриховъ; изъ нихъ средній называется индексомъ, или указателемъ.

3) Прикрѣпленныя къ обоимъ концамъ алидады двѣ вертикальныя пластинки (*a'* и *b'*) съ продольными, вертикальными прорѣзами, изъ которыхъ одни—узкіе, а другіе—широкіе; вдоль каждаго широкаго прорѣза, по серединѣ его протянутъ черный конскій волосъ; эти прорѣзы называются діоптрами, при чемъ узкіе называются глазными, а широкіе, съ волосомъ—предметными.

Астролябія устанавливается на треногѣ, похожей на треножки для фотографическихъ аппаратовъ.



Черт. 6.

Желая измѣрить какой-либо уголъ А *(черт. 6)* на горизонтальной поверхности земли, устанавливаютъ астролябію такъ, чтобы центръ лимба приходился какъ-разъ надъ вершиной этого угла. Тогда измѣряемый уголъ можно считать центральнымъ по отношенію къ лимбу, и потому вмѣсто угла можно будетъ измѣрять соотвѣтствующую ему дугу лимба. Для этого же устанавли-

*) Впрочемъ есть инструменты, при помощи которыхъ измѣряютъ углы и въ другихъ плоскостяхъ.

ваютъ алидаду сперва по направленію одной стороны угла, а потомъ по направленію другой, и смотрятъ, на сколько градусовъ по дугѣ лимба при этомъ измѣненіи направленія алидады повернулся индексъ; столько градусовъ и будетъ въ измѣряемомъ углѣ.

Для установки же алидады по направленію стороны угла, напримѣръ, АС *(черт. 6)*, располагаютъ алидаду такъ, чтобы, смотря черезъ ея узкій діоптръ, можно было видѣть волосъ противоположнаго широкаго діоптра въ совпаденіи съ какимъ-либо вертикальнымъ предметомъ (напримѣръ, вѣхой), находящимся на другомъ концѣ С этой стороны угла.

Кромѣ подвижныхъ діоптровъ *a'* и *b'*, прикрѣпленныхъ къ алидадѣ *(рис. 5)*, можно пользоваться и неподвижными *a* и *b*, прикрѣпленными къ лимбу. При измѣреніи угловъ можно пользоваться и компасомъ В съ магнитной стрѣлкой *mm*.

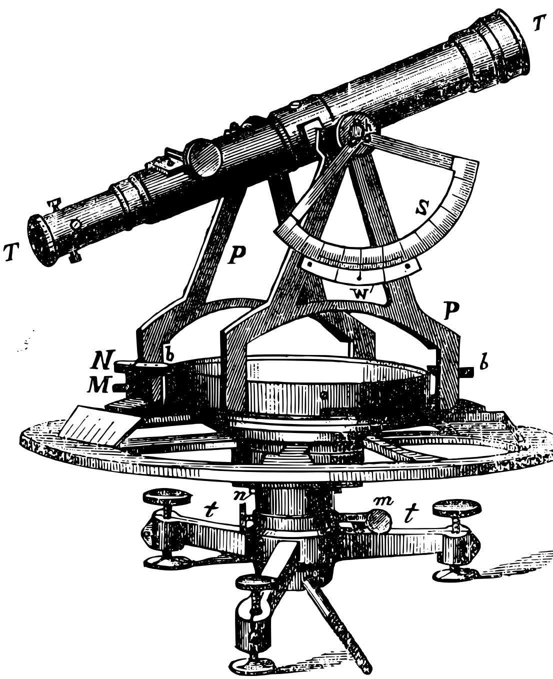


Рис. 7.

Итакъ, при помощи астролябіи можно измѣрять углы въ горизонтальной плоскости. Для измѣренія же угловъ въ вертикальной плоскости можно пользоваться т е о д о л и т о м ъ *(рис. 7)*. Существенныя части его:

1) Зрительная труба TT, которая вращается вокругъ горизонтальной оси *h*; но кромѣ того она можетъ поворачиваться и вокругъ вертикальной оси вмѣстѣ со всей стойкой P, на которой лежитъ ея ось *h*; благодаря этому труба можетъ получить любое направленіе.

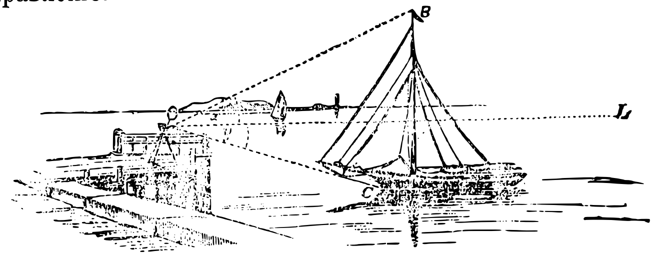


Рис. 8.

2) Вращающійся вмѣстѣ съ трубой вокругъ оси *h* круговой секторъ S, дуга котораго раздѣлена на градусы; это—часть л и м б а.

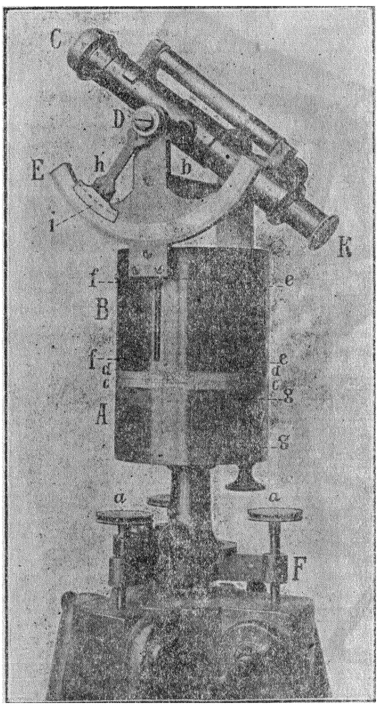


Рис. 9.

3) Верньеръ W, прикрѣпленный къ стойкѣ P; онъ представляетъ изъ себя дугу, концентрическую съ лимбомъ S и особымъ образомъ раздѣленную на части нѣсколькими штрихами, изъ которыхъ средній представляетъ изъ себя индексъ—указатель; при вращеніи трубы этотъ индексъ указываетъ на то или другое градусное дѣленіе лимба. (Другіе же штрихи верньера служатъ для болѣе точнаго измѣренія угловъ *).

Желая измѣрить какой-либо уголъ, напримѣръ, такъ называемый у г о л ъ з р ѣ н і я BOC *(рис. 8)*, подъ которымъ съ пристани видна яхта, наводятъ трубу сперва на одинъ изъ концовъ яхты, напримѣръ, B, а потомъ на другой C, и смотрятъ, на какія дѣленія лимба при этомъ ука-

*) Желающіе получить болѣе детальное представленіе о верньерѣ или ноніусѣ могутъ обратиться къ какому-либо учебнику „низшей геодезіи", (напримѣръ, А. Бика § 47) или къ нѣкоторымъ изъ учебниковъ физики (напримѣръ, А. Гано, изд. Павленкова, § 13).

зываетъ индексъ. Изъ этихъ показаній и могутъ быть опредѣлены размѣры угла.

При горизонтальномъ направленіи OL трубы индексъ указываетъ на нулевое дѣленіе.

§ **4**. ***Рисунокъ*** *9* есть изображеніе пантометра—угломѣрнаго снаряда, представляющаго изъ себя соединеніе астролябіи й теодолита.

Верхній подвижный цилиндръ B замѣняетъ алидаду астролябіи; въ немъ 4 діоптра: два глазныхъ и два предметныхъ; діоптръ *ee*—одинъ изъ глазныхъ, а *ff*—одинъ изъ предметныхъ.

Посеребренный и раздѣленный на градусы верхній край *cc* нижняго, неподвижнаго цилиндра A, представляетъ изъ себя горизонтальный лимбъ.

CK—зрительная труба; секторъ *E* есть вертикальный лимбъ, *h*—верньеръ, *i*—индексъ и т. д.

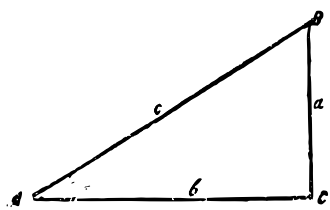
ОТДѢЛЪ I. **Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ.**

Глава I. **Предварительныя упражненія: рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.**

§ **5**. Уже на основаніи нѣкоторыхъ геометрическихъ теоремъ мы въ состояніи рѣшать треугольники въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

Такъ, зная длины двухъ сторонъ прямоугольнаго треугольника, мы можемъ вычислить третью сторону. Для этого стоитъ только примѣнить такъ называемую теорему Пиѳагора *(черт. 10)*:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Черт. 10.

Тутъ данными и искомой величинами служатъ только стороны.

§ **6**. Мы могли бы также опредѣлить одну сторону треугольника по другой, если бы намъ было извѣстно отношеніе между ними. Такъ, если бы было дано, что длина гипотенузы AB *(черт. 10)* равна 10 дм., а отношеніе къ ней катета BC равно $^3/_4$, то легко, конечно, опредѣлить и длину этого катета. Именно, длина его BC = 10 дм. $\times$ $^3/_4$ = $7^1/_2$ дм.

Отношеніе же между сторонами прямоугольнаго треугольника можетъ быть вычислено по размѣрамъ его острыхъ угловъ. Такъ, уже теперь, на основаніи матеріала, изученнаго въ геометріи, учащіеся легко могутъ опредѣлить отношеніе катета къ гипотенузѣ при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ угловъ прямоугольнаго $\triangle$-ка. Рѣшимъ нѣсколько такого рода задачъ.

§ **7**. *Задача 1-ая.* Въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ острыхъ угловъ равенъ 45^0. Опредѣлить отношеніе каждаго изъ его катетовъ къ гипотенузѣ.

Рѣшеніе. Такъ какъ сумма острыхъ угловъ прямоуг. $\triangle$-ка равна 90^0, то и другой острый уголъ даннаго $\triangle$-ка содержитъ 45^0. Значитъ данный $\triangle$—равнобедренный, и оба катета его равны между собой. Предполагая, что длина гипотенузы равна c, а длина каждаго катета—x какихъ-либо единицъ длины, можемъ составить на основаніи теоремы Пиѳагора ур-іе:

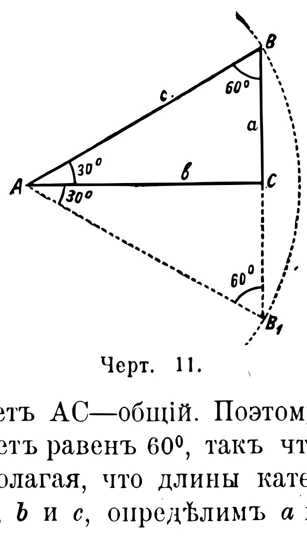
$$x^2 + x^2 = c^2, \text{ откуда}$$

$$2x^2 = c^2 \text{ и } x = \frac{c\sqrt{2}}{2}, \text{ такъ что}$$

отношеніе $\dfrac{x}{c} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$ съ точн. до $1/2$ сот. доли.

Такимъ образомъ, отношеніе къ гипотенузѣ катета, лежащаго противъ угла въ 45^0, равно $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

§ **8**. *Задача 2-ая.* Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго $\triangle$-ка равенъ 30^0. Опредѣлить отношеніе каждаго изъ его катетовъ къ гипотенузѣ.



Черт. 11.

Рѣшеніе. Если одинъ изъ острыхъ угловъ прямоуг. треугольника равенъ 30^0, то другой содержитъ 60^0. Продолживъ катетъ BC *(черт. 11)*, лежащій противъ угла въ 30^0, по другую сторону катета AC до пересѣченія съ дугою, описанной изъ точки A радіусомъ AB, получимъ послѣ соединенія точекъ A и B_1 $\triangle$-къ ACB_1. Треугольники ACB_1 и ACB равны между собой, такъ какъ у нихъ гипотенузы AB и AB_1 равны, какъ радіусы, а катетъ AC—общій. Поэтому, въ $\triangle$-кѣ ABB_1 каждый изъ угловъ будетъ равенъ 60^0, такъ что этотъ $\triangle$-къ будетъ правильный. Предполагая, что длины катетовъ и гипотенузы выражаются числами a, b и c, опредѣлимъ a и b по c.

$$BB_1 = AB, \text{ или } 2a = c, \text{ такъ что } a = \frac{c}{2}.$$

Далѣе на основаніи теор. Пиѳагора:

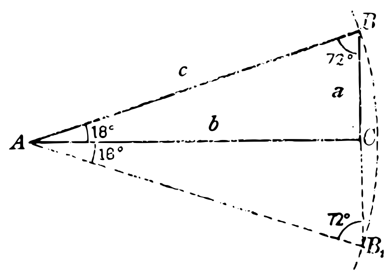
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда отношеніе $\frac{a}{c} = \frac{1}{2} = 0,5$ и отн. $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,87$ съ точн. до $\frac{1}{2}$ сот. съ избыткомъ.

Такимъ образомъ, отношеніе къ гипотенузѣ катета, противолежащаго углу въ 30^0, равно $\frac{1}{2}$, а отношеніе къ ней же катета, противолежащаго углу въ 60^0, равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ **9**. *Задача 3-ья.* Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго $\triangle$-ка равенъ 18^0. Опредѣлить отношеніе каждаго изъ его катетовъ къ гипотенузѣ.

Рѣшеніе. Изъ точки A *(черт. 12)*, какъ изъ центра, опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ AB, и затѣмъ продолжимъ BC до пересѣченія съ этой дугой въ точкѣ B_1. Соединимъ точки A и B_1. Тогда подобно тому, какъ и при рѣшеніи предыдущей задачи, можемъ доказать, что мы получимъ равнобедр. $\triangle$-къ ABB_1, въ которомъ уголъ при вершинѣ равенъ 36^0. Оставляя тѣ же обозначенія сторонъ, какъ при рѣшеніи предыдущей задачи, имѣемъ, что основаніе $\triangle$-ка ABB_1 равно $2a$, а высота $AC = b$ ед. длины. Дуга BB_1 содержитъ 36^0 и потому представляетъ изъ себя 10-ую часть окружности. Значитъ, отрѣзокъ BB_1 можно разсматривать, какъ сторону правильнаго 10-тиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса c ед. длины. Тогда на основаніи извѣстной геометрической формулы:



Черт. 12.

$$a_{10} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}, \text{ пишемъ: } 2a = \frac{c(\sqrt{5} - 1)}{2};$$

$$\text{отсюда } a = c \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \text{ т. е. отн. } \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4};$$

далѣе: $b=\sqrt{c^2-\frac{c^2(\sqrt{5}-1)^2}{16}}=\frac{c}{4}\cdot\sqrt{16-5+2\sqrt{5}-1}=$

$=\frac{c}{4}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, такъ что отношеніе $\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$.

Такимъ образомъ, отношеніе къ гипотенузѣ катета, лежащаго противъ угла въ 18^0, равно $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, а отношеніе къ ней же катета, противолежащаго углу въ 72^0, равно $\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$.

§ **10**. На основаніи выводовъ, сдѣланныхъ изъ рѣшенія разобранныхъ задачъ (§§ 7—9), мы могли бы по гипотенузѣ какого-нибудь прямоугольнаго $\triangle$-ка и по его углу въ 45^0 (или въ 30^0, или въ 60^0, или въ 18^0) опредѣлить каждый изъ его катетовъ; равнымъ образомъ мы могли бы рѣшать и задачи, обратныя разобраннымъ, т. е. по данному катету и по данному углу опредѣлять гипотенузу, а затѣмъ и другой катетъ. Словомъ, при указанныхъ значеніяхъ угловъ мы уже теперь могли бы рѣшать прямоугольные треугольники. Но, конечно, этого мало. Надо умѣть рѣшать и такіе треугольники, у которыхъ углы имѣютъ любые размѣры.

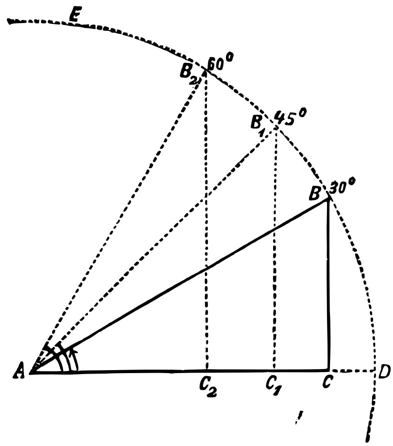
Глава II. **Основныя тригонометрическія величины**.

§ **11**. Возьмемъ прямоуг. $\triangle$ ABC ***(черт. 14)***, у котораго острый уголъ A пусть равенъ вообще α^0*). Изъ предыдущаго мы знаемъ, что если бы въ этомъ треугольникѣ уголъ A равнялся 30^0, то катетъ, лежащій противъ этого угла, равнялся бы половинѣ гипотенузы; другими словами: отношеніе этого катета къ гипотенузѣ было бы равно $1/2$; но если бы уголъ A равнялся 45^0, то отношеніе лежащаго противъ него катета къ гипотенузѣ равнялось бы $\frac{\sqrt{2}}{2}$, при углѣ же A, равномъ 60^0, это отношеніе равнялось бы $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Чтобы нагляднѣе предста-

---

*) α—греческая буква альфа; въ дальнѣйшемъ мы будемъ пользоваться еще нѣкоторыми буквами греческаго алфавита: β—бета, γ—гамма, δ—дельта, ε—эпсилонъ, . . . , μ—ми, ν—ни, π—пи, ρ—ро, σ—сигма, . . . , φ—фи, ψ—пси...

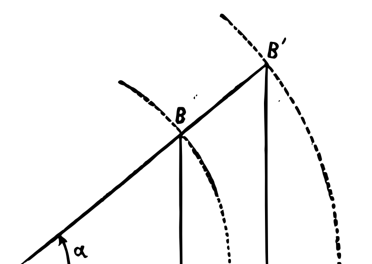
вить себѣ это измѣненіе отношенія катета къ гипотенузѣ при измѣненіи лежащаго противъ него угла *(черт. 13)*, будемъ вращать гипотенузу AB вокругъ конца ея A, оставляя длину ея безъ перемѣны; тогда другой конецъ B гипотенузы будетъ описывать дугу DE; углу α^0, который теперь станетъ центральнымъ, будетъ соотвѣтствовать дуга BD, содержащая тоже α^0 (дуговыхъ); эта дуга также будетъ измѣняться.



Черт. 13.

И вотъ отношеніе $\frac{BC}{AB}$ для каждаго даннаго значенія угла α^0 будетъ величиной вполнѣ опредѣленной: при $\alpha = 30^0$ (*черт. 13*) отнош. $\frac{BC}{AB} = {}^1/_2 = 0{,}5$; при $\alpha = 45^0$ отнош. $\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$ съ точн. до ${}^1/_2$ сотой доли съ избыткомъ; если же $\alpha = 60^0$, то отнош. $\frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}87$ съ точн. до ${}^1/_2$ сотой съ изб. Такимъ образомъ, очевидно, что отношеніе катета, лежащаго противъ угла α^0, къ гипотенузѣ зависитъ отъ размѣровъ угла α^0.

При этомъ оно зависитъ т о л ь к о отъ размѣровъ угла α^0 и не зависитъ, напримѣръ, отъ длины гипотенузы. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ нѣкоторый уголъ DAB *(черт. 14)*; опустимъ изъ какой нибудь точки стороны AB перпендикуляръ BC на сторону AD. Тогда получимъ прямоугольный $\triangle$ ABC, въ которомъ отношеніе катета BC къ гипотенузѣ AB будетъ имѣть нѣкоторое опредѣленное значеніе. Увеличимъ теперь гипотенузу AB до произвольныхъ размѣровъ AB′; тогда катетъ BC, получивъ длину B′C′, также увеличится. Но такъ какъ $\triangle\triangle$ ABC и AB′C′ подобны, то отнош. $\frac{B'C'}{AB'}$ будетъ равно отношенію $\frac{BC}{AB}$, т. е. отношеніе къ гипотенузѣ ка-



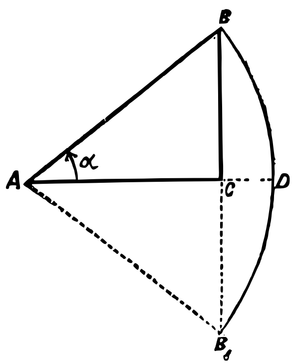
Черт. 14.

тета, лежащаго противъ даннаго угла, при измѣненіи гипотенузы не измѣняется; если же мы измѣнимъ уголъ α, то оба отношенія и $\frac{BC}{AB}$, и $\frac{B'C'}{AB'}$ измѣнятся, но такъ, что равенство между ними не нарушится. Итакъ, отношеніе катета къ гипотенузѣ зависитъ только отъ размѣровъ угла, противолежащаго катету.

Зная же величину отношенія катета къ гипотенузѣ, мы, какъ убѣдились въ этомъ раньше, въ состояніи рѣшать прямоугольные треугольники. Поэтому это отношеніе есть замѣчательная, тригонометрическая, т. е. полезная для рѣшенія треугольниковъ величина. Она называется **синусомъ** угла, при чемъ слова „синусъ угла α^0" замѣняютъ символомъ **sin**α.

§ 12. Происхожденіе слова sinus.

Какъ видно изъ *черт. 15-го,* катетъ BC представляетъ изъ себя половину хорды BB_1, которая, какъ тетива лука, стягиваетъ дугу BDB_1. Отнош. $\frac{BC}{AB} = \sin\alpha$. Слово sinus и употребляютъ въ значеніи „половина тетивы лука" или „полухорда", при чемъ происхожденіе этого термина объясняютъ двояко.



Черт. 15.

Понятіе „синусъ" впервые ввели въ математику индусскіе математики, которые къ этому понятію примѣняли терминъ „ardha-giva" (**половина тетивы лука**). Арабскіе переводчики индусскихъ математиковъ слово „giva" передѣлали въ „giba"; въ арабскомъ же языкѣ гласныя буквы не пишутся, поэтому слово „gb" можно было принять за чисто-арабское слово „gaib", что значитъ заливъ", а этому слову въ латинскомъ языкѣ соотвѣтствуетъ слово sinus. Это-то слово и было впервые употреблено въ XII вѣкѣ для обозначенія вышеуказаннаго тригонометр. отношенія переводчикомъ одного арабскаго трактата.—Другое объясненіе состоитъ въ слѣдующемъ: BC есть **полухорда**; по-латыни половина—semi, а хорда—recta inscripta (вписанная прямая). Отсюда посредствомъ слѣдующихъ сокращеній и получилось слово sinus: semi recta inscripta—semi inscr.—s. ins.—sins—sinus.

§ **13. Sinus.** Итакъ, синусомъ остраго угла прямоугольнаго треугольника назыв. отношеніе противолежащаго этому углу катета къ гипотенузѣ. Такимъ образомъ, **sinus есть отвлеченное число**, показывающее, какую часть гипотенузы составляетъ катетъ. На основаніи же этого опредѣленія **катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на sinus противолежащаго этому катету угла.**

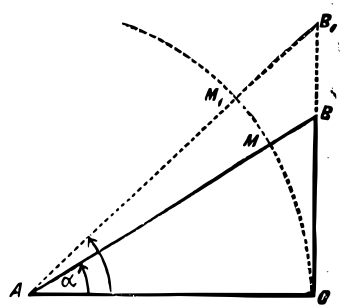
Изъ рѣшенія задачъ, разобранныхъ въ §§ 7, 8 и 9, можемъ составить слѣдующую табличку значеній синуса, которыя полезно запомнить:

Если $\angle \alpha^0 =$	18^0	30^0	45^0	60^0
то $\sin\alpha =$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$ или $\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Примѣчаніе. Изъ разсмотрѣнія этой таблички можно замѣтить между прочимъ, что, если вмѣсто угла въ 30^0 взять уголъ вдвое большій (60^0), то синусъ угла увеличится, но менѣе, чѣмъ вдвое, т. е. что **синусъ не пропорціоналенъ углу.**

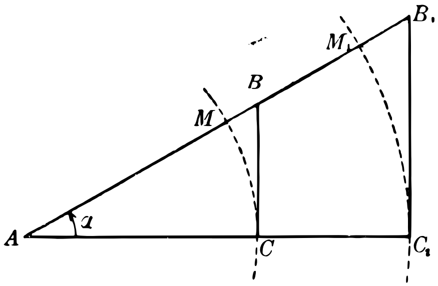
§ **14. Tangens** и **Secans.** Итакъ, зная sinus остраго угла въ прямоугольномъ треугольникѣ, мы можемъ опредѣлять длину противолежащаго этому углу катета по гипотенузѣ. Но этого, конечно, мало: надо умѣть опредѣлять катетъ по катету, а также гипотенузу по катету. А для этого полезно знать отношеніе искомаго катета или искомой гипотенузы къ данному катету. Легко показать, что эти отношенія такъ же, какъ и sinus, зависятъ только отъ размѣровъ остраго угла въ $\triangle$-кѣ.

Такъ, взявъ прямоугольный $\triangle$ ABC *(черт. 16)*, будемъ измѣнять уголъ A, равный, положимъ, α^0; при этомъ длину катета AC будемъ оставлять безъ измѣненія. Чтобы показать это послѣднее, опишемъ изъ вершины угла дугу радіусомъ AC. Тогда этотъ уголъ окажется центральнымъ и будетъ измѣряться дугою CM; катетъ BC окажется касательной къ дугѣ, а гипотенуза AB будетъ пересѣкать дугу. Если уголъ A будетъ измѣняться, то катетъ BC и гипотенуза AB будутъ тоже измѣняться, а потому будутъ измѣняться и ихъ отношенія къ постоянному катету AC. Эти отношенія, значитъ, зависятъ отъ размѣровъ угла.



Черт. 16.

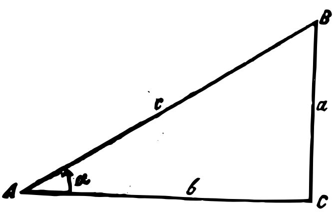
Съ другой стороны, покажемъ, что интересующія насъ отношенія зависятъ только отъ угла, отъ длины же катета AC не зависятъ. Для этого возьмемъ прямоугольный $\triangle$ ABC (*черт. 17)* и увеличимъ его катетъ AC до произвольныхъ размѣровъ AC_1; тогда соотвѣтственно увеличится и другой катетъ, и гипотенуза. При этомъ, на основаніи подобія $\triangle\triangle$-овъ ABC и AB_1C_1



Черт. 17.

отнош. $\frac{B_1C_1}{AC_1} =$ отн. $\frac{BC}{AC}$ и отнош. $\frac{AB_1}{AC_1} =$ отн. $\frac{AB}{AC}$, т. е. отношенія не измѣнились. Итакъ, они зависятъ только отъ размѣровъ угла α^0.

Отношенія эти такъ же, какъ и sinus, принимаются за особыя тригонометрическія величины. Изъ нихъ первое, т. е. отношеніе $\left(\frac{BC}{AC}\right)$ катета, противолежащаго данному углу, къ другому катету назыв. **тангенсомъ***) даннаго угла, а отношеніе $\left(\frac{AB}{AC}\right)$ гипотенузы къ катету, прилежащему къ данному углу, назыв. **секансомъ** *) этого угла Слова „тангенсъ угла α^0" замѣняются символомъ **tg**α, а „секансъ угла α^0"— **sec**α.



Черт. 18.

§ 15. Примѣненіе синуса, тангенса и секанса при рѣшеніи прямоугольныхъ треугольниковъ.

Возьмемъ прямоугольный $\triangle$ ABC, съ острымъ угломъ α^0 при вершинѣ A *(черт. 18)*, и обозначимъ числа, выражающія длины его сторонъ при какой-нибудь одной и той же единицѣ длины, буквами *a*, *b* и *c*. Тогда на основаніи ранѣе выведенныхъ опредѣленій синуса, тангенса и секанса можемъ написать, что

*) По латыни tangens—**касательная**, а secans—**пересѣкающая**.

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \text{отн.}\ \dfrac{a}{c}=\sin\alpha\\[2ex] 2)\ \text{отн.}\ \dfrac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha\\[2ex] 3)\ \text{отн.}\ \dfrac{c}{b}=\sec\alpha\end{array}\right\},\ \text{откуда}\left\{\begin{array}{l}\mathbf{a}=\mathbf{c}\,.\,\mathbf{sin}\alpha\\[2ex] \mathbf{a}=\mathbf{b}\,.\,\mathbf{tg}\alpha\\[2ex] c=b\,.\sec\alpha,\end{array}\right.$$

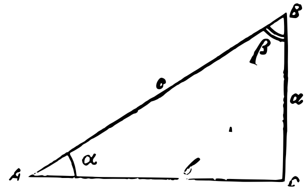
т. е. 1) **Катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на sinus угла, противолежащаго этому катету.**

2) **Катетъ равенъ другому катету, умноженному на tangens угла, противолежащаго первому катету.**

3) Гипотенуза равна катету, умноженному на секансъ угла, прилежащаго къ этому катету.

Глава III. **Тригонометрическія величины дополнительнаго угла.**

§ **16. Cosinus, cotangens и cosecans.** Положимъ, что нужно рѣшить *задачу*: Гипотенуза прямоугольнаго Δ-ка ABC *(черт. 19)* равна c дм., а уголъ $A=\alpha^0$. Опредѣлить катетъ AC, равный, положимъ, b дм.



Черт. 19.

На основаніи первой изъ формулъ § 15 мы можемъ опредѣлить катетъ b по гипотенузѣ, если кромѣ того знаемъ sin угла B, противолежащаго искомому катету. Въ данномъ же случаѣ намъ извѣстенъ уголъ α^0, прилежащій къ нему.

Но зная уголъ α^0, мы можемъ опредѣлить и другой острый уголъ β^0, такъ какъ углы α^0 и β^0 дополняютъ другъ друга до 90^0:

$$\alpha^0+\beta^0=90^0;\ \beta^0=90^0-\alpha^0.$$

Поэтому $b=c\sin(90^0-\alpha)$.

Изъ этого примѣра мы видимъ, что при рѣшеніи Δ-овъ иногда бываетъ нужно вмѣсто тригонометрическихъ величинъ даннаго угла вводить тригоном. величины угла, **дополнительнаго** къ данному, т. е. такого угла, который вмѣстѣ съ даннымъ составляетъ 90^0. Тригонометрическія величины дополнительнаго угла носятъ особыя названія. Именно:

Синусъ угла, дополнительнаго къ данному, принято называть **cosinus**-омъ даннаго угла (символъ—**cos** α).

Тангенсъ дополнит. угла называется **cotangens**-омъ даннаго угла (символъ—**ctg**α).

Секансъ дополн. угла называется **cosecans**-омъ даннаго угла (символъ—**csc**α).

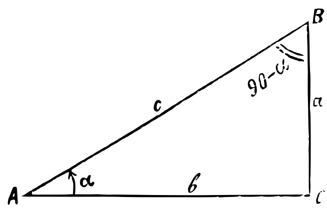
Короче:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(90^0 - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\sec(90^0 - \alpha) = \csc\alpha.$$

Примѣчаніе. Слова cosinus, cotangens и cosecans образовались изъ словъ: **co**mplementi **sinus, co**mplementi **tangens** и **co**mpl. **secans,** что по-латыни означаетъ sin, tg и sec дополненія.

§ **17. Примѣненіе cos-a, ctg-a** и **csc-a къ рѣшенію прямоугольныхъ треугольниковъ.**

Возьмемъ опять прямоуг. $\triangle$ ABC *(черт. 20)*; обозначимъ число градусовъ въ углѣ A буквой α. Тогда уголъ ABC будетъ дополнительнымъ по отношенію къ углу α^0. Примѣняемъ къ $\triangle$ ABC теоремы § 15, считая даннымъ именно этотъ дополнительный уголъ, равный $(90 - \alpha)^0$.



Черт. 20.

Тогда получимъ, что:

1) $b = c \sin(90^0 - \alpha)$; 2) $b = a \operatorname{tg}(90^0 - \alpha)$ и 3) $c = a \sec(90^0 - \alpha)$, откуда на основаніи § 16:

$$1)\ b = c\,.\cos\alpha$$
$$2)\ b = a\,.\operatorname{ctg}\alpha$$
$$\text{и } 3)\ c = a\,.\csc\alpha.$$

Такимъ образомъ, можемъ формулировать слѣдующія три теоремы, аналогичныя теоремамъ § 15:

1) **Катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на cos угла, прилежащаго къ этому катету.**

2) **Катетъ равенъ другому катету, умноженному на ctg угла, прилежащаго къ первому катету.**

3) Гипотенуза равна катету, умноженному на csc угла, противолежащаго этому катету.

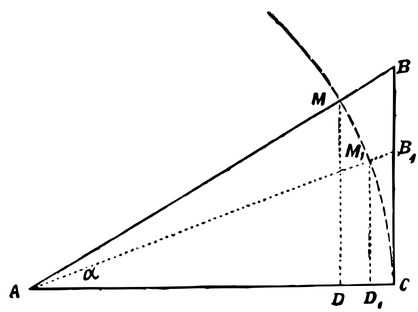
§ **18**. Для лучшаго запоминанія полезно сопоставить теоремы, или формулы предыдущаго §-фа съ формулами § 15. Съ этой цѣлью выпишемъ тѣ и другія формулы въ особую табличку, при чемъ формулъ съ секансомъ и косекансомъ помѣщать въ нее не будемъ, такъ какъ можно обходиться и безъ нихъ.

Табличка формулъ для рѣшенія прямоугольныхъ △-ковъ.
(Буквы соотвѣтствуютъ *чертежу 20*).

$a = c \,.\, \sin\alpha$	$b = c \,.\, \cos\alpha$
$a = b \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha$	$b = a \,.\, \mathrm{ctg}\,\alpha$

Глава IV. **Формулы для вычисленія тригонометрическихъ величинъ даннаго угла по значенію одной изъ нихъ и рѣшеніе простѣйшихъ тригоном. уравненій.**

§ **19. Наглядное представленіе синуса, тангенса секанса.** Возьмемъ какой-нибудь острый уголъ MAC, равный, положимъ, α^0 *(черт. 21)*; опишемъ изъ его вершины, какъ изъ центра, произвольнымъ радіусомъ дугу CM. Затѣмъ предположимъ, что при измѣненіи угла радіусъ AC будетъ неподвижнымъ, а радіусъ AM — подвижнымъ, такъ что точку C можно назвать началомъ дуги, измѣряющей данный уголъ, а точку M—ея концомъ. Опустимъ изъ конца дуги, измѣряющей данный уголъ, перпендикуляръ на неподвижный радіусъ. Тогда изъ △ AMD



Черт. 21.

$$\text{отношеніе } \frac{MD}{AM} = \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}.$$

Далѣе, черезъ начало дуги проведемъ касательную CB до пересѣченія съ продолженіемъ подвижнаго радіуса. Тогда изъ △ ABC

$$\text{отнош. } \frac{BC}{AC} = \mathrm{tg}\,\alpha \text{ и отнош. } \frac{AB}{AC} = \sec\alpha \quad \ldots\ldots \text{(II)}.$$

Въ трехъ взятыхъ нами отношеніяхъ (I) и (II) послѣдующіе члены AM и AC равны между собой, какъ радіусы, а такъ какъ при измѣненіи угла они остаются постоянными, то значеніе каждаго отношенія будетъ зависѣть только отъ размѣровъ соотвѣтствующаго предыдущаго члена: MD, BC и AB.

Извѣстно, далѣе, что отношеніемъ между двумя отрѣзками прямой линіи называется число, выражающее длину перваго (предыдущаго) отрѣзка, если за единицу длины принятъ второй (послѣдующій). Поэтому, если за единицу длины при измѣреніи отрѣзковъ MD, BC и AB принять радіусъ дуги AM или AC, то длина MD будетъ выражаться числомъ $\sin\alpha$, длина BC—числомъ $\operatorname{tg}\alpha$, а длина AB—числомъ $\sec\alpha$.

Поэтому длина перпендикуляра MD можетъ наглядно представлять намъ значеніе $\sin\alpha$, значеніе же $\operatorname{tg}\alpha$ можетъ представляться въ видѣ отрѣзка касательной BC, а $\sec\alpha$—въ видѣ отрѣзка AB, пересѣкающаго дугу CM. Отъ такого нагляднаго представленія тригоном. величинъ произошли и самыя названія ихъ: слово sinus употребляется въ смыслѣ полухорда, tangens значитъ касательная, а secans—пересѣкающая (§§ 12 и 14).

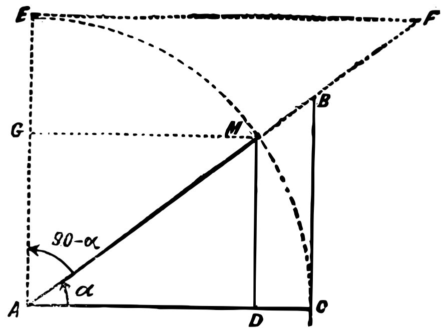
Отрѣзки MD, BC и AB, которые наглядно представляютъ намъ значенія тригонометрическихъ величинъ, называются тригонометрическими линіями; изъ нихъ MD называется линіей синуса угла α, BC—линіей тангенса, а AB—линіей секанса.

При изученіи свойствъ тригоном. величинъ для облегченія можно вмѣсто самыхъ величинъ разсматривать соотвѣтствующія имъ тригонометрическія линіи. Напримѣръ, изъ *чертежа 21* видимъ, что при уменьшеніи угла α^0 линіи MD, BC и AB уменьшаются, и отсюда заключаемъ, что при уменьшеніи остраго угла sin, tg и sec этого угла также уменьшаются. Также видимъ, что $MD < BC < AB$, и отсюда выводимъ, что для каждаго остраго угла α^0 $\sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha < \sec\alpha$.

Но и при такомъ, наглядномъ представленіи тригоном. величинъ все-таки не надо забывать того, что, напримѣръ, синусомъ угла α^0 будетъ не перпендикуляръ MD, а отношеніе его къ радіусу дуги AM, т. е. синусомъ будетъ отвлеченное число выражающее длину MD, если при этомъ длина радіуса AM выражается 1 (единицей).

§ **20. Наглядное представленіе косинуса, котангенса и косеканса.** Какъ извѣстно (§ 16), косинусомъ, котангенсомъ и косекансомъ даннаго угла называются соотвѣтственно синусъ, тангенсъ и секансъ его дополнительнаго угла. Поэтому прежде всего построимъ уголъ, дополнительный къ данному.

Если данъ уголъ CAB, равный α^0 *(черт. 22)*, то для того, чтобы получить его дополнительный уголъ, достаточно изъ вершины A возставить къ AC перпендикуляръ AE; тогда $\angle$ BAE будетъ дополнительнымъ для даннаго угла α^0. Опишемъ изъ его вершины A, какъ изъ центра, произвольнымъ радіусомъ дугу EC. Если будемъ измѣнять данный уголъ, то будетъ измѣняться и дополнительный уголъ; при этомъ неподвижнымъ радіусомъ его будетъ AE, а подвижнымъ AM; одинъ изъ концовъ дополнительной дуги ME, именно E, будетъ неподвижнымъ, а другой M—подвижнымъ.



Черт. 22.

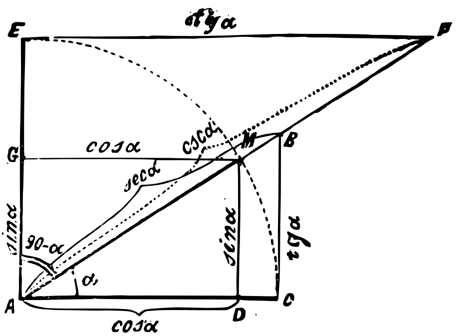
Построимъ линіи синуса, тангенса и секанса для дополнительнаго угла такъ же, какъ мы строили эти линіи для даннаго угла. Для этого опустимъ изъ конца M подвижнаго радіуса перпендикуляръ MG на неподвижный радіусъ AE и черезъ конецъ E неподвижнаго радіуса проведемъ касательную EF до пересѣченія съ продолженіемъ подвижнаго радіуса въ точкѣ F. Тогда отношеніе $\frac{MG}{AM}$ будетъ синусомъ дополнительнаго угла $(90^0—\alpha)$, или cosinus-омъ даннаго угла α^0, а отношеніе $\frac{EF}{AE}$ будетъ котангенсомъ угла α^0, отношеніе же $\frac{AF}{AE}$—косекансомъ α^0.

Если уголъ α^0 будетъ измѣняться, то длины отрѣзковъ MG, EF и AF также будутъ измѣняться и при этомъ будутъ наглядно представлять намъ измѣненіе значеній косинуса, котангенса и косеканса угла α^0. Поэтому эти отрѣзки можно называть, соотвѣтственно, *линіями косинуса**), *котангенса* и *косеканса* угла α^0.

§ **21. Формулы соотношенія между тригонометрическими величинами одного и того же угла**. Мы уже знаемъ значеніе синуса нѣкоторыхъ угловъ, именно угловъ въ 18^0, 30, 45 и 60^0 (§ 13). Теперь займемся вопросомъ о томъ, какъ вычислять значенія остальныхъ тригонометрическихъ величинъ. А для этого выведемъ, такъ назыв., формулы соотношенія между тригонометрическими величинами одного и того же угла, т. е. такія формулы, при по-

*) Вмѣсто отрѣзка GM линіей косинуса угла α можно считать равный ему отрѣзокъ AD, представляющій изъ себя проекцію подвижнаго радіуса AM на неподвижный радіусъ AC.

моіци которыхъ по значенію одной изъ 6-ти тригон. величинъ даннаго угла мы могли бы выразить и значенія остальныхъ 5-ти величинъ. А для этого достаточно вывести 5 самостоятельныхъ формулъ, такъ какъ для опредѣленія 5-ти неизвѣстныхъ достаточно имѣть столько же уравненій.



Длина радіусовъ AC, AM и AE выражается 1-ей.
Черт. 23.

Возьмемъ какой-нибудь острый уголъ α^0 и построимъ всѣ его тригонометрическія линіи *(черт. 23)* (§§ 19 и 20). Тогда отн. $\frac{MD}{AM} = \sin\alpha$; отн. $\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha$; отн. $\frac{AB}{AC} = \sec\alpha$; отн. $\frac{GM}{AM} =$ отн. $\frac{AD}{AM} = \cos\alpha$; отн. $\frac{EF}{AE} = \operatorname{ctg}\alpha$ и отн. $\frac{AF}{AE} = \csc\alpha$.

Такимъ образомъ, если за единицу длины взять радіусъ дуги, то

длина AC или AM и AE будетъ выражаться числомъ 1,
„ MD или AG . . . . „ $\sin\alpha$
„ GM или AD . . . . „ $\cos\alpha$
„ BC . . . . „ $\operatorname{tg}\alpha$
„ AB . . . . „ $\sec\alpha$
„ EF . . . . „ $\operatorname{ctg}\alpha$
„ AF . . . . „ $\csc\alpha$.

Возьмемъ $\triangle$ AMD и изъ него по теоремѣ Пиѳагора получимъ: $MD^2 + AD^2 = AM^2$, откуда, замѣняя линіи числами, которыя выражаютъ ихъ длины, измѣренныя радіусомъ дуги, имѣемъ:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1^2 \text{ или } \mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (\mathrm{I})$$

Изъ подобія $\triangle\triangle$ ABC и AMD имѣемъ $\frac{BC}{AC} = \frac{MD}{AD}$, или $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, откуда

$$\mathbf{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\mathrm{II})$$

Изъ подобія же $\triangle\triangle$ AEF и AGM имѣемъ: $\frac{EF}{AE} = \frac{GM}{AG}$, или

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \text{откуда:}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Изъ подобія $\triangle\triangle$ ABC и AMD еще имѣемъ: $\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AD}$, или

$$\frac{\sec\alpha}{1}=\frac{1}{\cos\alpha},\ \text{откуда}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

Наконецъ, изъ подобія $\triangle\triangle$ AEF и AGM еще имѣемъ: $\frac{AF}{AE}=$ $=\frac{AM}{AG}$, или $\frac{\csc\alpha}{1}=\frac{1}{\sin\alpha}$, откуда

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

Выведенныхъ 5 формулъ вполнѣ достаточно для того, чтобы по значенію одной тригон. величины угла вычислять значенія остальныхъ пяти. Напр., зная, что $\operatorname{tg} 60^0=\sqrt{3}$, опредѣлимъ значенія остальныхъ величинъ:

$$\operatorname{tg} 60^0=\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} 60^0=\frac{\sin 60^0}{\cos 60^0}=\frac{\sin 60^0}{\sqrt{1-\sin^2 60^0}}\ \text{(по II и I форм.).}$$

Поэтому имѣемъ ур-іе съ однимъ неизвѣстнымъ $\sin 60^0$:

$$\frac{\sin 60^0}{\sqrt{1-\sin^2 60^0}}=\sqrt{3}.$$

Возвышая обѣ его части въ квадратъ, освобождая ихъ отъ знаменателя и перенося всѣ неизвѣстные члены въ одну часть, получимъ:

$$\sin^2 60+3\sin^2 60^0=3;\ 4\sin^2 60^0=3;\ \sin^2 60^0=\frac{3}{4},$$

откуда $\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Передъ корнемъ беремъ только $+$).

Далѣе $\cos 60^0=\sqrt{1-\sin^2 60^0}=\sqrt{1-{}^3/_4}=\frac{1}{2};$

$$\operatorname{ctg} 60=\frac{\cos 60^0}{\sin 60^0}=\frac{1.2}{2.\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sec 60^0=\frac{1}{\cos 60^0}=2;$$

$$\csc 60^0 = \frac{1}{\sin 60^0} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

§ **22**. Изъ того же чертежа легко вывести еще нѣсколько формулъ соотношенія для опредѣленія tg, ctg, sec и csc не только по sin и cos, какъ раньше, но и для опредѣленія каждой изъ этихъ четырехъ величинъ (tg, ctg, sec и csc) по значенію одной изъ нихъ. Такъ, изъ прямоуг. △ ABC *(черт. 24)* имѣемъ:

$$\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha \quad \ldots \ldots \quad (VI)$$

а изъ △ AEF:

$$\csc^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha \quad \ldots \ldots \quad (VII)$$

Изъ подобія же △△ AEF и ABC: $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ или

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (VIII).$$

Но легко обнаружить, что эти 3 формулы представляютъ изъ себя необходимыя слѣдствія первыхъ 5 формулъ. Такъ, раздѣливъ обѣ части I формулы на $\cos^2\alpha$, мы получимъ:

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, откуда на основаніи форм. II и IV мѣемъ формулу VI послѣ перестановки только членовъ. Точно такъ же, раздѣливъ обѣ части I формулы на $\sin^2\alpha$, на основаніи формулъ III и V, получимъ формулу VII.

Перемноживъ же почленно формулы II и III, имѣемъ:

$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$, откуда получимъ формулу VIII.

Всѣ выведенныя въ послѣднихъ двухъ §§-ахъ формулы необходимо запомнить, поэтому составимъ изъ нихъ табличку.

§ 23. Табличка формулъ соотношенія *)

I. $\operatorname{Sin}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

II. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$	III. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$
IV. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$	V. $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$
VI. $\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha.$	VII. $\csc^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha.$

VIII. $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{ctg}\alpha = 1.$

*) Для лучшаго запоминанія этихъ формулъ надо прежде всего научиться возможно быстрѣе выводить ихъ прямо изъ чертежа 23. Такъ, изъ подобія △-овъ ABC и AMD прямо писать: $\frac{\sec\alpha}{1} = \frac{1}{\cos\alpha}$ и $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и т. п.

§ **24**. Изъ разсмотрѣнія формулъ соотношенія легко замѣтить, что $\operatorname{ctg}\alpha$ равенъ обратной дроби тангенса α и наоборотъ: tg равенъ обратной дроби ctg-a; точно также $\sec\alpha$ равенъ обратной дроби $\cos\alpha$, а $\csc\alpha$ равенъ обратной дроби $\sin\alpha$, и наоборотъ. Поэтому, если, напримѣръ, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, то $\sec\alpha = \frac{3}{2}$; если $\csc\alpha = \frac{6}{5}$, то $\sin\alpha = \frac{5}{6}$ и т. п. На этомъ основаніи мы всякому дробному тригонометрич. выраженію можемъ придать цѣлый видъ. Напримѣръ, можемъ написать, что

$$\frac{a\,.\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta\,\sin\gamma} = a\operatorname{tg}\alpha\,.\frac{1}{\cos\beta}\,.\frac{1}{\sin\gamma} = a\operatorname{tg}\alpha\sec\beta\,\csc\gamma.$$

Удобно же это преобразованіе тѣмъ, что позволяетъ замѣнять дѣленіе болѣе легкимъ дѣйствіемъ, умноженіемъ.

Обыкновенно при рѣшеніи $\triangle\triangle$-овъ пользуются только синусомъ, косинусомъ, тангенсомъ и котангенсомъ; секансъ же и косекансъ употребляются почти исключительно лишь при вышеуказанномъ приведеніи тригоном. выраженій къ цѣлому виду.

§ **25**. **Формулы приведенія къ дополнительному углу**. Кромѣ формулъ соотношенія при вычисленіи тригоном. величинъ можно пользоваться еще, такъ называемыми, формулами приведенія къ дополнительному углу, позволяющими замѣнять тригоном. величины большого остраго угла соотвѣтствующими величинами меньшаго, дополнительнаго угла.

Мы уже знаемъ равенства § 16:

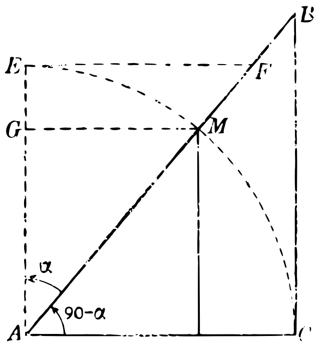
$$\left.\begin{aligned} \sin(90^0-\alpha) &= \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(90^0-\alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha \\ \sec(90^0-\alpha) &= \csc\alpha \end{aligned}\right\} \quad .\ (\mathrm{A}).$$

Эти равенства были приняты нами, какъ о п р е д ѣ л е н і я косинуса, котангенса и косеканса даннаго угла α^0. Но ими можно пользоваться и какъ формулами приведенія къ дополнительному углу. Такъ, на основаніи ихъ:

$$\operatorname{tg}87^0 = \operatorname{ctg}(90^0-87^0) = \operatorname{ctg}3^0;\ \sec 48^0 = \csc(90^0-48^0) = \csc 42^0.$$

Выведемъ еще 3 подобныхъ формулы для остальныхъ трехъ тригоном. величинъ.

Углы α^0 и $(90-\alpha)^0$ дополняютъ до 90^0 другъ друга взаимно. Поэтому, если уголъ $(90-\alpha)^0$ считать даннымъ угломъ, то его дополнительнымъ будетъ α^0 *(черт. 24)*, а тогда на основаніи опредѣленій § 16, имѣемъ:



Черт. 24.

$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90^0 - \alpha)$$
$$\sec\alpha = \csc(90^0 - \alpha)$$

Если же эти равенства читать справа налѣво, то получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\cos(90^0 - \alpha) &= \sin\alpha\\ \operatorname{ctg}(90^0 - \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha\\ \csc(90^0 - \alpha) &= \sec\alpha\end{aligned}\right\} \ldots (B).$$

Формулы (A) и (B) и называются формулами приведенія къ дополнительному углу. Составимъ изъ нихъ табличку:

Формулы приведенія къ дополнит. углу.

$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$
$\operatorname{tg}(90^0 - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(90^0 - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
$\sec(90^0 - \alpha) = \csc\alpha$	$\csc(90^0 - \alpha) = \sec\alpha$

§ **26**. Примѣнимъ теперь формулы соотношеній (§ 23) и формулы приведенія къ дополнительному углу (§ 25) къ вычисленію значеній тригонометрическихъ величинъ угловъ въ 18^0, 30, 45 и 60^0, для которыхъ мы уже знаемъ значеніе синуса (§ 13), а также и для угла въ 72^0, какъ дополнительнаго къ 18^0. Приближенныя значенія будемъ вычислять съ точностью до $\frac{1}{2}$ сотой доли.

I. Мы знаемъ, что $\sin 30^0 = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (см. § 13).

Поэтому на основаніи формулы I § 23:

$$\cos 30^0 = \sqrt{1 - \sin^2 30^0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}87$$ съ точностью до $\frac{1}{2}$ сотой доли, съ избыткомъ.

На основаніи II формулы:

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{1\,.\,2}{2\,.\,\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58$$ съ избыткомъ.

По формулѣ III:

$$\operatorname{ctg} 30^0 = \frac{\cos 30^0}{\sin 30^0} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 1} = \sqrt{3} = 1{,}73 \text{ съ недостаткомъ.}$$

По формулѣ IV:

$$\sec 30^0 = \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{12}}{3} = 1{,}15 \text{ съ недост.}$$

По формулѣ V:

$$\csc 30^0 = \frac{1}{\sin 30^0} = 2.$$

II. $\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$ съ избытк. (§ 13).

$\cos 45^0 = \cos (90 - 45)^0 = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$ съ избытк.

$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{\sin 45^0}{\cos 45^0} = 1.$

$\operatorname{ctg} 45^0 = \operatorname{tg} 45^0 = 1.$

$\sec 45^0 = \frac{1}{\cos 45^0} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1{,}41$ съ недост.

$\csc 45^0 = \sec 45^0 = \sqrt{2} = 1{,}41$ съ недостат.

III. $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}87$ съ избытк. (§ 13).

$\cos 60^0 = \sin (90 - 60)^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

$\operatorname{tg} 60^0 = \operatorname{ctg} 30^0 = \sqrt{3} = 1{,}73$ съ недостат.

$\operatorname{ctg} 60^0 = \operatorname{tg} 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58$ съ избытк.

$\sec 60^0 = \frac{1}{\cos 60^0} = 2.$

$\csc 60^0 = \frac{1}{\sin 60^0} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}15$ съ недост.

IV. $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 0{,}31$ съ избытк. (§ 13).

$$\cos 18^0 = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 + \sqrt{20}}}{4} = \frac{\sqrt{14{,}4721}\,^{*)}}{4} = 0{,}95$$

съ недостаткомъ.

---

*) Чтобы корень квадратный былъ извлеченъ съ точностью до $\frac{1}{100}$, подкоренное количество должно быть вычислено съ точностью до $\frac{1}{10000}$.

$$\operatorname{tg} 18^0 = \frac{\sin 18^0}{\cos 18^0} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+\sqrt{20}}} = \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+\sqrt{20}}}{2(5+\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)(5-\sqrt{5})\sqrt{10+\sqrt{20}}}{40} = \frac{(\sqrt{45}-5)\sqrt{10+\sqrt{20}}}{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{450+45\sqrt{20}}-5\sqrt{10+\sqrt{20}}}{20} = \frac{\sqrt{450+\sqrt{40500}}}{20} -$$

$$\frac{\sqrt{250+\sqrt{12500}}}{20} = \frac{\sqrt{450+201{,}2461}-\sqrt{250+111{,}8033}}{20} =$$

$$= \frac{25{,}51-19{,}03}{20} = 0{,}32 \text{ съ недост.}$$

$$\operatorname{ctg} 18^0 = \frac{\sqrt{10+\sqrt{20}}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{10+\sqrt{20}}(\sqrt{5}+1)}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{50+\sqrt{500}}+\sqrt{10+\sqrt{20}}}{4} = \frac{\sqrt{72{,}3606}+\sqrt{14{,}4721}}{4} =$$

$$= \frac{8{,}50+3{,}80}{4} = 3{,}08 \text{ съ избытк.}$$

Подобнымъ образомъ вычислимъ и $\sec 18^0$ и $\csc 18^0$.

$$\sec 18^0 = 1{,}05 \text{ съ нед.}$$
$$\csc 18^0 = 3{,}24 \text{ съ изб.}$$

V. $\sin 72^0 = \cos 18^0 = 0{,}95$ съ нед.
$\cos 72^0 = \sin 18^0 = 0{,}31$ съ изб.
и т. д.

§ **27.** Изъ результатовъ нашихъ вычисленій составимъ табличку для того, чтобы при рѣшеніи задачъ удобнѣе было отыскивать численныя значенія тригон. величинъ.

При составленіи этой таблички нѣтъ необходимости писать особую строчку для значеній тригоном. величинъ угловъ въ 60^0 и 72^0 (т. е. угловъ большихъ $\frac{1}{2}$ прямого угла), такъ какъ тригон. величины этихъ угловъ могутъ быть замѣнены соотвѣтствующими величинами ихъ дополнительныхъ угловъ, въ 30^0 и 18^0. Напримѣръ, $\sin 60^0 = \cos 30^0$; $\operatorname{ctg} 72^0 = \operatorname{tg} 18^0$.

Далѣе, такъ какъ sin съ csc, tg съ ctg и cos съ sec представляютъ изъ себя отношенія взаимно обратныя, то они для облегченія вычисленій могутъ быть надлежащимъ образомъ замѣняемы одно другимъ (см. § 24). Поэтому ихъ значенія будемъ попарно помѣщать въ сосѣдніе столбики.

Тогда табличка можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

0	sin	csc	tg	ctg	sec	cos	0
18^0	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5}+1$				$\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$	72^0
30^0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	60^0
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	45^0
0	cos	sec	ctg	tg	csc	sin	0

или въ такомъ:

0	sin	csc	tg	ctg	sec	cos	0
18^0	0,31.	3,24.	0,32	3,08.	1,05	0,95	72^0
30^0	0,5	2	0,58.	1,73	1,15	0,87.	60^0
45^0	0,71.	1,41	1	1	1,41	0,71.	45^0
0	cos	sec	ctg	tg	csc	sin	0

Примѣчаніе. Численныя значенія этой таблицы, взятыя съ избыткомъ, т. е. превышающія истинныя, отмѣчены точками на концѣ*).

Такимъ образомъ, каждое изъ помѣщенныхъ въ этихъ табличкахъ чиселъ представляетъ изъ себя значеніе двухъ тригоном. величинъ и для двухъ угловъ: 1) для угла, не превышающаго 45^0 и 2) для угла дополнительнаго, большаго 45^0. Такъ, $3{,}08 = \mathrm{ctg}\,18^0$ или $\mathrm{tg}\,72^0$; $1{,}73 = \mathrm{tg}\,60^0$ или $\mathrm{ctg}\,30^0$ и т. п.

*) Это мы дѣлаемъ для того, чтобы можно было находить предѣлъ погрѣшности, допускаемой въ вычисленіяхъ при помощи нашей таблички, такимъ способомъ, какъ это показано у насъ на примѣрахъ далѣе (въ § 28).

Для нахожденія значенія какой-нибудь тригонометрич. величины угла, бо́льшаго 45^0, достаточно, найдя число градусовъ угла въ правомъ крайнемъ столбцѣ, названіе величины искать въ нижней, а не въ верхней строчкѣ. Такъ, во 2-ой табличкѣ $\sin 72^0 = 0{,}95$; $\operatorname{tg} 60^0 = 1{,}73$ и т. п.

Въ этихъ табличкахъ, значитъ, можно найти значеніе всѣхъ тригоном. величинъ для угловъ въ 18^0, 30^0, 45^0, 60 и 72^0, при чемъ первая даетъ точныя значенія тригоном. величинъ (или выраженія точныхъ значеній посредствомъ радикаловъ), а вторая—приближенныя, съ точностью до $\frac{1}{2}$ сотой доли или съ недостаткомъ, или съ избыткомъ.

Пользуясь этими табличками, можемъ рѣшать и обратныя задачи, т. е. опредѣлять въ частныхъ случаяхъ число градусовъ угла по значенію какой-нибудь изъ его тригоном. величинъ. Такъ, напримѣръ, если $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, то по 1-ой табличкѣ $\varphi^0 = 18^0$; если $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, то $\varphi^0 = 60^0$; если $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $\varphi^0 = 30^0$ и т. п.; если $\cos\varphi = 0{,}31$, то по 2-ой табличкѣ $\varphi^0 = 72^0$; если $\operatorname{ctg}\varphi = 0{,}58$, то $\varphi^0 = 60^0$ и т. п.

§ **28**. Теперь покажемъ, какъ пользоваться этими табличками при рѣшеніи задачъ, при чемъ будемъ обращать вниманіе и на то, съ какой точностью вычисляются на основаніи данныхъ 2-ой таблички искомые результаты.

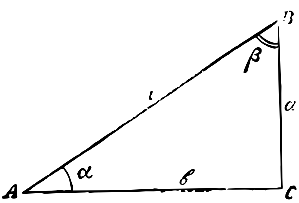


Рис. 25.

Задача I. Въ прямоугольномъ $\triangle$ ABC (*черт. 25*) катетъ $AC = b$ дм. $= 48$ дм. и $\angle A = \alpha^0 = 60^0$. Опредѣлить длину катета $BC = a$ дм.

Рѣш. $a = b\operatorname{tg}\alpha = 48 \,.\, 1{,}73 = 83{,}04$, т. е. катетъ $BC = 83{,}04$ дюйма. Но по табличкѣ $\operatorname{tg} 60^0 = 1{,}73$ съ точностью до $\frac{1}{2}$ сотой доли съ недостаткомъ, т. е.

$$\operatorname{tg} 60^0 > 1{,}73, \text{ но } < 1{,}735, \text{ или } 1{,}73 < \operatorname{tg} 60^0 < 1{,}735.$$

Поэтому для a имѣемъ два предѣла:

$$48 \,.\, 1{,}73 < a < 48 \,.\, 1{,}735$$
$$\text{или} \quad 83{,}04 < a < 83{,}28^*),$$

---

*) Читать подобныя сложныя неравенства надо со средины: „a съ одной стороны больше 83,04, а съ другой меньше 83,28“.

т. е. истинное значеніе a содержится между числами 83,04 и 83,28. А такъ какъ разность между этими предѣлами равна 0,24, то мы можемъ утверждать, что найденное, приближенное значеніе катета BC (83,04 дм.) меньше истиннаго на число, во всякомъ случаѣ меньшее 0,24 дм. Значитъ въ найденномъ результатѣ цыфра десятковъ и цыфра единицъ (8 и 3) вѣрны, а для того, чтобы говорить о томъ, вѣрны ли или невѣрны остальныя цыфры, достаточныхъ основаній у насъ нѣтъ.

Задача II. Въ прямоугольномъ $\triangle$-кѣ ABC катетъ BC $= a$ саж. $=$ $= 253$ саж. и $\angle B = \beta^0 = 72^0$. Опредѣлить длину гипотенузы AB, равную, положимъ, c саж.

Рѣш. $a = c \cos \beta$, откуда $c = \frac{a}{\cos \beta}$; желая же замѣнить дѣленіе умноженіемъ, пишемъ, что

$$c = a \,.\, \sec \beta = 253 \,.\, \sec \; 72^0$$
$$c = 253 \,.\, 3{,}24 = 819{,}72,$$

т. е гипотенуза $AB = 819{,}72$ саж.

Но $\sec 72^0 = 3{,}24$ съ точностью до $\frac{1}{2}$ сотой доли съ избыткомъ, т. е.

$$3{,}235 < \sec 72^0 < 3{,}24.$$

Поэтому $\qquad 253 \,.\, 3{,}235 < c < 253 \,.\, 3{,}24$

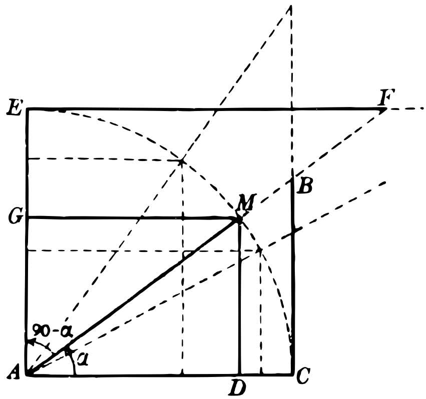
или $\qquad 818{,}455 < c < 819{,}72.$

Разность между предѣлами c равна $819{,}72 - 818{,}455 = 1{,}265$. Значитъ истинное значеніе c менѣе найденнаго (819,72) на число меньшее 1,265.

Такимъ образомъ, въ полученномъ приближенномъ значеніи c цыфры сотенъ и десятковъ (8 и 1) вѣрны, а объ остальныхъ цыфрахъ этого утверждать нельзя.

§ 29. Измѣненіе значеній тригонометрическихъ величинъ при измѣненіи угла отъ 0 до 90⁰. Показавъ, хотя и на частныхъ примѣрахъ, возможность вычисленія значеній всѣхъ тригоном. величинъ даннаго угла, обратимъ вниманіе на то, какія вообще значенія можетъ принимать та или другая тригоном. величина и въ какой вообще зависимости онѣ находятся отъ даннаго угла.

Взявъ уголъ α^0 *(черт. 26)* и всѣ его тригонометрич. линіи, начнемъ мысленно уменьшать этотъ уголъ. Тогда увидимъ, что линіи синуса, тангенса и секанса угла α^0 будутъ тоже уменьшаться и, когда подвижный радіусъ угла совпадетъ съ неподвижнымъ, то угла между ними уже не будетъ, линіи $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ обратятся въ точку C, линія же $\sec \alpha$ сольется съ радіусомъ AC. Отсюда видно, что если уголъ α^0 будетъ неограниченно уменьшаться, т. е. будетъ имѣть своимъ предѣломъ 0 (нуль), то $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ будутъ также приближаться къ 0, какъ къ своему предѣлу, предѣломъ же $\sec\alpha$ будетъ служить 1. Это можно записать слѣдующимъ образомъ:



Черт. 26.

$$\text{если } \alpha \to 0,$$

$$\text{то } \sin\alpha \to 0;\ \operatorname{tg}\alpha \to 0, \text{ а } \sec\alpha \to 1,$$

при чемъ стрѣлка $\to$ замѣняетъ слова „стремится къ (тому то), какъ къ своему предѣлу“.

Если же уголъ α^0 станетъ увеличиваться, то $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\sec\alpha$ тоже будутъ увеличиваться, и когда уголъ α^0 станетъ прямымъ, то линія синуса сольется съ радіусомъ EA. При этомъ подвижный радіусъ станетъ параллеленъ касательной CB и потому не будетъ пересѣкать ея; точки ихъ пересѣченія, значитъ, не будетъ. Но такъ какъ эта точка пересѣченія B по мѣрѣ увеличенія остраго угла α^0 удалялась все болѣе и болѣе, то о ней можно сказать, что, когда уголъ α сталъ прямымъ, она удалилась въ безконечность. Итакъ, если острый уголъ α^0 приближается къ равенству съ прямымъ угломъ, то значеніе $\sin\alpha$ приближается къ 1, а $\operatorname{tg}\alpha$ и $\sec\alpha$ увеличиваются безпредѣльно, и потому можно написать:

$$\text{если } \alpha \to 90^0,$$

$$\text{то } \sin\alpha \to 1;\ \operatorname{tg}\alpha \to \infty \text{ и } \sec\alpha \to \infty\ {}^{*)}.$$

Такимъ образомъ, видимъ, что при измѣненіи угла α въ предѣлахъ отъ 0 до 90° $\sin\alpha$ можетъ измѣняться въ предѣлахъ отъ 0 до 1, $\operatorname{tg}\alpha$ — въ предѣлахъ отъ 0 до ∞, а $\sec\alpha$ — въ предѣлахъ отъ 1 до ∞, т. е. **$\sin\alpha$ не можетъ быть больше 1, $\operatorname{tg}\alpha$ можетъ равняться какому-угодно числу, а sec a не можетъ быть меньше 1.**

Cos, ctg и csc даннаго угла суть соотвѣтственно sin, tg и sec его дополнительнаго угла, дополнительный же уголъ при увеличеніи даннаго угла уменьшается. Поэтому при увеличеніи даннаго угла α отъ 0 до 90° $\cos\alpha$ будетъ уменьшаться отъ 1 до 0, $\operatorname{ctg}\alpha$ будетъ уменьшаться отъ ∞ до 0, а $\csc\alpha$ отъ ∞ до 1; отсюда видно, что **$\cos\alpha$ не можетъ быть больше 1, $\operatorname{ctg}\alpha$ можетъ равняться какому-угодно числу, а $\csc\alpha$ не можетъ быть меньше 1.**

*) ∞ — символъ безконечности.

§ **30. Понятіе о рѣшеніи простѣйшихъ тригонометрич. уравненій.** Тригонометрическими уравненіями называются такія уравненія, въ которыхъ искомыми неизвѣстными служатъ углы, входящіе подъ знакомъ одной или нѣсколькихъ тригонометрическихъ величинъ. Вотъ примѣры такихъ уравненій:

$$\cos^2\varphi + 3\sin\varphi - 3 = 0$$
$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi = 2\sec\varphi,$$

гдѣ уголъ φ^0 — искомый.

При рѣшеніи тригонометрич. уравненій надо стараться свести его къ опредѣленію значенія какой-либо одной изъ тригонометрическихъ величинъ искомаго угла. Съ этой цѣлью чаще всего приходится всѣ входящія въ уравненіе тригоном. величины искомаго угла выражать черезъ одну изъ нихъ, пользуясь для этого формулами соотношенія.

Примѣръ 1-ый. Рѣшить ур-іе

$$\cos^2\varphi + 3\sin\varphi - 3 = 0.$$

Исключимъ $\cos^2\varphi$, представивъ его въ видѣ $1 - \sin^2\varphi$. (Можно было бы исключить $\sin\varphi$, выразивъ его въ видѣ $\sqrt{1-\cos^2\varphi}$, но это, конечно, не такъ удобно, такъ какъ послѣ этого придется ур-іе освобождать отъ радикала).

$$1 - \sin^2\varphi + 3\sin\varphi - 3 = 0.$$
$$\sin^2\varphi - 3\sin\varphi + 2 = 0.$$

Обозначимъ $\sin\varphi$ черезъ x; тогда получимъ квадратное ур-іе:

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

откуда $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$, такъ что $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

Значитъ, 1) $\sin\varphi = 1$ и потому $\varphi = 90^0$

и 2) $\sin\varphi = 2$, а это невозможно (§ 29).

Итакъ, искомый уголъ — прямой.

Примѣръ 2-ой. $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi = 2\sec\varphi$.

Выразимъ всѣ тригоном. величины черезъ sin и $\cos\varphi$.

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2}{\cos\varphi}.$$

Освобождая уравненіе отъ дробныхъ членовъ, имѣемъ:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 2\sin\varphi$$
$$1 = 2\sin\varphi,$$

откуда $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, такъ что $\varphi = 30^0$.

Глава V. **Таблица натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ.**

§ **31**. Учащіеся уже сами, конечно, нашли значенія sinus-a для нѣкоторыхъ угловъ, именно для угловъ въ 18°, 30, 45, 60 и 72°, и по нимъ вычисляли значенія остальныхъ тригоном. величинъ этихъ угловъ; изъ результатовъ вычисленій они составили табличку § 27 и пользовались уже ею при рѣшеніи задачъ.

Само собою разумѣется, что этой таблички недостаточно: надо знать значенія тригон. величинъ для какихъ-угодно угловъ. Вычисляютъ же ихъ при помощи особыхъ формулъ, которыя выводятся въ высшей математикѣ.

Нужныя вычисленія, конечно, уже выполнены, и изъ результатовъ ихъ составлены таблицы. Эти таблицы называются „таблицами натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ", въ отличіе отъ „таблицъ логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ". Есть таблицы значеній, вычисленныхъ съ 4-мя, 5-ью, 7-ью и съ бо́льшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ. Чѣмъ больше десятичныхъ знаковъ въ таблицахъ, тѣмъ точнѣе, понятно, будутъ и вычисленія при ихъ помощи.

У насъ въ Россіи въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ обыкновенно пользуются пятизначными таблицами, въ которыхъ значенія тригоном. величинъ вычислены, стало-быть, съ точностью до $\frac{1}{2}$ стотысячной доли единицы. При этомъ таблицами натуральныхъ тригоном. величинъ пользуются рѣдко, а примѣняютъ таблицы логариѳмовъ тригон. величинъ, такъ какъ всѣ болѣе или менѣе сложныя вычисленія гораздо легче производятся при помощи логариѳмовъ.

На тотъ же случай, если учащимся еще не знакомы теорія и практика логариѳмическихъ вычисленій, мы въ концѣ учебника помѣщаемъ трехзначную таблицу натуральныхъ тригоном. величинъ, вычисленныхъ на каждый градусъ отъ 0 до 45°, а слѣдовательно и далѣе до 90°. Описывать устройства этой таблицы не будемъ, такъ какъ оно вполнѣ аналогично устройству уже знакомой учащимся таблички § 27. Пользованіе ими также вполнѣ аналогично (§ 28).

§ **32**. Объяснимъ лишь то, какъ при помощи прилагаемой трехзначной таблицы находятъ приближенныя значенія тригоном. величинъ для угловъ, выраженныхъ не только въ градусахъ, но и въ минутахъ.

Положимъ, что нужно найти значеніе $\operatorname{tg} 43°30'$. Изъ таблицы видимъ, что:

$$\begin{aligned} tg\,42^0 &= 0,900 \\ tg\,43^0 &= 0,932 \\ tg\,44^0 &= 0,966 \\ tg\,45^0 &= 1 \end{aligned}$$

и т. д.

Замѣчаемъ, что, если вмѣсто угла въ 42^0 взять уголъ въ 43^0, то tg угла увеличится на 32 тысячныхъ; если же вмѣсто 42^0 взять 44^0, т. е. если уголъ увеличить на 2^0, то tg увеличится на 66 тысячныхъ и т. д. Итакъ, замѣчаемъ, что

приращенію угла въ	1^0	соотв. приращеніе tg-а въ	32	тысячныхъ
„ „ „	2^0	„ „ „ „	66	„
„ „ „	3^0	„ „ „ „	100	„

т. е., что приращеніе тангенса въ нѣсколько тысячныхъ долей почти пропорціонально приращенію угла въ нѣсколько градусовъ. Поэтому не будетъ большой ошибки, если мы допустимъ, что при увеличеніи угла на нѣсколько минутъ приращеніе тангенса вполнѣ пропорціонально приращенію угла *). То же можно сказать и относительно другихъ тригоном. величинъ.

Теперь можемъ перейти къ вычисленію, на основаніи сказаннаго допущенія, тангенса $43^0 30'$.

Изъ таблицы видимъ, что $tg\,43^0 = 0,932$,
а $tg\,44^0 = 0,966$.

Такимъ образомъ, при увеличеніи угла на 1^0, или на $60'$ тангенсъ увеличивается на 34 тысячныхъ; поэтому при увеличеніи угла на $30'$, или на $\frac{1}{2}$ градуса, тангенсъ долженъ увеличиться на 17 тысячныхъ т. е. на $\frac{1}{2}$ отъ 34 тысячныхъ.

Запись.

$$\begin{array}{l} tg\,43^0 \quad = 0,932 \\ \quad + 30' \ldots + 17 \\ \hline tg\,43^0 30' = 0,949. \end{array}$$

Разность между двумя послѣдовательными табличными значеніями одной и той же тригоном. величины называется табличной разностью и обозначается буквой d (differentia). Эти разности въ нашей

*) Изъ разсмотрѣнія другихъ мѣстъ таблицы, впрочемъ, легко замѣтить, что сказанной пропорціональности въ нихъ совсѣмъ нѣтъ, и тогда, конечно, ошибка, происходящая отъ допущенія этой пропорціональности, можетъ оказаться довольно значительной.

таблицѣ указаны въ столбцахъ съ заголовкомъ d, для каждаго промежутка и для каждой тригоном. величины отдѣльно.

Измѣненіе значенія тригоном. величины при увеличеніи угла на нѣсколько минутъ назыв. поправкой этого значенія на столько-то минутъ.

Положимъ, что еще надо опредѣлить $\operatorname{tg} 41^0 28'$. Изъ таблицы видимъ, что $\operatorname{tg} 41^0 = 0{,}869$, а $d = 31$; вычислимъ теперь поправку на $28'$ по слѣдующей схемѣ:

Приращеніе угла	Поправка tg-а
$60'$	31 тыс.
$1'$	$\frac{31}{60}$ „
$28'$	$\frac{31.28}{60}$ „ $= 14{,}4$ тыс.

0,4 тысячной доли отбрасываемъ, такъ какъ онѣ меньше $\frac{1}{2}$ тысячной доли. Тогда значеніе $\operatorname{tg} 41^0 28'$ найдемъ такъ:

$$\begin{array}{l} \operatorname{tg} 41^0 \quad = 0{,}869 \\ \quad + 28' \ldots + 14 \\ \hline \operatorname{tg} 41^0 28' = 0{,}883. \end{array}$$

Для того, чтобы легче было вводить поправки на минуты, мы къ нашей таблицѣ тригоном. величинъ прилагаемъ (тоже въ концѣ учебника) таблички поправокъ, вычисленныхъ на 1, 2, 3 и т. д. до 9 минутъ, для каждой табличной разности отдѣльно. Поправки же на 10, 20,... 50 минутъ будутъ соотвѣтственно въ 10 разъ больше поправокъ на 1, 2,... 5 минутъ.

Возьмемъ опять $\operatorname{tg} 41^0 28'$ и вычислимъ его теперь уже при помощи таблички поправокъ при $d = 31$.

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tg} 41^0 28' = & ? & \\ \operatorname{tg} 41^0 \quad = 0{,}869 & & d = 31 \\ \quad + \; 20' \ldots + 10.3 & & \\ \quad + \;\; 8' \ldots + \;\; 4.13 & & \\ \hline \operatorname{tg} 41^0 28' = 0{,}883. & & \end{array}$$

Возьмемъ еще нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1-ый.
$$\begin{array}{ll} \sin 56^0 25' = \quad ? & \\ \sin 56^0 \quad = 0{,}829 & d = 10 \\ \quad + 20' \ldots + 3.3 & \\ \quad + \;\; 5' \ldots + 0.83 & \\ \hline \sin 56^0 25' = 0{,}833. & \end{array}$$

Примѣръ 2-ой. $\operatorname{ctg} 25^0 23' = ?$

Вычисляя значенія ctg—а, а также cos и csc, необходимо помнить, что при увеличеніи угла значенія этихъ величинъ уменьшаются; поэтому вводить поправку на минуты при вычисленіи этихъ величинъ удобнѣе не увеличивая, а уменьшая уголъ на нѣсколько минутъ.

$$\begin{array}{l} \operatorname{ctg} 25^0 23' = \quad ? \\ \operatorname{ctg} 26^0 \quad = 2{,}050 \qquad d = 95 \\ \quad -30' \ldots +47.5 \\ \quad -\ \ 7' \ldots +11.08 \\ \hline \operatorname{ctg} 25^0 23' = 2{,}109. \end{array}$$

Примѣръ 3-ій.

$$\begin{array}{l} \cos 55^0 47' = \quad ? \\ \cos 56^0 \quad = 0{,}559 \qquad d = 15 \\ \quad -10' \ldots +\ 2.5 \\ \quad -\ \ 3' \ldots +\ 0.75 \\ \hline \cos 55^0 47' = 0{,}562. \end{array}$$

§ **33**. Точно также надо умѣть рѣшать и обратные вопросы, т. е. надо умѣть находить значеніе угла по значенію какой-либо его тригоном. величины.

Положимъ, что для искомаго угла φ^0 имѣемъ, что $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}237$.

Отыскиваемъ прежде всего въ таблицѣ уголъ, котораго tg равенъ хотя бы приблизительно 0,237.

Видимъ, что $0{,}231 = \operatorname{tg} 13^0$

$0{,}249 = \operatorname{tg} 14^0$.

Значеніе же $\operatorname{tg}\varphi$, равное 0,237, заключается между этими числами; значитъ—искомый уголъ φ^0 больше 13^0, но меньше 14^0. Вычисленіе далѣе располагаемъ такъ:

$$\begin{array}{l} 0{,}237 = \operatorname{tg} \varphi \\ 0{,}231 = \operatorname{tg} 13^0 \qquad d = 18 \\ \ \ +6 \ldots +\ \ 20' \\ \hline 0{,}237 = \operatorname{tg} 13^0 20' \\ \quad \varphi^0 = 13^0 20'. \end{array}$$

Далѣе въ подобныхъ случаяхъ будемъ пользоваться нашими табличками поправокъ.

Возьмемъ примѣры.

Примѣръ 1-ый. $\sin\varphi = 0{,}443; \quad \varphi = ?$

$$\begin{array}{l} 0{,}443 = \sin\varphi \\ 0{,}438 = \sin 26^0 \qquad d = 16 \\ \ +2.7 \ldots +10' \\ \ +2.4 \ldots +\ 9' \\ \hline \quad \varphi^0 = 26^0 19'. \end{array}$$

Примѣръ 2-ой. $\operatorname{ctg}\varphi = 0{,}769;\quad \varphi = ?$

$$
\begin{array}{ll}
0{,}769 = \operatorname{ctg}\varphi & \\
0{,}754 = \operatorname{ctg} 53^0 & d = 27 \\
+\,13\,.\,5 \ldots -\,30' & \\
+\,1\,.\,35 \ldots -\,3' & \\
\hline
\varphi^0 = 52^0\,27'. &
\end{array}
$$

Глава VI. **Таблицы логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ.**

§ **34**. Таблицей натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ, какъ легко замѣтить при рѣшеніи даже простыхъ задачъ, пользоваться не совсѣмъ удобно, ибо, даже при пользованіи только трехзначной таблицей, вычисленія отличаются сложностью. Гораздо удобнѣе пользоваться таблицей логариѳмовъ тригоном. величинъ, такъ какъ при помощи логариѳмовъ болѣе трудныя дѣйствія (умноженіе, дѣленіе и пр.) замѣняются соотвѣтственно болѣе легкими (сложеніемъ, вычитаніемъ и пр.).

Ознакомимъ учащихся съ пятизначными таблицами логариѳмовъ тригоном. величинъ. Устройство почти всѣхъ такихъ таблицъ въ главныхъ чертахъ аналогично составленной нами табличкѣ § 27. Поэтому описывать самого устройства таблицъ не будемъ, такъ какъ къ тому же къ таблицамъ почти каждаго составителя ихъ приложены какъ описанія устройства таблицъ, такъ и указанія относительно пользованія ими. Сдѣлаемъ только нѣкоторыя общія поясненія, преимущественно теоретическаго характера, для того, чтобы таблицей логариѳмовъ любого составителя*) можно было пользоваться вполнѣ сознательно.

§ **35**. Во-первыхъ, считаемъ не лишнимъ обратить здѣсь вниманіе на знаки (+ и —) логариѳмовъ тригоном. величинъ.

Извѣстно, что при основаніи, бóльшемъ единицы, логариѳмы чиселъ, бóльшихъ единицы, положительны, а логариѳмы чиселъ, меньшихъ единицы, отрицательны. Синусъ же и косинусъ для всякаго остраго угла меньше единицы; слѣдовательно, логариѳмы синуса и косинуса для всякаго остраго угла отрицательны.

*) Въ дальнѣйшемъ, при производствѣ логариѳмическихъ вычисленій въ настоящемъ учебникѣ, мы будемъ пользоваться таблицами профессора Глазенапа.

Въ таблицахъ всѣ логариѳмы взяты съ положит. мантиссами, а съ характеристиками или положительными, или отрицательными, смотря по тому, какое значеніе имѣетъ весь логариѳмъ, положительное или отрицательное. Въ большинствѣ же таблицъ вмѣсто отрицательныхъ характеристикъ взяты ихъ суммы съ числомъ 10; поэтому для того, чтобы получить истинную характеристику, надо при находящейся въ таблицѣ характеристикѣ подразумѣвать тогда число „-10“. Такъ, по таблицѣ $\lg \sin 28^0 15' = 9{,}67515$, на самомъ же дѣлѣ $\lg \sin 28^0 15' = 9{,}67515 - 10 = 0{,}67515 - 1 = \bar{1}{,}67515$. Точно такъ же $\lg \cos 28^0 15'$ равенъ не $9{,}94492$, какъ значится въ таблицѣ, а $\bar{1}{,}94492$.

Далѣе, секансъ и косекансъ для всякаго остраго угла больше 1, и потому lg sec и lg csc положительны.

Тангенсъ же и котангенсъ могутъ быть и больше, и меньше 1. Такъ, если $0 < \alpha^0 < 45^0$ *), то $\operatorname{tg} \alpha < 1$ и $\lg \operatorname{tg} \alpha < 0$; если же $45^0 < \alpha^0 < 90^0$, то $\operatorname{tg} \alpha > 1$ и $\lg \operatorname{tg} \alpha > 0$. Котангенсъ же наоборотъ: если $0 < \alpha^0 < 45^0$, то $\operatorname{ctg} \alpha > 1$ и $\lg \operatorname{ctg} \alpha > 0$; если же $45^0 < \alpha^0 < 90^0$, то $\operatorname{ctg} \alpha < 1$ и $\lg \operatorname{ctg} \alpha < 0$. Итакъ, для острыхъ угловъ, меньшихъ 45^0, логариѳмы тангенса отрицательны, а логариѳмы котангенса положительны; для острыхъ же угловъ, большихъ 45^0, наоборотъ—логариѳмы тангенса положительны, а логариѳмы котангенса отрицательны.

§ **36**. Затѣмъ пояснимъ, какимъ образомъ находятъ логариѳмъ какой-нибудь тригоном. величины такого угла, который выраженъ не только въ градусахъ и минутахъ, но и въ секундахъ.

Положимъ, надо опредѣлить $\lg \sin 25^0 17' 48''$. Въ таблицахъ найдемъ, что $\lg \sin 25^0 17' = \bar{1}{,}63052$. Требуется теперь опредѣлить, какъ измѣнится этотъ логариѳмъ, если уголъ увеличится на $48''$. Изъ таблицы видимъ, что $\lg \sin 25^0 17' = \bar{1}{,}63052$, а $\lg \sin 25^0 18' = \bar{1}{,}63079$, т. е. что при увеличеніи угла въ $25^0 17'$ на $1'$ lg sin этого угла увеличивается на 27 стотысячныхъ. (Это число называется табличной разностью и обозначается буквой d). Надо опредѣлить, на сколько увеличится lg sin при увеличеніи угла не на цѣлую минуту, а на $48''$. (Это измѣненіе lg-а при измѣненіи угла на нѣсколько секундъ называется п о п р а в к о й л о г а р и ѳ м а на столько-то секундъ). Изъ разсмотрѣнія таблицы замѣчаемъ:

*) Читать со средины: „α^0 больше 0, но меньше 45^0“.

	d
$\lg \sin 25^0 17' = \bar{1},63052$	
	27
$\lg \sin 25^0 18' = \bar{1},63079$	
	27
$\lg \sin 25^0 19' = \bar{1},63106$	
	27
$\lg \sin 25^0 20' = \bar{1},63133$	
	26
$\lg \sin 25^0 21' = \bar{1},63159$	

т. е. что при увеличеніи угла на $1'$ lg sin увеличивается на 27 стотысячныхъ, а при увеличеніи угла на $2'$ это приращеніе логариѳма равно $27 . 2 = 54$ стотыс.; при увеличеніи на $3'$ оно равно $27 . 3 = 81$ стотыс.; при увеличеніи же на $4'$ приращеніе lg sin равно $27 . 3 + 26 = 81 + 26 = 107$ стотыс. Замѣчаемъ, что приращеніе угла на нѣсколько минутъ и соотвѣтствующее приращеніе lg sin на нѣкоторое число стотысячныхъ долей пропорціональны или почти пропорціональны; подобно этому и приращеніе угла на нѣсколько секундъ и соотвѣтствующее приращеніе lg sin на нѣсколько стотысячныхъ можно считать пропорціональными*). На этомъ основаніи поправку нашего lg-а при увеличеніи угла на нѣсколько секундъ можно найти простымъ тройнымъ правиломъ по слѣдующей схемѣ

приращеніе угла — поправка lg sin.

$$\left.\begin{array}{llll} 60'' & \ldots\ldots & 27 & \text{стотыс.} \\ 48'' & \ldots\ldots & x & \text{„} \end{array}\right\} x = \frac{27.48}{60} = 21{,}6 \quad (\text{стот.}).$$

Тогда $\lg \sin 25^0 17' 48''$ найдемъ по такой схемѣ:

$$\begin{array}{rl} \lg \sin 25^0 17' & = \bar{1},63052 \\ + 48'' .. + & \ 21.6 \\ \hline \lg \sin 25^0 17'48'' & = \bar{1},63074. \end{array}$$

*) На основаніи нѣкоторыхъ алгебраическихъ и тригонометрическихъ формулъ можно было бы дать болѣе строгое доказательство допустимости этой пропорціональности. При этомъ обнаружилось бы, что погрѣшность, которая происходитъ при вычисленіи $\lg \sin \alpha$ и $\lg \operatorname{tg} \alpha$ по причинѣ только сказаннаго допущенія, можетъ оказаться больше одной милліонной и тѣмъ самымъ можетъ вліять на 5-ый десят. знакъ логариѳма только въ томъ случаѣ если уголъ $\alpha < 1^0 30'$. Такимъ образомъ, если уголъ больше $1^0 30'$, то эта погрѣшность, почти не вліяя на 6-ой десятичн. знакъ логариѳма, не будетъ вліять и на 5-й десятичн. знакъ.

При вычисленіи же $\lg \cos \alpha$ и $\lg \operatorname{ctg} \alpha$ эта погрѣшность можетъ имѣть вліяніе на 5-ый десятичный знакъ только въ томъ случаѣ, если уголъ α больше $88^0 30'$.

О точности вычисленія логариѳма послѣ введенія поправки на секунды у насъ будетъ рѣчь еще разъ впереди (въ § 44).

Для того, чтобы облегчить вычисленіе поправки логариѳма, въ таблицахъ почти каждаго составителя, съ боку страницы, находятся особыя таблички поправокъ, пользованіе которыми объяснено въ каждомъ сборникѣ таблицъ достаточно подробно; мы поэтому объяснять его не будемъ, тѣмъ болѣе, что въ разныхъ сборникахъ эти таблички устроены по-разному.

Такъ же, какъ при вычисленіи lg sin, вводится поправка на секунды и при вычисленіи логариѳмовъ tg-а и sec-а.

При вычисленіи же поправки для косинуса, котангенса и косеканса слѣдуетъ имѣть въ виду, что при увеличеніи остраго угла эти величины не увеличиваются, а уменьшаются, и потому поправку ихъ логариѳма на секунды слѣдуетъ при увеличеніи угла не прибавлять, а вычитать. Но для того, чтобы вычитаніе поправки логариѳма замѣнять сложеніемъ, какъ болѣе простымъ дѣйствіемъ, полезно вводить поправку, не увеличивая, а уменьшая уголъ на нѣсколько секундъ. Возьмемъ для примѣра $\lg \operatorname{ctg} 35^0 27' 46''$ и вычислимъ его, уменьшая уголъ въ $35^0 28'$ на $14''$.

$$\begin{array}{lll} \lg \operatorname{ctg} 35^0 28' & = 0{,}14727 & d = 26 \\ \quad -10'' \ldots & \quad +4.3 & \\ \quad -\ \ 4'' \ldots & \quad +1.73 & \\ \hline \lg \operatorname{ctg} 35^0 27' 46'' & = 0{,}14733. & \end{array}$$

§ **37.** Пользуясь тою же таблицей логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ, можно рѣшить и обратную задачу: по логариѳму тригонометрич. величины неизвѣстнаго угла отыскать уголъ.

Напримѣръ, имѣемъ ур-іе: $\lg \cos \varphi = \bar{1},69463$; найти уголъ φ.

$$\bar{1},69463 = \lg \cos \varphi;$$

по таблицѣ находимъ: $\bar{1},69456 = \lg \cos 60^0 20' \qquad d = 23.$

$$\begin{array}{ll} +\ 3.8 & \qquad -10'' \\ +\ 3.1 & \qquad -\ \ 8'' \\ \hline \bar{1},69463 = \lg \cos 60^0 19' 42'', & \end{array}$$

такъ что уголъ $\varphi = 60^0 19' 42''$.

§ **38**. Наконецъ, объяснимъ, почему въ таблицѣ логариѳмовъ между логариѳмами тангенсовъ и логариѳмами котангенсовъ находятся общія табличныя разности (d. c.—differentia communis).

Мы знаемъ, что $\operatorname{tg} \alpha . \operatorname{ctg} \alpha = 1$; поэтому

$$\lg \operatorname{tg} \alpha + \lg \operatorname{ctg} \alpha = 0,$$

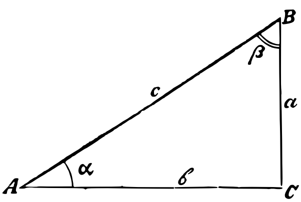
т. е. сумма логариѳмовъ тангенса и котангенса одного и того же угла есть величина постоянная, такъ что, если при измѣненіи угла одно слагаемое, напримѣръ, $\lg \operatorname{tg} \alpha$, увеличится на d, то другое слагаемое ($\lg \operatorname{ctg} \alpha$) должно уменьшиться на столько же.

Итакъ, табличная разность для логариѳмовъ тангенса и котангенса общая потому, что тангенсъ равенъ обратной дроби котангенса.

На аналогичномъ основаніи (въ таблицѣ Глазенапа) логариѳмы синусовъ и косекансовъ съ одной стороны, и логариѳмы косинусовъ и секансовъ—съ другой имѣютъ табличную разность общую.

Глава VII. **Основные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ.**

§ **39.** *Задача I.* Рѣшить прямоуг. $\triangle$-къ ABC, въ которомъ гипотенуза $AB = c$ саж., а острый уголъ $A = \alpha^0$. Вычисленія произвести при $c = 125$ и $\alpha = 37^0\,52'\,42''$ *(черт. 27).*



Черт. 27.

Рѣш. Дано: c и α; опредѣлить: 1) a, 2) b и 3) β.

1) $a = c \sin \alpha$; 2) $b = c \cos \alpha$ и 3) $\beta = 90^0 - \alpha$

Вычисленія:

$$
1)\ \lg a = \left|\begin{array}{l} \lg c \quad = \lg\ 125 \\ + \lg \sin\alpha = \lg\ \sin \end{array}\right.
\begin{array}{|lll} & = & 2{,}09691 \\ 37^0 52' & = + & \bar{1}{,}78805 \qquad d = 16 \\ + 40'' & + & 10.7 \\ + \ 2'' & + & 0.53 \\ \hline \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} \lg a = 1{,}88507 \quad d = 6 \\ 502\ldots 76{,}74 \\ 4.8\ldots\ 8 \\ \hline a = 76{,}748\ (\text{саж.}). \end{array}
$$

$$
2)\ \lg b = \left|\begin{array}{l} \lg c \quad = \\ + \lg \cos\alpha = \lg \cos \end{array}\right.
\begin{array}{|lll} \ldots\ldots\ldots & & 2{,}09691 \\ 37^0 53' \ldots & + & \bar{1}{,}89722 \qquad d = 10 \\ - 10'' & + & 1.7 \\ - \ 8'' & + & 1.3 \\ \hline \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} \lg b = 1{,}99416; \quad d = 5 \\ 414\ldots 98{,}66 \\ 2\ldots\ldots\ 4 \\ \hline b = 98{,}664\ (\text{саж.}). \end{array}
$$

$$
3)\ \beta = \left|\begin{array}{r} 89^0\,59'\,60'' \\ -\,37^0\,52'\,42'' \end{array}\right.
$$

$$
\beta = 52^0\ \ 7'\ 18''.
$$

Провѣрка.

1) Вычислимъ катетъ b иначе; именно, по найденному значенію a, пользуясь теоремой Пиѳагора:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}.$$

$$\begin{array}{rl} c = & 125 \\ a = & 76{,}748 \\ \hline c + a = & 201{,}748 \\ c - a = & 48{,}252. \end{array} \qquad \lg b = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{rl|l} \lg 201{,}748 = & 2{,}30471 & 2{,}30481 \\ & +\ 8 \cdot 4 & \\ & +\ 1 \cdot 68 & \\ +\lg\ 48{,}252 = & 1{,}68350 & 1{,}68352 \\ & +\ 1 \cdot 8 & \end{array} \right.$$

$$\lg b = \frac{1}{2} \cdot 3{,}98833$$

$$\begin{array}{rl} \lg b = & 1{,}994165 \\ & 414 \ldots 98{,}66 \\ & +2 \cdot 5 \ldots\ 5 \\ \hline & b = 98{,}665 \end{array}$$

Мы видимъ, что это значеніе b отличается на 1 отъ ранѣе найденнаго только пятымъ знакомъ, а такое несовпаденіе находится въ предѣлахъ неизбѣжной погрѣшности вычисленій.

2) Вычислимъ уголъ β, принимая во вниманіе найденное значеніе для $\lg b$.

$$\sin\beta = \frac{b}{c}.$$

$$\lg\sin\beta = \left| \begin{array}{rr} \lg b = & 1{,}99416 \\ -\lg c = & -\,2{,}09691 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rll} \lg\sin\beta = & \overline{1},89725 & \\ & 722 \ldots 52^0 7' & d = 10 \\ & +\ 1 \cdot 7 \ldots + 10'' & \\ & +\ 1 \cdot 3 \ldots +\ 8'' & \\ \hline & \beta = 52^0 7' 18'', & \end{array}$$

как и раньше.

§ **40.** *Задача 11.* Рѣшить прямоуг. $\triangle$ ABC, въ которомъ катетъ BC $= a$ верст., а острый уголъ A $= \alpha^0$ ($a = 1{,}0757$; $\alpha = 55^0 50' 16''$).

Рѣш. Дано a и α; опред.: 1) b, 2) c и 3) β (черт. 27).

$$1)\ b = a \operatorname{ctg}\alpha;\quad 2)\ c = \frac{a}{\sin\alpha};\quad 3)\ \beta = 90^0 - \alpha.$$

Вычисленія:

$$1)\ \lg b = \left| \begin{array}{l} \lg a \quad = \lg\ 1{,}0757 \quad = 0{,}03169 \\ + \lg\mathrm{ctg}\, \alpha = \lg\mathrm{ctg} \left| \begin{array}{ll} 55^0 51' = \bar{1}{,}83144 & \quad d = 27 \\ \quad -40'' \quad + 18 & \\ \quad -\ 4'' \quad +\ 1.8 & \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \lg b = \bar{1}{,}86333 \quad d = 6 \\ \qquad\qquad 332 \ldots 0{,}7300 \\ \qquad\qquad\ \ 1.2 \ldots\ldots 2 \\ \hline \qquad\qquad b = 0{,}73002 \ \text{(версты)} \end{array}$$

или, если взять значеніе b съ 4-мя десят. знаками, какъ и данное значеніе a, то $b = 0{,}73$.

$$2)\ \lg c = \left| \begin{array}{l} \lg a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}03169 \\ -\lg \sin \alpha = -\lg \sin \left| \begin{array}{ll} 55^0 50' \quad = - & \left| \begin{array}{l} \bar{1}{,}91772 \\ \quad + 1.5 \\ \quad + 0.9 \end{array} \right. \\ \quad + 10'' & \\ \quad +\ 6'' & \end{array} \right. \quad d = 9 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \lg c = 0{,}11395 \qquad d = 34 \\ \qquad\qquad 394 \,.\,.\, 1{,}300 \\ \qquad\qquad + 1.02 \ldots . 03 \\ \hline \qquad\qquad c = 1{,}30003 \ \text{или} \\ \qquad\qquad c = 1{,}3 \ \text{(версты).} \end{array}$$

$$3)\ \beta = \left| \begin{array}{r} 89^0 59' 60'' \\ -55^0 50' 16'' \end{array} \right.$$

$$\beta = \quad 34^0\ 9' 44''.$$

Провѣрка.

Вычислимъ уголъ β иначе:

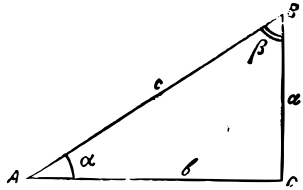
$$\mathrm{tg}\, \beta = \frac{b}{a}.$$

$$\lg\mathrm{tg}\, \beta = \left| \begin{array}{l} \lg b = \quad \bar{1}{,}86333 \\ -\lg a = -0{,}03169 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \lg\mathrm{tg}\, \beta = \bar{1}{,}83164 \\ \qquad\qquad \bar{1}{,}83144 \ldots . 34^0 9' \qquad d = 27 \\ \qquad\qquad + 18 \ldots . \quad + 40'' \\ \qquad\qquad + \ 1.8 \,.\,. \quad +\ 4'' \\ \hline \qquad\qquad \beta = 34^0 9' 44'', \ \text{какъ и раньше.} \end{array}$$

§ **41**. *Задача III*. Рѣшить прямоуг. △ ABC, гипотенуза котораго $AB = c$ саж., а катетъ $AC = b$ саж. ($c = 72{,}5$ и $b = 54{,}3$).

Рѣш. Дано c и b; опред.: 1) a, 2) α и 3) β *(черт. 28)*.



Черт. 28.

1) $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$; 3) $\beta = 90^0 - \alpha$.

Вычисленія: 1) $c = 72{,}5$, $b = 54{,}3$

$c + b = 126{,}8$

$c - b = 18{,}2$

$$\lg a = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} \lg 126{,}8 = 2{,}10312 \\ +\lg 18{,}2 = +1{,}26007 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\lg a = \frac{1}{2} . 3{,}36319$$

$$\lg a = 1{,}68160 \ldots 48{,}04$$

$$a = 48{,}04 \text{ (саж.)}.$$

$$2)\ \lg\cos\alpha = \left| \begin{array}{l} \lg b = \lg 54{,}3 = 1{,}73480 \\ -\lg c = -\lg 72{,}5 = -1{,}86034 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\lg\cos\alpha = \bar{1}{,}87446 \ldots 41^0 30'$$

$$\alpha = 41^0\, 30'.$$

$$3)\ \beta = 90^0 - 41^0\, 30' = 48^0\, 30'.$$

§ **42**. *Задача IV*. Въ прямоуг. △ ABC катетъ $BC = a$ дм., а катетъ $AC = b$ дм. Опредѣлить остальные изъ основныхъ элементовъ △-ка. ($a = 51{,}6$ и $b = 32{,}9$).

Рѣш. Дано: a и b; опредѣлить: 1) α, 2) β и 3) c.

$$1)\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\ 2)\ \beta = 90^0 - \alpha \ \text{ и } \ 3)\ c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Вычисленія: 1)

$$\lg \operatorname{tg}\alpha = \left| \begin{array}{l} \lg 51{,}6 = 1{,}71265 \\ -\lg 32{,}9 = -1{,}51720 \\ \hline \lg \operatorname{tg}\alpha = 0{,}19545 \end{array} \right. \quad d = 27$$

$$\begin{array}{rcr} 526 \ldots & & 57^0\, 28' \\ 18 \ldots & + & 40'' \\ 0.9 \ldots & + & 2'' \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha = 57^0\, 28'\, 42''$$

$$2)\ \beta = \left| \begin{array}{r} 89^0\, 59'\, 60'' \\ -\,57^0\, 28'\, 42'' \\ \hline 32^0\, 31'\, 18'' \end{array} \right.$$

$$
3)\ \lg c = \left|\begin{array}{l} \lg 51{,}6 = \ldots\ldots\ldots 1{,}71265 \\ -\lg\sin 57^0\,28'\,42'' = -\ \left|\begin{array}{l} \bar{1}{,}92587 \quad d=8 \\ \quad +5\,.\,3 \\ \quad +0\,.\,27 \\ \hline \bar{1}{,}92593 \end{array}\right. \end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{rl} \lg c = 1{,}78672 & d = 7 \\ 668\ .\ . & 61{,}19 \\ 4\,.\,2\ .\ .\ .\ . & 6 \\ \hline & c = 61{,}196 \text{ (дм.).} \end{array}
$$

Для провѣрки вычислимъ катетъ b по найденному значенію гипотенузы c и углу β.

$$b = c\sin\beta.$$

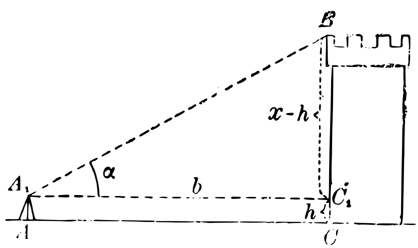
$$
\lg b = \left|\begin{array}{l} \lg c \qquad\qquad\quad = 1{,}78672 \\ +\lg\sin 32^0\,31'\,18'' = \bar{1}{,}73041 \qquad d = 20 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 3\,.\,3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2\,.\,7 \end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{rl} \lg b = 1{,}51719 & d = 14 \\ 706\,.\,.\,32{,}89 & \\ 12\,.\,6\ \ldots .\,9 & \\ 0\,.\,42\ldots .\ 3 & \\ \hline b = 32{,}899, & \text{т. е. почти } 32{,}9, \end{array}
$$

какъ было дано.

§ **43. Одна изъ**, такъ называемыхъ, классическихъ **задачъ на измѣреніе мѣстности** *).

Опредѣлить безъ непосредственнаго измѣренія **высоту доступнаго** предмета, напримѣръ, башни (*черт. 29*). Для рѣшенія этой задачи выбираютъ въ плоскости основанія башни точку A и измѣряютъ ея разстояніе AC до башни; положимъ, что оно равно b фут. Затѣмъ, установивъ угломѣрный снарядъ надъ точкой A, измѣряютъ угловую высоту вершины башни B и высоту AA_1 инструмента надъ плоскостью основанія башни. Положимъ, что угловая вы-



Черт. 29.

*) Другія классическія задачи на измѣреніе мѣстности см. въ §§-ахъ 78, 79, 79[a], 85 и 86.

сота точки B равна α^0, а высота угломѣрнаго снаряда h фут., искомая же высота башни BC равна x фут. Тогда изъ $\triangle$ A_1BC_1:

$$x - h = b \operatorname{tg} \alpha,$$

такъ что $x = b \operatorname{tg} \alpha + h$.

Глава VIII. Точность вычисленій при пользованіи пятизначными таблицами логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ.

§ **44.** Скажемъ нѣсколько словъ о точности вычисленій при помощи 5-тизначныхъ таблицъ lg-овъ тригонометрическихъ величинъ.

Какъ извѣстно, въ этихъ таблицахъ логариѳмы вычислены съ точностью до $^1/_2$ стотысячной доли единицы, при чемъ нѣкоторыя значенія взяты съ избыткомъ, (т. е. они больше истиннаго значенія), нѣкоторыя же съ недостаткомъ, (т. е. они меньше истиннаго значенія). Вводя поправку логариѳма на секунды, мы эту поправку вычисляемъ тоже съ нѣкоторой погрѣшностью. Послѣ прибавленія поправки, наши 2 погрѣшности, погрѣшность самого логариѳма и погрѣшность поправки, иногда другъ друга усиливаютъ, иногда же одна другую ослабляетъ. Такъ, напримѣръ, если lg и поправка оба вычислены съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ, то погрѣшности, въ нихъ допущенныя, будутъ другъ друга усиливать, такъ какъ онѣ будутъ складываться; если же lg взятъ съ избыткомъ, а поправка—съ недостаткомъ, или наоборотъ, то ихъ погрѣшности будутъ другъ друга ослаблять, такъ какъ при этомъ изъ большей погрѣшности будетъ вычитаться меньшая.

Къ сожалѣнію въ большинствѣ таблицъ не указано, какіе изъ помѣщенныхъ въ нихъ логариѳмовъ взяты съ недостаткомъ и какіе—съ избыткомъ, и только въ нѣкоторыхъ, напримѣръ, въ таблицахъ Родина, логариѳмы, взятые съ избыткомъ, отмѣчены особымъ значкомъ (точкой). Если пользоваться таблицами типа таблицъ Родина, то при вычисленіи предѣла погрѣшности можно достигать бо́льшей точности, и даже самыя вычисленія при желаніи можно производить болѣе точно, чѣмъ при пользованіи другими, тоже пятизначными таблицами (какъ достигнуть этого, указывается въ самомъ сборникѣ таблицъ Родина). Если же пользоваться таблицами иного типа, напримѣръ, типа таблицъ Глазенапа, то при вычисленіи предѣла погрѣшности, мы не знаемъ, какіе логариѳмы мы беремъ съ недостаткомъ, какіе съ избыткомъ, и намъ волей-неволей приходится обращать вниманіе только на абсолютныя величины ихъ погрѣшностей.

При введеніи поправки на секунды погрѣшность вычисленія обусловливается тремя причинами: 1) мы допускаемъ въ дѣйствительности не существующую пропорціональность между приращеніемъ угла и соотвѣтствующимъ приращеніемъ логариѳма его тригоном. величины; 2) разности между послѣдовательными логариѳмами, которыя мы беремъ изъ таблицъ, т. е., такъ назыв., табличныя разности отличаются отъ истинныхъ, такъ какъ и самые табличные логариѳмы не точны; 3) когда по взятой нами табличной разности мы вычисляемъ поправку на секунды, то намъ приходится производить дѣленіе, а оно не всегда производится нацѣло, и потому приходится округлять частное.

Изслѣдовать вліяніе первой ошибки (происходящей, какъ сказано, отъ допущенія на самомъ дѣлѣ не существующей пропорціональности между приращеніемъ угла и приращеніемъ логариѳма его тригонометрической величины) элементарнымъ путемъ довольно затруднительно. Поэтому вліянія ея на точность вычисленій изслѣдовать не будемъ, такъ какъ къ тому же ошибка эта бываетъ въ большинствѣ случаевъ ничтожна и не вліяетъ поэтому на 5-ый и даже на 6-ой десятичный знакъ логариѳма (см. подстрочную выноску къ § 36).

Изслѣдуемъ лишь вліяніе 2-ой и 3-ьей ошибокъ, т. е. ошибокъ, происходящихъ отъ неточности табличныхъ разностей и отъ округленія частнаго при введеніи поправки на секунды.

Положимъ, что намъ нужно вычислить $\lg \sin a^0\, b'\, n''$.

Возьмемъ 2 послѣдовательныхъ табличныхъ логариѳма:

$$\lg \sin a^0\, b' = C + M + \alpha_1$$

$$\text{и } \lg \sin a^0\, (b+1)' = C + M + d + \alpha_2,$$

гдѣ C и M — соотвѣтственно характеристика и табличная мантисса $\lg \sin a^0\, b'$, d — табличная разность, а α_1 и α_2 — погрѣшности логариѳмовъ. Тогда истинная разность между 2-мя данными логариѳмами равна $d + \alpha_2 - \alpha_1$, такъ что погрѣшность табличной разности d есть $(\alpha_2 - \alpha_1)$.

Поправка логариѳма на n'' должна имѣть слѣдующее выраженіе:

$$\frac{(d + \alpha_2 - \alpha_1)n}{60} = \frac{dn}{60} + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\, n}{60}.$$

Пусть при дѣленіи dn на 60 частное равно $m + \delta$, гдѣ m есть приближенное его значеніе, вычисленное съ погрѣшностью δ, меньшею $\frac{1}{2}$ стотыс. доли. Тогда поправка на n'' будетъ имѣть выраженіе $m+\delta+\frac{(\alpha_2-\alpha_1)n}{60}$, и потому $\lg\sin a^0\,b'\,n''$ долженъ бы вычисляться слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{ll} \lg\sin a^0\,b' = & C+M+\alpha_1 \\ +\text{поправка на } n'' \ldots & m+\delta+\frac{(\alpha_2-\alpha_1)n}{60} \\ \hline \end{array}$$

такъ что $\lg\sin a^0\,b'\,n''=C+M+m+\alpha_1+\delta+\frac{(\alpha_2-\alpha_1)n}{60}$.

На практикѣ же мы беремъ только $C+M+m$, такъ что погрѣшность этого вычисленія будетъ выражаться суммой

$$\alpha_1+\delta+\frac{(\alpha_2-\alpha_1)n}{60},$$

въ которой количества α_1, δ и α_2 могутъ быть какъ положительными, такъ и отрицательными, при чемъ каждое изъ нихъ по абсолютной величинѣ меньше половины стотысячной доли.

Если мы въ этой алгебраической суммѣ количества α_1, δ и α_2 замѣнимъ ихъ абсолютными величинами $|\alpha_1|$, $|\delta|$ и $|\alpha_2|$, то отъ этого сумма во всякомъ случаѣ не уменьшится, и потому наша погрѣшность

$$\alpha_1+\delta+\frac{(\alpha_2-\alpha_1)n}{60}\leqq|\alpha_1|+|\delta|+\frac{(|\alpha_2|+|\alpha_1|)n}{60}.$$

Если теперь въ правой части этого неравенства вмѣсто абсолютныхъ величинъ всѣхъ отдѣльныхъ погрѣшностей поставимъ высшій предѣлъ ихъ, т. е. $\frac{1}{2}$ стотыс. доли, то эта правая, большая часть неравенства увеличится, и потому наше неравенство усилится и, слѣдовательно, не нарушится. Такимъ образомъ:

$$\alpha_1+\delta+\frac{(\alpha_2-\alpha_1)n}{60}<\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right).n}{60}\right] \text{ стотыс. доли,}$$

откуда $\alpha_1+\delta+\frac{(\alpha_2-\alpha_1)n}{60}<\left(1+\frac{n}{60}\right)$ стотыс. доли, т. е. погрѣшность $\lg\sin a^0\,b'\,n''$ меньше, чѣмъ $\left(1+\frac{n}{60}\right)$ стотыс. доли.

Отсюда выводимъ слѣдующее заключеніе:

Послѣ введенія поправки lg на секунды мы не всегда можемъ быть увѣрены въ томъ, что въ результатѣ послѣдняя, 5-ая цыфра логариѳма вѣрна, и она можетъ быть на 1 единицу больше или меньше истинной.

Точность вычисленія угла по логариѳму его тригон. величины.

§ **45**. Скажемъ также нѣсколько словъ о точности вычисленія угла по пятизначному логариѳму какой-нибудь его тригонометрической величины.

Пусть мы вычислили $\lg \operatorname{tg} \varphi$ и нашли, что онъ равенъ $\overline{1},73097$, а требуется опредѣлить уголъ φ.

$$\overline{1},73097 = \lg \operatorname{tg} \varphi.$$

По таблицѣ $\overline{1},73084 = \lg \operatorname{tg} 28^0 17' \qquad d = 30$

Поправка на $+10 \ldots\ldots + 20''$

$+ \ 3 \ldots\ldots + \ 6''$

$$\overline{1},73097 = \lg \operatorname{tg} 28^0 17' 26'';$$

отсюда $\varphi^0 = 28^0 17' 26''$.

Положимъ, что при вычисленіи $\lg \operatorname{tg} \varphi$ мы допустили погрѣшность, меньшую 1 стотысячной; опредѣлимъ, какой примѣрно величины будетъ та погрѣшность, которую мы благодаря этому должны допустить при опредѣленіи нашего угла φ.

Изъ таблицы видимъ, что если мы $\lg \operatorname{tg} 28^0 17'$ увеличимъ на 30 стотысячныхъ, то этому увеличенію $\lg \operatorname{tg}$ будетъ соотвѣтствовать увеличеніе угла на $1'$, или $60''$. Но мы допустили (§ 36), что приращеніе угла въ нѣсколько секундъ пропорціонально приращенію логариѳма какой-нибудь его тригоном. величины въ нѣсколько стотысячныхъ. Поэтому,

если погрѣшности lg-а въ 30 стот. соотвѣтствуетъ погр. угла въ $60''$,

то „ „ „ 1 „ „ „ „ „ $\frac{60''}{30} = 2''$.

Но, какъ сказано, предѣлъ погрѣшности при вычисленіи $\lg \operatorname{tg} \varphi$ равенъ 1 стотысячной; поэтому предѣлъ погрѣшности при опредѣленіи угла φ по $\lg \operatorname{tg} \varphi$ будетъ въ данномъ случаѣ равенъ $2''$. Такимъ образомъ, искомый уголъ $\varphi = 28^0 17' 26''$, съ точностью до $2''$.

Разсуждаемъ аналогично въ общемъ видѣ. Погрѣшности логариѳма въ d стотыс. (гдѣ d—табличная разность) соотвѣтствуетъ погрѣшность при опредѣленіи угла въ $1'$, или въ $60''$; поэтому погрѣшности въ 1 стотысячную будетъ соотвѣтствовать погрѣшность въ $\frac{60''}{d}$.

Такимъ образомъ, если lg тригоном. величины искомаго угла вычисленъ съ точностью до 1 стотысячной, то п р е д ѣ л ъ п о г р ѣ ш н о с т и, д о п у с к а е м о й п р и о п р е д ѣ л е н і и у г л а по логариѳму его тригоном. величины, равенъ $\frac{60''}{d}$, гдѣ d—табличная разность того промежутка, въ которомъ находится искомый уголъ.

Отсюда видимъ, что чѣмъ больше d, тѣмъ меньше будетъ погрѣшность при опредѣленіи угла.

Пересматривая же таблицу логариѳмовъ тригоном. величинъ, замѣчаемъ, что табличныя разности для синуса измѣняются отъ 240 стотыс. (для угловъ, близкихъ къ 3^0) до 1 стотысячной (для угловъ, близкихъ къ 87^0), а для нѣкоторыхъ угловъ, отличающихся даже на нѣсколько минутъ, въ таблицахъ имѣется одинъ и тотъ же логариѳмъ синуса. Значитъ, если мы опредѣляемъ уголъ по логариѳму его синуса и этотъ уголъ малъ, напр., около 3^0 и менѣе, то предѣлъ погрѣшности при опредѣленіи угла будетъ очень малъ, напр. въ $\frac{60''}{240}$, т. е. въ $\frac{1''}{4}$; если же искомый уголъ большой, близкій къ 87^0, то погрѣшность будетъ больше цѣлой минуты и даже можетъ быть равна нѣсколькимъ минутамъ.

Словомъ: малые острые углы по логариѳму синуса опредѣляются точнѣе, чѣмъ большіе*).

Такъ какъ $\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha)$, то объ опредѣленіи угла по логариѳму его косинуса можно сказать то же, что было сказано объ опредѣленіи угла по логариѳму его синуса, только наоборотъ: большіе острые углы по логариѳму косинуса опредѣляются точнѣе, чѣмъ малые*).

Обращая же вниманіе на табличныя разности логариѳмовъ тангенса и котангенса, видимъ, что наименьшая табличная разность соотвѣтствуетъ угламъ, близкимъ къ 45^0 (отъ 39^0 до 52^0); именно тогда она равна 25 стотысячнымъ. Значитъ, если мы опредѣляемъ уголъ, находящійся въ промежуткѣ отъ 39^0 до 52^0, по $\lg\operatorname{tg}$ или по $\lg\operatorname{ctg}$, то предѣлъ погрѣшности можетъ достигать только $\frac{60''}{25}$, т. е. 2,4''; углы же, бо̀льшіе 52^0 и меньшіе 38^0, по логариѳму тангенса и котангенса опредѣляются еще точнѣе.

Легко доказать, что каждая изъ табличныхъ разностей для тангенса или котангенса всегда должна быть, вообще говоря, больше каждой изъ соотвѣтствующихъ разностей для синуса и косинуса, ибо она равна ихъ суммѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть α есть данный уголъ, а его табличное приращеніе есть δ (для нашихъ таблицъ $\delta = 1'$); такъ какъ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то

*) См. впрочемъ §§ 46 и 48.

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg \sin \alpha - \lg \cos \alpha$$

и $$\lg \operatorname{tg} (\alpha + \delta) = \lg \sin (\alpha + \delta) - \lg \cos (\alpha + \delta).$$

Вычитая почленно первое равенство изъ второго, имѣемъ:

$$\lg \operatorname{tg} (\alpha + \delta) - \lg \operatorname{tg} \alpha = [\lg \sin (\alpha + \delta) - \lg \sin \alpha] + [\lg \cos \alpha - \lg \cos(\alpha + \delta)] \text{ *)},$$

т. е. разность логариѳмовъ тангенса двухъ послѣдовательныхъ угловъ равна суммѣ соотвѣтствующихъ разностей логариѳмовъ синуса и косинуса.

Итакъ, табличная разность тангенса (и котангенса) вообще должна быть больше соотвѣтствующихъ табличныхъ разностей синуса и косинуса. А отсюда заключаемъ, что по логариѳму тангенса или котангенса уголъ, вообще говоря, можно опредѣлить точнѣе, чѣмъ по логариѳму синуса или косинуса.

§ **46. Примѣчаніе о малыхъ углахъ.**

Введеніе поправки логариѳма на секунды при пользованіи пятизначной таблицей логариѳмовъ было основано на томъ допущеніи, что приращеніе угла въ нѣсколько секундъ и соотвѣтствующее ему приращеніе логариѳма какой-нибудь тригоном. величины въ нѣсколько стотысячныхъ долей взаимно пропорціональны. Но это допущеніе сдѣлать не всегда возможно. Возьмемъ, напримѣръ, нѣсколько послѣдовательныхъ логариѳмовъ тангенса малаго угла, близкаго къ 1^0.

	d.
$\lg \operatorname{tg} 1^0 1' = \overline{2},24910$	
	706
„ „ $1^0 2' = \overline{2},25616$	
	696
„ „ $1^0 3' = \overline{2},26312$	
	684
„ „ $1^0 4' = \overline{2},26996$	

Изъ этихъ примѣровъ ясно выступаетъ отсутствіе пропорціональности между приращеніемъ угла и приращеніемъ $\lg \operatorname{tg}$; поэтому можно предполагать, что то же будетъ и при увеличеніи угла на нѣсколько секундъ, въ особенности, если уголъ будетъ меньше 1^0.

Аналогичное можно сказать и объ измѣненіи $\lg \sin$ малыхъ угловъ. А такъ какъ $\lg \csc \alpha = -\lg \sin \alpha$ и $\lg \operatorname{ctg} \alpha = -\lg \operatorname{tg} \alpha$, то сказанное относится и къ логариѳмамъ csc и ctg малыхъ угловъ.

Далѣе, на основаніи формулъ приведенія къ дополнительному углу (§ 25), логариѳмы sin, tg, csc и ctg малыхъ острыхъ

*) Такъ какъ $\lg \cos \alpha > \lg \cos (\alpha + \delta)$.

угловъ равны соотвѣтственно логариѳмамъ cos, ctg, sec и tg большихъ острыхъ угловъ, дополнительныхъ къ малымъ угламъ. Поэтому, сказанное о непропорціональности распространяется и на логариѳмы cos, ctg, sec и tg большихъ острыхъ угловъ.

Такимъ образомъ, при вычисленіи логариѳмовъ sin и csc малыхъ угловъ, cos и sec большихъ острыхъ угловъ и tg и ctg какъ большихъ, такъ и малыхъ угловъ, вводить поправку на секунды такъ, какъ это мы дѣлали раньше, нельзя. Приходится, слѣдовательно, вычислять всѣ эти логариѳмы какимъ-нибудь другимъ способомъ.

Французскій астрономъ **Делямбръ** составилъ двѣ важныхъ формулы, при помощи которыхъ вычисляютъ lg sin и lg tg малыхъ угловъ. Формулы эти не точныя, а только приближенныя, но при ихъ помощи можно производить сказанныя вычисленія съ достаточной для насъ степенью точности. Выводить этихъ формулъ мы не будемъ, такъ какъ ихъ выводъ довольно сложенъ и требуетъ знанія нѣкоторыхъ алгебраическихъ формулъ, вывода которыхъ въ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ не проходятъ. Ограничимся поэтому только тѣмъ, что въ слѣдующей главѣ познакомимся съ употребленіемъ этихъ формулъ при вычисленіяхъ, сдѣлавъ лишь нѣкоторыя поясненія относительно ихъ состава.

Глава IX. **Формулы Делямбра для вычисленія логариѳмовъ тригон. величинъ малыхъ угловъ.**

§ **47.** Въ предыдущемъ § 46 мы обѣщали познакомить съ употребленіемъ, такъ назыв., формулъ Делямбра, не давая ихъ вывода. Эти 2 приближенныя формулы, при помощи которыхъ можно съ достаточной для насъ степенью точности вычислять lg sin и lg tg малыхъ угловъ, имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\lg\sin n'' = \lg n + S_0 - \sigma$$

и $$\lg\operatorname{tg} n'' = \lg n + S_0 + 2\sigma,$$

гдѣ n—число секундъ угла, $S_0 = \lg\sin 1'' = \bar{6},68557_5$, греческой же буквой σ обозначена дробь $\frac{Mx^2}{6}$, въ которой M есть, такъ назыв., модуль десятичныхъ логариѳмовъ*), а x, такъ назыв., радіальное значеніе угла въ n'', или, яснѣе, отношеніе длины

*) Это есть число, на которое надо умножать т. наз. натуральный или гиперболическій логариѳмъ даннаго числа для полученія его десятичнаго логариѳма; оно приблизительно равно 0,43429448.

дуги въ n'' къ ея радіусу (см. ниже § 106). Значитъ S_0 есть постоянное число, не зависящее отъ даннаго угла n'', значенія же σ зависятъ отъ даннаго угла; эти значенія σ вычислены и помѣщены въ таблицѣ логариѳмовъ **чиселъ** сборника таблицъ проф. Глазенапа (въ таблицахъ же lg-овъ чиселъ другихъ составителей значенія S_0 и σ отдѣльно не помѣщены, а даны сразу значенія составленныхъ изъ нихъ выраженій: $S_0 - \sigma$ подъ буквой S и $S_0 + 2\sigma$ подъ буквой T).

Пользованіе формулами Делямбра станетъ понятнымъ послѣ вычисленія нѣсколькихъ примѣровъ.

Вычислимъ, напримѣръ, $\lg\sin 1^0 23' 48''$ и $\lg \operatorname{tg} 1^0 23' 48''$.

Раздробимъ $1^0 23' 48''$ въ секунды; въ таблицѣ Глазенапа это отчасти уже сдѣлано, именно на стр. 18 въ 4-мъ столбцѣ найдемъ: $1^0 23' = 4980''$; если же прибавить сюда $48''$, то получимъ $5028''$; итакъ $1^0 23' 48'' = 5028''$.

$$\lg\sin 1^0 23' 48'' = \lg\sin 5028'' = \left|\begin{array}{l} \lg 5028 = 3{,}70140 \\ + S_0 \,.\,. + \overline{6},68557.5 \\ - \sigma \;.\;.\;.\;.\;.\; -4.2 \\ \hline \end{array}\right.$$

Отсюда $\lg\sin 1^0 23' 48'' = \overline{2},38693$.

$$\lg \operatorname{tg} 1^0 23' 48'' = \lg \operatorname{tg} 5028'' = \left|\begin{array}{l} \lg 5028 = 3{,}70140 \\ + S_0 \,.\,. + \overline{6},68557.5 \\ + 2\sigma \,.\,. \qquad +8.4 \\ \hline \end{array}\right.$$

Отсюда $\lg \operatorname{tg} 1^0 23' 48'' = \overline{2},38706$.

Если нужно вычислить lg ctg того же угла, то можемъ писать:

$$\lg \operatorname{ctg} 1^0 23' 48'' = -\lg \operatorname{tg} 1^0 23' 48'' = -\overline{2},38706 = 1{,}61294.$$

Возьмемъ еще 2 примѣра: 1) вычислить $\lg\cos 87^0 42' 31''$ и 2) $\lg \operatorname{ctg} 89^0 54' 45''$.

1) $$\lg\cos 87^0 42' 31'' = \lg\sin 2^0 17' 29'' = \lg\sin 8249'' = \left|\begin{array}{l} \lg 8249 \,.\,. \, 3{,}91640 \\ + S_0 \,.\,. + \overline{6},68557.5 \\ - \sigma \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. -11.6 \\ \hline \end{array}\right.$$

Отсюда $\lg\cos 87^0 42' 31'' = \overline{2},60186$

2) $$\lg \operatorname{ctg} 89^0 54' 45'' = \lg \operatorname{tg} 5' 15'' = \left|\begin{array}{l} \lg 315 = 2{,}49831 \\ + S_0 \,.\,. + \overline{6},68557.5 \\ + 2\sigma \,.\,.\,. \qquad +0 \\ \hline \end{array}\right.$$

Отсюда $\lg \operatorname{ctg} 89^0 54' 45'' = \overline{3},18389$.

§ **48.** При помощи тѣхъ же формулъ можно рѣшать и обратныя задачи, т. е. по lg sin и lg tg малыхъ угловъ находить самые углы. Для этого надо предварительно эти формулы преобразовать, опредѣливъ изъ нихъ $\lg n$. Тогда имѣемъ, если будемъ пользоваться таблицами Глазенапа:

$$\lg n = \lg \sin n'' - S_0 + \sigma$$
$$\lg n = \lg \operatorname{tg} n'' - S_0 - 2\sigma$$

(или, если пользуемся таблицами Пржевальскаго или имъ подобными:

$$\lg n = \lg \sin n'' - S$$
$$\lg n = \lg \operatorname{tg} n'' - T).$$

Пусть, напримѣръ, при опредѣленіи угла φ изъ условій какой-нибудь задачи получили: $\lg \operatorname{tg} \varphi = \overline{2},48732$.

По таблицамъ lg-овъ тригоном. величинъ видимъ, что искомый уголъ φ равенъ приблизительно $1^0 45'$, т. е. искомый уголъ малъ.

Тогда на стр. 23 таблицъ Глазенапа видимъ, что 2σ для $1^0 45'$ равно 13,5 стотыс. доли.

$$\text{Поэтому } \lg n = \left|\begin{array}{lr} \lg \operatorname{tg} \varphi & = \overline{2},48732 \\ -S_0 \ldots -\overline{6},68557.5 & = 5,31442.5 \\ -2\sigma \quad \ldots\ldots & -13.5 \\ \hline \end{array}\right.$$

$$\lg n = 3,80161,$$
$$\text{а } 3,80161 = \lg 6333$$

Отсюда искомый уголъ $\varphi = n'' = 6333'' = 1^0 45' 33''$.

Возьмемъ еще примѣръ. Положимъ, что при нахожденіи угла φ получили: $\lg \sin \varphi = \overline{2},57934$. Изъ таблицъ видимъ, что искомый уголъ φ приблизительно равенъ $2^0 10'$, т. е. что онъ малъ.

$$\text{Тогда вычисляемъ такъ: } \lg n = \left|\begin{array}{lr} \lg \sin \varphi & = \overline{2},57934 \\ -S^0 \ldots & + 5,31442.5 \\ +\sigma \ldots\ldots & + 10.4 \\ \hline \end{array}\right.$$

$$\lg n = 3,89387 = \lg 7832.$$

Значитъ $\angle \varphi = n'' = 7832'' = 2^0 10' 32''$.

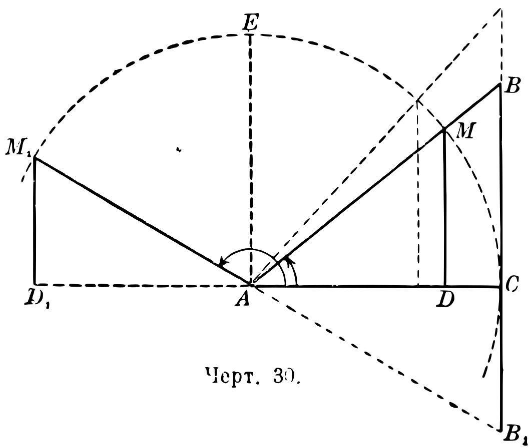
Если при нахожденіи угла φ получили $\lg \cos \varphi$ или $\lg \operatorname{ctg} \varphi$ и при этомъ изъ таблицъ увидали, что этотъ уголъ большой (почти прямой), то надо поступить слѣдующимъ образомъ: замѣнивъ $\lg \cos \varphi$ или $\lg \operatorname{ctg} \varphi$ соотвѣтственно черезъ $\lg \sin (90^0 - \varphi)$ или $\lg \operatorname{tg} (90^0 - \varphi)$, вычислимъ сперва по формулѣ Делямбра малый уголъ $(90^0 - \varphi)$, т. е. вычислимъ уголъ, дополнительный къ искомому углу, послѣ чего уже легко будетъ опредѣлить и искомый уголъ φ.

ОТДѢЛЪ II. Рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ.

Глава X. Тригонометрическія величины тупого угла.

§ 49. Sinus, tg и sec тупого угла.

Въ косоугольныхъ треугольникахъ кромѣ острыхъ угловъ могутъ быть и тупые. Поэтому, прежде чѣмъ перейти къ рѣшенію косоугольныхъ треугольниковъ, необходимо понятіе о тригонометр. величинахъ распространить и на тупые углы. Но предварительно вспомнимъ изъ курса алгебры о томъ, что для общности рѣшенія разнаго рода задачъ необходимо принять слѣдующее основное правило, называемое **принципомъ Декарта:**



Черт. 30.

Если условиться длины линій при одномъ опредѣленномъ ихъ направленіи (напр., при направленіи слѣва направо или снизу вверхъ отъ какой-нибудь точки) выражать обыкновенными, положительными числами, то при противоположномъ направленіи такихъ же линій ихъ длины необходимо обозначать числами отрицательными.

Примѣчаніе: Этотъ принципъ Декарта, какъ извѣстно, соотвѣтствующимъ образомъ распространяется и на углы, и на дуги и вообще на всѣ величины, способныя измѣнять свое направленіе.

Возьмемъ теперь какой-нибудь острый уголъ и, построивъ его линіи синуса, тангенса и секанса, посмотримъ, что сдѣлается съ ними, если данный уголъ, увеличиваясь, станетъ, наконецъ, тупымъ *(черт. 30)*.

Положимъ, что вмѣсто первоначально остраго угла CAM мы получили тупой уголъ CAM_1, измѣряемый дугой CEM_1. Пока уголъ CAM, измѣняясь, остается острымъ, линіей его синуса все время служитъ перпендикуляръ, опущенный изъ конца дуги, измѣряющей данный уголъ, на неподвижный ея радіусъ. Естественно за линію синуса и для тупого угла принять такимъ же образомъ проведенный перпендикуляръ. Значитъ, линіей синуса тупого угла CAM_1 нужно считать перпендикуляръ M_1D_1, опущенный изъ конца дуги M_1 на продолженіе неподвижнаго радіуса. Тогда синусомъ тупого угла α^0 будетъ отношеніе $\frac{M_1D_1}{AM_1}$.

Сравнивая между собой линіи синуса для остраго и для тупого угла, видимъ, что онѣ направленіемъ другъ отъ друга не отличаются: и при остромъ, и при тупомъ углѣ онѣ направлены кверху отъ горизонтально расположеннаго неподвижнаго радіуса. Значитъ, на основаніи принципа Декарта, синусъ тупого угла есть число положительное.

Изъ чертежа 30 легко также видѣть, что при измѣненіи угла отъ 90 до 180^0 синусъ его измѣняется отъ $+1$ до 0, такъ какъ, если тупой уголъ $\alpha \to 90^0$, то $\sin\alpha \to 1$,

если же $\alpha \to 180^0$, то $\sin\alpha \to 0$ *).

Перейдемъ къ тангенсу. Пока уголъ остается острымъ, линіей его тангенса служитъ отрѣзокъ касательной, проведенной черезъ начало соотв. дуги, между этимъ началомъ и точкой пересѣченія касательной съ продолженіемъ подвижнаго радіуса. Естественно за линію тангенса угла, когда онъ сталъ тупымъ, принять отрѣзокъ, полученный такимъ же образомъ. Поэтому линіей тангенса тупого угла CAM_1 надо считать отрѣзокъ CB_1; тангенсомъ же тупого угла, слѣдовательно, будетъ отношеніе $\frac{CB_1}{AC}$.

Линія тангенса CB_1 тупого угла, какъ видимъ изъ чертежа 30, направлена книзу отъ горизонтально расположеннаго неподвижнаго радіуса, въ то время какъ для остраго угла она была направлена кверху. Значитъ, тангенсъ тупого угла имѣетъ отрицательное значеніе.

Изъ чертежа 30 также видно, что, если тупой уголъ CAM_1 станетъ уменьшаться и будетъ стремиться къ равенству съ прямымъ угломъ, то tg этого угла, оставаясь все время отрицательнымъ, по абсолютной величинѣ будетъ неограниченно увеличиваться, такъ что можемъ написать: если тупой уголъ $\alpha \to 90^0$, то $\operatorname{tg}\alpha \to -\infty$ *). Если же тупой уголъ будетъ увеличиваться до 180^0, то tg его, оставаясь отрицательнымъ, по абсолютной величинѣ будетъ уменьшаться до 0. Такимъ образомъ, при увеличеніи угла отъ 90 до 180^0 тангенсъ этого угла будетъ измѣняться отъ $-\infty$ до 0, т. е. можетъ принять какое-угодно отрицательное значеніе.

Посмотримъ теперь, что станетъ съ линіей секанса. Пока уголъ остается острымъ, линіей секанса называется отрѣзокъ,

*) Сравни съ § 29.

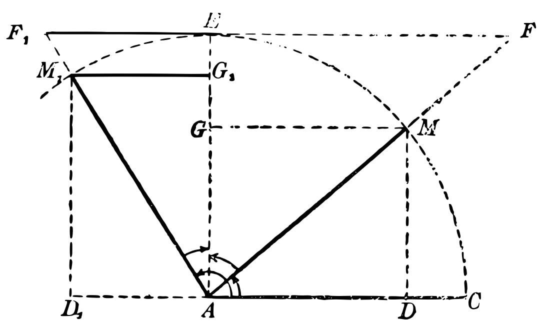
соединяющій вершину угла съ концомъ линіи тангенса. Если считать это опредѣленіе пригоднымъ и для тупого угла, что вполнѣ естественно, то линіей секанса нашего тупого угла CAM_1 надо считать отрѣзокъ AB_1. Здѣсь линія секанса направлена отъ вершины угла не по направленію подвижнаго радіуса, какъ это было, пока уголъ оставался острымъ,а въ противоположную сторону, такъ что секансъ тупого угла будетъ отрицательнымъ числомъ.

§ **50. Cosinus, ctg и csc тупого угла.** Итакъ, на основаніи принципа Декарта, для тупого угла синусъ имѣетъ положит. значеніе, но тангенсъ и секансъ имѣютъ значенія отрицательныя.

Посмотримъ теперь, что станетъ съ такими же величинами угла дополнительнаго, если данный уголъ сдѣлается тупымъ.

Дополнительнымъ угломъ, какъ извѣстно, назыв. уголъ, который надо прибавить къ данному, чтобы получить прямой уголъ. Если данный уголъ равенъ α^0, то дополнительный равенъ $(90-\alpha)^0$; если данный уголъ α^0 острый и равенъ, напримѣръ, 70^0, то дополнительный уголъ $(90-\alpha)^0=(90-70)^0=20^0$.

Если же данный уголъ сдѣлается тупымъ, то ранѣе составленное опредѣленіе дополнительнаго угла придется нѣсколько измѣнить. Именно, будемъ называть дополнительнымъ къ данному углу тотъ уголъ, на который надо повернуть подвижный радіусъ, чтобы вмѣсто даннаго угла получить прямой уголъ. На основаніи этого опредѣленія, для остраго угла CAM *(черт. 31)* дополнительнымъ угломъ будетъ уголъ MAE, имѣющій такое же направленіе, какъ и данный уголъ; для тупого же угла CAM_1 дополнительнымъ будетъ уголъ M_1AE, имѣющій направленіе, противоположное направленію даннаго положительнаго угла; значитъ, для тупого угла дополнительный уголъ будетъ отрицательнымъ.



Черт. 31.

Такъ, если данный уголъ $\alpha^0=120^0$, то его дополнительнымъ угломъ будетъ уголъ $(90-\alpha)^0=(90-120)^0=-30^0$.

Итакъ, дополнительнымъ для даннаго тупого угла CAM_1 будетъ отрицательный уголъ M_1AE, для него же неподвижнымъ радіусомъ будетъ AE, а подвижнымъ AM_1, такъ что его линіей синуса будетъ отрѣзокъ G_1M_1, который можно замѣнить равнымъ ему отрѣзкомъ AD_1; этотъ же отрѣзокъ служитъ проекціей подвижнаго радіуса на продолженіе неподвижнаго радіуса даннаго угла. Далѣе, линіей тангенса дополнит. угла будетъ отрѣзокъ EF_1, а линіей секанса AF_1. А такъ какъ синусъ, тангенсъ и секансъ дополн. угла назыв. соотвѣтственно косинусомъ, котангенсомъ и косекансомъ даннаго угла, то для тупого угла CAM_1, равнаго α^0,

$$\cos\alpha = \text{отн.}\frac{AD_1}{AM_1},\ \operatorname{ctg}\alpha = \text{отн.}\frac{EF_1}{AE}\ \text{ и }\ \csc\alpha = \text{отн.}\ \frac{AF_1}{AE}.$$

Сравнивая направленіе только что разсмотрѣнныхъ тригоном. линій тупого угла съ направленіемъ соотвѣтствующихъ линій остраго угла, замѣчаемъ, что линіи косинуса AD_1 и AD и линіи котангенса EF_1 и EF для тупого и для остраго угла имѣютъ направленія соотвѣтственно противоположныя, обѣ же линіи косеканса AF_1 и AF направлены по подвижному радіусу, т. е. имѣютъ направленіе одинаковое. Поэтому на основаніи принципа Декарта cos и ctg тупого угла имѣютъ отрицательныя значенія, а csc—положительное.

Наблюдая за измѣненіемъ длины линій косинуса AD_1 и котангенса EF_1 (*черт. 31*) при измѣненіи тупого угла CAM_1 до 90^0 и обратно до 180^0, замѣчаемъ, что при увеличеніи угла отъ 90 до 180^0 косинусъ измѣняется отъ 0 до -1, а котангенсъ отъ 0 до $-\infty$.

§ **51**. Сопоставимъ въ слѣдующей табличкѣ знаки тригоном. величинъ тупого угла.

Если уголъ α тупой, то

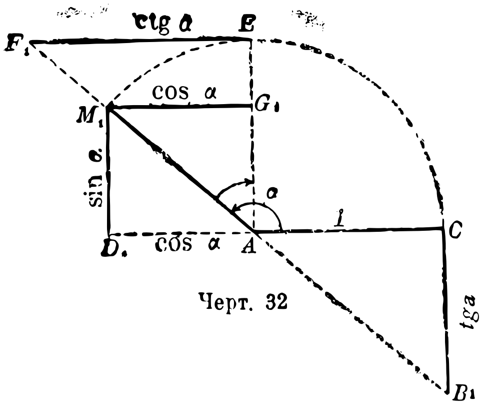
$\sin\alpha$ имѣетъ	$+$	$\cos\alpha$ имѣетъ	$-$
$\operatorname{tg}\alpha$ „	$-$	$\operatorname{ctg}\alpha$ „	$-$
$\sec\alpha$ „	$-$	$\csc\alpha$ „	$+$,

т. е. **только sin и csc тупого угла имѣютъ положительное значеніе, всѣ же остальныя величины—отрицательное.**

Глава XI. **Распространеніе формулъ соотношенія (§ 23) на тригонометрическія величины тупого угла.**

§ **52**. Распространивъ понятіе о тригоном. величинахъ съ острыхъ на тупые углы, докажемъ, что формулы соотношеній между тригоном. величинами одного и того же угла, выведенныя нами въ § 21—23 для остраго угла, справедливы и для тупого.

I. $\mathrm{Sin}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (?). Эта формула легко выводится изъ $\triangle\, A_1M_1D_1$ *(черт. 32)* на основаніи теоремы Пиѳагора, причемъ знаки синуса и косинуса вліянія на нее не оказываютъ, такъ какъ значенія этихъ величинъ входятъ во второй степени. Слѣдуетъ только имѣть въ виду то, что, если опредѣлять изъ этой формулы $\cos\alpha$ по $\sin\alpha$, то передъ корнемъ надо брать знакъ —(минусъ), такъ какъ cos тупого угла есть число отрицательное:



Черт. 32

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha};$$

при опредѣленіи же $\sin\alpha$ по $\cos\alpha$ передъ корнемъ берется $+$.

II. Формулу $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ легко вывести тѣмъ же способомъ, какъ и въ § 21 на основаніи подобія $\triangle\triangle\ ACB_1$, и AD_1M_1. Обращая же вниманіе на направленіе соотвѣтствующихъ тригонометрическихъ линій, видимъ, что отнош. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ равно отрицательному числу, такъ какъ sin тупого угла положителенъ, а cos—отрицателенъ, а отношеніе количествъ съ разными знаками отрицательно. Значитъ, правая часть нашей формулы имѣетъ отрицательное значеніе, но и лѣвая часть, т. е. $\mathrm{tg}\,\alpha$, тоже отрицательна. Итакъ, эта формула II справедлива и относительно знаковъ.

III. Формула $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ выводится на основаніи подобія $\triangle\triangle\ AEF_1$ и AG_1M_1. Относительно знаковъ она также справедлива, такъ какъ для тупого угла обѣ части ея имѣютъ отрицательное значеніе.

IV. Формулу $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ легко вывести на основаніи подобія $\triangle\triangle\ AB_1C$ и AM_1D_1. Относительно знаковъ она тоже справедлива, такъ какъ для тупого угла sec и cos имѣютъ оба отрицательное значеніе.

V. $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ (?). Формула эта выводится изъ подобія $\triangle\triangle$ AEF_1 и AG_1M_1 и относительно знаковъ она также справедлива, т. к. csc и sin для тупого угла α оба имѣютъ положительное значеніе.

Справедливость остальныхъ формулъ соотношенія (VI: $\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$, VII: $\csc^2\alpha = 1 + ctg^2\alpha$ и VIII: $ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$) доказывать не приходится, т. к. онѣ представляютъ изъ себя необходимыя слѣдствія только что разсмотрѣнныхъ 5 формулъ (§ 22).

Глава XII. **Формулы приведенія тригонометрическихъ величинъ тупого и отрицательнаго угловъ.**

§ **53.** Само собой разумѣется, что полезно имѣть возможность тригонометрическія величины тупого угла замѣнять тригонометрическими величинами угла остраго. Формулы, служащія этой цѣли, называются формулами приведенія (подразумѣвается: „тригоном. величинъ къ острому углу“).

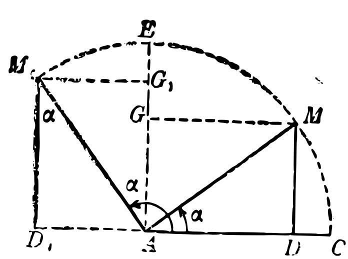
Всякій тупой уголъ можетъ быть выраженъ черезъ нѣкоторый острый уголъ α^0 двоякимъ способомъ:

1) тупой уголъ можетъ быть равенъ $(90 + \alpha)^0$; тогда уголъ α^0 можно назвать **избыткомъ** тупого угла надъ прямымъ;

2) тупой уголъ можетъ быть равенъ $(180 - \alpha)^0$ и при этомъ углы α^0 и $(180 - \alpha)^0$ называются взаимно **пополнительными**, такъ какъ они пополняютъ другъ друга до развернутаго угла, равнаго **180⁰**.

Поэтому формулы приведенія для тупого угла бываютъ двухъ родовъ: 1) формулы приведенія къ избытку и 2) формулы приведенія къ пополнительному углу.

§ **54. Формулы приведенія къ избытку.** Возьмемъ тупой уголъ CAM_1, равный $(90 + \alpha)^0$, и уголъ CAM, равный его избытку EAM_1, т. е. α^0. Построимъ линіи синуса и косинуса этихъ угловъ (*черт. 33*). Тогда



Черт. 33.

$$\sin(90^0 + \alpha) = \text{отн.}\ \frac{M_1D_1}{AM_1}$$

и $\cos(90^0 + \alpha) = \text{отн.}\ \frac{AD_1}{AM_1}$.

Прямоуг. $\triangle\triangle$ AM_1D_1 и AMD равны, потому что у нихъ гипотенузы равны, какъ радіусы, а острый уголъ D_1M_1A равенъ углу EAM_1, т. е. α^0, такъ какъ эти углы—внутренніе накрестъ лежащіе при параллельныхъ M_1D_1 и AE. Поэтому $M_1D_1 = AD$ и $AD_1 = DM$. Слѣдовательно, $\sin(90^0 + \alpha) =$ отн. $\dfrac{M_1D_1}{AM_1} = \dfrac{AD}{AM} =$ $= + \cos\alpha$ (знакъ $+$ потому, что $\sin(90^0 + \alpha)$ есть число положительное), а $\cos(90^0 + \alpha) =$ отн. $\dfrac{AD_1}{AM_1} = -$ отн. $\dfrac{DM}{AM} = - \sin\alpha$; знакъ минусъ въ правой части передъ $\sin\alpha$ взятъ потому, что $\cos(90^0 + \alpha)$ есть число отрицательное. Итакъ имѣемъ 2 формулы:

$$\sin(90^0 + \alpha) = + \cos\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$
$$\cos(90^0 + \alpha) = - \sin\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Если произведемъ дѣленіе надъ соотвѣтствующими частями этихъ формулъ, получимъ:

$$\frac{\sin(90^0 + \alpha)}{\cos(90^0 + \alpha)} = - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

откуда на основаніи формулъ соотношенія § 23, распространенныхъ нами въ § 52 и на тупые углы, имѣемъ:

$$\operatorname{tg}(90^0 + \alpha) = - \operatorname{ctg}\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Сдѣлавъ же обратное дѣленіе надъ обѣими частями формулъ (1) и (2), получимъ: $\dfrac{\cos(90^0 + \alpha)}{\sin(90^0 + \alpha)} = - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ или

$$\operatorname{ctg}(90^0 + \alpha) = - \operatorname{tg}\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Взявъ обратныя дроби для обѣихъ частей формулъ (1) и (2), имѣемъ:

$$\frac{1}{\sin(90^0 + \alpha)} = + \frac{1}{\cos\alpha} \text{ и } \frac{1}{\cos(90^0 + \alpha)} = - \frac{1}{\sin\alpha},$$

откуда, опять на основаніи формулъ соотношенія, получаемъ:

$$\csc(90^0 + \alpha) = + \sec\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$
$$\text{и } \sec(90^0 + \alpha) = - \csc\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

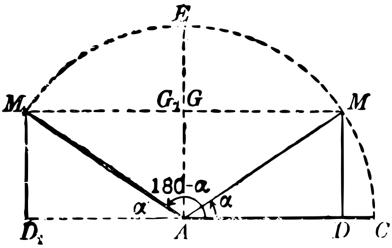
Сопоставляя всѣ 6 только что выведенныхъ формулъ, замѣчаемъ, что всѣ тригонометрическія величины тупого угла $(90 + \alpha^0)$ равны не одноименнымъ, но сходнымъ по названію*) тригонометрическимъ величинамъ его избытка α^0, взятымъ со знакомъ $+$ или $-$; при этомъ знакъ $+$ будетъ, если приводимая величина имѣетъ положительное значеніе, а знакъ $-$, если она имѣетъ отрицательное значеніе.

*) т. е. такимъ, названіе которыхъ отличается отъ названія приводимой величины только или прибавленіемъ, или опущеніемъ приставки „Со“.

Примѣры: $\sin 100^0 = \sin (90 + 10)^0 = \cos 10^0$; $\cos 130^0 = \cos (90 + 40)^0 = - \sin 40^0$; $\operatorname{tg} 148^0 15' 37'' = - \operatorname{ctg} 58^0 15' 37''$ и т. п.

§ 55. Формулы приведенія къ пополнительному углу.

Возьмемъ тупой уголъ CAM_1 и острый уголъ CAM, равный его пополнительному углу M_1AD_1, содержащему, положимъ, α^0 *(черт. 34)*. Построимъ линіи синуса и косинуса угловъ α^0 и $(180 - \alpha)^0$. Тогда получимъ 2 прямоуг. $\triangle\triangle$ ADM и AD_1M_1, которые равны между собой, такъ какъ у нихъ гипотенузы равны, какъ радіусы, а углы при A оба равны по условію α^0. Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что



Черт. 34.

$$M_1D_1 = MD \text{ и } AD_1 = AD;$$

при этомъ линіи sin-овъ M_1D_1 и MD имѣютъ одинаковое направленіе, а линіи cos-овъ AD_1 и AD—противоположное.

На этомъ основаніи:

$$\text{отн. } \frac{M_1D_1}{AM_1} = + \text{ отн. } \frac{MD}{AM}, \text{ а отн. } \frac{AD_1}{AM_1} = - \text{ отн. } \frac{AD}{AM}, \text{ т. е.}$$

$$\mathbf{\sin (180^0 - \alpha) = + \sin \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\mathbf{\cos (180^0 - \alpha) = - \cos \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Если произведемъ надъ соотвѣтств. частями этихъ формулъ дѣленіе, то получимъ: $\dfrac{\sin (180^0 - \alpha)}{\cos (180^0 - \alpha)} = - \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, откуда на основаніи формулъ соотношенія имѣемъ:

$$\mathbf{\operatorname{tg} (180^0 - \alpha) = - \operatorname{tg} \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Произведя же обратное дѣленіе, имѣемъ:

$$\frac{\cos (180^0 - \alpha)}{\sin (180^0 - \alpha)} = - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \text{ или}$$

$$\mathbf{\operatorname{ctg} (180^0 - \alpha) = - \operatorname{ctg} \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Если же взять обратныя дроби обѣихъ частей формулъ (1) и (2), то получимъ: $\dfrac{1}{\sin (180^0 - \alpha)} = \dfrac{1}{\sin \alpha}$ и $\dfrac{1}{\cos (180^0 - \alpha)} = - \dfrac{1}{\cos \alpha}$, откуда на основаніи формулъ соотношенія:

$$\mathbf{\csc (180^0 - \alpha) = + \csc \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$
$$\text{и } \mathbf{\sec (180^0 - \alpha) = - \sec \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

Сопоставляя только что выведенныя 6 формулъ, замѣчаемъ, что в с ѣ т р и г о н о м е т р и ч е с к і я в е л и ч и н ы т у п о г о у г л а $(180 - \alpha)^0$ м о ж н о з а м ѣ н и т ь о д н о и м е н н ы м и в е л и ч и-нами его пополнительнаго угла α^0, взятыми со знакомъ $+$ или $-$, при чемъ знакъ $+$ будетъ, если приводимая величина положительна, а знакъ $-$, если приводимая величина отрицательна.

Примѣры: $\sin\ 150^0 = \sin\ (180 - 30)^0 = \sin 30^0$; $\cos\ 170^0 = \cos(180-10)^0 = -\cos 10^0$; $\operatorname{tg} 137^0 28' 48'' = -\operatorname{tg}(180^0 - 137^0 28' 48'') = -\operatorname{tg}(179^0 59' 60'' - 137^0 28' 48'') = -\operatorname{tg} 42^0 31' 12''$ и т. п.

§ **56.** *Примѣчаніе.* Легко обнаружить, что формулы приведенія тригонометрическихъ величинъ угла $(180^0 - \alpha)$ къ углу α^0 справедливы и въ томъ случаѣ, когда уголъ α^0 тупой. Въ самомъ дѣлѣ, углы $180^0 - \alpha$ и α^0 пополняютъ другъ друга до 180^0 взаимно. Поэтому, если уголъ α^0—тупой, то его тригонометрическія величины можно замѣнить тригонометрическими величинами пополнительнаго остраго угла $(180 - \alpha)^0$, и потому

$$\sin\alpha = +\sin(180^0 - \alpha)$$
$$\text{и } \cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha);$$

помноживъ обѣ части 2-ой формулы на -1 и читая обѣ формулы слѣва направо, получимъ:

$$\sin(180^0 - \alpha) = +\sin\alpha$$
$$\text{и } \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha,$$

при чемъ уголъ α^0—тупой.

§ **57. Важное замѣчаніе о вычисленіи угла по синусу.** Изъ формулъ (1) и (6) § 55, именно изъ формулъ

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\csc(180^0 - \alpha) = \csc\alpha$$

легко заключить, что sin, а также и csc, имѣютъ одно и то же значеніе для двухъ угловъ: для остраго и для тупого. Поэтому, если мы опредѣляемъ уголъ косоугольнаго треугольника по его sin-у или csc-у, то искомый уголъ, вообще говоря, можетъ имѣть 2 значенія:

1) онъ можетъ быть острымъ угломъ, напримѣръ α^0, и

2) онъ можетъ быть тупымъ, пополнительнымъ для остраго угла α^0.

Напримѣръ, если имѣемъ ур-іе

$$\sin\varphi = \frac{1}{2},$$

гдѣ уголъ φ искомый, то можемъ сказать, что

$$1)\ \varphi = 30^0$$
$$\text{и } 2)\ \varphi = (180 - 30)^0 = 150^0.$$

Если же уголъ треугольника опредѣляется по значенію какой-нибудь изъ остальныхъ 4-хъ тригонометрическихъ величинъ, то для него будемъ всегда получать только одно значеніе, при чемъ искомый уголъ можетъ быть или острымъ, или тупымъ, смотря по тому, какой знакъ (+ или —) имѣетъ его тригонометр. величина.

Напримѣръ, получивъ ур-іе:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2},$$

утверждаемъ, что уголъ $\varphi = 60^0$, и только; если же имѣемъ ур-іе

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2},$$

то утверждаемъ, что $\varphi = (180-60)^0 = 120^0$, такъ какъ $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, а $\cos 120^0 = \cos\ (180-60)^0 = -\cos 60^0$.

Точно такъ же ур-ія

$$1)\ \operatorname{tg}\alpha = 1 \text{ и } 2)\ \operatorname{tg}\beta = -\sqrt{3}$$

имѣютъ соотвѣтственно рѣшенія:

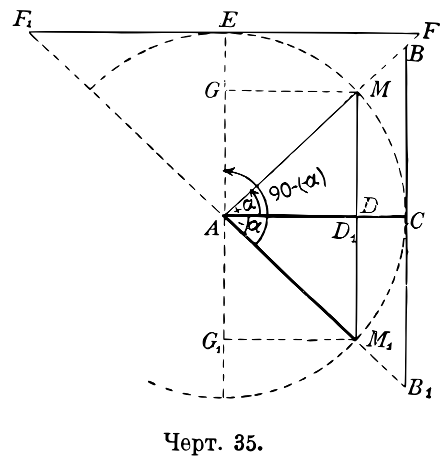
$$1)\ \alpha = 45^0 \text{ и } 2)\ \beta = (180-60)^0 = 120^0,$$

ибо $\operatorname{tg}45^0 = 1$ и $\operatorname{tg}\ 60^0 = \sqrt{3}$ (§ 27), а поэтому $\operatorname{tg}\ 120^0 = \operatorname{tg}\ (180-60)^0 = -\operatorname{tg}\ 60^0 = -\sqrt{3}$.

§ 58. Приведеніе тригонометрическихъ величинъ отрицательнаго угла.

При рѣшеніи задачъ иногда могутъ получаться и отрицательные углы. Поэтому познакомимся съ тригонометрическими величинами отрицательныхъ угловъ и выведемъ формулы для приведенія этихъ величинъ къ положительному углу.

Возьмемъ положительный острый уголъ $CAB = \alpha^0$ и равный ему по величинѣ отрицательный, т. е. направленный въ противоположную сторону отъ неподвижнаго радіуса, уголъ CAB_1, равный $(-\alpha)^0$ (*черт. 35*). Построимъ для нихъ всѣ тригонометрическія линіи, руководствуясь ранѣе выведенными правилами (§§ 19 и 20). Тогда мы увидимъ, что на основаніи равенства соотвѣтствующихъ треугольниковъ (ADM и AD_1M_1, ACB и ACB_1, AEF_1 и AEF) всѣ тригонометрическія линіи отрицательнаго угла $(-\alpha^0)$



Черт. 35.

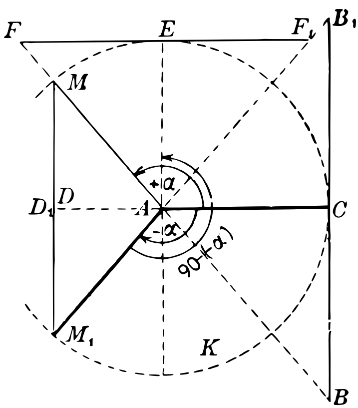
равны одноименнымъ линіямъ положительнаго угла (α^0); только нѣкоторыя отличаются отъ нихъ направленіемъ. Такъ, линіи синусовъ D_1M_1 и DM, линіи тангенсовъ CB_1 и CB, линіи котангенсовъ EF_1 и EF и линіи косекансовъ AF и AF_1 направленіемъ отличаются, и потому:

1) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; 3) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$;
2) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$,

линіи же косинусовъ AD_1 и AD и секансовъ AB_1 и AB направленіемъ не отличаются, и потому

$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha \text{ и } \sec(-\alpha) = +\sec\alpha.$$

Точно такъ же, взявъ тупые углы CAM и CAM_1 (*черт. 36*), равные по величинѣ, но направленные противоположно, считая отъ ихъ общаго неподвижнаго радіуса AC, и построивъ всѣ ихъ тригонометрическія линіи, убѣждаемся въ томъ, что при перемѣнѣ направленія тупого угла знаки всѣхъ его тригонометр. величинъ, за исключеніемъ только косинуса и секанса, мѣняются.



Черт. 36.

Поэтому вышенаписанныя формулы будутъ справедливы и для тупого угла $(-\alpha)$.

Примѣры. 1) $\sin(-30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$, 2) $\cos(-30^0) = +\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}(-60^0) = -\operatorname{tg} 60^0 = -\sqrt{3}$; 4) $\sin(\alpha - 90^0) = \sin[-(90^0 - \alpha)] = -\sin(90^0 - \alpha) = -\cos\alpha$; 5) $\operatorname{tg}(\alpha - 180^0) = \operatorname{tg}[-(180^0 - \alpha)] = -\operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = -(-\operatorname{tg}\alpha) = +\operatorname{tg}\alpha$; 6) $\sec(\alpha - 90^0) = \sec(90^0 - \alpha) = \csc\alpha$.

Глава XIII. **Формулы зависимости между основными элементами косоугольнаго треугольника.**

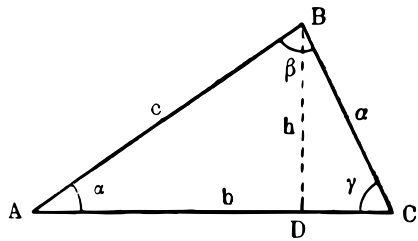
Распространивъ понятіе о тригонометрическихъ величинахъ остраго угла на тупые углы, доказавъ затѣмъ, что тригонометрическія величины одного и того же тупого угла находятся между собой въ такихъ же соотношеніяхъ, какъ и тригонометрическія величины угла остраго, и наконецъ, сдѣлавъ выводъ формулъ, при помощи которыхъ можно тригонометрическія величины тупого угла замѣнять тригонометрическими величинами угла остраго и даже угла, меньшаго 45^0, можемъ приступить теперь къ рѣшенію косоугольныхъ треугольниковъ.

§ **59**. Прежде всего **выразимъ тригонометрически** *) **зависимость между сторонами всякаго треугольника съ одной стороны и противолежащими имъ углами—съ другой.**

Изъ геометріи по этому вопросу мы знаемъ только, что противъ равныхъ сторонъ $\triangle$-а лежатъ и равные углы, и наоборотъ, и что противъ бо́льшей стороны лежитъ и бо́льшій уголъ, и обратно. Такого рода зависимость—характера слишкомъ неопредѣленнаго. Найдемъ зависимость болѣе опредѣленную.

Возьмемъ косоугольный $\triangle$ ABC (*черт. 37*). Пусть его углы, соотвѣтственно большимъ латинскимъ буквамъ при вершинахъ, содержатъ α^0, β^0 и γ^0, а противолежащія имъ стороны равны соотвѣтственно a, b и c какихъ-нибудь единицъ длины (напр., миллиметрамъ).

Прежде всего полезно получить такіе прямоугольные $\triangle\triangle$, въ которыхъ элементами служили бы стороны и углы нашего косоугольнаго $\triangle$-ка. Поэтому, для того, чтобы выразить зависимость между сторонами a и c, опустимъ высоту BD, равную, положимъ, h ед. длины. Тогда изъ прямоугольнаго $\triangle$ DBC: $h = a \sin\gamma$, такъ что



Черт. 37.

$$a = \frac{h}{\sin\gamma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Далѣе опредѣлимъ h по c изъ $\triangle$ ABD:

$$h = c \sin\alpha.$$

Тогда послѣ подстановки въ ур-іе (1):

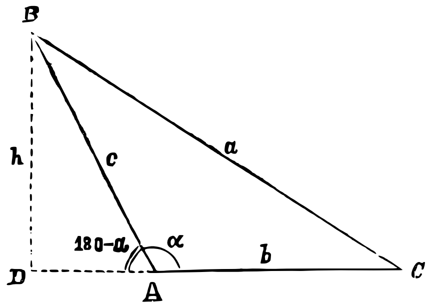
$$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

А отсюда получается пропорція:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},$$

*) т. е. пользуясь тригонометрическими величинами угловъ.

т. е. двѣ стороны остроугольнаго $\triangle$-ка относятся между собой такъ, какъ синусы противолежащихъ имъ угловъ.



Черт. 38.

Легко обнаружить, что эта формула справедлива и для тупоугольнаго $\triangle$ ABC (*черт. 38*).

Опустивъ по-прежнему высоту изъ вершины B, получимъ два прямоугольныхъ тр-ка DBC и DAB.

Изъ 1-го $\triangle$-ка: $a = \frac{h}{\sin\gamma}$, а изъ 2-го: $h = c\sin(180^0 - \alpha)$; но

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha \ (\S\ 56).$$

Поэтому $h = c\sin\alpha$.

Отсюда, послѣ подстановки, по-прежнему получаемъ:

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma},$$

а далѣе $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$.

Значитъ, эта пропорція справедлива и для тупоугольнаго $\triangle$-ка. По аналогіи съ ней можемъ написать, что $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$. Соединяя же эти 2 пропорціи въ одинъ рядъ, получимъ:

$$\mathbf{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma}.$$

Это, такъ назыв., **формула синусовъ**, которую можно выразить слѣдующими словами:

Стороны всякаго $\triangle$-ка пропорціональны синусамъ противолежащихъ имъ угловъ.

§ **60.** *Примѣчаніе.* Примѣняя формулу синусовъ къ прямоугольному $\triangle$-ку ABC съ прямымъ угломъ при вершинѣ C, получимъ:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin 90^0,$$

а такъ какъ $\sin 90^0 = 1$, то $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : 1$.

Отсюда $a : c = \sin\alpha : 1$, или $a = c\sin\alpha$,

а также $b : c = \sin\beta : 1$, или $b = c\sin\beta$.

А это уже извѣстныя намъ формулы, на основаніи которыхъ и была выведена формула синусовъ.

Такимъ образомъ, теорема: **„катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на sin противолежащаго искомому катету угла“ представляетъ изъ себя частный случай формулы синусовъ.**

§ **61**. Формула синусовъ есть основная формула для рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ. При ея помощи можно опредѣлять основные элементы по основнымъ же элементамъ $\triangle$-ка, т. е. стороны и углы по сторонамъ и угламъ. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ ур-іе $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, видимъ, что изъ этого одного ур-ія можно опредѣлить одно неизвѣстное, если остальные входящіе въ ур-іе три элемента $\triangle$-а даны. Такъ, если извѣстны элементы b, α и β, можемъ опредѣлить a; именно $a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Если извѣстны a, b и α, можемъ опредѣлить $\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}$, а по $\sin\beta$ или по $\lg\sin\beta$ найдемъ въ таблицахъ уголъ β^0. При этомъ необходимо имѣть въ виду, что, опредѣляя уголъ по его синусу, мы можемъ получить, вообще говоря, 2 рѣшенія (§ 57).

§ **62**. Кромѣ формулы синусовъ зависимость между основными элементами $\triangle$-ка, т. е. между сторонами и углами (точнѣе: между сторонами и тригонометрическими величинами угловъ) можетъ быть выражена другой формулой. Выведемъ ее.

Изъ геометріи извѣстны слѣдующія формулы для опредѣленія одной стороны тр-ка по двумъ даннымъ его сторонамъ и по проекціи одной изъ этихъ данныхъ сторонъ на другую:

1) для остроуг. $\triangle$-ка: $a^2=b^2+c^2-2\,bp$. . . . . . (I)

2) для тупоуг. $\triangle$-ка: $a^2=b^2+c^2+2\,bp$ . . . . . (II)

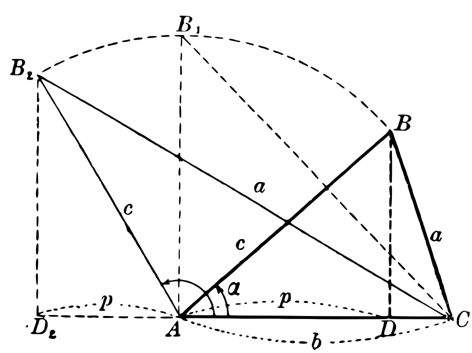
гдѣ значенія буквъ видны изъ *чертежа 39.*

Но изъ $\triangle$ ABD:

$p=c.\ \cos\alpha.$

Отсюда, послѣ подстановки въ формулу (I) имѣемъ, такъ называемую, **формулу косинуса**:

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc.\cos\alpha.$$



Черт. 39.

Легко обнаружить, что эта формула косинуса справедлива также для прямоугольнаго тр-ка AB_1C и для тупоугольнаго AB_2C (*черт. 39*).

Въ самомъ дѣлѣ, если первоначально острый уголъ α будетъ увеличиваться и станетъ прямымъ, то $\cos\alpha$ обратится въ 0 (§ 29), такъ что наша формула косинуса представится тогда въ видѣ

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

а это есть извѣстная Пиѳагорова теорема, которая, такимъ образомъ, представляетъ изъ себя частный случай интересующей насъ формулы косинуса.

Если уголъ α будетъ увеличиваться дальше и станетъ тупымъ, то для получившагося теперь тупоугольнаго тр-ка AB_2C будетъ справедлива формула (II):

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bp \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(II)}$$

А изъ тр-ка AD_2B_2: $p = c \cos \angle B_2AD_2$,
но уголъ $B_2AD_2 = 180^0 - \alpha$,
и потому $p = c \cos(180^0 - \alpha) = -c \cos\alpha$ (§ 56),
такъ что послѣ подстановки въ равенство (II) опять получаемъ **формулу косинуса:**

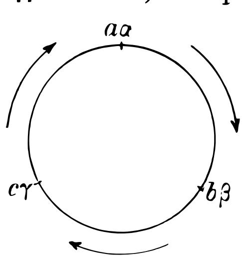
$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc\ cos}\,\alpha.$$

Такимъ образомъ, **квадратъ любой изъ сторонъ всякаго △-а равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, минусъ удвоенное произведеніе этихъ сторонъ и косинуса угла между ними.**

Примѣняя формулу косинуса къ сторонамъ b и c, получимъ:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos\beta$$
$$\text{и } c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos\gamma.$$

§ **63**. *Примѣчаніе.* Для лучшаго запоминанія этой и нѣкоторыхъ другихъ формулъ полезно между прочимъ обращать вниманіе на то, что буквы въ нихъ стоятъ въ порядкѣ, такъ назыв., **круговой подстановки**, которая состоитъ въ слѣдующемъ:



Черт. 40.

Возьмемъ на окружности (*черт. 40*) 3 точки и поставимъ при одной изъ нихъ буквы $a\alpha$, при другой $b\beta$, а при третьей $c\gamma$; тогда замѣтимъ, что буквы въ формулахъ § 62 стоятъ въ такомъ порядкѣ, что за a или α слѣдуетъ b или β, и далѣе c или γ; или же за b и β слѣдуетъ c или γ, а далѣе a или α и т. п., другими словами, буквы стоятъ въ такомъ порядкѣ, какъ на чертежѣ указано стрѣлками, имѣющими по окружности одно и то же направленіе.

Глава XIV. **Выраженіе высоты и радіусовъ описаннаго и вписаннаго круговъ черезъ основные элементы треугольника.**

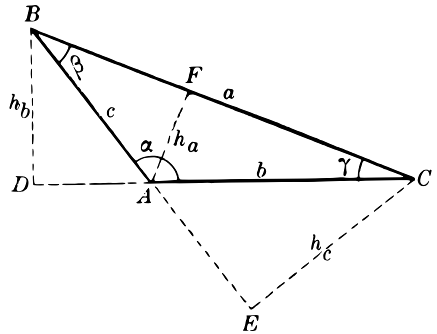
§ **64**. Поставимъ себѣ цѣль: **Выразить тригонометрически высоты треугольника черезъ его основные элементы.**

Въ § 59 при выводѣ формулы синусовъ, для высоты, опущенной на сторону AC △-а ABC (*черт. 37*) были получены формулы:

$$h = c \sin \alpha \ \text{ и } \ h = a \sin \gamma,$$

при чемъ эти формулы оказались справедливыми и для тупоугольнаго △ (*черт. 38*).

Длину высоты, опущенной на сторону AC, т. е. изъ вершины B, обозначимъ символомъ h_b (h со значкомъ b). Точно такъ же длины высотъ, опущенныхъ изъ вершинъ A и C, обозначимъ символами h_a и h_c (*черт. 41*).



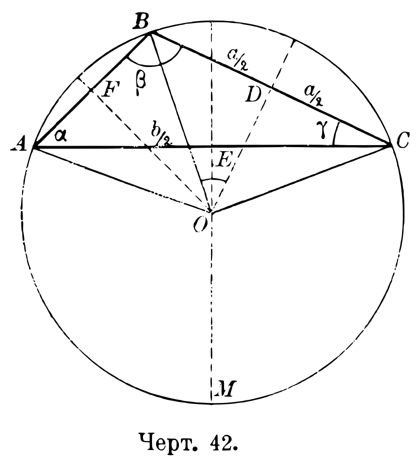
Черт. 41.

Тогда, по аналогіи съ предыдущимъ, получимъ формулы:

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta$$
$$h_b = c \sin \alpha = a \sin \gamma$$
$$h_c = a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

т. е. **высота, опущенная на одну изъ сторонъ треугольника, равна второй сторонѣ, умноженной на sin угла, лежащаго противъ третьей,** при чемъ, какую изъ оставшихся сторонъ считать второй и какую—третьей, безразлично.

§ **65**. **Выразить тригонометрически радіусъ круга, описаннаго около △-а, черезъ его основные элементы.**



Черт. 42.

Изъ геометріи извѣстно, что центръ круга, описаннаго около △-а ABC (*черт. 42*), лежитъ въ точкѣ пересѣченія перпендикуляровъ DO, EO и FO, возставленныхъ къ сторонамъ △-ка изъ ихъ рединъ. Соединимъ центръ O съ вершинами △-ка. Тогда радіусъ описаннаго круга можно опредѣлить, напримѣръ, изъ прямоугольнаго △ BDO, въ которомъ радіусъ R служитъ гипотенузой, а катетъ BD равенъ половинѣ стороны BC, содержащей a ед. дл. Для опредѣленія R надо кромѣ того знать одинъ изъ острыхъ угловъ $\triangle$ DOB, наприм. $\angle$ BOD, такъ какъ

$$\frac{a}{2} = R \sin \angle \text{BOD}.$$

Но уголъ BOD представляетъ изъ себя половину центральнаго угла BOC, опирающагося на дугу BC; слѣдовательно $\angle$ BOD измѣряется половиной дуги BC. Но половиной той же дуги BC измѣряется уголъ A нашего $\triangle$-ка, равный α^0, какъ уголъ вписанный. Поэтому $\angle$ BOD равенъ $\angle$ A $= \alpha^0$. Слѣдовательно, изъ $\triangle$ BOD

$$\frac{a}{2} = R \sin \angle \text{BOD} = R \sin \alpha, \text{ откуда}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

Опредѣляя R изъ $\triangle$ BOF, получимъ точно такимъ же образомъ, что

$$R = \frac{c}{2 \sin \gamma}.$$

Если же станемъ опредѣлять R изъ $\triangle$ AOE по сторонѣ b, лежащей противъ тупого угла нашего $\triangle$ ABC, то наши разсужденія будутъ нѣсколько иными, но приведутъ къ совершенно аналогичному результату.

Изъ $\triangle$ AOE: $\frac{b}{2} = R \sin \angle \text{AOE}$. Предположимъ, что $\angle \text{AOE} = \varphi^0$; тогда

$$\frac{b}{2} = R \sin \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{A})$$

Уголъ AOE равенъ половинѣ центральнаго угла AOC, измѣряющагося дугой ABC. Такъ какъ, по предположенію, $\angle \text{AOE} = \varphi^0$, то $\angle$AOC и дуга ABC содержатъ по $2\,\varphi^0$. Слѣдовательно, дуга AMC $= 360^0 - 2\,\varphi$.

На дугу же AMC опирается уголъ B нашего тр-ка ABC, и потому $\angle$B, равный β^0, какъ вписанный, будетъ равенъ $\frac{360^0 - 2\varphi}{2} =$ $= 180^0 - \varphi$. Итакъ $\beta = 180^0 - \varphi$, откуда обратно

$$\varphi = 180^0 - \beta,$$

такъ что послѣ подстановки въ ур-іе (A):

$$\frac{b}{2} = R \sin (180^0 - \beta),$$

а такъ какъ sn $(180^0—\beta) = \sin\beta$ (§ 56), то

$$\frac{b}{2} = R\sin\beta, \text{ и потому } R = \frac{b}{2\sin\beta}.$$

Выпишемъ 3 полученныя для R формулы вмѣстѣ:

$$\mathbf{R} = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

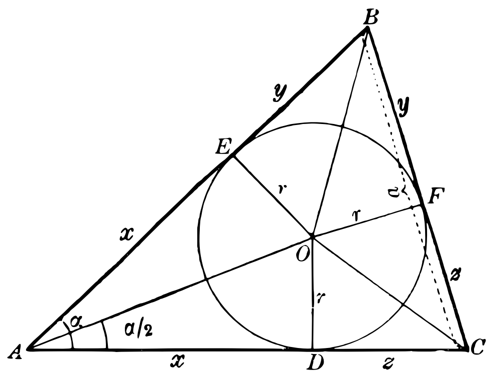
$$\mathbf{R} = \frac{b}{2\sin\beta}$$

$$\mathbf{R} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

Такимъ образомъ **радіусъ круга, описаннаго около треугольника, равенъ половинѣ любой его стороны, дѣленной на sin противолежащаго ей угла.**

Слѣдствіе. Изъ только что формулированной теоремы заключаемъ, что, напримѣръ, $a = 2R\sin\alpha$, т. е. **любая сторона треугольника равна діаметру описаннаго около него круга, умноженному на sin противолежащаго этой сторонѣ угла.**

§ **66. Выразить тригонометрически радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, черезъ его основные элементы.**



Черт. 43.

Положимъ, что имѣемъ $\triangle$ ABC (*черт. 43*), въ который вписанъ кругъ. Изъ геометріи извѣстно, что центръ круга, вписаннаго въ $\triangle$, находится на пересѣченіи биссектрисъ этого $\triangle$-а, а также, что радіусъ, проведенный къ точкѣ касанія, перпендикуляренъ къ касательной. Поэтому радіусъ вписаннаго круга можно будетъ опредѣлить, напримѣръ, изъ прямоугольнаго $\triangle$ AOD, въ которомъ $\angle \mathrm{OAD} = \frac{\alpha^0}{2}$. Слѣдовало бы знать еще хоть одну сторону этого $\triangle$-а: или AD, или AO.

Основные элементы нашего $\triangle$ ABC обозначимъ по-прежнему буквами a, b и c, α, β и γ; искомый же радіусъ обозначимъ черезъ r. Положимъ, что катетъ $\mathrm{AD} = x$ ед. дл.; тогда

$$r = x\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Для опредѣленія же x по основнымъ элементамъ $\triangle$-а разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ. Отрѣзки касательныхъ, проведенныхъ къ данному кругу изъ одной и той же точки, равны между собой. Поэтому AE тоже равно x ед. дл. Далѣе, пусть $BE = BF = y$ ед. дл. и $CF = CD = z$ ед. дл. Тогда замѣчаемъ, что

$$x + y = c$$
$$y + z = a$$
$$z + x = b$$

Рѣшимъ теперь эту систему уравненій. Сложивъ почленно равенства и раздѣливъ полученное на 2, имѣемъ:

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}.$$

Принято периметръ $(a + b + c)$ обозначать черезъ $2p$. Тогда

$$x + y + z = p.$$

Присоединяя сюда равенство $y + z = a$,

послѣ вычитанія получимъ: $x = p - a$.

Подставляя это въ ур-іе: $r = x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, имѣемъ:

$$\mathbf{r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.\text{*)}$$

Далѣе по аналогіи: $\mathbf{r = (p - b) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$

$$\text{и } \mathbf{r = (p - c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}},$$

---

*) Если же радіусъ r вписаннаго круга мы начнемъ опредѣлять изъ того же $\triangle$ AOD (*черт. 43*), но выражая его въ зависимости не отъ катета AD, а отъ гипотенузы AO, а эту послѣднюю потомъ опредѣлимъ изъ AOC по сторонѣ AC и двумъ прилежащимъ къ ней угламъ $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$, пользуясь притомъ формулой синусовъ, то получимъ тоже удобную для вычисленія r формулу:

$$r = \frac{b \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

т. е. **радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, равенъ произведенію разности между полупериметромъ $\triangle$-а и любой его стороной на tg половины угла, противолежащаго этой сторонѣ.**

§ **67**. Составимъ таблицу изъ формулъ, выведенныхъ въ послѣднихъ двухъ главахъ (XIII и XIV).

Табличка формулъ для элементовъ косоугольнаго треугольника.

I. $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (формула синусовъ)

II. $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$

III. $h_a = b\sin\gamma$

IV. $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, откуда $a = 2R\sin\alpha$.

V. $r = (p - a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

(*Обозначенія:* h_a — высота, опущенная на сторону a, R—радіусъ описаннаго круга, r—радіусъ вписаннаго круга, p — полупериметръ; обозначенія же сторонъ и угловъ обычныя).

Глава XV. **4 основныхъ задачи на рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ.**

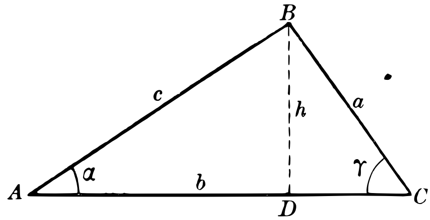
При изученіи геометріи были, конечно, разсмотрѣны слѣдующія 4 основныхъ задачи на построеніе треугольниковъ.

Построить $\triangle$: 1) по сторонѣ и двумъ прилежащимъ къ ней угламъ, 2) по двумъ сторонамъ и углу между ними, 3) по тремъ сторонамъ и 4) по двумъ сторонамъ и углу противъ одной изъ нихъ. Рекомендуемъ учащимся повторить рѣшеніе трехъ первыхъ задачъ на построеніе, рѣшеніе же 4-ой приводится нами ниже (§§ 73 и 75).

Разсмотримъ теперь четыре задачи на тригонометрическое рѣшеніе $\triangle\triangle$-овъ, аналогичныя четыремъ перечисленнымъ задачамъ на построеніе. При этомъ, кромѣ основныхъ элементовъ $\triangle$-а будемъ опредѣлять и его площадь.

Приступая къ рѣшенію каждой изъ этихъ задачъ, надо будетъ имѣть въ виду составленную нами въ § 67 табличку формулъ для элементовъ треугольника, съ тѣмъ чтобы сознательно выбирать изъ этихъ формулъ наиболѣе подходящую для каждаго даннаго случая.

§ **68.** *I задача.* Рѣшить $\triangle$ по одной его сторонѣ и двумъ угламъ.



Черт. 44.

Положимъ, что даны элементы b, α и γ. Требуется опредѣлить β, a и c. (*черт. 44*), а также площадь Q.

Рѣш. Уголъ β легко опредѣлить изъ ур-ія:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0$$
$$\beta=180^0-(\alpha+\gamma).$$

Далѣе, примѣняя первую формулу § 67, именно формулу синусовъ, имѣемъ ур-іе:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

откуда
$$a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Здѣсь b и α — даны, а $\beta=180^0-(\alpha+\gamma)$.
Поэтому $\sin\beta=\sin[180^0-(\alpha+\gamma)]=\sin(\alpha+\gamma)$.
Подставляя это значеніе $\sin\beta$ въ выраженіе для a, имѣемъ:

$$a=\frac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

По той же формулѣ легко опредѣляется и третья сторона c:

$$c=\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Очевидно, что эта задача допускаетъ только одно рѣшеніе для каждаго элемента и всегда возможна, лишь бы только сумма 2-хъ данныхъ угловъ была меньше 180^0.

Переходимъ къ площади $\triangle$-ка; для опредѣленія ея кромѣ основанія b надо знать высоту BD, равную, положимъ, h ед. дл. Тогда

$$Q=\frac{bh}{2}.$$

На основаніи же формулы III § 67:

$$h=a\sin\gamma,$$

а по предыдущему $a=\dfrac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$;

поэтому $$h=\frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)},$$

такъ что $$Q=\frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Примѣръ. Рѣшить △ по даннымъ:

$$b=95,436\text{ (фута)},\ \alpha^0=20^0 40'10'' \quad \text{и} \quad \gamma^0=59^0 21'20''$$

Рѣшеніе.

$$+\begin{array}{r} \alpha=20^0 40'10'' \\ \gamma=59^0 21'20'' \\ \hline \alpha+\gamma=80^0\,1'30'' \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 180^0=179^0 59'60'' \\ \alpha+\gamma=\ 80^0\ 1'30'' \\ \hline =180^0-(\alpha+\gamma)=\ 99^0 58'30'' \end{array}$$

$$a=\frac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{95,436\sin 20^0 40'10''}{\sin 80^0 1'30''}.$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
\lg a= & \lg 95,436= & 1,97968 & d=5 & 1,97971 \\
 & & +3 & = & \\
 & +\lg\sin 20^0 40'10''= & \bar{1}.54769 & d=33 & +\bar{1},54774.5 \\
 & & +5.5 & = & \\
 & -\lg\sin 80^0\ 1'30''= & & & \\
 & =+\lg\csc^{*)}\,\vert\, 80^0\,2' \ = & +0,00660 & d=3 & +0,00661.5 \\
 & \qquad\qquad -30'' & +1.5 & = & \\
\end{array}$$

$$\lg a=1,53407$$

$$\begin{array}{r} d=12 \\ 53403\ \ldots.\ 3420 \\ 3.6 \qquad\quad 3 \\ \hline a=34,203\text{ (ф.)} \end{array}$$

$$c=\frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{95,436\sin 59^0 21'20''}{\sin 80^0 1'30''}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
\lg c= & \lg 95,436= & & & 1,97971 \\
 & & & d=7 & \\
 & +\lg\sin 59^0 21'20''= & \bar{1},93465 & = & \bar{1},93467.3 \\
 & & +2.3 & & \\
 & +\lg\csc 80^0 1'30'' & & = & 0,00661.5 \\
\end{array}$$

$$\lg c=1,92100$$

$$\begin{array}{r} d=5 \\ 92096\ \ldots 8336 \\ +4\ldots\ldots 8. \\ \hline c=83,368\text{ (фут.)}. \end{array}$$

---

*) Здѣсь и дальше мы пользуемся при логариѳмическихъ вычисленіяхъ таблицами проф. Глазенапа, въ которыхъ даны также lg-ы sec—a и csc—a.

$$Q = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$\lg Q = \left| \begin{array}{ll} 2\lg b = 2.1{,}97971 = & 3{,}95942 \\ +\lg\sin\alpha & \overline{1}{,}54774.5 \\ +\lg\sin\gamma & \overline{1}{,}93467.3 \\ -\lg 2 = & \overline{1}{,}69897 \\ +\lg\csc(\alpha+\gamma) = & 0{,}00661.5 \end{array} \right.$$

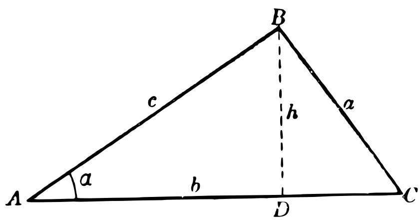
$$\lg Q = 3{,}14742$$

$$d = 31$$

$$\begin{array}{ll} 14737 \ldots . & 1404 \\ +6.2 & +2 \\ \hline \end{array}$$

$$Q = 1404{,}2 \text{ (кв. фут.).}$$

§ **69**. *II задача.* Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу между ними.



Черт. 45.

Положимъ, что даны элементы: b, c и α (*черт. 45*). Требуется опредѣлить a, β и γ, а также площадь Q.

Рѣш. По формулѣ II § 67:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha,$$

мы можемъ опредѣлить сторону a, зная b, c и α. Далѣе, зная a, по формулѣ sinus-овъ могли бы опредѣлить углы β и γ.

Въ самомъ дѣлѣ $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{a}$ и $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{a}$.

Отсюда $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$ и $\sin\gamma = \dfrac{c\sin\alpha}{a}$.

Вычисливъ по таблицамъ $\lg\sin\beta$ и $\lg\sin\gamma$, можемъ опредѣлить углы β и γ. Но при этомъ надо помнить, что, если мы опредѣляемъ уголъ $\triangle$-ка по его синусу, то онъ можетъ быть или острымъ, который находимъ въ таблицахъ, или тупымъ, пополнительнымъ къ найденному острому углу (§ 57). Чтобы узнать, какой изъ угловъ надо брать въ каждомъ данномъ случаѣ, при опредѣленіи β и γ, острый или тупой, необходимо произвести такое изслѣдованіе вопроса.

Изъ геометріи мы знаемъ, что тупой уголъ въ $\triangle$-кѣ лежитъ противъ наибольшей стороны, при чемъ квадратъ этой стороны долженъ быть больше, чѣмъ сумма квадратовъ двухъ остальныхъ сторонъ. Поэтому, если, положимъ, b— наибольшая сторона и притомъ $b^2 > c^2 + a^2$, то уголъ β—тупой; если же $b^2 < c^2 + a^2$, то уголъ β—острый.

Опредѣливъ β, мы можемъ найти и γ, такъ какъ $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, но для провѣрки лучше опредѣлить γ такъ же, какъ и β, т. е. по $\sin\gamma$.

Опредѣлимъ теперь площадь.

$$Q = \frac{bh}{2}$$

Но $$h = c\sin\alpha;$$

Поэтому $$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{bc\sin\alpha}}{\mathbf{2}}$$

Примѣръ. Положимъ, что $b = 15$ (саж.), $c = 8$ (саж.) и $\alpha = 48^0 57' 28''$. Рѣшимъ треугольникъ.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha = 225 + 64 - 240\cos\alpha.$
$a^2 = 289 - 240\cos 48^0 57' 28''.$

Обозначимъ выраженіе $240\cos 48^0 57' 28''$ черезъ x.

$$\begin{array}{l|l|l|l} \lg x = & \lg 240 = & & 2{,}38021 \\ & +\lg\cos & 48^0 58' & \overline{1},81723 \qquad d = 15 \\ & & -32'' & +8 \\ \hline \end{array}$$

$$\lg x = 2{,}19752 \quad d = 28$$

$$\begin{array}{r} 728\ .\ 157{,}5 \\ 22.4\ .\ .\ 8 \\ 1.4\ .\ .\ .\ 5 \\ \hline x = 157{,}59 \end{array}$$

Поэтому $a^2 = 289 - 157{,}59 = 131{,}41$; $a = \sqrt{131{,}41}.$

$$\lg a = \frac{1}{2}\lg 131{,}41 = \frac{1}{2}.\,2{,}11863 = 1{,}05932$$

$$\begin{array}{r} 918\ .\ .\ .\ 1146 \\ 11.4\ .\ .\ .\ .\ 3 \\ 2.28\ .\ .\ .\ .\ 6 \\ \hline a = 11{,}464 \end{array}$$

Наибольшая сторона b.

$$\begin{array}{r} c^2 = 64 \\ a^2 = 131{,}41 \\ \hline \end{array}$$

$c^2 + a^2 = 195{,}41$, а $b^2 = 225$; значитъ $b^2 > c^2 + a^2$ и потому уголъ β — тупой.

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{15\sin 48^0 57'28''}{a}$$

$$\lg\sin\beta = \left|\begin{array}{l} \lg 15 = \\ -\lg a = -1{,}05932 = \\ +\lg\sin 48^0 57'28'' \quad = \\ \end{array}\right| \begin{array}{l} 1{,}17609 \\ \bar{2}{,}94068 \\ \bar{1}{,}87745 \qquad d = 11 \\ \qquad +5.2 \end{array}$$

$$\lg\sin\beta = \bar{1}{,}99427 \;.\;.\; 80^0 43'.$$

А такъ какъ β — уголъ тупой, то $\beta = 180^0 - 80^0 43' = 99^0 17'$.

$$\sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a} = \frac{8\sin\alpha}{a}$$

$$\lg\sin\gamma = \left|\begin{array}{r} \lg 8 = 0{,}90309 \\ -\lg a = \bar{2}{,}94068 \\ +\lg\sin\alpha = \bar{1}{,}87750 \\ \end{array}\right.$$

$$\lg\sin\gamma = 1{,}72127$$

Провѣрка

$\alpha = 48^0 57'28''$

$\beta = 99^0 17'$

$\gamma = 31^0 45'31$

$\alpha + \beta + \gamma = 179^0 59'59''$

погрѣшн. $+1''$

$$\begin{array}{l} 116 \;.\;.\;.\; 31^0 45' \\ 10.5 \;.\;.\;.\;.\; 30'' \\ 0.35 \;.\;.\;.\;.\; 1'' \\ \hline \gamma = 31^0 45' 31'' \end{array}$$

Вычислимъ площадь: $Q = \dfrac{15.8\sin\alpha}{2} = 60\ \sin\alpha$

$$\lg Q = \left|\begin{array}{r} \lg\quad 60 = 1{,}77815 \\ +\lg\sin\alpha = \bar{1}{,}87750 \\ \end{array}\right.$$

$$1{,}65565 \;.\;.\;.\; 45{,}253$$

$Q = 45{,}253$ (кв. саж.)

Изъ этого примѣра видимъ, что формула

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

можетъ быть съ удобствомъ примѣняема только въ томъ случаѣ, если значенія данныхъ сторонъ $\triangle$-ка b и c выражены однозначными числами или вообще такими, возвышеніе въ квадратъ которыхъ легко произвести въ умѣ. При многозначныхъ же числахъ правая часть формулы будетъ вычисляться съ трудомъ; примѣненіе къ ея вычисленію lg-овъ также не облегчитъ дѣла, такъ какъ она представляетъ изъ себя многочленъ—выраженіе, вообще неудобное для логариѳмическихъ вычисленій.

Кромѣ того, эта формула неудобна потому, что при употребленіи ея для рѣшенія $\triangle$-ка необходимо производить изслѣдованіе задачи.

Впослѣдствіи (§ 84) мы выведемъ формулу, весьма удобную при всякихъ численныхъ значеніяхъ данныхъ двухъ сторонъ $\triangle$-ка и притомъ такую, примѣненіе которой не требуетъ обязательнаго изслѣдованія.

А пока перейдемъ къ разбору слѣдующей, III задачи на рѣшеніе треугольника.

§ **70.** *III задача.* Рѣшить треугольникъ по тремъ сторонамъ.

Даны элементы: a, b и c; требуется опредѣлить α, β и γ. Возьмемъ опять формулу: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,\cos\alpha$.

Изъ этого ур-ія можно опредѣлить $\cos\alpha$ по 3-мъ сторонамъ $\triangle$-а.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

Зная $\cos\alpha$, по его lg-у въ таблицахъ можемъ найти и значеніе угла α. Точно такъ же можно опредѣлить углы β и γ изъ ур-ій, составленныхъ аналогично предыдущему послѣ круговой подстановки буквъ (§ 63):

$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,ca}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Площадь $\triangle$-ка можетъ быть вычислена по извѣстной геометрич. формулѣ:

$$Q_\Delta = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Но полученныя для опредѣленія α, β и γ выраженія неудобны для логариѳмированія, и потому эти формулы можно съ удобствомъ примѣнять только въ томъ случаѣ, если длины сторонъ a, b и c выражены числами, возвышеніе которыхъ въ квадратъ не представитъ труда.

Примѣръ. Пусть, напримѣръ, $a = 10$, $b = 12$ и $c = 7$.

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{12^2 + 7^2 - 10^2}{2.12.7} = \dfrac{144 + 49 - 100}{168} = \dfrac{93}{168} = \dfrac{31}{56}$;

отсюда

$$\lg\cos\alpha = \left|\begin{array}{rl} \lg 31 = & 1{,}49136 \\ -\lg 56 = & -1{,}74819 \\ \hline \lg\cos\alpha = & \bar{1}{,}74317 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lr} & d = 19 \\ 1{,}74303\;.\;.\;.\;.\;. & 56^0 24' \\ +\,12.7\;.\;.\;.\;.\;.\;. & -40'' \\ +\;\;1.27 & -\;4'' \\ \hline & \alpha^0 = 56^0 23' 16'' \end{array}$$

Далѣе: $\cos\beta = \frac{49+100-144}{2.7.10} = \frac{5}{140} = \frac{1}{28}$; $\cos\gamma = \frac{100+144-49}{2.10.12} =$

$= \frac{195}{240} = \frac{13}{16}$;

$$\lg\cos\beta = -\lg 28 = -1{,}44716 = \bar{2}{,}55284.$$

Посмотрѣвъ въ таблицѣ, видимъ, что уголъ β, опредѣляемый по $\cos\beta$, почти прямой, около $87^0 58'$, и въ таблицахъ для такихъ угловъ табличныхъ разностей нѣтъ или ясно видно, что онѣ не пропорціональны приращенію угла. Поэтому уголъ β будемъ опредѣлять, пользуясь формулой Делямбра (гл. IX, § 48).

$\lg\cos\beta = \bar{2}{,}55284$

$\lg\sin(90^0 - \beta) = \bar{2}{,}55284$; $(90-\beta)^0 = x''$;

$$\lg x = \left|\begin{array}{r} \lg\sin x'' = \bar{2}{,}55284 \\ -S^0 = 5{,}31442.5 \\ +\sigma = \;.\;.\;+9.1 \end{array}\right.$$

$$\lg x = 3{,}86736 = \lg 7368,$$

$$(90-\beta)^0 = 7368'' = 2^0 2' 48''$$

$$\beta^0 = 87^0 57' 12''$$

$$\lg\cos\gamma = \left|\begin{array}{r} \lg 13 = 1{,}11394 \\ -\lg 16 = -1{,}20412 \end{array}\right.$$

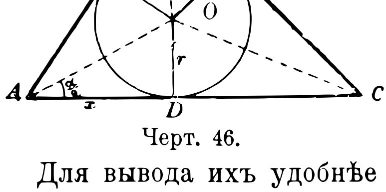
$$\lg\cos\gamma = \bar{1}{,}90982 \quad d = 9$$

$$\begin{array}{l} \bar{1}{,}90978\;..\;35^0 40' \\ +3\;....\;-20'' \\ +1{,}05\;...\;-7'' \\ \hline \gamma^0 = 35^0 39' 33'' \end{array}$$

Провѣрка.

$$\begin{array}{c} \alpha^0 = 56^0 23' 16'' \\ \beta^0 = 87^0 57' 12'' \\ \gamma^0 = 35^0 39' 33'' \\ \hline \alpha+\beta+\gamma = 180^0 0' 1'' \\ \text{погрѣшн.} -1'' \end{array}$$

Складывая для провѣрки полученныя значенія угловъ α, β и γ, получаемъ $180^0 1''$, между тѣмъ какъ должны получить ровно 180^0. Конечно, лишняя $1''$ получилась отъ сложенія погрѣшностей, допущенныхъ при вычисленіи отдѣльныхъ угловъ α, β и γ.



Черт. 46.

§ **71**. На тотъ случай, если длины сторонъ выражаются большими числами a, b и c, надо имѣть другія, болѣе удобныя для вычисленія формулы.

Для вывода ихъ удобнѣе всего воспользоваться формулой V § 67 для радіуса вписаннаго въ треугольникъ круга (*черт. 46*):

$$r = (p - a)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2},\ ^{*})$$

откуда $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}$, и по аналогіи $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b}$, а $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}$.

Значитъ, если бы мы знали, кромѣ сторонъ $\triangle$-ка, еще радіусъ круга, вписаннаго въ него, то могли бы по этой формулѣ вычислить половины угловъ α, β и γ, а потомъ уже найти цѣлые углы. Поэтому постараемся выразить r въ зависимости отъ сторонъ $\triangle$-ка.

Для этого воспользуемся извѣстной формулой для площади $\triangle$-а:

$$Q = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}\ \ldots\ldots\ (1)$$

и тѣмъ, что площадь $\triangle$-ка можетъ быть опредѣлена также по периметру и по радіусу круга вписаннаго. Въ самомъ дѣлѣ, изъ *чертежа 46* видимъ, что нашъ $\triangle$ ABC разбитъ на три $\triangle$-ка: BOC, AOC и AOB, у которыхъ высоты одинаковыя и равны r ед. дл., а основаніями служатъ стороны $\triangle$-ка. Поэтому

$$Q = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2}.\ r = pr\ \ldots\ (2).$$

Приравнивая выраженія (1) и (2), получимъ:

$$pr = \sqrt{p\ (p-a)\,(p-b)\,(p-c)},\qquad \text{откуда}$$

$$r = \frac{\sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\,(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}{p}}$$

Итакъ, если намъ нужно опредѣлить всѣ углы треугольника (и α, и β, и γ,) то мы можемъ опредѣлить ихъ изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} &= \frac{r}{p-a} \\ \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} &= \frac{r}{p-b} \\ \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{r}{p-c} \end{aligned}\right\},\ \text{гдѣ}\ r = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}{p}}$$

*) Для той же цѣли можно исходить также изъ III формулы § 67. Тогда получимъ:

$$\sin\alpha = \frac{h_b}{c} = \frac{2\ Q}{bc} = \frac{2\sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}}{bc}$$

Но такъ какъ углы будутъ опредѣляться здѣсь по синусу, то при ихъ вычисленіи необходимо будетъ производить такое же изслѣдованіе вопроса, какъ и при рѣшеніи задачи II (§ 69). Кромѣ того, по синусу углы опредѣляются вообще менѣе точно, чѣмъ по тангенсу (§ 45). Поэтому то и удобнѣе взять формулу V.

При вычисленіи сперва находимъ по таблицамъ $\lg r$; тогда, уже не пользуясь вторично таблицами, вычисляемъ $\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\lg \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ и $\lg \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. Послѣ же этого, опять по таблицамъ, опредѣлимъ углы $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$, а потомъ уже α, β и γ. Для провѣрки сложимъ углы и въ суммѣ ихъ должны получить 180^0.

Если же по тремъ сторонамъ $\triangle$-ка намъ требуется опредѣлить только одинъ изъ его угловъ, напримѣръ α, то для этого въ выраженіе $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ подставимъ предварительно выраженіе r и сдѣлаемъ упрощенія.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)},$$

откуда послѣ подведенія знаменателя подъ радикалъ и по сокращеніи дроби, получимъ:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Обративъ вниманіе на круговое расположеніе буквъ (§ 63), по аналогіи имѣемъ отсюда формулы и для опредѣленія угловъ β и γ:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Рѣшеніе $\triangle$-а по 3-мъ его сторонамъ при помощи этихъ формулъ всегда возможно, за исключеніемъ того случая, когда наибольшая сторона превышаетъ сумму двухъ другихъ сторонъ. Но, конечно, въ этомъ случаѣ и треугольникъ невозможенъ. Если, не замѣтивъ этого, приступимъ къ вычисленіямъ, то невозможность рѣшенія выразится въ томъ, что подкоренныя выраженія окажутся отрицательными, и потому квадратные корни изъ нихъ будутъ представлять изъ себя, такъ назыв., мнимыя количества.

Примѣръ. Данныя: $a = 595{,}4$ (см.), $b = 497{,}4$ (см.) и $c = 1005{,}2$ (см.)

Опредѣлить углы α, β и γ.

$a = 595{,}4$	$p = 1049$	$p = 1049$	$p = 1049$
$b = 497{,}4$	$a = 595{,}4$	$b = 497{,}4$	$c = 1005{,}2$
$c = 1005{,}2$	$p-a = 453{,}6$	$p-b = 551{,}6$	$p-c = 43{,}8$

$2p = 2098$; $p = 1049$.

Вычислимъ сперва $\lg r = \lg \sqrt{\dfrac{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}{p}}$.

$$\lg r = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{llr|l} \lg\ (p-a) = & \lg 453{,}6 & = & 2{,}65667 \\ +\lg\ (p-b) = & \lg 551{,}6 & = & 2{,}74162 \\ +\lg\ (p-c) = & \lg\ \ 43{,}8 & = & 1{,}64147 \\ -\lg\ p\ = -\lg 1049 = & -\ 3{,}02078 & = & \bar{4}{,}97922 \end{array}\right.$$

$$\lg r = \frac{1}{2}\cdot\ 4{,}01898 = 2{,}00949.$$

1) $\lg\ \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \left|\begin{array}{ll} \lg\ r & = \ \ 2{,}00949 \\ -\lg\ (p-a) & = -2{,}65667 \end{array}\right.$

$$\lg\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \bar{1}{,}35282 \qquad d = 59$$

229 . . . . . $12^0 41'$
53
49.2 . . . . . . $50''$
3.93 . . . . $4''$

$$\frac{\alpha^0}{2} = 12^0 41' 54''$$
$$\alpha^0 = 25^0 23' 48''$$

2) $\lg\ \mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2} = \left|\begin{array}{ll} \lg r & = \ \ 2{,}00949 \\ -\lg(p-b) & = -2{,}74162 \end{array}\right.$

$$\lg\ \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \bar{1}{,}26787 \qquad d = 71$$

726 . . . $10^0 29'$
61
59.2 . . . . . $50''$
1.18 . . . . . $1''$
0.592 . . . . $0{,}5$

$$\frac{\beta^0}{2} = 10^0 29' 51'',5$$
$$\beta^0 = 20^0 59' 43''$$

3) $\lg\ \mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \left|\begin{array}{ll} \lg r & = \ \ 2{,}00949 \\ -\lg(p-c) & = -1{,}64147 \end{array}\right.$

$$\lg\ \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = 0{,}36802 \quad d = 35$$

795 . . $66^0 48'$
7
5.8 . . . $+10''$
1.17 . . $+\ 2''$

$$\frac{\gamma^0}{2} = 66^0 48' 12''$$
$$\gamma^0 = 133^0 36' 24''$$

Провѣрка:

$$\alpha^0 = 25^0 23' 48''$$
$$\beta^0 = 20^0 59' 43''$$
$$\gamma^0 = 133^0 36' 24''$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)^0 = 179^0 59' 55''$$

Погрѣшность 5″.

Опредѣлимъ также площадь $\triangle$-а: $Q = pr$

$$\lg Q = \left| \begin{array}{l} \lg p = 3{,}02078 \\ +\lg r = +2{,}00949 \end{array} \right.$$
$$\lg Q = 5{,}03027 \;....\; 107220$$

Площадь $\triangle$-ка равна 107220 кв. см.

§ **72.** *IV задача.* Рѣшить треугольникъ по 2-мъ сторонамъ и углу противъ одной изъ нихъ.
Даны элементы: a, b и α.

Опредѣлить: β, γ и c.

Рѣшенiе. Формула синусовъ даетъ намъ ур-iе:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

изъ котораго $$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}.$$

Найдя послѣ логариѳмированiя значенiе β въ таблицахъ, получимъ нѣкоторый острый уголъ β_1.

Но вообще говоря, ур-iю $\sin \beta = \dfrac{b \sin \alpha}{a}$ удовлетворяютъ 2 значенiя угла β: 1) острый уголъ β_1^0, значенiе котораго, какъ уже сказано, найдемъ изъ таблицъ, и 2) его пополнительный тупой уголъ $(180-\beta_1)^0$ (§ 57).

Второе же рѣшенiе не всегда можетъ имѣть мѣсто, такъ какъ тупой уголъ въ треугольникѣ можетъ лежать только противъ большей стороны. Значитъ, рѣшенiе $\beta = 180^0 - \beta_1$ возможно вообще только въ томъ случаѣ, если сторона $b > a$, т. е. если данный уголъ α лежитъ противъ меньшей изъ данныхъ двухъ сторонъ.

Далѣе, зная α и β, найдемъ уголъ γ:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta).$$

Затѣмъ по формулѣ синусовъ найдемъ c:

$$c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}.$$

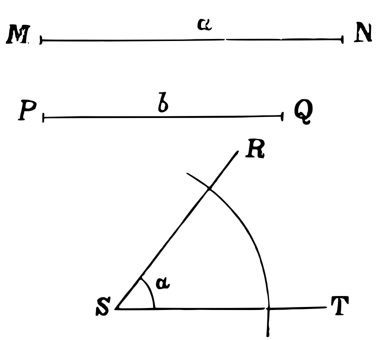
Такимъ образомъ, наша задача можетъ быть 2-хъ видовъ 1) когда данный уголъ α лежитъ противъ большей изъ 2-хъ данныхъ сторонъ, т. е. когда $a > b$, и 2) когда данный уголъ α лежитъ противъ меньшей изъ данныхъ сторонъ, т. е. когда $a < b$.

Въ виду указанныхъ особенностей этой IV задачи, тригонометрическому ея рѣшенію будемъ предпосылать въ каждомъ случаѣ и геометрическое рѣшеніе соотвѣтствующей задачи на построеніе.

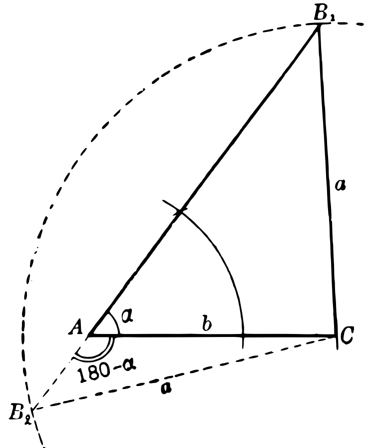
§ **73**. *1-й видъ IV задачи:* даны элементы a, b и α, при чемъ $a > b$; опредѣлить β, γ и c.

Пусть отрѣзки MN и PQ (*черт. 47*) представляютъ изъ себя данныя стороны a и b искомаго $\triangle$-а, а $\angle$ RST—данный уголъ α^0.

Для того, чтобы построить искомый $\triangle$ по этимъ даннымъ, на произвольно взятой прямой линіи отъ какой-нибудь ея точки A (*черт. 48*) отложимъ отрѣзокъ AC, равный данному отрѣзку b, и при точкѣ A построимъ уголъ, равный данному углу α^0. Затѣмъ



Черт. 47.



Черт. 48.

на полученной 2-й сторонѣ надо найти точку B, отстоящую отъ точки C на разстояніи, равномъ другому данному отрѣзку a; а для этого надо изъ точки C, какъ изъ центра, описать дугу радіусомъ, равнымъ a. Тогда точка пересѣченія этой дуги со стороной угла α^0 дастъ 3-ю вершину B_1 искомаго $\triangle$-ка ABC.

Если $a > b$, то задача имѣетъ рѣшеніе и только одно, такъ какъ изъ 2-хъ точекъ B_1 и B_2, въ которыхъ дуга, описанная изъ точки C радіусомъ a, пересѣкаетъ 2-ую сторону угла α, годится только точка B_1. Въ самомъ дѣлѣ, если взять точку B_2 за третью вершину искомаго $\triangle$-а, то полученный $\triangle$ AB_2C не будетъ удовлетворять задачѣ, ибо въ немъ сторона B_2C, равная a, лежитъ не противъ даннаго угла α^0, какъ должно быть, а противъ его пополнительнаго угла $(180-\alpha)^0$.

Итакъ, геометрическое построеніе даетъ только одно рѣшеніе: искомый $\triangle$ есть AB_1C.

Перейдемъ теперь къ тригонометрическому рѣшенію задачи въ частномъ случаѣ.

§ **74**. *Примѣръ*. Въ $\triangle$-кѣ ABC дано: $a=37{,}549$ (дм.), $b=20{,}346$ (дм.) и $\alpha=64^0 28'$. Рѣшить $\triangle$.

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{b}{a};\quad \sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}=\frac{20{,}346\ \text{isn}\ 64^0 28'}{37{,}549}.$$

$$\lg\sin\beta=\left|\begin{array}{ll} \lg\ 20{,}346 & =1{,}30848 \\ +\lg\ \sin 64^0 28' & =\bar{1}{,}95537 \\ -\lg\ 37{,}549=-1{,}57460 & =\bar{2}{,}42540 \end{array}\right.$$

$$\lg\sin\beta=\bar{1}{,}68925 \qquad d=22$$

$$\begin{array}{lr} \bar{1}{,}68920 & \ldots 29^0 16' \\ 3.7 \ldots\ldots & +10'' \\ 1.47 \ldots\ldots & +\ 4'' \\ \hline \beta=\beta_1= & 29^0 16' 14'' \end{array}$$

Второе рѣшеніе $\beta=180^0-\beta_1$ въ данномъ случаѣ невозможно, такъ какъ сторона $b<a$, а противъ меньшей стороны не можетъ быть тупого угла.

$$\begin{array}{rl} \alpha= & 64^0 28' \\ \beta= & 29^0 16' 14'' \\ \hline \alpha+\beta= & 93^0 44' 14'' \\ \gamma= & 86^0 15' 46'' \end{array}$$

$$\lg c=\left|\begin{array}{ll} \lg 20{,}346 & =1{,}30848 \\ +\lg\sin 86^0 15' 46'' & =\bar{1}{,}99908 \\ -\lg\sin\beta & =0{,}31075 \end{array}\right.$$

$$\lg c=1{,}61831 \ \ldots\ 41{,}525$$

$$c=\ 41{,}525\ \text{(дм.)}.$$

Площадь $Q=\dfrac{bc\sin\alpha}{2}$

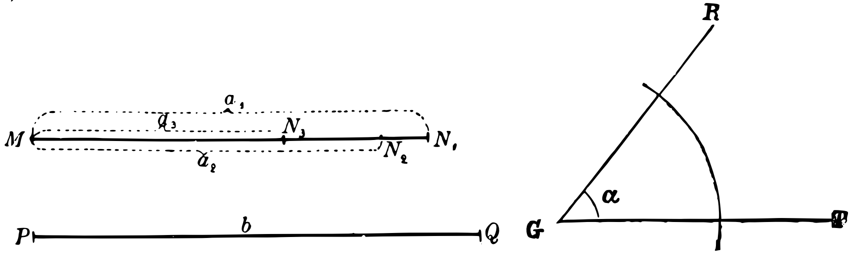
$$\lg Q=\left|\begin{array}{ll} \lg b & =1{,}30848 \\ +\lg c & =1{,}61831 \\ -\lg 2 & =\bar{1}{,}69897 \\ +\lg\sin\alpha & =\bar{1}{,}95537 \end{array}\right.$$

$$\lg Q=2{,}58113 \ldots 381{,}18$$

$$Q=381{,}18\ \text{(кв. дм.)}.$$

§ **75**. *2-й видъ IV задачи*. Даны элементы $\triangle$-а: a, b и α, при чемъ $a<b$; требуется опредѣлить β, γ и c. — Построенія производимъ такія же, какъ и при рѣшеніи задачи 1-го вида (*черт. 49* и *50*).

Геометрическое рѣшеніе задачи можетъ представить 3 случая: 1) когда данная сторона $a > h$, гдѣ h — перпендикуляръ CD, опущенный изъ вершины C на 2-ую сторону угла α^0 (*черт. 50*), 2) когда $a = h$ и 3) когда $< h$.

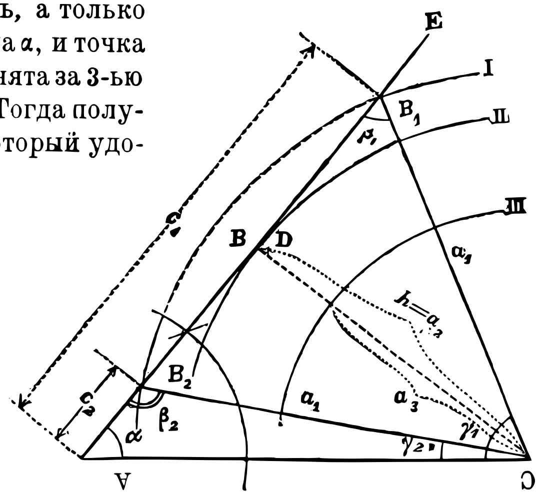


Черт. 49.

1-й случай. Если $a = a_1$ (*черт. 49*), при чемъ $a_1 > h$, то дуга I, описанная изъ точки C (*черт. 50*), какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ a_1, пересѣчетъ 2-ю сторону угла α^0 въ 2-хъ точкахъ: B_1 и B_2, и каждая изъ этихъ точекъ можетъ быть принята за третью вершину искомаго $\triangle$-ка. Въ самомъ дѣлѣ, мы получимъ 2 тр-ка: AB_1C и AB_2C, и оба эти треугольника удовлетворяютъ требованіямъ задачи. У перваго $\triangle AB_1C$ уголъ B_1 есть острый уголъ β_1, а у второго, т. е. у $\triangle AB_2C$ уголъ B_2 есть тупой уголъ β_2. При этомъ, такъ какъ $\triangle B_1CB_2$ — равнобедренный, то въ немъ и $\angle B_1B_2C = \beta_1$, такъ что $\beta_2 = 180^0 - \beta_1$.

2-й случай. Если $a = a_2$ (*черт. 49*), при чемъ $a_2 = h$, то дуга II, описанная изъ точки C (*черт. 50*), какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ a, не пересѣчетъ, а только коснется 2-й стороны угла α, и точка касанія можетъ быть принята за 3-ью вершину искомаго $\triangle$-ка. Тогда получимъ прямоуг. $\triangle ABC$, который удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ задачи.

3-й случай. Если $a = a_3$ (*черт. 49*), при чемъ $a_3 < h$, то дуга III, описанная изъ C (*черт. 50*) радіусомъ a, даже не коснется 2-й стороны угла α, и потому на этой сторонѣ совсѣмъ не будетъ точки, отстоящей отъ C на разстояніи a. Тогда наша задача, значитъ, не будетъ имѣть ни одного рѣшенія.



Черт. 50.

§ **76**. Перейдемъ теперь къ тригонометрическому рѣшенію нашей задачи (§ 72) въ томъ случаѣ, когда данная сторона $b < a$.

По-прежнему составляемъ ур-іе:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \text{ откуда}$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}.$$

Такъ какъ $b > a$, то $\frac{b}{a} > 1$. Но $\sin \alpha < 1$, и потому отъ умноженія b на $\sin \alpha$ получимъ произведеніе $b \sin \alpha$, которое будетъ меньше b, при чемъ можетъ представиться одинъ изъ слѣдующихъ 3-хъ случаевъ: 1) $b \sin \alpha$ будетъ настолько меньше b, что окажется меньше, чѣмъ a, 2) $b \sin \alpha$ будетъ настолько меньше b, что окажется какъ разъ равнымъ a, и 3) $b \sin \alpha$, хотя и станетъ меньше b, но все-таки будетъ больше, чѣмъ a.

Въ I случаѣ $\sin \beta < 1$, такъ что задача возможна; получимъ для угла β два рѣшенія: 1) $\beta_1 < 90^0$ и 2) $\beta_2 = 180^0 - \beta_1 > 90^0$; возможно и II рѣшеніе, такъ какъ противъ большей стороны b можетъ быть и тупой уголъ. Такимъ образомъ въ I случаѣ задача будетъ имѣть 2 рѣшенія. Во II случаѣ $\sin \beta = 1$, откуда $\beta = 90^0$, т. е. $\triangle$ прямоугольный. Въ III случ. $\sin \beta > 1$, а это невозжожно.

Но изъ $\triangle$ ADC (*черт. 50*) видимъ, что $CD = AC \sin \alpha$, т. е.

$$b \sin \alpha = h,$$

такъ что эти три случая вполнѣ соотвѣтствуютъ уже разсмотрѣннымъ въ предыдущемъ § 75 случаямъ при рѣшеніи задачи на построеніе.

Возьмемъ три численныхъ примѣра на эти 3 случая.

Примѣры:

I примѣръ. Рѣшить треугольникъ ABC и опредѣлить его площадь, зная, что

$$a = 768{,}83 \text{ (ф.)};\ b = 905 \text{ (ф.) и } \alpha = 40^036'.$$

Рѣшеніе. $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{905 \sin 40^036'}{768{,}83}$;

$$\lg \sin \beta = \left| \begin{array}{lr} \lg 905 & = 2{,}95665 \\ -\lg 768{,}83 = -2{,}88583 & = \bar{3}{,}11417 \\ +\lg \sin 40^036' & = \bar{1}{,}81343 \end{array} \right.$$

$$\lg \sin \beta = \bar{1}{,}88425 \ldots 50^0$$

$$1)\beta = \beta_1 = 50^0$$

$$2)\beta = \beta_2 = 130^0$$

Второе рѣшеніе $\beta_2 = 130^0$ тоже годится, такъ какъ противъ большей стороны b можетъ лежать и тупой уголъ.

1-ое рѣшеніе: $a = 768{,}83$; $b = 905$; $\alpha^0 = 40^0 36'$; $\beta_1{}^0 = 50^0$,

$$\begin{array}{l} \alpha = 40^0 36' \\ \beta_1 = 50^0 \\ \hline \alpha + \beta_1 = 90^0 36' \end{array} \qquad \gamma_1 = \left| \begin{array}{l} 179^0 60' = 89^0 24'. \\ -\ 90^0 36' \end{array} \right.$$

$$\frac{c_1}{a} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha};\ c_1 = \frac{a\sin\gamma_1}{\sin\alpha} = \frac{768{,}83 . \sin 89^0 24'}{\sin\ 40^0 36'}$$

$$\lg\ c_1 = \left| \begin{array}{lr} \lg\ a & = 2{,}88583 \\ +\lg\ \sin\ 89^0 24' & = \bar{1}{,}99998 \\ -\lg\ \sin\ \alpha = -\bar{1}{,}81343 & = 0{,}18657 \end{array} \right.$$

$$\lg c_1 = 3{,}07238\ .\quad .\ 1181{,}3$$

$$c_1 = 1181{,}3\ \text{(фут.)}$$

$$Q_1 = \frac{bc_1 \sin\alpha}{2};$$

$$\lg\ Q_1 = \left| \begin{array}{lr} \lg\ b = \lg 905 & = 2{,}95665 \\ \lg\ c_1 & = 3{,}07238 \\ +\lg\ \sin\alpha & = \bar{1}{,}81343 \\ -\lg\ 2 & = \bar{1}{,}69897 \end{array} \right.$$

$$\lg\ Q_1 = 5{,}54143\ .\ \ .\ 347880$$

$$Q_1 = 347880\ \text{(кв. фут.)}.$$

2-ое рѣшеніе: $a = 768{,}83$; $b = 905$; $\alpha^0 = 40^0 36'$; $\beta_2{}^0 = 130^0$.

$$\begin{array}{l} \alpha = 40^0 36' \\ \beta_2 = 130^0 \\ \hline \alpha + \beta_2 = 170^0 36' \end{array} \qquad \gamma_2 = \left| \begin{array}{l} 179^0 60' = 9^0 24' \\ -170^0 36' \end{array} \right.$$

$$c_2 = \frac{a\sin\gamma_2}{\sin\alpha} = \frac{a\sin 9^0 24'}{\sin\ \alpha};$$

$$\lg c_2 = \left| \begin{array}{lr} \lg a & = 2{,}88583 \\ +\lg\sin 9^0 24' & = \bar{1}{,}21306 \\ -\lg\ \sin\ \alpha = -\bar{1}{,}81343 & = 0{,}18657 \end{array} \right.$$

$$\lg\ c_2 = 2{,}28546\ .\ \ .\ \ .\ 192{,}96$$

$$c_2 = 192{,}96\ \text{(фут.)}.$$

$$Q_2 = \frac{bc_2 \sin\alpha}{2}$$

$$\lg\ Q_2 = \left| \begin{array}{lr} \lg\ b & = 2{,}95665 \\ \lg\ c_2 & = 2{,}28546 \\ +\lg\ \sin\alpha & = \bar{1}{,}81343 \\ -\lg\ 2 & = \bar{1}{,}69897 \end{array} \right.$$

$$\lg Q_2 = 4{,}75451\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ 56821$$

$$Q_2 = 56821\ \text{(кв. фут.)}.$$

II примѣръ. Въ $\triangle ABC$: $a=21,342$ (саж.), $b=28,51$ (саж.), $\alpha^0=48^0 28'$.

Рѣшеніе.

$$\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}=\frac{28,51\sin 48^0 28'}{21,342}$$

$$\lg\sin\beta=\left|\begin{array}{ll}\lg b & =1,45500\\ +\lg\sin\alpha & =\bar{1},87423\\ -\lg a=-1,32923 & =\bar{2},67077\end{array}\right.$$

$$\lg\sin\beta=0,00000$$

Значитъ $\beta=90^0$, т. е. рѣшаемый тр—къ прямоугольный.

$$\gamma=90^0-\alpha;\quad \begin{array}{r}89^0 60'\\ -48^0 28'\\ \hline \gamma=41^0 32'\end{array}\qquad c=b\sin\gamma;$$

$$\lg c=\left|\begin{array}{ll}\lg b & =1,45500\\ +\lg\sin 41^0 32' & =\bar{1},82155\end{array}\right.$$

$$\lg c=1,27655\ \ldots\ 18,904$$

$$c=18,904 \text{ (саж.)}.$$

$$Q=\frac{ac}{2};$$

$$\lg Q=\left|\begin{array}{ll}\lg a & =1,32923\\ +\lg c & =1,27655\\ -\lg 2 & =\bar{1},69897\end{array}\right.$$

$$\lg Q=2,30475\ \ldots\ 201,72$$

$$Q=201,72 \text{ (кв. с.)}.$$

III примѣръ. Въ $\triangle$-кѣ ABC: $a=8,345$ (саж.); $b=14,25$ (саж.); $\alpha^0=47^0 38'$.

Рѣшеніе.

$$\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}=\frac{14,25\sin 47^0 38'}{8,345};$$

$$\lg\sin\beta=\left|\begin{array}{ll}\lg b & =1,15381\\ +\lg\sin\alpha & =\bar{1},86855\\ -\lg a & =\bar{1},07857\end{array}\right.$$

$\lg\sin\beta=0,10093$, т. е. $\lg\sin\beta>0$; значитъ $\sin\beta>1$, а это невозможно. Такимъ образомъ, невозможно и рѣшеніе задачи.

§ 77. Составимъ таблички новыхъ формулъ, выведенныхъ нами при разборѣ основныхъ задачъ на рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ.

Табличка формулъ для вычисленія площади треугольника.

$$Q=\frac{bc\sin\alpha}{2}\qquad Q=\frac{b^2\sin\gamma\sin\alpha}{2\sin(\gamma+\alpha)}$$

$$Q=pr=p(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ \text{(см. форм. V § 67)}$$

Табличка формулъ для рѣшенія треугольника по тремъ сторонамъ.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{p-a},\ \text{при чемъ}\ r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

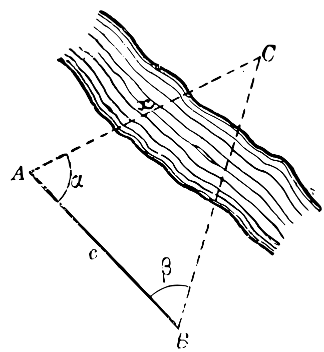
а отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Классическія задачи на измѣреніе мѣстности.

§ **78.** *Задача 1-я.* Опредѣлить разстояніе между двумя пунктами, изъ которыхъ только одинъ—доступный.

Положимъ, хотятъ опредѣлить разстояніе отъ даннаго пункта A до пункта C, при чемъ между ними протекаетъ рѣка (*черт. 51*). Для этого на доступной мѣстности проводятъ базисъ AB и измѣряютъ: 1) его длину и 2) углы CAB и CBA, которые базисъ образуетъ съ лучами зрѣнія, проведенными изъ его концовъ къ пункту C. Пусть длина базиса $AB = c$ метр., $\angle CAB = \alpha^0$ и $\angle CBA = \beta^0$, а искомое разстояніе AC равно x метр.



Черт. 51.

Тогда рѣшеніе задачи сводится къ рѣшенію $\triangle$-ка ABC по одной сторонѣ c и двумъ угламъ α и β, и отсюда

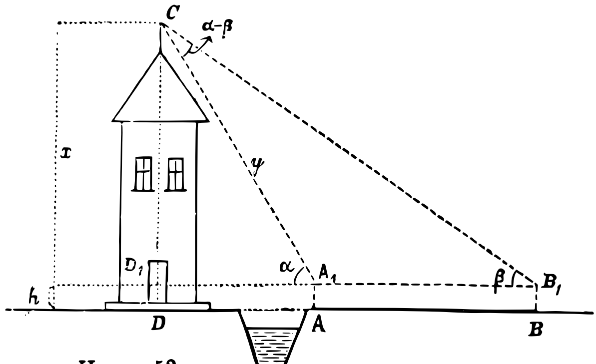
$$x=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\ \text{(метр.)}.$$

§ **79**. *2-ая задача.* Опредѣлить вышину доступнаго предмета.

Рѣшеніе этой задачи приведено раньше въ § 43.

3-я задача. Опредѣлить вышину недоступнаго предмета.

1-ый способъ. Положимъ, желаютъ опредѣлить высоту башни CD (*черт. 52*), къ которой подойти нельзя. Для этого проводятъ по направленію къ ней горизонтальный базисъ BA. Измѣряютъ длину базиса и углы высоты, подъ которыми верхушка C башни видна изъ концовъ базиса A и B. Пусть длина базиса равна c фут., а углы $CA_1D_1 = \alpha^0$ и $CB_1D_1 = \beta^0$ ($\alpha > \beta^0$), при чемъ точки зрѣнія B_1 и A_1 (или центръ вертикальнаго лимба угломѣрго снаряда) при измѣреніи обоихъ угловъ находились на высотѣ AA_1 и BB_1, равной h фут.



тЧер. .52

Положимъ, что искомая высота башни $CD=H$ фут., и пусть разность $H - h = x (= CD_1)$. Тогда $H = h + x$.

Здѣсь x можно будетъ опредѣлить изъ прямоугольнаго $\triangle$-ка CA_1D_1, если кромѣ угла α^0 будетъ извѣстна гипотенуза CA_1, равная, положимъ, y фут.; тогда

$$x = y \sin \alpha;$$

значеніе же y опредѣлимъ изъ $\triangle$-ка CA_1B_1, въ которомъ извѣстна сторона A_1B_1, равная c фут., и $\angle CB_1A_1 = \beta^0$. Слѣдуетъ знать еще третій элементъ, напримѣръ, уголъ A_1CB_1.

Уголъ α^0— внѣшній уголъ $\triangle$-ка A_1CB_1 и потому

$$\alpha^0 = \beta^0 + \angle A_1CB_1,$$

откуда $\angle A_1CB_1 = (\alpha - \beta)^0$.

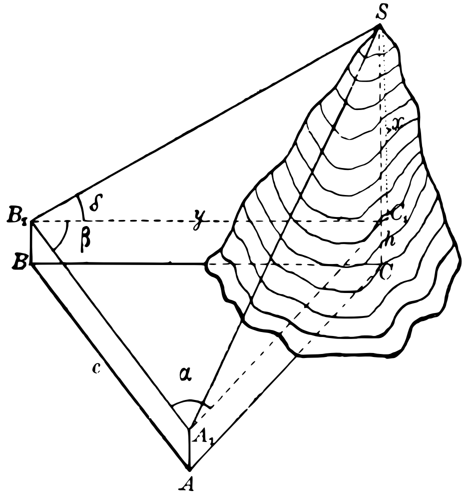
Итакъ, въ $\triangle$ A_1CB_1 извѣстны: одна сторона c и два угла β и $(\alpha - \beta)^0$. Поэтому y опредѣлимъ по формулѣ sin-овъ:

$$\frac{y}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}\ ;\ y = \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

А такъ какъ $x = y \sin \alpha$, а $H = h + x$, то

$$H = h + \frac{c \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)} \text{ (фут.)}.$$

§ **79**[a]. *2-й способъ.* Для опредѣленія высоты горы SC (*черт. 53*) можно поступить слѣдующимъ образомъ: проводятъ базисъ AB въ одной плоскости съ предполагаемымъ основаніемъ горы и измѣряютъ длину базиса и слѣдующіе углы: 1) уголъ высоты SB_1C_1, подъ которымъ верхушка горы видна изъ одного конца базиса, напримѣръ, B и 2) горизонтальные углы $C_1A_1B_1$ и $C_1B_1A_1$, которые базисъ образуетъ съ лучами зрѣнія, проведенными къ предполагаемому центру C_1 основанія горы.



Черт. 53.

Пусть длина базиса $AB = c$ фут., $\angle SB_1C_1 = \delta^0$, $\angle C_1A_1B_1 = \alpha^0$, $\angle C_1B_1A_1 = \beta^0$, при чемъ при измѣреніи угловъ высота угломѣрнаго снаряда $AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$ фут. Положимъ, что искомая высота горы $SC = H$ фут., а $H - h = x$, и что длина $B_1C_1 = y$ фут.

Тогда изъ $\triangle\ B_1SC_1$: $\quad x = y \operatorname{tg} \delta$,

а изъ $\triangle\ A_1C_1B_1$: $\dfrac{y}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin[180^0 - (\alpha+\beta)]}$, такъ что $y = \dfrac{c \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Такимъ образомъ $H = h + x = h + \dfrac{c \sin\alpha \operatorname{tg}\delta}{\sin(\alpha+\beta)}$ (фут.).

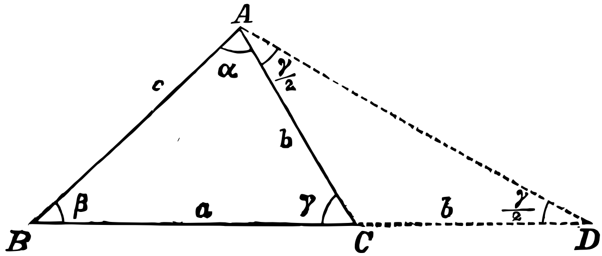
Глава XVI*). **Выводъ формулы тангенсовъ для рѣшенія треугольника по двумъ его сторонамъ и по углу между ними.**

Для рѣшенія второй изъ основныхъ задачъ (§ 69), т. е. для рѣшенія треугольника по двумъ его сторонамъ и по углу между ними, мы еще не получили формулы, достаточно удобной при всякихъ численныхъ значеніяхъ данныхъ сторонъ треугольника. Восполнимъ теперь этотъ пробѣлъ.

Для этого прежде всего рѣшимъ 2 задачи, аналогичныя двумъ извѣстнымъ геометрическимъ задачамъ на построеніе треугольника по суммѣ или разности двухъ его сторонъ, по третьей сторонѣ и по углу, противолежащему этой, третьей сторонѣ.

*) Далѣе въ главѣ XIX § 104 та же формула тангенсовъ выводится нами еще разъ иначе, чѣмъ въ настоящей XVI главѣ.

§ **80.** *1-я задача.* Рѣшить $\triangle$-къ, зная сумму двухъ его сторонъ, третью сторону и уголъ, противолежащій этой третьей сторонѣ.



Черт. 54.

Дано: $a+b=m$, c и γ

Треб. опред.: a, b, α и β.

Рѣшеніе: Рѣшимъ эту задачу послѣ слѣдующаго построенія.

Возьмемъ $\triangle$ ABC (*черт. 54*) и на продолженіи его стороны a отложимъ отрѣзокъ CD, равный сторонѣ b; конецъ D соединимъ съ вершиной A. Тогда получимъ $\triangle$ ABD; въ немъ сторона $BD = a + b = m$ ед. дл., $\angle B = \beta^0$; а $\angle D = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{\gamma^0}{2}$, такъ какъ въ равнобедренномъ $\triangle$-кѣ ACD углы при вершинахъ A и D равны между собой и въ суммѣ составляютъ уголъ, равный внѣшнему углу ACB этого треугольника; далѣе

$$\angle BAD = \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)^0$$

Примѣняя къ $\triangle$-ку ABD формулу синусовъ, имѣемъ ур-іе

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

въ которомъ только одно неизвѣстное α. Его мы могли бы опредѣлить, предварительно вычисливъ изъ ур-ія (A) по $\lg\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$ уголъ $\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$. Но мы раньше выразимъ уголъ $\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$ черезъ неизвѣстные углы α и β, чтобы потомъ, имѣя одно ур-іе съ этими двумя неизвѣстными α и β и присоединивъ къ нему ур-іе

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma,$$

имѣть систему двухъ ур-ій и изъ нея опредѣлить сразу два неизвѣстныхъ: α и β.

Итакъ, выразимъ $\alpha + \frac{\gamma}{2}$ черезъ α и β.

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta),$$

поэтому $\alpha + \frac{\gamma}{2} = \alpha + 90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^0 + \frac{\alpha - \beta}{2}.$

Слѣдовательно, $\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)=\sin\left(90^0+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (§ 54).

Подставляя это въ наше ур-іе (A), получимъ ур-іе:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B)$$

называемое 1-ой **формулой Мольвейде**.

По условію $a+b=m$; поэтому получивъ изъ ур-ія (B), что

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{m\sin\frac{\gamma}{2}}{c},$$

по $\lg\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ мы найдемъ $\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Положимъ, что $\frac{\alpha-\beta}{2}=\mu$. Послѣ этого будемъ имѣть систему 2 ур-ій:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90^0-\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2}=\mu,$$

$$\text{откуда } \alpha=90^0-\frac{\gamma}{2}+\mu$$

$$\text{и } \beta=90^0-\frac{\gamma}{2}-\mu.$$

Далѣе по формулѣ синусовъ найдемъ a и b.

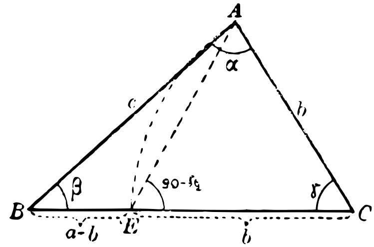
$$a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} \text{ и } b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

§ **81**. *Задача 2-я.* **Рѣшить треугольникъ по разности двухъ его сторонъ, по длинѣ третьей стороны и по углу, противолежащему этой третьей сторонѣ.**

Въ $\triangle$ ABC *дано*: $a-b=d$, c и γ; *треб. опред.* a, b, α и β.

Рѣшеніе: Сдѣлаемъ построеніе: на сторонѣ BC треугольника ABC (*черт. 55*) отъ точки C отложимъ отрѣзокъ CE, равный AC ($=b$), и соединимъ прямою точки E и A. Тогда получимъ $\triangle$ ABE, въ которомъ извѣстны 2 стороны: 1) BE$=a-b=d$ ед. длины и 2) AB$=c$ ед. длины. Примѣнимъ къ этому $\triangle$-ку формулу синусовъ:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\angle BAE}{\sin\angle AEB} \quad . \; . \; (C)$$



Черт. 55.

Выразимъ входящіе въ эту пропорцію углы черезъ углы даннаго $\triangle ABC$.

1) $\angle BAE = \angle AEC - \angle ABE$. Уголъ же $AEC = \frac{180^0 - \gamma}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$, такъ какъ $\triangle AEC$—равнобедренный. Поэтому $\angle BAE = 90^0 - \frac{\gamma}{2} - \beta$.

Далѣе выразимъ этотъ $\angle BAE$ только черезъ неизвѣстные углы $\triangle$-ка ABC, т. е. черезъ α и β:

$$\angle BAE = 90^0 - \frac{180^0 - (\alpha + \beta)}{2} - \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

2) $\angle AEB = 180^0 - \angle AEC = 180^0 - \left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^0 + \frac{\gamma}{2}$, а потому $\sin AEB = \cos\frac{\gamma}{2}$.

Послѣ подстановки въ ур-іе (С) получимъ, такъ назыв., 2-ю **формулу Мольвейде**:

$$\frac{a - b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

отсюда $\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{d\cos\frac{\gamma}{2}}{c}$, и потому можемъ вычислить уголъ $\frac{\alpha - \beta}{2}$.

Далѣе такъ же, какъ и при рѣшеніи предыдущей задачи, вычислимъ α и β, а потомъ a и b.

§ **82**. Выведенныя при рѣшеніи двухъ предыдущихъ задачъ формулы выпишемъ въ табличку:

Формулы Мольвейде:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{a + b}{c} &= \frac{\cos\frac{a - \beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \\[2ex] \frac{a - b}{c} &= \frac{\sin\frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \end{aligned}}$$

Примѣчаніе. Обратить вниманіе на то, что когда въ лѣвой части формулы $+$, въ правой части въ числителѣ cos, а въ знаменателѣ sin; а когда въ лѣвой части $-$, то наоборотъ: въ числителѣ sin, а въ знаменателѣ cos.

§ 83. Особый способъ рѣшенія 2-й основной задачи (§ 69).

Задача. Рѣшить $\triangle$-къ по 2-мъ сторонамъ и углу между ними (a, b и γ).

Если раздѣлимъ почленно первую формулу Мольвейде на вторую (§ 82), то элементъ c исчезнетъ при сокращеніи, и у насъ получится уравненіе, въ которое входятъ 2 стороны $\triangle$-ка a и b, уголъ между ними γ и полуразность двухъ другихъ угловъ $\frac{\alpha-\beta}{2}$. Поэтому если a, b и γ извѣстны, то въ ур-іи будетъ только одно неизвѣстное $\frac{\alpha-\beta}{2}$ и потому, опредѣливъ изъ этого уравненія это неизвѣстное $\frac{\alpha-\beta}{2}$, и зная, что $\frac{\alpha+\beta}{2}=90^0-\frac{\gamma}{2}$, мы можемъ опредѣлить далѣе углы α и β, и вообще наша задача будетъ рѣшена.

Итакъ, раздѣлимъ первую формулу Мольвейде на вторую; получимъ:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Правую часть можемъ упростить, раздѣливъ числитель и знаменатель дроби на $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2}$. Тогда на основаніи формулъ соотношенія получимъ:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}\quad\ldots\ldots\ (A).$$

Такъ какъ a, b и γ извѣстны, то изъ ур-ія (A) можемъ опредѣлить $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$, а далѣе уголъ $\frac{\alpha-\beta}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{(a-b)\quad \operatorname{ctg})\frac{\gamma}{2}}{a+b},$$

Пусть отсюда $\frac{\alpha-\beta}{2}=\mu$.

Кромѣ того имѣемъ: $\frac{\alpha+\beta}{2}=90^0-\frac{\gamma}{2}$.

Изъ этой же системы двухъ ур-ій можемъ, способомъ сложенія и вычитанія, опредѣлить углы α и β. Сторону же c опредѣлимъ потомъ по формулѣ sin-овъ.

§ **84. Формула тангенсовъ.** Формулѣ (A) предыдущаго §-фа можно придать болѣе симметричный и потому болѣе легкій для запоминанія видъ. Для этого уголъ γ выразимъ черезъ α и β.

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

$$\frac{\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

и потому $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}.$

Тогда послѣ подстановки имѣемъ формулу, которая называется:

Формула тангенсовъ.

$$\boxed{\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}}}$$

Словами она выражается такъ: **сумма двухъ сторонъ треугольника относится къ ихъ разности такъ же, какъ тангенсъ полусуммы противолежащихъ имъ угловъ относится къ тангенсу полуразности этихъ же угловъ.**

Рѣшимъ при помощи этой формулы тангенсовъ треугольникъ въ одномъ частномъ случаѣ.

Примѣръ. Для $\triangle ABC$ дано: $b = 18{,}245$ (см.); $c = 20{,}833$ (см.) $\alpha^0 = 43^0 20' 20''$. Опредѣлить β, γ и a.

Рѣшеніе. Напишемъ формулу тангенсовъ примѣнительно къ сторонамъ b и c, обративъ при этомъ вниманіе на то, что $c > b$:

$$\frac{c + b}{c - b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma + \beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma - \beta}{2}}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\frac{\gamma - \beta}{2} = \frac{(c - b)\operatorname{tg}\frac{\gamma + \beta}{2}}{c + b}.$

$\frac{\gamma + \beta}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$; $\frac{\alpha}{2} = 21^0 40' 10''$; $c = 20{,}833$

$b = 18{,}245$

$\frac{\gamma + \beta}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2} = 68^0 19' 50''$; $c + b = 39{,}078$

$c - b = 2{,}588$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2}=\left|\begin{array}{ll} \lg(c-b)=\lg 2{,}588 = & 0{,}41296 \\ -\lg(c+b)=-\lg 39{,}078 = & \bar{2},40807 \\ +\lg\operatorname{tg}\frac{\gamma+\beta}{2}=+\lg\operatorname{tg}68^0 19'50''= & 0{,}40085 \end{array}\right.$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2}=\bar{1},22188;\ d=78$$

$$\begin{array}{r} \bar{1},22127\ldots 9^0 27' \\ 52\ldots +40'' \\ 9.1\ldots+\ 7'' \\ \hline \frac{\gamma-\beta}{2}=9^0 27'47''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\gamma+\beta}{2} & = & 68^0 19'50'' \\ \pm\frac{\gamma-\beta}{2} & = & \pm\, 9^0 27'47'' \\ \hline \gamma & = & 77^0 47'37'' \\ \beta & = & 58^0 52'\ 3'' \end{array}$$

Далѣе вычисляемъ a.

$$a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{20{,}833\ \sin\ 43^0 20'20''}{\sin\ 77^0 47'37''}$$

$$\lg a=\left|\begin{array}{lcl} \lg\ 20{,}833 & = & 1{,}31875 \\ +\lg\ \sin\ 43^0 20'20'' & = & +\bar{1},83652 \\ +\lg\ \csc\ 77^0 47'37'' & = & +0{,}00993 \end{array}\right.$$

$$\lg a=1{,}16520\ \ldots\ldots\ 14{,}629$$

$$a=14{,}629\ (\text{см.}).$$

Къ рѣшенію треугольника во второмъ основномъ случаѣ, при помощи формулы тангенсовъ, между прочимъ сводится рѣшеніе слѣдующихъ двухъ практическихъ задачъ.

Классическія задачи на измѣреніе мѣстности.

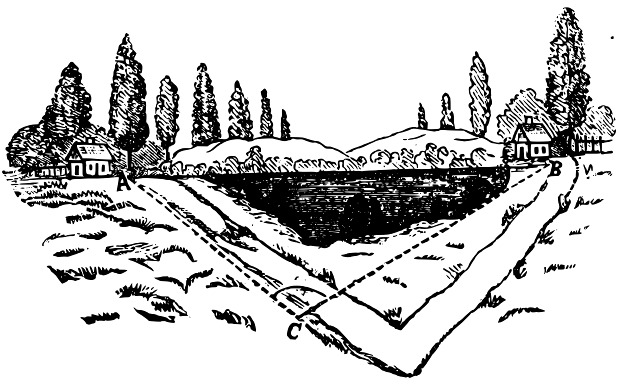
§ **85. 4-я задача***). Опредѣлить непроходимое разстояніе между двумя доступными пунктами.

Положимъ, желаютъ опредѣлить разстояніе между пунктами A и B, которые другъ отъ друга отдѣлены озеромъ (*черт. 56*). Для этого выбираютъ такой третій пунктъ C, изъ котораго вид-

---

*) Три предыдущихъ задачи см. въ §§-ахъ 78, 79 и 79[a].

ны и доступны оба данныхъ пункта A и B, и затѣмъ измѣряютъ разстоянія AC и BC и $\angle ACB$. Тогда получаютъ $\triangle$ ABC, въ которомъ будутъ извѣстны двѣ стороны и уголъ

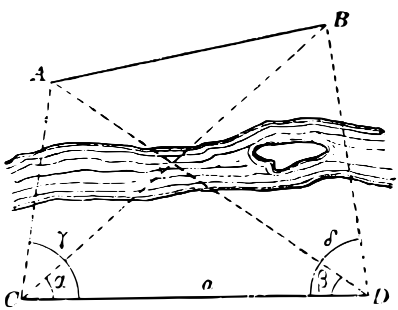


Черт. 56.

между ними (a, b и γ). Такимъ образомъ, задача сводится къ рѣшенію 2-й изъ основныхъ задачъ на рѣшеніе треугольниковъ.

§ **86**. **5-ая задача.** Опредѣлить разстояніе между двумя недоступными пунктами.

Напримѣръ, находясь на одномъ берегу рѣки, хотятъ опредѣлить разстояніе между двумя пунктами A и B, лежащими на другомъ берегу (*черт. 57*). Для этого измѣряютъ длину базиса CD и углы, образуемые базисомъ съ лучами зрѣнія, проведенными изъ его концовъ къ даннымъ пунктамъ A и B. Пусть $CD = a$ фут., $\angle ACD = \gamma^0$; $\angle BCD = \alpha^0$, $\angle ADC = \beta^0$ и $\angle BDC = \delta^0$. Далѣе рѣшеніе ведутъ въ такомъ примѣрно порядкѣ: 1) изъ $\triangle$ CBD опредѣляютъ BD по сторонѣ a и двумъ прилежащимъ къ ней угламъ α и δ; 2) точно такъ же изъ $\triangle$ ACD опредѣляютъ длину AD по a, γ и β и 3) рѣшаютъ относительно искомаго разстоянія AB треугольникъ ABD по двумъ сторонамъ AD и BD и по углу между ними $(\delta - \beta)^0$.



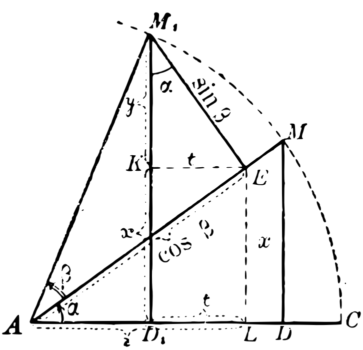
Черт. 57.

ОТДѢЛЪ III. **Формулы преобразованія тригонометрическихъ выраженій и ихъ примѣненіе къ рѣшенію треугольниковъ.**

При рѣшеніи тригоном. задачъ иногда получаются такія выраженія, которыя могутъ быть значительно упрощены послѣ особыхъ тригонометрическихъ преобразованій; кромѣ того, многія задачи на особенные случаи рѣшенія треугольниковъ (подобныя, напримѣръ, задачамъ §§ 80 и 81, при рѣшеніи которыхъ мы вывели формулы Мольвейде) рѣшаются проще при помощи тригоном. преобразованій, чѣмъ на основаніи геометрическихъ построеній. Съ этими то формулами мы и познакомимся въ предстоящемъ отдѣлѣ III, а въ концѣ его покажемъ ихъ примѣненіе къ рѣшенію треугольниковъ.

Глава XVII. **Формулы для sin и cos суммы угловъ и слѣдствія изъ нихъ.**

§ **87**. **Sin** $(\alpha+\beta)$ и **cos** $(\alpha+\beta)$. Возьмемъ два острыхъ угла α^0 и β^0 и ихъ сумму $(\alpha+\beta)^0$, которая пусть тоже будетъ равна острому углу (*черт. 58*). Затѣмъ построимъ линіи sin и cos, какъ для угловъ α и β, такъ и для ихъ суммы*). Если всѣ эти линіи измѣрить радіусомъ, то длины ихъ будутъ выражаться числами, которыя извѣстны намъ подъ именемъ тригонометрическихъ величинъ sin и cos. Именно:



Черт. 58.

длина M_1D_1 будетъ выражаться числомъ $\sin(\alpha+\beta)$;
„ AD_1 „ „ „ $\cos(\alpha+\beta)$;
„ MD—числомъ $\sin\alpha$; длина M_1E—числомъ $\sin\beta$;
„ AD— „ $\cos\alpha$; „ AE— „ $\cos\beta$.

Постараемся выразить $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$ черезъ sin и cos угловъ α и β въ отдѣльности, а для этого прежде всего выразимъ отрѣзки $M_1Д_1$ и $АД_1$ въ зависимости отъ такихъ отрѣзковъ, которые вмѣстѣ съ тригоном. линіями угловъ α и β слу-

---

*) Для этого придется прежде всего рѣшить, какую изъ сторонъ каждаго изъ этихъ трехъ угловъ нужно считать неподвижнымъ радіусомъ и какую—подвижнымъ.

жили бы сторонами однихъ и тѣхъ же прямоугольныхъ $\triangle$-ковъ. Съ этой цѣлью опустимъ изъ точки E перпендикуляры EK на M_1D_1 и EL на AD. Тогда:

$$\left.\begin{aligned} M_1D_1 &= D_1K + KM_1 = LE + KM_1 \\ \text{и } AD_1 &= AL - D_1L^{*)} = AL - KE \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A).$$

Пусть длины отрѣзковъ LE, KM_1, AL и KE, измѣренныя тоже радіусомъ дуги, выражаются соотвѣтственно буквами x, y, z и t.

Тогда вмѣсто равенствъ (A), замѣняя въ нихъ линіи соотвѣтствующими числами, получимъ:

$$\sin(\alpha+\beta) = x + y \quad \ldots\ldots\ldots (B)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = z - t \quad \ldots\ldots\ldots (C).$$

I. $\operatorname{Sin}(\alpha+\beta) = x + y = ?$ . . . . (B)

Изъ прямоуг. тр-ка ALE имѣемъ $EL = AE.\ \sin\alpha$,

такъ что $x = \cos\beta.\ \sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta$,

а изъ прямоуг. тр-ка KM_1E, въ которомъ $\angle KM_1E = \angle CAM = \alpha$, такъ какъ стороны этихъ угловъ соотв. перпендикулярны, получимъ:

$KM_1 = M_1E\ \cos\alpha$, такъ что $y = \sin\beta.\ \cos\alpha = \cos\alpha.\ \sin\beta$.

Подставляя теперь полученныя для x и y выраженія въ равенство (B), имѣемъ:

$$\mathbf{sin}\ (\alpha+\beta) = \mathbf{sin}\,\alpha\ \mathbf{cos}\,\beta + \mathbf{cos}\,\alpha\ \mathbf{sin}\,\beta\ ^{**)}.$$

II. $\cos(\alpha+\beta) = z - t = ?$ . . . . (C)

Изъ прямоуг. тр-ка ALE: $AL = AE.\ \cos\alpha$,

такъ что $z = \cos\beta.\ \cos\alpha = \cos\alpha\ \cos\beta$;

изъ прямоуг. тр-ка KM_1E: $KE = M_1E.\ \sin\alpha$,

такъ что $t = \sin\beta.\ \sin\alpha = \sin\alpha\ \sin\beta$.

Подставляя полученныя для z и t выраженія въ равенство (C), имѣемъ:

$$\mathbf{cos}\ (\alpha+\beta) = \mathbf{cos}\,\alpha\ \mathbf{cos}\,\beta - \mathbf{sin}\,\alpha\ \mathbf{sin}\,\beta\ ^{**)}.$$

§ **88. Sin** $(\alpha-\beta)$ и **cos** $(\alpha-\beta)$. Выведемъ теперь аналогичныя формулы для выраженія sin и cos разности двухъ угловъ $(\alpha-\beta)$. Эти формулы можно вывести 2-мя способами: во-первыхъ, изъ построенія, подобнаго тому, которое было сдѣлано для вывода формулъ $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$ (§ 87) ***), но ихъ можно вывести

---

*) Почему AD_1 нецѣлесообразно представить въ видѣ $AD - D_1D$?

**) Формулы для $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$ необходимо запомнить; для этого рекомендуемъ учащимся прежде всего научиться выводить ихъ возможно быстрѣе, такъ чтобы прямо изъ чертежа 58 писать:

$$\sin(\alpha+\beta) = x + y = \overbrace{\cos\beta.\ \sin\alpha}^{\text{изъ } \triangle ALE} + \overbrace{\sin\beta.\ \cos\alpha}^{\text{изъ } \triangle KM_1E} = \ldots\ldots$$

$$\cos(\alpha+\beta) = z - t = \cos\beta.\ \cos\alpha - \sin\beta.\ \sin\alpha = \ldots\ldots$$

***) См. мой „Сборникъ триг. задачъ“, гл. XVII зад. 1.

и какъ необходимое слѣдствіе формулъ для sin и cos суммы двухъ угловъ. Предпочтемъ этотъ второй способъ, въ виду дальнѣйшихъ обобщеній (§ 89).

Обозначимъ разность $(\alpha-\beta)$ черезъ φ:

$$\alpha-\beta=\varphi$$

Отсюда $\alpha=\beta+\varphi$ и потому

$$\sin\alpha=\sin(\beta+\varphi)$$

$$\text{и } \cos\alpha=\cos(\beta+\varphi).$$

Разложимъ правыя части этихъ равенствъ по формуламъ для sin и cos суммы двухъ угловъ и полученныя ур-ія напишемъ, читая ихъ справа налѣво, такъ:

$$\begin{array}{l|l|l} & \text{I} & \text{II} \\ \sin\beta\cos\varphi+\cos\beta\sin\varphi=\sin\alpha & .\cos\beta & .\sin\beta \\ \cos\beta\cos\varphi-\sin\beta\sin\varphi=\cos\alpha & .\sin\beta & .\cos\beta \end{array}$$

Эти 2 равенства можно разсматривать, какъ систему 2-хъ ур-ій съ 2-мя неизвѣстными $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Рѣшимъ эту систему.

I. Для опредѣленія $\sin\varphi$ надо исключить $\cos\varphi$, а для этого надо уравнять сомножители при $\cos\varphi$; помножимъ обѣ части 1-го ур-ія на $\cos\beta$, а обѣ части 2-го ур-ія на $\sin\beta$, и затѣмъ вычтемъ почленно изъ 1-го ур-ія 2-ое.

$$\begin{array}{r} \sin\beta\cos\beta\cos\varphi+\cos^2\beta\sin\varphi=\sin\alpha\cos\beta \\ \underline{\mp\sin\beta\cos\beta\cos\varphi\pm\sin^2\beta\sin\varphi=\mp\cos\alpha\sin\beta} \\ (\cos^2\beta+\sin^2\beta)\sin\varphi=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \end{array}$$

Такъ какъ $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$, а $\sin\varphi$ по условію есть $\sin(\alpha-\beta)$, то отсюда имѣемъ:

$$\mathbf{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.}$$

II. Для исключенія $\sin\varphi$ обѣ части 1-го ур-ія умножимъ на $\sin\beta$, а обѣ части 2-го — на $\cos\beta$, и затѣмъ сложимъ почленно наши ур-ія.

Тогда получимъ:

$$(\sin^2\beta+\cos^2\beta)\cos\varphi=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta.$$

Но $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$, а $\cos\varphi=\cos(\alpha-\beta)$. Поэтому, переставивши члены въ правой части, получимъ:

$$\mathbf{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.}$$

Сопоставимъ формулы для разности $(\alpha-\beta)$ съ формулами для суммы $(\alpha+\beta)$.

$$\mathbf{\sin(\alpha\mp\beta)=\sin\alpha\cos\beta\mp\cos\alpha\sin\beta.}$$

$$\mathbf{\cos(\alpha\mp\beta)=\cos\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\sin\beta.}$$

Обратить вниманіе на послѣдовательность знаковъ + и —.

§ **89**. Формулы для $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$ были выведены нами для того случая, когда углы α^0 и β^0—углы острые, причемъ и сумма ихъ $(\alpha+\beta)^0$ тоже острый уголъ. Теперь докажемъ, что эти формулы справедливы для угловъ всякаго $\triangle$-а. Углы же треугольника могутъ быть и тупыми, и сумма 2-хъ острыхъ угловъ $\triangle$-ка можетъ составить тупой уголъ. Такимъ образомъ, наше доказательство будетъ служить распространеніемъ выведенныхъ формулъ на тѣ случаи: 1) когда сумма слагаемыхъ острыхъ угловъ представляетъ изъ себя тупой уголъ и 2) когда одинъ изъ слагаемыхъ угловъ—тупой.

1-й случай. $(\alpha+\beta)$ — тупой уголъ, но α и β — углы острые. Пусть дополнительнымъ для угла α будетъ уголъ δ, а дополнительнымъ для β будетъ ε. Тогда

$$\alpha = 90^0 - \delta$$
$$\beta = 90^0 - \varepsilon$$

такъ что $\alpha+\beta = 180^0 - (\delta+\varepsilon)$; отсюда ясно, что, такъ какъ $\alpha+\beta > 90^0$, то $\delta+\varepsilon < 90^0$, и потому для суммы $(\delta+\varepsilon)$ выведенныя формулы справедливы. Но на основаніи § 55

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin[180^0 - (\delta+\varepsilon)] = \sin(\delta+\varepsilon) \text{ и}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[180^0 - (\delta+\varepsilon)] = -\cos(\delta+\varepsilon)$$

$$\text{Поэтому}\quad \left.\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\delta+\varepsilon) = \sin\delta\cos\varepsilon + \cos\delta\sin\varepsilon \\ \text{и}\quad \cos(\alpha+\beta) &= -\cos(\delta+\varepsilon) = -\cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Такъ какъ α и δ, а также β и ε — углы взаимно дополнительные, то

$$\sin\delta = \cos\alpha \text{ и } \cos\delta = \sin\alpha$$
$$\sin\varepsilon = \cos\beta \text{ и } \cos\varepsilon = \sin\beta.$$

Поэтому, послѣ подстановки въ формулы (A) получимъ:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$
$$\text{и } \cos(\alpha+\beta) = -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta.$$

Переставивъ члены, видимъ, что интересующія насъ формулы справедливы и для того случая, когда сумма данныхъ острыхъ угловъ $\alpha+\beta > 90^0$.

2-й случай. Одинъ изъ слагаемыхъ угловъ, напримѣръ, α — тупой. Тогда α можно представить въ видѣ: $\alpha = 90^0 + \delta$, гдѣ δ —уголъ острый.

$$\text{Отсюда}\quad \left.\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin[90^0 + (\delta+\beta)] = \cos(\delta+\beta) \\ \text{и}\quad \cos(\alpha+\beta) &= \cos[90^0 + (\delta+\beta)] = -\sin(\delta+\beta) \end{aligned}\right\} \quad (§\ 54).$$

Такъ какъ δ и β углы острые, то для нихъ справедливость распространяемыхъ нами формулъ доказана, а потому можемъ писать:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\delta+\beta) = \cos\delta\cos\beta - \sin\delta\sin\beta.$$
$$\cos(\alpha+\beta) = -\sin(\delta+\beta) = -\sin\delta\cos\beta - \cos\delta\sin\beta.$$

Но $$\sin\alpha = \sin(90^0 + \delta) = \cos\delta$$
и $$\cos\alpha = \cos(90^0 + \delta) = -\sin\delta.$$

Поэтому обратно $\cos\delta = \sin\alpha$ и $-\sin\delta = +\cos\alpha$, и послѣ подстановки получимъ:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Такимъ образомъ, и для 2-го случая справедливость нашихъ формулъ доказана.

Такъ какъ формулы для разности $(\alpha - \beta)$ были выведены нами, какъ необходимое слѣдствіе формулъ для суммы, то съ обобщеніемъ послѣднихъ обобщаются и первыя.

§ **90. Tang** $(\alpha \mp \beta)$ **и ctg** $(\alpha \mp \beta)$. Выведемъ формулы для tg и ctg суммы и разности двухъ угловъ.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Отсюда на основаніи формулъ для $\sin(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha + \beta)$, имѣемъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Преобразуемъ полученное выраженіе такъ, чтобы оно зависѣло только отъ $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$; для этого достаточно числитель и знаменатель полученной дроби раздѣлить на $\cos\alpha\ \cos\beta$.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

Послѣ сокращеній и преобразованій получимъ:

$$\mathbf{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathbf{tg}\,\alpha + \mathbf{tg}\,\beta}{1 - \mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta}.$$

Такимъ же способомъ можно и $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$ выразить черезъ $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$. Тогда получимъ:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$$

Для разности $(\alpha - \beta)$ аналогично получимъ формулы:

$$\mathbf{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathbf{tg}\,\alpha - \mathbf{tg}\,\beta}{1 + \mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta}.$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$

§ 91. Тригонометрическія величины удвоеннаго угла.

Формулы для $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$ выводятся какъ частный видъ аналогичныхъ формулъ для $(\alpha+\beta)$ (§ 87 и 90), такъ какъ 2α можно разсматривать, какъ $\alpha+\alpha$.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = \mathbf{2\sin\alpha\cos\alpha}.$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \mathbf{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

§ 92. Выраженіе $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ въ тригон. величинахъ половины α.

Уголъ α можно разсматривать, какъ удвоенную половину того же угла: $\alpha = \frac{\alpha}{2}\cdot 2$. Поэтому, примѣняя формулы предыдущаго параграфа, получимъ:

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\cdot 2\right) = \mathbf{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\cdot 2\right) = \mathbf{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

§ 93. Выраженіе sin и cos половины угла въ тригоном. величинахъ цѣлаго угла.

Возьмемъ 2-ую формулу предыдущаго параграфа, читая ее справа налѣво:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Будемъ разсматривать это равенство, какъ ур-іе съ 2-мя неизвѣстными $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$. Но одного ур-ія для опредѣленія 2-хъ неизвѣстныхъ недостаточно. Составимъ еще одно ур-іе съ тѣми же неизвѣстными. Примѣняемъ для этого знакомую намъ I формулу соотношенія между sin и cos одного и того же угла: $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$. Тогда получимъ слѣдующую систему 2-хъ ур-ій съ 2-мя неизвѣстными:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Рѣшая эту систему способомъ сложенія и вычитанія, получимъ:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha,$$

откуда, послѣ дѣленія на 2 и послѣ извлеченія корня:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\text{и } \cos\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Здѣсь на уголъ α^0 мы смотримъ пока только, какъ на уголъ $\triangle$-ка, и потому при извлеченіи корня мы должны взять только ариѳметическое, положительное значеніе корня. Въ самомъ дѣлѣ, даже въ томъ случаѣ, если уголъ α тупой, т. е. или его значеніе удовлетворяетъ неравенствамъ:

$$90^0 < \alpha^0 < 180^0,$$

половина этого угла будетъ удовлетворять неравенствамъ:

$$45^0 < \frac{\alpha^0}{2} < 90^0.$$

Значитъ, уголъ $\frac{\alpha}{2}$ будетъ острымъ, и потому значенія его тригонометрическихъ величинъ положительны.

§ 94. Табличка формулъ преобразованія.

I и II. $\sin(\alpha\mp\beta)=\sin\alpha\cos\beta\mp\cos\alpha\sin\beta$;	VI. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
III и IV. $\cos(\alpha\mp\beta)=\cos\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\sin\beta$;	VII. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.
V. $\operatorname{tg}(\alpha\mp\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\mp\operatorname{tg}\beta}{1\pm\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$;	VIII. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$
IX. $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$	XI. $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
X. $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$.	XII. $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

Глава XVIII. Приведеніе тригонометрическихъ выраженій къ логариѳмируемому виду.

§ 95. Изъ тригонометрическихъ выраженій, не имѣющихъ **вида,** удобнаго для логариѳмированія, но сравнительно легко приводимыхъ къ таковому, наибольшаго вниманія заслуживаютъ слѣдующія выраженія:

1) $\sin\alpha+\sin\beta$ 3) $\cos\alpha+\cos\beta$
2) $\sin\alpha-\sin\beta$ 4) $\cos\alpha-\cos\beta$,

т. е. **сумма или разность синусовъ или косинусовъ 2 хъ угловъ.**

Возьмемъ разложенія $\sin(x+y)$ и $\sin(x-y)$ и сложимъ ихъ почленно, а затѣмъ вычтемъ второе изъ перваго:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

$$1)\quad \sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y;$$
$$2)\quad \sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y.$$

Остальные 2 члена въ обоихъ случаяхъ взаимно уничтожаются. Точно такъ же, взявъ разложенія $\cos(x+y)$ и $\cos(x-y)$, произведемъ надъ ними дѣйствія сложенія и вычитанія:

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$3)\quad \cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y;$$
$$4)\quad \cos(x-y)-\cos(x+y)=2\sin x\sin y.$$

(При производствѣ вычитанія мы умышленно изъ $\cos(x-y)$ вычитаемъ $\cos(x+y)$, такъ какъ естественно предполагать, что разность двухъ угловъ меньше, чѣмъ сумма тѣхъ же угловъ, а для меньшаго остраго угла cos больше).

Изъ разсмотрѣнія написанныхъ нами 4-хъ формулъ видимъ, что сумма или разность синусовъ или косинусовъ 2-хъ угловъ легко приводится къ логариѳмируемому виду въ томъ случаѣ, если одинъ изъ этихъ угловъ представляетъ изъ себя сумму 2-хъ какихъ-нибудь угловъ, а другой—разность тѣхъ же угловъ.

Поэтому, если намъ требуется привести къ логариѳмируемому виду сумму или разность синусовъ или косинусовъ 2-хъ угловъ, напримѣръ, $\sin\alpha\mp\sin\beta$ и $\cos\alpha\mp\cos\beta$, то нужно большій изъ этихъ угловъ представить въ видѣ суммы двухъ другихъ угловъ, а меньшій въ видѣ разности тѣхъ же угловъ. Эти же послѣдніе углы легко найти, такъ какъ, обозначая ихъ черезъ x и y, для ихъ опредѣленія будемъ имѣть слѣдующую систему 2-хъ ур-ій съ 2-мя неизвѣстными:

$$x+y=\alpha$$
$$x-y=\beta;\ \text{(предполагаемъ, что } \alpha>\beta).$$

Рѣшая эту систему, получимъ, что $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, а $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$, т. е. что большій уголъ долженъ представлять изъ себя полусумму данныхъ угловъ, а меньшій—полуразность тѣхъ же угловъ. Слѣдовательно, наши выраженія приводятся къ логариѳмируемому виду слѣдующимъ образомъ:

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$$
$$\cos\beta-\cos\alpha=\cos(x-y)-\cos(x+y)=2\sin x\sin y \text{ (т. к. } \beta<\alpha).$$

Подставляя всюду вмѣсто x уголъ $\frac{\alpha+\beta}{2}$, а вмѣсто y уголъ $\frac{\alpha-\beta}{2}$, получимъ формулы:

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4) $\cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Словами эти формулы выражаются такъ:

1) **Сумма синусовъ 2-хъ угловъ равна удвоенному произведенію синуса полусуммы на косинусъ полуразности этихъ угловъ.**

2) **Разность синусовъ 2-хъ угловъ равна удвоенному произведенію косинуса полусуммы на синусъ полуразности этихъ угловъ.**

3) **Сумма косинусовъ 2-хъ угловъ равна удвоенному произведенію косинуса полусуммы на косинусъ полуразности этихъ угловъ.**

4) **Разность косинусовъ 2-хъ угловъ равна удвоенному произведенію синуса полусуммы на синусъ обратной полуразности этихъ угловъ.**

Примѣры: $\sin 62^0+\sin 42^0=2\sin 52^0\cos 10^0$; $\sin 45^0 28'-\sin 32^0 17'=2\cos 38^0 52'30''\sin 6^0 35'30''$; $\cos 43^0 25'28''+\cos 35^0 29'32''=2\cos 39^0 27'30''\cos 3^0 57'58''$; $\cos 13^0 28'-\cos 48^0 36'=2\sin 31^0 2'\sin 17^0 34'$.

Возьмемъ еще примѣры преобразованій, при которыхъ получаются отрицательные углы (§ 58):

1) $\sin 30^0+\sin 70^0=2\sin\frac{30^0+70^0}{2}\cos\frac{30^0-70^0}{2}=2\sin 50^0\cos(-20^0)=2\sin 50^0\cos 20^0$. 2) $\sin 20^0-\sin 60^0=2\cos\frac{20^0+60^0}{2}\sin\frac{20^0-60^0}{2}=2\cos 40^0\sin(-20^0)=-2\cos 40^0\sin 20^0$ и т. п.

§ **96.** Многія тригоном. выраженія могутъ быть приведены къ логариѳмируемому виду послѣ предварительнаго приведенія ихъ къ виду суммы или разности синусовъ и косинусовъ.

Напримѣръ, выраженіе $\frac{1}{2}+\sin\alpha$ приводится къ логариѳмируемому виду на основаніи того, что $\frac{1}{2}=\sin 30^0$, слѣдующимъ образомъ:

$$1)\ \frac{1}{2}+\sin\alpha=\sin 30^0+\sin\alpha=2\sin\left(15^0+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^0-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Или возьмемъ выраженіе: $\frac{1}{2}-\cos\alpha$.

$\frac{1}{2}=\sin 30^0=\cos 60^0$, и потому

$$2)\ \frac{1}{2}-\cos\alpha=\cos 60^0-\cos\alpha=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+30^0\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-30^0\right).$$

Возьмемъ еще нѣсколько примѣровъ:

$$3)\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha=\sin 45^0+\sin\alpha=$$

$$=2\sin\left(22^030'+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(22^030'-\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$4)\ \sqrt{2}-2\cos\alpha=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\alpha\right)=2(\cos 45^0-\cos\alpha)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+22^030'\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-22^030'\right).$$

$$5)\ \sqrt{3}-2\cos\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\alpha\right)=2(\cos 30^0-\cos\alpha)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15^0\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-15^0\right).$$

$$6)\ \sqrt{3}-2\sin\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\right)=2(\sin 60^0-\sin\alpha)=$$

$$=4\cos\left(30^0+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^0-\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$7)\ \sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin(90^0-\beta)=$$

$$=2\sin\left(45^0+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(45^0-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

$$8)\ \cos\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha-\cos(90^0-\alpha)=2\sin 45^0\sin(45^0-\alpha)$$

и т. п.

§ **97.** Изъ другихъ тригон. выраженій, приводимыхъ къ логариѳмир. виду, укажемъ еще на нѣкоторыя, наиболѣе типичныя.

1) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

2) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

, на основ. форм. XI и XII §-фа 94.

3) $1 + \sin\alpha = 1 + \cos(90^0 - \alpha) = 2\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$

4) $1 - \sin\alpha = 1 - \cos(90^0 - \alpha) = 2\sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$

см. предыд. формулы.

5) $\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \mp \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

6) $1 \mp \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}45^0 \mp \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45^0 \mp \alpha)}{\cos 45^0 \cos\alpha}$;

7) $\sqrt{3} \mp \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}60^0 \mp \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(60^0 \mp \alpha)}{\cos 60^0 \cos\alpha} = \frac{2\sin(60^0 \mp \alpha)}{\cos\alpha}$;

8) $\operatorname{ctg}\alpha \mp \operatorname{ctg}\beta = \ldots\ldots = \frac{\sin(\beta \mp \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, и т. п.

§ **98.** Приведемъ также къ логариѳмируемому виду сумму синусовъ и сумму тангенсовъ 3-хъ угловъ $\triangle$-ка α, β и γ.

Такимъ образомъ, при преобразованіяхъ надо принять во вниманіе, что $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = (\sin\alpha + \sin\beta) + \sin[180^0 - (\alpha + \beta)] =$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\alpha + \beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +$

$+ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ (§ 92) $= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$

$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$, а такъ какъ $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$, то

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$; поэтому окончательно:

$$\mathbf{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

2) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=?$

На основаніи формулы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ (§ 90),

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta).$$

Затѣмъ $\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}[180^0-(\alpha+\beta)]=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ (§§ 55 и 56).

Поэтому:

$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=$ $=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. Отсюда, т. к. $-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\gamma$,

$$\mathbf{tg}\,\alpha+\mathbf{tg}\,\beta+\mathbf{tg}\,\gamma=\mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta\,\mathbf{tg}\,\gamma.$$

§ 99. **Способъ вспомогательнаго угла.**

Иногда при рѣшеніи задачъ получаются такія выраженія, которыя ни къ одному изъ вышеприведенныхъ видовъ непосредственно не приводятся. Ихъ все-таки можно привести къ логариѳмируемому виду, но только посредствомъ введенія, такъ называемаго, **вспомогательнаго угла**.

Возьмемъ, напримѣръ, выраженія:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } x=2\operatorname{ctg}\alpha+\sqrt{2}\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right) \\ \text{II. } y=\sqrt{2}-\operatorname{tg}\alpha\sin\beta \end{array}\right\}\ (\text{P}).$$

Одно изъ этихъ выраженій представляетъ изъ себя сумму 2-хъ одночленовъ, а другое—разность. Прежде чѣмъ приводить къ желательному намъ виду именно эти два выраженія, разберемъ вопросъ о приведеніи къ логариѳмируемому виду при помощи вспомогательнаго угла вообще суммы и разности двухъ одночленовъ.

Возьмемъ сумму $A+B$ и разность $A-B$, гдѣ A и B, вообще говоря, нѣкоторыя одночленныя выраженія.

Предварительно вынесемъ въ нихъ за скобки A. Тогда

$$A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right) \text{ и } \mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathrm{A}\left(1-\frac{B}{A}\right).$$

Теперь выраженія, стоящія въ скобкахъ,

$$1+\frac{B}{A} \text{ и } 1-\frac{B}{A}$$

постараемся привести къ одному изъ слѣдующихъ видовъ:

1) $1+\operatorname{tg}^2\varphi$, 2) $1-\cos^2\varphi$ или $1-\sin^2\varphi$, 3) $1\mp\cos\varphi$ и 4) $1\mp\operatorname{tg}\varphi$, ибо эти послѣднія выраженія сравнительно легко приводятся къ логариѳмируемому виду. Въ самомъ дѣлѣ:

1) $1+\operatorname{tg}^2\varphi=\sec^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}$ (§ 22);

2) $1-\cos^2\varphi=\sin^2\varphi$ и $1-\sin^2\varphi=\cos^2\varphi$;

3) $1+\cos\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2}$ и $1-\cos\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ (§ 97, пр. 1 и 2) и

4) $1\mp\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}45^0\mp\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin(45^0\mp\varphi)}{\cos 45^0\cos\varphi}$ (§ 97, пр. 6).

Возьмемъ сперва сумму $A+B$.

I. $A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)$.

Эту сумму можно было бы привести къ логариѳмируемому виду вообще тремя способами.

1-ый способъ. Если дробь $\frac{B}{A}$ представить въ видѣ $\operatorname{tg}^2\varphi$, то

$$A+B=A(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=A\sec^2\varphi,$$

а это выраженіе можно будетъ логариѳмировать, если предварительно опредѣлить вспомогательный уголъ φ изъ уравненія $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{B}{A}}$.

2-ой способъ. Если дробь $\frac{B}{A}$ представить въ видѣ $\cos\varphi$, то

$$A+B=A(1+\cos\varphi)=2A\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

при чемъ до логариѳмированія нужно будетъ опредѣлить уголъ φ изъ ур-ія $\cos\varphi=\frac{B}{A}$.

3-ій способъ. Если предположить, что $\frac{B}{A}=\operatorname{tg}\varphi$, то

$$A+B=A(1+\operatorname{tg}\varphi)=\frac{A\sin(45^0+\varphi)}{\cos 45^0\cos\varphi},$$

а уголъ φ опредѣлимъ изъ ур-ія $\operatorname{tg}\varphi=\frac{B}{A}$.

Изъ этихъ 3-хъ способовъ наиболѣе удобный—первый, такъ какъ 1) при немъ сумма $A+B$ приводится къ сравнительно наиболѣе простому виду и 2) при этомъ способѣ вспомогательный уголъ φ будетъ опредѣляться по $\operatorname{tg}\varphi$, а по тангенсу уголъ опредѣляется вообще точнѣе, чѣмъ по синусу или косинусу (§ 45).

Слѣдующимъ по удобству будетъ второй способъ, далѣе-третій.

Но наиболѣе удобные, первый и второй способы можно примѣнить не всегда. Напримѣръ, квадрату тангенса можно приравнять только такое выраженіе $\frac{B}{A}$, о которомъ можно напередъ сказать, что оно имѣетъ положительное значеніе, а косинусу можно приравнять дробь $\frac{B}{A}$ только въ томъ случаѣ, если можно утверждать, что она по абсолютной величинѣ будетъ не больше 1. Что касается третьяго способа, то его можно примѣнить всегда, такъ какъ $\operatorname{tg}\varphi$ можетъ имѣть любое значеніе, какъ положительное, такъ и отрицательное.

$$\text{II. } A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right).$$

Это выраженіе можно привести къ логариѳмируемому виду, вообще говоря, тоже тремя способами.

1-ый способъ. Допустимъ, что дробь $\frac{B}{A} = \cos^2\varphi$ (или $\sin^2\varphi$).

$$\text{Тогда } A - B = A\,(1 - \cos^2\varphi) = A\sin^2\varphi,$$

при чемъ уголъ φ будетъ опредѣляться изъ ур-ія $\cos\varphi = \sqrt{\frac{B}{A}}$.

2-ой способъ. Допустимъ, что $\frac{B}{A} = \cos\varphi$.

$$\text{Тогда } A - B = A\,(1 - \cos\varphi) = 2\,A\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

а уголъ φ найдемъ изъ ур-ія $\cos\varphi = \frac{B}{A}$.

3-ій способъ. Положимъ, что $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\varphi$.

$$\text{Тогда } A - B = A\,(1 - \operatorname{tg}\varphi) = \frac{A\sin(45^0 - \varphi)}{\cos 45^0\cos\varphi},$$

а уголъ φ найдемъ изъ ур-ія $\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}$.

Изъ этихъ трехъ способовъ наиболѣе удобны первый и второй, но ихъ не всегда можно примѣнить, такъ какъ $\cos^2\varphi$ можетъ имѣть только положительное значеніе, и притомъ не превышающее единицы, а $\cos\varphi$, хотя и можетъ имѣть какъ положительное такъ и отрицательное значеніе, но тоже не можетъ быть больше 1 (по абсолютной величинѣ). Третьимъ же способомъ можно воспользоваться всегда, ибо тангенсъ можетъ имѣть любое значеніе.

Такимъ образомъ, мы разобрали вопросъ о приведеніи двучленовъ къ логариѳмируемому виду способомъ вспомогательнаго угла въ общемъ видѣ, такъ сказать теоретически. На практикѣ же, когда численныя значенія всѣхъ буквъ даны, сперва подставляютъ въ вычисляемое выраженіе эти численныя значенія, затѣмъ производятъ въ немъ всѣ возможныя упрощенія и только послѣ этого рѣшаютъ, какую формулу удобнѣе примѣнить при логариѳмированіи.

Посмотримъ, напримѣръ, какъ можно привести къ логариѳмич. виду первое изъ 2-хъ тригонометрическихъ выраженій, отмѣченныхъ въ самомъ началѣ этого §-а буквой (P), при какихъ-нибудь данныхъ численныхъ значеніяхъ угла α.

$$\text{I. } x = 2\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{2}\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\operatorname{ctg}\alpha\left[1 + \frac{\sqrt{2}\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{ctg}\alpha}\right].$$

Разберемъ при этомъ 2 случая: 1) когда α — уголъ острый и 2) когда уголъ α — тупой.

1) Пусть $\alpha = 63^0\,28'\,48''$. Тогда, такъ какъ $\frac{\alpha}{2} = 31^0\,44'\,24''$ и

$45^0 - \frac{\alpha}{2} = 13^0\,15'\,36''$, a $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^0$, то

$$x = 2\operatorname{ctg} 63^0\,28'\,48''\left(1 + \frac{\sin 45^0 \cos 13^0\,15'\,36''}{\operatorname{ctg} 63^0\,28'\,48''}\right).$$

Здѣсь дробь, стоящая въ скобкахъ, имѣетъ положительное значеніе, и потому ее можно приравнять $\operatorname{tg}^2\varphi$. Тогда

$$x = 2\operatorname{ctg} 63^0 28' 48''.\ \sec^2\varphi,$$

при чемъ уголъ φ надо предварительно опредѣлить изъ ур-ія

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{\sin 45^0 \cos 13^0\,15'\,36''}{\operatorname{ctg} 63^0\,28'\,48''}}.$$

$$\text{2) } x = 2\operatorname{ctg}\alpha\left[1 + \frac{\sqrt{2}\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{ctg}\alpha}\right],$$

при чемъ $\alpha = 135^0\,17'\,32''$.

Тогда $\frac{\alpha}{2} = 67^0\,38'\,46''$, $\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(-22^0\,38'\,46''\right) =$
$= + \cos 22^0\,38'\,46''$, $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} 135^0\,17'\,32'' = -\operatorname{tg} 45^0\,17'\,32''$.

И потому $x = -2 \operatorname{tg} 45^0\,17'\,32''\left(1 - \frac{\sin 45^0 \cos 22^0\,38'\,46''}{\operatorname{tg} 45^0\,17'\,32''}\right)$.

Здѣсь дробь, стоящая въ скобкахъ, имѣетъ положительное значеніе; притомъ она меньше 1, такъ какъ оба сомножителя въ ея числителѣ меньше 1, а знаменатель ея ($\operatorname{tg} 45^0 17' 32''$) больше 1. Поэтому ее можно приравнять $\cos^2\varphi$. Затѣмъ видимъ, что x имѣетъ отрицательное значеніе; поэтому, чтобы можно было логариѳмировать выраженіе x, умножаемъ обѣ части равенства на -1. Тогда получимъ:

$$-x = 2 \operatorname{tg} 45^0 17' 32'' \,(1 - \cos^2\varphi) = 2 \operatorname{tg} 45^0 17' 32''.\sin^2\varphi,$$

причемъ вспомогательный уголъ φ опредѣлимъ предварительно изъ ур-ія

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\sin 45^0 \cos 22^0 38' 46''}{\operatorname{tg} 45^0 17' 32''}}.$$

Рекомендуемъ учащимся довести вычисленіе x до конца.

II. Теперь возьмемъ 2-ое изъ выраженій (P):

$$y = \sqrt{2} - \operatorname{tg}\alpha\,\sin\beta,$$

и приведемъ его къ логариѳмируемому виду, напримѣръ, при $\alpha = 80^0 28' 35''$, $\beta = 63^0 28' 17''$.

$$y = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha \sin\beta}{\sqrt{2}}\right).$$

Посмотримъ, чему при данныхъ значеніяхъ α и β можно приравнять дробь $\frac{\operatorname{tg}\alpha \sin\beta}{\sqrt{2}}$ ($\cos^2\varphi$, или $\cos\varphi$, или $\operatorname{tg}\varphi$?)

Такъ какъ α и β углы острые, то значеніе этой дроби положительно, такъ что, если бы оно кромѣ того оказалось меньше 1, то ее можно было бы представить въ видѣ $\cos^2\varphi$. А тогда y было бы равно $\sqrt{2}\sin^2\varphi$.

Поэтому, производя лишь приблизительныя вычисленія, рѣшимъ теперь вопросъ, будетъ ли дробь $\frac{\operatorname{tg}\alpha \sin\beta}{\sqrt{2}}$ больше 1, или меньше 1. Мы видимъ, что и α, и β больше 60^0. А намъ извѣстно, что $\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$ и $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому, если бы углы и α, и β равнялись 60^0, то наша дробь равнялась бы $\frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{8}}$, т. е. она была бы больше 1. А такъ какъ и α, и β больше 60^0, а при увеличеніи угла и tg, и sin увеличиваются, то при данныхъ значеніяхъ α и β эта дробь и подавно больше **1**. Слѣдовательно ее приравнять косинусу нельзя. Представимъ ее поэтому въ видѣ $\operatorname{tg}\varphi$. Тогда получимъ, что

$$y = \sqrt{2}(1 - \operatorname{tg}\varphi) = \frac{\sqrt{2}.\sin(45^0 - \varphi)}{\cos 45^0 \cos\varphi} = \frac{2\sin(45^0 - \varphi)}{\cos\varphi},$$

при чемъ вспомогательный уголъ найдемъ изъ ур-ія $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha\sin\beta}{\sqrt{2}}$

Рекомендуемъ учащимся довести вычисленіе до конца.

§ **100**. Полезно имѣть въ виду еще такой способъ приведенія къ логариѳмируемому виду посредствомъ введенія вспомогательнаго угла, при которомъ стараются предварительно получить сумму или разность тангенсовъ. Возьмемъ, напримѣръ, уже разсмотрѣнное нами выраженіе:

$$y = \sqrt{2} - \operatorname{tg}\alpha\sin\beta.$$

Вынесемъ въ немъ $\sin\beta$ за скобки и дробь $\frac{\sqrt{2}}{\sin\beta}$ приравняемъ $\operatorname{tg}\varphi$. Тогда имѣемъ:

$$y = \sqrt{2} - \operatorname{tg}\alpha\sin\beta = \sin\beta\left(\frac{\sqrt{2}}{\sin\beta} - \operatorname{tg}\alpha\right) = \sin\beta(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha) =$$

$= \frac{\sin\beta\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\varphi\cos\alpha}$, гдѣ φ опредѣляется изъ ур-ія: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sin\beta}$.

Глава XIX. **Рѣшеніе треугольниковъ въ особыхъ случаяхъ съ примѣненіемъ формулъ преобразованія тригоном. выраженій.**

Покажемъ это примѣненіе на нѣсколькихъ примѣрахъ.

§ **101**. *Задача 1-я.* Зная, что разность между гипотенузой и катетомъ прямоугольнаго треугольника равна d дм., а противолежащій тому же катету уголъ равенъ α^0, опредѣлить длину гипотенузы.

Значитъ, для прямоугольнаго $\triangle$-ка ABC съ прямымъ угломъ при C *дано*: $c - a = d$ и $A = \alpha^0$; *опредѣлить* c.

Рѣшеніе. Возьмемъ данное уравненіе

$$c - a = d \ldots\ldots (I)$$

Въ немъ 2 неизвѣстныхъ—гипотенуза c и катетъ a, изъ которыхъ требуется опредѣлить c; поэтому исключимъ катетъ a, выразивъ его черезъ гипотенузу c.

$$a = c \sin\alpha.$$

Послѣ подстановки въ ур-іе (I) получимъ:

$$c - c\sin\alpha = d.$$

Рѣшимъ это ур-іе относительно c.

$$c(1 - \sin\alpha) = d$$

$$c = \frac{d}{1 - \sin\alpha},$$

а послѣ приведенія знаменателя къ логариѳмируемому виду (§ 97 пр. 4):

$$c = \frac{d}{2\sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

§ **102**. *Задача 2-я.* Въ треугольникѣ сумма двухъ его сторонъ равна m cm., а углы, противолежащіе этимъ сторонамъ, равны α и β^0. Опредѣлить третью сторону $\triangle$-ка.

Значитъ, въ $\triangle$-кѣ ABC *дано*: $a + b = m$, α и β; *опредѣлить* c.

Рѣшеніе. Возьмемъ данное уравненіе:

$$a + b = m \ldots\ldots (\mathrm{I})$$

Въ немъ два неизвѣстныхъ a и b, представляющихъ собою двѣ стороны $\triangle$-ка; а требуется опредѣлить третью сторону c. Поэтому изъ ур-ія (I) исключимъ неизвѣстныя a и b, выразивъ ихъ черезъ c. Для этого формула синусовъ даетъ:

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} \text{ и } b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Послѣ подстановки въ ур-іе (I) получаемъ:

$$\frac{c\sin\alpha + c\sin\beta}{\sin\gamma} = m \;.\;.\;.\;. (\mathrm{II})$$

Въ этомъ же ур-іи (II) кромѣ c есть еще неизвѣстное γ. Но уголъ γ легко опредѣлить по даннымъ α и β:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta);$$

поэтому $$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta).$$

Подставивъ теперь въ ур-іе (II) $\sin\gamma$, равный $\sin(\alpha+\beta)$, опредѣляемъ изъ него c.

$$c = \frac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta}.$$

Полученное для c выраженіе приведемъ къ логариѳмируемому виду и упростимъ:

$$c = \frac{2\,m\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{m\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Отв. $$c = \frac{m\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\ (cm).$$

§ **103**. *Задача 3-ья.* Рѣшить треугольникъ по разности двухъ его сторонъ, по третьей сторонѣ и по углу, противолежащему этой третьей сторонѣ.

Дано: $a - b = m$; c и γ. *Опредѣлить*: a, b, α и β.*)

Рѣшеніе: $$1)\ \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

$$2)\ \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Вычтемъ почленно изъ первой пропорціи вторую:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma},$$

откуда $$\frac{a-b}{c} = \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\gamma}.$$

Такъ какъ $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$, то $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$.

*) Эта задача рѣшена нами раньше другимъ способомъ (§ 81).

Принимая, кромѣ того, во вниманіе, что $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, послѣ подстановки получимъ:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

и послѣ сокращеній:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Это есть уже извѣстная намъ 2-ая **формула Мольвейде** (§ 82). Изъ нея по $\lg\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, найдемъ $\frac{\alpha-\beta}{2} = \mu$.

Далѣе, какъ и при рѣшеніи задачи § 80, опредѣлимъ α и β, а потомъ a и b.

Точно такимъ же способомъ мы могли бы рѣшить и задачу § 80, и вывести при этомъ 1-ую формулу Мольвейде. Рекомендуемъ сдѣлать это самимъ учащимся.

§ **104.** *Задача.* Вывести формулу тангенсовъ (§ 84)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

какъ слѣдствіе формулы синусовъ.

Рѣшеніе. Изъ пропорціи

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

составимъ производную:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$$

Правое отношеніе этой пропорціи преобразуемъ:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Раздѣлимъ числитель и знаменатель полученной дроби на $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, тогда и получимъ формулу тангенсовъ:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Примѣненіе формулы тангенсовъ см. въ §§ 84, 85 и 86.

ОТДѢЛЪ IV. **Вычисленіе значеній тригонометрическихъ величинъ.**

Глава XX. **Радіальное измѣреніе угловъ.**

§ 105. Различныя системы измѣренія угловъ.

Всякій уголъ можно разсматривать, какъ центральный, такъ какъ для этого стоитъ только изъ его вершины, какъ изъ центра, описать произвольнымъ радіусомъ дугу. А въ геометріи доказывается, что центральные углы относятся между собой, какъ соотвѣтствующія имъ дуги одного и того же радіуса; поэтому, если за единицу для измѣренія угловъ принимать центральный уголъ, соотвѣтствующій той дугѣ, которая берется, какъ единица для измѣренія дугъ, то размѣръ каждаго угла и размѣръ соотвѣтствующей ему дуги всегда будутъ выражаться однимъ и тѣмъ же числомъ.

Для измѣренія дугъ и угловъ установлены различныя системы единицъ:

1) Уже извѣстная учащимся градусная система измѣренія угловъ.

При ней за единицу для измѣренія дугъ принимаютъ дуговой градусъ, равный $\frac{1}{360}$ окружности. Дугѣ въ 1 градусъ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленный уголъ, представляющій изъ себя $\frac{1}{360}$ часть суммы четырехъ прямыхъ угловъ, т. е. $\frac{1}{90}$ часть одного прямого угла. Этотъ уголъ служитъ единицею мѣры для угловъ и называется угловымъ градусомъ; изъ него производятся болѣе мелкія единицы: минута, равная $\frac{1}{60}$ градуса, и секунда, равная $\frac{1}{60}$ минуты или $\frac{1}{3600}$ градуса.

Кромѣ этой, градусной системы измѣренія дугъ и угловъ на томъ же принципѣ дѣленія окружности на опредѣленное число равныхъ частей основаны еще слѣдующія 2 системы.

2) **Десятичная система измѣренія угловъ.** Основной единицей для дугъ въ этой системѣ служитъ $\frac{1}{400}$ часть окружности, называемая **дуговымъ градомъ**; уголъ же, ей соотвѣтствующій, называется угловымъ градомъ или просто **градомъ**. Такимъ образомъ, **градъ равенъ** $\frac{1}{400}$ части суммы четырехъ прямыхъ угловъ, или $\frac{1}{100}$ **части одного прямого угла**. Градъ дѣлится на десиграды, сантиграды и т. д. 1 градъ, 2 града, 5 градовъ, . . . будемъ обозначать такъ: 1^g, 2^g, 5^g, и т. п.

Такъ какъ прямой уголъ $d = 90^0 = 100^g$, то $1^0 = \frac{10^g}{9}$ и наоборотъ $1^g = \frac{9^0}{10}$. Поэтому, напримѣръ, $a^0 = \frac{10^g . a}{9}$ и $m^g = = \frac{9^0 . m}{10}$.

Возьмемъ *2 примѣра*: 1) на превращеніе числа градусовъ, минутъ и секундъ въ число градовъ и 2) на обратное превращеніе числа градовъ въ число градусовъ, минутъ и секундъ.

1-ый примѣръ. $47^0 28' 36''$ превратить въ число градовъ.

$$47^0 28' 36'' = \left(47 + \frac{28}{60} + \frac{36}{3600}\right)^0 = \left(47 + 0{,}4666\ .\ .\ . + 0{,}01\right)^0 =$$

$$= 47^0, 4766\ .\ .\ . = \frac{10^g \cdot 47,4766}{9} = 52^g,752 \text{ (съ изб.)}$$

2-ой примѣръ. $63^g,527$ превратить въ число градусовъ, минутъ и секундъ.

$$63^g,527 = \frac{9^0 . 63{,}527}{10} = 57^0{,}1743;$$

$$0^0, 1743 = 60' . 0{,}1743 = 10',458;$$

$$0', 458 = 60'' . 0{,}458 = 27'',48.$$

Значитъ, $63^g,527 = 57^0 10' 27'',5$ съ изб.

Десятичная система измѣренія угловъ, конечно, практически очень удобна, такъ же, какъ и метрическая система мѣръ длины, вѣса и т. д. Тѣмъ не менѣе она примѣняется сравнительно мало.

3) Спеціально астрономическая система измѣренія угловъ. Въ этой системѣ основной единицей мѣры служитъ, такъ называемый, угловой часъ: 1^h.

$$1^h = \frac{360^0}{24} = 15^0 = \frac{1}{6} \text{ части прямого угла.}$$

Угловой часъ дѣлится на 60 угловыхъ минутъ, а минута на 60 угловыхъ секундъ.

Болѣе подробныя свѣдѣнія объ этой системѣ можно получить въ любомъ учебникѣ космографіи.

Вышеперечисленныя системы измѣренія угловъ—системы практическія. Въ теоретическихъ же вопросахъ тригонометріи особенно важное значеніе имѣетъ, такъ называемое, радіальное измѣреніе угловъ. Въ немъ единицей мѣры для дугъ служитъ дуга круга, длина которой равна длинѣ радіуса этого круга. Уголъ же, соотвѣтствующій этой дугѣ, служитъ единицей для угловъ и носитъ названіе „радіанъ“.

Такимъ образомъ, при радіальномъ измѣреніи угловъ дуги, соотвѣтствующія угламъ, измѣряются такою же единицею мѣры, какъ и тригонометрическія ихъ линіи, именно длиною радіуса.

§ **106**. Докажемъ, что радіанъ, т. е. уголъ, которому соотвѣтствуетъ дуга, длиною въ ея радіусъ, есть величина постоянная, не зависящая и отъ радіуса дуги.

Извѣстно, что отношеніе всякой окружности къ ея діаметру есть число постоянное, обозначаемое символомъ π. На этомъ основаніи длина всей окружности, т. е. длина дуги, содержащей 360^0 будетъ выражаться числомъ $2\pi R$, гдѣ R — число, выражающее длину радіуса въ какихъ-либо единицахъ длины.

Такимъ образомъ,

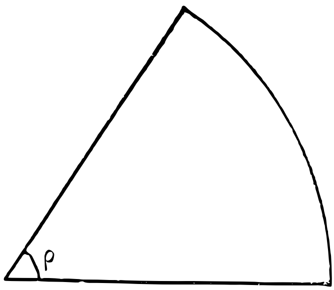
если длина дуги $= 2\pi R$, то она содержитъ 360^0;

если же длина дуги $= R$ „ „ „ „ $\frac{360^0}{2\pi}$.

Значитъ, радіанъ $= \frac{360^0}{2\pi} = \frac{180^0}{\pi} = \frac{2d}{\pi}$, гдѣ d — прямой уголъ.

Этимъ и доказано, что радіанъ такъ же, какъ и прямой уголъ, есть величина вполнѣ опредѣленная.

Градусное выраженіе его есть дробь $\frac{180^0}{\pi}$, знаменателемъ



Черт. 59.

которой служитъ несоизмѣримое съ единицей число π, а потому радіанъ несоизмѣримъ съ угловымъ градусомъ. Число градусовъ, минутъ и секундъ въ немъ можетъ быть поэтому вычислено не вполнѣ точно, а только приближенно. Такъ, вычисленія даютъ, что радіанъ содержитъ

$57^0 17' 44'',806$ съ точностью до 0,001 секунды.

Приблизительный размѣръ радіана виденъ изъ *чертежа 59.*

Слово радіанъ условимся въ дальнѣйшемъ замѣнять символомъ ρ (греческая буква „ро").

§ **107**. Изъ понятія о радіанѣ слѣдуетъ, что опредѣлить, сколькимъ радіанамъ или какой части радіана равенъ данный уголъ, значитъ опредѣлить отношеніе длины соотвѣтствующей дуги къ радіусу.

Покажемъ, какъ на этомъ основаніи градусное выраженіе размѣровъ угла замѣнить радіальнымъ.

Положимъ, что данный уголъ $= \alpha^0$.

Отношеніе окружности, т. е. дуги, содержащей 360^0, къ радіусу равно 2π; поэтому отношеніе дуги въ 90^0 къ радіусу равно $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Слѣдовательно,

уголъ въ 90^0 равенъ $\frac{\pi}{2}\rho$ (радіана),

а " " 1^0 " $\frac{\pi}{180}\rho$,

и " " α^0 " $\frac{\pi\alpha}{180}\rho$.

Если, напримѣръ, уголъ содержитъ 40^0, то онъ равенъ $\frac{40\pi}{180}\rho = \frac{2\pi}{9}\rho = 0{,}70\rho$ съ точностью до $\frac{1}{2}$ сотой радіана. Уголъ, содержащій $75^0 25'$, равенъ $\frac{\pi}{180}\rho \cdot 75\frac{5}{12} = \frac{\pi . 905}{180.12}\rho = 1{,}32\rho$ съ точн. до $\frac{1}{2}$ сотой ρ.

Уголъ въ 90^0 равенъ $\frac{\pi}{2}\ \rho$.

„ „ 45^0 „ $\frac{\pi}{4}\ \rho$.

„ „ 30^0 „ $\frac{\pi}{6}\ \rho$.

„ „ 15^0 „ $\frac{\pi}{12}\ \rho$.

Символъ ρ при радіальномъ выраженіи размѣровъ угла обыкновенно опускается. Такъ, напримѣръ, пишутъ, что $\sin\ 90^0 = \sin\frac{\pi}{2}$; $\sin 45^0 = \sin\frac{\pi}{4}$ и т. п. Вмѣсто $\sin\ (90^0 - \alpha)$ пишутъ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, гдѣ x есть радіальное значеніе угла α^0, т. е. x есть отношеніе угла въ α^0 къ радіану; вмѣсто $\sin\ (180^0 - \alpha)$ пишутъ $\sin\ (\pi - x)$ и т. п.

Равнымъ образомъ, мы можемъ и обратно по радіальному значенію угловъ вычислить его градусное значеніе. Такъ, если радіальное значеніе угла $= x$, то градусное его значеніе $\alpha^0 = \frac{180^0}{\pi}x$.

Почти въ каждомъ сборникѣ логариѳмическихъ и другихъ таблицъ (напримѣръ, въ сборникѣ проф. Глазенапа, на стр. 107) помѣщена таблица, при помощи которой можно легко замѣнять градусное выраженіе угловъ радіальнымъ, и обратно.

Примѣръ 1-ый $69^0 27' 48'' = ?$ радіан.

$$69^0 27' 48'' = \left|\begin{array}{lcr} 69^0 & = & 1,204\ 2772\ \rho \\ +\ 27' & = & +0,007\ 8540\ \rho \\ \quad +\ 48'' & = & +0,000\ 2327\ \rho \\ \hline 69^0 27' 48'' & = & 1,212\ 3639\ \rho \end{array}\right.$$

Примѣръ 2-ой. $2,3454807\ \rho = ?^0\ ?'\ ?''$

$$\begin{array}{l} \underline{2,3387412\ .\ .\ 134^0} \\ 0,0067395 \\ \underline{0,0066904\ .\ .\ .\ .\ 23'} \\ 0,0000491 \\ \underline{0,0000485\ .\ .\ .\ .\ .\ 10''} \\ 2,3454801\ \rho = 134^0 23' 10'' \end{array}$$

недост. $+ 6$

§ **108**. Изъ предыдущаго видно, что радіальное значеніе угла вычисляется посредствомъ производства дѣйствій надъ числомъ π. А такъ какъ это число несоизмѣримо съ единицей, т. е.

не можетъ быть вычислено вполнѣ точно, то углы, выражаемые при градусномъ измѣреніи даже вполнѣ точно, при радіальномъ ихъ измѣреніи такъ же точно выражены быть не могутъ.

Слѣдовательно, на первый взглядъ можетъ показаться, что радіальное измѣреніе угловъ не представляетъ преимуществъ передъ градуснымъ и потому не имѣетъ значенія. Но на самомъ дѣлѣ это не такъ. Радіальное измѣреніе угловъ имѣетъ большое значеніе. Такъ, напримѣръ, только зная радіальное значеніе угла, мы можемъ вычислять значенія тригонометрическихъ величинъ любого угла.

Для этого въ высшей математикѣ выводятся слѣдующія формулы, выражающія значенія sin и cos даннаго угла черезъ радіальное значеніе этого угла:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots \text{ безъ конца}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots \text{ безъ конца,}$$

гдѣ x есть радіальное значеніе угла.

Хотя правыя части этихъ формулъ представляютъ изъ себя безконечные ряды, тѣмъ не менѣе при ихъ помощи мы можемъ съ желаемой степенью точности вычислять значенія sin и cos угла. Для этого достаточно вычислить только часть ряда, состоящую изъ нѣсколькихъ первыхъ его членовъ.

Возможность этого вычисленія обусловливается, конечно, только тѣмъ, что при радіальномъ измѣреніи угловъ и дуги, соотвѣтствующія угламъ, и ихъ тригонометрическія линіи измѣряются одною и тою же единицей мѣры—радіусомъ.

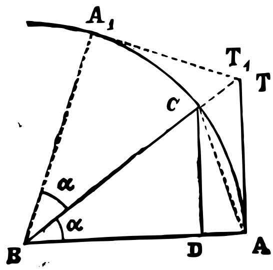
Глава XXI. **Вычисленіе значеній тригонометрическихъ величинъ.**

Чтобы подойти къ элементарному способу вычисленія значеній тригонометрическихъ величинъ, докажемъ прежде всего слѣдующую теорему.

§ **109.** *Теорема.* Если x стремится къ нулю, какъ къ своему предѣлу, то отношеніе $\frac{\sin x}{x}$ стремится къ единицѣ.

$$\text{Если } x \to 0, \text{ то } \frac{\sin x}{x} \to 1 \,(?).$$

Возьмемъ острый уголъ ABC, равный α^0 (*черт. 60*); пусть его радіальное значеніе есть x, т.е. пусть длина соотвѣтствующей ему дуги AC, измѣренная радіусомъ, принятымъ за единицу длины, выражается числомъ x. Построивъ линіи $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, легко изъ чертежа усмотрѣть, что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Докажемъ это.



Черт. 60.

1) $\sin x < x$ (?).

Построивъ линію $\sin\alpha$ (CD) и взявъ хорду CA, легко замѣтить, что CD < хорды CA, а хорда CA < дуги CA. Поэтому и подавно CD $< \smile$ CA, такъ что

$$\text{отн.} \frac{\overline{\text{CD}}}{\text{рад.}} < \text{отн.} \frac{\smile \text{CA}}{\text{рад.}}, \text{ т. е.}$$

$$\sin x < x.$$

2) $x < \operatorname{tg} x$ (?).

Удвоивъ данный уголъ и соотвѣтствующую ему дугу, получимъ $\angle$ ABA_1. Построимъ линію тангенса даннаго угла ABC и равнаго ему угла A_1BC, проведя касательныя черезъ точки A и A_1 до пересѣченія ихъ съ продолженіемъ BC.

Прямоугольные $\triangle\triangle$ ABT и A_1BT_1 равны между собой, такъ какъ у нихъ катеты AB и A_1B равны, какъ радіусы, и острые углы при B равны по построенію. Поэтому катетъ $AT = A_1T_1$ и гипотенуза $BT = BT_1$, т. е. касательныя AT и A_1T_1 равны между собой и пересѣкаютъ продолженіе BC въ одной и той же точкѣ.

Длина дуги AA_1 выражается числомъ $2x$, а длина ломаной линіи ATA_1—числомъ $2\operatorname{tg} x$. Но дуга $AA_1 <$ ломаной ATA_1, такъ какъ вообще выпуклая объемлемая линія меньше всякой объемлющей. Значитъ,

$$2x < 2\operatorname{tg} x,$$

$$\text{откуда} \quad x < \operatorname{tg} x.$$

Итакъ, имѣемъ сложное неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

$$\text{или } \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Взявъ въ немъ вмѣсто чиселъ $\sin x$, x и $\operatorname{tg} x$ ихъ обратныя дроби, мы должны будемъ и знаки неравенства измѣнить на обратные. Получимъ:

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Умноживъ всѣ части неравенствъ на положительное число $\sin x$, имѣемъ:

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Если теперь x начнетъ уменьшаться и будетъ приближаться къ 0, то отнош. $\frac{\sin x}{x}$ будетъ измѣняться, но всегда будетъ заключаться между 1 и $\cos x$. Между тѣмъ разность $1-\cos x$ будетъ неопредѣленно уменьшаться, такъ какъ $\cos x$ будетъ стремиться къ единицѣ, какъ къ своему предѣлу, а потому и меньшая разность $1-\frac{\sin x}{x}$ будетъ тоже неопредѣленно уменьшаться; значитъ предѣлъ отношенія $\frac{\sin x}{x}$ равенъ 1.

Выше мы разсмотрѣли тотъ случай, когда уголъ x — положительный. Но можно доказать, что теорема остается вѣрной и для того случая, когда x — уголъ отрицательный.

Положимъ, уголъ x — отрицательный и пусть $x=-x_1$, такъ что уголъ x_1 — положительный. Тогда

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(-x_1)}{-x_1}=\frac{-\sin x_1}{-x_1}=\frac{\sin x_1}{x_1}.$$

Когда x стремится къ нулю со стороны отрицательныхъ значенiй, то x_1 тоже стремится къ 0, но со стороны положительныхъ значенiй, при этомъ, какъ доказано выше, отношенiе $\frac{\sin x_1}{x_1}$ имѣетъ своимъ предѣломъ единицу. Поэтому и отношенiе $\frac{\sin x}{x}$, которое всегда остается равнымъ отношенiю $\frac{\sin x_1}{x_1}$, тоже имѣетъ своимъ предѣломъ 1.

Итакъ мы доказали, что отношенiе $\frac{\sin x}{x}$ стремится къ 1, какъ къ своему предѣлу, если x стремится къ 0. А это показываетъ, что, если уголъ стремится къ 0, то sin угла и радiальное значенiе угла стремятся къ взаимному равенству, такъ что, ч ѣ м ъ м е н ь ш е о с т р ы й у г о л ъ, т ѣ м ъ б о л ѣ е с т а н о в и т с я д о п у с т и м ы м ъ в м ѣ с т о с и н у с а э т о г о у г л а б р а т ь р а д i а л ь н о е з н а ч е н i е у г л а.

§ **110.** Посмотримъ теперь, какъ будетъ выражаться предѣлъ той погрѣшности, которую мы допустимъ, принявъ, что

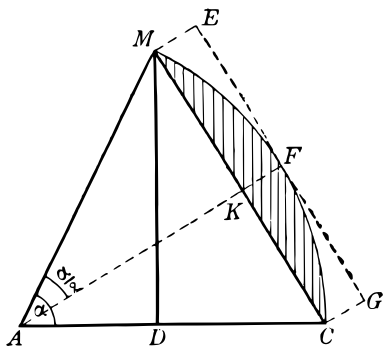
$$\sin x = x.$$

Погрѣшность эта будетъ равна разности

$$x - \sin x.$$

Постараемся найти по возможности ближайшій высшій предѣлъ для этой разности, т. е. найдемъ такое, по возможности наименьшее количество, о которомъ можно сказать, что оно больше, чѣмъ $x - \sin x$.

Возьмемъ уголъ CAM, равный α^0 (*черт. 61*), и пусть его радіальное значеніе равно x. Описавъ изъ вершины угла произвольнымъ радіусомъ дугу CM, построимъ линію синуса MD.



Черт. 61.

Мы знаемъ, что площадь кругов. сектора выражается формулой

$$Q \text{ круг. сект.} = \frac{S.R}{2},$$

гдѣ S — длина дуги, а R — длина радіуса. Поэтому, если за единицу длины принять радіусъ, то площади сектора CAM будетъ соотвѣтствовать выраженіе

$$Q \text{ круг. сект.} = \frac{x.1}{2} = \frac{x}{2}.$$

А черезъ линію синуса можно выразить площадь $\triangle$ AMC. Въ самомъ дѣлѣ, если за основаніе его принять радіусъ AC, то высотой будетъ линія синуса MD, и тогда площади $\triangle$-ка AMC будетъ соотвѣтствовать выраженіе

$$Q_{\triangle} = \frac{1.\sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}.$$

Такимъ образомъ, чтобы получить выраженіе, въ которое входила бы разность $x - \sin x$, достаточно изъ площади кругового сектора AMFC вычесть площадь $\triangle$ AMC. Тогда получимъ площадь кругового сегмента MFC, выражаемую, положимъ, числомъ q; именно:

$$q = \frac{x - \sin x}{2}.$$

Если на хордѣ MC построимъ прямоугольникъ MEGC, проведя для этого касательную черезъ середину F дуги MC и опустивъ на нее перпендикуляры изъ концовъ хорды MC, то площадь этого прямоугольника будетъ больше, чѣмъ площадь сегмента MFC. Поэтому, обозначивъ площадь прямоугольника MEGC черезъ Q, а площадь сегмента, попрежнему, черезъ q, имѣемъ неравенство

$$q < Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

Здѣсь, какъ уже знаемъ, $q = \frac{x - \sin x}{2}$ . . . . (B)

Выразимъ также и Q черезъ тригонометрическія линіи, относя къ послѣднимъ и радіусъ дуги.

Площадь прямоугольника MEGC = MC. CG.

Обозначимъ отвлеченныя числа, выражающія длину MC и CG, соотвѣтственно черезъ y и z, принимая при этомъ за единицу длины радіусъ.

Тогда $Q = yz$.

Если изъ вершины угла A проведемъ радіусъ, перпендикулярный къ хордѣ MC, то онъ раздѣлитъ и хорду, и дугу, и уголъ пополамъ.

Такъ какъ MC = 2 MK, а MK есть линія $\sin \frac{\alpha}{2}$, то

$$y = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

А такъ какъ CG = KF = AF — AK, гдѣ AF — радіусъ, а AK линія $\cos \frac{\alpha}{2}$, то

$$z = 1 - \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому $Q = 2 \sin \frac{\alpha}{2}(1 - \cos \frac{\alpha}{2}) = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ . . . . (C).

Подставляя выраженія (B) и (C) въ неравенство (A), имѣемъ:

$$\frac{x - \sin x}{2} < 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{4} \text{ или}$$

$$x - \sin x < 8 \sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (D)$$

Замѣнимъ теперь тригонометр. величины правой части радіальнымъ значеніемъ дугъ. Но при этомъ мы, конечно, не должны нарушать неравенства (D). А такъ какъ правая часть неравенства есть бóльшая его часть, то мы не будемъ нарушать его, если эту правую часть будемъ только увеличивать.

По аналогіи съ тѣмъ, что $\sin x < x$ (§ 109, форм. А)

$$\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2},$$

$$\text{а также } \sin\frac{x}{4} < \frac{x}{4}, \text{ и потому}$$

$$\sin^2\frac{x}{4} < \frac{x^2}{16}.$$

Значитъ, если въ правую часть неравенства (D) вмѣсто количествъ $\sin\frac{x}{2}$ и $\sin^2\frac{x}{4}$ поставить большія количества $\frac{x}{2}$ и $\frac{x^2}{16}$, то неравенство не нарушится, и мы получимъ:

$$x - \sin x < 8.\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{16}, \text{ откуда}$$

$$\mathbf{x - \sin x < \frac{x^3}{4}}.$$

Такимъ образомъ, для разности $x - \sin x$ высшимъ предѣломъ служитъ $\frac{x^3}{4}$. На этомъ основаніи мы можемъ формулировать слѣдующую теорему: Если приравнять sin остраго угла радіальному значенію x этого угла, то допускаемая при этомъ погрѣшность $(x - \sin x)$ будетъ во всякомъ случаѣ меньше, чѣмъ $\frac{x^3}{4}$, т. е. четвертая часть куба x.

§ **111**. Формулированную въ концѣ предыдущаго §-фа теорему можно доказать слѣдующимъ, болѣе короткимъ, хотя и менѣе нагляднымъ способомъ.

Требуется доказать, что

$$x - \sin x < \frac{x^3}{4}.$$

Доказательство. На основаніи второй части неравенства (А) §-фа 109 имѣемъ:

$$\frac{x}{2} < \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Знаемъ также, что $1 - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}$.

Перемноживъ соотвѣтствующія части этихъ формулъ, имѣемъ

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2} < \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}$$

или $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}x\sin^2\frac{x}{2} < \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$;

отсюда $x - x\sin^2\frac{x}{2} < \sin x$ (§ 92)

и далѣе $x - \sin x < x\sin^2\frac{x}{2}$.

А такъ какъ $\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2}$, то $\frac{x^2}{4} > \sin^2\frac{x}{2}$ и, потому если въ правой, большей части полученнаго неравенства $\sin^2\frac{x}{2}$ замѣнить большимъ числомъ $\frac{x^2}{4}$, то неравенство не нарушится, а усилится. Поэтому можно утверждать, что

$$x - \sin x < x\cdot\frac{x^2}{4}$$

или $x - \sin x < \frac{x^3}{4}$,

что и требовалось доказать.

§ **112.** Для примѣра вычислимъ $\sin 1'$.

Вмѣсто этого надо вычислить радіальное значеніе угла въ $1'$. При радіальномъ измѣреніи угловъ

уголъ въ $90^0 = \frac{\pi}{2}$;

поэтому „ „ $1^0 = \frac{\pi}{180}$,

„ „ $1' = \frac{\pi}{180.60} = \frac{\pi}{10800}$.

Знаемъ, что $\pi = 3{,}1415926535$*) $+ d$, гдѣ d меньше единицы, стоящей на 10-мъ мѣстѣ вправо отъ запятой. Поэтому послѣ вычисленій получимъ, что радіальное значеніе угла въ $1' = 0{,}000290888208 + d_1$ гдѣ d_1 меньше единицы, стоящей на 12-мъ мѣстѣ послѣ запятой. Допустимъ теперь, что

$$\sin 1' = 0{,}000290888208,$$

и посмотримъ, какой приблизительно величины будетъ та погрѣшность, которую мы при этомъ допустили.

Обозначимъ радіальное значеніе угла въ $1'$ черезъ x. Тогда по доказанной въ § 110 теоремѣ имѣемъ:

$$x - \sin 1' < \frac{x^3}{4}.$$

Для облегченія вычисленій поставимъ въ правую, бо́льшую часть нашего неравенства вмѣсто значенія x бо́льшее число 0,00030; отъ этого, конечно, неравенство не нарушится.

$$x - \sin 1' < \frac{0{,}0003^3}{4}.$$

Но $\frac{0{,}0003^3}{4} = \frac{27}{10000^3.4} = \frac{6{,}75}{10^{12}} < \frac{7}{10^{12}}$; поэтому допущенная нами погрѣшность $(x - \sin 1') < \frac{7}{10^{12}}$, т. е. меньше 7 трилліонныхъ, при чемъ эта погрѣшность есть погрѣшность избытка.

Итакъ, можемъ сказать, что $\sin 1' = 0{,}000290888208$, съ точностью до 7 трилліонныхъ съ избыткомъ. Значитъ, 11 первыхъ десятичныхъ знаковъ въ дроби вѣрны. Такимъ образомъ, мы вычислили $\sin 1'$ съ весьма значительной точностью.

Зная значеніе $\sin 1'$, по формулѣ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

мы можемъ вычислить $\cos 1'$. Послѣ этого можемъ вычислить $\sin 2'$, такъ какъ $\sin 2' = 2 \sin 1' \cos 1'$. Далѣе могли бы вычислить $\cos 2' = \cos^2 1' - \sin^2 1'$, а далѣе $\sin 3' = \sin (2' + 1')$ и $\cos 3' = \cos (2' + 1')$ и т. д.

---

*) Чтобы припомнить это число, достаточно помнить слѣдующее французское предложеніе:

Que j'aime á faire connaitre le nombre utile aux sages
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

и писать подрядъ числа, показывающія количество буквъ въ каждомъ словѣ этого предложенія.

§ **112-а**. Но гораздо удобнѣе производить дальнѣйшія вычисленія при помощи особыхъ, такъ называемыхъ, **формулъ Симпсона**. Выведемъ ихъ.

Возьмемъ уже знакомыя формулы (§ 95)

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta.$$

Положимъ, что $\alpha=n\beta$, гдѣ n — произвольное положительное число, тогда формулы примутъ видъ:

$$\sin(n+1)\beta+\sin(n-1)\beta=2\sin n\beta\cos\beta$$
и $$\cos(n+1)\beta+\cos(n-1)\beta=2\cos n\beta\cos\beta.$$

Отсюда опредѣляемъ $\sin(n+1)\beta$ и $\cos(n+1)\beta$:

$$\sin(n+1)\beta=2\sin n\beta\cos\beta-\sin(n-1)\beta;$$
$$\cos(n+1)\beta=2\cos n\beta\cos\beta-\cos(n-1)\beta.$$

Эти формулы и называются формулами Симпсона. Для примѣненія ихъ къ вычисленію sin и cos угловъ, возрастающихъ, напримѣръ, на $1'$, по значеніямъ $\sin 1'$ и $\cos 1'$, достаточно буквѣ n давать послѣдовательно значенія 1, 2, 3, 4.... Тогда, полагая, что $\beta=1'$, при $n=1$, имѣемъ:

$$\sin 2'=2\sin 1'\cos 1'-\sin 0'$$
$$\cos 2'=2\cos^2 1'-1,$$

что можно получить и на основаніи формулъ удвоенія угла. Далѣе, полагая, что $n=2, 3, 4, 5\ldots$, а β попрежнему равна $1'$, получимъ:

$$\sin 3'=2\sin 2'\cos 1'-\sin 1', \text{ а } \cos 3'=2\cos 2'\cos 1'-\cos 1';$$
$$\sin 4'=2\sin 3'\cos 1'-\sin 2', \text{ а } \cos 4'=2\cos 3'\cos 1'-\cos 2'$$

и т. д.

Такимъ же образомъ вычисленія можно произвести и дальше, черезъ каждую $1'$.

Для упрощенія вычисленій существуетъ еще нѣсколько формулъ, но мы приводить ихъ не будемъ.

Часть II.-Гоніометрія.

Въ предстоящей II части нашего курса мы будемъ разсматривать уже извѣстныя намъ величины sin, tg, sec, cos, ctg и csc угла съ общей точки зрѣнія, совершенно независимо отъ того, служитъ ли данный уголъ элементомъ треугольника или нѣтъ. Эти величины мы будемъ называть вообще гоніометрическими *).

Глава XXII. **Расширеніе понятій объ углѣ и объ его гоніометрическихъ функціяхъ.**

§ **113**. При выясненіи понятій о тригонометрическихъ величинахъ даннаго угла мы видѣли, что при измѣненіи угла измѣняется и соотвѣтствующее значеніе каждой изъ его тригонометрическихъ величинъ. Значитъ, если уголъ считать независимой перемѣнной величиной, то каждая изъ тригонометрическихъ величинъ будетъ зависимой перемѣнной величиной

Независимую перемѣнную величину въ математикѣ принято называть **аргументомъ**, а зависимую перемѣнную называютъ **функціей** этого аргумента. Такъ какъ значенія гоніометрическихъ величинъ зависятъ отъ соотвѣтствующаго угла и измѣряющей его дуги, то гоніометрическія величины иначе называютъ гоніометрическими функціями угла или дуги.

Гоніометрическія функціи принадлежатъ къ особому классу функцій, которыя, въ отличіе отъ такъ наз. алгебраическихъ функцій, называются трансцедентными **).

Въ настоящей II части нашего курса мы изучимъ въ общихъ чертахъ свойства гоніометрическихъ функцій.

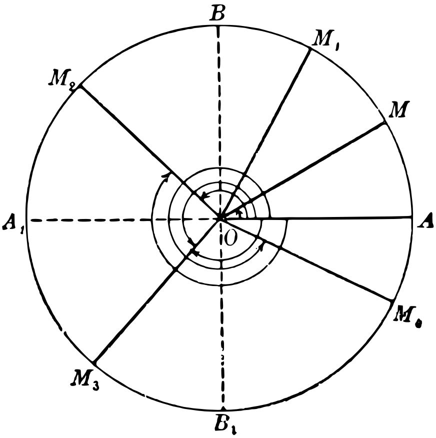
Но прежде всего расширимъ понятіе „уголъ“ и обобщимъ опредѣленіе его, какъ аргумента гоніометрическихъ функцій.

---

*) Отъ греческихъ словъ γωνία—уголъ и μετρεῖν—измѣрять.

**) По вопросу о томъ, какія вообще функціи назыв. алгебраическими, а какія—трансцедентными см. руководство Н. Билибина. Основанія анализа безконечно-малыхъ (гл. V изд. 1907 г.), или чей-либо другой аналогичный учебникъ, наприм., Осн. анализа безк.-мал. Д. Горячева, или Н. Шапошникова, Учен. о производныхъ А. Киселева и пр.

§ **114.** Уже при изученіи геометріи, а также первой части настоящаго учебника (см., напр., § 50) мы получили объ углѣ понятіе, какъ о степени раздвига двухъ прямыхъ линій, исходящихъ изъ одной точки, и потому угломъ АОМ (*черт. 62*) мы можемъ называть путь вращательнаго движенія прямой ОМ вокругъ данной точки О, начиная отъ даннаго положенія прямой ОА до какого-либо другого положенія ОМ; точка О при этомъ называется вершиной угла, а прямыя ОА и ОМ—сторонами угла: ОА—неподвижной, а ОМ—подвижной.



Черт. 62.

Если размѣры угловъ, получившихся при вращеніи подвижной стороны ОМ въ одномъ опредѣленномъ направленіи отъ неподвижной стороны ОА, выражать положительными числами, то, на основаніи принципа Декарта, размѣры угловъ, получившихся при вращеніи стороны въ противоположномъ направленіи, надо выражать числами отрицательными; поэтому и углы назыв. положительными или отрицательными.

При вращеніи стороны ОМ произвольно взятая на ней точка М будетъ описывать дугу АМ, которою и будетъ измѣряться уголъ АОМ. Дуги, измѣряющія положительные или отрицательные углы, называются соотвѣтственно положительными или отрицательными.

Принявъ вышеприведенное опредѣленіе угла, мы можемъ называть угломъ и сумму 2-хъ прямыхъ угловъ, т. е., такъ называемый, развернутый уголъ AOA_1 (*черт. 62*), и сумму 3-хъ прямыхъ угловъ, измѣряемую дугою $AB\,A_1B_1$, и сумму четырехъ прямыхъ угловъ, измѣряемую цѣлой окружностью, и сумму пяти прямыхъ угловъ, измѣряемую 5-ью четвертями цѣлой окружности, и т. д.

На нашемъ чертежѣ 62 кругъ раздѣленъ двумя взаимноперпендикулярными діаметрами AA_1 и BB_1 на четыре равныхъ части, которыя мы будемъ называть **четвертями** или **квадрантами**.

Четверть АОВ мы назовемъ первой; слѣдующія за нею въ положительномъ направленіи (BOA_1, A_1OB_1 и B_1OA) будутъ называться соотвѣтственно второй, третьей и четвертой. Если подвижный радіусъ при своемъ вращеніи остановится въ I четверти круга, то получится уголъ острый; если во II-ой, то уголъ будетъ тупой; если въ III-ей, то уголъ будетъ больше суммы 2-хъ прямыхъ, но меньше суммы 3-хъ прямыхъ угловъ, т. е. больше 180^0 и меньше 270^0; если въ IV-ой, то получится уголъ, большій 270^0, но меньшій 360^0. При дальнѣйшемъ вращеніи подвижнаго радіуса будутъ получаться углы, большіе 360^0, но меньшіе 450^0; далѣе углы, большіе 450^0, но меньшіе 540^0 и т. д.

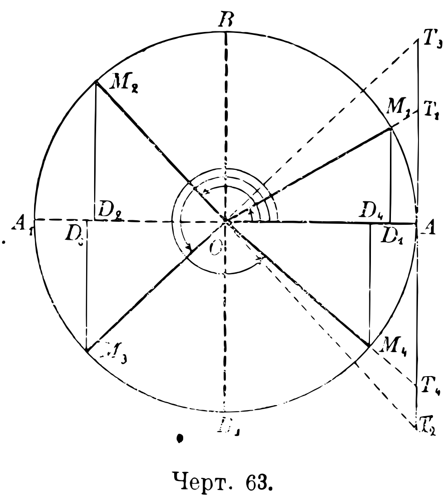
Такимъ же образомъ мы можемъ представить себѣ уголъ, какъ результатъ вращенія подвижнаго радіуса на нѣкоторое число цѣлыхъ оборотовъ и еще на нѣкоторый уголъ, меньшій 360^0. Такъ, мы можемъ представить себѣ уголъ, содержащій 3850^0, какъ путь, пройденный подвижнымъ радіусомъ, когда онъ сдѣлалъ 10 полныхъ оборотовъ и повернулся еще на 250^0, остановившись такимъ образомъ въ III четверти круга (такъ какъ $3850^0 = 360^0 . 10 + 250^0$).

Точно такъ же и отрицательные углы могутъ быть вообще какихъ-угодно размѣровъ. Напримѣръ, уголъ въ -3850^0 оканчивается во II четверти.

§ **115**. Расширивъ понятіе объ углѣ, построимъ теперь тригонометрическія линіи угловъ, оканчивающихся въ III и IV четвертяхъ круга.

Для болѣе же удобнаго сопоставленія новаго для насъ съ уже извѣстнымъ, будемъ производить такія же, знакомыя уже намъ построенія соотвѣтствующихъ линій и для угловъ, оканчивающихся въ I и во II четвертяхъ круга.

Взявъ кругъ (*черт. 63*) и разбивъ его двумя взаимно-перпендикулярными діаметрами AA_1 и BB_1 на 4 четверти, построимъ 4 угла, оканчивающіеся въ каждой изъ этихъ четвертей. Затѣмъ построимъ пока только линіи синуса, тангенса и секанса для каждаго изъ полученныхъ угловъ.



Черт. 63.

Для построенія линій синуса придется опускать перпендикуляры изъ подвижнаго конца дуги M на неподвижный радіусъ или на его продолженіе. Тогда линіями синуса нашихъ угловъ будутъ отрѣзки: D_1M_1, D_2M_2, D_3M_3 и D_4M_4.

Для построенія линій тангенса придется провести касательную къ кругу въ концѣ A неподвижнаго радіуса (въ такъ называемомъ началѣ дуги) и продолжить подвижные радіусы каждаго изъ угловъ до пересѣченія съ этой касательной. Тогда линіями тангенса нашихъ угловъ будутъ отрѣзки этой касательной между точкой касанія и точкой пересѣченія ея съ продолженіемъ подвижнаго радіуса; въ данномъ случаѣ линіями тангенса, значитъ, будутъ служить соотвѣтственно отрѣзки: AT_1, AT_2, AT_3 и AT_4.

Линіями же секанса нашихъ угловъ будутъ отрѣзки OT_1, OT_2, OT_3 и OT_4, соединяющіе вершину угла съ концомъ соотвѣтствующей линіи тангенса.

Пока уголъ остается острымъ, то, при горизонтальномъ положеніи неподвижнаго радіуса, линіи sin и tg направлены кверху, а линія sec по направленію подвижнаго радіуса. Поэтому, сравнивая направленіе линій sin, tg и sec угловъ, оканчивающихся въ различныхъ четвертяхъ круга, съ направленіемъ одноименныхъ линій угла остраго, мы на основаніи принципа Декарта заключаемъ слѣдующее:

1) Если уголъ оканчивается въ I или во II четверти, sin имѣетъ значеніе положительное, если же уголъ оканчивается въ III или IV четверти, то sin имѣетъ значеніе отрицательное.

2) Если уголъ оканчивается въ I или III четверти, tg имѣетъ значеніе положительное; если же во II или въ IV четверти, то значеніе tg-а — отрицательное.

3) Если уголъ оканчивается въ I или въ IV четверти, sec имѣетъ значеніе положительное; если же во II или въ III четверти, то — отрицательное.

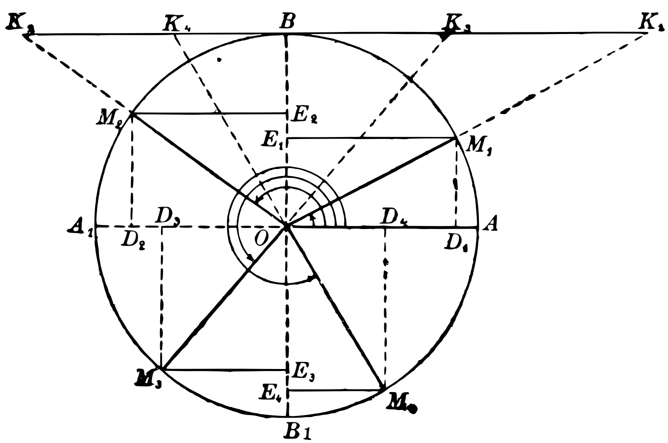
Примѣчаніе. Для уясненія себѣ знаковъ ($\mp$) тригонометрическихъ функцій угловъ, содержащихъ болѣе 360^0, важно обращать вниманіе не столько на самые размѣры угла, сколько на то, въ какой четверти круга онъ оканчивается. Такъ, взявъ уголъ въ 5682^0, видимъ, что онъ равенъ $360^0 . 15 + 282^0$ и оканчивается такимъ образомъ въ IV четверти, и потому его sin и tg отрицательны, секансъ же имѣетъ значеніе положительное. Или, взявъ уголъ въ $(-5682)^0$, увидимъ, что онъ оканчивается въ I четверти круга, и отсюда заключаемъ, что всѣ custom гоніометрическія функціи угла въ $(-5682)^0$ имѣютъ положительное значеніе.

§ **116.** Перейдемъ теперь къ построенію линій cos, ctg и csc угловъ оканчивающихся въ III и IV четвертяхъ круга, производя аналогичныя построенія и въ I, и во II четвертяхъ.

Косинусомъ, котангенсомъ и косекансомъ даннаго угла, какъ извѣстно, называются соотвѣтственно синусъ, тангенсъ и секансъ угла, дополняющаго данный до 90^0. Дополнительнымъ же къ данному углу называется тотъ уголъ, на который надо повернуть подвижный радіусъ для того, чтобы вмѣсто даннаго угла получить положительный прямой уголъ.

Для остраго угла AOM_1 (*черт. 64*) дополнительнымъ угломъ служитъ положительный уголъ M_1OB; для тупого $\angle AOM_2$ дополнительнымъ служитъ отрицательный уголъ M_2OB. Аналогично этому, для угла, оканчивающагося въ III четверти и измѣряющагося дугою ABM_3, дополнительнымъ будетъ отрицательный тупой уголъ M_3OB; для угла же, измѣряющагося дугою ABA_1M_4 и оканчивающагося въ IV четверти, дополнительнымъ будетъ отрицательный уголъ, измѣряющійся дугою M_4A_1B. Для всѣхъ этихъ дополнительныхъ угловъ неподвижнымъ радіусомъ служитъ отрѣзокъ OB.

Для построенія линій синуса каждаго изъ дополнительныхъ угловъ надо опускать перпендикуляры изъ подвижнаго конца дуги M на неподвижный радіусъ угла OB или на его продолженіе. Тогда линіями синуса дополнительныхъ или, что то же, линіями cos данныхъ угловъ будутъ служить соотвѣтственно



Черт. 64.

отрѣзки E_1M_1, E_2M_2, E_3M_3 и E_4M_4. Но эти отрѣзки можно замѣнять равными имъ проекціями подвижнаго радіуса OM на неподвижный радіусъ OA даннаго угла или на его продолженіе, т. е. ихъ можно замѣнять отрѣзками OD_1, OD_2, OD_3 и OD_4.

Сравнивая направленія линій cos для угловъ, оканчивающихся въ различныхъ четвертяхъ, съ направленіемъ линіи cos угла остраго, видимъ, что если уголъ оканчивается въ I или въ IV четверти круга, cos имѣетъ значеніе положительное, а если во II или въ III четверти, то—отрицательное.

Для построенія линій тангенса и секанса дополнительныхъ угловъ придется провести касательную къ кругу въ концѣ B неподвижнаго радіуса OB и продолжать подвижный радіусъ до пересѣченія съ этой касательной. Тогда линіями tg дополнительныхъ угловъ, или, что то же, линіями ctg данныхъ угловъ будутъ отрѣзки BK_1, BK_2, BK_3 и BK_4.

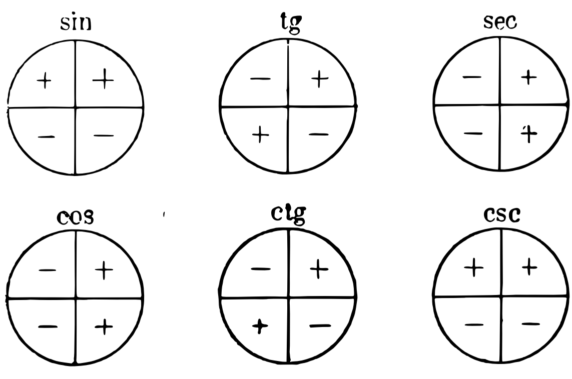
Линіями же csc данныхъ угловъ будутъ отрѣзки, соединяющіе вершину угла съ концомъ соотвѣтствующей линіи ctg, т. е. отрѣзки OK_1, OK_2, OK_3 и OK_4.

Сравнивая направленіе линій ctg и csc, заключаемъ слѣдующее:

1) Ctg угловъ, оканчивающихся въ I или въ III четверти круга, имѣетъ значеніе положительное; для угловъ же, оканчивающихся во II или въ IV четверти, значеніе ctg—отрицательное.

2) Csc угловъ, оканчивающихся въ I или во II четверти, имѣетъ значеніе положительное; для угловъ же, имѣющихъ конецъ въ III или въ IV четверти,—отрицательное.

§ **117**. Для болѣе удобнаго сопоставленія выводовъ двухъ предыдущихъ параграфовъ начертимъ слѣдующія, такъ называемыя, діаграммы знаковъ (*черт. 65*) всѣхъ 6-и гоніометрическихъ функцій.



Черт. 65.

Изъ этихъ діаграммъ легко усмотрѣть слѣдующее:

1) sin и csc, tg и ctg, а также sec и cos, взятые попарно, всегда имѣютъ знаки одинаковые (напримѣръ, когда sin положителенъ, то и csc положителенъ; когда tg отрицателенъ, отрицателенъ и ctg и т. п.); и 2) tg и c g положительны, когда sin и cos имѣютъ одинаковые знаки, и отрицательны, когда знаки sin и cos разные.

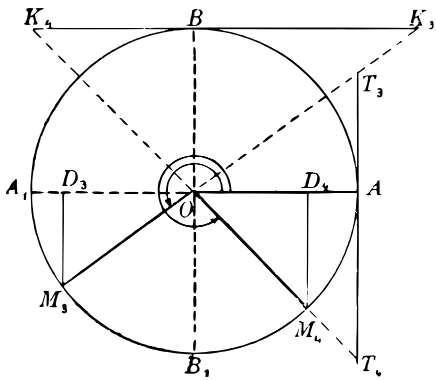
Глава XXIII. **Обобщеніе формулъ соотношенія между значеніями гоніометрическихъ функцій одного и того же угла.**

§ **118.** Въ § 21 мы вывели 5 формулъ соотношенія между тригонометрическими величинами одного и того же остраго угла; далѣе въ § 22 мы вывели еще 3 формулы соотношенія, которыя представляютъ изъ себя необходимое слѣдствіе первыхъ 5 формулъ. Затѣмъ въ § 52 мы распространили эти формулы и на тупые углы.

Докажемъ теперь ихъ справедливость и для угловъ, оканчивающихся въ III и IV четвертяхъ круга.

I. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (?).

Эту формулу можно вывести на основаніи теоремы Пиѳагора изъ $\triangle\triangle$ OD_3M_3 или OD_4M_4 (*черт. 66*). Знаки sin и cos никакого вліянія на формулу не оказываютъ, такъ какъ эти величины входятъ во 2-й степени. При опредѣленіи же $\sin\alpha$ по $\cos\alpha$ или наоборотъ $\cos\alpha$ по $\sin\alpha$ надо обращать вниманіе на то, какой изъ 2-хъ знаковъ взять передъ корнемъ, въ зависимости отъ того, въ какой четверти круга оканчивается уголъ, ибо вообще



Черт. 66.

$$\sin\alpha = \mp\sqrt{1-\cos^2\alpha} \text{ и } \cos\alpha = \mp\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

II. Формулу $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ легко вывести на основаніи подобія треугольниковъ 1) AOT_3 и OD_3M_3 и 2) OAT_4 и OD_4M_4. Относительно знаковъ она тоже справедлива, такъ какъ на основаніи этой формулы tg долженъ имѣть положительное значеніе, если sin и cos имѣютъ одинаковые знаки, и отрицательное, если sin и cos имѣютъ знаки разные. А это обстоятельство мы уже подмѣтили изъ сопоставленія діаграммъ знаковъ (§ 117).

III. Формулу $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ выведемъ изъ подобія треугольниковъ 1) OBK_3 и OD_3M_3 и 2) OBK_4 и OD_4M_4. Относительно знаковъ можно сказать то же, что только-что было сказано при разсмотрѣніи формулы $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

IV. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ (?). Формула эта выводится на основаніи подобія треугольниковъ: 1) OAT_3 и OD_3M_3 и 2) OAT_4 и OD_4M_4. Относительно знаковъ она также справедлива, такъ какъ sec и cos всегда имѣютъ знаки одинаковые (§ 117).

V. $\operatorname{Csc}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ (?). Геометрическій выводъ можно сдѣлать изъ подобія 1) $\triangle\triangle\ OBK_3$ и OD_3M_3 и 2) $\triangle\triangle\ OBK_4$ и OD_4M_4. Относительно знаковъ и эта формула справедлива, ибо знаки csc и sin всегда одинаковые (§ 117).

Глава XXIV. **Формулы приведенія гоніометрическихъ функцій какого-угодно угла къ острому положительному углу.**

§ **119**. Въ §§ 54 и 55 мы вывели слѣдующія формулы приведенія тригонометрическихъ величинъ къ острому углу:

$$\begin{aligned}\sin(90^0+\alpha)&=\cos\alpha \\ \cos(90^0+\alpha)&=-\sin\alpha\end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned}\sin(180^0-\alpha)&=\sin\alpha \\ \cos(180^0-\alpha)&=-\cos\alpha.\end{aligned}$$

Какъ слѣдствія изъ нихъ, на основаніи формулъ соотношенія, мы затѣмъ вывели аналогичныя формулы и для остальныхъ 4 тригонометрическихъ величинъ.

Выведемъ теперь подобныя же формулы приведенія для угловъ, оканчивающихся въ III и IV четвертяхъ круга.

Но предварительно составимъ выраженія этихъ угловъ черезъ острый уголъ α, который при вычерчиваніи мы для удобства будемъ считать меньше 45^0.

Углы, оканчивающіеся во II четверти, какъ уже знаемъ, можно выразить черезъ уголъ α, меньшій 45^0, двумя способами: 1) $90^0+\alpha$ и 2) $180^0-\alpha$, смотря по тому, ближе ли этотъ уголъ къ 90^0 или къ 180^0.

Углы, оканчивающіеся въ III четверти, также могутъ быть по своей величинѣ ближе къ 180^0 или къ 270^0. Поэтому черезъ уголъ α, меньшій 45^0, они могутъ быть выражены 2-мя способами: 1) $180^0+\alpha$ и 2) $270^0-\alpha$. Точно такъ же угламъ, имѣющимъ конецъ въ IV четверти, могутъ соотвѣтствовать 2 выраженія: 1) $270^0+\alpha$ и 2) $360^0-\alpha$.

Сопоставляя всѣ эти 6 выраженій (присоединивъ къ нимъ также выраженія дополнительнаго угла $90^0-\alpha$ и выраженіе угла, превышающаго уголъ α на 360^0, т. е. $360^0+\alpha$) мы можемъ ихъ разбить на 2 слѣдующія группы:

I группа	II группа
$180^0 - \alpha$	$90^0 - \alpha$
$180^0 + \alpha$	$90^0 + \alpha$
$360^0 - \alpha$	$270^0 - \alpha$
$360^0 + \alpha$	$270^0 + \alpha$

Какъ видимъ, въ выраженія черезъ уголъ α угловъ I группы число 90^0 входитъ четное число разъ, а въ выраженія угловъ II группы—нечетное число разъ.

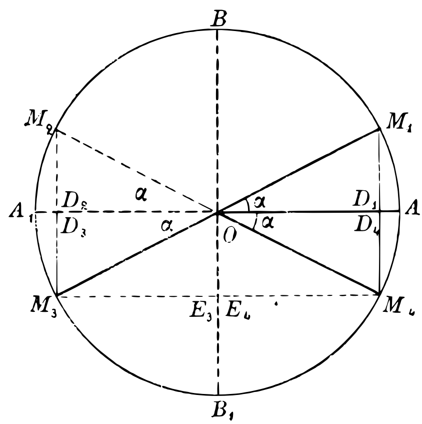
Выведемъ интересующія насъ формулы приведенія сперва для угловъ I группы, а потомъ для угловъ II группы.

§ 120. Формулы приведенія для угловъ I группы.

Въ § 55 уже были выведены формулы:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha \text{ и } \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$

и слѣдствія изъ нихъ.



Черт. 67.

Теперь возьмемъ углы: 1) $AOM_1 = \alpha^0$; 2) AOM_3 (*черт. 67*), равный $(180 + \alpha)^0$, и оканчивающійся въ III четверти, и 3) AOM_4, равный $(360 - \alpha)^0$ и оканчивающійся въ IV четверти; построимъ для этихъ 3 угловъ линіи sin и cos. Сравнивая прямоуг. $\triangle\triangle$ OD_3M_3 и OD_1M_1, видимъ, что они равны между собой, такъ какъ у нихъ гипотенузы равны, какъ радіусы, и острые углы при O равны по условію. Изъ равенства же $\triangle\triangle$-овъ слѣдуетъ, что

$$1)\ D_3M_3 = D_1M_1 \text{ и } 2)\ OD_3 = OD_1.$$

Отсюда, переходя отъ отрѣзковъ къ числамъ, выражающимъ ихъ длины, измѣренныя радіусомъ дуги, и принимая во вниманіе направленіе этихъ отрѣзковъ, имѣемъ:

$$1)\ \sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$2)\ \cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Отсюда, на основаніи формулъ соотношенія (§ 118), можемъ написать:

$$3)\ \operatorname{tg}(180^0 + \alpha) = \frac{\sin(180^0 + \alpha)}{\cos(180^0 + \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = +\operatorname{tg}\alpha.$$

$$4)\ \operatorname{ctg}(180^0+\alpha)=\frac{\cos(180^0+\alpha)}{\sin(180^0+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=+\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$5)\ \sec(180^0+\alpha)=\frac{1}{\cos(180^0+\alpha)}=\frac{1}{-\cos\alpha}=-\sec\alpha.$$

$$6)\ \csc(180^0+\alpha)=\frac{1}{\sin(180^0+\alpha)}=\frac{1}{-\sin\alpha}=-\csc\alpha.$$

Далѣе, сравнивая прямоуг. $\triangle\triangle$ OD_4M_4 и OD_1M_1, видимъ, что у нихъ гипотенузы равны, какъ радіусы, и острые углы при точкѣ O равны по условію. Поэтому $\triangle\triangle$-ки равны, а изъ ихъ равенства слѣдуетъ:

$$1)\ D_4M_4=D_1M_1 \text{ и } 2)\ OD_4=OD_1.$$

Отсюда, принимая во вниманіе направленіе отрѣзковъ, имѣемъ:

$$1)\ \sin(360^0-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$2)\ \cos(360^0-\alpha)=+\cos\alpha.$$

Далѣе, на основаніи формулъ соотношенія:

$$3)\ \operatorname{tg}(360^0-\alpha)=\frac{\sin(360^0-\alpha)}{\cos(360^0-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{+\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

$$4)\ \operatorname{ctg}(360^0-\alpha)=\frac{\cos(360^0-\alpha)}{\sin(360^0-\alpha)}=\frac{+\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$5)\ \sec(360^0-\alpha)=\frac{1}{\cos(360^0-\alpha)}=\frac{1}{+\cos\alpha}=+\sec\alpha.$$

$$6)\ \csc(360^0-\alpha)=\frac{1}{\sin(360^0-\alpha)}=\frac{1}{-\sin\alpha}=-\csc\alpha.$$

Взявъ послѣ этого уголъ $360^0+\alpha$, мы видимъ, что его начало и конецъ совпадаютъ съ началомъ и концомъ остраго угла α; поэтому всѣ одноименныя гоніометрическія величины этихъ угловъ равны между собой:

$$\sin(360^0+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(360^0+\alpha)=\cos\alpha \text{ и т. д.}$$

Прибавляя къ каждому изъ угловъ I группы $360^0.n$, гдѣ n—произвольное цѣлое число, положительное или отрицательное, получимъ углы, которые также подойдутъ подъ опредѣленіе, данное нами угламъ I группы (§ 119). А такъ какъ концы угловъ отъ этого прибавленія $360^0.\ n$ не перемѣстятся, то и значенія гоніометрическихъ функцій угловъ не измѣнятся. Поэтому мы можемъ написать, напримѣръ, такія формулы:

$$\operatorname{tg}(360^0.n + 180^0 + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\csc(360^0.n + 360^0 - \alpha) = -\csc\alpha \text{ и т. п.}$$

Сопоставляя всѣ выведенныя въ этомъ §-ѣ формулы, подмѣчаемъ слѣдующее:

Каждая гоніометрическая величина такого угла, въ выраженіе котораго черезъ острый уголъ α уголъ въ 90^0 входитъ **четное** число разъ, равна **одноименной** гоніометр. величинѣ угла α, взятой со знакомъ $+$ или—; знакъ$+$будетъ, если приводимая величина имѣетъ положительное значеніе, а знакъ—, если приводимая величина имѣетъ отрицательное значеніе.

§ 121. Формулы приведенія для угловъ II группы.

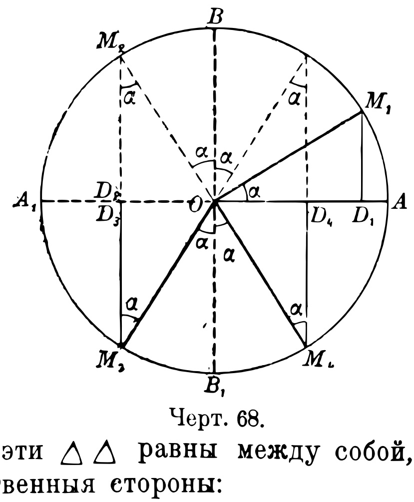
Взявъ острый уголъ α, меньшій 45^0, построимъ углы $90^0 - \alpha$, $90^0 + \alpha, 270^0 - \alpha$ и $270^0 + \alpha$; затѣмъ построимъ линіи sin и cos всѣхъ этихъ угловъ (*черт 68*).

Для угловъ $90^0 - \alpha$ и $90^0 + \alpha$ уже были выведены формулы приведенія:

$$\left.\begin{aligned}\sin(90^0-\alpha) &= \cos\alpha\\ \cos(90^0-\alpha) &= \sin\alpha\end{aligned}\right\}(\S\ 25)\qquad \begin{aligned}\sin(90^0+\alpha) &= +\cos\alpha\\ \cos(90^0+\alpha) &= -\sin\alpha\end{aligned}\ (\S\ 54)$$

и т. д.

Поэтому теперь мы займемся выводомъ формулъ приведенія только для угловъ $270^0 - \alpha$ и $270^0 + \alpha$.



Черт. 68.

Взявъ прямоугольн. $\triangle\triangle$ OD_3M_3 и OD_1M_1, видимъ, что у нихъ гипотенузы равны, какъ радіусы; уголъ M_3 равенъ $\angle M_3OB_1$, какъ углы внутренніе на-крестъ лежащіе при параллельныхъ D_3M_3 и OB_1, пересѣченныхъ OM_3; уголъ же $M_3OB_1 = \alpha$ по построенію. Поэтому $\angle M_3 = \angle AOM_1 = \alpha$, т. е. въ нашихъ $\triangle\triangle$-кахъ OD_3M_3 и OD_1M_1 кромѣ равныхъ гипотенузъ еще равны и углы при точкахъ M_3 и O. Значитъ, эти $\triangle\triangle$ равны между собой, и потому въ нихъ равны и сходственныя стороны:

$$1)\ D_3M_3 = OD_1 \text{ и } 2)\ OD_3 = D_1M_1.$$

Но такъ какъ отрѣзокъ D_3M_3, какъ линія sin, и отрѣзокъ OD_3, какъ линія cos, имѣютъ отрицательное направленіе, то послѣ перехода къ отвлеченнымъ числамъ, выражающимъ длины этихъ линій, имѣемъ:

1) $\sin(270^0 - \alpha) = -\cos\alpha$
2) $\cos(270^0 - \alpha) = -\sin\alpha$.

Отсюда, на основаніи формулъ соотношенія, получимъ;

3) $\operatorname{tg}(270^0 - \alpha) = \dfrac{\sin(270^0 - \alpha)}{\cos(270^0 - \alpha)} = \dfrac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = +\operatorname{ctg}\alpha$

4) $\operatorname{ctg}(270^0 - \alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(270^0 - \alpha)} = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = +\operatorname{tg}\alpha$

5) $\sec(270^0 - \alpha) = \dfrac{1}{\cos(270^0 - \alpha)} = \dfrac{1}{-\sin\alpha} = -\csc\alpha$

6) $\csc(270^0 - \alpha) = \dfrac{1}{\sin(270^0 - \alpha)} = \dfrac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha$.

Взявъ теперь прямоуг. $\triangle\triangle$ OD_4M_4 и OD_1M_1 *(черт. 68.)*, легко подобно предыдущему доказать, что они равны между собой. Поэтому

1) $D_4M_4 = OD_1$ и 2) $OD_4 = D_1M_1$.

Замѣчая теперь, что отрѣзокъ D_4M_4, какъ линія sin, имѣетъ отрицательное направленіе, а отрѣзокъ OD_4, какъ линія cos, положительное, получимъ:

1) $\sin(270^0 + \alpha) = -\cos\alpha$;
2) $\cos(270^0 + \alpha) = +\sin\alpha$.

Отсюда, на основаніи формулъ соотношенія, подобно предыдущему выведемъ:

3) $\operatorname{tg}(270^0 + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$;
4) $\operatorname{ctg}(270^0 + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$;
5) $\sec(270^0 + \alpha) = +\csc\alpha$;
6) $\csc(270^0 + \alpha) = -\sec\alpha$.

Прибавивъ къ любому изъ угловъ II группы по $360^0.n$, мы этимъ не исключимъ его изъ II группы угловъ и не измѣнимъ значеній его goніометр. величинъ. Поэтому можемъ, напримѣръ, написать, что

$\sin(360^0.n + 90^0 + \alpha) = +\cos\alpha$;
$\sec(360^0.n + 270^0 - \alpha) = -\csc\alpha$ и т. п.

Сопоставляя всѣ выведенныя въ этомъ §-ѣ формулы приведенія, подмѣчаемъ слѣдующее:

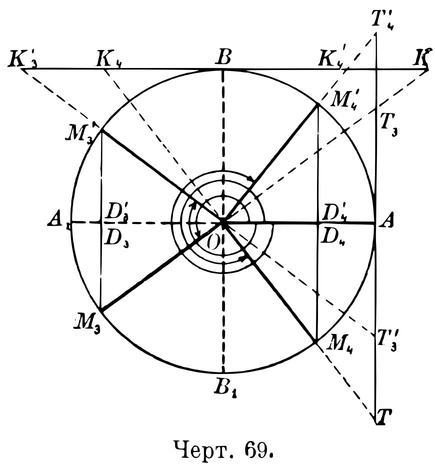
Каждая гоніометрическая функція такого угла, въ выраженіе котораго черезъ острый уголъ α уголъ въ 90^0 входитъ **нечетное** число разъ, равна не одноименной, а **сходной по названію***) гоніометрической функціи угла α, взятой со знакомъ $+$ или $-$; знакъ $+$ будетъ, если приводимая функція имѣетъ значеніе положительное, а знакъ $-$, если приводимая функція имѣетъ значеніе отрицательное.

§ 122. Формулы приведенія отрицательныхъ угловъ.

Въ § 58 мы получили понятіе о тригонометрическихъ величинахъ отрицательнаго угла. При этомъ мы вывели слѣдующія формулы приведенія тригонометрическихъ величинъ отрицательнаго угла къ углу положительному:

1) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	4) $\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$
2) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	5) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
3) $\sec(-\alpha) = +\sec\alpha$	6) $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$.

Но тогда мы разсмотрѣли только случай, когда уголъ α оканчивается въ I или во II четверти. Теперь изъ *черт. 69* легко убѣдиться въ томъ, что всѣ здѣсь приведенныя формулы справедливы и для угловъ, оканчивающихся въ III и въ IV четвертяхъ круга.



Черт. 69.

Если вмѣсто даннаго значенія угла α взять значеніе, отличающееся отъ прежняго на $\mp 360^0 . n$, то начало и конецъ угловъ α и $-\alpha$ отъ этого не перемѣстятся, и потому значенія ихъ гоніометрическихъ функцій не измѣнятся. Такимъ образомъ, всѣ вышеприведенныя формулы приведенія для $-\alpha$ остаются вѣрными при всякомъ положительномъ значеніи α.

То, что эти формулы справедливы и при отрицательныхъ значеніяхъ α, почти не нуждается въ доказательствѣ; въ самомъ дѣлѣ, если α имѣетъ отрицательное значеніе, то $(-\alpha)$ имѣетъ зна-

*) Т. е. такой, названіе которой отличается отъ названія приводимой функціи или прибавленіемъ, или опущеніемъ приставки „со—".

ченіе положительное, и потому, приводя sin отрицательнаго угла α къ положительному углу $(-\alpha)$, можемъ написать: $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$, откуда $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, при чемъ значеніе α — отрицательное.

Итакъ, всѣ гоніометрическія функціи отрицательнаго угла $(-\alpha)$, за исключеніемъ cos и sec, равны одноименнымъ гоніометр. функціямъ равнаго по величинѣ положительнаго угла α, взятымъ со знакомъ —; косинусъ же и sec угла $(-\alpha)$ тоже равны одноименнымъ величинамъ угла α, но взятымъ со знакомъ $+$.

Другими словами: при измѣненіи знака $(\mp)$ угла значенія всѣхъ гоніометрическихъ функцій за исключеніемъ cos и sec измѣняютъ свой знакъ, значенія же cos и sec не мѣняютъ.

§ 123. Распространеніе формулъ приведенія гоніометрическихъ функцій къ углу α на всякія значенія угла α.

Въ предыдущихъ §§-ахъ мы вывели формулы, при помощи которыхъ любую гоніометрическую функцію любого какъ положительнаго, такъ и отрицательнаго угла можно замѣнить функціей остраго положительнаго угла α. Но можно доказать, что всѣ эти формулы остаются вѣрными при всякомъ значеніи α.

Мы уже доказали, что формулы приведенія гоніометрическихъ функцій дополнительнаго угла справедливы при всякомъ значеніи α. Въ самомъ дѣлѣ, въ § 16 мы приняли, какъ опредѣленіе, слѣдующія формулы:

$$\sin(90^0-\alpha) = \cos\alpha;\quad \mathrm{tg}(90^0-\alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha;\quad \sec(90^0-\alpha) = \csc\alpha,$$

а затѣмъ, какъ слѣдствіе этого опредѣленія, на основаніи того, что углы α^0 и $(90-\alpha)^0$ — углы взаимно-дополнительные, мы доказали, что

$$\cos(90^0-\alpha) = \sin\alpha;\quad \mathrm{ctg}(90^0-\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha;\quad \csc(90^0-\alpha) = \sec\alpha.$$

Въ дальнѣйшемъ, распространяя понятія о тригонометрическихъ величинахъ на любые размѣры даннаго угла α, мы всякій разъ пользовались вышеприведеннымъ опредѣленіемъ и убѣждались, что оно примѣнимо при всякихъ размѣрахъ угла α.

Далѣе, въ § 122 мы убѣдились въ томъ, что формулы приведенія тригонометрическихъ величинъ отрицательнаго угла $(-\alpha)$ справедливы также при всякихъ значеніяхъ угла α.

Итакъ, формулы приведенія гоніометрическихъ функцій угловъ $(90^0-\alpha)$ и $(-\alpha)$ къ углу α справедливы при всякомъ, какъ положительномъ, такъ и отрицательномъ значеніи α. Основываясь на этомъ, мы въ состояніи теперь доказать, что и всѣ остальныя формулы приведенія справедливы при всякомъ значеніи того угла α, къ которому приводятся гоніометрическія функціи различныхъ угловъ. При этомъ намъ будетъ достаточно говорить только о sin и cos этихъ угловъ, ибо всѣ остальныя гоніометрическія функціи могутъ быть выражены черезъ sin и cos.

Распространимъ прежде всего формулы приведенія для угла $(90^0+\alpha)$. Такъ какъ формулы

$$\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha \text{ и } \cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha$$

справедливы при всякомъ значеніи α, то онѣ останутся справедливыми и въ томъ случаѣ, если въ нихъ вмѣсто α взять $(-\alpha)$. Тогда получимъ:

$$\sin(90^0+\alpha)=\cos(-\alpha) \text{ и } \cos(90^0+\alpha)=\sin(-\alpha).$$

Отсюда же, на основаніи уже распространенныхъ формулъ для $\sin(-\alpha)$ и $\cos(-\alpha)$, имѣемъ:

$$\sin(90^0+\alpha)=\cos\alpha \text{ и } \cos(90^0+\alpha)=-\sin\alpha,$$

т. е. и эти формулы справедливы при всякомъ значеніи α.

А если такъ, то онѣ останутся вѣрными и въ томъ случаѣ, если въ нихъ вмѣсто α поставить $(90^0-\alpha)$. Тогда получимъ:

$$\sin(180^0-\alpha)=\cos(90^0-\alpha) \text{ и } \cos(180^0-\alpha)=-\sin(90^0-\alpha).$$

Примѣняя здѣсь формулы для угла $(90^0-\alpha)$, имѣемъ:

$$\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha \text{ и } \cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha.$$

Такимъ образомъ, и эти формулы справедливы при всякомъ значеніи α.

Поэтому, если въ нихъ вмѣсто α поставить $(-\alpha)$, то онѣ останутся вѣрными, а тогда имѣемъ:

$$\sin(180^0+\alpha)=\sin(-\alpha) \text{ и } \cos(180^0+\alpha)=-\cos(-\alpha).$$

Отсюда, примѣняя опять формулы приведенія для угла $(-\alpha)$, получимъ:

$$\sin(180^0+\alpha)=-\sin\alpha \text{ и } \cos(180^0+\alpha)=-\cos\alpha.$$

Значитъ и эти формулы справедливы при всякомъ значеніи α. Разсуждая такъ же и далѣе, мы распространимъ формулы для угла $(270^0-\alpha)$, а потомъ для угла $(270^0+\alpha)$ и наконецъ формулы для угла $(360^0-\alpha)$.

Глава XXV. **Обобщеніе формулъ преобразованія тригонометрическихъ выраженій.**

Въ 2-хъ предыдущихъ главахъ мы доказали, что формулы соотношенія и формулы приведенія, выведенныя нами первоначально только для того случая, когда входящіе въ эти формулы углы—острые и положительные, оказываются справедливыми при всякихъ значеніяхъ угловъ.

Равнымъ образомъ можно доказать, что и всѣ формулы преобразованія тригонометрическихъ выраженій, выведенныя нами въ §§ 87—97, также обладаютъ этимъ свойствомъ всеобщности.

Вспомнимъ, что изъ всѣхъ формулъ преобразованія только первыя двѣ, именно формулы для sin и cos суммы 2-хъ угловъ были выведены нами непосредственно, всѣ же остальныя представляютъ изъ себя необходимыя слѣдствія этихъ 2-хъ формулъ, а также формулъ соотношенія, которыя уже обобщены нами выше. Поэтому намъ достаточно будетъ доказать только, что формулы

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\text{и}\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

справедливы при всякихъ значеніяхъ угловъ α, и β какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ.

§ **124**. Сперва докажемъ, что формулы для $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$ справедливы при всякихъ положительныхъ значеніяхъ α и β.

Въ § 89 было уже доказано, что онѣ справедливы, 1) когда $\alpha<90^0$ и $\beta<90^0$, но $\alpha+\beta>90^0$ и 2) когда или α, или $\beta>90^0$, но $<180^0$.

Чтобы распространить ихъ вообще на всякія значенія α и β, докажемъ слѣдующую лемму:

Лемма. Если формулы

$$\sin(\mu+\nu)=\sin\mu\cos\nu+\cos\mu\sin\nu$$
$$\cos(\mu+\nu)=\cos\mu\cos\nu-\sin\mu\sin\nu$$

справедливы при какихъ-либо данныхъ значеніяхъ угловъ μ и ν, то онѣ окажутся справедливыми и въ томъ случаѣ, если къ одному изъ этихъ угловъ прибавить 90^0.

Доказ. Дано, что эти формулы справедливы для суммы $(\mu+\nu)$; докажемъ, что онѣ справедливы и для суммы $(\mu_1+\nu)$, гдѣ $\mu_1=\mu+90^0$. Возьмемъ $\sin(\mu_1+\nu)$ и $\cos(\mu_1+\nu)$ и подставимъ въ нихъ выраженіе $\mu_1=\mu+90^0$. Тогда

$$\sin(\mu_1+\nu)=\sin(90^0+\mu+\nu)=\sin[90^0+(\mu+\nu)]=\cos(\mu+\nu)$$
$$\cos(\mu_1+\nu)=\cos(90^0+\mu+\nu)=\cos[90^0+(\mu+\nu)]=-\sin(\mu+\nu).$$

Такъ какъ по условію для $(\mu+\nu)$ распространяемыя нами формулы справедливы, то, разлагая правыя части полученныхъ равенствъ, можемъ написать:

$$\sin(\mu_1+\nu)=\cos\mu\cos\nu-\sin\mu\sin\nu$$
$$\cos(\mu_1+\nu)=-\sin\mu\cos\nu-\cos\mu\sin\nu.$$

Такъ какъ $\mu_1=\mu+90^0$, то $\mu=\mu_1-90^0$, и потому послѣ подстановки имѣемъ:

$$\sin(\mu_1+\nu)=\quad\cos(\mu_1-90^0)\cos\nu-\sin(\mu_1-90^0)\sin\nu$$
$$\text{и }\cos(\mu_1+\nu)=-\sin(\mu_1-90^0)\cos\nu-\cos(\mu_1-90^0)\sin\nu.$$

Отсюда, такъ какъ

$$-\sin(\mu_1-90^0)=-\sin[-(90^0-\mu_1)]=+\sin(90^0-\mu_1)=+\cos\mu$$
$$\text{и}\cos(\mu_1-90^0)=\quad\cos[-(90^0-\mu_1)]=+\cos(90^0-\mu_1)=\quad\sin\mu_1,$$

послѣ подстановки получаемъ:

$$\sin(\mu_1+\nu)=\sin\mu_1\cos\nu+\cos\mu_1\sin\nu$$
$$\cos(\mu_1+\nu)=\cos\mu_1\cos\nu-\sin\mu_1\sin\nu,$$

что́ и требовалось доказать.

На основаніи этой леммы докажемъ теперь, что интересующія насъ формулы для $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$ справедливы при всякихъ положительныхъ значеніяхъ α и β.

Положимъ, углы α и β не острые, и пусть въ углѣ α прямой уголъ содержится n разъ, а въ углѣ β — m разъ; тогда углы α и β можно выразить черезъ острые углы слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha=90^0.m+\mu$$
$$\beta=90^0.n+\nu,$$

гдѣ μ и ν—углы острые.

Наши формулы будутъ справедливы для $(\mu+\nu)$, такъ какъ μ и ν — углы острые; на основаніи же доказанной леммы онѣ будутъ оставаться справедливыми, если къ углу μ будемъ прибавлять m разъ по 90^0, а къ углу ν — n разъ. А тогда мы въ нашихъ формулахъ вмѣсто угловъ μ и ν получимъ углы α и β, такъ что формулы для $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$ окажутся справедливыми при любыхъ, какъ-угодно большихъ, положительныхъ значеніяхъ α и β.

§ **125.** Теперь докажемъ, что формулы для $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$ справедливы и при всякихъ отрицательныхъ значеніяхъ угловъ α и β.

Положимъ, что α — уголъ отрицательный и что для того, чтобы получить ближайшій положительный уголъ, къ нему надо прибавить $360^0.m$. Но если къ α прибавить $360^0.m$, то и къ суммѣ $(\alpha+\beta)$ прибавится $360^0.m$, а отъ этого sin и cos $(\alpha+\beta)$ значеній не измѣнятъ.

Поэтому можемъ написать, что

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin[(360^0m+\alpha)+\beta]$$
$$\text{и } \cos(\alpha+\beta)=\cos[(360^0m+\alpha)+\beta].$$

Но такъ какъ углы $(360m+\alpha)$ и β — углы положительные, то для нихъ распространяемыя нами формулы справедливы, и потому

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin[(360^0m+\alpha)+\beta]=\sin(360^0m+\alpha)\cos\beta+\cos(360^0m+\alpha)\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[(360^0m+\alpha)+\beta]=\cos(360^0m+\alpha)\cos\beta-\sin(360^0m+\alpha)\sin\beta.$$

Отсюда, такъ какъ $\sin(360^0m+\alpha)=\sin\alpha$ и $\cos(360^0m+\alpha)=\cos\alpha$, имѣемъ:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

т. е. что наши формулы справедливы и для того случая, когда уголъ α — отрицательный.

Если и уголъ β — отрицательный, то доказательство справедливости формулъ будетъ аналогичнымъ.

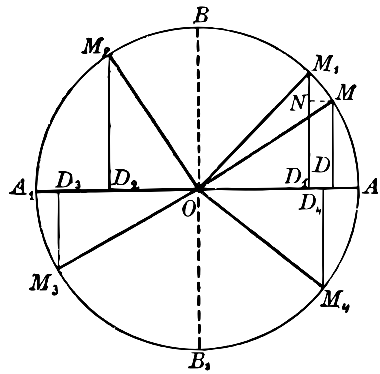
Глава XXVI. **Измѣненіе значеній гоніометрическихъ функцій въ зависимости отъ измѣненія ихъ аргумента.**

§ **126.** Измѣненіе величины назыв. непрерывнымъ, если она, переходя отъ какого-либо значенія p къ значенію q, принимаетъ **всѣ** промежуточныя значенія, находящіяся между p и q.

Значитъ, при непрерывномъ измѣненіи величины каждое слѣдующее ея значеніе можетъ отличаться отъ предыдущаго какъ угодно мало.

Въ настоящей главѣ мы займемся разсмотрѣніемъ вопроса, какъ измѣняются значенія гоніометрическихъ функцій при непрерывномъ измѣненіи ихъ аргумента, т. е. угла или дуги.

Начнемъ съ синуса. Уже въ I части, въ § 29 мы разсмотрѣли измѣненіе $\sin\alpha$ при измѣненіи угла α отъ 0 до 90^0, и увидали, что $\sin\alpha$ при этомъ измѣняется отъ 0 до 1. Легко усмотрѣть изъ *чертежа 70*, что при дальнѣйшемъ увеличеніи α въ предѣлахъ отъ 90^0 до 180^0 $\sin\alpha$ измѣняется отъ 1 до 0, и $\sin 180^0 = 0$. При увеличеніи угла α отъ 180^0 до 270^0 $\sin\alpha$ измѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до -1, и $\sin 270^0 = -1$; при измѣненіи же α отъ 270^0 до 360^0 $\sin\alpha$ измѣняется отъ -1 до 0, при чемъ $\sin 360^0 = 0$. При дальнѣйшемъ же увеличеніи угла α значенія $\sin\alpha$ будутъ повторяться въ томъ же самомъ порядкѣ, какъ и при первомъ оборотѣ подвижнаго радіуса.



Черт. 70.

Легко обнаружить, что при непрерывномъ измѣненіи угла sin этого угла измѣняется также непрерывно. Въ самомъ дѣлѣ, если углу AOM, равному α^0 (*черт. 70*), дадимъ приращеніе MOM_1, равное δ^0, то линія $\sin\alpha$ получитъ приращеніе NM_1. Если послѣ этого приращеніе угла δ будетъ уменьшаться и стремиться къ 0, то, какъ легко видѣть, приращеніе $\sin\alpha$ будетъ тоже стремиться къ 0. И это будетъ справедливо всегда, независимо отъ того, какое первоначальное значеніе имѣлъ уголъ α.

§ **127**. На томъ же самомъ чертежѣ легко прослѣдить измѣненіе $\cos\alpha$. Если мы возьмемъ острый уголъ α и будемъ его уменьшать, то линія $\cos\alpha$ OD будетъ увеличиваться и будетъ стремиться къ равенству съ радіусомъ OA. Поэтому можемъ сказать, что $\cos 0 = 1$. При увеличеніи же остраго угла α $\cos\alpha$ будетъ уменьшаться и, пока уголъ будетъ стремиться къ равенству съ прямымъ угломъ, $\cos\alpha$ будетъ непрерывно уменьшаться, а потому можно сказать, что при непрерывномъ измѣненіи угла α отъ 0^0 до 90^0 $\cos\alpha$ измѣняется также непрерывно отъ 1 до 0.

При дальнѣйшемъ увеличеніи угла отъ 90 до 180^0 значеніе $\cos\alpha$ станетъ отрицательнымъ и будетъ измѣняться отъ 0 до -1; при увеличеніи же угла отъ 180 до 270^0 значеніе $\cos\alpha$ будетъ оставаться отрицательнымъ и будетъ измѣняться отъ -1 до 0; далѣе, при измѣненіи угла отъ 270 до 360^0 $\cos\alpha$ опять станетъ положительнымъ и будетъ измѣняться отъ 0 до $+1$.

При дальнѣйшемъ увеличеніи угла α значенія $\cos\alpha$ будутъ повторяться въ той же самой послѣдовательности, какъ и при первомъ оборотѣ подвижнаго радіуса.

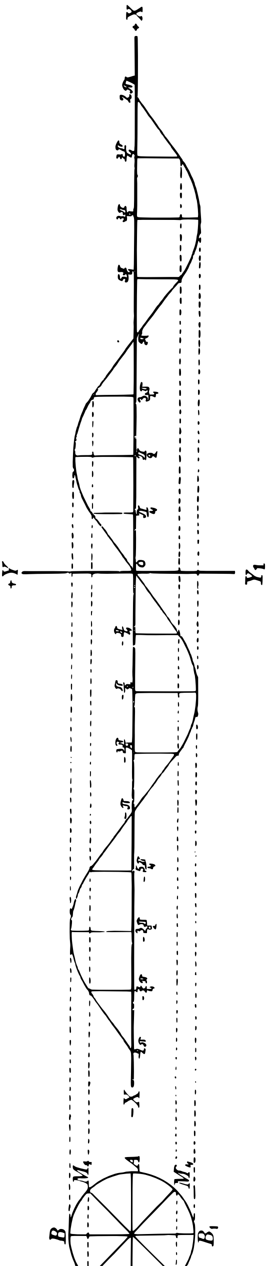
§ **128**. Разсмотрѣнное нами измѣненіе значеній sin въ зависимости отъ измѣненія угла α можетъ быть наглядно представвлено на діаграммѣ (*черт. 71*), начерченной слѣдующимъ образомъ.

Въ знакомомъ уже намъ гоніометрическомъ кругѣ радіусъ котораго взятъ достаточно малымъ для того, чтобы чертежъ помѣстился на одной страницѣ, возьмемъ центральный уголъ АОМ $= \alpha^0$. Пусть его радіальное значеніе равно x. Обозначивъ значеніе $\sin x$ черезъ y, получимъ ур-іе:

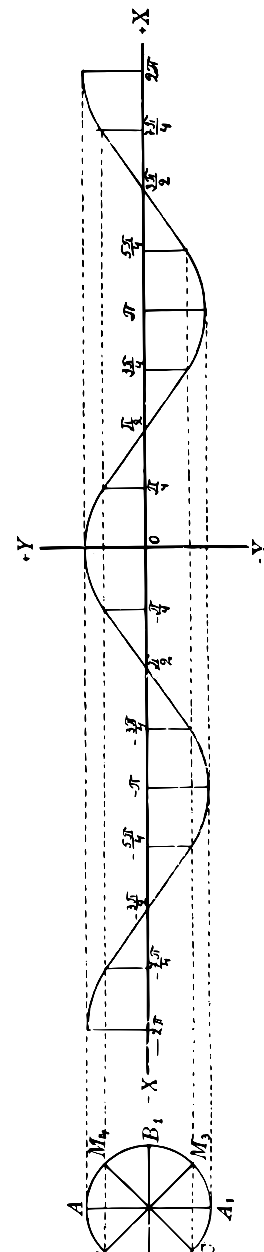
$$y = \sin x.$$

При измѣненіи угла x будетъ измѣняться и y. Эту зависимость мы и изобразимъ на чертежѣ. Для этого на продолженіи неподвижнаго радіуса возьмемъ произвольную точку и поставимъ при ней цифру 0, или букву О; затѣмъ проведемъ черезъ эту точку вертикальную прямую YY_1; такимъ образомъ черезъ точку О будутъ проходить 2 прямыя: горизонтальная OX и вертикальная YY_1, которыя называются осями координатъ. На горизонтальной оси будемъ откладывать отрѣзки, изображающіе значенія x. Тогда углу въ 360^0 будетъ соотвѣтствовать отрѣзокъ, равный 2π радіусамъ (т. е. этотъ отрѣзокъ будетъ приблизительно въ $6^1/_4$ раза больше радіуса круга). Углу въ 180^0 соотвѣтствуетъ отрѣзокъ π рад., углу въ $90^0 - \frac{\pi}{2}$, углу въ $270^0 - \frac{3}{2}\pi$, углу $45^0 - \frac{\pi}{4}$, углу $(-90)^0$ соотвѣтствуетъ отрѣзокъ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и т. д. Въ концахъ этихъ отрѣзковъ будемъ проводить вертикальныя прямыя, т. е. линіи, параллельныя YY_1, и будемъ проектировать на нихъ соотвѣтствующія линіи синуса; тогда положительнымъ значеніямъ y будутъ соотвѣтствовать отрѣзки, направленные вверхъ, а отрицательнымъ—отрѣзки, направленные внизъ.

Черезъ концы этихъ отрѣзковъ проведемъ кривую линію; она будетъ имѣть волнообразную форму. Эта линія называется с и н у с о и д о й. Она наглядно представляетъ измѣненіе синуса въ зависимости отъ измѣненія угла; такъ, если мысленно вести по ней точку слѣва направо, то пока эта точка поднимается кверху, то это значитъ, что при увеличеніи угла x значеніе $\sin x$ также увеличивается; если точка опускается, то при увеличеніи угла $\sin x$ уменьшается. Такимъ образомъ, мы видимъ, что пока радіальное значенія угла x непрерывно увеличивается отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, y, равное $\sin x$, непрерывно увеличивается отъ 0 до $+1$ при увеличеніи угла въ предѣлахъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3}{2}\pi$ $\sin x$ непре-



Черт. 71. Кривая измѣненій функціи $y = \sin x$.



Черт. 72. Кривая измѣненій функціи $y = \cos x$.

рывно уменьшается отъ $+1$ до -1, переходя черезъ 0 при $x=\pi$; при непрерывномъ же увеличеніи угла отъ $\frac{3}{2}\pi$ до 2π, $\sin x$ непрерывно увеличивается отъ -1 до 0. При дальнѣйшемъ увеличеніи значенія угла отъ 2π до 4π и далѣе значеніе $\sin x$ будетъ измѣняться такъ же, какъ оно измѣнялось, пока уголъ увеличивался отъ 0 до 2π.

На томъ же чертежѣ 71 изображается измѣненіе $y=\sin x$ при измѣненіи отрицательнаго значенія x.

§ **129**. Такія функціи, значеніе которыхъ при непрерывномъ измѣненіи аргумента измѣняется тоже непрерывно, называются непрерывными. Такія функціи, значеніе которыхъ при увеличеніи аргумента тоже увеличивается, назыв. возрастающими, а такія, значеніе которыхъ при увеличеніи аргумента уменьшается, назыв. убывающими. Такимъ образомъ, мы видимъ, что синусъ есть функція непрерывная, но бываетъ то возрастающей, то убывающей. Такого же рода функціи можно назвать разноперемѣнными.

Значитъ, синусъ есть функція непрерывная и разноперемѣнная.

§ **130**. Изъ того же чертежа 71 можно легко усмотрѣть, что при увеличеніи любого угла на одно и то же количество 2π, или 360 значенія $\sin x$ повторяются. Такія функціи, значенія которыхъ повторяются отъ прибавленія къ любому значенію ихъ аргумента одного и того же постояннаго количества, называются періодическими, при чемъ то наименьшее количество, прибавленіе котораго къ любому значенію аргумента не измѣняетъ значенія функціи, называется періодомъ функціи.

Значитъ, синусъ есть функція періодическая съ періодомъ 2π, или 360^0.

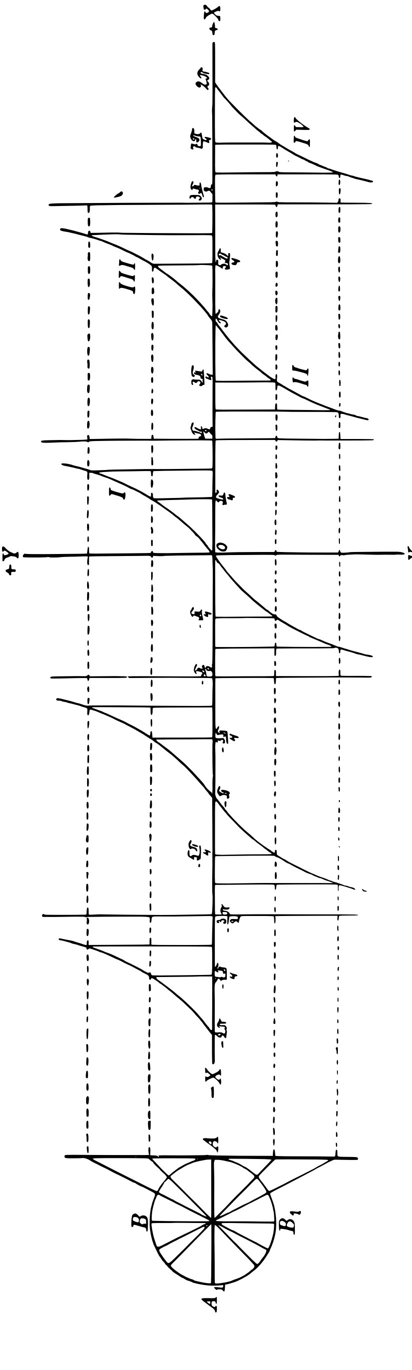
§ **131**. Точно такъ же можно прослѣдить измѣненіе $\cos x$ въ зависимости отъ непрерывнаго измѣненія x. Эту зависимость также можно изобразить въ видѣ кривой линіи.

Чтобы построить эту кривую, надо прежде всего повернуть нашъ goніометрическій кругъ около его центра въ сторону возрастанія угловъ на 90^0 такъ, чтобы I неподвижный діаметръ AA_1 занялъ вертикальное положеніе, а діаметръ BB_1 —горизонтальное; затѣмъ надо строить отрѣзки, изображающіе значенія $\cos x$, такъ же, какъ мы поступали при построеніи синусоиды. Тогда мы получимъ кривую (*черт. 72,* стр. 157), которая имѣетъ такую же форму, какъ и синусоида, но эта синусоида какъ будто передвинута влѣво на $\frac{\pi}{2}$ радіуса.

Слѣдя за изгибами этой линіи, мы замѣчаемъ, что при непрерывномъ увеличеніи угла отъ 0 до π значеніе $\cos x$ непрерывно уменьшается отъ $+1$ до -1, переходя черезъ 0 (нуль) при $x=\frac{\pi}{2}$; при увеличеніи же x въ предѣлахъ отъ π до 2π значеніе $\cos x$ увеличивается отъ -1 до $+1$, переходя опять черезъ 0 (нуль) при $x=\frac{3}{2}\pi$. Такъ же легко замѣтить періодичность въ измѣненіи $\cos x$.

Вообще заключаемъ, что **косинусъ**, **такъ же, какъ и синусъ**, **есть функція непрерывная, разноперемѣнная и періодическая съ періодомъ** 2π.

§ **132**. Чтобы прослѣдить за измѣненіемъ $\operatorname{tg} \alpha$ при измѣненіи угла α отъ 0^0 до 360^0 и далѣе, возьмемъ нашъ гоніометрическій кругъ и построимъ въ немъ острый уголъ α и его линію tg. Затѣмъ, слѣдя за измѣненіемъ y, равнаго $\operatorname{tg} x$, въ зависимости отъ измѣненія угла x, будемъ одновременно чертить и ту кривую линію (*черт. 73*), которая будетъ намъ наглядно представлять ходъ измѣненій $\operatorname{tg} x$, подобно тому, какъ синусоида представляла ходъ измѣненій $\sin x$.



Черт. 73. Кривая измѣненій функціи $y = \operatorname{tg} x$.

При вычерчиваніи этой линіи, полезно, обративъ вниманіе на то, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 45^0 = 1$, прежде всего взять $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; построимъ вертикальный отрѣзокъ, соотвѣтствующій $y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, т. е. отрѣзокъ, равный радіусу, принятому за единицу мѣры, и начнемъ уголъ уменьшать. Тогда $\operatorname{tg} x$ начнетъ уменьшаться и будетъ стремиться къ 0, какъ къ своему предѣлу, и потому можно сказать, что при x, равномъ 0, и $\operatorname{tg} x = 0$. Если послѣ этого радіальное значеніе угла x будетъ увеличиваться отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x$ будетъ увеличиваться отъ 0 безпредѣльно, оставаясь все время положительнымъ т. е. онъ будетъ, измѣняться отъ 0 до $+\infty$, и потому можно сказать, что при $x = \frac{\pi}{2}$ значеніе $\operatorname{tg} x = +\infty$. При этомъ ходъ измѣненія y, равнаго $\operatorname{tg} x$, будетъ представляться кривою I (*черт. 73*), которая верхнимъ своимъ концомъ уходитъ, такъ сказать, въ безконечность, непрерывно при этомъ приближаясь къ перпендикуляру, возставленному къ прямой OX изъ точки, соотвѣтствующей $x = \frac{\pi}{2}$, но при этомъ никогда не достигая этого перпендикуляра.

Передвинувъ подвижный радіусъ во II четверть круга, возьмемъ уголъ, равный 135^0 $(= 180^0 - 45^0)$; его радіальное значеніе есть $\frac{3\pi}{4}$. Такъ какъ $\operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi = \operatorname{tg} 135^0 = -\operatorname{tg} 45^0 = -1$, то значенію $\operatorname{tg} x$ при $x = \frac{3}{4}\pi$ будетъ соотвѣтствовать вертикальный отрѣзокъ, равный радіусу и направленный внизъ отъ линіи OX. Если послѣ этого начнемъ уголъ α уменьшать отъ 135^0 до 90^0, то $\operatorname{tg} x$ начнетъ по абсолютной величинѣ безпредѣльно увеличиваться, оставаясь при этомъ отрицательнымъ, такъ что, когда x опять станетъ равнымъ $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x$ будетъ равенъ $-\infty$.

Такимъ образомъ, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ равенъ $\pm\infty$, т. е. или $+\infty$ или $-\infty$, смотря по тому, какъ получился уголъ $\frac{\pi}{2}$: при увеличеніи остраго угла до 90^0, или при уменьшеніи тупого угла до 90^0.

Если же уголъ x начнемъ увеличивать отъ $\frac{3}{4}\pi$ (т. е. отъ 135^0) до π, то $\operatorname{tg} x$ будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ 0 (нулю), оставаясь все время отрицательнымъ. Переходя къ предѣлу, можно сказать, что при $x = \pi$ значеніе $\operatorname{tg} x = 0$.

Такимъ образомъ, ходъ измѣненія $\operatorname{tg} x$ при измѣненіи угла въ предѣлахъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до π будетъ наглядно представляться на чертежѣ 73 кривою II, расположенной ниже прямой OX и показывающей, что $\operatorname{tg} x$ измѣняется отъ $-\infty$ до 0.

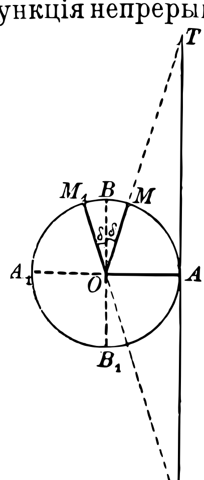
Если будемъ продолжать увеличеніе x отъ π до $\frac{3}{2}\pi$, т. е. отъ 180^0 до 270^0, то $\operatorname{tg} x$ станетъ опять положительнымъ и будетъ увеличиваться отъ 0 до $+\infty$, получивъ при $x = \frac{5}{4}\pi\,(=225^0)$ значеніе, равное $+1$. Этотъ ходъ измѣненія $y = \operatorname{tg} x$ изображается кривою III, представляющей изъ себя непосредственное продолженіе кривой II. Такимъ образомъ, эти двѣ части одной и той же кривой наглядно показываютъ, что, если уголъ α непрерывно увеличивается отъ 90 до 270^0, то $\operatorname{tg}\alpha$ тоже непрерывно увеличивается отъ $-\infty$ до $+\infty$, переходя черезъ 0 при $\alpha = 180^0$.

Подобно тому, какъ мы строили II часть нашей кривой, строимъ и IV часть, которая наглядно представитъ ходъ измѣненій tg при измѣненіи угла въ предѣлахъ отъ 270 до 360^0 и будетъ показывать, что tg при этомъ измѣняется отъ $-\infty$ до 0. При $\alpha = 270^0$ такъ же, какъ и при $\alpha = 90^0$, $\operatorname{tg}\alpha = \pm\infty$, смотря по тому, какъ получился уголъ въ 270^0, при возрастаніи ли угла или при уменьшеніи его.

§ **133**. При дальнѣйшемъ увеличеніи угла отъ 360^0 значенія tg будутъ повторяться въ томъ же самомъ порядкѣ, какъ и при первомъ оборотѣ подвижнаго радіуса. Вообще легко замѣтить, что и tg такъ же, какъ sin и cos, есть функція періодическая, но періодомъ ея достаточно считать не 2π, или 360^0, а π, или 180^0. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи формулы $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg}(180^0 + \alpha) = \operatorname{tg} x$ значеніе этой функціи не измѣняется отъ прибавленія къ любому значенію ея аргумента количества π (или угла въ 180^0).

Затѣмъ изъ того же чертежа 73 легко усмотрѣть, что при увеличеніи угла значеніе тангенса всегда увеличивается, такъ что tg есть функція возрастающая.

Изъ того же чертежа можно видѣть, что tg есть функція непрерывная, пока уголъ измѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до 90^0, отъ 90^0 до 270^0 и отъ 270^0 до 360^0, и т. д. Но сказать, что tg есть вообще функція непрерывная, нельзя, ибо при измѣненіи аргумента въ нѣкоторыхъ предѣлахъ измѣненіе tg претерпѣваетъ, какъ говорятъ, разрывъ непрерывности. Въ самомъ дѣлѣ, измѣненія тангенса наглядно представляются не непрерывной кривой, какъ это было для sin и cos, а нѣсколькими кривыми, которыя своими верхними концами удаляются, такъ сказать, въ $+\infty$, а нижними въ $-\infty$. Этотъ разрывъ непрерывности въ измѣненіи tg можно обнаружить и аналитически. Возьмемъ 2 угла AOM и AOM_1 (*черт. 74*), изъ которыхъ пусть $\angle AOM = (90 - \delta)^0$, а $\angle AOM_1 = (90 + \delta)^0$, гдѣ δ весьма ма-



Черт. 74.

лый уголъ. Значитъ, первый уголъ на столько же меньше 90^0, на сколько второй больше 90^0.

Пусть $\operatorname{tg}(90^0 - \delta) = A$;
тогда $\operatorname{tg}(90^0 + \delta) = -A$,

такъ какъ $\operatorname{tg}(90^0 + \delta) = -\operatorname{ctg}\delta$, а $\operatorname{tg}(90^0 - \delta) = +\operatorname{ctg}\delta$, такъ что $\operatorname{tg}(90^0 + \delta) = -\operatorname{tg}(90^0 - \delta)$.

Вычтемъ почленно изъ второго равенства первое. Тогда получимъ:

$$\operatorname{tg}(90^0 + \delta) - \operatorname{tg}(90^0 - \delta) = -2A.$$

Такимъ образомъ, если вмѣсто угла $(90 - \delta)^0$ взять уголъ $(90 + \delta)^0$, то приращеніе угла будетъ равно $(90^0 + \delta) - (90^0 - \delta) = 2\delta$; соотвѣтствующее же приращеніе tg будетъ равно $-2A$. Если мы δ начнемъ непрерывно уменьшать, то значеніе $\operatorname{tg}(90 - \delta) = A$ будетъ непрерывно увеличиваться и можетъ стать какъ угодно большимъ. Но мы видѣли, что приращенію угла 2δ соотвѣтствуетъ приращеніе тангенса $-2A$, такъ что въ данномъ случаѣ, если приращеніе угла 2δ будетъ непрерывно уменьшаться, то соотвѣтствующее приращеніе $(-2A)$ tg-са будетъ по абсолютной величинѣ безпредѣльно не уменьшаться, а увеличиваться. Это и доказываетъ, что при непрерывномъ измѣненіи угла въ предѣлахъ, близкихъ къ 90^0, измѣненіе tg перестаетъ быть непрерывнымъ.

То же будетъ и при измѣненіи угла въ предѣлахъ, близкихъ къ 270^0.

Изъ всего сказаннаго въ этомъ §-ѣ можемъ заключить слѣдующее: 1) Тангенсъ есть функція періодическая съ періодомъ π, или 180^0; 2) тангенсъ есть функція возрастающая и 3) тангенсъ есть функція непрерывная, измѣненія которой, впрочемъ, претерпѣваютъ разрывъ непрерывности при измѣненіи угла въ предѣлахъ близкихъ къ 90^0 и 270^0, вообще въ предѣлахъ, близкихъ къ $90^0.(2n+1)$, гдѣ n — любое цѣлое число.

§ **134**. Такимъ же образомъ изъ построенія соотвѣтствующей діаграммы можно было бы прослѣдить измѣненія ctg при непрерывномъ измѣненіи угла. Но мы можемъ сдѣлать это и безъ діаграммы, на основаніи слѣдующихъ соображеній.

1. На основаніи того, что $\operatorname{ctg}(180^0 + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, можемъ сказать, что ctg есть функція періодическая съ періодомъ π, или 180^0.

2. На основаніи того, что $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, можемъ сказать, что при увеличеніи $\operatorname{tg}\alpha$ соотвѣтствующее значеніе ctg уменьшается.

Поэтому, такъ какъ tg есть функція возрастающая, ctg есть функція убывающая.

3. Если обозначить значеніе $\operatorname{ctg}\delta$, гдѣ δ весьма малый уголъ, черезъ A, то будемъ имѣть равенства:

$$\operatorname{ctg}(180^0 + \delta) = \operatorname{ctg}\delta = A,$$
$$\text{а } \operatorname{ctg}(180^0 - \delta) = -\operatorname{ctg}\delta = -A.$$

Вычитая изъ перваго равенства второе, получимъ:

$$\operatorname{ctg}(180^0 + \delta) - \operatorname{ctg}(180^0 - \delta) = 2A,$$

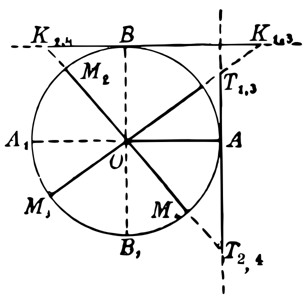
т. е., если приращеніе угла равно $(180^0 + \delta) - (180^0 - \delta) = 2\delta$, то приращеніе ctg будетъ равно 2A. Если мы δ начнемъ непрерывно уменьшать, то $\operatorname{ctg}\delta = A$ будетъ безпредѣльно увеличиваться. Такимъ образомъ, если приращеніе угла, близкаго къ 180^0, равное 2δ, будетъ уменьшаться, то соотвѣтствующее приращеніе ctg-а будетъ безпредѣльно увеличиваться. Другими словами, при непрерывномъ измѣненіи угла въ предѣлахъ, близкихъ къ 180^0, измѣненіе ctg претерпѣваетъ разрывъ непрерывности. То же будетъ и при измѣненіи угла въ предѣлахъ, близкихъ къ 360^0, и вообще въ предѣлахъ, близкихъ къ $90^0 \cdot 2n$, гдѣ n — любое цѣлое число.

§ **135**. На основаніи того, что $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, а $\csc x = \frac{1}{\sin x}$, послѣ разсужденій аналогичныхъ тѣмъ, которыя только что имѣли мѣсто при изслѣдованіи измѣненій ctg-а, мы могли бы вывести слѣдующія заключенія касательно измѣненій секанса и косеканса при непрерывномъ измѣненіи угла. (При формулировкѣ этихъ заключеній полезно также имѣть или представлять передъ своими глазами соотвѣтствующія части *чертежа 75*).

1) sec и csc суть функціи періодическія, съ періодомъ 2π или 360^0.

2) sec и csc суть функціи разнопеременныя, т. е. то возрастающія, то убывающія.

3) sec и csc суть функціи непрерывныя, но измѣненіе ихъ претерпѣваетъ разрывъ непрерывности при измѣненіи угла въ предѣлахъ, близкихъ къ $90^0 \cdot (2n + 1)$ — для секанса и къ $90^0 \cdot 2n$ — для косеканса.



Черт. 75.

Глава XXVII. **Обратныя круговыя функціи и ихъ многозначность.**

§ **136.** Иногда бываетъ нужно прежнюю функцію разсматривать какъ независимую перемѣнную величину, т. е. какъ аргументъ; тогда прежній аргументъ станетъ зависимой перемѣнной, или функціей. Въ этомъ случаѣ новая функція называется *обратной* функціей по отношенію къ прежней; прежняя же функція тогда называется *прямой*. Такъ, если $y = \sin x$, то y есть прямая функція x, а x есть обратная функція y.

Вообще углы или дуги можно разсматривать, какъ функціи тригонометрическихъ величинъ. Въ этомъ случаѣ *углы или дуги будутъ называться обратными круговыми функціями*.

Если зависимость синуса отъ дуги выражается ур-іемъ $y = \sin x$, то обратную зависимость дуги отъ значенія синуса принято выражать ур-іемъ:

$$\mathbf{x = arc\ sin\ y},$$

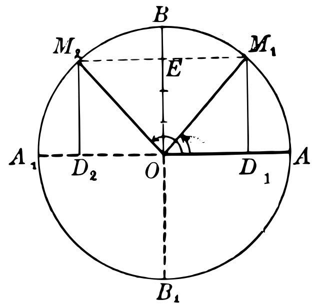
которое читается такъ: „x *равно arcus sinus* y“, или „x *есть дуга, sinus которой равенъ* y“. Точно такъ же функціямъ $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \sec x$ соотвѣтствуютъ обратныя функціи: $\mathbf{x = arc\ tg\ y}$ и $\mathbf{x = arc\ sec\ y}$.

§ **137**. Извѣстно, что каждому данному значенію угла или дуги соотвѣтствуетъ единственное значеніе каждой изъ его круговыхъ функцій. Такъ, если дуга $x = \frac{\pi}{4}$ (или 45^0), то $y = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и только; если дуга $x = \frac{\pi}{6}$ (т. е. 30^0), то $\operatorname{tg} \alpha =$ только $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Обратныя же круговыя функціи этимъ свойствомъ не обладаютъ. Въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ, изъ чертежа 71 (§ 128), представляющаго изъ себя синусоиду, можно видѣть слѣдующее. Въ то время какъ каждая вертикальная прямая пересѣкаетъ синусоиду только въ одной точкѣ, каждая горизонтальная прямая, если пересѣкаетъ синусоиду, то въ нѣсколькихъ точкахъ; если же представить себѣ, что синусоида продолжается безпредѣльно какъ въ положительную, такъ и въ отрицательную сторону, то пересѣкающая ее горизонтальная прямая при продолженіи будетъ пересѣкать ее въ неограниченномъ количествѣ точекъ. А это значитъ, что каждому данному значенію y соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній x, равныхъ $\operatorname{arc} \sin y$.

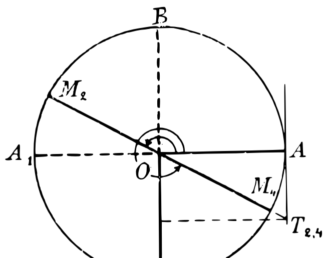
Пояснимъ этотъ вопросъ еще на нѣсколькихъ конкретныхъ примѣрахъ.

Примѣръ. I. Положимъ, требуется построить уголъ, sinus котораго равенъ $^3/_4$.



Черт. 76.

Найдемъ сперва наименьшій положительный уголъ, которому соотвѣтствуетъ это значеніе синуса. Для этого опишемъ произвольнымъ раствореніемъ циркуля кругъ (*черт. 76*); проведемъ въ немъ 2 взаимно-перпендикулярныхъ діаметра: горизонтальный AA_1 и вертикальный BB_1. Такъ какъ sin искомаго угла равенъ $+^3/_4$, то линія синуса его направлена кверху и длина его равна $^3/_4$ радіуса. Поэтому отложимъ вверхъ на вертикальномъ діаметрѣ отрѣзокъ OE, равный $^3/_4$ радіуса. Затѣмъ черезъ точку E проведемъ прямую, параллельную діаметру AA_1; она пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ M_1 и M_2; каждую изъ этихъ точекъ можно считать за конецъ той дуги, sin которой равенъ $^3/_4$. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ точки M_1 опустимъ перпендикуляръ $M_1 D_1$ на неподвижный радіусъ, то онъ будетъ равенъ $^3/_4$ радіуса и будетъ служить линіей sin дуги AM_1 или угла AOM_1. Точно такъ же, опустивъ перпендикуляръ изъ точки M_2 на продолженіе неподвижнаго радіуса, мы получимъ отрѣзокъ M_2D_2, который тоже равенъ $^3/_4$ радіуса, и его можно считать линіей sin дуги ABM_2 или угла AOM_2.

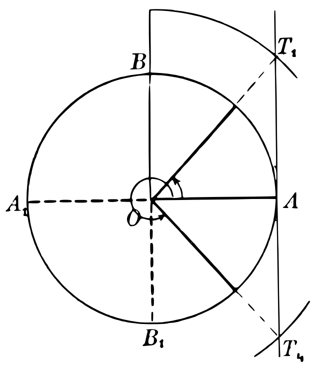


Черт. 77.

Такимъ образомъ, видимъ, что одному и тому же значенію синуса соотвѣтствуетъ 2 дуги или 2 угла. Но это еще не все. Если къ каждому изъ полученныхъ 2-хъ угловъ прибавлять по $360^0 . n$, гдѣ n равно любому цѣлому числу въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, то будутъ получаться углы, sin которыхъ тоже равенъ $^3/_4$. Значитъ, одному и тому же значенію аргумента y обратной круговой функціи $x = \arcsin y$ соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній x.

Примѣръ. II. Построить уголъ, tg котораго равенъ $-\frac{1}{2}$. Для этого въ нашемъ гоніометрическомъ кругѣ (*черт. 77*) проведемъ касательную черезъ начало дуги A и отложимъ на ней внизъ отъ точки A отрѣзокъ AT, равный $\frac{1}{2}$ радіуса. Тогда, соединивъ прямою конецъ T съ центромъ и продолживъ эту прямую до пересѣченія съ окружностью по другую сторону отъ точки O, мы получимъ 2 дуги ABM_2 и $ABA_1B_1M_4$, для которыхъ tg имѣетъ одно и то же значеніе — $^1/_2$. Если къ каждой изъ этихъ дугъ прибавить по $+ 2\pi . n$, гдѣ n любое цѣлое число, отъ — до $+\infty$, то получимъ безчисленное множество дугъ, имѣющихъ то же значеніе тангенса.

Примѣръ. III. Построить уголъ, sec котораго равенъ $1\,^1/_2$. Проведемъ касательную къ goніометрич. кругу (*черт. 78*) черезъ начало дуги A и найдемъ на ней точку, отстоящую отъ центра на растояніи, равномъ $1^1/_2$ радіуса. Для этого опишемъ изъ центра O дугу, радіусъ которой въ $1^1/_2$ раза больше радіуса круга. Тогда эта дуга пересѣчетъ касательную въ двухъ точкахъ T_1 и T_4. Соединивъ ихъ съ центромъ O, получимъ 2 отрѣзка OT_1 и OT_4, длина которыхъ равна $1^1/_2$ радіусамъ и которыя будутъ линіями секанса 2-хъ угловъ; изъ нихъ одинъ оканчивается въ I четверти, а другой—въ IV-ой. Такимъ образомъ, для этихъ угловъ sec имѣетъ данное значеніе $1\,^1/_2$. Если къ каждому изъ нихъ прибавлять по $360^0 . n$, то будемъ получать безчисленное множество угловъ, для которыхъ sec тоже имѣетъ данное значеніе. Итакъ, ур-іе $x = \text{arc sec}\, 1\,^1/_2$, имѣетъ безчисленное множество рѣшеній.



Черт. 78.

Точно такъ же могли бы рѣшить аналогичныя задачи и относительно косинуса, котангенса и косеканса.

Изъ разсмотрѣнныхъ примѣровъ убѣждаемся въ томъ, что всѣ обратныя круговыя функціи $x = \arcsin y$, $x = \text{arctg}\, y$ и $x = \text{arc sec}\, y$ и т. д. для каждаго даннаго значенія аргумента y имѣютъ, вообще говоря, безчисленное множество значеній.

Функція, имѣющая только одно значеніе при каждомъ данномъ значеніи своего аргумента, называется однозначной, если же функція при каждомъ данномъ значеніи аргумента можетъ имѣть два или нѣсколько разныхъ значеній, то она называется вообще многозначной.

Значитъ, всѣ гоніометрическія функціи однозначны, а соотвѣтствующія имъ обратныя круговыя функціи многозначны.

§ **138**. На разобранныхъ примѣрахъ мы убѣдились въ томъ, что каждому данному значенію аргумента любой изъ обратныхъ круговыхъ функцій соотвѣтствуетъ, вообще говоря, безчисленное множество значеній функціи. Но при этомъ было ясно, что эти безчисленныя значенія каждой функціи могутъ быть связаны между собою нѣкоторыми соотношеніями. Постараемся выразить эти соотношенія посредствомъ формулъ.

Сперва выведемъ общее выраженіе всѣхъ значеній функціи $x = \text{arc}\,\sin y$ при каждомъ данномъ значеніи y.

Изъ примѣра I (§ 137) мы видѣли, что, если $\sin x = \frac{3}{4}$, то этому значенію sin соотвѣтствуютъ 2 угла AOM_1 (*черт.* 76) и AOM_2 и тѣ безчисленные углы, которые будутъ получаться отъ прибавленія къ этимъ 2 угламъ $360^0 . n$, гдѣ n можетъ равняться какому угодно цѣлому числу въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Если градусное значеніе наименьшаго положительнаго угла AOM_1, удовлетворяющаго данному ур-iю $\sin x = \frac{3}{4}$, обозначимъ черезъ α_0, то градусное значеніе угла AOM_2 будетъ равно $(180^0 - \alpha_0)$. Если прибавить къ нимъ по $360^0 . n$, то получатся слѣдующія 2 общихъ выраженія угловъ, удовлетворящихъ нашей задачѣ:

$$1)\ \alpha = 360^0 . n + \alpha_0 \qquad \text{и}\ 2)\ \alpha = 360^0 . n + 180^0 - \alpha_0.$$

Но эти 2 выраженія можно замѣнить однимъ. Для этого прежде всего преобразуемъ ихъ въ 2 такія выраженія, которыя по виду сходны между собой:

$$1)\ \alpha = 180^0 . 2n + \alpha_0 \qquad \text{и}\ 2)\ \alpha = 180^0 (2n + 1) - \alpha_0.$$

Отсюда видимъ, что если 180^0 умножается на четное число $2n$, то передъ α_0 стоитъ знакъ $+$, если на нечетное число $(2n + 1)$, то передъ α_0 стоитъ знакъ $-$. Эту зависимость знака передъ α_0 отъ множителя при 180^0 можно выразить слѣдующимъ образомъ, на основаніи того, что $(-1)^{2n} = +1$ и $(-1)^{2n+1} = -1$:

$$1)\ \alpha = 180^0 . 2n + (-1)^{2n} \alpha_0$$
$$\text{и}\ 2)\ \alpha = 180^0 . (2n + 1) + (-1)^{2n+1} \alpha_0.$$

Эти же 2 выраженія имѣютъ вообще совершенно подобный видъ, такъ что, если въ нихъ множители $2n$ и $(2n + 1)$ замѣнить однимъ множителемъ m, то и ихъ можно замѣнить однимъ выраженіемъ:

$$\alpha = \mathbf{180^0 . m} + (-1)^m \alpha_0.$$

Итакъ, если знаемъ, что $\sin \alpha_0 = \frac{3}{4}$, то, имѣя ур-iе

$$x = \text{arc}\sin \frac{3}{4}$$

и обозначивъ градусное значеніе угла x черезъ α, можно всѣ безчисленныя значенія α выразить слѣдующей общей формулой:

$$\alpha = 180^0 . m + (-1)^m \alpha_0,$$

гдѣ m равно любому цѣлому числу какъ положительному, такъ и отрицательному.

Если же пользоваться радіальнымъ измѣреніемъ угловъ, то, обозначивъ черезъ x_0 наименьшее значеніе того угла, для котораго sin равенъ $\frac{3}{4}$, можно значеніе функціи $x = \arc\sin \frac{3}{4}$ выразить такъ:

$$\mathbf{x} = \mathbf{m}\pi + (-1)^m \mathbf{x}_0.$$

Мы знаемъ, напримѣръ, что $\sin 30^0 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Поэтому, если имѣемъ ур-іе

$$x = \arc\sin \frac{1}{2},$$

$$\text{то}\quad x = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{6};$$

градусное же значеніе угла: $\alpha = 180^0 . m + (-1)^m . 30^0$.

Давая здѣсь m любыя цѣлыя значенія, будемъ всегда получать углы, удовлетворяющіе нашему ур-ію.

Если $m = 1$, то $\alpha = 180^0 - 30^0 = 150^0$; если $m = 2$, то $\alpha = 390^0$; если $m = 3$, то $\alpha = 510^0$ и т. д.; если $m = 0$, то $\alpha = 30^0$; если $m = -1$, то $\alpha = -210^0$; если $m = -2$, $\alpha = -330^0$ и т. д. Для всѣхъ этихъ угловъ sin равенъ $\frac{1}{2}$.

§ **139.** Теперь выведемъ общее выраженіе всѣхъ значеній функціи

$$x = \arc\operatorname{tg} y.$$

Если наименьшее градусное значеніе угла, имѣющаго данное значеніе тангенса, обозначить черезъ α_0, то вообще для искомаго угла α получимъ прежде всего слѣдующія 2 выраженія:

$$1)\ \alpha = \alpha_0 \qquad \text{и}\ 2)\ \alpha = 180^0 + \alpha_0.$$

Если же прибавить къ каждому изъ этихъ выраженій $360^0 . n$, гдѣ $n =$ любому цѣлому числу отъ $-\infty$ до $+\infty$, то вмѣсто нихъ получимъ 2 болѣе общихъ выраженія:

$$1)\ \alpha = 360^0 . n + \alpha_0 \qquad \text{и}\ 2)\ \alpha = 360^0 . n + 180^0 + \alpha_0.$$

Преобразуя ихъ въ два, болѣе похожія другъ на друга выраженія, имѣемъ:

$$1)\ \alpha = 180^0 . 2n + \alpha_0 \qquad \text{и}\ 2)\ \alpha = 180^0 . (2n + 1) + \alpha_0.$$

Если же множители $2n$ и $(2n+1)$ обозначить одной буквой m, то вмѣсто двухъ получимъ одно общее выраженіе:

$$\alpha = \mathbf{180^0 . m} + \alpha_0.$$

Значитъ, если напримѣръ $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{2}$, то градусное значеніе угла α, удовлетворяющее ур-ію

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2},$$

можетъ быть въ самомъ общемъ видѣ выражено такъ:

$$\alpha = 180^0 . m + \alpha_0,$$

гдѣ m = любому цѣлому числу въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Придерживаясь же въ данномъ случаѣ радіальнаго измѣренія угловъ, получимъ, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{m}\pi + \mathbf{x}_0.$$

Напримѣръ, мы знаемъ, что $\operatorname{tg} 60^0 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$ Поэтому, имѣя уравненіе

$$x = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3},$$

можемъ сказать, что $x = m\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3m+1}{3}\pi$.

При градусномъ же измѣреніи искомаго угла получимъ, что искомый уголъ

$$\alpha^0 = 180^0 . m + 60^0,$$

такъ что нашему уравненію, напримѣръ, будутъ удовлетворять углы: 240^0, 420^0, -120^0, -300^0 и т. д.

§ **140**. Выведемъ, наконецъ, общее выраженіе всѣхъ значеній функціи

$$x = \arccos y.$$

Если попрежнему наименьшій уголъ, удовлетворяющі данному значенію y, обозначимъ черезъ α_0, то данному значенію косинуса будутъ прежде всего соотвѣтствовать два такихъ угла:

$$1)\ \alpha_0 \qquad \text{и}\ 2)\ 360^0 - \alpha_0.$$

Если къ нимъ прибавлять $360^0 . n$, гдѣ n = любому цѣлому числу въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, то будутъ получаться углы, которымъ вообще соотвѣтствуютъ слѣдующія общія выраженія:

$$1)\ 360^0 . n + \alpha_0 \qquad \text{и}\ 2)\ 360^0 . n + 360^0 - \alpha_0 .$$

Преобразуя ихъ, получимъ:

$$1)\ 360^0 . n + \alpha_0 \qquad \text{и}\ 2)\ 360^0 . (n + 1) - \alpha_0 .$$

Но эти 2 выраженія можно замѣнить однимъ:

$$360^0 . m \mp \alpha_0 .$$

Такимъ образомъ, вообще градусное значеніе угла, для котораго cos имѣетъ данное значеніе, выражается формулой:

$$\alpha = \mathbf{360^0 . m} \mp \alpha_0 .$$

При радіальномъ же измѣреніи угловъ получимъ для функціи

$$x = \operatorname{arc} \cos y$$

формулу: $\mathbf{x} = 2\,\mathbf{m}\,\pi \mp \mathbf{x}_0$.

Напримѣръ, мы знаемъ, что $\cos 30^0 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; поэтому, имѣя уравненіе

$$x = \operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{3}}{2},$$

получаемъ, что вообще $x = 2 m \pi \mp \frac{\pi}{6}$,

или $\alpha = 360^0 . m \mp 30^0$.

Отсюда 1) при $m = 0$, $\alpha = +30^0$ или -30^0; 2) при $m = 1$, $\alpha = 390^0$ или 330^0; 3) при $m = -1$, $\alpha = -330^0$ или -390^0 и т. д., и для всѣхъ этихъ угловъ cos равенъ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ **141.** На томъ основаніи, что 1) $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, 2) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ и 3) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, можно доказать, что функціямъ 1) $x = \operatorname{arc} \csc y$, 2) $x = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} y$ и 3) $x = \operatorname{arc} \sec y$ будутъ соотвѣтствовать слѣдующія общія выраженія.

1) $x = m\pi + (-1)^m x_0$; 2) $x = m\pi + x_0$ и 3) $x = 2 m \pi \mp x_0$.

Глава XXVIII. **Гоніометрическія уравненія.**

§ **142.** Гоніометрическими уравненіями называются такія уравненія, въ которыхъ неизвѣстными служатъ углы, входящіе подъ знакомъ одной или нѣсколькихъ гоніометрическихъ функцій.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что гоніометрическое уравненіе есть то же, что и тригонометрическое (§ 30) съ тою лишь разницей, что при рѣшеніи тригонометрическихъ ур-ій смотрятъ на входящіе въ нихъ углы, какъ на углы того или другого $\triangle$-а, въ то время какъ на уголъ въ гоніометрическомъ ур-іи можно смотрѣть съ самой общей точки зрѣнія, вообще какъ на аргументъ круговыхъ функцій.

При рѣшеніи гоніометрическаго ур-ія главной своей цѣлью, конечно, надо ставить то, чтобы опредѣлить значеніе одной изъ круговыхъ функцій искомаго угла. Съ этой цѣлью надъ ур-іемъ производятъ разнаго рода цѣлесообразно подобранныя преобразованія.

§ **143**. Возьмемъ нѣсколько примѣровъ и на нихъ выяснимъ наиболѣе типичные способы, пріемы и соображенія, которые могутъ имѣть мѣсто при рѣшеніи гоніометрическихъ уравненій.

1-й примѣръ. Рѣшить уравненіе $\sec\varphi + \sin\varphi = \cos\varphi$.

Рѣшеніе. Прежде всего $\sec\varphi$ выразимъ черезъ $\cos\varphi$:

$$\frac{1}{\cos\varphi} + \sin\varphi = \cos\varphi.$$

Чтобы освободить ур-іе отъ дробныхъ членовъ, необходимо умножить обѣ его части на $\cos\varphi$. Но при этомъ необходимо также имѣть въ виду, что отъ умноженія обѣихъ частей ур-ія на выраженіе, зависящее отъ неизвѣстнаго, могутъ быть введены въ ур-іе лишніе, такъ называемые, паразитные корни; значитъ, послѣ рѣшенія придется сдѣлать испытаніе корней.

$$1 + \sin\varphi\cos\varphi = \cos^2\varphi.$$

Затѣмъ производимъ рядъ преобразованій, цѣлесообразность которыхъ ясна:

$$1 - \cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0;$$
$$\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0;$$
$$\sin\varphi(\sin\varphi + \cos\varphi) = 0.$$

Произведеніе нѣсколькихъ количествъ можетъ равняться нулю только въ томъ случаѣ, если одинъ изъ сомножителей равенъ нулю. Поэтому полученное ур-іе распадается на два ур-ія:

1) $\sin\varphi = 0$ и 2) $\sin\varphi + \cos\varphi = 0$.

1) $\sin\varphi = 0$,

откуда φ можетъ равняться 0 или вообще $\varphi = 180^0 . m$ (§ 138), гдѣ m — какое угодно положительное или отрицательное цѣлое число.

$$2)\ \sin\varphi + \cos\varphi = 0.$$

Это ур-іе можно рѣшить разными способами. Во-первыхъ, для того чтобы въ ур-іе входила только одна функція угла φ (тангенсъ), раздѣлимъ обѣ части ур-ія на $\cos\varphi$. Но при этомъ необходимо имѣть въ виду, что при дѣленіи обѣихъ частей ур-ія на выраженіе, зависящее отъ неизвѣстнаго, могутъ исчезать корни ур-ія. Поэтому способъ этотъ вообще непрактиченъ.

Во-вторыхъ, можно было бы попытаться рѣшить ур-іе $\sin\varphi + \cos\varphi = 0$ такъ. Переносимъ въ правую сторону ур-ія $\sin\varphi$ съ обратнымъ знакомъ и представимъ $(-\sin\varphi)$ въ видѣ $\cos(90^0 + \varphi)$, чтобы получить равенство одноименныхъ функцій:

$$\cos\varphi = \cos(90^0 + \varphi).$$

Для того, чтобы двѣ одноименныхъ функціи были равны, достаточно, но не необходимо, чтобы ихъ аргументы были равны. Не необходимо это потому, что обратныя круговыя функціи многозначны и изъ того, напримѣръ, что $\sin M = \sin N$, еще не слѣдуетъ всегда, что $M = N$; такъ, напримѣръ, изъ того, что $\sin 135^0 = \sin 45^0$ нельзя заключить, что $135^0 = 45^0$, ибо это—абсурдъ. И въ данномъ случаѣ, изъ того, что $\cos\varphi = \cos(90^0 + \varphi)$ нельзя заключить, что $\varphi = 90^0 + \varphi$, такъ какъ это, очевидно, невозможно.

Въ моемъ „Сборникѣ тригоном. задачъ и упражненій“ выводятся необходимые и достаточные общіе признаки равенства одноименныхъ тригонометрическихъ функцій (гл. XXVIII зад. 2—4). Рѣшимъ наше ур-іе $\cos\varphi = \cos(90^0 + \varphi)$ тѣмъ способомъ, какой примѣненъ мною въ сборникѣ для вывода условія равенства косинусовъ.

Итакъ, рѣшимъ ур-іе: $\cos\varphi = \cos(90^0 + \varphi)$.

Переносимъ $\cos(90^0 + \varphi)$ обратно въ лѣвую часть ур-ія:

$$\cos\varphi - \cos(90^0 + \varphi) = 0$$

и разложимъ лѣвую часть ур-ія на множители.

$$2\ \sin\ 45^0 \sin(45^0 + \varphi) = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$\sin(45^0 + \varphi) = 0.$$

А это ур-іе удовлетворяется, если $45^0 + \varphi = 0$, а вообще, если

$$45^0 + \varphi = 180^0 . m,$$

гдѣ m—произвольное цѣлое число.

Отсюда $$\varphi = 180^0 . m - 45^0.$$

Итакъ, данное ур-іе $\sec\varphi + \sin\varphi = \cos\varphi$ имѣетъ двѣ системы корней:

$$\varphi_1 = 180^0.m \text{ и } \varphi_2 = 180^0.m - 45^0, .$$

гдѣ m — произвольное цѣлое число.

Въ самомъ началѣ мы умножили обѣ части ур-ія на $\cos\varphi$; провѣркой легко убѣдиться, что этимъ умноженіемъ на $\cos\varphi$ мы лишнихъ корней въ ур-іе не ввели.

2-й примѣръ. Рѣшить уравненіе $\sin x + \cos x = -1$, гдѣ x — радіальное значеніе угла.

Рѣшеніе. Здѣсь можно выразить $\sin x$ черезъ $\cos x$ или, наоборотъ, $\cos x$ черезъ $\sin x$. Изъ этихъ 2-хъ преобразованій мы отдаемъ предпочтеніе первому, такъ какъ при немъ мы исключаемъ $\sin x$ и уголъ x будемъ опредѣлять по $\cos x$. Это мы дѣлаемъ на томъ основаніи, что общее выраженіе значеній функціи $x = \arccos y$ проще, чѣмъ общее выраженіе значеній функціи $x = \arcsin y$ (§§ 138 и 140).

Итакъ получимъ: $\sqrt{1-\cos^2 x} + \cos x = -1$;

$$\sqrt{1-\cos^2 x} = -(1+\cos x).$$

Чтобы освободить ур-іе отъ радикала, возвышаемъ обѣ части его въ квадратъ. Но необходимо помнить, что при этомъ мы можемъ ввести посторонніе корни; поэтому послѣ рѣшенія обязательно надо будетъ сдѣлать провѣрку.

Если бы мы довели рѣшеніе уравненія этимъ способомъ до конца и потомъ сдѣлали провѣрку, то увидали бы, что возвышеніемъ обѣихъ частей ур-ія въ квадратъ мы дѣйствительно ввели посторонніе корни. Значитъ, этотъ способъ рѣшенія ур-ія непрактиченъ. Рѣшимъ его другимъ способомъ.

Итакъ, дано ур-іе $\sin x + \cos x = -1$.

Рѣшеніе. Представимъ $\cos x$ въ видѣ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Тогда получимъ ур-іе $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1$.

Разложимъ лѣвую его часть на множители:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -1,$$

откуда $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

такъ что $\cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Отсюда въ частномъ случаѣ $\frac{3}{4}\pi + x = \frac{1}{4}\pi$,

а вообще $$\frac{3}{4}\pi + x = 2\pi m \mp \frac{1}{4}\pi,$$

такъ что $x = 2\pi m \mp \frac{1}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi$.

Итакъ, получаемъ двѣ системы корней:

$$x_1 = 2m\pi - \pi$$

$$x_2 = 2m\pi - \frac{\pi}{2}.$$

3-ій примѣръ. Рѣшить ур-іе $4\sin^2\varphi + \sin^2 2\varphi = 3$.

Рѣшеніе. Прежде всего, зная, что $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, получимъ:

$$4\sin^2\varphi + 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 3.$$

Затѣмъ: $4(1-\cos^2\varphi) + 4(1-\cos^2\varphi)\cos^2\varphi = 3;$

$$4 - 4\cos^2\varphi + 4\cos^2\varphi - 4\cos^4\varphi = 3;$$

$$4\cos^4\varphi = 1;$$

$\cos^4\varphi = \frac{1}{4}$; $\cos^4\varphi - \frac{1}{4} = 0$; обозначимъ $\cos\varphi$ черезъ z.

$$z^4 - \frac{1}{4} = 0; \left(z^2 - \frac{1}{2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

1) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$; т. е. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда наименьшее знач. $\varphi = 45^0$.

2) $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда наименьшее зн. $\varphi = 135^0$.

3) $z^2 = -\frac{1}{2}$, откуда $z = \mp\sqrt{-\frac{1}{2}}$, т. е. $\cos\varphi$ имѣетъ мнимое значеніе; мнимые корни не разсматриваемъ.

Итакъ, данное ур-іе имѣетъ 4 системы корней:

$\varphi_1 = 360^0.\ m + 45^0$; $\varphi_2 = 360^0.\ m - 45^0$; $\varphi_3 = 360^0.\ m + 135^0$ и $\varphi_4 = 360^0.\ m - 135^0$, гдѣ m-произвольное цѣлое число.

4-ый примѣръ. Рѣшить уравненіе $a\cos x + b\sin x = c$.

Рѣшеніе. Раздѣлимъ обѣ части ур-ія на b:

$$\frac{a}{b}\cos x + \sin x = \frac{c}{b};$$

$\frac{a}{b}$ обозначимъ черезъ $\operatorname{tg} y$:

$$\frac{\sin y}{\cos y}\cos x + \sin x = \frac{c}{b};$$

$$\sin y \cos x + \cos y \sin x = \frac{c}{d} \cos y;$$

$$\sin (x + y) = \frac{c}{b} \cos y.$$

Опредѣлимъ y изъ ур-ія $\operatorname{tg} y = \frac{a}{b}$ и затѣмъ при помощи логариѳмическихъ таблицъ найдемъ наименьшее значеніе $(x + y)$. Обозначивъ его черезъ x_0, получимъ:

$$x + y = x_0, \text{ а вообще: } x + y = m\pi + (-1)^m x_0,$$

$$\text{откуда } x = m\pi + (-1)^m x_0 - y.$$

§ **144**. Изъ разобранныхъ примѣровъ видимъ, что при рѣшеніи гоніометрическихъ ур-ій приходится иногда обѣ части ур-ія умножать или дѣлить на выраженіе, зависящее отъ неизвѣстнаго. Затѣмъ приходится иногда возвышать обѣ части ур-ія въ квадратъ или въ какую-либо другую степень. При этомъ, конечно, надо всегда помнить слѣдующія положенія, извѣстныя изъ общей теоріи алгебраическихъ уравненій:

1) При умноженіи уравненія на выраженіе, зависящее отъ неизвѣстнаго, могутъ быть введены лишніе, такъ называемые, паразитные корни; признакомъ того, что тотъ или другой корень—лишній, служитъ то, что при немъ обращается въ 0 то выраженіе, на которое умножали ур-іе.

2) При дѣленіи обѣихъ частей ур-ія на выраженіе, зависящее отъ неизвѣстнаго, теряются корни даннаго ур-ія, и ихъ послѣ рѣшенія надо возстанавливать.

3) При возведеніи обѣихъ частей ур-ія въ квадратъ и вообще въ какую-либо степень иногда вводятся посторонніе корни, такъ что послѣ рѣшенія ур-ія этимъ пріемомъ необходимо дѣлать провѣрку. Поэтому, чтобы избавиться отъ необходимости дѣлать провѣрку, надо по возможности избѣгать введенія въ рѣшаемое уравненіе радикаловъ.

Затѣмъ, при рѣшеніи гоніометрическихъ уравненій полезно имѣть въ виду слѣдующее: выражая входящія въ данное уравненіе гоніометрическія функціи черезъ одну изъ нихъ, слѣдуетъ отдавать тангенсу или котангенсу предпочтеніе передъ остальными величинами, такъ какъ по значенію этихъ величинъ углы вообще опредѣляются точнѣе, а также потому, что общее выраженіе значеній $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y$ проще, чѣмъ для остальныхъ обратныхъ круговыхъ функцій; затѣмъ, при прочихъ равныхъ условіяхъ, лучше въ ур-іи оставлять cos, чѣмъ sin искомаго угла, такъ какъ общее выраженіе значеній $x = \operatorname{arc} \cos y$ проще, чѣмъ для $x = \operatorname{arc} \sin y$.

Таблица натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ.

°	Sin	d	Cosec	d	Tang	d	Cotg	d	Sec	d	Cos	d	°
0	0		∞		0		∞		1		1		90
1	0,017	18	57,299.	28,645	0,017	18	57,290.	28,654	1,000	1	1,000.	1	89
2	0,035.	17	28,654.	9,547	0,035.	17	28,636	9,555	1,001.	0	0,999	0	88
3	0,052	18	19,107	4,771	0,052	18	19,081	4,780	1,001	1	0,999.	1	87
4	0,070.	17	14,336.	2,862	0,070.	17	14,301.	2,871	1,002	2	0,998.	2	86
5	0,087	18	11,474.	1,907	0,087	18	11,430	1,916	1,004.	2	0,996	1	85
6	0,105.	17	9,567.	1,362	0,105	18	9,514	1,370	1,006.	2	0,995.	2	84
7	0,122.	17	8,205	1,020	0,123.	18	8,144	1,029	1,008.	2	0,993.	3	83
8	0,139	17	7,185	792	0,141.	17	7,115	801	1,010.	2	0,990	2	82
9	0,156	18	6,393.	634	0,158	18	6,314.	643	1,012	3	0,988.	3	81
10	0,174.	17	5,759.	518	0,176	18	5,671	526	1,015	4	0,985.	3	80
11	0,191.	17	5,241.	431	0,194	19	5,145.	440	1,019.	3	0,982.	4	79
12	0,208.	17	4,810.	365	0,213.	18	4,705.	374	1,022	4	0,978	4	78
13	0,225	17	4,446	311	0,231.	18	4,331	320	1,026	5	0,974	4	77
14	0,242.	17	4,134.	270	0,249	19	4,011.	279	1,031.	4	0,970	4	76
15	0,259.	17	3,864.	236	0,268.	19	3,732	245	1,035	5	0,966.	5	75
16	0,276.	16	3,628.	208	0,287.	19	3,487	216	1,040	6	0,961	5	74
17	0,292	17	3,420	184	0,306.	19	3,271.	193	1,046.	5	0,956	5	73
18	0,309	17	3,236	164	0,325.	19	3,078.	174	1,051	7	0,951	5	72
19	0,326.	16	3,072.	148	0,344	20	2,904	157	1,058.	6	0,946.	6	71
20	0,342	16	2,924.	134	0,364.	20	2,747	142	1,064	7	0,940.	6	70
21	0,358	17	2,790	121	0,384.	20	2,605	130	1,071	8	0,934.	7	69
22	0,375.	16	2,669	110	0,404	20	2,475	119	1,079.	7	0,927	6	68
23	0,391.	16	2,559	100	0,424	21	2,356.	110	1,086	9	0,921.	7	67
24	0,407.	16	2,459.	93	0,445	21	2,246	101	1,095.	8	0,914.	8	66
25	0,423.	15	2,366	85	0,466	22	2,145.	95	1,103	10	0,906	7	65
26	0,438	16	2,281	78	0,488.	22	2,050	88	1,113.	9	0,899.	8	64
27	0,454.	15	2,203.	73	0,510.	22	1,963	81	1,122	11	0,891	8	63
28	0,469	16	2,130	67	0,532.	22	1,881.	77	1,133.	10	0,883.	8	62
29	0,485.	15	2,063.	63	0,554	23	1,804	72	1,143	12	0,875.	9	61
30	0,5	15	2	58	0,577	24	1,732	68	1,155.	12	0,866	9	60
31	0,515	15	1,942.	55	0,601.	24	1,664	64	1,167.	12	0,857	9	59
32	0,530.	15	1,887	51	0,625.	24	1,600	60	1,179	13	0,848	9	58
33	0,545.	14	1,836	48	0,649	26	1,540.	57	1,192	14	0,839.	10	57
34	0,559	15	1,788	45	0,675.	25	1,483.	55	1,206	15	0,829	10	56
35	0,574.	14	1,743	42	0,700	27	1,428	52	1,221.	15	0,819	10	55
36	0,588.	14	1,701	39	0,727.	27	1,376	49	1,236	16	0,809	10	54
37	0,602.	14	1,662.	38	0,754.	27	1,327	47	1,252	17	0,799.	11	53
38	0,616.	13	1,624	35	0,781	29	1,280.	45	1,269	18	0,788	11	52
39	0,629	14	1,589	33	0,810.	29	1,235.	43	1,287.	18	0,777	11	51
40	0,643.	13	1,556.	32	0,839	30	1,192.	42	1,305	20	0,766	11	50
41	0,656	13	1,524	30	0,869	31	1,150	39	1,325	21	0,755.	12	49
42	0,669	13	1,494	28	0,900	33	1,111.	39	1,346.	21	0,743	12	48
43	0,682	13	1,466	26	0,933.	33	1,072	36	1,367	23	0,731	12	47
44	0,695.	12	1,440.	26	0,966.	34	1,036.	36	1,390	24	0,719	12	46
45	0,707		1,414		1		1		1,414		0,707		45
°	Cos		Sec		Cotg		Tang		Cosec		Sin		°

Примѣчаніе—Всѣ приближенныя значенія тригоном. величинъ въ этой таблицѣ взяты съ точностью до $1/2$ тысячной доли, при чемъ тѣ, которыя взяты съ избыткомъ, отмѣчены точкой на концѣ.

Таблички поправокъ на минуты.

′	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	′
1	0.03	0.05	0.07	0.08	0.10	0.12	0.13	0.15	0.17	0.18	0.20	0.22	1
2	0.07	0.10	0.13	0.17	0.20	0.23	0.27	0.30	0.33	0.37	0.40	0.43	2
3	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	3
4	0.13	0.20	0.27	0.33	0.40	0.47	0.53	0.60	0.67	0.73	0.80	0.87	4
5	0.17	0.25	0.33	0.42	0.50	0.58	0.67	0.75	0.83	0.92	1.00	1.08	5
6	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	6
7	0.23	0.35	0.47	0.58	0.70	0.82	0.93	1.05	1.17	1.28	1.40	1.52	7
8	0.27	0.40	0.53	0.67	0.80	0.93	1.07	1.20	1.33	1.47	1.60	1.73	8
9	0.03	0.45	0.60	0.75	0.90	1.05	1.20	1.35	1.50	1.65	1.80	1.95	9

′	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	′
1	0.23	0.25	0.27	0.28	0.30	0.32	0.33	0.35	0.37	0.38	0.40	0.42	1
2	0.47	0.50	0.53	0.57	0.60	0.63	0.67	0.70	0.73	0.77	0.80	0.83	2
3	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	3
4	0.93	1.00	1.07	1.13	1.20	1.27	1.33	1.40	1.47	1.53	1.60	1.67	4
5	1.17	1.25	1.33	1.42	1.50	1.58	1.67	1.75	1.83	1.92	2.00	2.08	5
6	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	6
7	1.63	1.75	1.87	1.98	2.10	2.22	2.33	2.45	2.57	2.68	2.80	2.92	7
8	1.87	2.00	2.13	2.27	2.40	2.53	2.67	2.80	2.93	3.07	3.20	3.33	8
	2.10	2.25	2.40	2.55	2.70	2.85	3.00	3.15	3.30	3.45	3.60	3.75	9

′	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	38	′
1	0.43	0.45	0.47	0.48	0.50	0.52	0.53	0.55	0.57	0.58	0.60	0.63	1
2	0.87	0.90	0.93	0.97	1.00	1.03	1.07	1.10	1.13	1.17	1.20	1.27	2
3	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.55	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.90	3
4	1.73	1.80	1.87	1.93	2.00	2.07	2.13	2.20	2.27	2.33	2.40	2.53	4
5	2.17	2.25	2.33	2.42	2.50	2.58	2.67	2.75	2.83	2.92	3.00	3.17	5
6	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.80	6
7	3.03	3.15	3.27	3.38	3.50	3.62	3.73	3.85	3.97	4.08	4.20	4.43	7
8	3.47	3.60	3.73	3.87	4.00	4.13	4.27	4.40	4.53	4.67	4.80	5.07	8
9	3.90	4.05	4.20	4.35	4.50	4.65	4.80	4.95	5.10	5.25	5.40	5.70	9

′	39	40	42	43	45	47	48	49	51	52	55	57	′
1	0.65	0.67	0.70	0.72	0.75	0.78	0.80	0.82	0.85	0.87	0.92	0.95	1
2	1.30	1.33	1.40	1.43	1.50	1.57	1.60	1.63	1.70	1.73	1.83	1.90	2
3	1.95	2.00	2.10	2.15	2.25	2.35	2.40	2.45	2.55	2.60	2.75	2.85	3
4	2.60	2.67	2.80	2.87	3.00	3.13	3.20	3.27	3.40	3.47	3.67	3.80	4
5	3.25	3.33	3.50	3.58	3.75	3.92	4.00	4.08	4.25	4.33	4.58	4.75	5
6	3.90	4.00	4.20	4.30	4.50	4.70	4.80	4.90	5.10	5.20	5.50	5.70	6
7	4.55	4.67	4.90	5.02	5.25	5.48	5.60	5.72	5.95	6.07	6.42	6.65	7
8	5.20	5.33	5.60	5.73	6.00	6.27	6.40	6.53	6.80	6.93	7.33	7.60	8
9	5.85	6.00	6.30	6.45	6.75	7.05	7.20	7.35	7.65	7.80	8.25	8.55	9

Примѣчаніе. Жирнымъ шрифтомъ напечатаны: въ горизонтальныхъ строкахъ—табличныя разности, а въ вертикальныхъ столбцахъ тѣ числа минутъ (отъ [illegible] табличной разности.

′	58	60	63	64	67	68	72	73	77	78	81	85	′
1	0.97	1.00	1.05	1.07	1.12	1.13	1.20	1.22	1.28	1.30	1.35	1.42	1
2	1.93	2.00	2.10	2.13	2.23	2.27	2.40	2.43	2.57	2.60	2.70	2.83	2
3	2.90	3.00	3.15	3.20	3.35	3.40	3.60	3.65	3.85	3.90	4.05	4.25	3
4	3.87	4.00	4.20	4.27	4.47	4.53	4.80	4.87	5.13	5.20	5.40	5.67	4
5	4.87	5.00	5.25	5.33	5.58	5.67	6.00	6.08	6.42	6.50	6.75	7.08	5
	5.80	6.00	6.30	6.40	6.70	6.80	7.20	7.30	7.70	7.80	8.10	8.50	6
7	6.77	7.00	7.35	7.47	7.82	7.93	8.40	8.52	8.98	9.10	9.45	9.92	7
8	7.73	8.00	8.40	8.53	8.93	9.07	9.60	9.73	10.27	10.40	10.80	11.33	8
9	8.70	9.00	9.45	9.60	10.05	10.20	10.80	10.95	11.55	11.70	12.15	12.75	9

′	88	93	95	100	101	110	119	121	130	134	142	148	′
1	1.47	1.55	1.58	1.67	1.68	1.83	1.98	2.02	2.17	2.23	2.37	2.47	1
2	2.93	3.10	3.17	3.33	3.37	3.67	3.97	4.03	4.33	4.47	4.73	4.93	2
3	4.40	4.65	4.75	5.00	5.05	5.50	5.95	6.05	6.50	6.70	7.10	7.40	3
4	5.87	6.20	6.33	6.67	6.73	7.33	7.93	8.07	8.67	8.93	9.47	9.87	4
5	7.33	7.75	7.92	8.33	8.42	9.17	9.92	10.08	10.83	11.17	11.83	12.33	5
6	8.80	9.30	9.50	10.00	10.10	11.00	11.90	12.10	13.00	13.40	14.20	14.80	6
7	10.27	10.85	11.08	11.67	11.78	12.83	13.88	14.12	15.17	15.63	16.57	17.27	7
8	11.73	12.40	12.67	13.33	13.47	14.67	15.87	16.13	17.33	17.87	18.93	19.73	8
	13.20	13.95	14.25	15.00	15.15	16.50	17.85	18.15	19.50	20.10	21.30	22.20	9

′	157	164	174	184	193	208	216	236	245	270	279	311	′
1	2.62	2.73	2.90	3.07	3.22	3.47	3.60	3.93	4.08	4.50	4.65	5.18	1
2	5.23	5.47	5.80	6.13	6.43	6.93	7.20	7.87	8.17	9.00	9.30	10.37	2
3	7.85	8.20	8.70	9.20	9.65	10.40	10.80	11.80	12.25	13.50	13.95	15.55	3
4	10.47	10.93	11.60	12.27	12.87	13.87	14.40	15.73	16.33	18.00	18.60	20.73	4
5	13.08	13.67	14.50	15.33	16.08	17.33	18.00	19.67	20.42	22.50	23.25	25.92	5
6	15.70	16.40	17.40	18.40	19.30	20.80	21.60	23.60	24.50	27.00	27.90	31.10	6
7	18.32	19.13	20.30	21.47	22.52	24.27	25.20	27.53	28.58	31.50	32.55	36.28	7
8	20.93	21.87	23.20	24.53	25.73	27.73	28.80	31.47	32.67	36.00	37.20	41.47	8
9	23.55	24.60	26.10	27.60	28.95	31.20	32.40	35.40	36.75	40.50	41.85	46.65	

′	320	365	374	431	440	518	526	634	643	792	801		′
1	5.33	6.08	6.23	7.18	7.33	8.63	8.77	10.57	10.72	13.20	13.35		1
2	10.67	12.17	12.47	14.37	14.67	17.27	17.53	21.13	21.43	26.40	26.70		2
3	16.00	18.25	18.70	21.55	22.00	25.90	26.30	31.70	32.15	39.60	40.05		3
4	21.33	24.33	24.93	28.73	29.33	34.53	35.07	42.27	42.87	52.80	53.40		4
5	26.67	30.42	31.17	35.92	36.67	43.17	43.83	52.83	53.58	66.00	66.75		5
6	32.00	36.50	37.40	43.10	44.00	51.80	52.60	63.40	64.30	79.20	80.10		6
7	37.33	42.58	43.63	50.28	51.33	60.43	61.37	73.97	75.02	92.40	93.45		7
8	42.67	48.67	49.87	57.47	58.67	69.07	70.13	84.53	85.73	105.60	106.80		8
9	48.00	54.75	56.10	64.65	66.00	77.70	78.90	95.10	96.45	118.80	120.15		9