В. П. Мининъ,
преподаватель московской 3-й гимназіи.

СБОРНИКЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ,

ПРИМѢНЕННЫЙ КЪ КУРСАМЪ ГИМНАЗІЙ, РЕАЛЬНЫХЪ УЧИЛИЩЪ И ДРУГИХЪ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

ЗАДАЧИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.

МАТЕРІАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХЪ УПРАЖНЕНІЙ УЧЕНИКОВЪ ВЪ ТЕЧЕНІИ УЧЕБНАГО ГОДА И ТЕМЫ ДЛЯ ПИСЬМЕННЫХЪ ИСПЫТАНІЙ.

ИЗДАНІЕ ПЯТНАДЦАТОЕ

(стереотипное),

напечатанное безъ измѣненій съ предыдущаго, допущеннаго Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія въ качествѣ учебнаго пособія для среднихъ учебныхъ заведеній.

Съ приложеніемъ большого числа задачъ, рѣшаемыхъ совмѣстнымъ примѣненіемъ геометріи и тригонометріи.

Цѣна 95 коп.

МОСКВА.
Изданіе т./д. Думновъ, Клочковъ, Луковниковъ и К°,
подъ фирмою „В. В. Думновъ, Наслѣдн. Бр. Салаевыхъ".
1913.

Типографія Г. Лисснера и Д. Собко.
Москва, Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. 9.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Изъ предисловія къ тремъ первымъ изданіямъ.

Въ послѣдніе годы преподаваніе математическихъ наукъ въ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ получило новое направленіе. Приложеніе теоретическихъ началъ къ рѣшенію практическихъ вопросовъ было признано существенною частью курса, и ограничиваться рутиннымъ изложеніемъ учебника болѣе уже не считается возможнымъ. Отсюда — очевидная необходимость появленія такихъ сборниковъ, которые заключали бы въ себѣ матеріалы для практическихъ упражненій учениковъ.

Въ издаваемомъ „Сборникѣ" я имѣю въ виду предложить матеріалъ для практическихъ упражненій учениковъ, во время учебнаго года, въ числовыхъ и алгебраическихъ*) приложеніяхъ геометріи, а также доставить темы для письменныхъ, какъ переводныхъ, такъ и окончательныхъ, испытаній учащихся**). Собранныя здѣсь задачи частью составлялись мною для моихъ учениковъ, частью заимствованы у лучшихъ иностранныхъ авторовъ; много задачъ, между прочими, взято изъ числа тѣхъ, которыя въ разное время служили геометрическими темами для окончательныхъ испытаній учениковъ гимназій и реальныхъ училищъ въ Германіи и для соотвѣтствующихъ испытаній во Франціи.

Рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ и отвѣты на вопросы, предложенные въ моемъ сборникѣ, имѣютъ цѣлью облегчить учащемуся пользованіе книгой. Всѣмъ извѣстныя неудобства, представляемыя задачниками „безъ отвѣтовъ", на столько велики, что составитель сборника, по моему мнѣнію, не долженъ уклоняться отъ той весьма значительной затраты труда, какой требуетъ помѣщеніе отвѣтовъ.

Составляя сборникъ, я избѣгалъ большихъ числовыхъ данныхъ, только затрудняющихъ ходъ вычисленія, а для геометріи и не имѣющихъ значенія, и заботился о выборѣ такихъ условій, которыя приводили бы къ результатамъ по возможности простымъ; имѣя въ виду знакомить учащихся главнымъ образомъ съ пріемами рѣшеній, я помѣстилъ очень многія изъ задачъ въ общемъ видѣ. Среди обширнаго матеріала, содержащагося въ сборникѣ, на ряду съ неизбѣжными задачами, требующими непосредственнаго примѣненія геометрическихъ теоремъ, находится очень большое число вопросовъ, рѣшеніе которыхъ достигается чисто геометрическими соображеніями (достаточно указать въ этомъ отношеніи на многочисленныя задачи, относящіяся къ ученію о поверхностяхъ и тѣлахъ вращенія, и вообще на X отдѣлъ сборника).

Наконецъ, я старался придать содержанію выбранныхъ вопросовъ возможно большій интересъ и разнообразіе и, не желая безъ нужды увеличивать объемъ изданія, не слѣдовалъ примѣру тѣхъ составителей, которые заботятся единственно о числѣ упражненій въ книгѣ. Отчасти въ виду разнообразія въ условіяхъ задачъ я отвелъ въ моемъ сборникѣ довольно значительное мѣсто тѣмъ вопросамъ изъ области физики, которые рѣшаются на основаніи геометрическихъ соображеній. Отчасти имѣлась при этомъ въ виду и иная цѣль. Учебный опытъ показываетъ, что переходъ отъ отвлеченныхъ истинъ числа и протяженія къ математическому истолкованію явленій природы всегда привлекателенъ для наиболѣе даровитыхъ юныхъ умовъ. Этимъ обстоятельствомъ

---

*) Установился обычай предлагать въ качествѣ геометрическихъ темъ на выпускныхъ испытаніяхъ („испытаніяхъ зрѣлости") учениковъ гимназій именно задачи на вычисленіе (точнѣе сказать — задачи *алгебраической геометріи*, ибо характеръ подобныхъ задачъ не измѣняется отъ того, будутъ ли даны буквенныя или числовыя условія). Обычая этого нельзя не признать вполнѣ раціональнымъ уже по той причинѣ, что *самостоятельное* рѣшеніе задачъ на построеніе по силамъ далеко не многимъ учащимся. По поводу этого будетъ не лишнимъ привести здѣсь слѣдующую замѣтку, напечатанную въ № 1 журнала „*Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики*" за 1894 г. (стр. 19): „Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія сдѣлано распоряженіе, чтобы въ классическихъ гимназіяхъ съ сего времени на письменныхъ испытаніяхъ зрѣлости ученикамъ не предлагались по геометріи задачи на построеніе". „*Вѣстникъ о. ф. и эл. м.*" справедливо привѣтствуетъ это распоряженіе.

**) Мнѣ пріятно замѣтить, что одинъ изъ немногихъ иностранныхъ ученыхъ, знакомыхъ съ русскимъ языкомъ, профессоръ университета въ Бордо, J. Hoüel (составившій себѣ имя главнымъ образомъ трудами по теоріи комплексныхъ количествъ, но весьма извѣстный также и какъ составитель многихъ изданій по элементарной математикѣ) сдѣлалъ о моемъ геометрическомъ сборникѣ (равно какъ и объ ариѳметическомъ задачникѣ, составленномъ мною вмѣстѣ съ гг. Арбузовымъ, А. Мининымъ и Назаровымъ) весьма сочувственный отзывъ и нѣкоторыя изъ задачъ этого сборника, во французскомъ переводѣ, представилъ редактору *Journal de mathématiques élémentaires*, г. Бурже, который нашелъ эти задачи очень удачными.

слѣдуетъ пользоваться, чтобы при всякомъ удобномъ случаѣ указывать учащимся высокое значеніе математики, какъ одного изъ методовъ изслѣдованія физическихъ истинъ.

Къ восьмому изданію.

Стремясь къ постоянному улучшенію этой книги, я дѣлалъ во всѣхъ предыдущихъ изданіяхъ ея болѣе или менѣе значительныя дополненія. Къ болѣе обширнымъ изъ этихъ дополненій принадлежатъ теоремы, относящіяся къ ученію о поверхностяхъ и тѣлахъ вращенія, и отдѣлъ задачъ, рѣшаемыхъ совмѣстнымъ примѣненіемъ геометріи и тригонометріи, содержащій болѣе 200 задачъ разнообразнаго содержанія и представляющій, какъ показалъ мнѣ учебный опытъ, достаточный и удобный матеріалъ для подготовки учениковъ VIII класса гимназій къ письменнымъ испытаніямъ по геометріи. Относительно характера избранныхъ мною задачъ, рѣшаемыхъ совмѣстнымъ примѣненіемъ геометріи и тригонометріи, замѣчу, во-первыхъ, что задачъ чрезмѣрно трудныхъ, требующихъ особой изобрѣтательности, я избѣгалъ, какъ неумѣстныхъ въ *учебной* книгѣ, гдѣ всѣ упражненія должны быть по силамъ учащимся; во-вторыхъ, я выбиралъ преимущественно такія задачи, результаты рѣшенія которыхъ, въ общемъ видѣ, выражаются формулами, удобо-примѣнимыми къ логариѳмическимъ вычисленіямъ; въ-третьихъ, я ввелъ много упражненій съ *числовыми* данными: помѣщеніе задачъ исключительно въ общемъ видѣ, разумѣется, значительно облегчило бы мой трудъ, но придало бы сборнику слишкомъ односторонній характеръ и не доставило бы матеріала для упражненій въ логариѳмическихъ вычисленіяхъ, навыкъ въ которыхъ необходимо долженъ быть обнаруженъ учащимися на выпускныхъ испытаніяхъ.

Имѣлось въ виду — всѣми сдѣланными дополненіями привести сборникъ въ полное соотвѣтствіе съ тѣмъ значеніемъ геометрическихъ задачъ на вычисленіе въ курсѣ среднихъ учебныхъ заведеній, которое опредѣлено въ „Объяснительной запискѣ" къ *Учебнымъ планамъ* гимназій М. Н. Пр. слѣдующими словами: „рѣшеніе геометрическихъ задачъ на вычисленіе должно происходить послѣ каждаго пройденнаго отдѣла геометріи; оно служитъ для укрѣпленія теоремъ въ памяти, къ пріученію пользоваться ими при рѣшеніи практическихъ вопросовъ и въ преобразованіи алгебраическихъ формулъ".

Къ десятому изданію.

Десятое изданіе этого сборника, какъ и девятое, напечатано ***болѣе крупнымъ шрифтомъ,*** чѣмъ восьмое и всѣ предыдущія: для текстовъ задачъ выбранъ шрифтъ *цицеро*, а для отвѣтовъ и рѣшеній (вмѣсто прежде употреблявшагося для нихъ петита) — корпусъ, т.-е. тотъ шрифтъ, которымъ прежде набирались тексты задачъ. Петитъ изгнанъ изъ употребленія, если не считать весьма незначительнаго числа случаевъ, когда обойтись безъ него было бы затруднительно по технически-типографскимъ соображеніямъ (таковы, напримѣръ, случаи, когда строки уродливо разбиваются вслѣдствіе употребленія крупныхъ знаковъ корней, или когда формула, набранная болѣе крупнымъ шрифтомъ, не помѣщается цѣликомъ на одной строкѣ, а между тѣмъ не можетъ быть разбита на части для переноса на другую строку).

Къ двѣнадцатому изданію.

Двѣнадцатое изданіе сборника отличается отъ предыдущаго: 1) прибавленіемъ 45 задачъ, 2) увеличеніемъ интерлиньяжа (разстоянія между строками) въ рѣшеніяхъ задачъ и 3) укороченіемъ длины строкъ до 100 миллиметровъ, вмѣсто 108, въ той части книги (отдѣлы I—VI), которая предназначается для учениковъ IV и V классовъ. Вслѣдствіе всѣхъ этихъ измѣненій, а въ особенности двухъ послѣднихъ, вызванныхъ общимъ распоряженіемъ М. Н. Пр. относительно учебниковъ, размѣръ книги увеличился на 20 страницъ.

Къ пятнадцатому изданію.

Новое, пятнадцатое, изданіе сборника представляетъ повтореніе предыдущаго изданія, допущеннаго Ученымъ Комитетомъ М. Н. Пр. въ качествѣ пособія для среднихъ учебныхъ заведеній*).

---

*) Въ настоящее время, взамѣнъ прежнихъ степеней одобренія, Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. установленъ лишь *одинъ* видъ одобренія поступающихъ на разсмотрѣніе Комитета книгъ, а именно — *допущеніе* ихъ къ употребленію въ учебн. заведеніяхъ (*Журн. М. Н. Пр.* февр. 1902 г.).

ПЛАНИМЕТРІЯ.

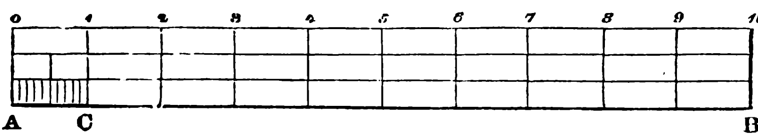
ОТДѢЛЪ I*).

Прямая линія. Углы. Треугольники. Параллельныя линіи.

Таблица линейныхъ мѣръ метрической системы.

Основною единицею системы служитъ метръ (mètre) — десятимилліонная часть четверти парижскаго меридіана (метръ = 3,28084 фут. = 1,40607 арш. = 22,4972 вершк.**). Соотношенія между кратными метра и частями метра умѣщаются въ нижеслѣдующей таблицѣ.

Миріам.	Километр.	Гектометр.	Декам.	Метр.	Дециметр.	Сантим.	Миллиметр.
1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000 =	1000000 =	10000000
	1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000 =	1000000
		1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000
			1 =	10 =	100 =	1000 =	10000
				1 =	10 =	100 =	1000
					1 =	10 =	100
						1 =	10



Черт. 1.

$AB = 1$ дециметр. $= 0{,}1$ метр.; $AC = 0{,}1\ AB = 1$ сантиметр. $0{,}1\ AC = 0{,}01\ AB = 1$ миллим.

---

*) Задачи этого отдѣла, отмѣченныя знакомъ †, предназначаются для учениковъ старшихъ классовъ.

**) Главная палата мѣръ и вѣсовъ. Сравнительныя таблицы русскихъ, метрическихъ и англійскихъ мѣръ. С.-Пб. 1902 г.

1. Выразить въ метрахъ длину линіи $=6$ декам. $+$ $+4$ метр. $+2$ децим. $+5{,}2$ сантим. *Отв.* 64,252 метр.

2. Выразить составнымъ именованнымъ числомъ длину каждой изъ двухъ прямыхъ линій, сумма которыхъ $=245{,}78$ метр., а разность $=187{,}92$ метр.

Отв. 1) 2 гектом. $+$ 1 декам. $+$ 6 метр. $+$ 8 дециметр. $+$ $+$ 5 сантим.

2) 2 декам. $+$ 8 метр. $+$ 9 децим. $+$ 3 сантим.

3. По данной суммѣ s и разности d двухъ прямыхъ опредѣлить каждую изъ этихъ прямыхъ.

Отв. $\frac{s+d}{2}$ и $\frac{s-d}{2}$.

4. На плоскости даны n точекъ, расположенныхъ такъ, что никакія три изъ нихъ не лежатъ на одной прямой. Сколько различныхъ прямыхъ можно получить, соединяя данныя точки по двѣ?

Рѣшен. Соединивъ какую-нибудь изъ n данныхъ точекъ со всѣми $n-1$ остальными точками, получимъ $n-1$ прямыхъ; взявъ затѣмъ какую-ниб. другую изъ данныхъ точекъ и соединивъ ее съ прочими $n-1$ точками, получимъ еще $n-1$ прямыхъ. Такъ какъ это дѣйствіе можно выполнить для каждой изъ n данныхъ точекъ, то число всѣхъ прямыхъ $=$ суммѣ $(n-1)+(n-1)+$ $+(n-1)\ldots\ldots$, заключающей n равныхъ слагаемыхъ, слѣдов. $=n(n-1)$. Но при проведеніи этихъ прямыхъ мы считали каждую линію дважды (наприм. линію, проведенную отъ первой точки къ шестой, отличали отъ той, которая проведена отъ шестой точки къ первой точкѣ); слѣдов. число *различныхъ* прямыхъ, соединяющихъ данныя точки, вдвое менѣе предыдущаго, т.-е. $=\frac{n(n-1)}{2}$.

5. На плоскости даны 9 точекъ, расположенныхъ такъ, что никакія три изъ нихъ не лежатъ на одной прямой. Сколько различныхъ прямыхъ можно получить, соединяя данныя точки по двѣ?

Отв. $\frac{9.8}{2} = 36.$

† **6**. Проведены всевозможныя *различныя* прямыя, соединяющія по двѣ точки изъ числа нѣсколькихъ точекъ, такъ расположенныхъ на плоскости, что никакія три изъ этихъ точекъ не лежатъ на одной прямой. Число линій равно 136. Найти число точекъ.

Рѣшен. Корень ур-ія $\frac{n(n-1)}{2} = 136$, удовлетворяющій вопросу, есть $n = 17$.

7. На плоскости даны 15 точекъ, изъ которыхъ 6 лежатъ на одной прямой, остальныя же расположены такъ, что никакія три изъ нихъ не лежатъ на одной прямой. Сколько различныхъ прямыхъ можно получить, соединяя данныя точки по двѣ?

Рѣшен. Такъ какъ 6 точекъ лежатъ на одной прямой, то остальныя 9 располож. такъ, что никакія три изъ нихъ не лежатъ на одной прямой. Число различныхъ прямыхъ, соединяющ. эти 9 точекъ, равно 36. (См. **5**-ую зад.). Соединивъ каждую изъ 6-ти точекъ, лежащ. на одной прямой, съ каждою изъ остальныхъ 9-ти точекъ, получаемъ, еще 6.9 или 54 различн. прямыхъ. Наконецъ, принявъ въ расчетъ еще ту прямую, на которой лежатъ 6 данн. точекъ, находимъ, что полное число различныхъ прямыхъ равно $36 + 54 + 1 = 91$.

8. Опредѣлить наибольшее число точекъ пересѣченія: а) четырехъ прямыхъ, в) пяти прямыхъ, с) шести прямыхъ.

Рѣшен. Пересѣченіе двухъ прямыхъ даетъ 1 точку. Какая-либо третья прямая, пересѣкающая каждую изъ двухъ предыдущихъ прямыхъ, даетъ еще двѣ точки пересѣченія, слѣдов. наибольшее число точекъ пересѣченія трехъ прямыхъ $= 1 + 2$. Четвертая прямая, пересѣкающая каждую изъ трехъ предыдущихъ, доставляетъ еще три точки пересѣченія; наибольшее число точекъ пересѣченія четырехъ прямыхъ, слѣдовательно, $= 1 + 2 + 3$. Пятая прямая, пересѣкая каждую изъ четырехъ предыдущихъ прямыхъ, даетъ еще 4 точки пересѣченія, такъ что наибольшее число точекъ пересѣченія пяти прямыхъ $= 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Наибольшее число точекъ пересѣченія шести прямыхъ $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

† **9**. Опредѣлить наибольшее число точекъ пересѣченія n прямыхъ.

Рѣшен. Искомое число есть число сочетаній изъ n элементовъ по два, слѣдовательно $= \frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{n}{2}(n-1)$. Другой способъ рѣшенія приводится къ нахожденію суммы $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots\ldots + 1$ ариѳметической прогрессіи.

† **10**. Опредѣлить наибольшее число точекъ пересѣченія: а) 25 прямыхъ, в) 20 прямыхъ.

Отв. а) 300; в) 190.

† **11**. Наибольшее число точекъ пересѣченія нѣсколькихъ прямыхъ равно 120. Опредѣлить число прямыхъ.

Рѣшен. Корень ур-ія $\frac{n}{2}(n-1) = 120$, удовлетворяющій вопросу, есть $n = 16$.

12. Величины двухъ угловъ, сумма которыхъ $= \frac{7}{4}d$*) или $157^{\circ}30'$), относятся между собою какъ 2,333.... : 14. Какъ великъ каждый изъ нихъ?

Отв. $\frac{1}{4}d$ (или $21^1/_2{}^{\circ}$) и $\frac{3}{2}d$ (или 135°).

13. Одинъ изъ четырехъ угловъ, образующихся при пересѣченіи двухъ прямыхъ линій, равенъ $^2/_3$ прямого. Каковъ каждый изъ прочихъ угловъ?

Отв. $x = y = \frac{4}{3}d$ (или 120°); $z = \frac{2}{3}d$ (или 60°).

---

*) Буквою d обозначенъ прямой уголъ.

14. Одинъ изъ двухъ угловъ, смежныхъ между собою, равенъ учетверенному другому. Найти величину каждаго изъ нихъ. *Отв.* $\frac{8}{5}d$ (или 144^0) и $\frac{2}{5}d$ (или 36^0).

15. Треть одного изъ двухъ смежныхъ угловъ равна пятой части другого. Опредѣлить эти углы.

Отв. $\frac{3}{4}d$ (или $67^0 30'$) и $\frac{5}{4}d$ (или $112^0 30'$).

16. Опредѣлить величину каждаго изъ двухъ угловъ, смежныхъ между собою, зная, что одинъ изъ нихъ болѣе другого на $\frac{3}{8}$ прямого угла (или на $33^0 45'$).

Отв. $\frac{13}{16}d$ (или $73^0 7' 30''$) и $\frac{19}{16}d$ (или $106^0 52' 30''$).

17. Одна изъ сторонъ треугольника$=10$ футамъ, другая$=7$ футамъ. Между какими предѣлами заключается величина третьей стороны?

Отв. Искомая сторона больше 3 фут. и меньше 17 фут.

18. Одна изъ сторонъ треугольника равна 4 футамъ, другая — 1-му футу. Найти третью сторону, зная, что она заключаетъ въ себѣ цѣлое число футовъ.

Отв. 4 фута.

19. Длины сторонъ треугольника суть a, b и c. Взявъ внутри треугольника какую-либо точку M и соединивъ ее съ вершинами треугольника, будемъ имѣть три прямыхъ, длины которыхъ AM, BM и CM обозначимъ чрезъ x, y и z. (Длины эти суть величины перемѣнныя, ибо измѣняются съ измѣненіемъ положенія взятой внутри треугольника точки). Между какими предѣлами заключается величина суммы $x+y+z$?

Рѣшен. Имѣемъ, во-первыхъ, систему неравенствъ:

$$x+y>c, \quad y+z>a, \quad z+x>b;$$

складывая ихъ, находимъ $2(x+y+z)>a+b+c$, откуда $x+y+z>{}^1/_2(a+b+c)$. Съ другой стороны, существуютъ неравенства:

$$c+a>x+z, \quad a+b>y+x, \quad b+c>y+z;$$

сложеніе ихъ даетъ $x+y+z<a+b+c$.

Так. обр. сумма $x+y+z$ больше полупериметра и меньше периметра треугольника.

20. Опредѣлить величину каждой изъ сторонъ треугольника ABC, зная, что периметръ его $=6$ декам. $+$ $+2$ метр. $+9$ децим. $+6$ сантим., $AB+BC=42$ метр. $+$ $+86$ сантиметр. и $AB-BC=6{,}92$ метр.

Отв. $AB=24{,}89$ метр.; $BC=17{,}97$ метр.; $AC=20{,}1$ метр.

21. Одна изъ сторонъ треугольника имѣетъ длину въ $20{,}62$ метр., периметръ его $=47{,}82$ метр. Опредѣлить длину каждой изъ двухъ прочихъ сторонъ, зная, что разность ихъ $=1{,}8$ метр.

Отв. 14,5 метр. и 12,7 метр.

22. Опредѣлить стороны треугольника, зная, что онѣ относятся между собою какъ $4:5:6{,}233\ldots$ и что периметръ его $=914$ фут. *Отв.* 240 фут., 300 ф., 374 ф.

23. При пересѣченіи нѣкоторой прямой линіи съ двумя параллельными образовались 8 угловъ, изъ которыхъ одинъ равенъ $\frac{11}{8}d$ (или $123^\circ 45'$). Опредѣлить величину каждаго изъ прочихъ угловъ.

Отв. $\frac{5}{8}d$ (или $56^\circ 15'$), $\frac{11}{8}d$ (или $123^\circ 45'$) и т. д.

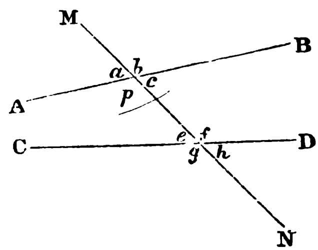
24. Углы, прилежащіе къ основанію параллелограмма, относятся между собою какъ $5:7$. Каковъ каждый изъ нихъ?

Отв. Одинъ $=\frac{5}{6}d$ (или 75°); другой $=\frac{7}{6}d$ (или 105°).

25. Разность угловъ, прилежащихъ къ одной и той же сторонѣ параллелограмма, равна $\frac{10}{9}d$ (или 100°). Найти отношеніе (геометрическое) бо́льшаго изъ этихъ угловъ къ меньшему. *Отв.* $3^1/_2$.

26. Уголъ c (черт. 2) менѣе угла p на величину d (или на 90°) и менѣе угла f на $\frac{7}{6}d$ (или на 105°). Не измѣняя положенія CD, требуется такъ повернуть линію AB (около точки ея пересѣченія съ MN), чтобы AB и CD сдѣлались параллельными. Насколько для этого нужно уменьшить уголъ c? Что при этомъ произойдетъ съ углами p, a и b?

Отв. Уголъ c должно уменьшить на $\frac{1}{6}d$ (или на 15^0).



Черт. 2.

27. Найти длину каждой изъ неравныхъ сторонъ параллелограмма, зная, что онѣ относятся между собою какъ $\frac{5}{8}$: 0,1666... и что периметръ параллелограмма = 114 фут.

Отв. 12 фут. и 45 фут.

28. Параллелограммъ дѣлится одною изъ его діагоналей на два треугольника, изъ которыхъ каждый имѣетъ периметръ въ 12,42 метр. Периметръ параллелограмма = 14,24 метра. Опредѣлить длину упомянутой діагонали. *Отв.* 5,3 метр.

29. Сколько потребуется гвоздей для прикрѣпленія къ стѣнѣ прямоугольнаго листа бумаги, если длина листа = 1,2 метра, а ширина = 9 дециметрамъ, и если притомъ гвоздь отъ гвоздя долженъ отстоять на 3 сантиметра (считая по краю листа)? *Отв.* 140.

29а). Параллелограммъ, периметръ котораго = 60 фут., раздѣленъ діагоналями на четыре треугольника. Разность между периметрами двухъ смежныхъ изъ этихъ треугольниковъ равна 8 фут. Опредѣлить стороны параллелограмма. *Отв.* 19 фут. и 11 фут.

30. Периметръ трапеціи равенъ 18,1 метра, длина каждой изъ непараллельныхъ сторонъ ея по $4\frac{3}{4}$ метра. Найти длину средней линіи. *Отв.* 4,3 метра.

30 а). Три параллельныя линіи, находящіяся на равномъ разстояніи другъ отъ друга, пересѣчены двумя прямыми, отсѣкающими отъ параллельныхъ три отрѣзка, изъ которыхъ средній CD имѣетъ длину въ 18,4 ф., а изъ крайнихъ бóльшій EF превышаетъ меньшій AB на 2,6 фут. Опредѣлить отрѣзки AB и EF.

Отв. $AB = 17{,}1$ фут., $EF = 19{,}7$ фут.

30 b). Въ равнобедренной трапеціи, длины параллельныхъ сторонъ которой суть 4,8 дюйм. и 7,4 дюйм., опущенъ перпендикуляръ изъ вершины тупого угла на бóльшую изъ параллельныхъ сторонъ. Опредѣлить длины отрѣзковъ, на которые раздѣлилась этимъ перпендикуляромъ большая изъ параллельныхъ сторонъ.

Отв. 1,3 дюйм. и 6,1 дюйм.

30 c). Въ равнобедренной трапеціи тупой уголъ вдвое болѣе остраго. Вычислить углы этой трапеціи.

Отв. $\frac{2}{3}d$ (или 60^0) и $\frac{4}{3}d$ (или 120^0).

31. Величины угловъ треугольника относятся между собою какъ $0{,}25 : \frac{5}{12} : 0{,}8333....$ Опредѣлить эти углы.

Отв. 1) $\frac{1}{3}d$ (или 30^0); 2) $\frac{5}{9}d$ (или 50^0); 3) $\frac{10}{9}d$ (или 100^0).

32. На данную прямую AB изъ внѣшней точки M опущенъ перпендикуляръ MD; изъ той же точки M проведена прямая MN (точка N лежитъ на линіи AB), образующая съ перпендикуляромъ MD уголъ $= \frac{3}{8}d$ (или $33^0 45'$). Каковъ уголъ MND? *Отв.* $\frac{5}{8}d$ (или $50^0 15'$).

33. Опредѣлить величины угловъ равнобедреннаго треугольника, зная, что сумма двухъ угловъ при его основаніи втрое болѣе угла при вершинѣ.

Отв. $\frac{d}{2}$ (или 45^0), $\frac{3}{4}d$ (или $67^1/_2{}^0$) и $\frac{3}{4}d$.

34. Отношеніе угла, противолежащаго основанію равнобедреннаго треугольника, къ суммѣ угловъ при основаніи, равно $1\frac{2}{3}$. Опредѣлить углы треугольника.

Отв. 1) $\frac{3}{8}d$ (или $33^0 45'$); 2) $\frac{3}{8}d$; 3) $\frac{5}{4}d$ (или $112^1/_2{}^0$).

35. Одинъ изъ внѣшнихъ угловъ прямоугольнаго треугольника равенъ $\frac{7}{5}d$ (или 126^0). Опредѣлить внутренніе углы. *Отв.* $\frac{3}{5}d$ (или 54^0) и $\frac{2}{5}d$ (или 36^0).

36. Опредѣлить величину каждаго изъ угловъ A, B и C треугольника по суммѣ $A+B=\frac{19}{12}d$ (или $142^\circ30'$) и разности $A-B=\frac{1}{8}d$ (или $11^\circ15'$).

Отв. $A=\frac{41}{48}d$ (или $76^\circ52'30''$); $B=\frac{35}{48}d$ (или $65^\circ37'30''$)·
$C=\frac{5}{12}d$ (или $37^\circ30'$).

37. Вычислить углы треуг., зная, что $\angle A-\angle B=\frac{3}{8}d$ (или $33^\circ45'$) и $\angle C-\angle B=\frac{1}{2}d$ (или 45°).

Отв. $A=\frac{3}{4}d$ (или $67^\circ30'$); $B=\frac{3}{8}d$ (или $33^\circ45'$); $C=\frac{7}{8}d$ (или $78^\circ45'$).

38. Вычислить углы треугольника, зная, что $\angle A=4\angle B$ и что разность $\angle C-\angle B=d$ (или 90°).

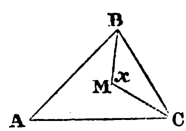
Отв. $B=\frac{1}{6}d$ (или 15°); $A=\frac{2}{3}d$ (или 60°); $C=\frac{7}{6}d$ (или 105°).

39. Внѣшній уголъ треугольника, смежный съ внутреннимъ угломъ A, равенъ $\frac{8}{5}d$ (или 144°); разность внутреннихъ угловъ B и C равна $\frac{7}{20}d$ (или $31^\circ30'$). Опредѣлить величины двухъ угловъ, изъ которыхъ одинъ смеженъ съ B, другой — съ C.

Отв. $\frac{41}{40}d$ (или $92^\circ15'$) и $\frac{11}{8}d$ (или $123^\circ45'$).

40. Въ треугольникѣ ABC (черт. 3) уголъ $A=\frac{4}{9}d$ (или 40°). Опредѣлить величину угла BMC, составленнаго двумя линіями, изъ которыхъ одна дѣлитъ пополамъ уголъ B, а другая C.

Отв. $\frac{11}{9}d$ (или 110°).



Черт. 3.

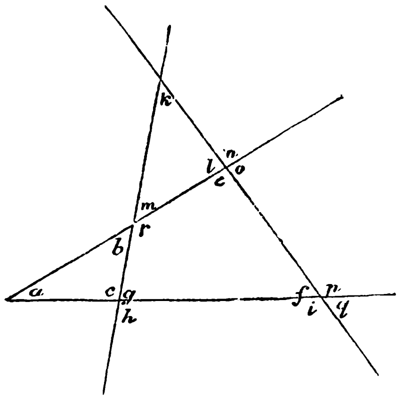
41. Двѣ прямыя, дѣлящія пополамъ углы B и C треугольника ABC (черт. 3), пересѣкаются между собою подъ угломъ $CMB=\frac{11}{8}d$ (или $123^\circ45'$). Опредѣлить величину угла A. *Отв.* $\frac{3}{4}d$ (или $67^\circ30'$).

42. Въ равностороннемъ треугольникѣ проведена линія, параллельная одной изъ его сторонъ. Какъ великъ каждый изъ угловъ того $\triangle$-ка, который проведеніемъ параллели отсѣченъ отъ даннаго?

Отв. $\frac{2}{3}d$ (или 60°).

43. Если въ какомъ-либо треугольникѣ линія, соединяющая середину основанія съ противолежащею вершиною, равна половинѣ основанія, то какъ великъ уголъ при этой вершинѣ? (Рѣшить вопросъ независимо отъ понятія объ окружности, — на основаніи теоремы о суммѣ внутр. угловъ треугольника). *Отв.* Прямой.

Замѣч. Эта же задача помѣщ. въ отд. II. (№ 60) для рѣшенія инымъ способомъ.



Черт. 4.

44. Уголъ $h=\frac{11}{9}$ прямого (или 110°), уголъ $i=\frac{13}{9}$ прямого (или 130°), уголъ $n=\frac{47}{45}$ прямого (или 94°). (Черт. 4). Вычислить всѣ углы $(a,b,c,e,r,f,p,\ldots)$ фигуры.

Отв. $a=\frac{2}{5}d$ (или 36°); $m=\frac{17}{45}d$ (или 34°), и т. д.

45. Опредѣлить, подъ какимъ острымъ угломъ пересѣкаются діагонали прямоугольника, раздѣляющія каждый изъ угловъ его на части, относящіяся между собою какъ 3 : 5. *Отв.* $\frac{3}{5}d$ (или 67° 30′).

45 а). Сторона ромба образуетъ съ его діагоналями углы, изъ которыхъ одинъ вдвое болѣе другого. Опредѣлить углы ромба. *Отв.* 120° и 60°.

46. Опредѣлить сумму внутреннихъ угловъ: 1) 10-тиугольника, 2) 24-угольника. *Отв.* 1) $16d$; 2) $44d$.

47. Сколько сторонъ имѣетъ выпуклый многоугольникъ, сумма внутреннихъ угловъ котораго равна: 1) $28d$, 2) $60d$? *Отв.* 1) 16; 2) 32.

47 а). Въ какомъ многоугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ въ четыре раза превышаетъ сумму внутреннихъ угловъ семиугольника? *Отв.* Въ 22-уг.

48. Углы четыреугольника относятся между собою какъ 2 : 3 : 5 : 6. Опредѣлить эти углы.

Отв. $\frac{1}{2}d$ (или 45^0), $\frac{3}{4}d$ (или $67^1/_2{}^0$), $\frac{5}{4}d$ (или $112^1/_2{}^0$) и $\frac{3}{2}d$ (или 135^0).

49. Изъ нѣкоторой точки, лежащей внутри угла, составляющаго $\frac{1}{3}d$ (или 30^0), опущено по перпендикуляру на каждую изъ сторонъ этого угла. Опредѣлить уголъ, заключенный между перпендикулярами.

Отв. $\frac{5}{3}d$ (или 150^0). Уголъ, смежный съ этимъ, равенъ $\frac{1}{3}d$ (или 30^0).

50. Внутренніе углы выпуклаго шестиугольника относятся между собою какъ 48 : 40 : 54 : 45 : 42 : 59. Опредѣлить величину каждаго изъ нихъ.

Отв. $\frac{4}{3}d$ (или 120^0); $\frac{10}{9}d$ (или 110^0); $\frac{3}{2}d$ (или 135^0); $\frac{5}{4}d$ (или $112^1/_2{}^0$); $\frac{7}{6}d$ (или 105^0); $\frac{59}{36}d$ (или $147^1/_2{}^0$).

51. Сколько различныхъ діагоналей можно провести изъ всѣхъ вершинъ: 1) двѣнадцатиугольника, 2) стоугольника?

Рѣшен. Изъ каждой вершины двѣнадцатиугольника можно провести 12 — 3 діагоналей, слѣдовательно изъ всѣхъ 12 вершинъ можно провести (12 — 3) 12 діагоналей; но такъ какъ при этомъ каждая діагональ считается дважды (напр. AB и BA, AE и EA, DC и CD и т. д.), то число *различныхъ* діагоналей $= \frac{(12-3) \cdot 12}{2} = 54$.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, находимъ, что въ случаѣ стоугольника искомое число $= 4850$.

52. Сколько различныхъ діагоналей можно провести изъ всѣхъ вершинъ n-угольника?

Отв. $\frac{(n-3)n}{2}$.

† **53**. Опредѣлить число сторонъ многоугольника, зная, что полное число *различныхъ* діагоналей, проведенныхъ изъ всѣхъ его вершинъ, равно 464.

Рѣшен. Корень ур-ія $\frac{(n-3)n}{2} = 464$, удовлетворяющій вопросу, есть $n = 32$.

ОТДѢЛЪ II.

Окружность круга. Измѣреніе угловъ.

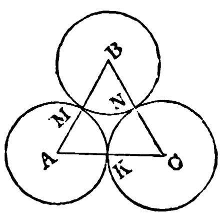
54. Взаимное положеніе двухъ окружностей представляетъ случай внѣшняго касанія. Разстояніе между центрами этихъ окружностей $= 5{,}95$ метра; радіусъ одной изъ нихъ составляетъ 0,75 радіуса другой. Какова длина каждаго изъ радіусовъ?

Отв. 3,4 метра и 2,55 метра.

55. Центральное разстояніе двухъ окружностей $= d$; радіусы ихъ суть R и ϱ. Опредѣлить взаимное положеніе этихъ окружностей въ каждомъ изъ слѣдующихъ 5 случаевъ:

1) $R = 12^3/_8$ ф., $\varrho = 5^1/_6$ ф., $d = 17^{13}/_{24}$ ф.
2) $R = 6$ ф., $\varrho = 2$ ф., $d = 4$ ф.
3) $R = 5^2/_7$ ф., $\varrho = 4^3/_5$ ф., $d = 8$ ф.
4) $R = 10$ ф., $\varrho = 6$, $d = 24$ ф.
5) $R = 14$ ф., $\varrho = 2$ ф., $d = 5$ ф.

56. Длины сторонъ треугольника, въ футахъ, суть 12, 14, 10. Изъ каждой вершины его, какъ изъ центра, описать по окружности такъ, чтобы каждая изъ трехъ полученныхъ окружностей касалась двухъ другихъ.



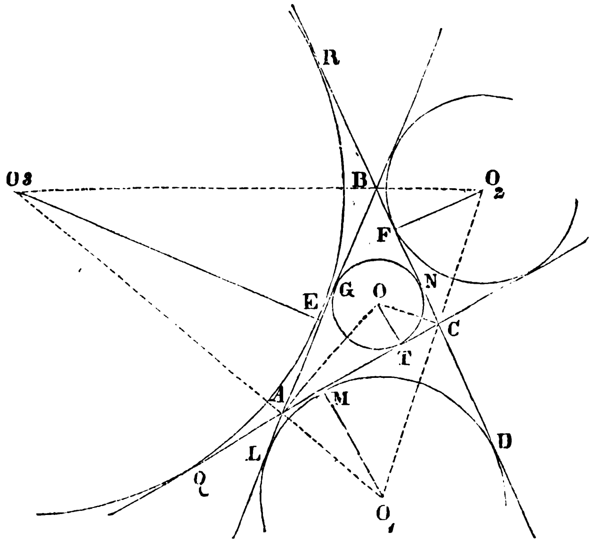
Черт. 5.

Рѣшен. Означая радіусы искомыхъ круговъ чрезъ x, y и z, приводимъ рѣшеніе вопроса къ рѣшенію ур-ій:

$$x + y = AB = 12.$$
$$x + z = AC = 10.$$
$$y + z = BC = 14.$$

Находимъ: $x = 4$, $y = 8$, $z = 6$.

57. Для треугольника ABC (черт. 6) O и O' суть центры внутренняго и внѣшняго вписанныхъ круговъ. Называя стороны треуг. буквами противолежащихъ вершинъ (a, b и c), выразить чрезъ a, b и c длины отрѣзковъ AM и TC.



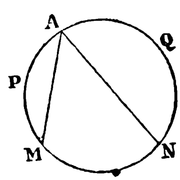
Черт. 6.

Отв. Какъ AM, такъ и TC выраж. чрезъ $\frac{a+b-c}{2}$ (отсюда видно, что точки прикосновенія внутренняго и внѣшняго круговъ равно отстоятъ отъ сосѣднихъ вершинъ треугольника).

Указан. Для вычисленія отрѣзковъ AM и TC по сторонамъ треуг. замѣтимъ, что касательныя, проведенныя къ одной и той же окружности изъ одной и той же внѣшней точки, равны (наприм. $TC = CN$, $CM = CD$).

---

58. Изъ точки A, лежащей на окружности, проведены въ кругѣ двѣ хорды AM и AN, изъ которыхъ первая стягиваетъ дугу APM въ $38°56'14''$, а вторая дугу AQN въ $102°24'48''$. Опредѣлить величину угла MAN. (Черт. 7.)



Черт. 7.

Отв. $109°19'29''$.

58 a). Сколько градусовъ, минутъ и секундъ въ дугѣ, вмѣщающей уголъ въ $58^\circ 14' 38''$? *Отв.* $243^\circ 30' 44''$.

58 b). Центральный уголъ на $20^\circ 18'$ превышаетъ вписанный, опирающійся на ту же дугу, что и центральный. Опредѣлить величину центральнаго угла.

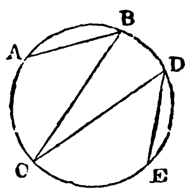
Отв. $40^\circ 36'$.

59. Діаметръ круга служитъ основаніемъ треугольника, имѣющаго противолежащую вершину на окружности въ точкѣ, въ которой полуокружность дѣлится на двѣ части, относящіяся между собою какъ $0{,}3 : 0{,}42$. Какъ великъ каждый изъ угловъ треугольника?

Отв. 90°; $37^\circ 30'$; $52^\circ 30'$.

60. Если въ какомъ-либо треугольникѣ линія, соединяющая средину основанія съ противолежащею вершиною, равна половинѣ основанія, то какъ великъ уголъ при этой вершинѣ? *Отв.* Прямой.

61. Хорда дѣлитъ окружность на двѣ части, относящіяся какъ $7 : 5$. Опредѣлить величины угловъ, опирающихся на эту хорду и имѣющихъ вершину на окружности. *Отв.* 105° и 75°.



Черт. 8.

62. Опредѣлить, сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержитъ каждый изъ вписанныхъ угловъ ABC и CDE, если величины ихъ относятся между собою какъ $15 : 19$ и если дуга $ABDE$ содержитъ $175^\circ 4' 36''$. (Черт. 8.)

Отв. $\angle ABC = 41^\circ 45''$; $\angle CDE = 51^\circ 56' 57''$.

63. Уголъ AMD между двумя хордами AB и CD, пересѣкающимися внутри круга въ точкѣ M, содержитъ $52^\circ 36'$. Дуга AD болѣе дуги CB въ четыре раза. Сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержитъ каждая изъ этихъ дугъ?

Отв. $\smile CB = 21^\circ 2' 24''$; $\smile AD = 84^\circ 9' 36''$.

64. Изъ внѣшней точки M проведены къ кругу двѣ сѣкущія MAB и MCD. Заключенныя между ними дуги AC и BD относятся между собою какъ $2:7$. Сумма дугъ AB и CD содержитъ 234°. Опредѣлить величину угла пересѣченія сѣкущихъ. *Отв.* 35°.

65. Изъ внѣшней точки A проведены къ окружности двѣ сѣкущія ABC и ADE, составляющія между собою уголъ въ $25^\circ 23' 18''$. Извѣстно, что уголъ BMD между двумя хордами BE и DC содержитъ $42^\circ 18' 50''$. Опредѣлить, сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержатъ дуги, изъ которыхъ одна ($\smile DB$) противолежитъ углу MBD, а другая ($\smile CE$) — углу CME.

Отв. $67^\circ 42' 8''$ и $16^\circ 55' 32''$.

66. Опредѣлить величину каждаго изъ двухъ угловъ, составленныхъ касательною и хордою, зная, что хорда эта дѣлитъ окружность на двѣ части, относящіяся между собою какъ $0{,}2 : 0{,}333\ldots$ *Отв.* $67^1/_2{}^\circ$ и $112^1/_2{}^\circ$.

66 а). Зная, что описанный уголъ содержитъ $68^\circ 40' 18''$, найти, сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержатъ дуги, заключенныя между его сторонами.

Отв. $248^\circ 40' 18''$ и $111^\circ 19' 42''$.

67. Дуги, заключенныя между сторонами описаннаго угла, относятся между собою какъ $3:7$. Какъ великъ этотъ уголъ? *Отв.* 72°.

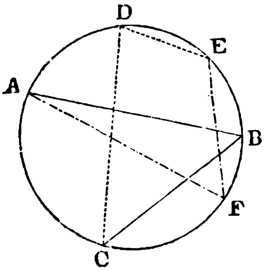
68. Окружность раздѣлена на три части, относящіяся между собою какъ $29 : 59 : 68$, и чрезъ точки дѣленія проведены къ кругу касательныя. Опредѣлить величину каждаго изъ угловъ $\triangle$-ка, образованнаго пересѣченіемъ касательныхъ.

Отв. $16^\circ 48'$; $52^\circ 48'$; $110^\circ 24'$.

69. Хорда CA, параллельная діаметру DB круга, стягиваетъ дугу, составляющую $\frac{1}{32}$ долю окружности. Опредѣлить величины угловъ трапеціи $CABD$, полученной чрезъ соединеніе концовъ хорды съ концами діаметра, а также — величины угловъ, образуемыхъ пересѣченіемъ діагоналей этой трапеціи.

Отв. $\angle A = \angle C = 132^\circ 11' 15''$; $\angle B = \angle D = 47^\circ 48' 45''$.

Величины неравн. угловъ, образующ. при пересѣч. діагоналей, суть $84^\circ\,22'\,30''$ и $95^\circ\,37'\,30''$.



Черт. 9.

70. Опредѣлить, сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержитъ каждый изъ вписанныхъ угловъ ABC, CDE и AFE, если извѣстно, что первый уголъ относится ко второму какъ 0,666... : 0,75, а второй къ третьему какъ 0,5 : 0,8333.... (Черт. 9.)

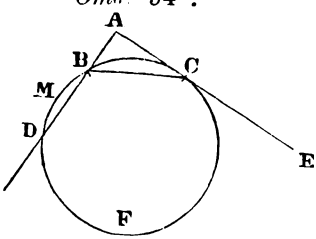
Отв. $\angle ABC = 45^\circ$; $\angle CDE = 50^\circ\,37'\,30''$; $\angle AFE = 84^\circ\,22'\,30''$.

71. Касательная къ окружности пересѣкается съ продолженнымъ діаметромъ подъ угломъ въ $49^\circ\,28'$. Сколько градусовъ и минутъ содержитъ каждая изъ дугъ, заключающихся между точкою касанія и концами діаметра?

Отв. $40^\circ\,32'$ и $139^\circ\,28'$.

72. Какъ великъ уголъ, подъ которымъ касательная къ окружности пересѣкается съ продолженнымъ діаметромъ, если дуги, заключенныя между точкою касанія и концами діаметра, относятся между собою какъ 1 : 4?

Отв. 54°.



Черт. 10.

73. Опредѣлить, сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержитъ уголъ DAE (черт. 10) между сѣкущею AD и касательною AE, если извѣстно, что уголъ BCE содержитъ $143^\circ\,2'\,45''$, а дуга BMD составляетъ 0,1(36)... дуги $BDFC$. *Отв.* $86^\circ\,35'\,7'',5$.

ОТДѢЛЪ III.

Пропорціональность прямыхъ линій. Подобіе прямолинейныхъ фигуръ. Пропорціональныя линіи въ кругѣ.

74. Найти отношеніе линіи AB къ линіи CD, зная, что $AB = 3\,CD + EB$, $CD = 2\,EB + KD$, $EB = 4\,KD + MB$, $KD = 2\,MB$. *Отв.* $3\,{}^{9}/_{20}$.

75. Найти отношеніе линіи AB къ линіи MN, зная, что

1) $AB=8$ гектом. $+4$ декам. $+3$ метр. $+4$ децим. $+$ $+8$ сант., $MN=36$ метр.

2) $AB=4$ декам. $+2$ метр. $+15$ сантим. $+8{,}88$ милл., $MN=5{,}8554$ метр. *Отв.* 1) 23,43; 2) 7,2.

76. На сколько должно продолжить линію въ 4 фута для того, чтобы линія въ 9 футовъ была среднею пропорціональною между данною линіею и линіею, полученною чрезъ продолженіе данной? *Отв.* На $16\,^1/_4$ фут.

77. Длины параллельныхъ сторонъ трапеціи суть 12 и 16 метровъ; длина одной изъ непараллельныхъ сторонъ $=7$ метр. На сколько должно продолжить эту послѣднюю сторону для того, чтобы она встрѣтилась съ продолженіемъ другой непараллельной стороны?

Отв. На 21 метръ.

78. Въ трапеціи средняя линія $=4\,^1/_2$ футамъ, одна изъ параллельныхъ сторонъ $=7$ фут., одна изъ непараллельныхъ сторонъ $=5$ футамъ. На сколько должно продолжить эту послѣднюю для того, чтобы она встрѣтилась съ продолженіемъ другой непараллельной стороны?

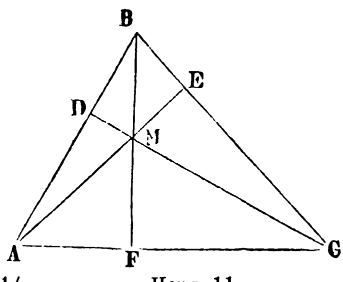
Отв. На 2 фута.

79. Высоты AE, BF и DC треугольника ABC (черт. 11) пересѣкаются въ точкѣ M. Вычислить:

1) AE, принимая $AB=10$, $AD=3$, $AM=4$.

2) AC, принимая $AE=14$, $AM=6$, $AF=3$.

3) MC, принимая $MD=4\,^1/_2$, $MF=6$, $MB=6{,}444...$



Черт. 11.

Отв. 1) $7\,^1/_2$; 2) 28; 3) $8\,^{16}/_{27}$.

Указан. Первый изъ предлож. вопросовъ рѣшается на основ. подобія треугольниковъ ABE и AMD, второй — подобія треуг. AEC и AMF, третій — треугольниковъ FMC и DMB.

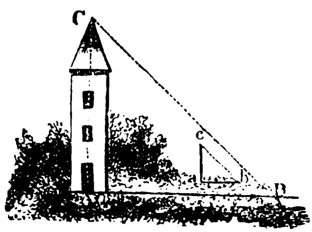
80. Обративъ вниманіе (см. черт. 11) на подобіе $\triangle\triangle\,ABE$ и AMD, AEC и AMF, ABE и DBC, FBC и MBE, FBC и AEC, ADC и FMC, AMF и MBE, FMC и DMB, находимъ:

$$1)\ AB\,.\,AD = AC\,.\,AF = AE\,.\,AM.$$
$$2)\ BA\,.\,BD = BC\,.\,BF = BE\,.\,BM.$$
$$3)\ BC\,.\,CE = AC\,.\,CF = CD\,.\,CM.$$
$$4)\ AM\,.\,ME = MB\,.\,MF = MC\,.\,MD.$$

На основаніи этихъ равенствъ составить нѣсколько задачъ, подобныхъ предыдущей.

81. Участокъ земли имѣетъ видъ $\triangle$-ка ABC. По масштабу 500 фут. въ дюймѣ начерченъ на бумагѣ подобный ABC треугольникъ $A_1B_1C_1$, при чемъ $B_1C_1 = 2{,}8$ дюйм., $A_1C_1 - B_1C_1 = 0{,}8$ дюйм. и $A_1B_1 : A_1C_1 = 11 : 9$. Опредѣлить длину каждой изъ сторонъ $\triangle\ ABC$.

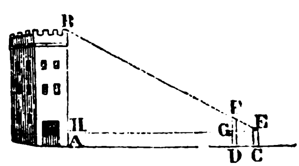
Отв. 2200 ф.; 1800 ф.; 1400 ф.



Черт. 12.

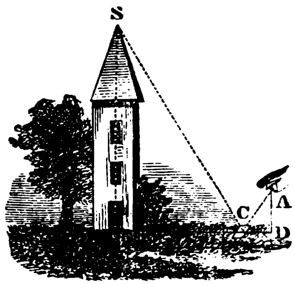
82. Освѣщаемая солнцемъ башня AC отбрасываетъ тѣнь, длина которой $AB = 12{,}6$ фут. Вертикальный шестъ ac, длина котораго $= 8$ фут., отбрасываетъ въ то же время тѣнь ab длиною въ 2,4 фут. Опредѣлить высоту AC башни. *Отв.* 6 саж.

83. Для опредѣленія высоты AB (черт. 13) башни, въ точкахъ D и C, лежащихъ на одной прямой съ точкою A, вбиты въ землю два неравной длины вертикальн. кола DF и EC — на столько, что вершины F и E кольевъ и точка B лежатъ на одной прямой BE. Измѣреніемъ найдено, что $AD = 59\,^1/_6$ саж., $DC = 2\,^1/_2$ арш.; длина оставшейся надъ поверхностью земли части DF бóльшаго кола $= 2$ арш., длина EC меньшаго кола $= 1\,^1/_2$ арш. Вычислить высоту башни. *Отв.* $12\,^1/_2$ саж.



Черт. 13.

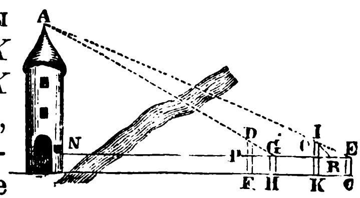
84. На разстояніи $BC=a$ фут. отъ основанія башни SB горизонтально помѣщено на землѣ небольшое зеркало C, въ которомъ глазъ A наблюдателя видитъ изображеніе вершины S башни. Измѣренное по отвѣсу разстояніе AD равно m футамъ, длина же CD, по измѣреніи, оказывается равною b футамъ. Опредѣлить высоту BS. (Вмѣсто зеркала C можно взять сосудъ съ водою, такъ какъ свободная поверхность жидкости въ сосудѣ горизонтальна).



Черт. 14.

Отв. $\frac{a.m}{b}$ фут.

85. Для опредѣленія высоты AB неприступнаго предмета, въ точкахъ F, H, K и C, лежащихъ на одной прямой съ точкою B, вбиты въ землю колья DF, GH, JK и EC, такъ что длина $DF=JK$ и $GH=EC$, притомъ точки A, D и G лежатъ на одной прямой, точки J, E и A — также на одной прямой. Измѣреніемъ найдено: $DF=JK=a$, $HG=EC=b$, $KF=m$, $HK=n$, $KC=p$. Опредѣлить AB.



Черт. 15.

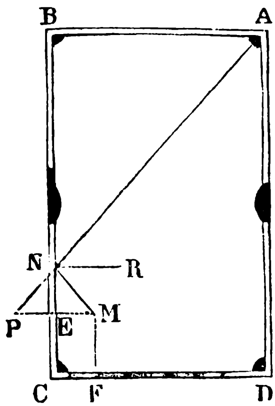
Рѣшен. Вообразивъ прямую EP параллельн. BC и прям. JR паралл. AG, имѣемъ $\frac{ER}{EG}=\frac{JE}{EA}=\frac{JO}{AN}$. Такъ какъ $EG=EO+OG=p+n$ и $JO=JK-EC=a-b$, то $\frac{RE}{p+n}=\frac{a-b}{AN}$. Замѣтивъ, что $PG=OR$ (изъ равенства $\triangle\triangle$ PDG и OJR), находимъ, что $RE= = OE-OR=OE-PG=KC-HF=p-m$; слѣдов. $\frac{p-m}{p+n}=\frac{a-b}{AN}$, откуда $AN=\frac{(p+n)\ (a-b)}{p-m}$.

Имѣемъ теперь $AB=AN+NB=\frac{(p+n)\ (a-b)}{p-m}+b$.

86. Въ треугольникъ, у котораго всѣ три угла суть острые, вписанъ квадратъ такъ, что одна изъ сторонъ его лежитъ на основанiи треугольника. Высота $\triangle$-ка $=10$ фут., а основанiе $=12$ фут. Опредѣлить длину стороны вписаннаго квадрата. *Отв.* $5\,^5/_{11}$ фут.

87. Въ треугольникъ, основанiе котораго $=8$ фут., а высота $=6$ фут. и всѣ углы котораго суть острые, вписанъ прямоугольникъ такъ, что основанiе его совпадаетъ съ основанiемъ треугольника. Опредѣлить длины основанiя и высоты прямоугольника, зная что ихъ отношенiе $=\,^5/_3$.

Отв. $4\,^4/_9$ фут. и $2\,^2/_3$ фут.



Черт. 16.

88. На билліардномъ столѣ, котораго длина $BC=16$ фут., а ширина $AB=9$ фут., помѣщенъ шаръ M, отстоящiй отъ одного изъ бортовъ билліарда на $MF=4$ фут., а отъ другого на $ME=3$ фут. Спрашивается: въ какомъ разстоянiи отъ C лежитъ на линiи BC та точка N, въ которой шаръ (получившiй ударъ въ M) долженъ удариться о бортъ BC для того, чтобы, отразясь отъ него, попасть въ лузу A?

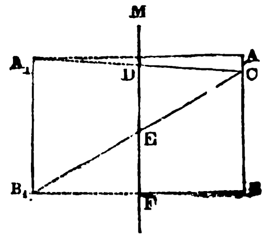
Отв. $NC=7$ фут.

Замѣч. Построенiемъ точка N можетъ быть найдена такъ: опустивъ $\perp$ ME на BC, продолжимъ его на длину $EP=ME$ и точку P соединимъ съ A: точка N (точка пересѣч. линiй AP и BC) будетъ искомою, такъ что шаръ, ударившисѣ о бортъ въ N, отразится по направленiю NA,—ибо въ этомъ случаѣ, какъ легко видѣть, уголъ паденiя $MNR=$ углу отраженiя RNA.

Для опредѣленiя положенiя точки N вычисленiемъ по тѣмъ даннымъ, которыя предложены въ задачѣ, замѣтимъ, что треугольн. MNE и ABN подобны.

89. 1) Какова должна быть наименьшая высота вертикально поставленнаго зеркала, если вертикально стоящій предъ нимъ человѣкъ желаетъ видѣть себя въ зеркалѣ во весь ростъ? 2) Насколько выше горизонтальной плоскости, на которой наблюдатель помѣщается, нужно поставить это зеркало для того, чтобы предыдущее требованіе выполнялось?

Отв. Высота зеркала должна быть равною по крайней мѣрѣ половинѣ роста наблюдателя; 2) на длину, составляющую половину разстоянія между глазомъ наблюдателя и горизонтальною плоскостью, на которой помѣщается наблюдатель.



Черт. 17.

Указаніе. Пусть MN представляетъ зеркало, AB (паралл. MN) — высоту человѣка, глазъ котораго находится въ C; A_1B_1 — изображеніе человѣка, видимое для глаза подъ угломъ A_1CB_1, такъ что DE есть искомая наименьшая высота зеркала. Изъ физики извѣстно, что если A_1B_1 есть изображеніе AB, то $BB_1 \perp$ къ MN и $BF = B_1F$, также $A_1A \perp$ къ MN и притомъ $= BB_1$.

90. Уголъ треугольника, заключенный между сторонами въ 4 и 11 метровъ, раздѣленъ пополамъ прямою, которая на третьей сторонѣ треугольника, имѣющей длину въ 12 метровъ, даетъ два отрѣзка. Найти длину каждаго изъ этихъ отрѣзковъ.

Отв. Длина одного $=$ 8 метр. 8 децим., длина другого $=$ 3 метр. 2 децим.

91. Сумма двухъ сторонъ треугольника $=$ 20 фут. Опредѣлить эти стороны, зная, что линія, дѣлящая уголъ между ними пополамъ, дѣлитъ противоположную сторону на части, длины которыхъ суть 5 фут. и 9 фут.

Отв. $7\frac{1}{7}$ фут. и $12\frac{6}{7}$ фут.

92. Въ треугольникѣ ABC, стороны котораго суть $AB = 5$ фут., $BC = 6$ фут. и $AC = 2$ фут., уголъ A

раздѣленъ пополамъ линіею AM и изъ точки M (лежащей на сторонѣ BC) параллельно AC проведена линія MN до пересѣченія съ AB въ точкѣ N. Вычислить отрѣзки BM и MC и длину MN.

Отв. $BM = 4^2/_7$ ф.; $MC = 1^5/_7$ ф.; $MN = 1^3/_7$ ф.

93. Длины катетовъ прямоугольнаго треугольника, въ футахъ, суть 3 и 5. Опредѣлить разстояніе вершины прямого угла отъ гипотенузы. *Отв.* $4^8/_{13}$ фут.

94. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, дѣлитъ послѣднюю на два отрѣзка, длины которыхъ суть $3^3/_5$ и $6^2/_5$ метр. Опредѣлить длины катетовъ. *Отв.* 6 метр. и 8 метр.

95. Изъ конца A гипотенузы AN прямоугольн. треуг. ABC возставленъ перпендикуляръ до встрѣчи въ точкѣ M съ продолженнымъ катетомъ BC. Опредѣлить длину MB, зная, что $AB = 7$ метрамъ, $BC = 5$ метрамъ. *Отв.* $MB = 9{,}8$ метр.

96. Катеты треугольника суть a и c. Опредѣлить длины отрѣзковъ гипотенузы, получаемыхъ при проведеніи линіи, дѣлящей прямой уголъ пополамъ.

Рѣш. Обозначая искомые отрѣзки чрезъ x и y, имѣемъ

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{a} \quad \text{или} \quad \frac{x+y}{y} = \frac{c+a}{a}; \quad \text{но} \quad x+y = \sqrt{c^2+a^2};$$

$$\text{слѣдов.} \quad \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{y} = \frac{c+a}{a}, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{a+c}$$

$$\text{и слѣд.} \quad x = \frac{c}{a}y = \frac{c\sqrt{a^2+c^2}}{a+c}.$$

97. Перпендикуляръ, длиною въ $8^{32}/_{41}$ фут., опущенный изъ вершины прямого угла треугольника на гипотенузу, дѣлитъ эту послѣднюю на два отрѣзка, разность которыхъ $= 37^2/_{41}$. Опредѣлить длину каждой изъ сторонъ $\triangle$-ка. *Отв.* 9 фут., 40 фут., 41 фут.

98. Перпендикуляръ, длиною въ $7^1/_{17}$ фут., опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, дѣлитъ эту послѣднюю на два отрѣзка, относящіеся между собою какъ 64 : 225. Какъ велика гипотенуза?

Отв. 17 фут.

99. Въ прямоугольномъ треугольникѣ проекціи катетовъ на гипотенузу относятся между собою какъ 25 : 144; бóльшій изъ катетовъ равенъ 12 метрамъ. Опредѣлить длину меньшаго катета. *Отв.* 5 метр.

100. Въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ катетовъ = 8 метр., а гипотенуза = 1 декаметру. Какое измѣненіе произойдетъ съ другимъ катетомъ, если увеличить гипотенузу на 7 метровъ, не измѣняя при этомъ величины даннаго катета въ 8 метровъ?

Отв. Увеличится на 9 метр.

101. Найти длины катетовъ прямоугольнаго треугольника по отношенію ихъ = $1\,^7/_8$ и по длинѣ гипотенузы = 34 метр. *Отв.* 16 метр. и 30 метр.

101 а). Въ прямоугольномъ треугольникѣ длина гипотенузы превышаетъ длину одного изъ катетовъ на 50 метровъ, а длину другого — на 4 метра. Опредѣлить длины сторонъ этого треугольника.

Отв. 74 метр., 24 метр., 70 метр.

101 b). Стороны прямоугольнаго треугольника выражаются послѣдовательными цѣлыми числами. Найти эти числа. *Отв.* 3; 4; 5.

102. Вычислить периметръ ромба, одна изъ діагоналей котораго длиною въ 30 фут., а другая въ 16 футовъ.

Отв. 68 фут.

103. Данъ квадратъ, периметръ котораго = 72 футамъ. Опредѣлить периметръ равнобедреннаго треугольника, у котораго общее основаніе съ квадратомъ, а вершина лежитъ на рединѣ стороны квадрата. *Отв.* 58,2 ф.

104. Діагональ прямоугольника = 68 метр.; периметръ его = 184 метр. Вычислить длину каждой изъ неравныхъ сторонъ прямоугольника. *Отв.* 60 метр. и 32 метр.

105. Выразить величины сторонъ равнобедреннаго $\triangle$-ка чрезъ его высоту h и периметръ $2p$.

$$\text{Отв.}\left\{\begin{array}{l}\text{Основаніе} = \dfrac{p^2 - h^2}{p};\\[2ex] \text{каждая изъ равныхъ сторонъ} = \dfrac{p^2 + h^2}{2p}.\end{array}\right.$$

106. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины треугольника на противолежащую сторону, дѣлитъ эту сторону на два отрѣзка, длины которыхъ суть 6 дюйм. и 15 дюйм. Разность двухъ другихъ сторонъ треугольника $=7$ дюйм. Опредѣлить длину каждой изъ сторонъ.

Отв. 10 дюйм., 17 дюйм., 21 дюйм.

Рѣш. x — одна изъ стор. $\triangle$-ка, $x+7$ — другая, длина третьей стороны $=6+15=21$. Квадратъ длины перпендикуляра, опущеннаго на эту послѣднюю сторону изъ противолежащей вершины, выражается, съ одной стороны, чрезъ x^2-6^2, а съ другой — чрезъ $(x+7)^2-15^2$; слѣдов. $x^2-6^2=(x+7)^2-15^2$ — уравненіе, служащее для опредѣленія x.

107. Периметръ прямоугольнаго треугольника $=132$; сумма квадратовъ сторонъ этого треугольника $=6050$. Опредѣлить стороны. *Отв.* 55; 43; 33.

108. Наибольшая изъ сторонъ треугольника имѣетъ длину въ a метровъ, длины двухъ другихъ его сторонъ суть b и c метровъ. По какому признаку можно опредѣлить видъ треугольника?

Отв. $\triangle$-къ будетъ	тупоугольнымъ,	если	$a^2>b^2+c^2$
„ „	прямоугольнымъ,	„	$a^2=b^2+c^2$
„ „	остроугольнымъ,	„	$a^2<b^2+c^2$

109. Длина наибольшей изъ сторонъ треугольника $=a$, длины двухъ прочихъ сторонъ его суть b и c. Какого вида этотъ треугольникъ, если:

$$\left.\begin{array}{lll} 1)\ a=17, & b=15, & c=8. \\ 2)\ a=10, & b=5, & c=8. \\ 3)\ a=2, & b=8, & c=11. \end{array}\right\}\ \text{(См. предыдущую задачу).}$$

110. Изъ вершины одного изъ угловъ треугольника на противолежащую сторону, длина которой 9 фут., опущенъ перпендикуляръ. Какъ велики отрѣзки, на которые раздѣлилась эта сторона, если длины двухъ другихъ сторонъ треугольника суть 5 фут. и 6 фут.?

Отв. $3\frac{8}{9}$ ф. и $5\frac{1}{9}$ ф.

111. Въ треугольникѣ ABC сторона $AB = 9$ метрамъ, $BC = 12$ метр., $AC = 5$ метр. Опредѣлить его высоту BD.

Рѣш. Такъ какъ $BC^2 > AB^2 + AC^2$, то уголъ BAC, противолежащій сторонѣ BC, тупой, и слѣд. по формулѣ $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC.AD$ имѣемъ $144 = 81 + 25 + 2.5.AD$, откуда $AD = 3{,}8$ метр.

Далѣе, изъ прямоугольнаго $\triangle$-ка ABD находимъ $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{81 - 14{,}44} = 8{,}15$ (метр.).

112. Въ треугольникѣ ABC сторона $AB = 18$, $BC = 12$, $AC = 14$ (въ метр.). Опредѣлить длину линіи BM, соединяющей вершину B со срединою противолежащей стороны AC.

Рѣш. Опустивъ $\perp$-ръ BD на сторону AC, изъ тупоугольн. $\triangle$-ка ABM находимъ $AB^2 = BM^2 + AM^2 + 2AM.MD$, а изъ остроуг. $\triangle$-ка MBC имѣемъ $BC^2 = BM^2 + MC^2 - 2MC.MD$. Складывая эти равенства и замѣчая, что $AM = MC$ (по условію), получ. $AB^2 + BC^2 = 2\,BM^2 + 2\,AM^2$ или $468 = 2\,MB^2 + 2\left(\frac{AC}{2}\right)^2$ или $234 = BM^2 + \frac{AC^2}{4}$ или $936 = 4\,BM^2 + 196$, откуда $BM^2 = 185$ и слѣдов. $BM = \sqrt{185} = 13{,}601$ (съ точ. до 0,001).

112 а). Разстояніе центровъ двухъ окружностей, пересѣкающихся въ точкахъ A и B, равно 3 саженямъ, а длины радіусовъ этихъ окружностей суть 20 фут. и 13 фут. Опредѣлить длину общей хорды AB этихъ окружностей. *Отв.* 24 фут.

113. Длины сторонъ треугольника, въ футахъ, суть 8, 6, 12. Опредѣлить величину сторонъ треугольника, подобнаго данному и имѣющаго периметръ въ 30 фут.

Отв. $6\,^2/_3$ ф.; $13\,^1/_3$ ф.; 10 ф.

114. Длины сторонъ пятиугольника суть 2, 6, 3, 10 и 7 (въ метрахъ). Найти длину каждой изъ сторонъ другого пятиугольника, подобнаго данному и имѣющаго периметръ въ 70 метровъ.

Отв. 5, 15, $7\,^1/_2$, 25, $17\,^1/_2$ (въ метр.).

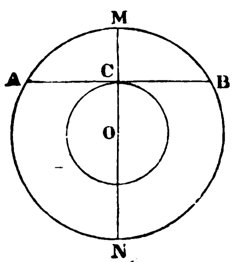
115. Сумма периметровъ двухъ квадратовъ = 66 фут. Опредѣлить стороны этихъ квадратовъ, зная, что отношеніе сторонъ = 0,375. *Отв.* $4\frac{1}{2}$ фут. и 12 фут.

116. Перпендикуляръ, длиною въ 30 дюймовъ, опущенный изъ нѣкоторой точки окружности на діаметръ, дѣлитъ послѣдній на два отрѣзка, находящіеся между собою въ отношеніи 4 : 9. Опредѣлить длину радіуса окружности. *Отв.* $32\frac{1}{2}$ дюйма.

117. Хорда, длиною въ 48 дюймовъ, удалена отъ центра окружности на 7 дюймовъ. Какъ велика длина радіуса этой окружности? *Отв.* 25 дюймовъ.

118. Радіусъ круга имѣетъ длину въ 41 дюймъ. Какова длина хорды этого круга, удаленной отъ центра на 9 дюймовъ? *Отв.* 80 дюймовъ.

119. Въ большемъ изъ двухъ концентрическихъ круговъ (черт. 18) проведена хорда AB въ 48 сантиметровъ, касающаяся меньшаго круга; разстояніе MC между окружностями = 12 сантим. Опредѣлить длину радіуса каждаго изъ круговъ.



Черт. 18.

Отв. 18 сантим. и 30 сантим.

120. Внутри круга, въ точкѣ M, пересѣкаются двѣ хорды, AB и CD, при чемъ $AM = 22$ децим., $MD = 5{,}8$ метр. и сумма $MC + MB =$ 3,6 метр. Какова длина каждой изъ хордъ AB и CD?

Отв. $AB = 4{,}81$ метр., $CD = 6{,}79$ метр.

121. Хорда AD, длиною въ 2 метра, продолжена на 3 децим. до точки B, и изъ точки B проведена къ кругу сѣкущая BC, длиною въ 32 децим. Какъ великъ внутренній отрѣзокъ этой сѣкущей?

Отв. 2,984375 метр.

122. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены къ кругу касательная и сѣкущая. Опредѣлить длину той и другой линіи, зная, что сѣкущая болѣе касательной на 2 дюйма и что внутренній отрѣзокъ сѣкущей равенъ $3\frac{1}{2}$ дюймамъ.

Отв. Длина касат. = 6 дюйм., длина сѣкущ. = 8 дюйм.

123. Изъ внѣшней точки M проведены къ кругу сѣкущая MB, длиною въ 76,8 сантиметр., и касательная MA, составляющая $^{32}/_{25}$ внѣшняго отрѣзка сѣкущей. Опредѣлить длину касательной.

Отв. 60 сантиметр.

124. Изъ точки, лежащей внѣ круга, чрезъ центръ послѣдняго проведена сѣкущая, внѣшній отрѣзокъ которой равенъ 3,2 фут. Изъ той же внѣшней точки проведена къ кругу касательная, равная 8 фут. Опредѣлить длину радіуса круга. *Отв.* 8,4 фут.

125. Длина одного изъ катетовъ прямоуг. треугольника = 20 фут., длина другого = 15 фут. Опредѣлить длину радіуса окружности, описанной около этого треугольника. *Отв.* $12\frac{1}{2}$ фут.

126. Къ двумъ кругамъ радіусовъ R и ρ проведена общая касательная. Разстояніе центровъ этихъ круговъ $= S$. На линіи, проходящей чрезъ центры, опредѣлить положеніе той точки, въ которой эта линія пересѣкается съ касательною: 1) въ случаѣ, если оба центра находятся по одну сторону искомой точки пересѣченія, 2) въ случаѣ, если точка пересѣченія лежитъ между центрами.

Отв. Полагая $R > \rho$, находимъ, что въ первомъ случаѣ разстояніе искомой точки отъ центра того круга, котораго радіусъ $= \rho$, есть $x = \frac{S\rho}{R-\rho}$, а во второмъ $x = \frac{S\rho}{R+\rho}$.

127. Формулы предыдущаго вопроса изслѣдовать при различныхъ частныхъ предположеніяхъ относительно величинъ R и ρ (полагая $R > \rho$, $R = \rho$, $R < \rho$, $R = 0$, $\rho = 0$, $R = 0$ и $\rho = 0$).

ОТДѢЛЪ IV.

Правильные многоугольники.

128. Въ какомъ правильномъ многоугольникѣ каждый изъ внутреннихъ угловъ равенъ: 1) 135° (или $\frac{2}{3}d$); 2) $168^\circ 45'$ (или $\frac{15}{8}d$)?

Отв. 1) Въ 8-угольн.; 2) въ 32-угольн.

129. Въ какомъ правильн. многоугольникѣ каждый изъ внѣшнихъ угловъ равенъ: 1) 36° (или $\frac{2}{5}d$), 2) 24° (или $\frac{4}{15}d$)? *Отв.* 1) Въ 10-угольн.; 2) въ 15-угольн.

130. Соединивъ каждую изъ вершинъ правильнаго n-угольника съ его центромъ, получаемъ n равныхъ угловъ, имѣющихъ въ центрѣ общую вершину. Опредѣлить величину одного такого угла въ случаѣ: 1) $n=24$, 2) $n=16$.

Отв. 1) $\frac{d}{6}$ (или 15°); 2) $\frac{d}{4}$ (или $22\frac{1}{2}^\circ$).

131. Соединивъ каждую изъ вершинъ правильнаго n-угольника съ его центромъ, получаемъ n равныхъ угловъ, имѣющихъ въ центрѣ общую вершину. Для какого правильнаго многоугольника величина каждаго изъ этихъ угловъ равна: 1) $\frac{1}{3}d$ (или 30°), 2) $\frac{2}{15}d$ (или 12°)? *Отв.* 1) для 12-угольн.; 2) для 30-угольн.

132. Сторона правильнаго многоугольника $= a$; радіусъ круга, описаннаго около этого многоугольника, $= R$. Опредѣлить радіусъ вписаннаго круга.

Отв. $\sqrt{R - \frac{a^2}{4}}$.

133. Сторона правильнаго многоугольника $= a$; радіусъ вписаннаго въ него круга $= r$. Опредѣлить радіусъ описаннаго круга.

Отв. $\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$.

134. R—радіусъ описаннаго, r—радіусъ вписаннаго въ многоугольникъ круга. Найти выраженіе стороны этого многоугольника. *Отв.* $2\sqrt{R^2-r^2}$.

135—138. Радіусъ круга, описаннаго около правильнаго многоугольника $= R$. Опредѣлить радіусъ круга, вписаннаго въ этотъ многоугольникъ, въ случаѣ: 1) треугольника, 2) квадрата, 3) шестиугольника, 4) десятиугольника.

Отв. 1) $\frac{R}{2}$; 2) $\frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

139—140. Радіусъ круга $= R$. Опредѣлить сторону правильнаго вписаннаго: 1) восьмиугольника, 2) двѣнадцатиугольника.

Отв. 1) $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 2) $R\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

141—143. Радіусъ круга $= r$. Опредѣлить сторону правильнаго описаннаго: 1) треугольника, 2) восьмиугольника, 3) двѣнадцатиугольника.

Отв. 1) $2r\sqrt{3}$; 2) $2r(\sqrt{2}-1)$; 3) $2r(2-\sqrt{3})$.

144. Зная, что сторона правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса R, имѣетъ выраженіемъ $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, найти выраженіе стороны правильнаго вписаннаго пятиугольника.

Отв. $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

145—151. Сторона правильнаго многоугольника $= a$. Опредѣлить радіусъ описаннаго около него круга въ случаѣ: 1) треугольника, 2) квадрата, 3) пятиугольника, 4) шестиугольника, 5) восьмиугольника, 6) десятиугольника, 7) двѣнадцатиугольника.

Отв. 1) $\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

3) $a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$;

4) a; 5) $\dfrac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\dfrac{a}{2}\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$;

6) $\dfrac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$; 7) $\dfrac{a}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=a\sqrt{2+\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{a}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

152—158. Сторона правильнаго многоугольника$=a$. Опредѣлить радіусъ вписаннаго въ него круга въ случаѣ: 1) треугольника, 2) квадрата, 3) пятиугольника, 4) шестиугольника, 5) восьмиугольника, 6) десятиугольника, 7) двѣнадцатиугольника.

Отв. 1) $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) $\dfrac{a}{2}$; 3) $\dfrac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}=$

$=\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$; 4) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; 5) $\dfrac{a}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{a}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$; 6) $\dfrac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$;

7) $\dfrac{a}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\dfrac{a}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)$.

159. Въ кругъ, радіусъ котораго$=4$ футамъ, вписанъ правильный треугольникъ, на сторонѣ котораго построенъ квадратъ. Опредѣлить радіусъ окружности, описанной около квадрата. *Отв.* $2\sqrt{6}$.

160. На половинѣ діагонали прямоугольника, имѣющаго основаніе въ 12 фут., а высоту въ 9 футовъ, построенъ квадратъ, діагональ котораго служитъ стороною правильнаго треугольника. Вычислить радіусъ окружности, описанной около этого треугольника.

Отв. $\frac{5}{2}\sqrt{6}$.

161. Опредѣлить длину сѣкущей, проведенной чрезъ центръ круга изъ вершины одного изъ угловъ правильнаго описаннаго около этого круга двѣнадцатиугольника, сторона котораго$=a$.

Отв. $\dfrac{a}{2}\left(2+\sqrt{3}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$.

ОТДѢЛЪ V.

Площади прямолинейныхъ фигуръ.

162. Зная единичныя отношенія линейныхъ мѣръ метрической системы, найти, сколько въ квадрат. метрѣ содержится кв. дециметровъ, кв. сантиметровъ, кв. миллиметровъ. Сколько въ кв. дециметрѣ кв. сантиметровъ, сколько кв. миллиметровъ? Сколько въ квадр. сантим. квадр. миллиметровъ?

Отв. 1 кв. метръ = 100 кв. дец. = 10000 кв. сант. = 1000000 кв. мил.
1 = 100 = 10000
1 = 100

Примѣч. При измѣреніи поверхностей полей за единицу принимается квадратный декаметръ или *аръ;* сто кв. декам. составляютъ *гектаръ.*

1 кв. метръ = 1,97704 кв. арш. = 0,21967 кв. саж.
1 аръ = 21,9672 кв. саж.
1 гектаръ = 0,915299 десятины = 2197,72 кв. саж.

163. Опредѣлить площадь квадрата, діагональ котораго = 4,6 метра. *Отв.* 10,58 кв. м.

164. Опредѣлить сторону квадрата, котораго площадь содержитъ столько же квадратныхъ футовъ, сколько его периметръ содержитъ линейныхъ футовъ. *Отв.* 4 фут.

165. Площадь квадрата = 46,24 кв. метр. Опредѣлить радіусъ вписаннаго круга. *Отв.* 3,4 метр.

166. Опредѣлить длину стороны квадрата, равновеликаго параллелограмму, котораго основаніе = 8 метр., а высота = 5,12 метра. *Отв.* 6,4 метр.

167. Какъ велика площадь прямоугольника, у котораго діагональ = 45 саж., а основаніе и высота относятся какъ 3 : 4? *Отв.* 972 кв. с.

168. Опредѣлить площадь прямоугольника, у котораго высота и основаніе относятся между собою какъ 7 : 5, а периметръ = 72 фут. *Отв.* 315 кв. ф.

168 а). Діагональ прямоугольника = 5 фут., а площадь его = 12 кв. ф. Опредѣлить стороны прямоугольника.
Отв. 4 ф. и 3 ф.

169. Длины сторонъ прямоугольнаго участка земли суть 36 саж. и 16 саж. На сколько нужно уменьшить длину и увеличить ширину участка для того, чтобы замѣнить его равновеликимъ квадратнымъ?

Отв. Длину большей стор. уменьшить на 12 саж., длину меньшей увеличить на 8 саж.

169 a). Опредѣлить площадь ромба, зная, что сторона его $=15$ фут., а одна изъ его діагоналей $=24$ фут.

Отв. 216 кв. ф.

169 b). Площадь ромба $= 3360$ кв. фут., а одна изъ его діагоналей $= 84$ фут. Опредѣлить сторону ромба.

Отв. 58 ф.

170. Сумма площадей прямоугольника и треугольника, имѣющихъ равныя высоты, равна 2800 кв. фут., а отношеніе этихъ площадей $= 3$. Основаніе прямоугольника относится къ высотѣ его какъ $7:3$. Опредѣлить общую высоту прямоугольника и треугольника, ихъ основанія и площади.

Отв.: Площадь прямоугольн. $=2100$ кв. ф.
Основ. прямоугольн. $=70$ ф. Площадь треугольн. $=700$ кв. ф.; основ. треугольн. $=46^2/_3$ ф. Общ. высота $=30$ фут.

171. Опредѣлить периметръ квадрата, равновеликаго прямоугольнику, имѣющему основаніе длиною въ 18 футовъ, а высоту — длиною въ 3,38 фут. *Отв.* 31,2 фут.

172. Высота треугольника $=30$ фут., основаніе его $=32$ фут. Какъ велика высота прямоугольника, имѣющаго основаніе въ 19,2 фут. и равновеликаго данному треугольнику? *Отв.* 25 фут.

173. Опредѣлить площадь квадрата, построеннаго на трети діагонали другого квадрата, котораго площадь $=36$ кв. фут. *Отв.* 8 кв. фут.

173 a). Площадь ромба $= 384$ кв. фут., а разность его діагоналей $= 8$ фут. Опредѣлить сторону ромба.

Отв. 20 ф.

174. Площади двухъ параллелограммовъ, имѣющихъ одинакую высоту, относятся какъ $9:8$. Разность основаній этихъ параллелограммовъ = 2 метр. Опредѣлить оба основанія. *Отв.* 18 метр. и 16 метр.

174 а). Цвѣтникъ, въ видѣ прямоугольника со сторонами въ 8 фут. и 12 фут., окаймленъ со всѣхъ сторонъ дорожкой, имѣющей всюду одинакую ширину. Площадь дорожки въ $3\frac{1}{8}$ раза больше площади цвѣтника. Опредѣлить ширину дорожки. *Отв.* 5 ф.

175. Гипотенуза прямоугольнаго треугольника = 68 ф.; площадь его = 960 кв. фут. Опредѣлить длину каждаго изъ катетовъ. *Отв.* 32 ф. и 60 ф.

176. Опредѣлить площадь прямоугольнаго треугольника, у котораго гипотенуза = 80 фут., а сумма катетовъ = 112 фут. *Отв.* 1536 кв. ф.

177. Опредѣлить гипотенузу прямоугольнаго треугольника по катету = a и площади = m.

Отв. $\frac{1}{a}\sqrt{a^4+4m^2}$.

177 а). Опредѣлить площадь прямоугольнаго треугольника, стороны котораго выражаются тремя послѣдовательными четными числами. *Отв.* 24 кв. един.

178. Сумма двухъ сторонъ треугольника составляетъ 124 фута; длины высотъ, соотвѣтствующихъ этимъ сторонамъ, суть 105 фут. и 50 фут. Опредѣлить площадь треугольника. *Отв.* 2100 кв. ф.

179. Сумма основанія и высоты треугольника = 8,6 арш., разность ихъ = 3,2 арш. Какъ велика площадь треугольника? *Отв.* 7695 кв. арш.

180. Высота равнобедреннаго треугольника = $2\frac{2}{5}$ фут., периметръ его = $9\frac{3}{5}$ фут. Найти площадь треугольника.

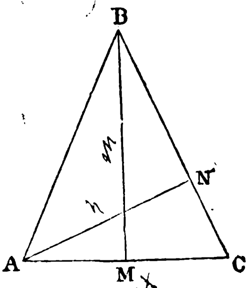
Отв. $4\frac{8}{25}$ □ фут.

181. Каждая изъ равныхъ сторонъ равнобедреннаго треугольника = a; высота, соотвѣтствующая неравной сторонѣ, равна h. Опредѣлить площадь треугольника.

Отв. $h\sqrt{a^2-h^2}$.

182. Площадь равнобедреннаго треугольника = 675 кв. фут., высота его = 30 фут. Опредѣлить величину каждой изъ равныхъ сторонъ. *Отв.* $37\frac{1}{2}$ фут.

183. Опредѣлить величину сторонъ равнобедреннаго треугольника (черт. 19) по двумъ его высотамъ $BM = m$ и $AN = n$.



Черт. 19.

Рѣш. Обозначая AC чрезъ x и $AB = BC$ чрезъ y, получаемъ:

$$\begin{cases} 1)\ mx = ny \\ 2)\ y^2 = m^2 + \dfrac{x^2}{4}. \end{cases}$$

Отсюда:

$$x = \frac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}};\ y = \frac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}.$$

184. Опредѣлить площадь равнобедреннаго треугольника по основанію его b и суммѣ s одной изъ равныхъ сторонъ съ высотою.

Отв. $\dfrac{b(4s^2 - b^2)}{16s}$.

185. Опредѣлить площадь равнобедреннаго треугольника по одной изъ равныхъ сторонъ a и основанію b.

Отв. $\dfrac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$.

186. Данъ квадратъ, сторона котораго $= a$. Опредѣлить стороны равновеликаго ему равнобедреннаго треугольника, въ которомъ сумма основанія съ высотою равна суммѣ двухъ равныхъ сторонъ.

Рѣш. Называя основаніе треугольника чрезъ x, соотвѣтствующую высоту — чрезъ y, а каждую изъ двухъ равныхъ сторонъ — чрезъ z, получаемъ ур-ія:

$$1)\ x + y = 2z;\quad 2)\ \frac{xy}{2} = a^2;\quad 3)\ y^2 = z^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Рѣшая ихъ, нах.: $x = a\sqrt{3},\ y = \frac{2}{3}a\sqrt{3},\ z = \frac{5}{6}a\sqrt{3}$.

187. Опредѣлить площадь равносторонняго треугольника, сторона котораго $= 4$ футамъ.

Отв. $4\sqrt{3}$ квадр. ф.

188. Въ равностороннемъ треугольникѣ сумма высоты и стороны $= a$ футамъ. Опредѣлить площадь треугольника.

Отв. $\triangle = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})^2}$ квадр. ф.

189. Одинъ изъ катетовъ прямоугольнаго треугольника = 6 метрамъ, а другой 8 метрамъ. Изъ вершины прямого угла опущенъ перпендикуляръ на гипотенузу. Узнать величину этого перпендикуляра и площадей двухъ образовавшихся маленькихъ треугольниковъ. (Повѣрка: сумма этихъ площадей = площади всего треугольника).

Отв. Длина перпендикуляра $= 4^4/_5$ метр. Одна изъ искомыхъ площадей $= 8^{16}/_{25}$ кв. м., другая $= 15^9/_{25}$ кв. м.

190. Изъ вершины прямого угла въ прямоугольномъ треугольникѣ опущенъ перпендикуляръ на гипотенузу, вслѣдствіе чего получились на ней отрѣзки въ $3^1/_5$ и $1^4/_5$ метр. Вычислить: 1) длину перпендикуляра, опущеннаго на гипотенузу, 2) длины катетовъ треугольника, 3) площадь его и 4) площадь каждаго изъ двухъ образовавшихся маленькихъ треугольниковъ.

Отв. 1) Длина перпендикуляра $= 2^2/_5$ метра; 2) длины катетовъ суть 4 метр. и 3 метр., 3) площадь треуг. $= 6$ кв. метр.; 4) площади маленькихъ треугольниковъ суть $3^{21}/_{25}$ кв. метр. и $2^4/_{25}$ кв. метр.

191. Гипотенуза прямоугольнаго треугольника, длиною въ a футовъ, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ вершины прямого угла. Опредѣлить площадь треугольника.

Отв. $\frac{a^2}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

192. Изъ вершины прямого угла въ прямоугольномъ треугольникѣ опущенъ перпендикуляръ на гипотенузу, вслѣдствіе чего она раздѣлилась на два отрѣзка, изъ которыхъ одинъ = 9 футамъ, а другой 16 футамъ. Опредѣлить основаніе прямоугольника, имѣющаго высоту въ 5 футовъ и равновеликаго данному треугольнику.

Отв. 30 фут.

193. На сторонѣ квадрата, площадь котораго = 15 кв. дюймамъ, построенъ правильный шестиугольникъ. Опредѣлить его апоѳему.

Отв. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ дюйм.

194. Въ трапеціи, площадь которой $= 158{,}5$ кв. фут., высота $= 6{,}222\ldots$ фут., а одна изъ параллельныхъ сторонъ $= 18$ фут. Опредѣлить другую параллельную сторону.

Отв. $32^{53}/_{56}$ фут.

195. Периметръ трапеціи равенъ 32 метрамъ, каждая изъ непараллельныхъ сторонъ ея содержитъ по 5 метровъ; бо́льшая изъ параллельныхъ сторонъ $= 14$ метрамъ. Вычислить площадь трапеціи. *Отв.* 44 квадр. метр.

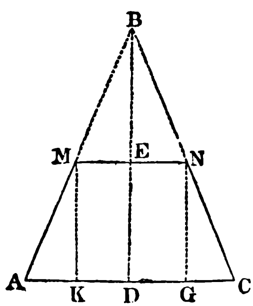
196. Площадь трапеціи $= 144$ кв. фут.; длина линіи, соединяющей средины непараллельныхъ сторонъ, $= 18$ ф. Какую высоту имѣетъ прямоугольникъ, равновеликій данной трапеціи и имѣющій основаніе, равное высотѣ трапеціи? *Отв.* 18 фут.

197. Въ трапеціи, площадь которой $= 594$ кв. ф., высота $= 22$ фут., а разность параллельныхъ сторонъ $= 6$ ф. Найти длину каждой изъ параллельныхъ сторонъ.

Отв. 24 ф. и 30 ф.

198. Въ трапеціи, площадь которой $= 220$ кв. ф., разность параллельныхъ сторонъ $= 12$ фут.; разность между бо́льшею изъ параллельныхъ сторонъ и высотою трапеціи $= 18$ фут. Опредѣлить длину высоты и длину каждой изъ параллельныхъ сторонъ.

Отв. 10 ф., 16 ф., 28 ф.



Черт. 20.

199. Одна изъ параллельныхъ сторонъ трапеціи $AMNC$ (черт. 20) длиною въ 100, другая въ 40 фут., каждая же изъ непараллельныхъ сторонъ длиною по 50 футовъ. Опредѣлить: 1) площадь трапеціи, 2) площадь треугольника ABC, сторонами котораго служатъ: бо́льшая изъ параллельныхъ сторонъ трапеціи и двѣ продолженныя непараллельныя стороны трапеціи.

Рѣш. 1) Такъ какъ $AM = NC$ и $MK = NG$, то $AK = GC$ и слѣдов. $AC = KG + 2AK = MN + 2AK$ или

$100 = 40 + 2AK$, откуда $AK = 30$;
$MK = \sqrt{AM^2 - AK^2} = \sqrt{2500 - 900} = 40$.
Площ. трап. $AMNG = \frac{AC + MN}{2} \cdot MK = \frac{100 + 40}{2} \cdot 40$
$= 2800$ кв. ф. 2) $\frac{MN}{AD} = \frac{BE}{BD}$ или $\frac{MN}{AC} = \frac{BD - ED}{BD}$
или $\frac{40}{100} = \frac{BD - 40}{BD}$, откуда $BD = \frac{200}{3}$ ф., такъ что
площадь треугольн. $ABC = \frac{AC}{2} \cdot BD = \frac{100}{2} \cdot \frac{200}{3} =$
$= 3333\frac{1}{3}$ кв. ф.

200. Бо́льшая изъ параллельныхъ сторонъ трапеціи $ADCB$ есть $AB = a$, меньшая — $DC = b$; изъ непараллельныхъ сторонъ одна есть $AD = c$, другая — $CB = d$. Выразить площадь трапеціи чрезъ a, b, c и d.

Рѣшен. Опустивъ изъ вершины D перпендикуляръ DG на сторону AB (см. черт. 32) и проведя DF параллельно CB, находимъ:

$AD^2 = DF^2 + AF^2 - 2\,AF \,.\, GF$, слѣдов.

$$GF = \frac{d^2 + (a-b)^2 - c^2}{2(a-b)}; \quad DG = \sqrt{d^2 - \left[\frac{d^2 + (a-b)^2 - c^2}{2(a-b)}\right]^2}$$

и потому площадь $ABCD = \frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{[2(a-b)d]^2 - [d^2 + (a-b)^2 - c^2]^2}{4(a-b)^2}}$

$$= \frac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{[2d(a-b) + d^2 + (a-b)^2 - c^2]\,[2d(a-b) - d^2 - (a-b)^2 + c^2]}$$

$$= \frac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{\left\{[d + [a-b]]^2 - c^2\right\}\left\{c^2 - [(a-b) - d]^2\right\}} =$$

$$\frac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(a - b + d + c)(a - b + d - c)(c + a - b - d)(c - a + b + d)}.$$

201. Длины параллельныхъ сторонъ трапеціи суть 48 и 20 дюйм., длины непараллельныхъ сторонъ ея суть 26 и 30 дюйм. Опредѣлить высоту и площадь трапеціи. (Рѣшить вопросъ независимо отъ формулы предыдущей задачи и рѣшеніе повѣрить, пользуясь этой формулою).

Отв. Высота $= 24$ дюйм.; площадь $= 816$ кв. д.

202. Площадь прямоугольника $= 20{,}88$ кв. фут., периметръ его на 13 фут. больше основанія. Опредѣлить стороны. *Отв.* 7,2 ф. и 2,9 ф. или: 5,8 ф. и 3,6 ф.

203. Сумма площадей двухъ квадратовъ $=900$ квадр. футамъ; разность ихъ $= 252$ квадр. фут. Опредѣлить длину стороны каждаго изъ квадратовъ.

Отв. 24 фут. и 18 ф.

204. По данной сторонѣ a правильныхъ треугольника, пятиугольника, шестиугольника, восьмиугольника, десятиугольника, двѣнадцатиугольника опредѣлить площади этихъ многоугольниковъ.

Отв. 1) $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; 2) $\frac{a^2}{2}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$; 3) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$;

4) $2a^2\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 2a^2(1+\sqrt{2})$;

5) $\frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; 6) $3a^2(2+\sqrt{3})$.

205. Сторона правильнаго вписаннаго шестиугольника равна 5 фут. Вычислить площадь описаннаго шестиугольника. *Отв.* 86,6 кв. фут.

206. Какимъ числамъ пропорціональны площади: равносторонняго треугольника, квадрата и правильнаго шестиугольника, стороны которыхъ равны?

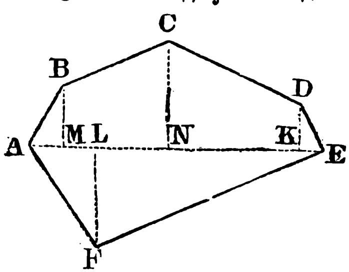
Отв. $\sqrt{3}$; 4; $6\sqrt{3}$.

207. Площадь правильнаго 8-угольника равна k квадр. метр., апоѳема его $= a$ метр. Опредѣлить діагональ, проходящую черезъ центръ.

Отв. $\frac{1}{4a}\sqrt{64a^4+k^2}$.

208. Изъ двухъ подобныхъ многоугольниковъ одинъ имѣетъ периметръ равный p, другой — равный p_1; площадь перваго многоугольника $= Q$. Опредѣлить площадь второго.

Отв. $\frac{p_1^2}{p^2} \cdot Q$.

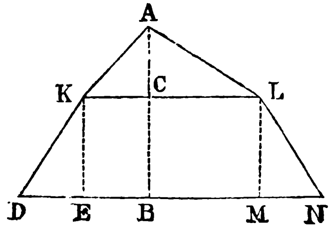


Черт. 21.

209. Для измѣренія площади неправильнаго многоугольника $ABCDEF$ (черт. 21) проведена его наибольшая діагональ AE и измѣрены въ саженяхъ разстоянія его вершинъ B, C, D и F отъ этой діагонали, а также длины AM, MN, NK и KE, при чемъ оказалось: $BM=5$, $CN=7$, $DK=4$, $FL=6$, $AM=3$, $ML=2$, $LN=4$, $NK=7$, $KE=2$. Опредѣлить площадь многоугольника.

Отв. 140 кв. саж.

210. Участокъ земли $DKALND$, состоящій изъ треугольника KAL и трапеціи $DKLN$, продается за 1362 руб. Извѣстно, что сторона KL, параллельная DN, равна 5 саж., длина перпендикуляра $KE=3\,^1/_2$ саж., отрѣзокъ $DE=\,^5/_6$ саж., отрѣзокъ $MN=1\,^1/_2$ саж., длина перпендикуляра $AB=10$ саж. По скольку руб. продается квадратная сажень участка? *Отв.* По 36 руб.



Черт. 22.

211. Длины сторонъ треугольника, въ саженяхъ, суть 29, 25 и 36. Опредѣлить его площадь.

Отв. 360 кв. саж.

212. Величины сторонъ треугольника относятся между собою какъ $13:12:5$; площадь его $=1080$ кв. дюйм. Опредѣлить длину каждой изъ сторонъ.

Отв. 78 дюйм., 72 д., 30 д.

213. Длины сторонъ треугольника, въ футахъ, суть 36, 29 и 25. Опредѣлить длину каждой изъ трехъ его высотъ. *Отв.* 20 ф.; $24\,^{24}/_{29}$ ф.; $28\,^4/_5$ ф.

214. Длины трехъ высотъ треугольника суть m, n и q. Опредѣлить его площадь.

Рѣш. Обозначая стороны треуг. чрезъ x, y и z, а площадь его — чрезъ $\triangle$, имѣемъ $x=\frac{2\triangle}{m}$, $y=\frac{2\triangle}{n}$, $z=\frac{2\triangle}{q}$.

Вставивъ эти величины въ формулу

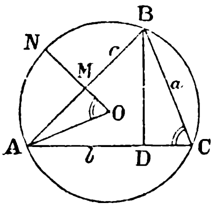
$$\triangle=\,^1/_4\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)}$$

и произведя упрощеніе, найдемъ

$$\triangle=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{q}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{m}\right)}}.$$

214 а). Длины послѣдовательныхъ сторонъ четыреугольника суть 7 ф., 24 ф., 29 ф. и 36 ф.; длина же діагонали, отдѣляющей двѣ первыя стороны отъ двухъ остальныхъ, равна 25 ф. Опредѣлить площадь четыреугольника. *Отв.* 444 кв. ф.

215. По тремъ даннымъ сторонамъ a, b и c треугольника опредѣлить радіусъ R описаннаго около него круга.

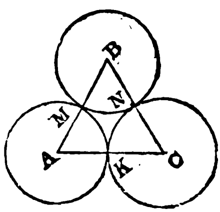


Черт. 23.

Рѣшеніе. Опустивъ изъ точки O перпендикуляръ ON на сторону AB и изъ точки B перпендикуляръ BD на сторону AC, изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ AMO и DBC (у которыхъ углы BCD и MOA равны, какъ измѣряющіеся половиною одной и той же дуги ANB) наход. $\frac{AO}{BC}=\frac{AM}{BD}$ или $\frac{R}{a}=\frac{\frac{1}{2}c}{BD}$, откуда $BD=\frac{a.c}{2R}$ и слѣдов. площ. треуг. $\triangle=\frac{b.a.c}{4R}$, такъ что $R=\frac{abc}{4\triangle}$.

Выражая теперь $\triangle$ по тремъ сторонамъ треугольника, получаемъ

$$R=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}}.$$



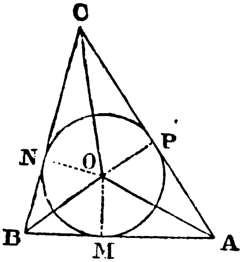
Черт. 24.

216. Изъ каждой вершины треугольника, какъ изъ центра, описано по окружности такъ, что каждая изъ окружностей касается двухъ другихъ (черт. 24). Радіусы окружностей суть $AM=6$ фут., $BN=7$ фут. и $KC=8$ фут. Опредѣлить площадь треугольника ABC.

Отв. 84 кв. ф.

217. По тремъ даннымъ сторонамъ a, b и c треугольника опредѣлить радіусъ r внутренняго вписаннаго круга.

Рѣшеніе. Соединивъ центръ O (черт. 25) съ вершинами треугольника, находимъ:



Черт. 25.

$$AOB = \frac{AB.OM}{2} = c \cdot \frac{r}{2};$$

$$BOC = \frac{CB.ON}{2} = a \cdot \frac{r}{2};$$

$$AOC = \frac{AC.PO}{2} = b \cdot \frac{r}{2}.$$

Складывая эти равенства, получаемъ:

$$AOB + BOC + AOC = \frac{r}{2}(a + b + c) \quad \text{или}$$

$$\triangle = \frac{r}{2}(a + b + c), \quad \text{откуда } r = \frac{2\triangle}{a + b + c} \quad \text{или}$$

$$r = \frac{\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}}{2\,(a+b+c)}.$$

218. Длины сторонъ треугольника, въ футахъ, суть 25, 24 и 7. Опредѣлить радіусъ внутренняго вписаннаго круга.

Отв. 3 ф.

219. Стороны треугольника суть $a=13$, $b=14$, $c=15$. Двѣ изъ нихъ, a и b, служатъ касательными къ кругу, центръ котораго лежитъ на третьей сторонѣ c треугольника. Опредѣлить радіусъ круга.

Отв. Полагая $a + b + c = 2p$, находимъ:

$$R = \frac{2}{a+b} \cdot \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} = 6\tfrac{2}{9}.$$

220. Длины сторонъ прямоугольнаго треугольника, въ футахъ, суть 12, 13 и 5. Опредѣлить радіусъ вписаннаго въ него круга. *Отв.* 2 фута.

221. Линія, параллельная основанію треугольника ABC, дѣлитъ высоту его пополамъ. Найти отношеніе площади ABC къ площади отсѣченнаго треугольника.

Отв. 4.

222. Высота треугольника $= h$. Выразить черезъ h разстояніе его вершины отъ той линіи, которая, будучи параллельною основанію, дѣлитъ треугольникъ пополамъ.

Отв. $h : \sqrt{2}$.

223. Одна изъ сторонъ треугольника имѣетъ длину въ 30 метровъ. Опредѣлить длину прямой линіи, которая, проходя параллельно этой сторонѣ, дѣлитъ треугольникъ пополамъ.

Отв. 21,21 метр.

224. Длина стороны AC треугольника ABC есть 32,4 фута. Опредѣлить разстояніе вершины A отъ каждой изъ точекъ пересѣченія стороны AC съ двумя прямыми, проведенными изъ вершины B и дѣлящими треугольникъ ABC на три равновеликія части.

Отв. 10,8 фут. и 21,6 фут.

225. Длина стороны AC треугольника ABC равна 38,4 фут. Опредѣлить разстояніе вершины A отъ точекъ пересѣченія стороны AC съ двумя прямыми, проведенными изъ вершины B и дѣлящими треугольникъ ABC на три части, относящіяся между собою какъ $2:3:7$.

Отв. 6,4 фут. и 16 фут.

226. Стороны треуг. ABC суть: $AB=36$, $BC=25$ и $AC=29$ фут. Изъ вершины B проведена прямая, пересѣкающая сторону AC въ точкѣ M и отсѣкающая отъ ABC треугольникъ MBC, имѣющій площадь въ 72 кв. фут. Опредѣлить длину MC.

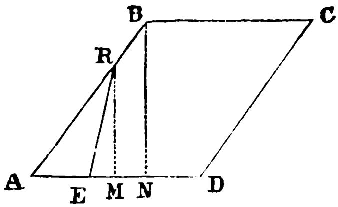
Отв. $5\,{}^{4}/_{5}$ фут.

227. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 35 фут. Изъ вершины A проведена прямая, пересѣкающая сторону DC въ такой точкѣ M, что площадь отсѣченнаго треугольника ADM составляетъ ${}^{1}/_{5}$ площади квадрата. Опредѣлить длину DM.

Отв. 2 сажени.

228. Изъ вершины B прямоугольника $ABCD$, стороны котораго суть $AB=42$ метр. и $AD=54$ метр., проведены прямыя BM и BN, пересѣкающія сторону DA такъ, что площади образовавшихся фигуръ ABM, MBN и $NBCD$ относятся между собою какъ $1:3:5$. Опредѣлить разстоянія точекъ M и N отъ вершины A.

Отв. $AM=12$ метр., $AN=48$ метр.



Черт. 26.

229. На сторонахъ AB и AD (черт. 26) параллелограмма $ABCD$ отложены части $AR = {}^2/_3 AB$ и $AE = {}^1/_3 AD$ и точки R и E соединены прямою RE. Найти отношеніе площади параллелограмма $ABCD$ къ площади треугольника ARE.

Рѣшеніе. $\dfrac{\text{Площ. } ABCD}{\text{Площ. } ARE} = \dfrac{AD.BN}{AE \cdot \frac{1}{2} RM} = \dfrac{AD.BN}{\frac{1}{3} AD \cdot \frac{1}{2} RM} =$

$= 6\dfrac{BN}{MR}$. Такъ какъ $\dfrac{BN}{RM} = \dfrac{AB}{AR} = 1 : \frac{2}{3} = {}^3/_2$, то

$$\frac{\text{площ. } ABCD}{\text{площ. } ARE} = 6\,\frac{BN}{RM} = 6\,.\,{}^3/_2 = 9.$$

230. На сторонахъ AB и AC треугольника ABC отложены отрѣзки $AM = \frac{2}{3} AB$ и $AN = \frac{3}{4} AC$. Найти отношеніе площади ABC къ площади AMN. *Отв.* 2.

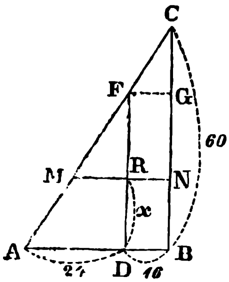
231. Площадь параллелограмма $ABCD$ содержитъ 432 кв. фут. Линія MN, параллельная сторонамъ AD и BC параллелограмма, отсѣкаетъ отъ площади послѣдняго часть $AMND$, содержащую 120 кв. ф. Какýю часть длины DC составляетъ отрѣзокъ DN? *Отв.* ${}^5/_{18}$.

232. Параллелограммъ $ABCD$, въ которомъ $AD = BC = 90$ фут., $AB = CD = 60$ фут. и разстояніе стороны BC отъ точки $A = 40$ фут., долженъ быть раздѣленъ на три равновеликія части двумя прямыми, выходящими изъ точки A. На сколько точки пересѣченія M и N этихъ прямыхъ со сторонами DC и CB удалены отъ вершинъ D и B?

Отв. $BM = 60$ фут.; $DN = 40$ фут.

233. Участокъ земли ABC, имѣющій форму прямоугольнаго треугольника, котораго катеты суть $AB = 40$ саж. и $BC = 60$ саж., состоитъ изъ трапеціи $DFCB$ и прямоугольнаго треугольника AFD. Каждая квадратная сажень площади трапеціи стóитъ 5 рублей, каждая квадратная сажень площади треугольника — 3 руб.

Длина $AD = 24$ саженямъ. На какомъ разстояніи отъ AB нужно провести линію, ей параллельную, для того, чтобы весь участокъ земли ABC раздѣлился на двѣ части равной цѣнности?



Черт. 27.

Рѣшеніе. Узнаемъ, во-первыхъ, стоимость всего участка ABC, для чего опредѣлимъ стоимость каждой изъ площадей AFD и $DFCB$. Замѣтивъ, что треугольники AFD и ACB подобны, найдемъ, что $FD = 36$ саж. и слѣд. площадь $\triangle AFD = \frac{1}{2} AD . FD = 24 . {}^{36}/_{2} = 432$ кв. саж.

Цѣнность этой площ. $= 3$ руб. $\times 432 = 1296$ руб.

Площадь $DFCB = \frac{DF + BC}{2} \cdot DB = \frac{36 + 60}{2} \cdot 16 = 758$ кв. саж.; цѣнность этой площади $= 5$ руб. $\times 768 = 3840$ руб. Стоимость площ. всего участка $ACB = 1296$ руб. $+$ 3840 руб. $= 5136$ руб., половина этой стоимости $= 2568$ руб.

Итакъ, линія, которую мы проведемъ параллельно сторонѣ AB, должна отсѣкать отъ всего участка часть цѣнностью въ 2568 рублей. Спрашивается: линія эта должна пройти выше или ниже линіи FG? Для рѣшенія этого вопроса опредѣлимъ цѣнность площади FCG. Такъ какъ площадь $DFGB = DB . FD = 16 . 36 = 576$ квадр. саж., то цѣна ея $= 5$ руб. $576 = 2880$ руб. и такъ какъ цѣна площади $DFCB = 3840$ руб., то цѣна площади $FCG = 3840 - 2880 = 960$ руб., т.-е. менѣе половины цѣны всего участка ACB. А потому параллель, которую нужно провести, пойдетъ ниже FG. Пусть, напримѣръ, MN будетъ такою параллелью (такъ что цѣна площади $AMNB = 2568$ руб.). Мы будемъ въ состояніи провести такую параллель, если будемъ знать длину $DR = NB$. Итакъ, задача приводится къ опредѣленію длины NB, которую обозначимъ чрезъ x.

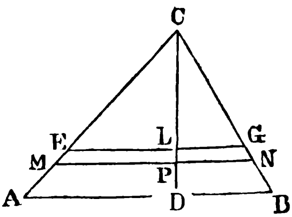
Для опредѣленія x составимъ ур-іе, которымъ выразимъ, что

цѣна $AMRD$ + цѣна $DRNB = 2568$ руб........ (А).
Предварительно, изъ подобія треугольник. MFR и ACB паходимъ $\frac{MR}{AB} = \frac{FR}{CB}$ или $\frac{MR}{40} = \frac{FR}{60}$ или $\frac{MR}{2} = \frac{RF}{2}$ или $\frac{MR}{2} = \frac{FD - x}{3} = \frac{36 - x}{3}$, откуда $MR = \frac{2}{3}(36 - x)$.

Площ. $AMDR = (AD + MR)\frac{DR}{2} = \left[24 + \frac{2}{3}(36 - x)\right]\frac{x}{2} = \frac{72x - x^2}{3}$. Цѣна площади $AMDR = \frac{72x - x^2}{3} \cdot 3 = 72x - x^2$.

Площ. $DRNB = DR \,.\, NB = 16 \,.\, x$; цѣна площ. $DRNB = 16x \,.\, 5 = 80x$. По условію (А), имѣемъ теперь ур-іе: $72x - x^2 + 80x = 2568$ или $x^2 - 152x + 2568 = 0$. Рѣшая его (при чемъ корень извлекаемъ съ приближеніемъ до $^1/_{100}$), находимъ $x = 19{,}37$. (Второе рѣшеніе $x = 132{,}63$, хотя и положительно, вопросу не удовлетворяетъ, ибо отрѣзокъ x долженъ быть менѣе длины BC, равной 60 саж.).

234. Участокъ земли въ формѣ треугольника ACB состоитъ изъ трапеціи $AEGB$ и треугольника ECG. Сторона $AB = 100$ саж., высота $CD = 80$ саж., $DL = 20$ саж. Каждая квадр. саж. площади трапеціи стóитъ 3 рубля, а треугольника $1\,^1/_2$ рубля. На какомъ разстояніи отъ AB должна проходить линія, параллельная AB и дѣлящая площадь ACB на двѣ части равной цѣнности?



Черт. 28.

Рѣшеніе. Изъ подобія треугольн. ECG и ACB находимъ что $EG = 75$ саж.; слѣдов. площ. $ECG = 2250$ квадр. саж. и цѣна ея $= 3375$ руб. Вычисливъ площадь трапеціи $AEGB$, наход., что цѣна этой площади $= 5250$ руб. Такимъ образомъ оказывается, что цѣна площ. треугол.

ACB есть 8625 рублей. Такъ какъ цѣна площ. CEG менѣе $4312\frac{1}{2}$ рублей, т.-е. половины цѣны площ. ACB, то линія, параллельная AB и дѣлящая весь участокъ земли на двѣ части равной цѣнности, должна проходить ниже EG. Пусть MN будетъ такою линіею (такъ что цѣна площади $AMNB$ пусть $= 4312\frac{1}{2}$ руб.); опредѣлимъ разстояніе ея $DP = x$ отъ AB.

Цѣна площади $ABNM = \frac{AB + MN}{2} \cdot DP \,.\, 3 =$ $\frac{100 + MN}{2} \cdot 3x$; и такъ какъ цѣна эта $= 4312\frac{1}{2}$ руб., то $\frac{3x(100 + MN)}{2} = \frac{8625}{2}$ или $3\,x(100 + MN) = 8625 \ldots$ (1).

Чтобы выразить MN чрезъ x, составляемъ пропорцію $\frac{MN}{AB} = \frac{CP}{CD}$ или $\frac{MN}{5} = \frac{80 - x}{4}$, откуда $MN = \frac{5}{4}(80 - x)$.

Вставляя эту величину въ ур-іе (1), послѣ различныхъ упрощеній получимъ ур-іе $x^2 - 160\,x + 2300 = 0$, одно изъ рѣшеній котораго, представляющее отвѣтъ на предложенный вопросъ, есть 15,97. (Другое рѣшеніе, хотя и положительно, вопросу не удовлетворяетъ, ибо искомое разстояніе должно быть меньше длины DL.)

---

235. Въ кругъ радіуса R такъ вписаны два правильныхъ треугольника, что при взаимномъ пересѣченіи ихъ сторонъ каждая изъ сторонъ раздѣлилась на три равныя части. Опредѣлить площадь внутренней фигуры, сторонами которой служатъ срединные отрѣзки сторонъ треугольниковъ.

Отв. $\frac{R^2}{2}\sqrt{3}$.

236. Треугольникъ, основаніе котораго $= 10$ фут., а площадь $= 60$ кв. фут., раздѣленъ на четыре равновеликія части тремя прямыми, параллельными основанію. Опредѣлить разстоянія каждой изъ этихъ прямыхъ отъ вершины треугольника.

Отв. 6 фут.; 8,48 ф.; 10,39 ф.

237. Въ равнобедренный треугольникъ, основаніе котораго $= a$ футамъ, вписанъ квадратъ, одна изъ сторонъ котораго лежитъ на основаніи треугольника; площадь квадрата составляетъ шестую часть площади треугольника. Опредѣлить высоту треугольника и сторону квадрата.

Рѣшеніе. Обозначая высоту треугольника чрезъ x, а сторону квадрата чрезъ y, составляемъ ур-ія:

$$\begin{cases} y^2 = {}^1/_6 \cdot \dfrac{ax}{2} \quad \text{или} \quad 1)\ y^2 = \dfrac{ax}{12} \\ \dfrac{y}{a} = \dfrac{x-y}{x} \quad \text{или} \quad 2)\ xy = ax - ay. \end{cases}$$

Исключивъ изъ этихъ ур-ій x, получаемъ кубичное неполное ур-іе $\dfrac{12y^3}{a} - 12y^2 + ay = 0$ или

$$y\left(\frac{12}{a}y^2 - 12y + a\right) = 0.$$

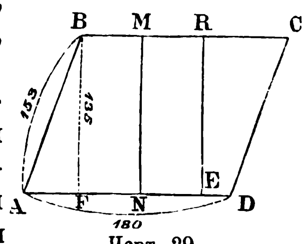
Корни этого ур-ія суть:

$$y_1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{6}\sqrt{6}, \qquad y_2 = \frac{a}{2} - \frac{a}{6}\sqrt{6}, \qquad y_3 = 0.$$

Подобнымъ же образомъ, исключая y изъ ур-ій (1) и (2), получаемъ для опредѣленія x, другое неполное кубичное ур-іе, корни котораго суть:

$$x_1 = 5a + 2a\sqrt{6}, \qquad x_2 = 5a - 2a\sqrt{6}, \qquad x_3 = 0.$$

238. Параллелограммъ $ABCD$, котораго высота $BE = 135$ фут., а стороны суть $AB = 153$ фут. и $AD = 180$ фут., нужно раздѣлить на три равновеликія части двумя прямыми, перпендикулярными къ AD. Насколько основанія N и E перпендикуляровъ должны быть удалены отъ вершины A?



Черт. 29.

Рѣшеніе. Замѣтивъ, что $\frac{1}{3}$ площ. $ABDC = \dfrac{135 \cdot 180}{3} =$

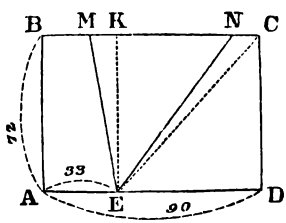
$= 8100$ кв. фут. и что площ. $ABF = \dfrac{BF \cdot AF}{2} =$

$= 135 . \frac{\sqrt{AB^2 - BF^2}}{2} = \frac{135 \,.\, 72}{2} = 4860$ кв. ф., т.-е. менѣе $^1/_3$ площ. $ABCD$, заключаемъ, что ни одна изъ двухъ линій, дѣлящихъ параллелограммъ требуемымъ образомъ, не можетъ проходить слѣва отъ FB. Пусть MN и RE буд. линіи, удовлетворяющія требованіямъ вопроса, такъ что площадь $ABMN =$ площ. $MNRE = {}^1/_3$ площ. $ABCD$. Будемъ имѣть:

1) $\frac{BF}{2}(AF + FN + BM) = {}^1/_3$ площ. $ABCD$ или $\frac{135}{2}(72 + 2\,NF) = 8190$, откуда $FN = 24$ и слѣдовательно $AN = AF + FN = 96$ фут.

2) $NE \,.\, MN = {}^1/_3$ площ. $ABCD$ или $135 \,.\, NE = 8100$, откуда $NE = 60$ и слѣдов. $AE = AN + NE = 156$ фут.

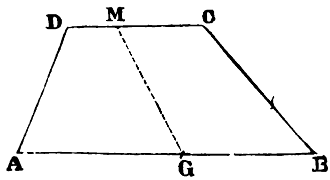
239. Прямоугольникъ $ABCD$, стороны котораго суть $AB = 72$ ф. и $AD = 90$ фут., долженъ быть раздѣленъ на три равновеликія части двумя прямыми, проведенными изъ точки E, отстоящей отъ вершины A на разстояніе $AE = 33$ фут. Опредѣлить разстоянія вершины C отъ тѣхъ двухъ точекъ, въ которыхъ требуемыя прямыя пересѣкутся со стороною CB.



Черт. 30.

Рѣшеніе. Проведя $EK \parallel AB$ и замѣтивъ, что площ. $ABKE = 72 \,.\, 33 = 2376$ квадр. фут., т.-е. болѣе $^1/_3$ площ. $ABCD$ (ибо $^1/_3$ площ. $ABCD = 2160$ квадр. фут.), заключаемъ, что одна изъ двухъ линій, выходящихъ изъ E и дѣлящихъ данный прямоугольникъ требуемымъ образомъ, должна проходить влѣво отъ EK. Пусть EM будетъ такою линіею, такъ что площ. $ABME = {}^1/_3$ площ. $ABCD = 2160$ кв. ф. и слѣдоват. $\triangle MKE = 2376 - 2160 = 216$ кв. фут. Такъ какъ $\triangle MKE = \frac{MK \,.\, KE}{2}$ или $\frac{72 \,.\, MK}{2} = 216$, то $MK = 6$ и $CM = CK + MK = 57 + 6 = 63$. Далѣе, соединивъ E съ C и замѣтивъ, что $\triangle MCE = \frac{63 \cdot 72}{2} = 2268$ (кв. ф.), т.-е. $> {}^1/_3$ площ. $ABCD$, заключ., что вторая изъ линій, удовлетворяющихъ требованіямъ вопроса, должна итти влѣво отъ EC. Пусть EN будетъ такою линіею, такъ что $\frac{MN \cdot KE}{2} =$ ${}^1/_3$ площ. $ABCD$ или $\frac{72 \cdot MN}{2} = 2160$, откуда $MN = 60$ (ф.); находимъ теперь $NC = CM - MN =$ $63 - 60 = 3$ (фут.).

240. Изъ двухъ параллельныхъ сторонъ трапеціи бóльшая $AB = 6$ метрамъ, меньшая $DC = 4{,}5$ метр. На сторонѣ DC дана точка M, положеніе которой опредѣлено длиною отрѣзка $DM = 1{,}3$ метра. Требуется чрезъ эту точку провести такую прямую, которая раздѣлила бы трапецію на двѣ равновеликія части.



Черт. 31.

Отв. $AG = 3{,}95$ метра. (Соединивъ точку G съ данною точкою M, получаемъ прямую MG, удовлетворяющую требованію).

241. Въ трапеціи $ABCD$ высота $BE = 45$ фут., одна изъ непараллельныхъ сторонъ $AB_1 = 51$ фут., параллельныя стороны суть $AD = 150$ фут. и $BC =$ 90 фут. Насколько вершина A удалена отъ точекъ пересѣченія N и F стороны AD съ тѣми двумя прямыми MN и FR, которыя, будучи перпендикулярными къ AD, дѣлятъ данную трапецію на три равновеликія части? *Отв.* $AN = 52$ фут., $AF = 92$ фут.

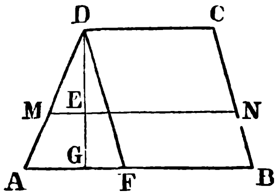
242. Длины параллельныхъ сторонъ трапеціи суть $BC = 20$ фут. и $AD = 30$ фут., площадь ея $= 400$ кв. ф. На какомъ разстояніи отъ меньшей изъ параллельныхъ сторонъ проходитъ линія, ей параллельная и дѣлящая площадь трапеціи на двѣ части, относящіяся какъ $2 : 3$?

Отв. На разст. $= 7{,}19$ фут.

Указаніе. Обозначивъ длину линіи, дѣлящей трапецію требуемымъ образомъ, чрезъ y, а разстояніе этой прямой отъ стороны BC — чрезъ x и проведя изъ точки B линію, параллельную сторонѣ CD, будемъ имѣть:

$$1)\quad (20+y)\frac{x}{2}=160;\qquad 2)\quad \frac{y-20}{30-20}=\frac{x}{16}.$$

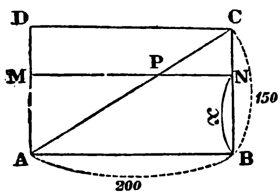
243. Участокъ земли въ видѣ трапеціи $ABCD$ состоитъ изъ треугольника ADF и параллелограмма $FDCB$.



Черт. 32.

Сторона $AB=60$ саж., стор. $DC=35$ саж. и высота $DG=40$ саж. Каждая квадратная сажень площади параллелограма стóитъ 5 рублей, квадр. сажень площади треугольника $3\frac{1}{2}$ рубля. На какомъ разстояніи x отъ стороны DC нужно провести ей параллельную линію MN, которая раздѣлила бы весь участокъ земли $ADCB$ на двѣ части равной стоимости? *Отв.* $x=DE=21{,}98$ саж.

244. Участокъ земли въ видѣ прямоугольника $ABCD$, котораго стороны суть $AB=200$ саж. и $BC=150$ саж.,



Черт. 33.

дѣлится діагональю на два участка земли разной цѣнности: каждая квадр. сажень площади ABC стóитъ 2 рубля, квадр. сажень площади ADC — 3 рубля. На какомъ разстояніи отъ AB должна проходить линія, ей параллельная и дѣлящая весь участокъ земли $ABCD$ на двѣ части равной цѣнности? *Отв.* $x=NB=82{,}42$ саж.

245. Опредѣлить стороны прямоугольнаго треугольника, у котораго периметръ $=2p$, а площадь $=m^2$.

Отв. Обозначая гипотенузу чрезъ x, одинъ изъ катетовъ чрезъ y, другой — чрезъ z, найдемъ:

$$x=\frac{p^2-m^2}{p},\quad y=\frac{p^2+m^2\pm\sqrt{(p^2+m^2)^2-8m^2p^2}}{2p},$$

$$z=\frac{p^2+m^2\mp\sqrt{(p^2+m^2)^2-8m^2p^2}}{2p}.$$

246. Гипотенуза прямоугольнаго треугольника $= m$, радіусъ вписаннаго круга $= r$. Опредѣлить оба катета и показать, что условіе возможности задачи есть $r \overline{\overline{<}} \frac{m}{2}(\sqrt{2}-1)$.

Рѣшеніе. Обозначимъ катеты треугольника чрезъ x и y. Соединивъ центръ вписаннаго круга съ вершинами треугольника, разбиваемъ послѣдній на три другихъ треугольника, сумма площадей которыхъ $\frac{r}{2}(x+y+m)$ равна площади искомаго треугольника. Такъ какъ, съ другой стороны, та же площадь можетъ быть выражена чрезъ $\frac{xy}{2}$, то получаемъ у-ріе $r(x+y+m)=xy$ или $x+y+m=\frac{xy}{r}$....... (1). Имѣемъ, кромѣ того, у-ріе $x^2+y^2=m^2$......... (2). Изъ (1) нах. $(x+y)^2 = \left(\frac{xy}{r}-m\right)^2$ или $x^2+y^2+2xy=\left(\frac{xy}{r}-m\right)^2$. Ур-ію этому, принявъ въ соображеніе (2), можно дать видъ $m^2+2xy=\frac{x^2y^2}{r^2}+\frac{2m}{r}xy+m^2$ или $2=\frac{xy}{r^2}-\frac{2m}{r}$, откуда $\frac{xy}{r}=(2r+m)$. Изъ этого ур-ія, обративъ вниманіе на ур-іе (1), получимъ $x+y=2r+m$. Рѣшая теперь ур-ія $x+y=2r+m$ и $x^2+y^2=m$ находимъ:

$$x=\frac{2r+m\pm\sqrt{m^2-4r(r+m)}}{2}$$

$$y=\frac{2r+m\mp\sqrt{m^2-4r(r+m)}}{2}.$$

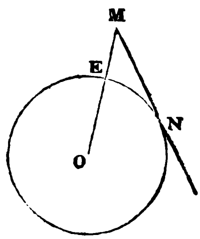
247. Опредѣлить сторону квадрата, равновеликаго неправильному многоугольнику, периметръ котораго равенъ 480 фут. и всѣ стороны котораго суть касательныя къ окружности, имѣющей радіусъ длиною въ 15 фут.

Отв. 60 фут.

248. По площади s правильнаго шестиугольника опредѣлить его периметръ.

Отв. Периметръ $= \sqrt{\dfrac{24\,s}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{2\,s\sqrt{3}}.$

249. Опредѣлить длины катетовъ прямоугольнаго треугольника по слѣдующимъ даннымъ: 1) отношеніе этихъ катетовъ $= 1^7/_8$; 2) гипотенуза треугольника = высотѣ трапеціи, длины параллельныхъ сторонъ которой суть 35 фут. и 55 фут.; 3) трапеція эта равновелика прямоугольнику, длины неравныхъ сторонъ котораго суть 18 фут. и 85 фут. *Отв.* 16 фут. и 30 фут.



Черт. 34.

250. Изъ точки M (черт. 34), отстоящей отъ окружности нѣкотораго круга на $ME = a$ метр., проведена къ этой окружности касательная MN длиною въ $2a$ метр. Опредѣлить площадь правильнаго вписаннаго въ кругъ треугольника. *Отв.* $\frac{27}{16}a^2\sqrt{3}.$

251. Длины двухъ линій, соединяющихъ средины катетовъ съ вершинами противоположныхъ угловъ треугольника суть a и b. Опредѣлить площадь треугольника.

Отв. $\frac{2}{15}\sqrt{(4a^2 - b^2)\,(4b^2 - a^2)}.$

252. Опредѣлить стороны прямоугольнаго треугольника, зная, что сумма его катетовъ превышаетъ длину гипотенузы на 4 метра и что площадь его = 30 кв. метр.

Отв. 13 метр., 12 метр. и 5 метр.

253. Опредѣлить сторону ромба, зная, что площадь его $= P$, а отношеніе его діагоналей $= m : n$.

Отв. $\sqrt{\dfrac{m^2 + n^2}{2mn} \cdot P}.$

ОТДѢЛЪ VI.

Длина окружности. Площадь круга.

Въ задачахъ **262** и **275** VI-го отдѣла число π принято $=3{,}1416$; во всѣхъ прочихъ числовыхъ задачахъ этого отдѣла π взято съ двумя десятичными знаками.

254 a). Какъ великъ радіусъ окружности, длина которой $= 15{,}7$ фут.? *Отв.* 2,5 фут.

254. Опредѣлить радіусъ круга, площадь котораго $=1$. *Отв.* 0,56.

254 b). Хорда, длиною въ 16 фут., отстоитъ отъ центра окружности на 6 фут. Опредѣлить 1) длину окружности, 2) площадь круга. *Отв.* 1) 62,8 фут., 2) 314 кв. ф.

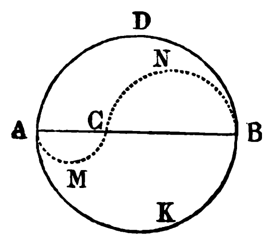
255. Изъ нѣкоторой точки окружности къ концамъ діаметра проведены двѣ хорды, длины которыхъ суть 1 метръ и 2,4 метр. Опредѣлить площадь круга. *Отв.* 5,3066 кв. метр.

256. Изъ нѣкоторой точки окружности къ концамъ діаметра проведены двѣ хорды, которыхъ длины суть a и b. Опредѣлить длину окружности. *Отв.* $\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

257. Площадь квадрата $= 29{,}16$ кв. фут. Опредѣлить площадь вписаннаго въ него круга. *Отв.* 22,8906 кв. ф.

258 Опредѣлить длину окружности круга, площадь котораго $=m$ кв. фут. *Отв.* $2\sqrt{\pi . m}$ фут.

259. Діаметръ AB (черт. 35) круга $ADBKA$, равный a, раздѣленъ въ точкѣ C такъ, что $AC = {}^1/_3\, AB$; на отрѣзкахъ AC и CB, какъ на діаметрахъ, описаны полуокружности AMC и CNB. Опредѣлить площадь каждой изъ фигуръ $AMCNBKA$ и $AMCNBDA$.



Черт. 35.

Отв. 1) $\frac{\pi}{6}a^2$; 2) $\frac{\pi}{12}a^2$.

260. Разность между площадями двухъ круговъ $= a$, разность между радіусами этихъ круговъ $= b$. Опредѣлить площадь каждаго изъ круговъ.

Отв. Площадь меньшаго круга $= \frac{(a - \pi b^2)^2}{4\pi b^2}$.

260 а). Если радіусъ круга увеличить на $a = 0{,}1$ фута, то площадь круга увеличится на $m = 6{,}28$ кв. фут. Опредѣлить радіусъ круга. *Отв.* Рад. $= \frac{m}{2\pi a} - \frac{a}{2} = 9{,}95$ фут.

261. Площадь круга $= M$. Насколько потребуется удлинить его радіусъ, чтобы увеличить площадь въ a разъ?

Отв. $\sqrt{\frac{M}{\pi}}\,(\sqrt{a} - 1)$.

261 а). Въ кругѣ, чрезъ конецъ его діаметра, проведена хорда длиною въ 20 фут. Проекція этой хорды на діаметръ составляетъ пятую часть діаметра. Опредѣлить площадь круга. *Отв.* 1570 кв. фут.

261 b). Въ кругѣ, радіусъ котораго $= 18$ фут., вписанъ уголъ въ 35^0. Какую длину имѣетъ дуга, на которую опирается этотъ уголъ? *Отв.* 21,98 фут.

261 с). Длина дуги, стягиваемой стороною правильнаго вписаннаго 15-угольника, равна 12,56 фут. Опредѣлить длину радіуса. *Отв.* 30 фут.

262. Какъ великъ центральный уголъ, длина дуги котораго равна радіусу? *Отв.* $57^0\,17'$.

263. Уголъ сектора $= 100^0$. Опредѣлить площадь этого сектора, зная, что его радіусъ $= 30$ дюйм. *Отв.* 785 кв. д.

264. Площадь сектора $= 6280$ кв. фут., а уголъ его $= 3'\,20''$. Опредѣлить радіусъ сектора. *Отв.* 3600 фут.

265. По площади сектора $= 6{,}28$ кв. ф. и его радіусу $= 10$ фут. опредѣлить уголъ сектора. *Отв.* $7^0\,12'$.

265 а). Опредѣлить площадь сегмента, зная, что соотвѣтствующая ему дуга содержитъ 90^0, а радіусъ ея $=$ 20 центиметр. *Отв.* 114 кв. центим.

265 b). Кругъ, радіусъ котораго $= R = 10$ дюйм., раздѣленъ на два сегмента хордой, равной сторонѣ вписаннаго квадрата. Опредѣлить площадь меньшаго изъ этихъ сегментовъ.

Отв. Иском. пл. $= \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 28{,}5$ кв. д.

265 c). Опредѣлить площадь сегмента, зная, что соотвѣтствующая ему дуга содержитъ 60^0, а радіусъ ея $= R$.

Отв. $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

266. Конецъ минутной стрѣлки часовъ въ теченіи n минутъ проходитъ дугу длиною въ b линій. Насколько стрѣлка эта длиннѣе другой минутной стрѣлки, конецъ которой въ теченіи m минутъ описываетъ дугу длиною въ a линій? *Отв.* На $\frac{30}{\pi} \cdot \frac{bm - an}{n \cdot m}$ линій.

266 a). Опредѣлить площадь кругового кольца, содержащагося между двумя концентрическими окружностями, изъ которыхъ одна имѣетъ радіусъ длиною въ 3,5 ф., а другая — въ 1,5 ф. *Отв.* 31,4 кв. ф.

266 b). Опредѣлить площадь кругового кольца, заключеннаго между двумя концентрическими окружностями, длины которыхъ суть $C = 40$ ф. и $C_1 = 22{,}8$ ф.

Отв. Иск. пл. $= \frac{C^2 - C_1^2}{4\pi} = 86$ кв. ф.

266 c). Въ правильный шестиугольникъ, сторона котораго $= a$, вписана окружность, и около него же описана окружность. Опредѣлить площадь кругового кольца, заключеннаго между этими окружностями. *Отв.* $\frac{\pi a^2}{4}$.

267. Площадь круга, имѣющаго радіусъ R, раздѣлить концентрическими окружностями на m равныхъ частей.

Отв. Радіусы послѣдоват. концетрич. окружностей суть:

$$R\sqrt{\frac{1}{m}},\ R\sqrt{\frac{2}{m}},\ R\sqrt{\frac{3}{m}}.$$

268. Площадь кругового кольца $= M$. Радіусъ бóльшей окружности $=$ длинѣ меньшей окружности. Опредѣлить радіусъ меньшей окружности.

Отв. $\sqrt{\frac{M}{\pi(4\pi^2 - 1)}}$.

269. По площади A бóльшаго изъ двухъ концентрическихъ круговъ и по отношенію $\frac{m}{n}$ ихъ радіусовъ опредѣлить площадь кольца, заключеннаго между окружностями этихъ круговъ. *Отв.* $\frac{A(m^2-n^2)}{m^2}$.

270. Проведены три концентрическихъ круга, изъ которыхъ бóльшій имѣетъ радіусъ R. Площадь меньшаго изъ нихъ и площади двухъ образовавшихся круговыхъ колецъ относятся между собою какъ $m:n:p$. Опредѣлить радіусы двухъ меньшихъ окружностей.

Отв. $R\sqrt{\frac{m}{m+n+p}}$; $R\sqrt{\frac{m+n}{m+n+p}}$.

271. Найти разность между площадью круга и площадью Q правильнаго вписаннаго въ этотъ кругъ шестиугольника. *Отв.* $Q\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-1\right)$.

272. Равнобедренный прямоугольный треугольникъ, площадь котораго $= 23{,}04$ кв. фут., вписанъ въ кругъ. Вокругъ этого круга описанъ квадратъ, сторона котораго равна сторонѣ правильнаго вписаннаго въ другой кругъ треугольника. Опредѣлить площадь этого второго круга. *Отв.* 96,4608 кв. ф.

273. Опредѣлить площадь круга, зная, что его дуга въ 120° стягивается хордою длиною въ a метровъ.

Отв. $\frac{1}{6}\pi a^2$ кв. м.

273 a). Въ кругѣ, длина окружности котораго $= C =$ 9,42 фут., по одну и ту же сторону центра, проведены двѣ параллельныя хорды, изъ которыхъ одна равна сторонѣ правильнаго треугольника, а другая — сторонѣ правильнаго шестиугольника. Опредѣлить площадь части круга, содержащейся между хордами.

Отв. Иск. пл. $= \frac{C^2}{24\pi} = 1{,}1775$ кв. ф.

273 b). Въ кругѣ радіуса R, по разныя стороны центра, проведены двѣ параллельныя хорды, изъ которыхъ одна равна сторонѣ правильнаго треугольника, а другая — сторонѣ правильнаго шестиугольника. Опредѣлить площадь части круга, содержащейся между хордами.

Отв. $\frac{(\pi+\sqrt{3})R^2}{2}$.

273 c). Разстояніе центровъ двухъ пересѣкающихся окружностей, имѣющихъ одинаковый радіусъ R, равно ихъ радіусу. Опредѣлить площадь общей части круговъ.

Отв. $\frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{6}$.

274. Опредѣлить сторону ромба, зная, что она равна меньшей изъ его діагоналей и что площадь этого ромба равна площади круга радіуса R.

Отв. $R\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$.

274 а). Къ окружности круга, площадь котораго $=$ 314 кв. ф., изъ внѣшней точки A проведены двѣ касательныя AB и AC, и точки касанія B и C соединены съ центромъ круга O. Площадь составившагося четыреугольника $ABOC = 120$ кв. ф. Опредѣлить длину касательныхъ. *Отв.* $AB = AC = 12$ ф.

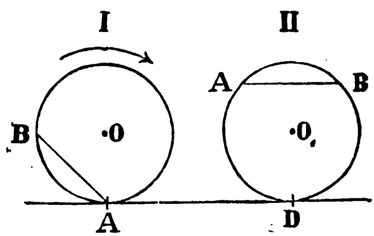
275. Въ кругѣ, площадь котораго $= 31{,}416$ кв. ф., вписанъ прямоугольникъ. Опредѣлить длины сторонъ этого прямоугольника, зная, что площадь его $= 12$ кв. фут.

Отв. 2 фут. и 6 фут.

276. Площадь прямоугольнаго треугольника $= 0{,}54$ кв. фут., сумма его катетовъ $= 2{,}1$ фут. Опредѣлить площадь круга, описаннаго около этого треугольника.

Отв. 1,76625 кв. ф.

277. Хорда AB окружности O, имѣющей радіусъ въ 10 дюйм., составляетъ съ касательною AD къ этой окружности острый уголъ въ 27°. Катясь по касательной, окружность изъ положенія (I) переходитъ въ положеніе (II) такъ, что хорда AB становится параллельною касательной. Опредѣлить длину прямой AD.



Черт. 36.

Отв. 26,69 дюйм.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ОТДѢЛЪ VII.

Прямыя линіи и плоскости въ пространствѣ.

278. Опредѣлить разстояніе точки отъ плоскости, зная, что разстоянія этой точки отъ двухъ точекъ, данныхъ на плоскости, суть 221 фут. и 29 фут. и что проэкціи этихъ двухъ разстояній на упомянутую плоскость относятся между собою какъ 11 : 1. *Отв.* 21 фут.

279. Разстоянія двухъ точекъ A и B отъ плоскости соотвѣтственно равны 28,5 фут. и 9,6 фут.; проэкція линіи, соединяющей эти точки, на ту же плоскость равна 34 фут. Опредѣлить разстояніе точекъ A и B. *Отв.* 38,9 фут.

280. Въ вершинѣ прямого угла прямоугольнаго треугольника возставленъ перпендикуляръ къ плоскости треугольника, имѣющій длину въ c метровъ; вершина этого перпендикуляра отстоитъ отъ одного конца гипотенузы на a метровъ, а отъ другого на b метровъ. Опредѣлить длину гипотенузы.

Отв. $\sqrt{a^2+b^2-2c^2}$.

281. Изъ центра круга, описаннаго около правильнаго треугольника, возставленъ перпендикуляръ къ плоскости круга; длина перпендикуляра$=a$, а разстояніе его вершины отъ одной изъ вершинъ треугольника равно b. Опредѣлить площадь треугольника.

Отв. $\frac{3}{4}(b^2-a^2)\sqrt{3}$.

282. На линію DE, имѣющую длину$=a$ и параллельную данной плоскости, опущенъ изъ нѣкоторой точки A перпендикуляръ, длина котораго $=p$; продолженіе этого перпендикуляра отъ прямой DE до плоскости имѣетъ длину$=q$. На какомъ разстояніи находятся между собою точки пересѣченія данной плоскости съ двумя прямыми, изъ коихъ одна проведена чрезъ точки A и D, а другая чрезъ точки A и E?

Отв. $\frac{a(p+q)}{p}$.

283. Изъ точки, которой разстояніе отъ плоскости $= a$, проведена къ этой плоскости линія, составляющая съ плоскостью уголъ въ 45^0. Опредѣлить длину это линіи.

Отв. $a\sqrt{2}$.

284. Двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости $PRQS$ и $PMNQ$ пересѣкаются по линіи RQ; между сторонами образовавшагося двуграннаго угла содержится прямая AB, пересѣкающая плоскость $PRQS$ въ точкѣ A, а плоскость $PMNQ$ въ точкѣ B. Длина перпендикуляра AC, опущеннаго изъ точки A на линію RQ, равна $a = 16$ дюйм.; длина перпендикуляра BD, опущеннаго изъ точки B на ту же линію RQ, равна $b = 12$ дюйм.; разстояніе DC между точками D и C равно $c = 21$ дюйм. Опредѣлить длину линіи AB.

Отв. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 29$ дюйм.

285. Изъ точки A, лежащей на плоскости MN, опущенъ перпендикуляръ AC на параллельную MN плоскость PQ, имѣющій длину $= a$. Изъ точки B, находящейся на той же плоскости MN, проведена къ плоскости PQ наклонная линія BD, пересѣкающая плоскость PQ въ точкѣ D; проекція этой наклонной на плоскость PQ перпендикулярна къ линіи CD. Разстояніе между A и B равно c, разстояніе между C и D равно b. Опредѣлить длину наклонной BD.

Отв. $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

286. Линія BE, соединяющая вершины B и E двухъ прямыхъ угловъ CBA и FED съ параллельными сторонами, обращенныхъ въ одну сторону, перпендикулярна къ плоскостямъ этихъ прямыхъ угловъ и имѣетъ длину $= c$. На сторонѣ BC перваго изъ этихъ угловъ, начиная отъ его вершины, отложена часть $BM = a$, а на сторонѣ ED второго угла, непараллельной первой, отложена часть $EK = b$. Опредѣлить разстояніе между точками K и M. *Отв.* $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

287. Три прямыя AB, AC и AD, выходящія изъ одной и той же точки A, образуютъ между собою углы: $BAC = 102^0$, $CAD = 75^0$ и $BAD = 120^0$. Узнать, лежатъ ли эти три прямыя всѣ въ одной плоскости или въ разныхъ плоскостяхъ.

Отв. Въ разныхъ.

ОТДѢЛЪ VIII.

Тѣла многогранныя.

288. Зная единичныя отношенія линейныхъ мѣръ метрической системы, найти, сколько въ кубическомъ метрѣ содержится кубич. дециметровъ, кубич. сантиметровъ, кубич. миллиметровъ. Сколько въ кубич. дециметрѣ содержится кубич. сантиметровъ, кубич. миллиметровъ? Сколько въ кубич. сантиметрѣ содержится кубич. миллиметровъ?

Отв. Куб. метр.		Куб. децим. (литръ)		Куб. сантим.		Куб. миллим.
1	=	1000	=	1000000	=	1000000000
		1	=	1000	=	1000000
				1	=	1000

Замѣчаніе. При рѣшеніи многихъ вопросовъ встрѣчается надобность въ умѣньи вычислять вѣсъ тѣла по его удѣльному вѣсу и объему, или рѣшать обратный вопросъ — вычислять объемъ по вѣсу и удѣльному вѣсу тѣла. Полагая нужнымъ требовать отъ учащихся знакомства съ такими вычисленіями, мы приводимъ въ ряду нижепомѣщаемыхъ задачъ нѣсколько примѣровъ на вычисленія подобнаго рода. Для вычисленій этихъ служитъ формула

$$P = \triangle \,.\, V \,.\, d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

гдѣ P — вѣсъ тѣла, d — его удѣльный вѣсъ, V — объемъ и $\triangle$ — вѣсъ кубической единицы воды. (Здѣсь замѣтимъ, что если V выражено въ куб. дюймахъ, то $\triangle = 3{,}84$ золотник. $= {}^1/_{25}$ фунта; если же V выражено въ куб. футахъ, то $\triangle = 69{,}12$ фунт.). Въ случаѣ метрической системы мѣръ, гдѣ за единицу вѣса принимается *граммъ* (вѣсъ кубич. сантиметра чистой воды при температурѣ 4° Цельзія) или *килограммъ* ($= 1000$ грамм. $= 2{,}44$ русск. фунт.), формула упрощается. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ по этой системѣ, по вышесказанному, вѣсъ единицы объема воды принимается за единицу вѣса, то $\triangle = 1$, и слѣдов.

$$P = V \,.\, d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

при чемъ P выразится: 1) въ граммахъ, если V выражено въ кубич. сантиметрахъ, 2) въ килограммахъ, если V выражено въ литрахъ (куб. дециметр.), и 3) въ тысячахъ килограммовъ, если V выражено въ кубич. метрахъ.

Подобно тому какъ десятичнымъ умноженіемъ и дѣленіемъ метра получена цѣлая скала линейныхъ мѣръ, — десятичное умноженіе и дѣленіе грамма доставляетъ цѣлую скалу мѣръ вѣса, отъ единицъ, удобныхъ для выраженія величины тяжелыхъ грузовъ, до мелкихъ единицъ, пригодныхъ для химическихъ взвѣшиваній.

---

289. Длина, ширина и высота прямоугольнаго параллелепипеда относятся между собою какъ $5:3:1$; полная поверхность его $=2254$ кв. дюйм. Опредѣлить длину каждаго изъ трехъ его измѣреній. *Отв.* 35 дюйм., 21 дюйм., 7 дюйм.

290. Измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда относятся между собою какъ $m:n:p$; объемъ его $=V$. Опредѣлить длину каждаго изъ трехъ измѣреній.

Отв. $\sqrt[3]{\frac{m^2 \,.\, V}{np}}$; $\sqrt[3]{\frac{n^2\, V}{mp}}$; $\sqrt[3]{\frac{p^2\, V}{mn}}$.

291. Измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда пропорціональны числамъ $^2/_3$, $^4/_5$ и $^3/_4$; объемъ его $=2$ кубич. метрамъ. Вычислить длину каждаго изъ трехъ измѣреній параллелепипеда съ точностью до 1 сантиметра.

Отв. 1) $^2/_3\,\sqrt[3]{5}=1{,}14$ метра; 2) $^4/_5\,\sqrt[3]{5}=1{,}37$ метра;
3) $^3/_4\,\sqrt[3]{5}=1{,}28$ метра.

292. Длины діагоналей трехъ сходящихся сторонъ прямоугольнаго параллелепипеда суть a, b и c. Опредѣлить полную поверхность параллелепипеда.

Отв. $\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}+\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}+\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$.

293. Кусокъ льда въ формѣ прямоугольнаго параллелепипеда плаваетъ въ морской водѣ. Длина вертикальнаго ребра параллелепипеда $=10{,}5$ метра, длины двухъ другихъ его измѣреній суть 15,75 метра и 20,45 метра. Удѣльный вѣсъ льда при 0° есть 0,93; удѣл. вѣсъ морской воды $=1{,}026$. Насколько кусокъ льда погруженъ въ воду? *Отв.* На 95,17 дециметр.

Указаніе. Такъ какъ, по закону плаванія, вѣсъ воды, взятой въ объемѣ погруженной части плавающаго тѣла, равенъ вѣсу всего плавающаго тѣла, то имѣемъ ур-іе

$$x \,.\, 204{,}5 \,.\, 157{,}5 \,.\, 1{,}026 = 20{,}45 \,.\, 157{,}5 \,.\, 105 \,.\, 0{,}93,$$

гдѣ x — длина (въ дециметрахъ) погруженной части вертикальнаго ребра.

294. Изъ вещества, удѣльный вѣсъ котораго $=d$, приготовленъ брусокъ, плавающій въ водѣ и имѣющій форму прямоугольнаго параллелепипеда. Длина вертикальнаго ребра параллелепипеда $=b$, длины двухъ другихъ его измѣреній суть a и l. Вѣсъ бруска $=p$; вѣсъ кубич. единицы воды $=\Delta$. Насколько брусокъ погруженъ въ воду?

Отв. Длина погруж. части ребра $= \dfrac{p}{a\,.\,l\,.\,\Delta}$.

295. Металлическій брусъ въ формѣ прямоугольнаго параллелепипеда при 0^0 температуры имѣетъ объемъ V_0. Коэффиціентъ линейнаго расширенія металла $=k$. Найти объемъ V_t бруска при t^0 температуры.

Рѣшеніе. Пусть будутъ a, b и c — длины трехъ измѣреній параллелепипеда при O^0; объемъ V_t при t^0 будетъ $V_t = a\,(1 + kt)\;.\;b\,(1 + kt)\;.\;c\,(1 + kt) = abc\,(1 + kt)^3 = V_0\,(1 + kt)^3 = V_0\,(1 + 3kt + 3k^2t^2 + k^3t^3)$. Пренебрегая членами, содержащими вторую и третью степени k (весьма мал. дроб.), можемъ принять $V_t = V_0\,(1 + 3kt)$, откуда видно, что $3k =$ коэффиціенту кубическаго расширенія взятаго металла.

296. По боковому ребру l и объему V прямой призмы съ квадратнымъ основаніемъ вычислить: 1) сторону основанія, 2) боковую поверхность и 3) полную поверхность призмы.

Отв. 1) Сторон. основ. $= \sqrt{\dfrac{V}{l}}$; 2) бок. пов. $= 4\sqrt{l\,.\,V}$;

3) полн. поверхн. $= \dfrac{2V}{l} + 4\sqrt{l\,.\,V}$.

297. Опредѣлить стороны квадратнаго основанія прямой призмы, зная, что полная поверхность ея $= 512$ кв. метр., а высота $= 12$ метр. *Отв.* 8 метр.

298. По площади основанія P и объему V прямой призмы съ квадратнымъ основаніемъ вычислить ея полную поверхность.

Отв. $2P + \dfrac{4V}{\sqrt{P}}$.

299. Длины сторонъ прямоугольнаго основанія прямой призмы суть 25 и 14 метр.; поверхность ея $= 1714$ кв. метр, Опредѣлить: 1) боковую поверхность, 2) боковое ребро, 3) объемъ призмы.

Отв. 1) 1014 кв. метр.; 2) 13 метр.; 3) 4550 куб. м.

300. Полная поверхность прямоугольнаго параллелепипеда$=3932$ квадр. фут., объемъ его$=16632$ куб. фут., длина одной изъ сторонъ основанія$=28$ ф. Вычислить: 1) длину другой стороны основанія, 2) боковое ребро и 3) боковую поверхность параллелепипеда.

Отв. 1) 22 ф.; 2) 27 ф.; 3) 2700 кв. ф. или:
1) 27 ф.; 2) 22 ф.; 3) 2420 кв. ф.

301. Боковая поверхность прямоугольнаго параллелепипеда, имѣющаго боковое ребро длиною въ 25 футовъ, равна 3000 квадр. фут.; объемъ его$=22275$ кубич. фут. Вычислить: 1) полную поверхность параллелепипеда и 2) длины сторонъ прямоугольника, служащаго основаніемъ параллелепипеда.

Отв. 1) 4782 квадр. ф.; 2) 33 фут. и 27 фут.

302. Полная поверхность прямоугольнаго параллелепипеда$=1112$ квадр. фут., а боковая$=728$ квадр. фут.; объемъ его$=2496$ кубич. фут. Вычислить: 1) длину бокового ребра параллелепипеда и 2) длины сторонъ прямоугольника, служащаго основаніемъ параллелепипеда.

Отв. 1) 13 ф.; 2) 16 ф. и 12 ф.

303. Полная поверхность прямой призмы съ квадратнымъ основаніемъ$=P$ квадр. фут., высота призмы на b фут. болѣе стороны основанія. Опредѣлить сторону основанія и высоту призмы.

$$\text{Отв.}\left\{\begin{array}{l}\text{Стор. основ. призмы} = \dfrac{-2b+\sqrt{2(2b^2+3P)}}{6}.\\[2ex] \text{Высота призмы} = \dfrac{4b+\sqrt{2(2b^2+3P)}}{6}\end{array}\right.$$

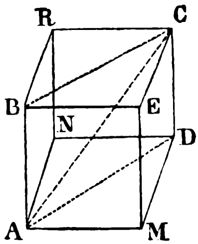
304. Опредѣлить сторону квадратнаго основанія и высоту прямой призмы, зная, что высота на 5 фут. болѣе стороны основанія и что полная поверхность призмы$=800$ кв. фут.

Отв. Стор. основ.$=10$ фут.; высота$=15$ фут.

305. Объемъ куба составляетъ $\frac{m}{n}$ объема другого куба, имѣющаго ребро a. Опредѣлить ребро перваго куба.

Отв. $a\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$.

306. Въ кубѣ $ANDMECRB$ (черт. 37) проведено сѣченіе $ABCD$, площадь котораго $=P$. Опредѣлить: 1) ребро куба, 2) діагональ AD основанія, 3) діагональ AC куба, 4) поверхность и 5) объемъ куба.



Черт. 37.

Отв. 1) $\sqrt{\frac{P\sqrt{2}}{2}}$; 2) $AD=\sqrt{P\sqrt{2}}$; 3) $AC=\sqrt{\frac{3}{2}P\sqrt{2}}$; 4) $3P\sqrt{2}$; 5) $\frac{P}{2}\sqrt{P\sqrt{2}}$.

307. Изъ металла, удѣльный вѣсъ котораго $=d$, вылито тѣло, вѣсящее въ воздухѣ p килограммовъ и имѣющее форму куба. Опредѣлить ребро куба и вѣсъ тѣла въ водѣ.

Отв. 1) $\sqrt[3]{\frac{p}{d}}$ дициметр.; 2) $\frac{p}{d}(d-1)$ килограмм.

308. Обозначая удѣльный вѣсъ желѣза чрезъ d, а вѣсъ кубической единицы воды чрезъ Δ, найти выраженіе вѣса массивнаго желѣзнаго куба, котораго полная поверхность $=S$

Отв. $d\Delta\sqrt{\left(\frac{S}{6}\right)^3}$.

309. Опредѣлить объемъ куба, у котораго полная поверхность равна полной поверхности прямоугольнаго параллелепипеда, имѣющаго измѣренія m, n и p.

Отв. $\sqrt{{}^1/_{27}(mn+mp+np)^3}$.

310. Полная поверхность одного куба$=S$, полная поверхность другого$=S_1$. Въ какомъ отношеніи находятся объемы этихъ кубовъ? *Отв.* $\sqrt{S^3}:\sqrt{S_1^3}$.

311. Сумма ребра одного куба съ ребромъ другого$=12$ фут.; сумма объемовъ этихъ кубовъ$=468$ куб. фут. Опредѣлить длину ребра каждаго изъ кубовъ. *Отв.* 5 фут. и 7 фут.

312. Опредѣлить полную поверхность прямой призмы, у которой боковое ребро $= 12$ вершк., а основаніемъ служитъ правильный треугольникъ, имѣющій сторону $a = 3$ вершк.

Отв. $3ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 115{,}794$ кв. вершк.

313. По боковой поверхности S_1 и полной поверхности S прямой призмы, у которой основаніемъ служитъ правильный треугольникъ, опредѣлить: 1) сторону основанія, 2) боковое ребро и 3) объемъ призмы.

Отв. $\begin{cases} 1)\ \sqrt{\frac{2(S-S_1)}{\sqrt{3}}} = \sqrt{{}^2/_3 (S-S_1)\sqrt{3}}; \\ 2)\ \frac{S_1}{\sqrt{6(S-S_1)\sqrt{3}}};\quad 3)\ \frac{S_1(S-S_1)}{2\sqrt{6(S-S_1)\sqrt{3}}}. \end{cases}$

314. Объемъ прямой призмы, у которой основаніемъ служитъ правильный треугольникъ, равенъ V; высота призмы относится къ сторонѣ основанія какъ $m : n$. Опредѣлить высоту призмы.

Отв. $\sqrt[3]{\frac{4m^2 V\sqrt{3}}{3n^2}}$.

315. Основаніемъ прямой треугольной призмы, имѣющей объемъ $= 6000$ куб. дюйм., служитъ прямоугольный $\triangle$-къ, котораго катеты относятся между собою какъ $5 : 12$; отношеніе гипотенузы этого $\triangle$-ка къ высотѣ призмы $= 13 : 25$. Опредѣлить длины реберъ призмы.

Отв. 10; 24; 26 и 60 (дюйм.).

316. Опредѣлить объемъ правильной десятиугольной призмы, у которой боковою стороною служитъ квадратъ, имѣющій площадь $= Q$.

Отв. $\frac{5}{2}Q\sqrt{Q(5+2\sqrt{5})}$.

317. Полная поверхность правильной шестиугольной призмы $= S$; сторона основанія этой призмы $= a$. Опредѣлить высоту призмы.

Отв. $\frac{S - 3a^2\sqrt{3}}{6a}$.

318. Полная поверхность правильной шестиугольной призмы $= S$. Высота призмы $=$ сторонѣ основанія. Опредѣлить высоту.

Отв. $\sqrt{\dfrac{S}{3(2+\sqrt{3})}}$.

319. Площади боковыхъ сторонъ прямой треугольной призмы суть m, n, e; боковое ребро ея $= l$. Опредѣлить объемъ призмы.

Отв. $\dfrac{1}{4l}\sqrt{(m+n+e)\ (m+n-e)\ (m+e-n)\ (n+e-m)}$.

320. Площади боковыхъ сторонъ прямой треугольной призмы суть 25 квадр. фут., 29 квадр. фут. и 36 квадр. фут.; площадь ея основанія $= 10$ квадр. фут. Вычислить объемъ призмы. *Отв.* 60 кубич. фут.

321. Сторона правильнаго треугольника, служащаго основаніемъ прямой призмы, равна a; боковое ребро призмы также $= a$. Чрезъ средину M одного изъ боковыхъ реберъ и средины N и R тѣхъ двухъ сторонъ нижняго основанія, которыя сходятся съ этимъ боковымъ ребромъ въ вершинѣ одного и того же триграннаго угла, проведена плоскость. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія MNR. *Отв.* $\dfrac{a^2}{16}\sqrt{7}$.

322. По сторонѣ a основанія и высотѣ h правильной треугольной пирамиды опредѣлить: 1) боковое ребро пирамиды, 2) ея апоѳему, 3) боковую поверхность и 4) объемъ.

Отв. 1) $\sqrt{\dfrac{a^2+3h^2}{3}}$; 2) $\sqrt{h^2+\dfrac{a^2}{12}}$; 3) $\dfrac{3a}{4}\sqrt{\dfrac{a^2+12h^2}{3}}$;

4) $\dfrac{a^2h}{12}\sqrt{3}$.

323. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $= m$, апоѳема ея $= n$. Опредѣлить: 1) боковую поверхность, 2) объемъ пирамиды.

Отв. 1) $3n\sqrt{m^2-n^2}$; 2) $\frac{1}{3}(m^2-n^2)\sqrt{n^2-m^2}$.

324. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды, зная, что высота треугольника, служащаго ея основаніемъ, $= h$ и что апоѳема пирамиды $= a$.

Отв. $\dfrac{\sqrt{3}}{27}h^2\sqrt{9a^2-h^2}$.

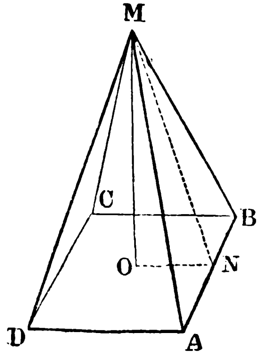
325. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды $= b = 3{,}17$ фут., сторона многоугольника, служащаго ея основанiемъ, $= a = 0{,}75$ фут. Опредѣлить высоту пирамиды.

Отв. $\sqrt{(b+n)(b-a)} = 3{,}08$ фут.

326. Боковая поверхность правильной четыреугольной пирамиды равна 20 кв. метр.; высота пирамиды $= 1{,}5$ метр. Опредѣлить сторону основанiя. *Отв.* 4 метра.

Рѣшенiе. Обозначая сторону квадрата, служащаго основанiемъ (черт. 38), чрезъ x, апоѳему NM — чрезъ y, имѣемъ:

$$\begin{cases} 1)\ 20 = \dfrac{4x \,.\, y}{2} \quad \text{или} \quad xy = 10. \\ 2)\ y^2 = 2{,}25 + \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$



Черт. 38.

327. Какъ относятся между собою объемы правильныхъ шестиугольной и восьмиугольной пирамидъ, основанiя которыхъ вписаны въ одинъ и тотъ же кругъ и высоты которыхъ равны сторонамъ соотвѣтствующихъ основанiй?

Отв. $V_6 : V_8 = 1 : \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}(2-\sqrt{2})} = 9 : 4\sqrt{6\,(2-\sqrt{2})}$.

328. Общимъ основанiемъ прямой пирамиды и прямой призмы, имѣющихъ также общую высоту, служитъ правильный многоугольникъ, апоѳема котораго $= \alpha$; боковая поверхность призмы въ n разъ болѣе боковой поверхности пирамиды. Опредѣлить высоту.

Отв. $\dfrac{n.\alpha}{\sqrt{4-n^2}}$.

329. Общимъ основанiемъ прямой призмы и прямой пирамиды, имѣющихъ также общую высоту, служитъ правильный многоугольникъ. Радiусъ круга, вписаннаго въ этотъ многоугольникъ, $=$ 6 дюймамъ. Зная, что площадь боковой стороны призмы въ $1\,{}^3/_5$ раза болѣе площади боковой стороны пирамиды, опредѣлить упомянутую высоту. *Отв.* 8 дюймовъ.

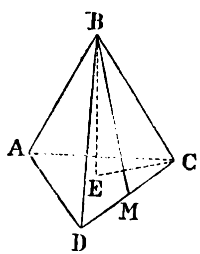
330. Кусокъ дерева имѣетъ видъ пирамиды, у которой высота $= h$, а сторона квадратнаго основанiя $= a$. Изъ этого куска вырѣзывается внутренняя часть, и образовавшаяся пустота наполняется металломъ. Вѣсъ такимъ образомъ получившагося тѣла, состоящаго изъ дерева и металла, оказывается равнымъ p. Удѣльный вѣсъ дерева $= d$, удѣльный вѣсъ металла $= d_1$, вѣсъ кубической единицы воды $= \Delta$. Опредѣлить объемъ металла.

Отв. $\dfrac{3p - d\Delta h a^2}{3\Delta(d_1 - d)}$.

331. Правильная восьмиугольная пирамида, у которой сторона основанія $= a$, усѣчена плоскостью, проходящею чрезъ средину высоты параллельно основанію. Опредѣлить площадь сѣченія. (См. 204-ую задачу въ V отд.).

Отв. $\dfrac{a^2}{2}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{a^2}{2}(1 + \sqrt{2})$.

332. Высота пирамиды $= h$. Выразить чрезъ h разстояніе вершины пирамиды отъ той плоскости, которая, будучи параллельною основанію, дѣлитъ пирамиду пополамъ. *Отв.* $h : \sqrt[3]{2}$.



Черт. 39.

333. По ребру a правильнаго тетраэдра опредѣлить объемъ и поверхность тетраэдра.

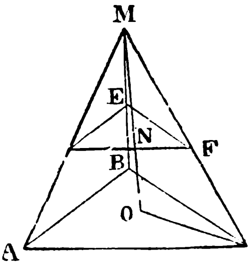
Рѣшеніе. Такъ какъ $AC = DC = AD = a$, то площ. $ACD = \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Изъ прямоугольнаго $\triangle\ EBC$ имѣемъ $BE = \sqrt{BC^2 - EB^2} = \sqrt{a^2 - EC^2}$ и такъ какъ $a = EC\sqrt{3}$, откуда $EC = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, то $BE = \sqrt{\dfrac{2a^2}{3}} = a\sqrt{2/3}$.

Иском. объемъ V тетраэдра будетъ имѣть выраженіемъ

$$V = \triangle\ ADC \cdot \frac{BE}{3} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

Замѣтивъ, что апоѳема BM тетраэдра $= \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$, находимъ, что боковая поверхность тетраэдра $= \dfrac{3a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\sqrt{3} = \dfrac{3a^2}{4}\sqrt{3}$ и слѣдовательно полная его поверхность $S = \dfrac{3a^2}{4}\sqrt{3} + \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$.

334. Радіусъ круга, описаннаго около основанія правильнаго тетраэдра, $=\rho$. На какомъ разстояніи отъ вершины тетраэдра нужно провести плоскость, параллельную основанію тетраэдра, для того, чтобы она раздѣлила послѣдній на двѣ равновеликія части?



Черт. 40.

Рѣшеніе. Пусть OM — высота тетраэдра, $OC=\rho$ — радіусъ круга, описаннаго около треуг. ABC; DEF — требуемое сѣченіе; искомое разстояніе MN обозначимъ чрезъ x. Каждая сторона треугольн. ABC равна $\rho\sqrt{3}$, слѣдов. площадь его $\triangle=\frac{3\rho^2}{4}\sqrt{3}$, и такъ какъ высота $MO=\sqrt{MC^2-OC^2}=$ $=\sqrt{(\rho\sqrt{3})^2-\rho^2}=\rho\sqrt{2}$, то объемъ V тетраэдра будетъ имѣть выраженіемъ $V=\frac{3}{4}\rho^2\sqrt{3}\,\frac{\rho\sqrt{2}}{3}=\frac{\rho^3}{4}\sqrt{6}$. Обозначивъ объемъ пирамиды $MDEF$ чрезъ V_1, изъ ур-ія $\frac{V_1}{V}=\frac{MN^3}{MO^3}=\frac{x^3}{(\rho\sqrt{2})^3}$ получаемъ $V_1=V\cdot\frac{x^3}{(\rho\sqrt{2})^3}$. Но, по условію, $V_1=\frac{V}{2}$; слѣдов. $\frac{1}{2}=\frac{x^3}{(\rho\sqrt{2})^3}$ или $x^3=\frac{\rho^3\sqrt{8}}{2}=\rho^3\sqrt{2}$, откуда $x=\rho\sqrt[6]{2}$.

335. Кусокъ мрамора въ формѣ правильнаго тетраэдра требуется разсѣчь на такія двѣ части, чтобы меньшая по вѣсу составляла $^1/_{63}$ долю бо́льшей. Какъ провести плоскость разрѣза?

Рѣшеніе. Если требуется разсѣчь мраморный тетраэдръ такъ, чтобы меньшая часть составляла по вѣсу $^1/_{63}$ долю большей, то это значитъ — нужно отсѣчь кусокъ въ $^1/_{64}$ долю вѣса всего тетраэдра. Такъ какъ вѣса однородныхъ тѣлъ относятся какъ объемы этихъ тѣлъ, а объемы подобныхъ пирамидъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ реберъ, то разсѣкающая плоскость должна проходить чрезъ ту точку каждаго ребра, которая удалена отъ вершины тетраэдра на одну четверть длины ребра (кубъ 4-хъ есть 64).

336. Пирамида дѣлится на n равновеликихъ частей сѣченіями, параллельными основанію. Зная, что одна изъ сторонъ ея основанія $= a$, опредѣлить стороны сѣченій, сходственныя съ a.

Отв. $a\sqrt[3]{\frac{1}{n}}$; $a\sqrt[3]{\frac{2}{n}}$; $a\sqrt[3]{\frac{3}{n}}$; и т. д.

337. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольникъ, смежныя стороны котораго суть a и b; каждое изъ боковыхъ реберъ пирамиды $= c$. На какомъ разстояніи отъ вершины пирамиды должно провести плоскость параллельную основанію для того, чтобы пирамида раздѣлилась на двѣ равновеликія части?

Отв. $x = \frac{\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}}{2\sqrt[3]{2}}$.

338. Кусокъ дерева въ формѣ пирамиды, у которой площадь основанія содержитъ 27 кв. дециметровъ, вѣситъ 46,008 килограмм.; удѣльный вѣсъ дерева $= 0{,}852$. На какихъ разстояніяхъ отъ вершины пирамиды должны быть проведены два сѣченія, параллельныя основанію, для того, чтобы этими сѣченіями отрѣзать отъ пирамиды такую часть, которой объемъ равнялся бы 30 куб. дециметрамъ и которой высота была бы $= 4$ децим.?

Отв. Искомое разстояніе меньшаго изъ сѣченій $= -2 + \sqrt{26/3} = 0{,}94$ децим.; разст. большаго $= 2 + \sqrt{26/3} = 4{,}92$ децим.

Рѣшен. Объемъ данн. пирам. $= \frac{46{,}008}{0{,}852} = 54$ куб. децим.; и такъ какъ площадь ея основ. $= 27$ кв. децим., то высота пирамиды $= \frac{54 \cdot 3}{27} = 6$ децим. Разстояніе верш. пирамиды отъ меньш. изъ сѣченій обозначимъ чрезъ x, разстоян. верш. отъ большаго изъ сѣчен. выразится тогда чрезъ $x + 4$; назовемъ чрезъ V_2 объемъ той пирамиды, у которой основаніемъ служитъ меньшее сѣченіе, а высота $= x$, чрезъ V_1 — объемъ той, у которой основ. служитъ большее сѣченіе, а высота $= x + 4$. Будемъ имѣть:

$$\frac{54}{V_2} = \frac{6^3}{x^3}, \text{ отк. } V_2 = \frac{x^3}{4}; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{(x+4)^3}{x^3} \text{ или } \frac{V_1 - V_2}{V_2} =$$

$= \frac{(x+4)^3 - x^3}{x^3}$; но $V_1 - V_2 = 30$ куб. децим., слѣдов. $30 : \frac{x^3}{4} = \frac{(x+4)^3 - x^3}{x^3}$ или $\frac{120}{x^3} = \frac{(x+4)^3 - x^3}{x^3}$ или $120 = (x^3 + 4)^3 - x^3$ или $x^2 + 4x - \frac{14}{3} = 0$ — уравненіе, изъ котораго опредѣлимъ x.

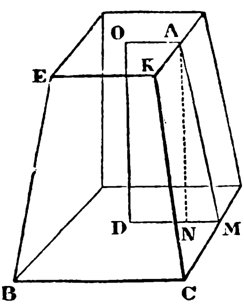
339. Пирамида, высота которой $= h$, разсѣчена на три равновеликія части двумя плоскостями, параллельными основанію. Опредѣлить высоту каждой изъ этихъ частей.

Отв. $\frac{h}{\sqrt[3]{3}}$; $\frac{h}{\sqrt[3]{3}}\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)$; $h\left(1 - \sqrt[3]{2/3}\right)$.

340. Правильную пирамиду въ 8 футовъ высоты требуется разсѣчь двумя плоскостями, параллельными основанію, на такія три части (считая по порядку отъ вершины), которыхъ величины относились бы между собою какъ $8:19:37$.

Отв. Разстоянія вершины пирамиды отъ плоскостей проводимыхъ сѣченій суть 4 фут. и 6 фут.

341. Найти выраженіе полной поверхности правильной усѣченной пирамиды (черт. 41), у которой высота $= h$, а основаніями служатъ площади квадратовъ, имѣющихъ стороны A и a.



Черт. 41.

Рѣш. Проводя AN, параллельную OD, находимъ, что апоѳема $AM = \sqrt{AN^2 + MN^2} = \sqrt{OD^2 + (DM - OA)^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{A-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + (A-a)^2}$ и слѣдоват. выраженіе искомой поверхности есть

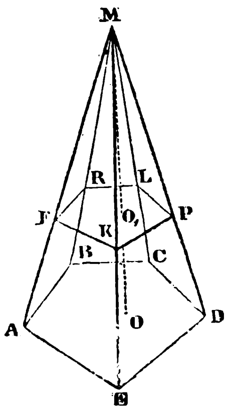
$$A^2 + a^2 + (A+a)\sqrt{4h^2 + (A-a)^2}.$$

342. Разность сторонъ квадратовъ, служащихъ основаніями правильной усѣченной пирамиды, равна 6 футамъ; высота пирамиды $= 4$ футамъ, а полная поверхность пирамиды $= 168$ квадр. фут. Найти стороны основаній. *Отв.* 2 фут. и 8 фут.

343. Сторона квадрата, служащаго нижнимъ основаніемъ правильной усѣченной пирамиды, $= a$; сторона квадрата, служащаго ея верхнимъ основаніемъ, $= b$. Сумма площадей боковыхъ сторонъ этой усѣченной пирамиды = суммѣ площадей ея верхняго и нижняго основаній. Опредѣлить высоту этой пирамиды.

Отв. $\dfrac{ab}{a+b}$.

344. Вычисленіемъ найти формулу объема усѣченной пирамиды.



Черт. 42.

Рѣш. Обозначимъ высоту OO_1 (черт. 42) данной усѣч. пирам. чрезъ h, площадь нижн. основ. $ABCDE$ — чрезъ a, площадь верхн. основ. $FRLPK$ — чрезъ b, искомый объемъ — чрезъ V. Дополнивъ усѣченную пирамиду такъ, чтобы образовалась пирамида $MABCDE$, положимъ длину $MO_1 = x$. Имѣемъ:

$$\text{объемъ } MABCDE = a\,\frac{h+x}{3},$$

$$\text{объемъ } MFRLPK = b\cdot\frac{x}{3}.$$

Разность этихъ объемовъ даетъ объемъ усѣченной пирамиды

$$V = \tfrac{1}{3}\left[ah + (a-b)\,x\right] \;\ldots\ldots\ldots\; (1).$$

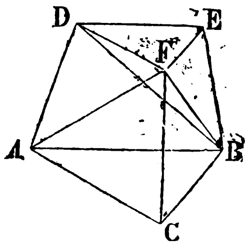
Такъ какъ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{(h-x)^2}{x^2}$ .... (2), то $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{h+x}{x}$,

откуда $x = \dfrac{h\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. (Того же результата съ меньшею быстротою можно достигнуть, опредѣляя x изъ ур. (2) по извѣстной формулѣ квадратн. ур-ія и отбрасывая изъ двухъ полученныхъ рѣшеній то, которое отрицательно и слѣдовательно въ данномъ случаѣ не имѣетъ смысла).

Вставляя найденное значеніе x въ (1) и замѣчая, что $a - b = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, получимъ $V = \tfrac{1}{3}h[a + b + \sqrt{ab}]$.

Представивъ найденную формулу въ видѣ $V = \dfrac{ah}{3} + b\dfrac{h}{3} + \dfrac{h}{3}\sqrt{ab}$, можемъ сказать, что объемъ усѣч. пирам. равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ высоту общую съ высот. усѣч. пирамиды, а основанія: первая — нижнее, вторая — верхнее основ. усѣч. пирамиды, третья — среднее пропорціональное между ними*).

Замѣчаніе. Выводъ формулы объема усѣченной пирамиды, для случая *треугольной* пирамиды, можно сдѣлать еще иначе. Пусть (черт. 43) $DEFABC$ — усѣченная треуг. пирамида, высоту которой означимъ чрезъ h, площадь основанія ABC — чрезъ a и площадь DEF — чрезъ b. Проведя плоскости AFB и DFB, раздѣляемъ данную усѣч. пирамиду на три полныхъ пирамиды $FABC$, $BDEF$ и $FABD$, объемы коихъ означимъ соотвѣтственно чрезъ v_1, v_2 и v_3.



Черт. 43.

Очевидно, что $v_1 = \frac{1}{3}\,ah$, $v_2 = \frac{1}{3}\,bh$. Остается опредѣлить v_3. Принимая у второй и у третьей пирамидъ за общую вершину точку F и принимая въ соображеніе, что объемы полныхъ пирамидъ, имѣющихъ одинаковыя высоты, относятся какъ площади основаній, имѣемъ

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{\text{площ. } ADB}{\text{площ. } DEB} \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

Но треугольники ADB и DBE имѣютъ по равному углу (углы EDB и ABD равны по причинѣ параллельности линій DE и AB); слѣдов.

$$\frac{\text{площ. } ADB}{\text{площ. } DEB} = \frac{AB\,.\,BD}{DE\,.\,BD} = \frac{AB}{DE} \cdots\cdots (2).$$

Изъ (1) и (2) выводимъ, что $\frac{v_3}{v_2} = \frac{AB}{DE} \cdots\cdots\cdots (3)$.

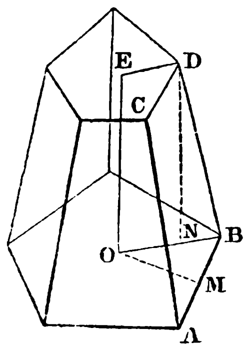
На основаніи подобія треугольниковъ ABC и DEF имѣемъ

$$\frac{a}{b} = \frac{AB^2}{DE^2} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{AB}{DE} \cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

*) Этотъ весьма простой выводъ формулы объема усѣченной пирамиды, независимый отъ того, будетъ ли усѣч. пирамида треугольная или многоугольная, данъ въ извѣстныхъ руководствахъ *Wiegand*'а (Lehrbuch der Stereometrie, 5. Aufl., S. 66) *Moenik*'а (Lehrbuch der Geometrie, 14. Aufl., S. 147).

Изъ равенствъ (3) и (4) слѣдуетъ, что $\frac{v_3}{v_2} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Подставивъ въ это равенство вмѣсто v_2 его значеніе $\frac{1}{3}bh$ и опредѣливъ затѣмъ v_3, получимъ $v_3 = \frac{bh\sqrt{a}}{3\sqrt{b}} = \frac{h\sqrt{b}\,.\sqrt{b}\,.\sqrt{a}}{3\sqrt{b}} = \frac{h\sqrt{ab}}{3}$, послѣ чего, взявъ сумму v_1, v_2 и v_3, находимъ искомое выраженіе объема V усѣченной треугольной пирамиды:

$$V = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{1}{3}ah + \frac{1}{3}bh + \frac{1}{3}h\sqrt{ab} = \frac{h}{3}(a + b + \sqrt{ab}).$$



Черт. 44.

345. Длины сторонъ квадратныхъ основаній усѣченной пирамиды суть 4 и 3 дюйма; высота пирамиды $= 8{,}7$ дюйм. Опредѣлить объемъ пирамиды.

Отв. 107,3 куб. дюйм.

346. Боковое ребро (черт. 44) правильной усѣченной пятиугольной пирамиды $= a$; радіусы круговъ, описанныхъ около нижняго и верхняго основаній ея, суть R и ρ. Опредѣлить объемъ пирамиды.

Отв. $\frac{5}{24}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ (R^2 + \rho^2 + R\rho)\sqrt{(a + R - \rho)(a - R + \rho)}$.

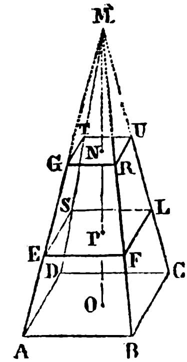
347. По высотѣ h усѣченной пирамиды и площадямъ a и b двухъ ея основаній $ABCDE$ и $FRLPQ$ (черт. 42) опредѣлить: 1) объемъ пирамиды $MFRLPK$, 2) объемъ пирамиды $MABCDE$.

Отв. 1) $\frac{bh\sqrt{b}}{3(\sqrt{a} - \sqrt{b})}$; 2) $\frac{ah\sqrt{a}}{3(\sqrt{a} - \sqrt{b})}$.

348. Площадь основанія пирамиды $= M$. Параллельно ему проведено сѣченіе, площадь котораго $= m$, при чемъ объемъ получившейся усѣченной пирамиды оказывается равнымъ W Опредѣлить высоту полной пирамиды.

Отв. $\frac{3W\sqrt{M}}{M\sqrt{M} - m\sqrt{m}}$.

349. Сходственныя стороны основаній усѣченной пирамиды $TURGABCD$ (черт. 45) относятся между собою какъ $m:n$; высота ея $= h$. На какомъ разстояніи отъ нижняго основанія должна проходить плоскость $EFLS$, параллельная основаніямъ и дѣлящая данную пирамиду на двѣ равновеликія части?



Черт. 45.

Рѣшеніе. Построивъ на основаніи $TURG$ пирамиду $MTURG$ такъ, чтобы образовалась полная пирамида $MDCBA$, будемъ имѣть:

$$\frac{MO}{MN}=\frac{AB}{GR}=\frac{m}{n} \text{ или } \frac{MO}{MO-h}=\frac{m}{n}, \text{ откуда } MO=\frac{mh}{m-n}$$

и слѣдов. $MN=MO-h=\dfrac{nh}{m-n}$; при этомъ (если обозначимъ OP чрезъ x) $MP=MN+h-x=\dfrac{mh-x(m-n)}{m-n}$.

Обозначая затѣмъ площ. $ABCD$ чрезъ k и площадь $GTUR$ чрезъ ω, для выраженія ω чрезъ k возьмемъ равенство $\dfrac{k}{\omega}=\dfrac{AB^2}{GR^2}=\dfrac{m^2}{n^2}$, откуда $\omega=\dfrac{n^2}{m^2}\cdot k$; поэтому объемъ усѣч. пир. $TUGRDCAB$ выразится чрезъ $\dfrac{h}{3}[k+\dfrac{n^2}{m^2}k+\dfrac{n}{m}k]$ или чрезъ $\dfrac{k.h}{3}\left(\dfrac{m^2+n^2+mn}{m^2}\right)$. По условію, объемъ $ESLFGTUR=$ половинѣ объема $TUGRDCAB$, такъ что

объемъ $ESLFGTUR=\dfrac{k.h}{3.2}\left(\dfrac{m^2+n^2+mn}{m^2}\right)$. Будемъ имѣть далѣе:

объемъ $MTURG=\omega\cdot\dfrac{MN}{3}=\dfrac{n^2}{m^2}\cdot k\cdot\dfrac{nh}{3(m-n)}=\dfrac{khn^3}{3m^2(m-n)}$;

объемъ $MSLFE=$ об. $MTURG+$ об. $ESLFGTUR=$

$$\frac{k.h.n^3}{3m^2(m-n)}+\frac{k.h(m^2+n^2-mn)}{3.2m^2}=\frac{k.h\ (m^3+n^3)}{3.2.m^2\ (m+n)};$$

и слѣдов. *объем.* $MTUQG$: *объем.* $MSLFE$ $=\dfrac{2n^3}{m^3+n^3}$.

Съ другой стороны *объем.* $MTURG$: *объем.* $MSLFE =$ $= MN^3 : MP^3 = \left(\frac{nh}{m-n}\right)^3 : \left[\frac{mh - x(m-n)}{m-n}\right]^3$; слѣдоват. $\frac{2n^3}{m^3+h^3} = \frac{n^3 h^3}{[mh - x(m-n)]^3}$ или $[mh - x(m-n)]^3 =$ $= \frac{h^3(m^3+n^3)}{2} \cdots$(A), откуда $x = \frac{h}{m-n}\left(m - \sqrt[3]{\frac{m^3+n^3}{2}}\right)$*).

350. Какимъ образомъ двумя сѣченіями, параллельными основанію пирамиды, у которой площадь основанія $=F$, а высота $=h$, отрѣзать отъ этой пирамиды такую часть, которой объемъ равнялся бы W, а высота была бы равна e?

Отв. Сѣченіе, ближайшее къ вершинѣ пирамиды, провести отъ этой вершины на разстояніи $= -\frac{e}{2} + \sqrt{\frac{Wh^2}{eF} + \frac{e^2}{12}}$.

351. Высота усѣченной пирамиды $=h$; площади ея основаній суть a (нижн.) и b (верхн.). На какомъ разстояніи отъ верхняго основанія проходитъ параллельное ему сѣченіе, имѣющее площадь равную среднему ариѳметическому изъ площадей основаній? *Отв.* $\frac{h(\sqrt{a+b} - \sqrt{2b})}{\sqrt{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}$.

352. Усѣченная пирамида, высота которой $= 6$ футамъ, разсѣчена плоскостью, проходящею чрезъ средину высоты, параллельно основаніямъ. Найти величину площади сѣченія, зная, что площадь нижняго основанія $= 18$ квадр. фут., а площадь верхняго $= 8$ кв. фут. *Отв.* $12\,^1/_2$ кв. ф.

ОТДѢЛЪ IX.

Круглыя тѣла.

Въ задачахъ, помѣщаемыхъ здѣсь, равно какъ и въ слѣдующихъ отдѣлахъ сборника: 1) подъ словомъ „цилиндръ“ разумѣется исключительно прямой круглый цилиндръ, подъ словомъ „конусъ“ — исключительно прямой круглый конусъ; 2) число π принимается $= 3{,}14$ (кромѣ тѣхъ только задачъ, гдѣ на этотъ счетъ сдѣлано особое указаніе).

353. Высота цилиндра $=$ діаметру его основанія. Радіусъ основанія $= R$. Найти выраженія: 1) полной поверхности, 2) объема цилиндра. *Отв.* 1) $6\pi R^2$; 2) $2\pi R^3$.

*) Два друг. корня кубичнаго ур-ія (A) вопросу не удовлетворяютъ.

354. Въ цилиндрѣ, объемъ котораго $= V$, высота $=$ діаметру основанія. Найти: 1) высоту и 2) радіусъ.

Отв. 1) $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 2) $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

355. Въ цилиндрѣ, объемъ котораго $= V$, высота относится къ радіусу основанія какъ $m : n$. Найти высоту.

Отв. $\sqrt[3]{\frac{m^2 V}{n^2 \pi}}$.

356. Найти объемъ цилиндра, котораго высота = бо́льшей, а радіусъ основанія = меньшей части линіи a, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Отв. $\frac{\pi a^3}{8}\left(3-\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{5}-1\right)=\frac{\pi a^3}{2}\left(5\sqrt{5}-11\right)$.

357. Опредѣлить объемъ, занимаемый стѣнками стеклянной строго цилиндрической трубки, длина которой $= {}^3/_4$ фута, а радіусы: внѣшней поверхности — 2 дюйма, внутренней — 1 дюймъ 7 линій. *Отв.* 31,3686 куб. д.

358. Объемъ, занимаемый стѣнками строго цилиндрической трубки, равенъ V; длина трубки $= h$, а радіусъ ея внѣшней поверхности $= R$. Опредѣлить толщину стѣнокъ.

Отв. $R-\sqrt{R^2-\frac{V}{\pi h}}$.

359. Объемъ цилиндра, имѣющаго высоту въ h футовъ, увеличивается на w куб. футовъ, когда радіусъ его основанія увеличивается на a футовъ. Опредѣлить радіусъ основанія цилиндра.

Отв. $\frac{w-\pi a^2 h}{2\pi a h}$.

360. При увеличеніи высоты цилиндра на m футовъ, объемъ его увеличивается на w кубич. футовъ. Опредѣлить радіусъ основанія цилиндра.

Отв. $\sqrt{\frac{w}{\pi m}}$.

361. При увеличеніи радіуса основанія цилиндра на a футовъ, объемъ цилиндра увеличивается на k кубич. футовъ;

при увеличенiи же высоты на b футовъ, объемъ увеличивается на w кубич. футовъ. Найти объемъ цилиндра.

Отв. $\dfrac{kw}{\pi ab\left(a+2\sqrt{\dfrac{w}{\pi b}}\right)}$.

362. Кусокъ дерева въ формѣ цилиндра, высота котораго $=h$, горизонтально плаваетъ въ водѣ. Плотность дерева $=\delta$, плотность воды $=1$. Найти отношенiе объемовъ непогруженной и погруженной частей дерева.

Отв. $\dfrac{1-\delta}{\delta}$.

---

363. Въ цилиндрическiй сосудъ налита вода до высоты H. Коническое тѣло съ радiусомъ основанiя $=\rho$ и высотою $=h$, будучи брошено въ сосудъ, совершенно погружается въ жидкость и увеличиваетъ высоту ея уровня въ m разъ противъ прежней. Опредѣлить радiусъ основанiя цилиндрическаго сосуда.

Отв. $\rho\sqrt{\dfrac{h}{3H(m-1)}}$.

364. Какимъ числамъ пропорцiональны площадь основанiя, боковая и полная поверхности равносторонняго конуса*)?

Отв. 1; 2; 3.

365. Въ конусѣ, объемъ котораго $=v$, образующая равна дiаметру основанiя. Найти радiусъ основанiя.

Отв. $\sqrt[3]{\dfrac{3v}{\pi\sqrt{3}}}$.

366. Изъ двухъ металлическихъ конусообразныхъ тѣлъ радiусы основанiй которыхъ суть R_1 и R_2, а высоты h_1 и h_2, требуется вылить одинъ конусъ, радiусъ основанiя котораго былъ бы R_3. Какова будетъ высота этого новаго конуса?

Отв. $\dfrac{R_1^2h_1+R_2^2h_2}{R_3^2}$.

---

*) *Равностороннимъ конусомъ* назыв. такой конусъ, у котораго образующая имѣетъ ту же длину, что и дiаметръ основанiя.

367. Сумма объемовъ двухъ конусовъ равна W; радіусъ ихъ общаго основанія $= \rho$. Найти высоты этихъ конусовъ, относящіяся между собою какъ $m:n$.

Отв. $\frac{3mW}{(m+n)\pi\rho^2}$, $\frac{3nW}{(m+n)\pi\rho^2}$.

368. Длина образующей конуса $=l$, длина окружности его основанія $= c$. Опредѣлить объемъ конуса.

Отв. $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{(2\pi l+c)(2\pi l-c)}$.

369. Образующая конуса $= a$, а разность его высоты и радіуса основанія $= m$. Опредѣлить радіусъ основанія и боковую поверхность конуса.

Отв. Радіусъ $= \frac{-m+\sqrt{2a^2-m^2}}{2}$.

370. Плоскость, проходящая чрезъ высоту конуса, даетъ въ сѣченіи съ нимъ треугольникъ, площадь коего $= 2,7$ кв. фут. Высота конуса $= 2\,^1/_4$ фут. Опредѣлить его полную поверхность. *Отв.* 14,13 квадр. фут.

371. Рѣшить предыдущую задачу, полагая, что площадь упомянутаго треугольника $= 480$ кв. дюймамъ, а высота конуса $= 30$ дюйм. *Отв.* 2512 кв. д.

372. Опредѣлить отношеніе объемовъ равностороннихъ конуса и цилиндра*), полныя поверхности которыхъ равны.

Отв. $\sqrt{6}:3$.

373. Боковая поверхность конуса $= S$, высота его $= h$. Найти величину боковой поверхности цилиндра, имѣющаго одинаковыя съ даннымъ конусомъ основаніе и высоту.

Отв. $\pi h\sqrt{2\left(-h^2+\frac{1}{\pi}\sqrt{h^4\pi+4S^2}\right)}$.

374. Опредѣлить объемъ конуса, котораго боковая поверхность, будучи развернута въ плоскость, представляетъ круговой секторъ, у котораго радіусъ $= a$, а центральный уголъ $= n^0$.

Отв. $\frac{\pi . n^2 . a^3}{3.360^3}\sqrt{(360+n)(360-n)}$.

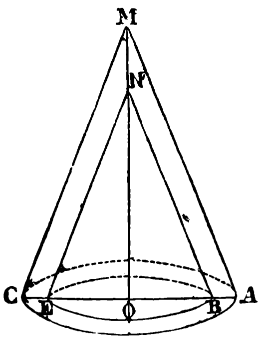
---

*) *Равностороннимъ цилиндромъ* назыв. таковой цилиндръ, у котораго образующая имѣетъ ту же длину, что и діаметръ основанія.

375. Боковая поверхность конуса, равная 428,49 квадр. дюйм., будучи развернута на плоскости, представляетъ круговой секторъ въ 36^0. Опредѣлить объемъ этого конуса.

Отв. $42{,}849\cdot\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4242{,}051}{\pi}}=14{,}283\sqrt{\frac{4242{,}051}{\pi}}$.

Вычисляя это выраженіе помощью пятизначныхъ логариѳмическихъ таблицъ (при чемъ приним. $lg\,\pi=0{,}49715$), получаемъ 524,48 (куб. дюйм.).



Черт. 46.

376. Въ конусѣ (объемъ котораго $=W$ и котораго высота относится къ радіусу основанія какъ $m:n$) вырѣзывается часть внутренности, при чемъ вырѣзокъ представляетъ конусъ, подобный данному, и ширина кругового кольца, образовавшагося на плоскости основанія даннаго конуса, оказывается равною a. Опредѣлить объемъ оставшейся части.

Рѣшен. Обозначая радіусъ основанія даннаго конуса (черт. 46) чрезъ R, имѣемъ по условію $\frac{MO}{R}=\frac{m}{n}$, откуда $MO=\frac{m}{n}R$. Объемъ даннаго конуса $W=\pi R^2\frac{MO}{3}=\frac{m}{3n}\pi R^3$, откуда $R=\sqrt[3]{\frac{3nW}{m\pi}}$.

Такъ какъ вынутый конусъ подобенъ данному, то $\frac{NO}{OB}=\frac{MO}{R}=\frac{m}{n}$ или $\frac{NO}{R-a}=\frac{m}{n}$, отк. $NO=\frac{m}{n}(R-a)$; объемъ этого

$$\text{конуса}=\pi(OB)^2\frac{NO}{3}=\pi(B-a)^2\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{R-a}{3}=\frac{m\pi}{3n}\left[\sqrt[3]{\frac{3nW}{m\pi}}-a\right]^3.$$

$$\text{Слѣдов. иском. об. оставшейся части}=W-\frac{m\pi}{3n}\left[\sqrt[3]{\frac{3nW}{m\pi}}-a\right]^3.$$

377. Радіусъ основанія конуса $=R$. Плоскость, параллельная этому основанію, дѣлитъ высоту конуса на двѣ части, находящіяся между собою въ отношеніи $m:n$. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

Отв. $\frac{\pi m^2}{(m+n)^2}\cdot R^2$.

378. Конусъ, у котораго радіусъ основанія$=R$, раздѣленъ пополамъ плоскостью, параллельною основанію. Опредѣлить радіусъ получившагося сѣченія. *Отв.* $R:\sqrt[3]{2}$.

(*Указаніе.* Объемы подобныхъ конусовъ относятся какъ кубы ихъ высотъ).

379. Высота усѣченнаго конуса $=2{,}4$ метра; радіусы основаній длиною — одинъ въ 15 сантиметровъ, другой въ 9 сантиметровъ. Вычислить объемъ конуса. *Отв.* 110779,2 куб. сантим.

380. Объемъ усѣченнаго конуса $=3{,}14$ куб. фут., высота конуса$=3\,{}^{18}/_{19}$ фута; радіусъ нижняго основанія$={}^{3}/_{5}$ ф. Принимая $\pi=3{,}14$, вычислить радіусъ верхняго основанія.

Отв. $\frac{2}{5}$ фут.

381. Объемъ усѣченнаго конуса $=10637{,}52$ кубич. фут. Длины радіуса верхняго основанія, радіуса нижняго основанія и высоты относятся какъ $6:7:10$. Вычислить (безъ помощи логариѳм.) оба радіуса и высоту. (Число $\pi=3{,}141$).

Отв. Рад. верх. основ. $x=\sqrt[3]{1728}=12$ фут.
„ нижн. „ $=14$ фут.
Высота $=20$ фут.

382. Высота усѣченнаго конуса$=h$; радіусы его основаній суть R и ρ. Опредѣлить боковую поверхность.

Отв. $\pi(R+\rho)\sqrt{h^2+(R-\rho)^2}$.

383. Высота усѣченнаго конуса$=3$ футамъ, радіусы его основаній длиною — одинъ въ 2 фута, другой — въ 1 футъ. Опредѣлить: 1) объемъ, 2) боковую поверхность этого усѣченнаго конуса. *Отв.* 1) 7π (куб. фут.); 2) $3\pi\sqrt{10}$ (кв. фут.).

384. Образующая усѣченнаго конуса$=l$, радіусы его основаній суть R и ρ; найти его объемъ.

Отв. $\frac{\pi}{3}(R^2+\rho^2+R\rho)\sqrt{(l+R-\rho)(l-R+\rho)}$.

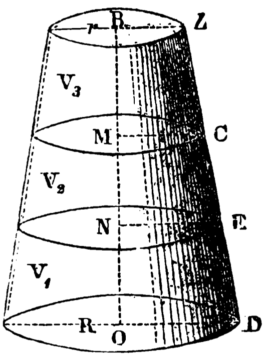
385. Образующая усѣченнаго конуса $=5$ аршинамъ; радіусъ его нижняго основанія$=4$ аршинамъ, радіусъ верхняго основанія$=3$ аршинамъ. Опредѣлить: 1) полную поверхность и 2) объемъ этого конуса.

Отв. 1) 60π (квадр. арш.); 2) $\frac{74\pi\sqrt{6}}{3}$ (куб. арш.).

386. Окружность нижняго основанія усѣченнаго конуса имѣетъ длину въ c футовъ, окружность верхняго — въ c_1 футовъ; длина образующей $= l$ фут. Опредѣлить объемъ конуса.

Отв. $\frac{c^2 + c_1^2 + cc_1}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - (c - c_1)^2}$.

387. Усѣченный конусъ, имѣющій высоту h и радіусы основаній R и r, пересѣченъ двумя плоскостями, дѣлящими высоту на три равныя части и параллельными основаніямъ. Опредѣлить объемъ каждой изъ трехъ частей.



Черт. 47.

Рѣшеніе. Такъ какъ $BM = MN = NO = \frac{h}{3}$, $OD = R$ и $BL = r$, то рѣшеніе вопроса приводится къ опредѣленію радіусовъ MC и NE двухъ проведенныхъ сѣченій. Обозначая MC чрезъ x, NE — чрезъ y, по свойству средней линіи трапеціи имѣемъ:

1) $x = \frac{r + y}{2}$, 2) $y = \frac{x + R}{2}$ — два ур-ія, рѣшеніе которыхъ даетъ:

$$x = \frac{2r + R}{3};\quad y = \frac{2R + r}{3}.$$

Выразивъ так. образомъ x и y чрезъ величины данныя, послѣдовательно опредѣляемъ теперь по извѣстной формулѣ объемы V_1, V_2 и V_3 каждой изъ трехъ частей конуса:

$$V_1 = \frac{\pi}{3}(R^2 + y^2 + Ry)\frac{h}{3} = \frac{\pi h}{81}\left\{19R^2 + 7Rr + r^2\right\}$$

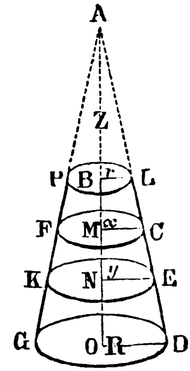
$$V_2 = \frac{\pi}{3}(y^2 + x^2 + xy)\frac{h}{3} = \frac{\pi h}{81}\left\{7(R^2 + r^2) + 13R^2\right\}$$

$$V_3 = \frac{\pi}{3}(x^2 + r^2 + xr)\frac{h}{3} = \frac{\pi h}{81}\left\{19r^2 + 7Rr + R^2\right\}$$

[Повѣрка: сложивъ найденныя выраженія V_1, V_2 и V_3, получаемъ: $\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ — выраженіе объема даннаго усѣченнаго конуса].

Другой способъ опредѣленія радіусовъ.

Дополнивъ данный усѣченный конусъ конусомъ APL, получаемъ полный конусъ AGD (черт. 48). Обозначивъ AB чрезъ z, изъ пропорціи $\frac{AO}{AB}=\frac{R}{r}$ или $\frac{z+h}{z}=\frac{R}{r}$ находимъ $z=\frac{hr}{R-r}$. Внося выраженную такимъ образомъ величину z въ каждую изъ двухъ пропорцій:

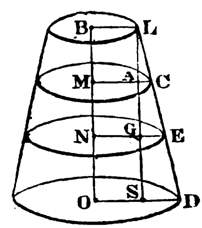


Черт. 48.

1) $\frac{y}{r}=\frac{AN}{AB}$ или $\frac{y}{r}=\frac{z+{}^2/_3 h}{z}$

2) $\frac{x}{r}=\frac{AM}{AB}$ или $\frac{x}{r}=\frac{z+{}^1/_3 h}{z}$

находимъ $y=\frac{2R+r}{3}$, $x=\frac{2r+R}{3}$.



Черт. 49.

Третій способъ опредѣленія радіусовъ.

Проведя LS, параллельную BO (черт. 49), имѣемъ:

1) $\frac{AC}{SD}=\frac{LA}{LS}$ или $\frac{x-r}{R-r}=\frac{1}{3}$, откуда $x=\frac{2r+R}{3}$

2) $\frac{GE}{SD}=\frac{LG}{LS}$ или $\frac{y-r}{R-r}=\frac{2}{3}$, откуда $y=\frac{2R+r}{3}$.

388. Усѣченный конусъ, имѣющій высоту въ 27 футовъ, а радіусы основаній въ 10 ф. и 4 фута, пересѣченъ двумя плоскостями, дѣлящими высоту на три равныхъ части и параллельными основаніямъ. Опредѣлить объемъ каждой изъ получившихся частей конуса.

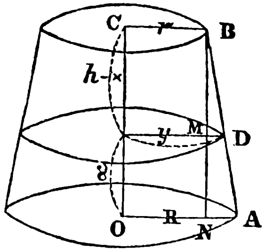
Отв. 2298,48 куб. ф.; 1394,16 куб. ф.; 715,92 куб. ф.

389. Усѣченный конусъ, имѣющій высоту въ 8 метровъ, а радіусы основаній въ 10 и 6 метровъ, пересѣченъ тремя плоскостями, дѣлящими высоту на четыре равныя части и параллельными основаніямъ. Опредѣлить радіусы сѣченій.

Отв. 9; 8 и 7 (метр.).

Рѣшеніе. Дополнивъ данный усѣченный конусъ такъ, чтобы образовался полный конусъ, находимъ, что высота этого полнаго конуса равна $12+8=20$ метрамъ. Этотъ полный конусъ подобенъ каждому изъ тѣхъ трехъ полныхъ конусовъ, у которыхъ основаніями служатъ площади проведенныхъ сѣченій и которыхъ высоты суть 18, 16 и 14 метровъ. Радіусы основаній подобныхъ конусовъ относятся какъ соотвѣтств. высоты, слѣдов. въ данномъ случаѣ — какъ $20:18:16:14$ или какъ $10:9:8:7$; и такъ какъ при этомъ извѣстно, что радіусъ нижняго основанія $=10$ метрамъ, то искомыя длины радіусовъ сѣченій суть по порядку: 9 метр., 8 метр. и 7 метровъ.

390. Конусъ, имѣющій высоту $=h$, а радіусъ основанія $=\rho$, пересѣченъ двумя плоскостями, дѣлящими высоту на три равныя части и параллельными основанію. Найти объемъ образовавшагося усѣченнаго конуса, основаніями котораго служатъ площади двухъ проведенныхъ сѣченій. *Отв.* $\frac{7}{81}\pi h\rho^2$.



Черт. 50.

391. Усѣченный конусъ (черт. 50), имѣющій высоту h и радіусы основаній R и r, требуется раздѣлить на двѣ равновеликія части плоскостью параллельною основаніямъ. На какомъ разстояніи отъ бо́льшаго основанія должно взять сѣченіе, удовлетворяющее требованію, и каковъ будетъ радіусъ этого сѣченія?

Рѣшеніе. Обозначимъ искомое разстояніе чрезъ x, искомый радіусъ — чрезъ y. По условію, буд. имѣть:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)=\frac{\pi}{3}x(R^2+y^2+Ry) \quad \text{или}$$

$$\frac{h}{2}(R^2+r^2+Rr)=x(R^2+y^2+Ry) \; \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Кромѣ того имѣемъ $\frac{AN}{MD}=\frac{BN}{BM}$ или $\frac{R-r}{y-r}=\frac{h}{h-x}$ . . . (2).

Изъ ур-ій (1) и (2) находимъ:

$$y=\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}} \qquad x=\frac{h}{R-r}\left(R-\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}}\right).$$

392. Поверхность шара содержитъ 706,5 кв. фут. Какъ великъ его радіусъ? *Отв.* 7,5 фут.

393. Объемъ шара содержитъ 113,04 куб. дюйм. Опредѣлить длину діаметра этого шара. *Отв.* 6 дюйм.

394. Діаметры земли, луны и солнца пропорціональны числамъ 1, $^3/_{11}$ и 112. Обозначая объемъ земли чрезъ T, выразить чрезъ T объемы луны и солнца. (Объемы земли, луны и солнца принимаются здѣсь за объемы шаровъ).

Отв. Объемъ луны $= \frac{27}{1331} T$; объемъ солнца $= 1404928\ T$.

395. Дуга большого круга въ 36^0 равна 0,6 фут. Опредѣлить объемъ шара. *Отв.* 3,65 куб. фут.

396. Опредѣлить поверхность шара по его объему w.

Отв. $\sqrt[3]{36\pi w^2}$.

397. Поверхность шара содержитъ $490\,^5/_8$ кв. фут. Опредѣлить его объемъ. *Отв.* $1022\frac{13}{96}$ куб. фут.

398. Сколько килограммовъ ртути помѣщается при 0^0 температуры въ шарообразномъ сосудѣ, внутренній радіусъ котораго $= {^2/_3}$ метра? (Удѣльный вѣсъ ртути при 0^0 есть 13,6; число $\pi = 3,141$). *Отв.* 16876 килогр.

399. Поверхность шара на m кв. футовъ больше площади большого круга. Опредѣлить: 1) радіусъ и 2) поверхность шара.

Отв. 1) $\sqrt{\frac{m}{3\pi}}$; 2) $\frac{4}{3} m$.

400. Діаметры трехъ шаровъ суть a_1, a_2, a_3. Каковъ радіусъ шара, объемъ котораго равенъ суммѣ объемовъ трехъ данныхъ шаровъ?

Отв. $\frac{\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}}{2}$.

401. Какъ относятся объемы двухъ шаровъ, которыхъ поверхности относятся какъ $m : n$? *Отв.* $\sqrt{m^3} : \sqrt{n^3}$.

402. Какъ относятся поверхности двухъ шаровъ, которыхъ объемы относятся какъ $m : n$? *Отв.* $\sqrt[3]{m^2} : \sqrt[3]{n^2}$.

403. Сумма діаметровъ двухъ шаровъ $= a$, сумма поверхностей этихъ шаровъ $= S$. Опредѣлить каждый изъ діаметровъ.

Отв. $\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2S-\pi a^2}{\pi}}$ и $\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2S-\pi a^2}{\pi}}$.

404. Сумма радіусовъ двухъ шаровъ $= a$; сумма объемовъ этихъ шаровъ $= V$. Опредѣлить радіусы.

Отв. $\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3V-\pi a^3}{3\pi a}}$ и $\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3V-\pi a^3}{3\pi a}}$.

405. Кусокъ дерева, объемъ котораго $= m$ кубич. сантиметрамъ, требуется соединить съ металлическимъ шаромъ такой величины, чтобы система этихъ двухъ тѣлъ находилась въ равновѣсіи внутри сосуда съ водою. Удѣльный вѣсъ дерева $= d$, удѣльный вѣсъ металла $= d_1$. Какой величины долженъ быть радіусъ металлическаго шара?

Отв. $\sqrt[3]{\frac{3m(1-d)}{4\pi(d_1-1)}}$ сант.

Указаніе. Для рѣш. зад. замѣтимъ, что 1) въ данномъ случаѣ вѣсъ находящейся внутри сосуда системы тѣлъ равенъ вѣсу воды, взятой въ объемѣ этой системы, и 2) что если объемъ тѣла выраженъ въ десятичныхъ мѣрахъ, то произведеніе удѣльнаго вѣса тѣла на объемъ дастъ вѣсъ тѣла. [См. формулу (2) на стран. 48].

406. Имѣется металлическій полый шаръ, толщина оболочки котораго $= m$; объемъ оболочки $= V$. Опредѣлить радіусъ R внѣшней и радіусъ r внутренней поверхностей оболочки.

Рѣшеніе. Имѣемъ ур-ія: 1) $V=\frac{4\pi}{3}(R^3-r^3)$, 2) $m=R-r$.

Раздѣливъ первое на второе, находимъ $\frac{V}{m}=\frac{4\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)$ или $\frac{3V}{4\pi m}=(R-r)^2+3Rr$, но $R-r=m$, слѣдов. $\frac{3V}{4m\pi}=m^2+3Rr$, отк. $Rr=\frac{3V-4\pi m^3}{12\pi m}$. Возвышая въ квадр. обѣ части ур-ія $R-r=m$ и прибавляя затѣмъ къ обѣимъ частямъ въ результатѣ полученнаго ур-ія по $4Rr$, наход. $(Rr+r)^2=m^2+4Rr$

но $Rr = \frac{3V - 4\pi m^3}{12\pi m}$, слѣдов. $(R+r)^2 = \frac{3V - \pi m^3}{3\pi m}$.
Извлекая корень кв. изъ обѣихъ частей этого послѣдняго ур-ія и удерживая предъ корнемъ знакъ $+$ (сумма радіусовъ есть величина положительная), найдемъ

(I) . . . $R+r = \sqrt{\frac{3V - \pi m^3}{3\pi m}}$. Кромѣ того, имѣемъ

(II) . . . $R - r = m$. Зная так. обр. сумму и разность радіусовъ легко находимъ далѣе:

$$R = \frac{1}{2}\left(m + \sqrt{\frac{3V - \pi m^3}{3\pi m}}\right); \quad r = \frac{1}{2}\left(-m + \sqrt{\frac{3V - \pi m^3}{3\pi m}}\right).$$

407. Пустой металлическій шаръ, радіусъ внѣшней поверхности котораго $= R$, плаваетъ, будучи на половину погруженъ въ воду. Удѣльный вѣсъ металла $= d$. Опредѣлить толщину металлической оболочки шара.

Рѣшеніе. Такъ какъ объемъ даннаго шара $= {}^4/_3 \pi R^3$, то, если толщину оболочки обозначимъ чрезъ x, объемъ оболочки выразится чрезъ ${}^4/_3 \pi R^3 - {}^4/_3 \pi (R - x)^3$ или чрезъ ${}^4/_3 \pi [R^3 - (R - x)^3]$; вѣсъ же ея будетъ имѣть выраженіемъ ${}^4/_3 \pi d \triangle [R^3 - (R - x)^3]$; (См. стран. 48, формулу 2). Объемъ погруженной части шара, равный объему вытѣсняемой воды, есть ${}^1/_2 \cdot {}^4/_3 \pi R^3$; вѣсъ вытѣсняемой воды, слѣдовательно есть ${}^2/_3 \pi R^3 \triangle$. Такъ какъ шаръ плаваетъ, то вѣсъ его $=$ вѣсу вытѣсняемой воды, такъ что ${}^4/_3 \pi d \triangle [R^3 - (R - x)^3] = {}^2/_3 \pi R^3 \triangle$ или $(R - x)^3 = R^3\left(1 - \frac{1}{2d}\right)$,

слѣд. $R - x = R\sqrt[3]{1 - \frac{1}{2d}}$; $\quad x = R\left\{1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{2d}}\right\}$.

408. Пустой шаръ, толщина оболочки котораго вездѣ одинакова и равна m, до половины погружается въ воду. Зная, что удѣльный вѣсъ вещества, изъ котораго сдѣланъ шаръ, равенъ d, опредѣлить радіусы R и r внѣшней и внутренней поверхностей шаровой оболочки.

Рѣшеніе. Такъ какъ вѣсъ плавающаго тѣла равенъ вѣсу воды, взятой въ объемѣ погруженной части тѣла, то

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)d = \frac{2\pi R^3}{3} \quad \text{или} \quad 2(R^3 - r^3)\, d = R^3 \; . \; . \; . \; . \; . \; (I).$$

Кромѣ того, имѣемъ ур-іе $R - r = m$ . . . . (II).

Изъ (I): $r^3 = \frac{R^3(2d-1)}{2d}$ и слѣдов. $r = R\sqrt[3]{\frac{2d-1}{2d}}$. Вставляя эту велич. r во (II), получаемъ $R\left(1 - \sqrt[3]{\frac{2d-1}{2d}}\right) = m$, слѣдов.

$$R = \frac{m\sqrt[3]{2d}}{\sqrt[3]{2d} - \sqrt[3]{2d-1}}; \quad r = R - m = \frac{m\sqrt[3]{2d-1}}{\sqrt[3]{2d} - \sqrt[3]{2d-1}}.$$

409. Желѣзный полый шаръ, толщина оболочки котораго $= 0{,}5$ сантиметра, до половины погруженъ въ воду. Зная, что удѣльный вѣсъ желѣза $= 7{,}788$, опредѣлить радіусы R и r внѣшней и внутренней поверхностей желѣзной оболочки. (См. предыдущую задачу).

Отв. 22,9 сантим. и 22,4 сантим.

410. Пустой шаръ, толщина стѣнокъ котораго вездѣ одинакова и равна m, совершенно погружается въ воду. Зная, что удѣльный вѣсъ вещества, изъ котораго сдѣланъ шаръ, равенъ d, опредѣлить радіусы R и r внѣшней и внутренней поверхностей шаровой оболочки.

Отв. $R = \frac{m\sqrt[3]{d}}{\sqrt[3]{d} - \sqrt[3]{d-1}}$, $r = \frac{m\sqrt[3]{d-1}}{\sqrt[3]{d} - \sqrt[3]{d-1}}$.

411. На какое разстояніе можетъ видѣть глазъ наблюдателя съ маяка высотою въ a саженъ надъ поверхностью океана?

Рѣшеніе. Разстояніе, на которое можетъ видѣть глазъ наблюдателя въ открытомъ морѣ, равно длинѣ касательной линіи, проведенной отъ глаза къ шаровой поверхности океана. Такъ какъ, въ данномъ случаѣ, длина маяка представляетъ внѣшній отрѣзокъ сѣкущей, длина которой есть сумма длины земного діаметра и длины маяка, то, называя искомую длину касательной чрезъ x, а радіусъ земного шара въ саженяхъ чрезъ R, имѣемъ по извѣстному свойству касательной: $x^2 = (2R + a)a$, откуда $x = \sqrt{a(2R + a)}$.

412. Внутри шара проведены двѣ параллельныя плоскости по одной сторонѣ его центра на разстояніи 3 футовъ другъ отъ друга. Эти плоскости даютъ въ сѣченіи два малыхъ круга, которыхъ радіусы соотвѣтственно равны 9 фут. и 12 фут. Опредѣлить объемъ шара. *Отв.* 14130 куб. фут.

413. Поверхность шарового пояса $= s$; высота его $= h$. Опредѣлить объемъ того шара, поверхности котораго принадлежитъ упомянутый шаровой поясъ. (Сдѣлать затѣмъ вычисленіе въ случаѣ $s = 2$ квадр. метр. и $h = 0{,}47$ метр.).

Отв. $\frac{s^2}{6\pi^2 h^3}$.

414. Опредѣлить высоту шарового пояса, зная, что его поверхность $= s$ и что объемъ того шара, поверхности котораго принадлежитъ упомянутый поясъ, есть v.

Отв. $\frac{v}{\sqrt[3]{6\pi^2 v}}$.

415. Опредѣлить поверхность шарового пояса, котораго основанія, лежащія по одну и туже сторону центра шара, имѣютъ радіусы r и r_1. Радіусъ шара $= R$.

Отв. $2\pi R(\sqrt{R^2 - r_1^2} - \sqrt{R^2 - r^2})$.

416. Въ шарѣ, радіусъ котораго $= 20$ футамъ, по одну и ту же сторону центра проведены два параллельныхъ сѣченія, изъ которыхъ бо́льшее отстоитъ отъ центра на 6 футовъ; радіусъ меньшаго сѣченія $= 12$ фут. Опредѣлить поверхность образовавшагося шарового пояса, а также полную поверхность тѣла, ограниченнаго поверхностью шарового пояса и плоскостями двухъ проведенныхъ сѣченій.

Отв. Поверх. шаров. пояса $= 1256$ кв. фут.; полная поверхность тѣла $= 2851{,}12$ кв. фут.

417. Въ шарѣ, радіусъ котораго $= 15$ футамъ, по одну и ту же сторону центра проведены два параллельныхъ сѣченія, изъ которыхъ бо́льшее отстоитъ отъ центра на 4 фута. Поверхность образовавшагося шарового пояса равна 753,6 квадр. фут. Вычислить радіусъ и площадь меньшаго изъ сѣченій. *Отв.* Радіусъ $= 9$ фут.; площадь $= 254{,}34$ кв. фут.

418. Около цилиндра, у котораго высота $= 36$ сантиметрамъ, а діаметръ основанія $= 15$ сантиметрамъ, описанъ шаръ. Опредѣлить отношеніе боковой поверхности этого цилиндра къ поверхности образовавшагося шарового пояса, имѣющаго своими основаніями верхнее и нижнее основанія даннаго цилиндра. *Отв.* 5 : 13.

419. Вычислить кривую поверхность шарового сегмента, зная, что высота его $=0{,}2$ метра, а радіусъ шара$=0{,}45$ метра. *Отв.* 0,5652 кв. метр.

420. Шаръ радіуса R пересѣчь плоскостью такъ, чтобы кривая поверхность отсѣченнаго сегмента равнялась S.

Отв. Разстояніе центра шара отъ требуемой плоскости $=\dfrac{2\pi R^2-S}{2\pi R}$.

421. Шаръ объема V раздѣленъ на два сегмента, высоты которыхъ относятся между собою какъ $m:n$. Опредѣлить кривую поверхность каждаго изъ сегментовъ.

Отв. $\dfrac{m}{m+n}\sqrt[3]{36\pi V^2}$, $\dfrac{n}{m+n}\sqrt[3]{36\pi V^2}$

422. Кривая поверхность шарового сегмента, имѣющаго высоту$=h$, относится къ площади основанія этого сегмента какъ $m:n$. Опредѣлить радіусъ того шара, которому принадлежитъ упомянутый сегментъ.

Отв. $\dfrac{mh}{2(m-n)}$.

ОТДѢЛЪ X.

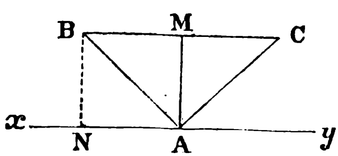
(Общій, несистематическій.)

Задачи, относящіяся къ различнымъ отдѣламъ стереометріи.

Замѣчаніе. Во всѣхъ тѣхъ задачахъ этого отдѣла, которыя относятся къ ученію о тѣлахъ вращенія предполагается, что ось вращенія, лежитъ въ плоскости вращаемой фигуры.

423. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ квадрата, сторона котораго$=a$, около одной изъ сторонъ.

Отв. πa^3.



Черт. 51.

424. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC (черт. 51) основаніе $BC=12$ фут., а каждая изъ равныхъ сторонъ AB и $AC=10$ ф. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника около оси xy, проходящей чрезъ вершину A треугольника параллельно его основанію BC.

Рѣшеніе. Искомый объемъ $V = \pi . BN^2 . BC - 2\left(\pi . BH^2 \cdot \frac{BC}{2.3}\right) =$ $^2/_3 . 3{,}14 . BC\ (AB^2 - BM^2) = 1607{,}68$ куб. фут.

Искомая поверхность $S = 2\pi . BN . BC + 2 . \pi . BN . AB = 2\pi . BN\ (BC + AB) = 2 . 3{,}14 . 22\sqrt{AB^2 - BM^2} = 1105{,}28$ квадр. ф.

425. Равносторонній треугольникъ, сторона котораго $= a$, вращается около оси, проходящей чрезъ его вершину параллельно основанію. Опредѣлить: 1) объемъ и 2) поверхность тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника.

Отв. 1) $^1/_2 \pi a^3$; 2) $2\pi a^2 \sqrt{3}$.

426. Опредѣлить: 1) поверхность и 2) объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ правильнаго треугольника, сторона котораго $= a$, около одной изъ сторонъ.

Отв. 1) $\pi a^2 \sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{4}\pi a^3$.

427. Изъ внѣшней точки проведены къ окружности касательная длиною въ 40 дюймовъ и сѣкущая, проходящая чрезъ центръ окружности и имѣющая внѣшній отрѣзокъ въ 20 дюймовъ длины. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ равносторонняго треугольника, сторона котораго равна радіусу упомянутой окружности, около какой-нибудь изъ сторонъ этого треугольника.

Отв. 21195 куб. дюйм.

427 а). Въ тупоугольномъ треугольникѣ BAC (тупой уголъ при B) основаніе $BC = 12$ сантиметр., высота $AD = 1$ дециметру. Опредѣлить объемъ V тѣла, образованнаго вращеніемъ $\triangle$-ка около основанія BC.

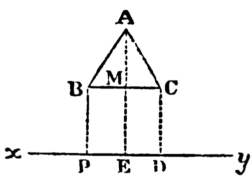
Рѣшеніе. $V = \pi . AD^2 \cdot \frac{DC}{3} - \pi . AD^2 \cdot \frac{DB}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot AD^2 (DC - DB) =$

$= \frac{3{,}141}{3} \cdot 10^2 \cdot 12 = 1256{,}4$ куб. сантиметр.

428. Опредѣлить отношеніе объемовъ двухъ тѣлъ, изъ которыхъ первое происходитъ отъ обращенія равносторонняго треугольника около одной изъ его сторонъ, а другое — отъ обращенія того же треугольника около его высоты.

Отв. Объемъ перваго тѣла къ об. второго относится какъ 6 къ $\sqrt{3}$.

429. Въ кругъ вписанъ правильный $\triangle$-къ. Опредѣлить отношеніе объемовъ тѣлъ, произведенныхъ вращеніемъ круга и треугольника около діаметра, проходящаго чрезъ вершину $\triangle$-ка. *Отв.* $3\frac{5}{9}$.



Черт. 52.

430. Длина стороны равносторонняго треугольника $ABC = 1$ метру (черт. 52). Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ этого треугольника около оси xy, параллельной сторонѣ BC и отстоящей отъ нея на разстояніе $DC =$ длинѣ стороны треугольника ABC.

Отв. $\frac{\pi}{4}\left(1+2\sqrt{3}\right)$.

431. Сторона равносторонняго треугольника ABC (см. черт. 52) равна a. На какомъ разстояніи отъ стороны BC должно провести параллельную ей линію xy для того, чтобы объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника ABC около этой линіи, былъ равенъ объему шара радіуса a?

Отв. Искомое разст. $= \frac{13a}{6\sqrt{3}} = \frac{13a\sqrt{3}}{18}$.

432. Въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ катетовъ $= a$, другой $=$ половинѣ гипотенузы. Опредѣлить: 1) поверхность, 2) объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника около перваго изъ катетовъ.

Отв. 1) πa^2; 2) $\frac{1}{9}\pi a^3$.

433. Объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ прямоугольнаго треугольника ABC около его катета AB, вдвое болѣе объема тѣла, производимаго вращеніемъ того же треугольника около катета AC. Гипотенуза BC треугольника $= a$. По этимъ даннымъ опредѣлить катеты треугольника.

Отв. $x = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$; $y = \frac{2}{5}a\sqrt{5}$.

434. Одинъ изъ катетовъ прямоугольнаго треугольника $=a$, другой $=b$. Опредѣлить поверхность тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника около гипотенузы.

Отв. $\dfrac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

435. Одинъ изъ катетовъ прямоугольнаго треугольника $=a$, другой $=b$. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника около гипотенузы.

Отв. $\dfrac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$.

436. Катетъ AB прямоугольнаго треугольника $ABC=$ 3 метр., катетъ $AC=8$ метр. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника около гипотенузы BC.

Отв. $\dfrac{192\pi}{\sqrt{73}}$.

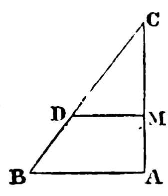
437. Гипотенуза прямоугольнаго треугольника $=a$. Вращеніемъ этого треугольника около гипотенузы производится тѣло, объемъ котораго равенъ объему шара радіуса R. Опредѣлить катеты треугольника.

Отв. $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4R\sqrt{aR}}+\sqrt{a^2-4R\sqrt{aR}}\right)$;

$\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4R\sqrt{aR}}-\sqrt{a^2-4R\sqrt{aR}}\right)$.

Примѣч. Условіе возможности задачи есть $a^2 \geqq 4R\sqrt{aR}$.

438. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, у котораго катетъ $AC=b$ и катетъ $AB=c$, чрезъ средину M стороны AC проведена линія DM, параллельная AB. Опредѣлить боковую поверхность усѣченнаго конуса, производимаго вращеніемъ трапеціи $BDMA$ около AC.



Черт. 53.

Отв. $\dfrac{3\pi}{4}c\sqrt{b^2+c^2}$.

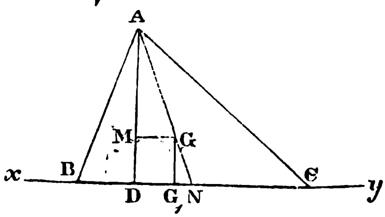
439. Опредѣлить стороны равнобедреннаго треугольника, зная, что его площадь равна площади квадрата, имѣющаго сторону a, и что при вращеніи этого треугольника около основанія (около стороны, не имѣющей себѣ равныхъ) получается тѣло, поверхность котораго равна поверхности шара радіуса R.

Отв. $\dfrac{2R^2}{\sqrt[4]{4R^4-a^4}}$; $\dfrac{2a^2}{\sqrt[4]{4R^4-a^4}}$.

440. Каково должно быть отношеніе высоты равнобедреннаго треугольника къ его основанію для того, чтобы поверхность тѣла, производимаго вращеніемъ этого треугольника около его основанія, была равновелика поверхности сферы, имѣющей діаметромъ основаніе того же треугольника.

(*Faculté de Poitiers*, session d'avril 1878)

Отв. $\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{17}}{8}}$



Черт. 54.

441. Высота треугольника $= a$, площадь его $= S$. Опредѣлить объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ этого треугольника около оси xy, совпадающей съ основаніемъ. (См. черт. 54).

Рѣшеніе. Обозначая искомый объемъ черезъ V, имѣемъ

$$V = \frac{\pi}{3}AD^2 . BD + \frac{\pi}{3} \cdot AD^2 . DC = \frac{\pi}{3} \cdot AD^2 . BC$$

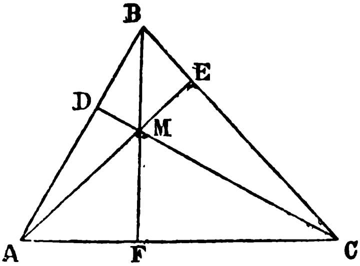
и такъ какъ $AD . BC = 2S$, то $V = \frac{\pi}{3} . AD . 2S = \frac{2\pi}{3} . a . S$.

Замѣч. Если G есть центръ тяжести $\triangle$-ка, то линія AN, проходящая чрезъ точки A и G, дѣлитъ въ точкѣ N сторону BC пополамъ и притомъ $GN = \frac{1}{3} AN$. Проведя $G_1 G$ парал. AD, изъ подоб. $\triangle\triangle$ DAN и GG_1N находимъ $\dfrac{GG_1}{AD} = \dfrac{GN}{AN}$ или $\dfrac{GG_1}{a} = \frac{1}{3}$, откуда $a = 3GG_1$ и слѣдов. искомый объемъ $V = \dfrac{2\pi}{3} \cdot aS = S . 2\pi . GG_1$, т.-е. $=$ произведенію площади $\triangle$-ка на длину окружности, описанной при вращеніи треугольника его центромъ тяжести*).

---

*) Въ ученіи о центрѣ тяжести излагается такъ-называемая Гульденова теорема (*Jullien:* Problèmes de mécanique rationnelle, tome premier, p. 4. 1866), въ силу которой объемъ тѣла, получаемаго отъ вращенія всякой плоской фигуры

442. Треугольникъ ABC (черт. 55), въ которомъ $BC = a$, $AC=b$, $AB=c$, вращается поочередно около каждой изъ своихъ сторонъ. Найти отношеніе объемовъ тѣлъ, произведенныхъ такимъ вращеніемъ.



Черт. 55.

Рѣшеніе. Обозначая черезъ V_b объемъ тѣла, полученнаго отъ вращ. треугольника около стороны $CA=b$, имѣемъ $V_b = \pi(BF)^2\cdot\frac{AF}{3} + \pi(BF)^2\cdot\frac{FC}{3} = \frac{\pi}{3}\cdot(BF)^2.(AF+FC)$

или $V=\frac{\pi}{3}\cdot b.(BF)^2$ . . . . (1).

Обозначивъ площ. треуг. чрезъ S и замѣтивъ, что $S=\frac{b\,.\,BF}{2}$, откуда $BF=\frac{2S}{b}$, изъ (1) находимъ $V_b=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{S^2}{b}$.

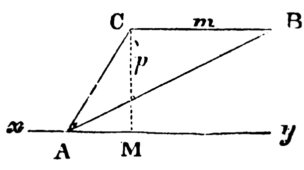
Подобнымъ же путемъ называя чрезъ V_c и V_a объемы тѣлъ, производимыхъ вращеніемъ треугольника сперва около AB и затѣмъ около BC, найдемъ:

$V_c=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{S^2}{c}$, $V_a=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{S^2}{a}$. Так. обр. $V_a:V_b:V_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$.

443. Стороны треугольника суть a, b и c (наибольшая изъ нихъ a). Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника около наибольшей изъ этихъ сторонъ.

Отв. $\frac{4\pi}{3a}\cdot p(p-a)(p-b)(p-c)$, гдѣ $a+b+c=2p$.

444. Линія xy, проходящая чрезъ вершину A треугольника ABC (черт. 56) и параллельная сторонѣ BC, отстоитъ отъ послѣдней на разстояніе $CM=p$; сторона $CB=m$. Опредѣлить

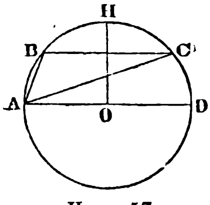


Черт. 56.

около внѣшней оси, расположенной въ плоскости этой фигуры, выражается произведеніемъ площади фигуры на длину окружности, описанной центромъ тяжести фигуры. Результатъ, полученный при рѣшеніи нашей задачи, очевидно представляетъ выраженіе Гульденовой теоремы въ приложеніи къ разсматриваемому частному случаю вращенія.

объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника около оси xy.

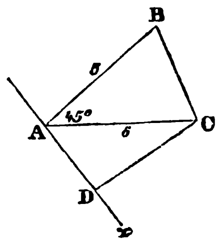
Отв. ${}^2/_3\,\pi p^2 m$ или ${}^1/_3\,\pi p S$ (гдѣ S — площадь треугольника).



Черт. 57.

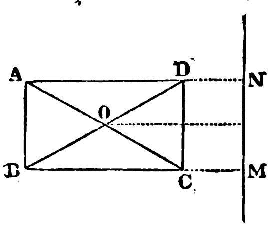
445. Въ кругѣ, радіусъ котораго = 1 метру, дуга ABH = четверти окружности (черт. 57). Чрезъ точку B (въ которой дуга ABH раздѣлена пополамъ) проведена хорда BC, параллельная діаметру AD, и точки B и C соединены съ точкою A. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника ABC около AD.

Отв. ${}^1/_3\,\pi\sqrt{2}$ (куб. метр.).



Черт. 58.

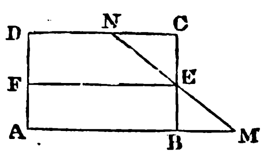
446. Уголъ BAC треугольника ABC $= 45°$; сторона $AB = 5$ метрамъ, сторона $AC = 6$ метрамъ. Вычислить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника ABC около прямой Ax, перпендикулярной къ AB. (См. черт. 58). *Отв.* $5\pi\sqrt{2}\,(5 + 3\sqrt{2})$.



Черт. 59.

447. Въ плоскости прямоугольника $ABCD$ (черт. 59) взята прямая MN, параллельная сторонѣ AB и лежащая внѣ прямоугольника. Доказать, что объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ прямоугольника около MN, равенъ площади этого прямоугольника, умноженной на длину окружности, описанной точкою пересѣченія O его діагоналей.

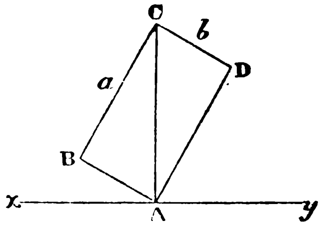
Отв. Полагая $AB = h$, $BC = b$ и $CM = d$, находимъ, что искомый объемъ $= bh \,.\, 2\pi\left(d + \dfrac{b}{2}\right)$.



Черт. 60.

448. Чрезъ средину стороны BC прямоугольника $ABCD$ (черт. 60) проведена прямая MN, пересѣкающая сторону DC въ точкѣ N, а продолженіе стороны AB — въ точкѣ M. При этомъ дано, что длина $AB = a$, длина $BM = b$. Предполагая, что вся фигура вращается около линіи DA, требуется выразить чрезъ a и b отношеніе объемовъ двухъ тѣлъ, изъ которыхъ одно образуется вращеніемъ треугольника BEM, а другое — вращеніемъ треугольника NCE около оси AD.

Отв. $\frac{3a+b}{3a-b}$.



Черт. 61.

449. Въ прямоугольникѣ $ABCD$ (черт. 61) сторона $AB=b$, сторона $AD=a$. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ этого прямоугольника около линіи xy, проходящей чрезъ вершину A и перпендикулярной къ діагонали AC прямоугольника.

Отв. $\pi ab\sqrt{a^2+b^2}$.

450. Отъ послѣдовательнаго вращенія прямоугольника сперва около одной изъ его сторонъ, а затѣмъ около другой, неравной первой, получились два тѣла, изъ которыхъ одно имѣетъ объемъ въ 40000 куб. метровъ, а другое въ 50000 куб. метровъ. Вычислить длину діагонали взятаго прямоугольника.

Отв. Діагональ $= \frac{\sqrt{41}}{4}\sqrt[3]{\frac{32000}{\pi}} = 5\sqrt{41}\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$.

451. Опредѣлить отношеніе объемовъ двухъ тѣлъ, происшедшихъ отъ послѣдовательнаго вращенія даннаго параллелограмма около каждой изъ двухъ смежныхъ его сторонъ a и b. *Отв.* $b : a$.

452. Высоты параллелограмма, соотвѣтствующія двумъ его смежнымъ сторонамъ, суть p и q. Опредѣлить отношеніе объемовъ двухъ тѣлъ, происшедшихъ отъ послѣдовательнаго вращенія параллелограмма около каждой изъ двухъ его смежныхъ сторонъ. *Отв.* $p : q$.

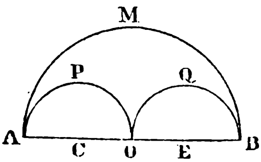
453. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго отъ обращенія правильнаго шестиугольника, сторона котораго $= a$, около діагонали, раздѣляющей его пополамъ, и сравнить съ объемомъ описаннаго шара. *Отв.* Искомый объемъ $= \pi a^3$.

454. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ правильнаго шестиугольника, сторона котораго $= a$, около одной изъ его сторонъ. *Отв.* $\frac{9}{2}\pi a^3$.

455. Опредѣлить поверхность тѣла, производимаго вращеніемъ правильнаго шестиугольника, сторона котораго $= a$, около одной изъ его сторонъ. *Отв.* $6\pi a^2\sqrt{3}$.

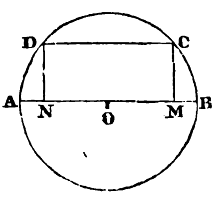
456. Опредѣлить полную поверхность тѣла, производимаго обращеніемъ правильнаго восьмиугольника, сторона котораго $= a$, около линіи, соединяющей средины противоположныхъ сторонъ восьмиугольника (и слѣдовательно проходящей чрезъ центръ восьмиугольника).

Отв. $\left(3\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}\right)\pi a^2$. [*Замѣчаніе.* Радіусъ окружности, вписанной въ правильный восьмиугольникъ, сторона котораго $= a$, равенъ $\frac{1}{2}a(1 + \sqrt{2})$. [См. зад. **152 — 158**].



Черт. 62.

457. Радіусъ полуокружности $ABMA$ (черт. 62) равенъ R. На каждомъ изъ радіусовъ AO и OB, какъ на діаметрахъ, описано по полуокружности (APO и OQB). Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ около линіи AB той фигуры ($AMBQOPA$), которая ограничена полуокружностью AMB и линіями APO и OQB. *Отв.* πR^3.

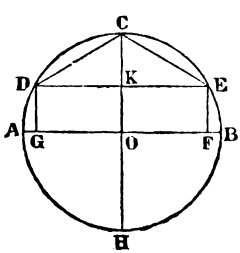


Черт. 63.

458. Въ кругѣ, радіусъ котораго $= R$, проведена хорда DC (черт. 63), параллельная діаметру и равная a; изъ концовъ D и C этой хорды опущены на діаметръ перпендикуляры DN и CM. Опредѣлить: 1) боковую поверхность и 2) объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ прямоугольника $NDCM$ около діаметра AB.

Отв. 1) $\pi a\sqrt{4R^2 - a^2}$;

2) $\frac{\pi a(4R^2 - a^2)}{4}$.

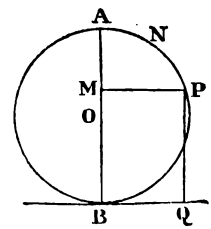


Черт. 64.

459. Въ кругѣ, радіусъ котораго $= R$, проведены два взаимноперпендикулярныхъ діаметра AB и CH (черт. 64). Требуется провести параллельно AB такую хорду DE, чтобы объемъ цилиндра, производимаго вращеніемъ прямоугольника $DEFG$ около AB, равнялся объему тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника DCE около AB.

Отв. Разстояніе OK искомой хорды отъ AB равно $\frac{R}{10}(1+\sqrt{21})$.

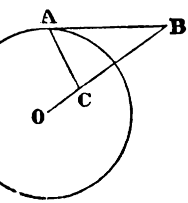
460. На діаметрѣ AB (черт. 65) круга, имѣющаго радіусъ R, взятъ отрѣзокъ $AM=h$, и въ точкѣ M возставленъ къ діаметру перпендикуляръ MP, пересѣкающійся съ окружностью въ точкѣ P. Въ точкѣ B проведена къ кругу касательная, и на эту касательную опущенъ изъ точки P перпендикуляръ PQ. Опредѣлить полную поверхность тѣла, производимаго вращеніемъ около AB той фигуры, которая ограничена діаметромъ AB, прямыми BQ и PQ и дугою ANP.



Черт. 65.

Отв. $2\pi\left[(2R-h)\sqrt{h(2R-h)}+Rh\right]+\pi h(2R-h)$.

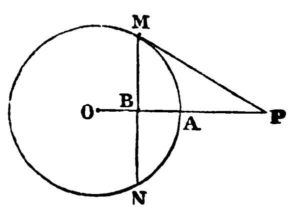
461. Къ окружности, имѣющей радіусъ въ 3 метра, проведена въ точкѣ A (черт. 66) касательная и на этой касательной взятъ отрѣзокъ $AB=4$ метрамъ; точка B соединена съ центромъ O и на линію OB изъ точки A опущенъ перпендикуляръ AC. Опредѣлить боковую поверхность конуса, образуемаго вращеніемъ $\triangle$-ка ABC около линіи OB.



Черт. 66.

Отв. $\frac{48}{5}\pi$ (квадр. метр.).

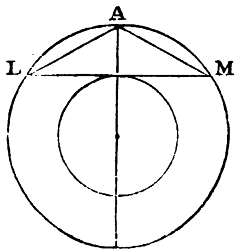
462. Въ кругѣ радіуса R проведена чрезъ средину радіуса OA (черт. 67) перпендикулярная къ нему хорда MN; чрезъ точку M проведена затѣмъ къ кругу касательная MP, пересѣкающая продолженіе радіуса въ точкѣ P. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника PMB около оси BP.



Черт. 67.

Отв. $\frac{3}{8}\pi R^3$.

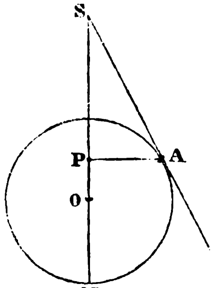
463. Даны двѣ концентрическія окружности, коихъ радіусы R и r. Къ внутренней окружности проведена касательная LM (черт. 68). Опредѣлить боковую поверхность конуса, производимаго вращеніемъ треугольника LAM около діаметра AB, перпендикулярнаго къ LM.



Черт. 68.

Отв. $\pi(R-r)\sqrt{2R(R+r)}$.

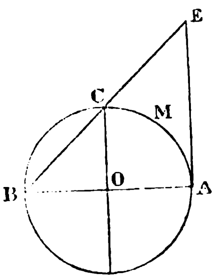
464. Радіусъ круга$=R$. На продолженіи діаметра этого круга, на разстояніи d отъ центра O, взята точка S (черт. 69) и изъ нея проведена къ кругу касательная SA (A есть точка касанія). При вращеніи всей фигуры около взятаго діаметра окружность описываетъ сферу, а касательная SA—боковую поверхность конуса, основаніемъ котораго служитъ кругъ, описанный линіей PA, перпендикулярной къ линіи OS. Опредѣлить: 1) объемъ и 2) боковую поверхность этого конуса.



Черт. 69.

Отв. 1) $\dfrac{\pi R^2(d^2-R^2)^2}{3d^3}$; 2) $\dfrac{\pi R}{d}(d^2-R^2)$.

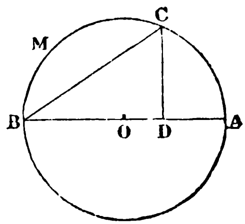
465. Въ кругѣ, радіусъ котораго$=R$, проведены два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра CD и AB (черт. 70); точки B и C соединены прямою BC, которая затѣмъ продолжена до встрѣчи въ точкѣ E съ касательною AE, проведенною къ окружности въ точкѣ A.



Черт. 70.

Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ около AB той фигуры, которая ограничена прямыми CE и AE и дугою AMC. *Отв.* $\frac{5}{3}\pi R^3$.

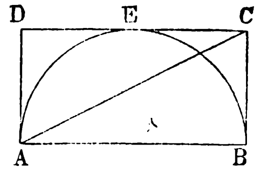
466. Радіусъ окружности$=R$. Какой длины отрѣзокъ BD (черт. 71) должно взять на діаметрѣ этой окружности для того, чтобы, возставивъ къ AB въ точкѣ D перпендикуляръ DC и соединивъ точку C съ точкою B, получить такой треугольникъ BCD, что если станемъ вращать всю фигуру около AB, то отношеніе поверхности, описанной дугою BMC, къ боковой поверхности конуса, образованнаго вращеніемъ треугольника BCD, будетъ равно $\frac{m}{n}$?



Черт. 71.

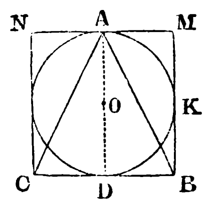
Отв. $BD = 2R \cdot \frac{m^2 - n^2}{m^2}$.

467. На діаметрѣ AB полуокружности AEB (черт. 72) построенъ описанный прямоугольникъ $ABCD$ и проведена діагональ AC. Показать, что при вращеніи около AB треугольника ACB, полукруга AEB и прямоугольника $ADCB$ получаются три тѣла, объемы которыхъ соотвѣтственно относятся между собою какъ $1:2:3$.



Черт. 72.

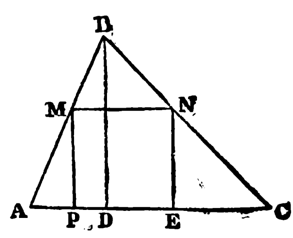
468. Около круга описанъ квадратъ $CNMB$ (черт. 73) и на сторонѣ его CB построенъ равнобедренный треугольникъ CAB, котораго вершина A лежитъ на сторонѣ NM квадрата. Опредѣлить: 1) отношеніе поверхностей, 2) отношеніе объемовъ трехъ тѣлъ, производимыхъ вращеніемъ всей фигуры около высоты треугольника.



Черт. 73.

Отв. 1) $S_ш : S_ц : S_к = 4 : 6 : (1 + \sqrt{5})$; 2) $V_ш : V_ц : V_к = 2 : 3 : 1$.

469. Въ остроугольный треугольникъ ABC (черт. 74), имѣющій основаніе $AC = b$ и высоту $BD = h$, вписанъ квадратъ $PMNE$ такъ, что одна изъ сторонъ квадрата (PE) лежитъ на основаніи AC треугольника. Опредѣлить отношеніе объемовъ двухъ тѣлъ, изъ которыхъ

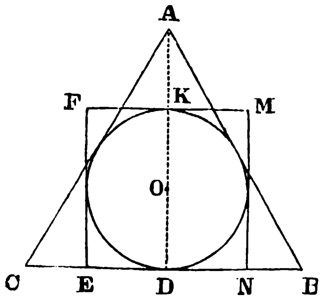


Черт. 74.

одно происходитъ отъ обращенія треугольника ABC около AC, а другое — отъ обращенія квадрата около той же линіи.

Отв. $\frac{(b+h)^3}{3b^2 h}$.

470. Около круга радіуса R описанъ квадратъ (черт. 75) и равносторонній треугольникъ, котораго основаніе лежитъ на сторонѣ квадрата. Опредѣлить отношеніе поверхностей, а также отношеніе объемовъ шара, цилиндра и конуса, получаемыхъ при вращеніи фигуры около высоты треугольника.



Черт. 75.

Рѣшеніе. Обозначая поверхность шара чрезъ $S_ш$, цилиндра — чрезъ $S_ц$ и конуса — чрезъ $S_к$, находимъ, что

$$S_ш = 4\pi R^2, \qquad S_ц = 2\pi \,.\, DN \,.\, MN + 2\pi(DN)^2 = 6\pi R^2,$$

$S_к = 2\pi \,.\, DB \,.\, {}^1/_2\, AB + \pi(DB)^2$. Зная, что сторона правильнаго вписаннаго въ кругъ треугольника $= R\sqrt{3}$, по извѣстной формулѣ не трудно найти, что сторона правильнаго треугольника, описаннаго около того же круга, выражается чрезъ $2R\sqrt{3}$, такъ что $S_к = 2\pi \,.\, R\sqrt{3} \,.\, \frac{2R\sqrt{3}}{3} + \pi(R\sqrt{3})^2 = 9\pi R^2$. Имѣемъ:

$$S_ш : S_ц : S_к = 4 : 6 : 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

(Отсюда видимъ: что $S_ц$ есть средн. пропорціональн. между $S_ш$ и $S_к$). Далѣе обозначивъ объемы: шара — чрезъ $V_ш$, цилиндра — чрезъ $V_ц$ и конуса — чрезъ $V_к$, найдемъ:

$$V_ш = {}^4/_3\pi R^3; \qquad V_ц = \pi(DN)^2 \,.\, MN = 2\pi R^3;$$

$$V_к = \pi(DB)^2 \cdot \frac{AD}{3} = \pi(DB)^2 \cdot \frac{\sqrt{AB^2 - DB^2}}{3} = 3\pi R^3.$$ Так. образ.

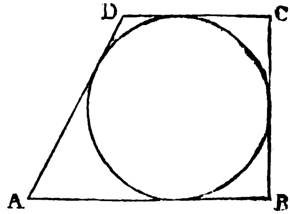
$$V_ш : V_ц : V_к = {}^4/_3 : 2 : 3 = 4 : 6 : 9 \ldots\ldots\ldots (2).$$

(Отсюда видно, что $V_ц$ есть средн. пропорціонал. между $V_ш$ и $V_к$). Разсматривая (1) и (2), находимъ $S_ш : S_ц : S_к = V_ш : V_ц : V_к$.

471. Въ кругъ вписанъ квадратъ, площадь котораго = 8 квадр. метрамъ; около круга описанъ равносторонній треугольникъ, одна сторона котораго параллельна сторонѣ квадрата. Вся фигура вращается около продолженнаго діаметра круга, проходящаго чрезъ вершину треугольника. Вычислить объемы трехъ тѣлъ вращенія.

Отв. 1) 24π; 2) $\frac{32\pi}{3}$; 3) $4\pi\sqrt{2}$ (въ кубич. метр.).

472. Трапеція $ABCD$ (черт. 76), углы B и C которой — прямые, описана около окружности радіуса R. Зная, что сторона $AD = 2a$, опредѣлить: 1) боковую поверхность s_1, 2) полную поверхность s и 3) объемъ v усѣченнаго конуса, образуемаго вращеніемъ трапеціи $ACBD$ около BC.



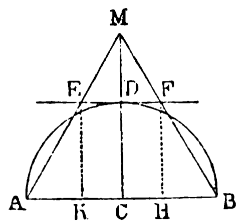
Черт. 76.

Отв. 1) $s_1 = 4a\pi(a + R)$;

2) $s = 8a\pi(a + R)$.

3) $v = \frac{4}{3}\pi R[2a^2 + 3aR^2 + R^2] = \frac{4}{3}\pi R(a + R)(R + 2a)$.

473. На діаметрѣ AB (черт. 77) полуокружности ADB, имѣющей радіусъ $AC = R$, построенъ равносторонній треугольникъ AMB. Касательная EF къ той же полуокружности, параллельная діаметру, пересѣкаетъ стороны AM и MB треугольника въ точкахъ E и F. Показать, что вращеніемъ ломаной линіи $AEFB$ около AB образуется поверхность, равномѣрная съ поверхностью сферы, описываемой полуокружностью ADB при вращеніи около AB.



Черт. 77.

Рѣш. Иском. поверхн. $S = 2\pi R.AE + 2\pi R.EF = 2\pi R.(AE + EF)$..(1).

Подобіе треуг. EAK и CMA даетъ $\frac{AE}{MA} = \frac{R}{MC}$. Изъ этой пропорціи, замѣтивъ, что $AM = 2R$ и $MC = R\sqrt{3}$, находимъ $AE = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Подобіе треугольниковъ MEF и MAB даетъ $\frac{EF}{AB} = \frac{MC - CD}{MC}$ или $\frac{EF}{2R} = \frac{R\sqrt{3} - R}{R\sqrt{3}}$, откуда $EF = \frac{2R(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}}$ $= \frac{2R\sqrt{3}\ (\sqrt{3} - 1)}{3}$. Сдѣлавъ подстановку найденныхъ выраженій AE и EF въ (1), получимъ $S = 4\pi R^2$.

474. Металлическій цилиндръ, высота котораго $= 121\,^1/_2$ дм., перелитъ въ шаръ. Діаметръ основанія цилиндра относится къ діаметру шара какъ $8:9$. Найти оба діаметра.

Отв. Діам. цил. $= 128$ дюйм.; діам. шара $= 144$ дюйм.

475. Металлическій цилиндръ, въ которомъ діаметръ относится къ высотѣ какъ $3:2$, перелитъ въ шаръ съ радіусомъ въ 48 сантиметровъ. Вычислить діаметръ и высоту цилиндра. *Отв.* Діаметръ $= 96$ сантиметр., высота $= 64$ сантим.

476. Высота цилиндра $= 1$ метру. Полная его поверхность $=$ площади круга, имѣющаго радіусъ въ 2 метра длины. Опредѣлить объемъ этого цилиндра.

Отв. Иском. объемъ $= \pi$ куб. метр. $= 3$ куб. метр. $+ 141$ куб. децим. $+ 592$ куб. сантим. (съ точн. до 1-го куб. сантим.).

477. Объемъ шара, имѣющаго въ діаметрѣ 2,4 фута, равенъ объему конуса, имѣющаго діаметръ основанія $= 1$ футу. Опредѣлить отношеніе боковой поверхности конуса къ поверхности шара.

Отв. $\dfrac{\sqrt{1 + 4\,.\,(27{,}648)^2}}{23{,}04}$ (приблиз. $= 2{,}4$).

478. Цилиндръ описанъ около двухъ шаровъ равнаго радіуса R. Разстояніе центровъ этихъ шаровъ $= d$. Опредѣлить объемъ тѣла, ограниченнаго шаровыми поверхностями и поверхностью цилиндрическою. *Отв.* $\frac{1}{3}\pi R^2(3d - 4R)$.

(*Замѣчаніе.* Если шары касаются, то искомый объемъ $= \frac{2}{3}\pi R^3$).

479. Діагональ квадрата $= a$. Найти 1) сторону этого квадрата, 2) его площадь, 3) объемъ куба, котораго полная поверхность равняется площади упомянутаго квадрата, и 4) площадь основанія цилиндра, который равномѣренъ съ найденнымъ кубомъ и имѣетъ съ этимъ кубомъ одинаковую высоту.

Отв. 1) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\dfrac{a^2}{2}$; 3) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{72}$; 4) $\dfrac{a^2}{12}$.

480. Внутри куба, ребро котораго $= a = 2$ метрамъ, помѣщенъ цилиндръ, верхнее основаніе котораго представляетъ кругъ, вписанный въ верхнее основаніе куба, а нижнее —

кругъ, вписанный въ нижнее основаніе куба. Опредѣлить объемъ этого цилиндра.

Отв. Объемъ цилиндра $= \frac{\pi a^3}{4} = 6{,}28$ куб. метр.

481. Ребро правильнаго тетраэдра $= a$. Опредѣлить радіусы R и r — шаровъ, описаннаго около тетраэдра и вписаннаго въ него.

Отв. $R = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$; $r = a\sqrt{\frac{1}{24}} = \frac{a}{12}\sqrt{6}$.

482. По данному ребру a куба опредѣлить радіусъ R шара, описаннаго около куба. *Отв.* $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

483. По данному ребру a правильнаго октаэдра опредѣлить: 1) радіусъ R шара, описаннаго около октаэдра, 2) объемъ v октаэдра.

Отв. 1) $R = a\sqrt{{}^1/_2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; 2) $v = \frac{2a^3}{3}\sqrt{{}^1/_2} = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$.

484. Въ шарѣ, радіусъ котораго $= 6$ футамъ, проведено сѣченіе на разстояніи $^1/_4$ радіуса отъ центра. Въ сѣченіе вписанъ квадратъ, служащій общимъ основаніемъ для двухъ правильныхъ пирамидъ, вершины которыхъ лежатъ на противоположныхъ концахъ шарового діаметра, перпендикулярнаго къ сѣченію. Опредѣлить объемъ образовавшейся двойной пирамиды. *Отв.* 270 куб. фут.

485. Въ шарѣ, радіусъ котораго $= 13$ футамъ, проведено сѣченіе, перпендикулярное къ діаметру и отстоящее отъ центра шара на 5 футовъ. Площадь этого сѣченія служитъ общимъ основаніемъ для двухъ конусовъ, вершины которыхъ лежатъ на шаровой поверхности, на противоположныхъ концахъ шарового діаметра. Опредѣлить объемъ составившагося двойного конуса. *Отв.* 3918,72 куб. фут.

486. Въ шарѣ, радіусъ котораго $= r$, діаметръ раздѣленъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и черезъ точку дѣленія проведена плоскость, перпендикулярная къ діаметру. Образовавшееся сѣченіе служитъ общимъ основаніемъ для двухъ конусовъ, вершины которыхъ лежатъ на широкой поверхности, на противоположныхъ концахъ шарового діаметра. Опредѣлить объемъ составившагося двойного конуса.

Отв. $\frac{8\pi r^3}{3}(\sqrt{5}-2)$.

487. Обѣ половины двойного конуса имѣютъ общее основаніе, площадь котораго равна площади большóго круга нѣкотораго шара. 1) Какъ относятся между собою поверхности двойного конуса и шара, если объемы этихъ тѣлъ равны? 2) Какъ относятся между собою объемы двойного конуса и шара, если поверхности этихъ тѣлъ равны?

Отв. 1) $\sqrt{5}:2$; 2) $\sqrt{3}:2$.

488. Конусъ, высота котораго $=82$ метрамъ, раздѣленъ на три равновеликія части двумя плоскостями, параллельными его основанію. Опредѣлить разстояніе каждой изъ этихъ двухъ плоскостей отъ вершины конуса.

Отв. 1) $82\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; 2) $82\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ (въ метрахъ).

489. Полная поверхность усѣченнаго конуса равна 616 кв. фут.; высота его $=8$ фут. Разность діаметровъ обоихъ основаній $=12$ футамъ. Вычислить радіусы основаній (принимая $\pi=\frac{22}{7}$ и ограничиваясь однимъ десятичнымъ знакомъ).

Отв. Меньшій изъ радіусовъ $=2{,}7$ фут.; бóльшій $=8{,}7$ фут.

490. Найти отношеніе радіусовъ основаній усѣченнаго конуса, объемъ котораго равенъ половинѣ объема цилиндра, имѣющаго высоту такую же, какъ и усѣченный конусъ, а основаніе — равное бóльшему изъ основаній этого усѣченнаго конуса.

Отв. Отнош. рад. меньшаго основ. къ радіусу больш. $=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

491. Усѣченный конусъ, радіусы основаній котораго относятся между собою какъ $m:n$, равновеликъ нѣкоторому полному конусу, у котораго радіусъ основанія равенъ полусуммѣ радіусовъ основаній усѣченнаго конуса. Опредѣлить отношеніе высоты усѣченнаго къ высотѣ полнаго конуса.

Отв. $(m+n)^2:4(m^2+n^2+mn)$.

492. Рѣшить предыдущую задачу, полагая:
1) $m:n=2:1$ и 2) $m:n=3:2$. *Отв.* 1) $9:28$; 1) $25:75$.

493. Нижнее основаніе цилиндра служитъ также основаніемъ конуса, имѣющаго вершину въ центрѣ верхняго основанія цилиндра; верхнее основаніе цилиндра служитъ основаніемъ другого конуса, вершина котораго лежитъ въ центрѣ нижняго основанія цилиндра. Зная, что радіусъ основанія цилиндра $= R$, опредѣлить длину той окружности, по которой пересѣкаются боковыя поверхности обоихъ конусовъ. *Отв.* πR.

494. По объему K равносторонняго конуса опредѣлить полную поверхность этого конуса.

Отв. $3\sqrt[3]{3\pi K^2}$.

495. Равносторонній конусъ имѣетъ объемъ $= W$. Опредѣлить объемъ описанной около этого конуса правильной треугольной пирамиды.

Отв. $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\cdot W$.

496. Сохраняя условія предыдущей задачи, опредѣлить полную поверхность упомянутой пирамиды.

Отв. $9\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{3W^2}{\pi^2}}$.

497. Плоскость, проходящая черезъ ось конуса, даетъ въ сѣченіи съ нимъ равносторонній треугольникъ, высота котораго $= h$. Опредѣлить: 1) боковую поверхность и 2) объемъ этого конуса. *Отв.* 1) $\frac{2}{3}\pi h^2$; 2) $\frac{1}{9}\pi h^3$.

498. Плоскость, проходящая чрезъ ось конуса, даетъ въ сѣченіи съ нимъ равносторонній треугольникъ, площадь котораго $= S$. Опредѣлить объемъ конуса.

Отв. $\frac{\pi S}{3}\sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{3}}$.

499. Плоскость, проходящая чрезъ ось конуса, даетъ въ сѣченіи съ нимъ равносторонній треугольникъ, равновеликій неправильному многоугольнику, описанному около окружности радіуса R. Зная, что периметръ этого многоугольника $= p$, опредѣлить объемъ конуса.

Отв. $\frac{\pi}{12}pR\sqrt{\frac{2pR\sqrt{3}}{3}}$.

500. Радіусъ нижняго основанія усѣченнаго конуса $= R$, радіусъ его верхняго основанія $= R_1$. Плоскость, проходящая чрезъ ось этого конуса, даетъ въ сѣченіи съ нимъ трапецію, равновеликую правильному треугольнику, сторона котораго $= a$. Опредѣлить боковую поверхность упомянутаго усѣченнаго конуса.

Отв. $\frac{\pi}{4}\sqrt{3a^4 + 16(R^2 - R_1^2)^2} = \frac{\pi}{4}\sqrt{3a^4 + 16(R + R_1)^2 \cdot (R - R_1)^2}$.

501. Правильный шестиугольникъ, сторона котораго $= a$, служитъ основаніемъ правильной пирамиды. Какую высоту имѣетъ эта пирамида, если ея боковая поверхность въ 10 разъ болѣе площади основанія? *Отв.* $\frac{3}{2}a\sqrt{33}$.

502. Радіусъ круга, описаннаго около основанія правильной шестиугольной пирамиды, $= R$; высота ея $= h$. Опредѣлить: 1) боковую поверхность, 2) объемъ этой пирамиды.

Отв. 1) $\frac{3R}{2}\sqrt{4h^2 + 3R^2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}R^2 h$.

503. Въ конусъ, у котораго радіусъ основанія $= R = 7$ дюймамъ, а высота $= h = 6$ дюймамъ, вписана пирамида съ квадратнымъ основаніемъ (квадратъ, служащій основаніемъ пирамиды, вписанъ въ кругъ, служащій основаніемъ конуса: вершины конуса и пирамиды совпадаютъ). Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

Отв. $2R\sqrt{2h^2 + R^2} = 154$ кв. дюйм.

504. По данному объему V усѣченнаго конуса, его высотѣ h и площади m^2 трапеціи, происшедшей отъ сѣченія конуса плоскостью, проходящею чрезъ его ось, опредѣлить радіусы основаній конуса.

Отв. $\frac{1}{2h}\left(m^2 \pm \sqrt{\frac{3(4hV - \pi m^4)}{\pi}}\right)$ и $\frac{1}{2h}\left(m^2 \mp \sqrt{\frac{3(4hV - \pi m^4)}{\pi}}\right)$.

505. Высота усѣченнаго конуса $= 20$ метрамъ; радіусъ его нижняго основанія $= 8$ метрамъ; радіусъ верхняго основанія $= 3$ метрамъ. На какомъ разстояніи отъ нижняго основанія нужно провести плоскость, параллельную основаніямъ конуса, для того, чтобы площадь полученнаго сѣченія равнялась учетверенной площади верхняго основанія конуса?

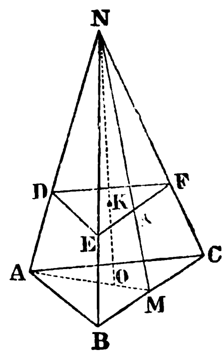
Отв. Искомое разстояніе $= 8$ метрамъ.

506. Усѣченная пирамида, имѣющая высоту h и площади основаній A и B, пересѣчена двумя плоскостями, дѣлящими высоту на три равныя части и параллельными основаніямъ. Опредѣлить объемъ каждой изъ трехъ образовавшихся частей пирамиды.

Отв. $\frac{h}{81}\left[19A+B+7\sqrt{A.B}\right]$; $\frac{h}{81}\left[7A+7B+13\sqrt{A.B}\right]$;
$$\frac{h}{81}\left[19B+A+7\sqrt{A.B}\right].$$

(*Замѣчаніе.* Сравн. зад. **387**.)

507. Основаніемъ правильной пирамиды $NACB$ (черт. 78) служитъ равносторонній треугольникъ ACB, сторона котораго $=a$. Высота пирамиды $NO=2a$. На какомъ разстояніи KO отъ основанія ABC нужно провести параллельную ему плоскость DEF для того, чтобы площадь полученнаго сѣченія DEF была равна боковой поверхности усѣченной пирамиды $ABCDEF$?



Черт. 78.

Рѣшеніе. Обозначивъ площадь правильнаго треугольника ABC черезъ B, имѣемъ
$$B=BC\cdot\frac{AM}{2}=\frac{a\,.\,a\sqrt{3}}{2\,.\,2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Такъ какъ данная пирамида есть правильная, то точка O (основаніе высоты пирамиды) лежитъ въ центрѣ треугольника ABC, такъ что $OM=\frac{AM}{3}=\frac{1}{6}a\sqrt{3}$; слѣдоват. $NM^2=NO^2+OM^2=$ $=4a^2+\frac{3a^2}{36}=\frac{49a^2}{12}$, откуда $MN=\frac{7}{6}a\sqrt{3}$. Обознач. боковую поверхность пирамиды $NABC$ чрезъ S, имѣемъ $S=3a\cdot\frac{NM}{2}$ или $S=\frac{7}{4}a^2\sqrt{3}$. . . (2). Сравнивая (2) съ (1), видимъ, что $\frac{S}{B}=7$. Такъ какъ пирамида $NDFE$ подобна пирамидѣ $NACB$, то, обозначивъ боковую поверхность пирам. $NDEF$ чрезъ S_1, а площадь DFE чрезъ B_1, будемъ имѣть $\frac{S}{B}=\frac{S_1}{B_1}=\frac{S-S_1}{B-B_1}=7.$

Но $S - S_1$ есть боковая поверхность усѣченной пир. $ABCDEF$ и, по условію задачи, равна B_1; слѣдоват. $\frac{B_1}{B - B_1} = 7$, откуда $\frac{B_1}{B} = \frac{7}{8}$ и потому $\frac{NK^2}{NO^2} = \frac{B_1}{B} = \frac{7}{8}$, откуда $NK^2 = \frac{7 \cdot NO^2}{8} = \frac{7a^2}{2}$ и слѣдовательно

$$NK = a\sqrt{\frac{7}{2}};\quad KO = 2a - NK = a\left(2 - \sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

508. Высота нѣкоторой пирамиды $NABC$ (рисунк. можетъ служить черт. предыдущей задачи) равна h. На какомъ разстояніи отъ плоскости основанія нужно провести параллельное ей сѣченіе DEF для того, чтобы объемъ отсѣченной полной пирамиды $NDEF$ составилъ $^1/_8$ объема образовавшейся усѣченной пирамиды $ABCDEF$?

Рѣшеніе. Обозначимъ объемъ пирам. $NABC$ чрезъ V, объемъ пирам. $NDEF$ — чрезъ V_1, высоту пир. $NDEF$ — чрезъ x, искомое разстояніе — чрезъ y. Имѣемъ $\frac{V}{V_1} = \frac{h^3}{x^3}$ или $\frac{V - V_1}{V_1} = \frac{h^3 - x^3}{x^3}$. По условію, $\frac{V - V_1}{V_1} = 8$; слѣдовательно $\frac{h^3 - x^3}{x^3} = 8$ или $h^3 - 9x^3 = 0$.

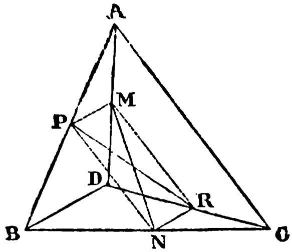
Этому уравненію, полагая $\sqrt[3]{9} = m$, даемъ видъ $h^3 - m^3x^3 = 0$ или $(h - mx)(h^2 + mhx + m^2x^2) = 0$. Отсюда заключаемъ, что (1)........$h - mx = 0$; $h^2 + mhx + m^2x^2 = 0$........(2). Корни ур-ія (2) мнимы; изъ ур-ія же (1) находимъ

$$x = \frac{h}{m} = \frac{h}{\sqrt[3]{9}} \text{ и слѣдов. } y = h - x = h\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right).$$

509. Объемъ усѣченной пирамиды $= V$; сходственныя стороны нижняго и верхняго ея основаній относятся какъ $p:1$, а высота полной пирамиды $= h$. Опредѣлить площади верхняго и нижняго основаній.

Отв. Площ. верхн. осн. $= \frac{3pV}{h(p^3 - 1)}$; пл. нижн. осн. $= \frac{3p^3V}{h(p^3 - 1)}$.

510. Въ треугольной пирамидѣ $ABCD$ (черт. 79) ребра AB, AD, BC и DC въ точкахъ P, M, N и R раздѣлены пополамъ; длина $PR = a$, длина $MN = b$. Выразить чрезъ a и b сумму квадратовъ противоположныхъ реберъ AC и BD.



Черт. 79.

Рѣшеніе. Замѣтивъ, что фигура $PMRN$ есть параллелограммъ, заключаемъ, что

$$2PN^2 + 2PM^2 = a^2 + b^2$$

или

$$PN^2 + PM^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \ldots (1).$$

Такъ какъ $\frac{PN}{AC} = \frac{1}{2}$ и $\frac{PM}{BD} = \frac{1}{2}$, откуда $PN = \frac{AC}{2}$ и $PM = \frac{BD}{2}$, то изъ (1) находимъ $AC^2 + BD^2 = 2\ (a^2 + b^2)$.

511. Въ правильной трегранной призмѣ $ABCDFG$, сторона основанія которой $= a$, проведено чрезъ ребро FG сѣченіе EKG, наклоненное къ основанію FDG призмы подъ угломъ въ 45^0. Найти: 1) объемъ и 2) полную поверхность пирамиды $DFGK$.

Отв. 1) $\frac{a^3}{8}$; 2) $(3 + \sqrt{2})\ \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

512. Сѣченіе цилиндра плоскостью, проходящею чрезъ его высоту, представляетъ квадратъ, сторона котораго $= a$. Въ нижнее основаніе цилиндра вписанъ квадратъ, служащій основаніемъ правильной пирамиды, вершина которой лежитъ на верхнемъ основаніи цилиндра. Опредѣлить полную поверхность пирамиды. *Отв.* $2a^2$.

513. Сѣченіе цилиндра плоскостью, проходящею чрезъ его высоту, представляетъ квадратъ, сторона котораго $= a$. Въ нижнее основаніе цилиндра вписанъ правильный шестиугольникъ, служащій основаніемъ правильной пирамиды, вершина которой лежитъ въ центрѣ верхняго основанія цилиндра. Опредѣлить: 1) объемъ и 2) боковую поверхность пирамиды.

Отв. 1) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$; 2) $\frac{3a^2}{8}\sqrt{19}$.

514. Въ основаніе цилиндра вписанъ равносторонній треугольникъ, служащій основаніемъ правильной трехгранной пирамиды, вершина которой находится въ центрѣ верхняго основанія цилиндра. Боковая поверхность цилиндра равна $150\frac{6}{7}$ кв. дюйм., а діагональ сѣченія, проходящаго чрезъ ось цилиндра, равна 10 дюйм. Опредѣлить объемъ трехгранной пирамиды ($\pi = \frac{22}{7}$; приближеніе до 0,1).

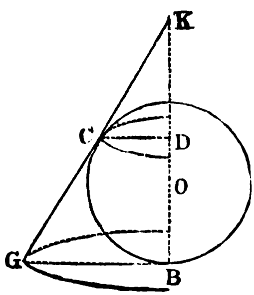
Отв. 41,6 куб. дюйм. или 31,2 куб. д.

515. Сѣченіе цилиндра плоскостью, проходящею чрезъ высоту цилиндра, представляетъ прямоугольникъ, у котораго діагональ = 75 дюйм.; высота прямоугольника относится къ его основанію какъ 4 : 3. Въ нижнее основаніе цилиндра вписанъ крадратъ, служащій основаніемъ правильной пирамиды, имѣющей вершину въ центрѣ верхняго основанія цилиндра. Опредѣлить объемъ этой пирамиды. *Отв.* 20250 куб. дюйм.

516. Объемъ цилиндра, имѣющаго окружность основанія, равную c, есть v. Около этого цилиндра описана прямая призма, полная поверхность которой = s. Основаніями призмы служатъ равные неправильные многоугольники, изъ которыхъ одинъ описанъ около верхняго, а другой — около нижняго основанія цилиндра. Опредѣлить объемъ призмы.

Отв. $\frac{2\pi scv}{8\pi^2 v + c^3}$.

517. Въ конусъ, у котораго образующая = a, а радіусъ основанія = r, вписанъ шаръ (черт. 80). Опредѣлить радіусъ параллельнаго основанію круга, по окружности котораго шаръ касается поверхности конуса.



Черт. 80.

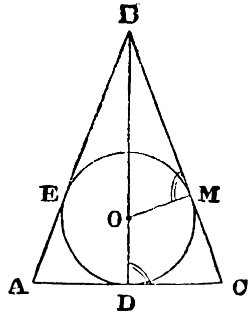
Рѣш. Обозначая искомую длину CD чрезъ x, имѣемъ $\frac{x}{BG} = \frac{KC}{KG}$ или $\frac{x}{r} = \frac{a - CG}{a}$.

Такъ какъ $CG = GB$ (касательныя, проведенныя къ шару изъ одной и той же внѣшней точки, равны), то $\frac{x}{r} = \frac{a - r}{a}$,

откуда $x = \frac{r}{a}(a - r)$.

518. Въ конусъ (черт. 81), высота котораго = 12 фут., вписанъ шаръ, имѣющій радіусъ въ 3 фута. Опредѣлить объемъ конуса.

Рѣш. $BM = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{72}$. Изъ подобія треугольниковъ DBC и OBM находимъ $\frac{DC}{OM} = \frac{BD}{BM}$ или $\frac{DC}{3} = \frac{12}{\sqrt{72}}$, откуда $DC = \frac{36}{\sqrt{72}}$. Искомый объемъ $= \pi . DC^2 \cdot \frac{BD}{3} = 3,14 \cdot \frac{36 . 36 . 12}{72 . 3}$ (куб. ф.) $= 226,08$ куб. фут.



Черт. 81.

519. Около шара радіуса R (черт. 81) описанъ конусъ, высота котораго вдвое болѣе діаметра шара. Показать, что полная поверхность этого конуса вдвое болѣе поверхности шара, а объемъ конуса вдвое болѣе объема шара.

Отв. Выражая чрезъ R полную поверхность S и объемъ V конуса, имѣемъ $S = 8\pi R^2$; $V = \frac{8}{3}\pi R^3$.

520. Въ конусъ, у котораго высота $= h$, а образующая $= b$, вписанъ шаръ. Опредѣлить радіусъ шара. (См. черт. 81.)

Рѣшеніе. Обозначая радіусъ шара чрезъ x, а площадь треугол. ABC чрезъ $\triangle$, имѣемъ $x = \frac{2\triangle}{AB + BC + AC}$ (См. 217-ую зад.).

Замѣтивъ, что $AC = 2\,DC = 2\sqrt{b^2 - h^2}$ и что $\triangle = h\sqrt{b^2 - h^2}$, находимъ

$$x = \frac{2h\sqrt{b^2 - h^2}}{2b + 2\sqrt{b^2 - h^2}} = \frac{h\sqrt{b^2 - h^2}}{b + \sqrt{b^2 - h^2}} = \frac{1}{h}\left\{ b\sqrt{b^2 - h^2} - (b^2 - h^2) \right\}.$$

521. Въ конусъ, имѣющій высоту h и радіусъ основанія r, вписанъ шаръ, къ которому проведена касательная плоскость, параллельная основанію конуса. Найти отношеніе объемовъ образовавшагося усѣченнаго конуса, шара и полнаго конуса.

Отв. $2r(3h^2 + 4r^2) : 4rh^2 : (r + \sqrt{h^2 + r^2})^3$.

522. Въ конусъ, радіусъ основанія котораго = 12 дюймамъ, а высота = 16 дюймамъ, вписанъ шаръ. Узнать ребро куба, вписаннаго въ этотъ шаръ (точно до 0,01). *Отв.* 6,93 дюйм.

523. Около шара радіуса R описанъ усѣченный конусъ, одно изъ основаній котораго вдвое болѣе другого основанія. Опредѣлить объемъ этого усѣченнаго конуса.

Указаніе. Обозначимъ радіусъ меньшаго основанія чрезъ x, радіусъ вдвое бо́льшаго основанія—чрезъ y; тогда $y = x\sqrt{2}$. Образующая усѣчен. конуса $= x + y = x + x\sqrt{2}$ и слѣдов. квадратъ ея $= (x + x\sqrt{2})^2$; но такъ какъ, съ другой стороны, квадратъ ея же можетъ быть выраженъ чрезъ $4R^2 + (x\sqrt{2} - x)^2$, то имѣемъ ур-іе $(x + x\sqrt{2})^2 = 4R^2 + (x\sqrt{2} - x)^2$, изъ котораго $x^2 = \frac{R^2}{\sqrt{2}}$. Искомый объемъ

$$= \frac{\pi . 2R}{2}(y^2 + x^2 + xy) = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{2}}(3 + \sqrt{2}) = \frac{\pi R^3}{3}(2 + 3\sqrt{2}).$$

524. Въ шаръ вписанъ конусъ такъ, что высота MC конуса (см. черт. 92) дѣлится въ центрѣ O шара въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, при чемъ MO есть бо́льшій, а OC— меньшій изъ тѣхъ двухъ отрѣзковъ, на которые раздѣлилась высота. Найти отношеніе объема шара къ объему конуса.

Отв. 4.

525. Пробковый валъ въ видѣ цилиндра съ радіусомъ основанія R просверливается вдоль по направленію оси, и въ образовавшійся цилиндрическій каналъ, ось котораго совпадаетъ съ осью даннаго вала, плотно вдвигается такой же длины сплошной металлическій валъ. Удѣльный вѣсъ пробки $= d$, удѣльн. вѣсъ металла $= d_1$. Какой радіусъ долженъ имѣть металлическій валъ для того, чтобы система двухъ взятыхъ тѣлъ могла плавать, на-половину погружаясь въ воду?

Отв. $R\sqrt{\frac{1 - 2d}{2(d_1 - d)}}$.

526. Опредѣлить внутренній радіусъ стеклянной, строго цилиндрической трубки, зная, что эта трубка вѣситъ 90 граммовъ, будучи пустою; и вѣситъ 150 граммовъ вмѣстѣ со ртутью, налитою въ эту трубку до высоты 9 сантиметровъ. (Плотность ртути $= 13{,}568$).

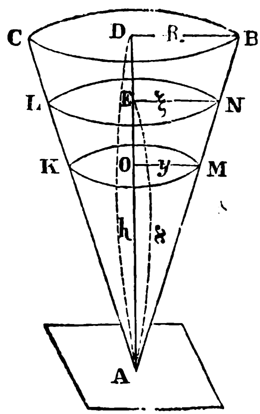
Отв. $\sqrt{\frac{60000}{9 . \pi . 13{,}568}}$ миллиметровъ (приблиз. $= 12{,}5$ миллим.).

527. Правильная пирамида изъ металла, удѣльный вѣсъ котораго $=7{,}2$, вѣситъ 216 килограммовъ. Основаніе пирамиды есть квадратъ, сторона котораго $=15$ сантиметрамъ. Опредѣлить высоту пирамиды. *Отв.* 4 метра.

528. Въ цилиндрическій сосудъ, діаметръ основанія котораго $=a$ дюймамъ, налита вода до высоты h дюйм. На какой высотѣ будетъ находиться уровень воды въ сосудѣ, если бросимъ въ сосудъ шаръ, имѣющій діаметръ въ b дюймовъ и совершенно погружающійся въ воду?

Отв. $h+\frac{2b^3}{3a^2}$.

529. Конусъ, высота котораго h, а радіусъ основанія R, укрѣпленъ въ отвѣсномъ положеніи, вершиною внизъ (черт. 82). Наливъ въ конусъ воды до высоты a, бросаютъ въ воду шаръ радіуса ρ, совершенно погружающійся въ нее. На какой высотѣ будетъ тогда уровень воды?



Черт. 82.

Рѣшеніе. Высота уровня налитой воды пусть будетъ $AO=a$. Для опредѣленія объема V_1 занимаемаго водою, найдемъ радіусъ $OM=y$. Имѣемъ:

$\frac{y}{R}=\frac{a}{h}$, откуда $y=\frac{aR}{h}$. Слѣдов. $V_1=\pi y^2\frac{a}{3}=\frac{\pi a}{3}\left(\frac{aR}{h}\right)^2=\frac{\pi a^3R^2}{3h^2}$.

Объемъ V_2 шара, бросаемаго въ воду, извѣстенъ, ибо радіусъ шара извѣстенъ; выраженіе этого объема есть $V_2={}^4/_3\,\pi\rho^3$.

Когда бросимъ шаръ, вода поднимется, положимъ, до высоты AE, которую обозначимъ чрезъ x. Для опредѣленія x составимъ ур-іе, которымъ выразимъ, что сумма V_1+V_2 объемовъ водяного конуса и шара равна объему новаго получившагося конуса ALN, неизвѣстный радіусъ коего EN обозначимъ чрезъ ξ. Имѣемъ:

$\frac{\xi}{R}=\frac{AE}{AD}=\frac{x}{h}$, откуда $\xi=\frac{Rx}{h}$. Объемъ W конуса $ALN=\frac{\pi\xi^2.x}{3}$ $=\frac{\pi x}{3}\left(\frac{Rx}{h}\right)^2=\frac{\pi R^2x^3}{3h^2}$. Такъ какъ $W=V_1+V_2$, то получаемъ ур-іе $\frac{\pi R^2 x^3}{3h^2} = \frac{\pi a^3 R^2}{3h^2} + \frac{4}{3}\pi\rho^3$ или (по сокращеніи) $\frac{R^2 x^3}{h^2} = \frac{a^3 R^2}{h^2} + 4\rho^3$, откуда $x^3 + a^3 = \frac{4h^2\rho^3}{R^2}$ и слѣд. $x = \sqrt[3]{a^3 + \frac{4h^2\rho^3}{R^2}}$.

530. Въ конусъ, укрѣпленный въ отвѣсномъ положеніи вершиною внизъ, брошенъ шаръ, котораго поверхность равна площади основанія конуса, а объемъ составляетъ $\frac{1}{m}$ долю объема конуса. Высота конуса $= h$. Выразить чрезъ h разстояніе плоскости основанія конуса отъ центра брошеннаго шара.

Отв. $h\left(1 - \frac{1}{2m}\sqrt{m^2 + 4}\right)$.

531. Сосудъ въ видѣ конуса, у котораго діаметръ основанія имѣетъ ту же длину, что и образующая, укрѣпленъ въ отвѣсномъ положеніи, вершиною внизъ. Въ сосудѣ лежитъ шаръ радіуса ρ и заключена вода, свободная поверхность которой представляетъ плоскость, касательную къ шару. Вода облегаетъ шаръ также снизу, доходя до вершины конуса. Опредѣлить: 1) объемъ находящейся въ сосудѣ воды, 2) какова будетъ высота уровня воды, если шаръ вынуть изъ сосуда.

Отв. 1) $\frac{3}{5}\pi\rho^3$; 2) $\rho\sqrt[3]{15}$.

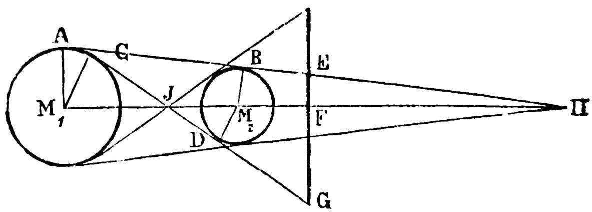
532. Сколько квадратныхъ футовъ земной поверхности можетъ обозрѣть воздухоплаватель, поднявшись надъ нею на высоту l футовъ? (Земля разсматривается здѣсь, какъ шаръ съ радіусомъ въ R фут.)

Отв. $\frac{2\pi R^2 l}{R + l}$ кв. фут.

533. Часть шара, діаметръ котораго $= a$, ограничена нѣкоторымъ сегментомъ и поверхностью конуса, имѣющаго вершину въ центрѣ шара. Зная, что объемъ такимъ образомъ составившагося сферическаго вырѣзка или сектора составляетъ $\frac{1}{m}$ долю объема шара, опредѣлить кривую поверхность шарового сегмента. *Отв.* $\frac{\pi a^2}{m}$.

534. Темный шаръ, имѣющій радіусъ $M_2B = \rho$ (черт. 83), освѣщается свѣтящимся шаромъ, имѣющимъ радіусъ $M_1A = R$,

и отбрасываетъ конусъ тѣни, вершина котораго находится въ H. Разстояніе $M_1 M_2$ центровъ шаровъ $= d$. Найти: 1) длину $M_2 H$, 2) длину EF радіуса сѣченія, проведеннаго перпендикулярно къ оси тѣневого конуса на разстояніи $M_2 F = b$ отъ центра M_2 темнаго шара, 3) длину FG радіуса той окружности, которая служитъ математическою границею полутѣни для взятаго сѣченія.



Черт. 83.

Рѣшеніе. I) Изъ подобія $\triangle\triangle\, M_1AH$ и M_2BH: $\dfrac{M_1M_2 + M_2H}{M_2H} = \dfrac{M_1A}{M_2B}$ или $\dfrac{d + M_2H}{M_2H} = \dfrac{R}{\rho}$, откуда $M_2H = \dfrac{d\rho}{R-\rho}$. II) Изъ подобія $\triangle\triangle\, M_2BH$ и FEH: $\dfrac{EF}{M_2B} = \dfrac{FH}{BH}$ или $\dfrac{FE}{M_2B} = \dfrac{M_2H - M_2F}{\sqrt{(M_2H)^2 - (M_2B)^2}}$. Вставляя сюда вмѣсто M_2H выше найденную величину, а вмѣсто M_2B и M_2F — величины данныя, получаемъ $EF = \dfrac{\rho(b+d) - bR}{\sqrt{d^2 - (R-\rho)^2}}$. III). Изъ подобія $\triangle\triangle\, M_1CJ$ и M_2DJ: $\dfrac{M_1J}{M_2J} = \dfrac{M_1C}{M_2D}$, откуда $\dfrac{M_1J + M_2J}{M_2J} = \dfrac{M_1C + M_2D}{MD}$ или $\dfrac{M_1M_2}{M_2J} = \dfrac{M_1C + M_2D}{M_2D}$ и слѣд. $M_2J = \dfrac{M_2D \,.\, M_1M_2}{M_1C + M_2D} = \dfrac{\rho\,.\,d}{R+\rho}$.

Далѣе изъ подобія $\triangle\triangle\, M_2DJ$ и GFJ:

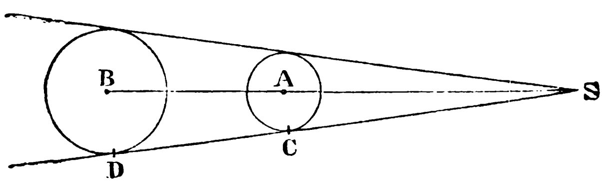
$$\frac{GF}{M_2D} = \frac{JF}{JD} \quad \text{или} \quad \frac{GF}{M_2D} = \frac{M_2J + M_2F}{\sqrt{(M_2J)^2 - (M_2D)^2}}, \quad \text{откуда}$$

$$FG = \frac{M_2D(M_2J + M_2F)}{\sqrt{(M_2J)^2 - (M_2D)^2}} = \frac{\rho\left(\dfrac{\rho d}{R+\rho} + b\right)}{\sqrt{\dfrac{\rho^2 d^2}{(R+\rho)^2} - \rho^2}} = \frac{Rb + \rho(d+b)}{\sqrt{d^2 - (R+\rho)^2}}.$$

535. Радіусъ солнца въ 112 разъ болѣе радіуса земли. Разстояніе центровъ этихъ тѣлъ$=23984$ земн. радіус. Разстояніе луны отъ земли$=60$ земнымъ радіусамъ. Принимая радіусъ земли за единицу, вычислить: 1) длину конической тѣни, отбрасываемой землею (считая отъ центра земли), 2) радіусъ сѣченія, проведеннаго перпендикулярно къ оси тѣневого конуса на разстояніи луны отъ земли, и 3) радіусъ, опредѣляющій математич. границу полутѣни для взятаго сѣченія. (Вліяніе атмосферной рефракціи въ расчетъ не приним.)

Отв. 1) 216 земн. рад.; 2) 0,72 земн. рад.; 3) 1,28 земн. рад. (*Замѣч.* См. предыдущую задачу.)

536. На линіи, соединяющей центры двухъ шаровъ A и B (черт. 84), находится свѣтящаяся точка S, имѣющая такое положеніе относительно меньшаго шара A, что бóльшій шаръ B



Черт. 84.

обертывается конусомъ тѣни, отбрасываемой шаромъ A. Радіусъ меньшаго шара $= r$, радіусъ бóльшаго $= R$. Разстояніе между центрами шаровъ $= d$. Опредѣлить: 1) разстояніе SA свѣтящейся точки S отъ центра меньшаго шара и 2) величину освѣщенной части поверхности этого шара.

Отв. 1) $\frac{dr}{R-r}$; 2) $\frac{2\pi r^2}{d}(d-R+r)$.

537. Цилиндръ, имѣющій одинаковое съ конусомъ основаніе, поставленъ на основаніе этого конуса. Высота конуса въ точкѣ пересѣченія ея съ другимъ основаніемъ цилиндра раздѣлилась въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, при чемъ бóльшій изъ двухъ образовавшихся отрѣзковъ высоты конуса находится внутри цилиндра. Высота конуса $= h$, а радіусъ его основанія$=R$. Найти объемъ цилиндра и объемы тѣхъ двухъ частей конуса, на которыя онъ разсѣкается верхнимъ основаніемъ цилиндра.

Отв. $\frac{1}{2}\pi R^2 h(\sqrt{5}-1)$; $\frac{1}{3}\pi R^2 h(9-4\sqrt{5})$; $\frac{4}{3}\pi R^2 h(\sqrt{5}-2)$.

538. Правильная усѣченная четыреугольная пирамида вписана въ усѣченный конусъ, имѣющій радіусы основаній R и ρ и высоту h, общую съ пирамидой. Насколько объемъ конуса больше объема пирамиды?

Отв. $\frac{h}{3}(R^2+\rho^2+R\rho)\left[\pi-2\right]$.

539. Кусокъ дерева въ формѣ прямоугольнаго параллелепипеда (у котораго высота $= h$, а основаніемъ служитъ квадратъ, имѣющій сторону $= a$) былъ обточенъ такъ, что образовался цилиндръ наивозможно бо́льшаго объема. Найти разность объемовъ даннаго параллелепипеда и полученнаго цилиндра. *Отв.* $\frac{1}{4}a^2 h(4-\pi)$.

540. Кусокъ дерева въ формѣ правильной усѣченной пирамиды (у которой высота $= h$, а стороны квадратныхъ основаній суть a и b) обточенъ такъ, что образовался усѣченный конусъ наивозможно бо́льшаго объема. Насколько объемъ даннаго куска дерева превышаетъ объемъ выточеннаго усѣченнаго конуса?

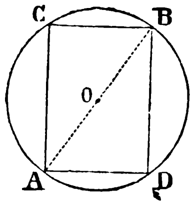
Отв. $\frac{h}{3}\left[1-\frac{\pi}{4}\right](a^2+b^2+ab)$.

541. Изъ шара, составленнаго изъ желѣзнаго и мѣднаго полушарій и вѣсящаго P килограммовъ, выпиливается кубъ, діагональ котораго равна діаметру шара. Опредѣлить вѣсъ опилокъ.

Рѣшеніе. Обозначая плотность желѣза чрезъ d, плотность мѣди чрезъ d_1 и радіусъ шара чрезъ R, имѣемъ $P=\frac{2}{3}\pi R^3(d+d_1)$. Опредѣливъ отсюда R и подставивъ значеніе его въ равенство $a=2R:\sqrt{3}$, гдѣ a означаетъ ребро куба (см. 482 зад.), найдемъ, что объемъ куба $a^3=\frac{4P}{\pi\sqrt{3}(d+d_1)}$, а вѣсъ куба $=$ $=\frac{a^3}{2}d+\frac{a^3}{2}d_1=\frac{a^3}{2}(d+d_1)=\frac{2P}{\pi\sqrt{3}}$. Вѣсъ опилокъ, слѣдовательно, будетъ имѣть своимъ выраженіемъ

$$P-\frac{2P}{\pi\sqrt{3}} \quad \text{или} \quad P\left(\frac{3\pi-2\sqrt{3}}{3\pi}\right).$$

542. Извѣстно, что изъ всѣхъ прямоугольныхъ балокъ, которыя могутъ быть вырѣзаны изъ цилиндрическаго ствола дерева, та обладаетъ наибольшимъ сопротивленіемъ разлому, въ которой ширина AD относится къ высотѣ BD (черт. 85) какъ $1 : \sqrt{2}$ *). — Требуется изъ цилиндрическаго древеснаго ствола, длина котораго $= l$, а діаметръ $AB = d$, вырубить прямоугольную балку, способную выдерживать возможно-бóльшій грузъ. Какъ великъ будетъ объемъ дерева, срѣзаннаго со ствола при вырубкѣ балки?



Черт. 85.

Отв. $\frac{d^2 . l}{12}(3\pi - 3\sqrt{2})$.

543. Въ шарѣ, радіусъ котораго $= R$, нужно сдѣлать цилиндрическое отверстіе. Ось цилиндра должна проходить чрезъ центръ шара, а діаметръ основанія цилиндра долженъ быть равенъ радіусу шара. Опредѣлить, какая часть объема шара останется послѣ того, какъ будетъ просверлено указанное цилиндрическое отверстіе въ шарѣ.

Отв. Отношеніе объема оставшейся части къ объему всего шара $= 1 - \frac{\sqrt{27}}{16} = 0{,}675$.

544. Діаметръ шара равняется общей хордѣ двухъ пересѣкающихся окружностей, разстояніе между центрами которыхъ $= 21$ футу; радіусъ одной окружности $= 20$ футамъ, радіусъ другой $= 13$ фут. Опредѣлить поверхность шара.

Отв. 576π кв. фут. $= 1808{,}64$ кв. фут.

545. Металлическій шаръ радіуса R перелить въ конусъ, боковая поверхность котораго въ n разъ болѣе площади его основанія. Опредѣлить высоту этого конуса.

Отв. $R\sqrt[3]{4(n^2 - 1)}$.

---

*) Dr. *Paul Reis:* Lehrbuch der Physik. S. 91.

Относительная твердость или сопротивленіе разлому балки зависитъ не только отъ фигуры ея поперечнаго сѣченія, но также отъ способа укрѣпленія концовъ балки и отъ мѣста приложенія изгибающаго груза (отъ сосредоточенія нагрузки балки).

546. Рѣшить предыдущую задачу въ предположеніи, что $R = \sqrt[3]{9}$ фут. и $n = 7$. *Отв.* 12 фут.

547. Изъ двухъ конусовъ одинъ описанъ около правильнаго тетраэдра, а другой вписанъ въ тотъ же правильный тетраэдръ. Найти отношеніе боковой поверхности перваго конуса къ боковой поверхности второго. *Отв.* $4:\sqrt{3}$.

548. На горизонтальной плоскости лежатъ четыре равные, касающіеся другъ друга, шара радіуса R, такъ что центры ихъ представляютъ вершины квадрата; пятый шаръ такого же радіуса R, касающійся каждаго изъ четырехъ первыхъ шаровъ, лежитъ на нихъ сверху. Опредѣлить разстояніе центра этого пятаго шара отъ горизонтальной плоскости. *Отв.* $R(1+\sqrt{2})$.

549. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ ромбъ, у котораго сторона имѣетъ длину въ 35 аршинъ, а меньшая діагональ — въ 42 аршина; площадь же діагональнаго сѣченія, проведеннаго чрезъ эту меньшую діагональ, содержитъ 924 квадр. арш. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

Отв. 25872 куб. арш.

550. Большой кругъ нѣкотораго шара, радіусъ котораго $= R = 15$ фут., служитъ основаніемъ конуса, высота котораго вдвое болѣе радіуса шара; при этомъ поверхность шара пересѣкаетъ боковую поверхность конуса по окружности, радіусъ которой требуется опредѣлить. Требуется, кромѣ того, найти разстояніе центра этой окружности отъ центра шара.

Отв. Радіусъ окр. $= \frac{3}{5}R = 9$ фут.; разст. центра окружности отъ центра шара $= \frac{4}{5}R = 12$ фут.

551. Боковыя грани правильной пирамиды, объемъ которой $= V = 36$ куб. дюймамъ, наклонены къ ея квадратному основанію подъ угломъ въ 45^0. Пирамида эта пересѣчена плоскостью, перпендикулярною къ высотѣ и отстоящею на треть высоты, считая отъ вершины. Опредѣлить объемъ усѣченнаго конуса, основаніями котораго служатъ круги, изъ которыхъ одинъ описанъ около основанія пирамиды, а другой около означеннаго сѣченія $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

Отв. Иском. объемъ $= \frac{286}{189} V = 54\frac{10}{21}$ куб. дюйм.

552. Чрезъ средину высоты конуса проведена плоскость, параллельная его основанію. Радіусъ получившагося сѣченія относится къ образующей конуса какъ $m:n$. Высота конуса $=h$. Опредѣлить: 1) объемъ и 2) полную поверхность конуса.

Отв. 1) $\frac{4\pi m^2 h^3}{3(n+2m)(n-2m)}$; 2) $\frac{2\pi m h^2}{n-2m}$.

553. Опредѣлить объемъ правильной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ, зная, что площадь діагональнаго сѣченія пирамиды $=6\sqrt{2}$ кв. дюйм., а апоѳема пирамиды $=\sqrt{13}$ дюйм.

Отв. 16 куб. дюйм. или 24 куб. дюйма.

554. Основаніемъ правильной пирамиды служитъ многоугольникъ, у котораго каждый изъ внутреннихъ угловъ содержитъ 120°, а каждая сторона имѣетъ длину въ 3 дюйма. Вычислить (съ точностью до 0,01) высоту этой пирамиды, зная, что боковая поверхность пирамиды въ 10 разъ болѣе площади ея основанія. *Отв.* 25,85 дюйм.

555. Отношеніе боковой поверхности конуса къ площади его основанія $=m:n$; высота конуса $=h$. Опредѣлить: 1) полную поверхность конуса и 2) объемъ его.

Отв. 1) $\frac{\pi n h^2}{m-n}$; 2) $\frac{\pi n^2 h^3}{3(m^2-n^2)}$.

556. Радіусъ шара $=R=3{,}24$ дюйм. Какую высоту долженъ имѣть сегментъ этого шара, чтобы отношеніе его сферической поверхности къ площади его основанія равнялось $m:n=3:2$?

Отв. $\frac{2R(m-n)}{m}=2{,}16$ дюйм.

557. Въ кубѣ, ребро котораго $=a=2$ дюймамъ, взято пять точекъ: первая совпадаетъ съ центромъ верхняго его основанія, а прочія — съ срединами сторонъ нижняго основанія. Означенныя точки служатъ вершинами тѣлесныхъ угловъ пятигранника. Опредѣлить боковую поверхность его.

Отв. Боковая поверхн. $=\frac{3a^2}{2}=6$ кв. дюйм.

558. Отъ полукруга, діаметръ котораго $AB=2r$, отрѣзанъ сегментъ хордою, равною r и параллельною діаметру AB.

Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, полученнаго отъ обращенія оставшейся части полукруга около діаметра AB.

Отв. Поверхн. $= \pi r^2(2+\sqrt{3})$; объемъ $= \frac{7}{6}\pi r^3$.

559. Изъ параллельныхъ сторонъ трапеціи бóльшая $= a =$ 15 дюймамъ, а меньшая $= b = 9$ дюйм.; каждая же изъ непараллельныхъ ея сторонъ $= c = 5$ дюйм. Трапеція эта вращается около прямой, проведенной перпендикулярно къ сторонѣ a чрезъ конецъ этой послѣдней. Опредѣлить полную поверхность полученнаго тѣла вращенія.

Отв. Иск. пов. $= \pi a(a+b+2c) = 1602{,}216$ квадр. дюйм.

560. Сохраняя условія предыдущей задачи, опредѣлить объемъ тѣла, образуемаго упомянутымъ вращеніемъ трапеціи.

Отв. $\frac{1}{4}\pi a(a+b)\sqrt{4c^2-(a-b)^2}$.

561. Ромбъ, у котораго меньшая діагональ равна сторонѣ его a, вращается около прямой, проходящей чрезъ конецъ бóльшей діагонали перпендикулярно къ этой послѣдней. Опредѣлить 1) поверхность и 2) объемъ полученнаго тѣла вращенія. *Отв.* 1) $4\pi a^2\sqrt{3}$; 2) $\frac{3}{2}\pi a^3$.

562. Смежныя стороны параллелограмма суть a и b; уголъ, между ними заключенный, $=45^0$. Опредѣлить: 1) поверхность, 2) объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ параллелограмма около стороны a. *Отв.* 1) $\pi\sqrt{2}(a+b)b$; 2) $\frac{1}{2}\pi a b^2$.

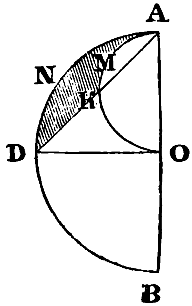
563. Сторона равносторонняго треугольника ABC равна a. Продолживъ сторону его AC на длину CD, равную a, проводятъ чрезъ точку D линію DE, перпендикулярную къ AD. Опредѣлить объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ треугольника ABC около линіи DE. *Отв.* $\frac{3}{4}\pi a^3\sqrt{3}$.

564. На сторонѣ BC равносторонняго треугольника ABC, равной a, построенъ квадратъ $BEDC$. Опредѣлить объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ пятиугольника $ABEDC$ около оси, совпадающей со стороною AC треугольника.

Отв. $\frac{1}{4}\pi a^3(3+2\sqrt{3})$.

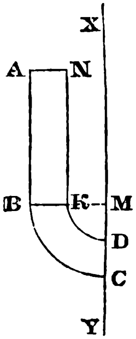
565. Въ центрѣ O полуокружности ADB (черт. 86), радіусъ которой $AO=2a$, возставленъ къ діаметру AB перпендикуляръ OD и точки A и D соединены хордой AD;

затѣмъ на линіи AO, какъ на діаметрѣ, описана полуокружность AKO. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ около линіи AB фигуры $AMKDNA$, ограниченной дугами AMK и AND и отрѣзкомъ DK вышеупомянутой хорды DA. *Отв.* $\frac{7}{8}\pi a^3$.



Черт. 86.

566. Четверть $BKDC$ кругового кольца, ограниченнаго окружностями, радіусы которыхъ суть $BM = R$ и $KM = r$, приложена къ прямоугольнику $ANKB$, сторона BK котораго $= R - r$, такъ, какъ изображено на черт. 87. Составившаяся такимъ образомъ фигура $NKDCBA$ своимъ вращеніемъ около оси XY, параллельной AB и проходящей чрезъ точки D и C, производитъ тѣло, имѣющее видъ стѣнокъ сосуда, вмѣстимость котораго вчетверо болѣе объема, занимаемаго стѣнками. Опредѣлить величину стороны AB прямоугольника.



Черт. 87.

$$\textit{Отв.}\ \frac{2(5r^3 - 4R^3)}{3(3R^2 - 5r^2)}.$$

ОТДѢЛЪ XI.

Примѣры задачъ на наибольшія и наименьшія величины (maximum и minimum).

567. Какой изъ всѣхъ прямоугольниковъ, у которыхъ одинъ и тотъ же периметръ $2p$, имѣетъ наибольшую площадь?

Рѣшеніе. Означивъ основаніе прямоугольника чрезъ x, высоту его — чрезъ y и площадь его — чрезъ s, имѣемъ, во-первыхъ, $x + y = p$, а во-вторыхъ $s = xy$ и слѣдов. $s = x(p - x)$. Рѣшая это ур-іе относительно x, находимъ $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - s}$ ..... (1).

Въ этой формулѣ можно s давать такія значенія, при которыхъ x сохраняетъ дѣйствительную величину. *Наибольшее* изъ этихъ возможныхъ для s значенiй есть $\frac{p^2}{4}$ (ибо если возьмемъ для s значенiе бо́льшее чѣмъ $\frac{p^2}{4}$, то x получитъ мнимое значенiе); но при $s = \frac{p^2}{4}$, изъ (1) находимъ $x = \frac{p}{2}$, откуда слѣдуетъ, что искомый прямоугольникъ есть квадратъ, имѣющiй сторону $= \frac{p}{2}$. Того же вывода можно достигнуть быстрѣе, если извѣстно*), что для раздѣленiя даннаго числа p на двѣ такiя части произведенiе которыхъ было бы maximum, нужно, чтобы каждая изъ этихъ частей $= \frac{p}{2}$, т.-е. чтобы число *было раздѣлено пополамъ*. Въ самомъ дѣлѣ, на основанiи этого положенiя прямо заключаемъ, что такъ какъ площадь прямоугольника выражается произведенiемъ двухъ перемѣнныхъ множителей x и $p - x$, сумма которыхъ = постоянной величинѣ p, то это произведенiе тогда будетъ maximum, когда $x = p - x$, откуда $x = \frac{p}{2}$.

Очевидно, что предложенная задача могла бы быть формулирована и такъ:

Раздѣлить данную линiю (длина которой $= 2p$) на такiя двѣ части, чтобы прямоугольникъ, на нихъ построенный, имѣлъ наибольшую площадь.

568. Изъ всѣхъ треугольниковъ (или параллелограммовъ), у которыхъ сумма основанiя и высоты постоянна, какой имѣетъ наибольшую площадь?

Отв. Такой, у котораго основанiе равно высотѣ.

569. Какой изъ всѣхъ треугольниковъ, у которыхъ одно и то же основанiе a и одинъ и тотъ же периметръ $2p$, имѣетъ наибольшую площадь? *Отв.* Равнобедренный.

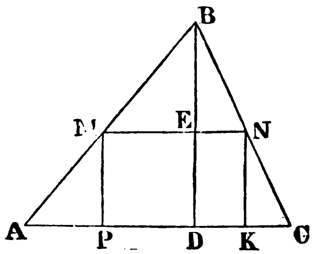
570. Изъ всѣхъ треугольниковъ одинаковаго периметра какой имѣетъ наибольшую площадь?

Рѣшенiе. Равностороннiй, ибо если стороны треуг. означимъ соотвѣтственно чрезъ a, b и c, а периметръ его — чрезъ $2p$, то площадь этого треугольника $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, при чемъ произведенiе $(p-a)(p-b)(p-c)$ состоитъ изъ трехъ

*) § 318 алгебраич. учебника *А. Ю. Давидова*. Указанная здѣсь теорема даетъ возможность элементарнымъ путемъ рѣшать многiя задачи, относящiяся къ отдѣлу о наибольшихъ величинахъ.

перемѣнныхъ множителей, которыхъ сумма $(p-a)+(p-b)+$ $+(p-c)=p=$ постоянной величинѣ. (Извѣстно, что изъ сколькихъ бы множителей произведеніе ни состояло, оно тогда будетъ maximum, когда всѣ множители будутъ равны. См. § 319 алгебраич. учебн. Давидова).

571. Вписать въ треугольникъ, у котораго основаніе$=b$, а высота $=h$, прямоугольникъ, котораго площадь была бы maximum. *Отв.* Высота прямоугольника $=\frac{1}{2}h$.



Черт. 88.

Рѣшеніе Означивъ одну изъ сторонъ (напримѣръ MP) прямоугольника чрезъ x, другую (MN) — чрезъ y, площадь его — чрезъ s, имѣемъ $xy=s\ldots.$ (1). Изъ подобія треугольниковъ MBN и ABC имѣемъ $\frac{MN}{AC}=\frac{BE}{BD}$ или $\frac{y}{b}=\frac{h-x}{h}\ldots.$ (2). Исключая y изъ уравненій (1) и (2), находимъ $\frac{bx(h-x)}{h}=s\ldots..(3)$. Такъ какъ $\frac{b}{h}=$ постоянной величинѣ, то s будетъ имѣть наибольшую величину при томъ же значеніи перемѣннаго x, при какомъ обращается въ maximum и выраженіе $x(h-x)$. Произведеніе же $x(h-x)$, состоящее изъ двухъ перемѣнныхъ множителей, имѣющихъ постоянную сумму h, будетъ имѣть наибольшую величину тогда, когда множители будутъ равны, т.-е. когда $x=h-x$, откуда $x=\frac{1}{2}h$.

Къ тому же результату можно придти и не зная того, что произведеніе перемѣнныхъ множителей, имѣющихъ постоянную сумму, тогда имѣетъ maximum, когда производители равны. Дѣйствительно, рѣшая ур-іе (3), находимъ

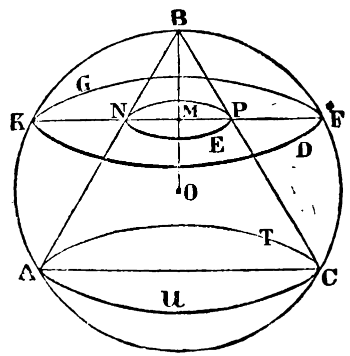
(4)$\ldots.x=\frac{h}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bh^2-4hs}{b}}$. Чтобы x было величиною дѣйствительною, необходимо, чтобы $bh^2\geqq 4hs$ или $\frac{bh}{4}\geqq s$; слѣдов. maximum для s будетъ $\frac{bh}{4}$. Но $\frac{bh}{4}=$ половинѣ площ. треуг. ABC, слѣдов. площадь искомаго прямоугольн. должна $=$ половинѣ площ. треугольника. При такомъ значеніи s изъ (4) находимъ $x=\frac{1}{2}h$.

Так. обр. для рѣшенія предложеннаго вопроса должно чрезъ средину высоты BD даннаго треугольника провести MN, параллельную основанію AC треугольника, и изъ точекъ ея пересѣченія M и N со сторонами AB и BC опустить перпендикуляры MP и NK на основаніе: полученный прямоугольникъ PMNK будетъ удовлетворять требованію.

572. Данъ трехгранный призматическій деревянный брусъ. Сѣченіе, перпендикулярное къ ребру этой призмы, представляетъ равнобедренный треугольникъ ABC, котораго основаніе AC=4 дюймамъ, а высота BD=8 дюймамъ. Требуется изъ этого бруса выпилить четырехгранную прямоугольную призму наибольшей абсолютной твердости. (Абсолютная твердость прута, т.-е. сопротивленіе, оказываемое имъ при разрывѣ, прямо пропорціональна площади поперечнаго разрѣза)*).

Указаніе. Такъ какъ абсолютная твердость прута прямо пропорціональна площади поперечнаго разрѣза, то задача производится къ вписыванію въ треугольникъ ABC прямоугольника наибольшей площади (см. предыдущую задачу).

573. Въ шаръ радіуса R (черт. 89) вписанъ равносторонній конусъ. Опредѣлить, между какими предѣлами можетъ измѣняться разность S площадей двухъ сѣченій, изъ которыхъ первое (KGFD) получается отъ разсѣченія шара плоскостью, параллельною основанію конуса, а второе (NPE) — отъ разсѣченія конуса тою же плоскостью.



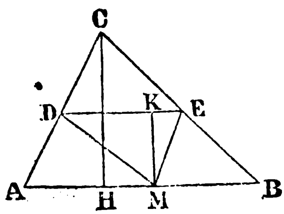
Черт. 89.

Рѣшеніе. Площади обоихъ сѣченій равны нулю въ томъ случаѣ, когда проводимая плоскость касается шара въ точкѣ B (вершина конуса); площади обоихъ сѣченій дѣлаются равными тогда, когда

*) Заимствована изъ *Собранія физическихъ задачъ*, составл. В. Делла-Восомъ и В. Розенбергомъ. Одесса 1860 г.

проводимая плоскость совпадаетъ съ плоскостью основанія ATCU конуса; когда же проводимая плоскость (оставаясь параллельною плоскости основ. конуса) занимаетъ положеніе промежуточное между двумя вышеупомянутыми положеніями, то площади сѣченій шара и конуса не равны. Отсюда слѣдуетъ, что разность S площадей сѣченій шара и конуса измѣняется отъ нуля до нуля, переходя чрезъ maximum, который и постараемся опредѣлить. Мы имѣемъ $S = \pi\ (NK^2 - MN^2) \ldots\ldots (1)$.
Полагая $OB = R$, $MB = x$, получаемъ $MK^2 = OK^2 - OM^2 = R^2 - (R - x)^2 = 2Rx - x^2$. Такъ какъ треугольникъ ABC есть равносторонній и AC параллельна NP, то и треугольникъ NBP есть равносторонній; слѣдоват. $MN^2 = \frac{x^2}{3}$. Внося величины MK^2 и MN^2 въ (1), находимъ $S = \frac{\pi}{3} \cdot 2x\ (3R - 2x)$. Величина x, обращающая S въ maximum, обращаетъ въ maximum и произведеніе $2x(3R - 2x)$. Такъ какъ сумма перемѣнныхъ множителей $2x$ и $(3R - 2x)$, изъ которыхъ это произведеніе составлено, постоянна, то maximum S имѣетъ мѣсто тогда, когда $2x = 3R - 2x$, откуда $x = \frac{3}{4} R$ и слѣдов. $S = \frac{3}{4} \pi R^2$.

574. На основаніи AB треугольника ABC (черт. 90) дана точка M. На какомъ разстояніи MK отъ этого основанія нужно провести линію, ему параллельную и пересѣкающую стороны AC и CB въ точкахъ D и E, если желаемъ, чтобы площадь треугольника DEM была maximum?



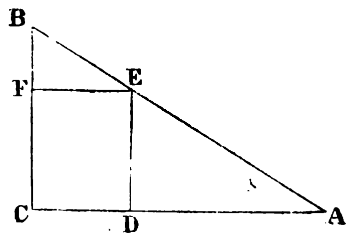
Черт. 90.

Отв. Искомая параллель проходитъ чрезъ средину высоты CH треугольника. *Указаніе.* Полагая $AB = b$, $CH = h$, $MK = x$ и называя площадь DEM чрезъ S, получаемъ $S = \frac{b}{2h} x\,(h - x)$, такъ что нахожденіе величины x, обращающей S въ maximum, сводятся къ опредѣленію величины x, обращающей въ maximum выраженіе $x\ (h - x)$

575. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ одинаковую сумму всѣхъ реберъ, какой имѣетъ наибольшій объемъ?

Рѣшеніе. Обозначимъ ребра параллелепипеда чрезъ x, y, z. Для нахожденія условій maximum произведенія xyz, выражающаго объемъ параллелепипеда, можемъ, очевидно, искать условіе maximum произведенія $4x \cdot 4y \cdot 4z$. Такъ какъ сумма множителей, изъ которыхъ это произведеніе составлено, т.-е. $4x + 4y + 4z$, по условію задачи, постоянна, то искомый maximum будетъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, когда $4x = 4y = 4z$, т.-е. когда $x = y = z$. Это значитъ, что параллелепипедъ, удовлетворяющій требованію вопроса, есть кубъ.

576. Найти на гипотенузѣ AB прямоугольнаго тр-ника ABC такую точку E, что если опустимъ изъ этой точки на катеты тр-ника перпендикуляры EF и ED и получившійся прямоугольникъ EFCD станемъ вращать около CA, то происшедшій отъ этого цилиндръ будетъ имѣть наибольшій объемъ.



Черт. 91.

Рѣшеніе. Положимъ $AC = b$ и $CB = a$. Если обозначимъ ED чрезъ x и EF чрезъ y, то объемъ V цилиндра, производимаго вращеніемъ прямоугольника FEDC около AC, выразится чрезъ $V = \pi x^2 y$. Такъ какъ $\frac{EF}{AC} = \frac{BF}{BC}$ или $\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a}$, откуда $y = \frac{b}{a}(a - x)$, то $V = \frac{b}{a}(a - x)x^2$. Очевидно, что рѣшеніе предложеннаго вопроса сводится къ нахожденію величины x, обращающей въ maximum произведеніе $(a - x)x^2$. Но величина x, обращающая это произведеніе въ maximum, обратитъ также въ maximum произведеніе $(a - x)\left(\frac{x}{2}\right)^2$ или $(a - x)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)$.

Такъ какъ въ этомъ послѣднемъ произведеніи сумма производителей = пост. велич. a, то оно имѣетъ наибольшую величину въ томъ случаѣ, когда всѣ производители равны, т.-е. когда $\frac{x}{2} = a - x$, откуда $x = \frac{2}{3}a$ и слѣдов. $y = \frac{b}{a}(a - x) = \frac{b}{3}$.

Такимъ образомъ, если отложимъ на сторонѣ CA отъ точки C отрѣзокъ $CD = \frac{1}{3}CA$ и проведемъ чрезъ точку D линію DE, параллельную сторонѣ CB, то въ пересѣченіи этой параллели со стороною AB найдемъ искомую точку E*).

577. Въ прямой конусъ, у котораго высота$=h$, а радіусъ основанія$=R$, вписанъ такой прямой конусъ, который, имѣя вершину въ центрѣ основанія перваго конуса, имѣетъ объемъ maximum. Опредѣлить радіусъ основанія, высоту и объемъ этого второго конуса.

Отв. Радіусъ основ. $=\frac{2}{3}R$; высота $=\frac{h}{3}$; объемъ $=\frac{4}{81}\pi R^2 h$.

578. Два равныхъ прямыхъ конуса, имѣющихъ радіусъ основанія R и высоту $\frac{h}{2}$, такъ приставлены одинъ къ другому ихъ основаніями, что составился двойной конусъ, имѣющій высоту h. Въ этотъ двойной конусъ должно вписать прямой цилиндръ наибольшаго объема: опредѣлить высоту такого цилиндра, радіусъ его основанія и отношеніе объема этого цилиндра къ объему даннаго двойного конуса.

Отв. Рад. основ. $=\frac{2}{3}R$; высота $=\frac{h}{3}$; иском. отнош. объем. $=\frac{4}{9}$.

579. Дана прямая AB, длина которой $=a=575$ метрамъ. Раздѣлить эту прямую на такія двѣ части AC и BC, чтобы AC^2+3BC^2 было minimum.

Рѣшеніе. Обозначивъ одну изъ 2-хъ частей прямой чрезъ x, другую чрезъ y, положимъ $x^2+3y^2=m^2$. . . . . (1).

Кромѣ того, очевидно, имѣемъ $x+y=a$. . . . . (2).

Изъ (1) и (2) находимъ $y=\frac{a\pm\sqrt{4m^2-3a^2}}{4}$ . . . . (3).

Такъ какъ y есть величина дѣйствительная, то m^2 не можетъ быть меньше $\frac{3a^2}{4}$; поэтому наименьшее значеніе, какое можетъ получить m^2, есть $\frac{3a^2}{4}=247968,75$ метр. При этомъ, какъ

*) Эта задача (равно какъ 574-ая), заимствуемая изъ статьи *Cochez*: „Études sur les maxima et minima" (*Journal de Math. élem.* 1877), рѣшена тамъ инымъ пріемомъ, — на основаніи указываемаго авторомъ особаго принципа, который изложить здѣсь неудобно.

видно изъ (3), $y = \frac{a}{4}$. Так. обр. одинъ изъ тѣхъ двухъ отрѣзковъ, на которые дѣлится данная прямая, долженъ составлять $\frac{1}{4}$ ея длины.

580. Опредѣлить, какой изъ всѣхъ прямоугольниковъ одинаковаго периметра имѣетъ наименьшую діагональ?

Отв. Квадратъ.

581. На отрѣзкѣ AO линіи AB равной a построенъ равносторонній треугольникъ AEO и на отрѣзкѣ OB той же линіи AB — квадратъ ODCB. Величина площади пятиугольника AEDCB зависитъ отъ положенія точки O между точками A и B. При какомъ положеніи точки O (при какой величинѣ x отрѣзка AO, опредѣляющей это положеніе) площадь сказаннаго пятиугольника будетъ minimum?

Отв. При $x = \frac{7a}{2(3+\sqrt{3})}$.

581 a). Раздѣлить данный отрѣзокъ AB на двѣ части такъ, чтобы сумма площадей правильнаго треугольника, построеннаго на одной части, и квадрата, построеннаго на другой, была наименьшая. Вычислить величину этой суммы съ точностью до 0,1, если AB = 13 сантиметр.

Отв. Наименьшее значеніе суммы = 51,1 кв. сант.; при этомъ величина того отрѣзка, на которомъ построенъ правильный треугольникъ, $= \frac{4}{13}(4-\sqrt{3})\,AB = 4(4-\sqrt{3})$ сантиметр.

582. Радіусъ шара = R. Опредѣлить высоту конуса, описаннаго около этого шара и имѣющаго наименьшій объемъ.

Отв. 4 R.

583. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, имѣющихъ одну и ту же гипотенузу, какой имѣетъ наибольшую площадь?

Рѣшеніе. Обозначимъ одинъ изъ катетовъ треугольника чрезъ x, другой — чрезъ y, гипотенузу — чрезъ a. Такъ какъ площадь треугольника имѣетъ своимъ выраженіемъ $\frac{xy}{2}$, то вопросъ приводится къ отысканію maximum произведенія xy. Для отысканія же maximum произведенія xy ищемъ maximum его квадрата

x^2y^2. Такъ какъ $x^2+y^2=a^2=$ *постоянн.*, то maximum произведенія x^2y^2 (а слѣдов. и произведенія xy) имѣетъ мѣсто тогда, когда $x^2=y^2$ или $x=y$. Такимъ образомъ оказывается, что изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, имѣющихъ одну и ту же гипотенузу, наибольшую площадь имѣетъ тотъ, у котораго катеты равны.

584. Какой изъ всѣхъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данный кругъ, имѣетъ наибольшую площадь? *Отв.* Квадратъ.

585. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, вписанныхъ въ данный цилиндръ (даны высота и радіусъ основанія этого цилиндра), какой имѣетъ объемъ maximum?

Отв. Тотъ, у котораго основаніями служатъ квадраты, вписанные въ основаніе цилиндра.

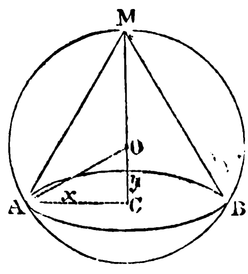
586. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, у которыхъ полная поверхность одна и та же, какой имѣетъ наибольшій объемъ?

Рѣшеніе. Означая полную поверхность параллелепипеда чрезъ S, а длины его измѣреній чрезъ x, y и z, имѣемъ $S=2(xy+xz+yz)$. Для отысканія условій maximum произведенія xyz, выражающаго объемъ параллелепипеда, ищемъ maximum произведенія $x^2y^2z^2$, которое можетъ быть представлено въ видѣ $xy \,.\, xz \,.\, yz$. Такъ какъ сумма множителей, изъ которыхъ это произведеніе составлено, т.-е. $xy+xz+yz=\frac{S}{2}=$ *постоянн.*, то maximum его будетъ имѣть мѣсто тогда, когда $xy=xz=yz$, т.-е. когда $x=y=z$. Это значитъ, что требованіямъ вопроса удовлетворяетъ кубъ.

587. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, вписанныхъ въ шаръ даннаго радіуса, какой имѣетъ объемъ maximum?

Отв. Кубъ.

588. Радіусъ шара $=R$. Опредѣлить радіусъ основанія конуса, вписаннаго въ этотъ шаръ и имѣющаго объемъ maximum.



Черт. 92.

Рѣшеніе. Пусть MAB (черт. 92) будетъ вписаннымъ въ шаръ конусомъ. Обозначимъ радіусъ основанія конуса чрезъ x, а разность между высотою конуса и радіусомъ шара — чрезъ y. Объемъ конуса выразится чрезъ $\frac{\pi x^2}{3}(R+y)$ или (вслѣдствіе того, что $x^2 = R^2 - y^2$) чрезъ $\frac{\pi}{3}(R^2 - y^2)(R+y)$ или, что то же, чрезъ $\frac{\pi}{3}(R-y)(R+y)^2$. Величина y, обращающая это выраженіе въ maximum, опредѣляется изъ пропорціи $\frac{R+y}{R-y} = \frac{1}{2}$, откуда $y = \frac{R}{3}$ и слѣдов. $x = \frac{2}{3}R\sqrt{2}$.

589. Высота конуса $= h$, радіусъ его основанія $= R$. Опредѣлить радіусъ основанія и высоту цилиндра, вписаннаго въ данный конусъ и имѣющаго объемъ maximum.

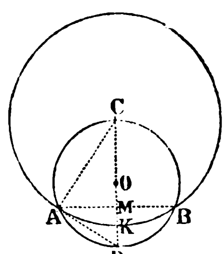
Рѣшеніе. Если означимъ чрезъ x радіусъ основанія вписаннаго въ конусъ цилиндра, а чрезъ y — высоту этого цилиндра, то объемъ его выразится чрезъ $\pi x^2 y$. Такъ какъ π не имѣетъ вліянія на maximum этого выраженія, то вопросъ приводится къ опредѣленію условій, при которыхъ будетъ имѣть мѣсто maximum выраженія x^2y. Но очевидно, что вмѣсто этого можно разсматривать maximum произведенія $\frac{x^2y}{R^2h}$ или $\left(\frac{x}{R}\right)^2 \cdot \frac{y}{h}$.

Такъ какъ $\frac{h-y}{h} = \frac{x}{R}$ или $\frac{x}{R} + \frac{y}{h} = 1$. . . . . (1),

то сумма $\frac{x}{R} + \frac{y}{R}$ имѣетъ постоянную величину, а потому произведеніе $\left(\frac{x}{R}\right)^2 \cdot \frac{y}{R}$ тогда будетъ maximum, когда $\frac{x}{R} : \frac{y}{h} = 2:1$. . (2).

Изъ (1) и (2) находимъ: $y = \frac{h}{3}$, $x = \frac{2}{3}R$.

590. Опредѣлить радіусъ такого шара (черт. 93), котораго центръ лежитъ на поверхности даннаго шара радіуса R и у котораго, кромѣ того, сегментъ, отсѣченный даннымъ шаромъ (слѣдоват. лежащій внутри даннаго шара), имѣетъ наибольшую поверхность.



Черт. 93.

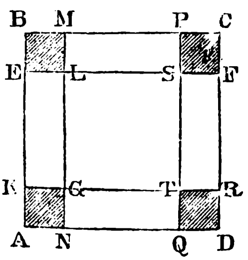
Рѣшеніе. Пусть O будетъ центромъ даннаго шара, имѣющаго радіусъ $OD = R$; C — центромъ искомаго шара, радіусъ котораго

CK = CA обозначимъ чрезъ x. Поверхность S отсѣченнаго сегмента $= 2\pi . x .$ MK, гдѣ MK — высота отсѣченнаго сегмента. Такъ какъ $MK = CK - CM = x - \frac{x^2}{2R} = \frac{(2R - x)x}{2R}$, то

$$S = 2\pi \cdot \frac{x^2(2R - x)}{2R}.$$

Величина x, обращающая это выраженіе въ maximum, обращаетъ въ maximum и выраженіе $x^2(2R - x)$; но это послѣднее, какъ извѣстно, будетъ имѣть величину maximum въ томъ случаѣ, когда $\frac{x}{2} = \frac{2R - x}{1}$, откуда $x = \frac{4}{3}R$. При такомъ значеніи x поверхность отсѣченнаго сегмента $= \frac{32}{27}\pi R^2$.

591. На квадратномъ листѣ бумаги ABCD проводятся линіи MN, PQ, EF и KR (черт. 94), параллельныя краямъ его и на равномъ разстояніи отъ нихъ. Вырѣзавъ угловые квадраты BMEL, PCSF, AKGN и TRDQ, составляютъ изъ оставшейся части листа коробку, которая имѣетъ своимъ основаніемъ LSGT, а боковыми сторонами — прямоугольники MLSP, SFRT, GTQN и ELGK. Опредѣлить сторону вырѣзанныхъ квадратовъ, при которой вмѣстимость коробки есть maximum.



Черт. 94.

Рѣшеніе. Обозначимъ чрезъ a сторону даннаго квадрата ABCD, чрезъ x — сторону каждаго изъ квадратовъ BMEL, PCSF, AKGN и TRDQ и чрезъ V — вмѣстимость составляемой коробки; очевидно получимъ

$$V = (a - 2x)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Величина x, обращающая это выраженіе въ maximum, обращаетъ въ maximum и выраженіе $2x(a - 2x)^2$; но это послѣднее имѣетъ величину maximum въ томъ случаѣ, когда $\frac{2x}{1} = \frac{a - 2x}{2}$, откуда $x = \frac{1}{6}a$. При такомъ значеніи x, какъ видно изъ ур. (1), вмѣстимость коробки $= \frac{2}{27}a^2$.

592. Сѣченіе прямого цилиндра плоскостью, проходящею чрезъ его ось, есть прямоугольникъ, діагональ котораго $= d$. При какой высотѣ цилиндра объемъ его будетъ maximum?

Рѣшеніе. Обозначивъ высоту цилиндра чрезъ x и замѣчая, что радіусъ его основанія $= \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - x^2}$, находимъ, что выраженіе объема V цилиндра чрезъ x есть $V = \frac{\pi}{4} x(d^2 - x^2)$. Величина x, придающая V значеніе maximum, обращаетъ въ maximum и выраженіе $x(d^2 - x^2)$ (ибо $\frac{\pi}{4} =$ постоян.). Для отысканія же maximum этого послѣдняго выраженія ищемъ maximum его квадрата $x^2(d^2 - x^2)^2$ или maximum выраженія $(x^2)^1(d^2 - x^2)^2$. Это выраженіе можно разсматривать какъ произведеніе множителя x^2 на множитель $d^2 - x^2$, взятый во второй степени; а такъ какъ сумма множителей x^2 и $d^2 - x^2$ равна постоянному количеству d^2, то выраженіе $(x^2)^1(d^2 - x^2)^2$ обратится въ maximum тогда, когда множители будутъ пропорціональны показателямъ ихъ степеней, т.-е. когда $x^2 : (d^2 - x^2) = 1 : 2$, откуда $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

593. Опредѣлить цилиндръ, который при данной полной поверхности $2\pi a^2$ имѣетъ объемъ maximum.

Отв. Обозначая чрезъ x радіусъ основанія и чрезъ y высоту цилиндра, находимъ $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ и $y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, такъ что $y = 2x$; слѣдов. изъ всѣхъ цилиндровъ данной полной поверхности наибольшій объемъ имѣетъ тотъ, у котораго высота равна діаметру основанія.

594. Опредѣлить объемъ наибольшаго изъ всѣхъ тѣхъ прямыхъ конусовъ, у которыхъ образующая $= a$. *Отв.* $\frac{2}{27}\pi a^3\sqrt{3}$.

595. Радіусъ шара $=$ R. Найти разстояніе центра этого шара отъ квадратнаго основанія параллелепипеда, вписаннаго въ шаръ и имѣющаго объемъ maximum. *Отв.* $R\sqrt{1/3}$.

596. Въ шаръ радіуса R вписана правильная треугольная призма, объемъ которой есть maximum. Опредѣлить этотъ объемъ. *Отв.* R^3.

597. Опредѣлить объемъ цилиндра, вписаннаго въ шаръ радіуса R и имѣющаго наибольшій объемъ.

Отв. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

598. Изъ цилиндрическаго бревна, діаметръ котораго $= d$, требуется вырѣзать прямоугольную балку наибольшаго сопротивленія разлому (наибольшей относительной твердости). Сопротивленіе разлому пропорціонально ширинѣ и квадрату высоты балки*). (Сравн. 542 зад. X. Отд.).

Отв. Ширина балки $= d\sqrt{1/3}$; высота $= d\sqrt{2/3}$.

Отношеніе шир. къ выс. $= 1 : \sqrt{2}$.

ОТДѢЛЪ XII.

Приложеніе алгебры къ геометріи.

Примѣчаніе. При составленіи этого отдѣла источниками послужили, между прочимъ, *Application de l'algèbre à la géometrie*, par Bourdon. Paris. 1875, сборникъ Amiot (6-е изд. 1877), нѣсколько нѣмецкихъ учебниковъ, задачи, предлагавшіяся во Франціи на экзаменахъ въ Сорбоннѣ, и въ особенности — прекрасная программа одного ремесленнаго училища въ Германіи.

599. Построить выраженія:

1) $x = a - b + c - d$; 2) $x = \frac{ab}{c}$; 3) $x = \frac{a^2}{c}$; 4) $x = \sqrt{ab}$;

5) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; 6) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

600. Построить выраженія:

1) $x = \frac{abcd}{mnh}$; 2) $x = \frac{3a^2bc^2}{4d^3f}$; 3) $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$; 4) $x = \frac{b^2 + bc}{2c}$;

5) $x = \frac{3a^2b + 4abc - 5c^3}{2ad}$; 6) $x = \frac{ab}{a + b - c}$; 7) $x = \frac{ab + bc}{a + b}$;

8) $x = \frac{2a^2bc + 3abcd - 7c^3d}{4f^2g - 2h^3}$; 9) $x = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$.

601. Построить выраженія:

1) $x = \sqrt{2a^2}$; 2) $x = \sqrt{3a^2}$; 3) $x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$; 4) $x = \sqrt{\frac{a^2b}{2c}}$;

---

*) Задача эта, взятая у Зонке (Sohnke: Sämmlung der Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung), можетъ быть рѣшена (равно какъ и задачи **592, 593, 594, 595, 596**) помощью элементарнаго пріема, указаннаго въ рѣшеніи **592**-ой задачи.

5) $x = c\sqrt{\frac{a}{b}}$; 6) $x = \sqrt[4]{abcd}$; 7) $x = \sqrt[8]{abcdefgh}$;

8) $x = \sqrt{a^2 + bc}$; 9) $x = \sqrt{p^2 - q^2 + m^2 - n^2 + r^2 - g^2}$;

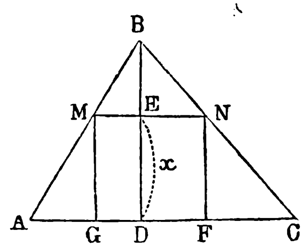
10) $x = \sqrt{a^2 - 2bc}$; 11) $x = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} - a\sqrt{a^2 - b^2}}$;

12) $x = \frac{a^2 + b^2}{2a - b} + \frac{a}{c}\sqrt{\frac{a^3 - 2a^2b + b^3}{a - 2b}}$.

Для того, чтобы показать учащимся, насколько полезенъ алгебраическій путь рѣшенія многихъ геометрическихъ вопросовъ, ниже помѣщены подробныя рѣшенія нѣсколькихъ геометрическихъ задачъ съ выполненіемъ нужныхъ построеній и съ изслѣдованіями результатовъ.

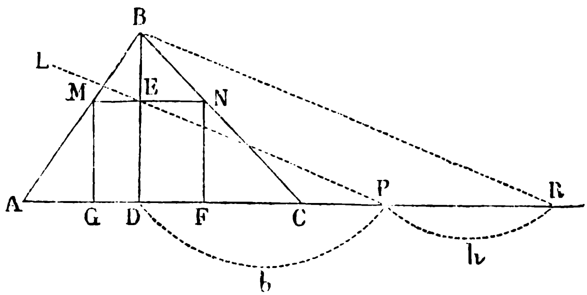
602. Въ данный треугольникъ ABC вписать квадратъ.

Положимъ, что задача рѣшена, и MNGF (черт. 95) есть требуемый квадратъ. Опустимъ изъ вершины B перпендикуляръ BD на сторону AC; перпендикуляръ этотъ пересѣчетъ MN въ нѣкот. точкѣ E. Очевидно, что если бы положеніе точки E на линіи BD было извѣстно (а для этого достаточно знать длину отрѣзка DE), то задача была бы рѣшена: ибо тогда, для полученія требуемаго квадрата, стоило бы только чрезъ E провести MN параллельную AC и изъ точекъ M и N опустить перпендикуляры MG и NF на AC. Итакъ, вопросъ приводится къ нахожденію отрѣзка DE, длину котораго означимъ чрезъ x. Постараемся связать уравненіемъ эту линію x съ тѣми извѣстными линіями нашего чертежа, которыя могутъ быть намъ полезными. Такими линіями служатъ, напримѣръ, основаніе AC и высота BD треугольника. Обозначимъ AC чрезъ b, BD — чрезъ h. Изъ подобія $\triangle\triangle$ ABC и MNB имѣемъ $\frac{MN}{AC} = \frac{BE}{BD}$ или $\frac{x}{b} = \frac{h - x}{h}$, откуда находимъ $x = \frac{bh}{b + h}$ — выраженіе, показывающее, что x можетъ быть построена какъ четвертая пропорціональная къ линіямъ b, h и $b + h$.



Черт. 95.

Хотя для построенія x можно воспользоваться, какъ извѣстно, какимъ угодно угломъ, но весьма удобно взять для этого именно уголъ BDC, ибо, во-первыхъ, искомая точка E должна лежать на сторонѣ BD этого угла, а во-вторыхъ — отрѣзокъ $BD = h$, т.-е. = одной изъ тѣхъ линій, чрезъ которыя выражено x. Самое построеніе (см. черт. 96) выполняемъ слѣдующимъ образомъ:



Черт. 96.

Продолживъ основаніе AC даннаго треугольника, откладываемъ отъ точки D длину $DP = b$, а отъ точки P — длину $PR = h$; точку R соединяемъ съ вершиною B треугольника и изъ P ведемъ PL параллельную BR. Точка пересѣченія (E) этой параллели съ высотою $\triangle$-ка будетъ искомая. Въ самомъ дѣлѣ, изъ построенія, сдѣланнаго нами, слѣдуетъ, что $\frac{DP}{DR} = \frac{DE}{DB}$ или $\frac{b}{b+h} = \frac{DE}{h}$, откуда $DE = \frac{b.h}{b+h}$, т.-е. что $DE = x$. Опредѣливъ, такимъ образомъ, положеніе искомой точки E, проводимъ чрезъ нее линію MN, параллельную AC, и опускаемъ изъ точекъ B и N перпендикуляры MG и NE на AC: получаемъ требуемый квадратъ MNFG.

Замѣчаніе. Положивъ въ найденномъ выраженіи $b = h$, находимъ $x = \frac{b}{2}$; это значитъ, что въ томъ случаѣ, когда основаніе треугольника = высотѣ его, сторона квадрата, вписаннаго въ треугольникъ, равна половинѣ основанія или, что то же, половинѣ высоты треугольника. Такъ какъ квадратъ можетъ быть помѣщенъ не только на AC, но на каждой изъ сторонъ нашего треугольника, то разсматриваемая задача имѣетъ три рѣшенія.

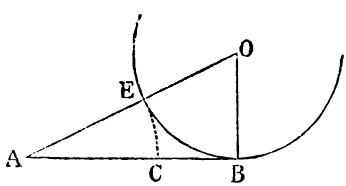
Чтобы узнать, какой изъ получаемыхъ трехъ квадратовъ наибольшій, обозначимъ чрезъ b_1 одну изъ двухъ другихъ сторонъ треугольника (т.-е. либо AB, либо BC), чрезъ h_1—соотвѣтствующую высоту, а чрезъ x_1—сторону квадрата, помѣщеннаго на b_1; очевидно, мы получимъ

$$x_1 = \frac{b_1 . h_1}{b_1 + h_1}.$$

Такъ какъ числители bh и b_1h_1 выраженій x и x_1 равны (ибо какъ bh, такъ и b_1h_1 представл. удвоенную площадь одного и того же треугольника), то изъ двухъ линій x и x_1 та больше, которая выражается дробью, имѣющей меньшаго знаменателя. Но такъ какъ изъ равенства $b_1h_1 = bh$ слѣдуетъ, что $\frac{b}{h_1} = \frac{b_1}{h}$, откуда (по извѣстному свойству пропорціи) $\frac{b - h_1}{b_1 - h} = \frac{b}{h_1}$, то, предполагая, что $b < b_1$, имѣемъ $b - h_1 < b_1 - h$ и слѣдов. $b + h < b_1 + h_1$; а это показываетъ, что x больше чѣмъ x_1, т.-е. что наибольшій квадратъ помѣщается на наименьшей сторонѣ треугольника.

603. Раздѣлить линію AB въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, т.-е. раздѣлить ее на такія двѣ части, чтобы бо́льшая изъ нихъ была среднею пропорціональною между всею линіею и ея меньшею частью.

Положимъ, что задача рѣшена, и пусть AC (черт. 97) будетъ бо́льшею частью линіи AB, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, такъ что $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB}$. Положивъ $AB = a$, $AC = x$ и слѣдовательно $CB = a - x$, буд. имѣть $\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$ или $x^2 + ax - a^2 = 0$, откуда $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ и слѣдов.



Черт. 97.

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = -\left(\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} + \frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right).$$

Изъ двухъ полученныхъ такимъ образомъ рѣшеній только x_1 удовлетворяетъ задачѣ въ томъ видѣ, какъ она формулирована, ибо отрицательное x_2, имѣя абсолютную величину, *бо́льшую* a, не можетъ выражать *части* данной прямой a. Построимъ

$$x_1 = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}.$$

Для этого построимъ сначала линію, выражающую первый членъ найденнаго выраженія, т.-е. $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, а затѣмъ — линію, выражающую второй членъ, т.-е. $\frac{a}{2}$, и вторую линію вычтемъ изъ первой: тогда разность и представитъ x_1. Такъ какъ $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ представляетъ, очевидно, гипотенузу прямоугольнаго треугольника, у котораго катеты суть a и $\frac{a}{2}$, то для построенія $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ въ точкѣ B возставляемъ къ данной линіи перпендикуляръ и откладываемъ на немъ $BO = \frac{a}{2}$; соединивъ A съ O, получаемъ прямоугольный треугольникъ AOB, котораго гипотенуза $AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$. По вышесказанному мы должны теперь вычесть изъ AO линію $= \frac{a}{2} = BO$. Для этого изъ O, какъ изъ центра, радіусомъ BO опишемъ дугу до пересѣченія ея съ AO въ нѣкоторой точкѣ E; тогда

$AE = AO - OE = AO - BO = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} = x_1$. Описавъ теперь изъ A, какъ изъ центра, дугу радіусомъ $= AE$ до пересѣченія ея съ AB въ точкѣ C, находимъ $AC = AE = x_1$; слѣдовател. AC будетъ бо́льшею частью линіи AB, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Такимъ образомъ аналитическое рѣшеніе предложенной задачи съ замѣчательною легкостью указываетъ, *какъ* должно рѣшать эту задачу геометрически, *построеніемъ*, и мы видимъ, что это рѣшеніе привело насъ къ построенію, уже извѣстному намъ изъ геометріи, —

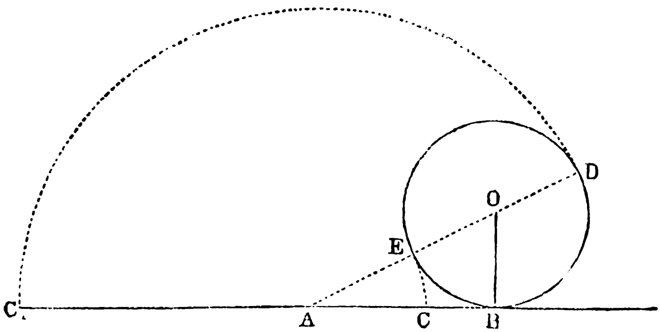
построенію, которое въ геометріи могло быть найдено помощью соображеній значительно болѣе сложныхъ.

Хотя величина x_2, какъ уже сказано, не удовлетворяетъ вопросу въ томъ видѣ, какъ онъ былъ предложенъ, но она имѣетъ, тѣмъ не менѣе, опредѣленный геометрическій смыслъ. Смыслъ выраженія $x_2 = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\right)$ легко раскроется, если предложенную намъ задачу о раздѣленіи прямой въ крайнемъ и среднемъ отношеніи мы представимъ въ болѣе общемъ видѣ. Предложимъ себѣ именно рѣшить такую задачу:

Черт. 98.

На неопредѣленной прямой (черт. 98) даны двѣ точки: A и B; найти на этой прямой такую точку, которой разстояніе отъ точки A было бы среднею пропорціональною между длиною AB и разстояніемъ искомой точки отъ B.

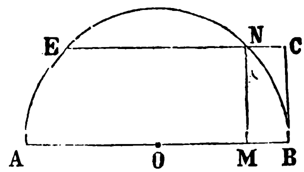
Прежде всего замѣтимъ, что искомая точка не можетъ лежать вправо отъ B, ибо если бы она лежала вправо отъ B, напримѣръ въ какой-нибудь точкѣ C_2, то AC_2 было бы болѣе AB и болѣе BC_2 и слѣдовательно не могло бы быть среднею пропорціональною между AB и BC_2. Но можно предположить, что искомая точка лежитъ или гдѣ-либо между A и B, или гдѣ-нибудь влѣво отъ A. Такъ какъ нѣтъ основанія предпочесть одно предположеніе другому, то мы начнемъ съ *какого-нибудь* изъ этихъ предположеній; напр. положимъ, что искомая точка лежитъ между A и B въ нѣкоторой точкѣ C, такъ что $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$. Положивъ $AB = a$, $AC = x$ и слѣдоват. $CB = a - x$, будемъ имѣть $\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$ или $x^2 + ax - a^2 = 0$, откуда $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ и $x_2 = -\left(\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}\right)$. Первое изъ этихъ рѣшеній, x_1, положительно и строится такъ, какъ было уже сказано въ рѣшеніи задачи о дѣленіи прямой въ крайнемъ и среднемъ отношенія; строя его, мы найдемъ между A и B (черт. 99) точку C, удовлетворяющую и требованіямъ нашей новой, болѣе общей, задачи. Второе найденное нами рѣшеніе x_2, отрицательно. Построимъ его абсолютную величину, т.-е. $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}$.



Черт. 99.

Для этого должно, построивъ линію, выражаемую $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$, сложить ее съ линіей, представляющей $\frac{a}{2}$. Линія, представляющая $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$, уже построена: это есть AO. Продолживъ ее до пересѣченія съ окружностью, описанной изъ O радіусомъ $OB=\frac{a}{2}$, находимъ, что $AD=AO+OD=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}}+\frac{a^2}{2}$. Описавъ теперь изъ A, какъ изъ центра, дугу радіусомъ AD, опредѣлимъ на данной линіи влѣво отъ точки A отрѣзокъ AC_1 той же длины, что и AD. Не трудно убѣдиться, что AC_1 и будетъ представлять, *отрицательное* найденное нами рѣшеніе x. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ абсолютн. величина $AC_1=\frac{a}{2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$, то абсол. величина $BC_1=a+\frac{a}{2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{3a}{2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$, а потому, во-первыхъ, находимъ, что $AC_1^2 = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\right)^2$ $= \frac{3a^2}{2} + a\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, а во-вторыхъ, что $AB \cdot BC_1 =$ $= a\left(\frac{3a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\right) = \frac{3a^2}{2} + a\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, такъ что оказывается $AC_1^2 = AB \cdot BC_1$ или $\frac{AB}{AC_1} = \frac{AC_1}{BC_1}$, откуда слѣдуетъ, что $AC_1 = x^2$.

604. Среднее ариѳметическое двухъ линій $= a$, среднее геометрическое ихъ $= b$. Опредѣлить эти линіи помощію построенія.



Черт. 100.

Обозначивъ одну изъ искомыхъ линій чрезъ x, другую чрезъ y, по условію имѣемъ:

1) $\frac{x+y}{2} = a$ и $\sqrt{xy} = b$. . . . . (2).

Изъ этихъ ур-ій получаемъ:

$x^2 + 2xy + y^2 = 4a^2$ и $4xy = 4b^2$.

Вычитая второе изъ полученныхъ ур-ій изъ перваго, находимъ $x^2 - 2xy + y^2 = 4(a^2 - b^2)$ и слѣдов. $x - y = 2\sqrt{a^2 - b^2}$. . . (3).

Рѣшая ур-ія (1) и (3) получаемъ:

$$x = a + \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad y = a - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Построеніе. Взявъ $AB = 2a$ (черт. 100), радіусомъ $AO = OB = a$ описываемъ на AB, на діаметрѣ, полуокружность; въ точкѣ B къ линіи AB возставляемъ $\perp$ $BC = b$, черезъ точку C ведемъ $CE \parallel AB$; изъ точки N опускаемъ $\perp$ NM на линію AB: полученные отрѣзки AM и MB будутъ искомыми линіями. Дѣйствительно, во-первыхъ:

$\frac{AM + MB}{2} = \frac{AB}{2}$ или $\frac{AM + MB}{2} = a$; а во-вторыхъ:

$AM \cdot MB = NM^2 = CB^2 = b^2$ или $\sqrt{AM \cdot MB} = b$; сравнивая эти выраженія съ (1) и (2), видимъ, что $AM = x$ и $MB = y$.

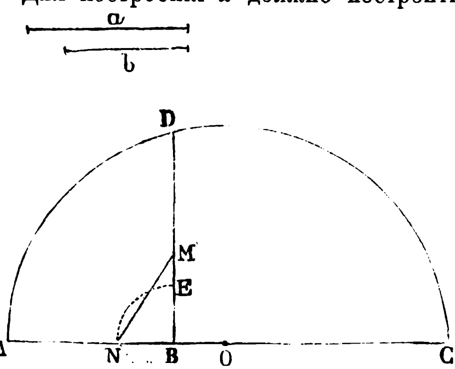
Примѣчаніе. Если $a = b$, то $x = y$; въ этомъ случаѣ параллель CE касается окружности. Если $b > a$, то параллель CE не будетъ имѣть съ окружностью ни одной общей точки, и задача въ этомъ случаѣ невозможна (невозможность ея видна и изъ аналитическихъ соображеній).

605. Даны: сумма a гипотенузы и одного изъ катетовъ прямоугольнаго треугольника и сумма b гипотенузы и другого катета того же прямоугольнаго треугольника. Построить треугольникъ.

Обозначимъ одинъ изъ катетовъ черезъ x, другой — черезъ y, гипотенузу — черезъ z; тогда $x = a - z$ и $y = b - z$. На основаніи Пиѳагоровой теоремы будемъ имѣть $z^2 = (a - z)^2 + (b - z)^2$, откуда $z = a + b \pm \sqrt{2ab}$. Отбрасывая рѣшеніе $z_1 = a + b \sqrt{2ab}$, какъ несообразное (гипотенуза должна быть менѣе суммы катетовъ), принимаемъ $z = a + b - \sqrt{2ab}$, Подстановка этой величины въ выраженія x и y даетъ намъ:

$$x = \sqrt{2ab} - b, \qquad y = \sqrt{2ab} - a.$$

Для построенія x должно построить линію, выражаемую $\sqrt{2ab}$, и вычесть изъ нея линію $= b$; для построенія y должно изъ линіи, выражаемой $\sqrt{2ab}$, вычесть линію a. Замѣтивъ, что $\sqrt{2ab}$ есть средняя пропорціональная между a и $2b$, выполняемъ построеніе треугольника, имѣющаго катетами x и y, слѣдующимъ образомъ. Отложивъ на неопредѣленной прямой отрѣзокъ $AB = a$ и $BC = 2b$



Черт. 101.

(чертежъ 101), описываемъ на AC какъ на діаметрѣ полуокружность; изъ точки B возставляемъ къ AC перпендикуляръ BD до пересѣченія съ проведенною полуокружностью. Такъ какъ $BD^2 = AB \cdot BC = a \cdot 2b$, то $BD = \sqrt{2ab}$. Далѣе на BD откладываемъ, во-первыхъ, $DM = b$, при чемъ будетъ $BM = BD - DM = \sqrt{2ab} - b = x$; а во-вторыхъ, откладываемъ $DE = a$, при чемъ будетъ $BE = BD - DE = \sqrt{2ab} - a = y$. Описавъ затѣмъ изъ B, какъ изъ центра, дугу радіусомъ BE, находимъ, что

$BN = BE = y$. Соединивъ теперь N съ M, получаемъ прямоугольный треуг. NBM, который будетъ требуемымъ, ибо у него катетъ $NB = y$, катетъ $MB = x$, при чемъ $NM = \sqrt{BM^2 + BN^2} = \sqrt{(\sqrt{2ab} - b)^2 + (\sqrt{2ab} - a)^2}$; и такъ какъ подкоренное выраженіе $(\sqrt{2ab} - b)^2 + (\sqrt{2ab} - a)^2$ есть квадратъ трехчлена $a + b - \sqrt{2ab}$, то гипотенуза $NM = a + b - \sqrt{2ab} = z$; при этомъ

$$NM + BM = a + b - \sqrt{2ab} + \sqrt{2ab} - b = a,$$

$$NM + NB = a + b - \sqrt{2ab} + \sqrt{2ab} - a = b.$$

Изслѣдованіе. Такъ какъ разность двухъ катетовъ должна быть меньше гипотенузы, то условіемъ возможности задачи является неравенство $a - b < a + b - \sqrt{2ab}$, откуда легко находится, что $a < 2b$, т.-е. что задача всегда возможна, когда одна изъ двухъ данныхъ суммъ меньше удвоенной другой.

Въ нижепомѣщенныхъ простыхъ задачахъ (606—632) даны лишь результаты: полученіе этихъ результатовъ и выполненіе построеній не затруднитъ учащихся, усвоившихъ обстоятельныя рѣшенія предыдущихъ задачъ.

606. Превратить треугольникъ, котораго основаніе $= b$, а высота $= h$, въ равновеликій ему треугольникъ, имѣющій основаніе $= m$.

Отв. Высота иск. треуг. $= \frac{b \cdot h}{m}$.

607. Одна изъ сторонъ прямоугольника $= b$, площадь его $= a^2$. Построить этотъ прямоугольникъ.

Отв. Другая его сторона $= \frac{a^2}{b}$.

608. Построить прямоугольный треугольникъ по катету его b и по его площади a^2.

Отв. Другой катетъ $= \frac{2a^2}{b}$.

609. Построить прямоугольный треугольникъ по его гипотенузѣ c и площади a^2.

Отв. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, $= \frac{2a^2}{c}$.

610. Имѣются три точки (A, B и C), не лежащія на одной прямой. Провести чрезъ A и B окружность такъ, чтобы касательная, проведенная къ этой окружности изъ точки C, имѣла данную длину a.

Отв. Соединивъ A съ C, обозначимъ точку пересѣченія линіи AC съ проводимою окружностью буквою N. Обозначая AC чрезъ b и NC чрезъ x, находимъ $x = \frac{a^2}{b}$.

611. Линію AE $= a$ раздѣлить на такія двѣ части, чтобы разность квадратовъ этихъ частей равнялась данному квадрату m^2.

Отв. Называя бóльшую изъ этихъ частей чрезъ x, найдемъ $x = \frac{m^2 + a^2}{2a}$.

612. Построить прямоугольный треугольникъ по катету его a и суммѣ s его гипотенузы и другого катета.

Отв. Гипотенуза $= \frac{a^2 + s^2}{2s}$.

613. Основаніе даннаго параллелограмма $= b$, высота его $= h$. Построить квадратъ, равновеликій этому параллелограмму.

Отв. Сторона иском. кв. $= \sqrt{b \cdot h}$.

614. Высота даннаго треугольника $= h$, основаніе его $= b$. Построить квадратъ, равновеликій этому треугольнику.

Отв. Сторона иском. квадрата $= \sqrt{\frac{bh}{2}}$.

615. Построить квадратъ, равновеликій двойному данному квадрату.

Отв. Если сторона даннаго квадрата есть a, то сторона искомаго $= \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2}$.

616. Построить квадратъ, равновеликій половинѣ даннаго квадрата.

Отв. Если сторона даннаго квадрата есть a, а сторону искомаго обозначимъ чрезъ x, то $x^2 = \frac{a^2}{2} = a \cdot \frac{a}{2}$.

617. Дана прямая LN (неопредѣленной длины) и внѣ ея двѣ точки A и B. Провести чрезъ эти точки такую окружность, которая касалась бы данной прямой LN.

Отв. Вопросъ, очевидно, приводится къ опредѣленію положенія на линіи LN той точки C, въ которой LN должна касаться проводимой окружности. Продолживъ линію, соединяющую точки A и B, до пересѣченія съ LN въ точкѣ D, обозначимъ DC чрезъ x, AD — чрезъ a, BD — чрезъ b; будемъ имѣть $x = \pm\sqrt{ab}$ (два рѣшенія).

618. Треугольникъ ABC раздѣлить пополамъ линіею, параллельною сторонѣ AC.

Отв. Пусть линія, удовлетворяющая требованію, пересѣкаетъ сторону AB въ точкѣ M, сторону BC — въ точкѣ N. Обозначивъ BC чрезъ a, BN чрезъ x, будемъ имѣть $x^2 = \frac{a^2}{2} = a \cdot \frac{a}{2}$.

619. Построить квадратъ по суммѣ s его діагонали и стороны. *Отв.* Сторона квадрата $= -s + \sqrt{2s^2}$.

620. Построить равнобедренный прямоугольный треугольникъ по его периметру p.

Отв. Каждый изъ катетовъ искомаго треугольника $= p - \sqrt{\frac{p^2}{2}}$.

621. Построить квадратъ, равновеликій разности двухъ квадратовъ, которыхъ стороны суть a и b $(a > b)$.

Отв. Стор. иск. кв. $= \sqrt{a^2 - b^2}$.

622. Построить квадратъ, равновеликій суммѣ нѣсколькихъ квадратовъ, которыхъ стороны суть a, b, c . . . . .

Отв. Сторона иск. квадрата $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots\ldots}$

623. Построить прямоугольникъ по его периметру p и площади a^2.

Отв. Обозначая стороны прямоугольника чрезъ x и y, находимъ

$$x = \frac{p}{4} \pm \sqrt{\frac{p^2}{16} - a^2}; \quad y = \frac{p}{4} \mp \sqrt{\frac{p^2}{16} - a^2}.$$

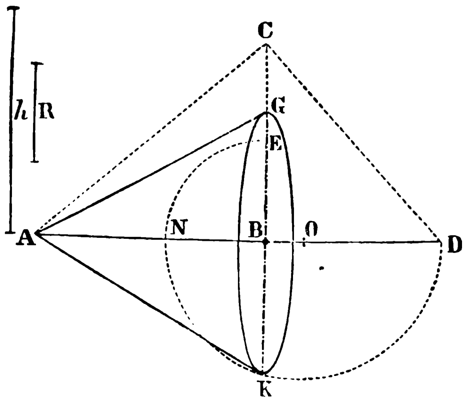
Помѣщая далѣе рядъ весьма интересныхъ задачъ съ рѣшеніями и построеніями результатовъ, предоставляемъ изслѣдованіе задачъ, въ случаѣ если окажется достаточный и удобный для того матеріалъ, самому преподавателю.

624. Опредѣлить радіусъ основанія прямого круглаго конуса, имѣющаго данную высоту h и равновеликаго шару, имѣющему данный радіусъ R.

Обозначая искомый радіусъ основанія конуса чрезъ x, по условію имѣемъ $\pi x^2 \cdot \frac{h}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$, откуда $x^2 = \frac{4R^3}{h}$. Построеніе x выполняемъ слѣдующимъ образомъ:

На сторонахъ прямого угла ABC (черт. 102) откладываемъ $AB = h$ и $BC = 2\,BE = 2\,R$, точку A соединяемъ съ C и въ точкѣ C къ линіи AC проводимъ перпендикуляръ CD, продолжая его до пересѣченія въ точкѣ D съ продолженіемъ AB; будемъ имѣть $BC^2 = AB \cdot BD$, откуда

$$BC = \frac{BC^2}{AB} = \frac{4R^2}{h} \cdots\cdots (1).$$



Черт. 102.

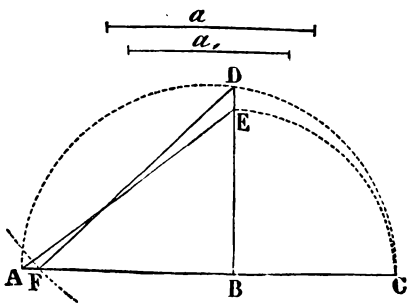
Далѣе изъ точки B, какъ изъ центра, радіусомъ $BE = R$ описываемъ дугу EN; линію ND дѣлимъ пополамъ и изъ средины ея O радіусомъ ON описываемъ на ND, какъ на діаметрѣ, полуокружность, которая пересѣчетъ продолженіе линіи BC въ нѣкоторой точкѣ K; тогда получимъ $BK^2 = BD \cdot NB$ или $BK^2 = BD \cdot R$. Вставляя сюда величину BD изъ уравненія (1), находимъ $BK^2 = \frac{4R^3}{h}$. Сличая это выраженіе съ выраженіемъ $x^2 = \frac{4R^3}{h}$, видимъ, что $BK = x =$ искомому радіусу основанія конуса.

625. Ребро одного куба $= a$, ребро другого $= a_1$. Опредѣлить сторону квадрата, служащаго основаніемъ такого прямого параллелепипеда, котораго объемъ равенъ суммѣ объемовъ данныхъ кубовъ, а высота равна суммѣ реберъ этихъ кубовъ.

Называя искомую сторону основанія параллелепипеда чрезъ x, по условію задачи имѣемъ $x^2(a + a_1) = a^3 + a_1^3$, откуда $x = \sqrt{\frac{a^3 + a_1^3}{a + a_1}}$. Выполнивъ дѣленіе подъ знакомъ корня, получимъ $x = \sqrt{a^2 + a_1^2 - aa_1}$. Для построенія этого выраженія, на какой-нибудь прямой (черт. 103) откладываемъ одинъ возлѣ другого два отрѣзка: $AB = a$ и $BC = a_1$; на линіи AC, какъ на діаметрѣ, описываемъ полуокружность и въ точкѣ B возставляемъ къ AC перпендикуляръ до пересѣченія съ этою полуокружностью (D пусть означаетъ точку пересѣченія); будемъ имѣть $BD^2 = AB \,.\, BC = a \,.\, a_1$, и слѣдовательно выраженіе

$$x = \sqrt{a^2 + a_1{}^2 - a \,.\, a_1}$$

приметъ видъ



Черт. 103.

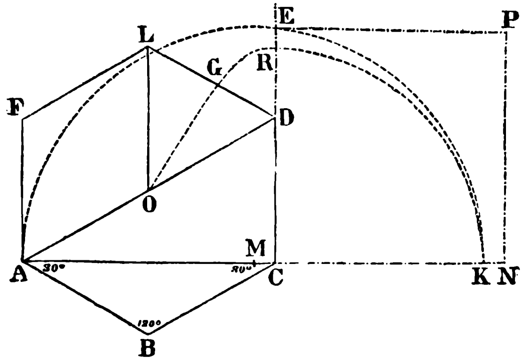
$$x = \sqrt{a^2 + a_1{}^2 - BD^2};$$

далѣе отложивъ на BD отрѣзокъ $BE = a_1$, получимъ $AE^2 = AB^2 + BE^2 = a^2 + a_1{}^2$, такъ что $x = \sqrt{AE^2 - BD^2}$, и слѣдов. построится какъ катетъ прямоугольнаго треугольника, имѣющаго гипотенузою AE, а другимъ катетомъ BD. Для построенія x, изъ D, какъ изъ центра, радіусомъ $= AE$ описываемъ дугу: она пересѣчетъ AC въ нѣкоторой точкѣ F, и тогда изъ прямоуг. $\triangle$-ка BDF найдемъ $BF = \sqrt{DF^2 - BD^2} = \sqrt{AE^2 - BD^2} = x$.

626. **Опредѣлить сторону квадрата, равновеликаго правильному шестиугольнику, имѣющему сторону a.**

Обозначивъ сторону квадрата чрезъ x и замѣтивъ, что площадь шестиугольника, имѣющаго сторону a, равна $\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$, по условію имѣемъ $x^2 = \frac{3a}{2} \cdot a\sqrt{3}$, откуда видно, что искомый квадратъ равновеликъ прямоугольнику, у котораго основаніе $= a\sqrt{3}$, а высота $= \frac{3}{2}$ стороны даннаго шестиугольника. Построеніе основанія и высоты такого прямоугольника выполняемъ слѣдующимъ образомъ:

Проведя (черт. 104) въ данномъ шестиугольникѣ AFLDCB діагонали AD и AC, получаемъ треугольникъ ADC — прямоугольный (ибо уголъ $ACD = BCD - ACB = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$), слѣдов. $AC = \sqrt{AD^2 - DC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$, т.-е. $=$ основанію упомянутаго прямоугольника. Продолживъ затѣмъ сторону DC, описываемъ изъ точки D радіусомъ $DG = \frac{DL}{2}$ дугу, которая пересѣчетъ продолженіе стороны DC въ точкѣ R, такъ что $RD = GD = \frac{a}{2}$ и слѣд. $CR = DC + RD = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$; такимъ

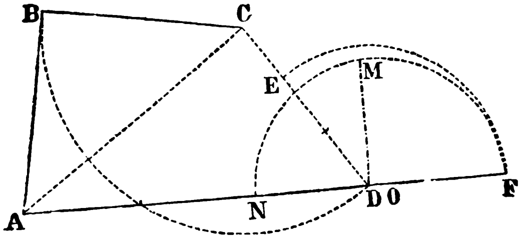


Черт. 104.

образомъ CR будетъ высотою названнаго прямоугольника. Итакъ, искомый квадратъ равновеликъ прямоугольнику, у котораго основаніемъ служитъ AC, а высотою CR. Построимъ теперь такой квадратъ. Для этого продолжимъ сторону AC и изъ C, какъ изъ центра, радіусомъ CR опишемъ дугу RK, которая пересѣчетъ продолженіе AC въ точкѣ K; раздѣливъ AK въ точкѣ M пополамъ, изъ M, какъ изъ центра, радіусомъ $MK = \frac{AK}{2}$ опишемъ полуокружность, которая пересѣчетъ продолженіе линіи CR въ нѣкоторой точкѣ E; будемъ имѣть тогда $CE^2 = AC \,.\, CK = AC \,.\, CR = a\sqrt{3} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = x^2$. Такимъ образомъ CE есть сторона искомаго квадрата, и квадратъ CEPN, построенный на линіи EC, будетъ искомымъ.

627. Опредѣлить сторону правильнаго шестиугольника, равновеликаго квадрату, имѣющему сторону a.

Обозначивъ искомую сторону правильнаго шестиугольника чрезъ x и, замѣтивъ, что площадь его выражается чрезъ $\frac{3x^2}{2} \sqrt{3}$, по условію будемъ имѣть $\frac{3x^2}{2}\sqrt{3}=a^2$, откуда $x^2=\frac{2a}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot$ Так. об. оказывается, что искомая сторона есть среднее пропорціональное между $\frac{2a}{3}$ и $\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot$ Для построенія ея поступаемъ слѣд. образомъ: Построивъ прямой уголъ CBA (черт. 105), откладываемъ на сторонахъ его отрѣзки $BA=BC=a$; тогда $AC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.



Черт. 105.

Въ точкѣ C къ линіи AC возставляемъ перпендикуляръ CD и откладываемъ на немъ $CD=BC=a$; тогда $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$; линію AD дѣлимъ на три равныя части, и пусть DN будетъ одною изъ такихъ частей, такъ что $DN=$ $=\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot$ Раздѣливъ затѣмъ DC на три равныя части, такъ чтобы $DE=\frac{2}{3}DC$, продолжаемъ линію AD и изъ точки D, какъ изъ центра, описываемъ дугу радіусомъ DE до пересѣченія ея съ продолженіемъ AD въ точкѣ F; при этомъ DF будетъ $=DE=\frac{2}{3}DC=\frac{2}{3}a$. Далѣе, раздѣливъ въ точкѣ O линію NF пополамъ, изъ O описываемъ полуокружность радіусомъ NO и въ точкѣ D къ діаметру NF возставляемъ перпендикуляръ DM до пересѣченія съ проведенною полуокружностью; будемъ имѣть:

$$DM^2=DF\,.\,DN=\frac{2}{3}a\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot$$

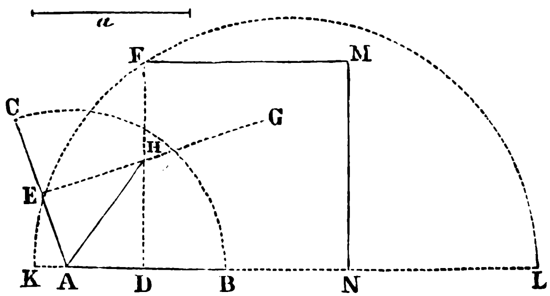
Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ $x=\frac{2a}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}$, видимъ, что $DM=x$, т.-е. что DM есть искомая сторона правильнаго шестиугольника.

628. Дана сторона правильнаго пятиугольника, равная a. Построить квадратъ, равновеликій этому пятиугольнику.

Площадь даннаго правильнаго пятиугольника $= \frac{5a}{2}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$, гдѣ R означаетъ радіусъ круга, описаннаго около этого пятиугольника. Обозначая чрезъ x сторону искомаго квадрата, по условію будемъ имѣть:

$$x^2 = \frac{5a}{2}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Для построенія x строимъ (черт. 106) угол. $CAB = 108^0$ (внутренній уголъ правильн. пятиугольн. $= 108^0$), на сторонахъ его



Черт. 106.

откладываемъ отрѣзки $AB = AC = a$ и въ срединахъ D и E этихъ отрѣзковъ возставляемъ къ сторонамъ угла перпендикуляры DF и EG; точка (H) пересѣченія этихъ перпендикуляровъ будетъ центромъ правильнаго пятиугольника, а AH — радіусомъ круга, описаннаго около этого пятиугольника, при чемъ

$$DH = \sqrt{AH^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

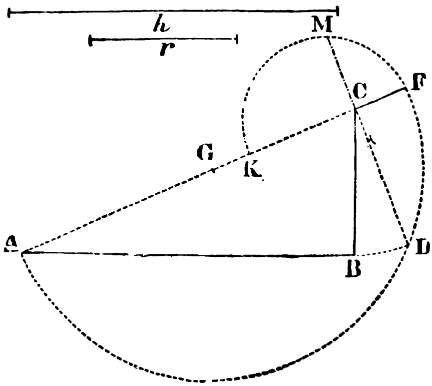
Далѣе, продолживъ AB, откладываемъ $DK = DH$ и $BL = 2a$ и на линіи KL, какъ на діаметрѣ, описываемъ полуокружность; перпендикуляръ DF, возстановленный къ линіи KL до пересѣченія съ проведенной полуокружностью, будетъ стороною искомаго квадрата, ибо $DF^2 = DL \,.\, DK = (BL + BD) \,.\, DK =$
$= \frac{5a}{2}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = x^2.$

Такимъ образомъ квадратъ DFMN, построенный на линіи FD, есть искомый.

629. **Высота прямого круглаго конуса $= h$, радіусъ его основанія $= r$; опредѣлить радіусъ основанія прямого круглаго цилиндра, равновеликаго сказанному конусу и имѣющаго высоту, равную образующей этого конуса.**

Обозначимъ чрезъ x радіусъ основанія цилиндра. Объемъ даннаго конуса выражается чрезъ $\pi r^2 \frac{h}{3}$, объемъ искомаго цилиндра — чрезъ $\pi x^2 \sqrt{h^2 + r^2}$; по условію задачи, $\pi x^2 \sqrt{h^2 + r^2} = \pi r^2 \frac{h}{3}$, откуда $x^2 = \frac{r^2 h}{3\sqrt{h^2 + r^2}}$.

Для построенія этого выраженія поступаемъ слѣдующимъ образомъ. На сторонахъ прямого угла ABC (черт. 107) откладываемъ части $AB = h$ и $BC = r$; соединивъ A и C, находимъ, что $AC = \sqrt{h^2 + r^2}$. Продолживъ AC, возставл. къ AC въ точкѣ C перпендикуляръ $CD = CB = r$. Затѣмъ чрезъ точки A и D проводимъ такую окружность, которой центръ (точка G) лежалъ бы на линіи AC (построеніе такой окружности извѣстно);



Черт. 107.

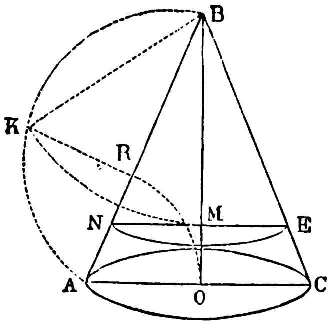
пусть окружность эта пересѣчетъ продолженіе AC въ точкѣ F; тогда $CD^2 = AC \cdot CF$, откуда $CF = \frac{CD^2}{AC} = \frac{r^2}{\sqrt{h^2 + r^2}}$. Далѣе, отложивъ $CK = \frac{h}{3}$, описываемъ на KF, какъ на діаметрѣ, полуокружность, которая пересѣчетъ перпендикуляръ, возставленный въ C къ линіи KF, въ нѣкоторой точкѣ M. Будемъ имѣть:

$$CM^2 = CF \cdot KC = \frac{r^2}{\sqrt{h^2 + r^2}} \cdot \frac{h}{3} = \frac{r^2 h}{3\sqrt{h^2 - r^2}} = x^2.$$

Так. образ. CM будетъ радіусомъ основанія искомаго цилиндра.

630. **Радіусъ основанія прямого круглаго конуса ABC (черт. 108) есть AO $(= R)$, высота BO конуса $= h$. Опре-**

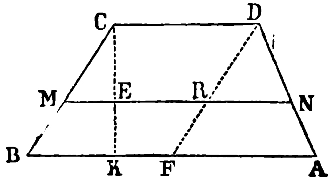
дѣлить разстояніе BM вершины конуса отъ плоскости, параллельной основанію конуса и отсѣкающей отъ даннаго конуса такой конусъ BNE, котораго полная поверхность равна боковой поверхности даннаго.



Черт. 108.

Образующую даннаго конуса обозначимъ чрезъ a, искомую высоту BM меньшаго конуса — чрезъ x, образующую этого конуса BN — чрезъ a_1, а радіусъ его основанія NM — чрезъ R_1. Такъ какъ боковая поверхность даннаго конуса $= \pi R a$, а полная поверхность отсѣченной части BNE имѣетъ выраженіемъ $\pi R_1 (a_1 + R_1)$, то по условію, $\pi R_1 (a_1 + R_1) = \pi R a \ldots.$ (1). Изъ подобія треугол. BNM и BOA имѣемъ $\frac{x}{h} = \frac{R_1}{R} = \frac{a_1}{a}$, откуда $R_1 = \frac{Rx}{h}$ и $a_1 = \frac{ax}{h}$, и слѣдовательно ур-ію (1) можно дать видъ $\frac{Rx}{h}\left(\frac{ax + Rx}{h}\right) = Ra$ или $\frac{x^2}{h^2} = \frac{a}{a + R}$ или $\frac{x^2}{h^2} = \frac{a(a - R)}{a^2 - R^2} \cdots$ (2). Замѣтивъ, что (изъ прямоуг. $\triangle$ ABO) $h^2 = a^2 - R^2$, изъ (2) находимъ, $x^2 = a(a - R)$, откуда видно, что x можетъ быть построена какъ средняя пропорціональная къ линіямъ a и $a - R$, Для построенія x, въ плоскости ABC изъ A, какъ изъ центра, описываемъ дугу радіусомъ AO ($= R$) до пересѣченія ея въ R съ образующей AB; въ точкѣ R возставляемъ къ AB перпендикуляръ до пересѣченія въ K съ полуокружностью, описанной на AB, какъ на діаметрѣ; точку K соединяемъ съ B; будемъ имѣть $KB^2 = AB \,.\, RB = a(a - R) = x^2$. Описавъ затѣмъ изъ B, какъ изъ центра, радіусомъ BK дугу KM до пересѣченія ея въ точкѣ M съ высотою даннаго конуса, находимъ, что $BM = x$. Такимъ образомъ положеніе точки M на линіи BO будетъ опредѣлено построеніемъ отрѣзка BM. (Если теперь чрезъ M проведемъ плоскость, параллельную основанію даннаго конуса, то она отсѣчетъ отъ даннаго конуса конусъ BNE, удовлетворяющій требованіямъ задачи). Замѣтимъ, что для выраженія x только чрезъ h и R должно въ выраженіи $x^2 = a(a - R)$ замѣнить a чрезъ $\sqrt{h^2 + R^2}$; будемъ имѣть $x^2 = \sqrt{h^2 + R^2}\left(\sqrt{h^2 + R^2} - R\right)$.

631. Дана трапеція ABCD (черт. 109). Требуется провести параллельно параллельнымъ ея сторонамъ такую прямую, которая раздѣлила бы площадь трапеціи на двѣ части, относящіяся между собою какъ $p:q$.



Черт. 109.

Бо̀льшую изъ параллельныхъ сторонъ (AB) обозначимъ чрезъ a, меньшую (CD) чрезъ b, высоту (CK) чрезъ h. Пусть MN будетъ требуемая прямая. Разстояніе ея отъ CD (т.-е. CE) обозначимъ чрезъ x. По условію

$$\frac{\text{площ. CDNM}}{\text{площ. ABCD}} = \frac{p}{p+q} \quad \text{или} \quad \frac{\frac{1}{2}(b + MN)\,x}{\frac{1}{2}(a+b)\,.\,h} = \frac{p}{p+q} \quad \ldots. \text{(1)}.$$

Изъ подобія треугольниковъ DFA и DRN получаемъ $\frac{RN}{FA} = \frac{x}{h}$ или $\frac{MN - b}{a - b} = \frac{x}{h}$ .... (2). Исключая MN изъ ур-ій (1) и (2), находимъ $(a-b)\,x^2 + 2bhx - \frac{p}{p+q}(a+b)\,h^2 = 0$, откуда

$$x = -\frac{bh}{a-b} \pm \sqrt{\left(\frac{bh}{a-b}\right)^2 + \frac{p\,(a+b)}{(p+q)\,(a-b)}\cdot h^2}.$$

Отбрасывая отрицательное рѣшеніе, какъ не имѣющее въ данномъ случаѣ смысла, получимъ

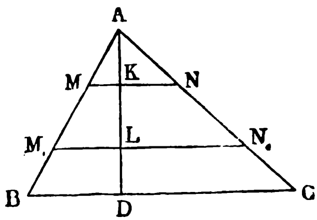
$$x = -\frac{bh}{a-b} + \sqrt{\left(\frac{bh}{a-b}\right)^2 + \frac{p\,(a+b)}{(p+q)\,(a-b)}\cdot h^2}.$$

Для построенія x нужно умѣть построить радикалъ, входящій въ выраженіе x. Радикалъ этотъ, очевидно, представляетъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника, котораго катеты суть

$$\frac{bh}{a-b} \quad \text{и} \quad h\sqrt{\frac{p\,(a+b)}{(p+q)\,(a-b)}}.$$

Взявъ линію, содержащую p такихъ единицъ длины, въ какихъ выражены a и b, строимъ среднюю пропорціональную m между p и $a+b$; строимъ также среднюю пропорціональную n между $p+q$ и $a-b$; тогда радикалъ представится въ видѣ $\frac{hm}{n}$.

Положивъ $\frac{hm}{m} = r$, строимъ r какъ четвертую пропорціональную къ тремъ линіямъ h, m и n. Положивъ далѣе $\frac{bh}{a-b} = s$, строимъ s какъ четвертую пропорціональную къ линіямъ b, h и $a-b$. Будемъ имѣть $x = -s + r$ — выраженіе, которое легко можетъ быть построено.



Черт. 110.

632. Данъ треугольникъ ABC (черт. 110), въ которомъ $BC = a$ и высота $AD = h$. Требуется провести параллельно основанію BC такія двѣ линіи MN и M_1N_1, чтобы разность ихъ была равна d, а трапеція MNM_1N_1 была равновелика данному квадрату m^2. Узнать, всегда ли задача возможна.

Полагая $MN = x$ и $M_1N_1 = y$, будемъ имѣть

$$(1) \ldots\ldots y - x = d \quad \text{и} \quad \frac{x+y}{2} \cdot KL = m^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Изъ подобія треугольниковъ AMN, AM_1N_1 и ABC находимъ $\frac{AK}{MN} = \frac{AL}{M_1N_1} = \frac{AD}{BC}$ или $\frac{AK}{x} = \frac{AL}{y} = \frac{h}{a}$, откуда выводимъ $\frac{AL - AK}{y - x} = \frac{h}{a}$ или $\frac{KL}{d} = \frac{h}{a}$ и слѣдоват. $KL = \frac{dh}{a}$. Вставляя эту величину въ ур. (2), получаемъ

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{dh}{a} = m^2 \quad \text{или} \quad \frac{x+y}{2} = \frac{am^2}{dh} \ldots\ldots (3).$$

Изъ ур. (1) и (3) наход. теперь $y = \frac{am^2}{dh} + \frac{d}{2}$; $x = \frac{am^2}{dh} - \frac{d}{2}$. Построеніе выполняется легко.

633. Высота прямого круглаго конуса $= h$; радіусъ его основанія $= R$. Опредѣлить радіусъ x основанія другого прямого круглого конуса, у котораго высота также $= h$, а боковая поверхность вдвое болѣе боковой поверхности перваго конуса

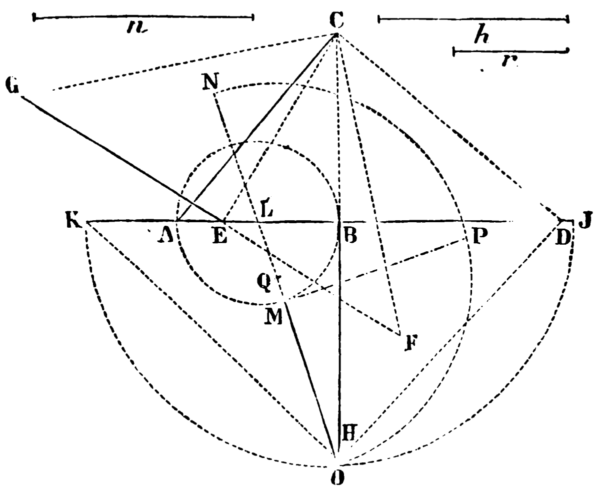
Боковая поверхность даннаго конуса $= 2\pi R \cdot \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{2} =$ $= \pi R \sqrt{h^2 + R^2}$; боковая поверхность второго конуса $=$ $= 2\pi x \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{2} = \pi x \sqrt{h^2 + x^2}$.

По условію задачи, $\pi x \sqrt{h^2 + x^2} = 2\pi R \sqrt{h^2 + R^2}$.
Отсюда получаемъ $x^2h^2 + x^4 = 4R^2(h^2 + R^2)$ или $x^4 + h^2x^2 - 4R^2(h^2 + R^2) = 0$. Раздѣливъ ур-іе на n^2 гдѣ n означаетъ прямую произвольной длины) имѣемъ

$$\frac{x^4}{n^2} + \frac{x^2}{n} \cdot \frac{h^2}{n} - \frac{4R^2(h^2 + R^2)}{n^2} = 0.$$

Полагая $\frac{x^2}{n} = \rho$, получаемъ

$$\rho^2 + \frac{h^2}{n} \cdot \rho - \frac{4R^2(h^2 + R^2)}{n^2} = 0 \ldots\ldots\ldots (A).$$



Черт. 111.

Для построенія x пользуемся этимъ ур-іемъ слѣдующ. образомъ. Отложивъ (черт. 111) на одной сторонѣ прямого угла отрѣзокъ $BD = n$, на другой — отрѣзокъ $BC = h$, соединяемъ точки D и C прямою CD и въ точкѣ C возставляемъ къ прямой CD перпендикуляръ CA; тогда $BC^2 = AB \cdot BD$ или $h^2 = AB \cdot n$, откуда $AB = \frac{h^2}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

Взявъ на продолженіи BD отрѣзокъ $BE = R$ и соединивъ точку C съ точкою E, будемъ имѣть $CE^2 = h^2 + R^2 \ldots\ldots (2)$.

Далѣе, въ точкѣ E проводимъ линію FG, перпендикулярную къ CE, беремъ отрѣзокъ $EF = n$ и соединяемъ F съ C; будемъ имѣть $CE^2 = GE . EF$, откуда $GE = \frac{CE^2}{n}$ или [на основаніи выраженія (2)] $GE = \frac{h^2 + R^2}{n}$ . . . . (3).

Отложивъ затѣмъ на продолженіи CB отрѣзокъ $BH = 2R$ и проведя въ точкѣ H къ линіи HD перпендикуляръ HK, имѣемъ $BH^2 = BK . BD$ или $4R^2 = BK . n$, откуда $BK = \frac{4R^2}{n}$. . . . . (4).

Далѣе беремъ отрѣзокъ $BJ = EG$; на линіи JK, какъ въ діаметрѣ, описываемъ полуокружность; продолживъ BH до пересѣченія съ этою полуокружностью, въ пересѣченіи получаемъ точку O; при этомъ $BO^2 = BK . BJ = BK . EG$ или [въ силу выраженій (3) и (4)] $BO^2 = \frac{4R^2 (h^2 + R^2)}{n^2}$. Так. обр. вышенаписанное ур-іе (A) приметъ видъ $\rho^2 + AB . \rho - BO^2 = 0$.

Для построенія положительнаго корня этого ур-ія описываемъ на AB, какъ на діаметрѣ, окружность и центръ ея L соединяемъ съ точкою O; тогда $MO = \rho$*); но $\rho = \frac{x^2}{n}$; слѣдовательно $\frac{x^2}{n} = MO$ или $x^2 = n . MO$, откуда видно, что x есть среднее пропорціональное между n и MO. Для построенія x, на продолженіи MO беремъ отрѣзокъ $MN = n$ и радіусомъ $OO = \frac{NO}{2}$ описываемъ на NO, какъ на діаметрѣ, полуокружность, которая съ перпендикуляромъ MP (возставл. къ NO въ точкѣ M) пересѣчется въ нѣкоторой точкѣ P. Будемъ имѣть $MP^2 = NM . MO = n . MP = x^2$ и слѣдоват. $MP = x$.

---

*) Это слѣдуетъ изъ теоріи построенія корней квадратнаго уравненія вида $x^2 + px - m^2 = 0$.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

Собраніе задачъ, рѣшаемыхъ совмѣстнымъ примѣненіемъ геометріи и тригонометріи

(для учениковъ старшихъ классовъ гимназій и реальныхъ училищъ).

Замѣчаніе. Во всѣхъ помѣщенныхъ здѣсь задачахъ, содержащихъ числовыя данныя, отвѣты вычислены при помощи *пятизначныхъ* логариѳмическихъ таблицъ, при чемъ $lg\pi$ принятъ $= 0{,}49715$. Во всѣхъ задачахъ, относящихся къ ученію о поверхностяхъ и тѣлахъ вращенія предполагается, что ось вращенія лежитъ въ плоскости вращаемой фигуры. Подъ словомъ „цилиндръ" вездѣ разумѣется прямой круглый цилиндръ, подъ словомъ „конусъ" — прямой круглый конусъ.

634. Изъ точки, лежащей внѣ круга и отстоящей отъ его центра на $d = 2{,}514$ метр., проведены къ кругу двѣ касательныя, составляющія между собою уголъ $= \alpha = 64^\circ 30'$. Опредѣлить площадь вписаннаго въ этотъ кругъ правильнаго треугольника.

Отв. $0{,}75\sqrt{3}\,d^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2{,}3379$ кв. метр.

635. Три окружности одного и того же радіуса R расположены такъ, что каждая изъ нихъ касается двухъ другихъ. Опредѣлить сторону ромба, у котораго одинъ изъ угловъ $= \alpha$, а площадь равна площади криволинейной фигуры, заключающейся между тремя упомянутыми окружностями.

Отв. $R\sqrt{\frac{\sqrt{3} - \pi}{2\sin\alpha}}$.

636. Изъ внѣшней точки проведены къ окружности двѣ сѣкущія, изъ которыхъ одна проходитъ чрезъ центръ и имѣетъ внѣшній отрѣзокъ, длиною въ $\frac{1}{4}$ радіуса окружности; у другой сѣкущей внѣшній и внутренній отрѣзки равны между собою. Опредѣлить уголъ x между сѣкущими.

Отв. $\cos x = \frac{9}{20}\sqrt{2}$; $x = 50^\circ 28' 34''$.

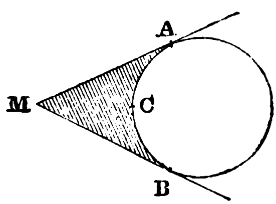
637. Изъ двухъ точекъ В и А, взятыхъ внѣ круга и лежащихъ на одной прямой съ его центромъ (при чемъ какъ А, такъ и В лежатъ по одну и ту же сторону центра), первая отстоитъ отъ центра на d дюймовъ далѣе, чѣмъ вторая.

Уголъ, составленный двумя касательными, проведенными къ этому кругу изъ точки B, равенъ β; а уголъ между двумя касательными, проведенными къ тому же кругу изъ точки A, есть α. Опредѣлить площадь правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ этотъ кругъ.

Отв. $\dfrac{3\sqrt{3}\, d^2 \,.\, \sin^2 \frac{1}{2}\alpha \,.\, \sin^2 \frac{1}{2}\beta}{8 \cos^2 \frac{1}{4}(\alpha + \beta) \,.\, \sin^2 \frac{1}{4}(\alpha - \beta)}$.

638. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $d = 3{,}2$ дюймамъ, $\alpha = 42^\circ 16'$ и $\beta = 18^\circ 20'$. *Отв.* 2,16725 дюйм.

639. Къ окружности радіуса R изъ одной и той же внѣшней точки M (черт. 112) проведены двѣ касательныя MA и MB, образующія между собою уголъ AMB $= \varphi$. Опредѣлить площадь фигуры AMBC, ограниченной линіями MA и дугою ABC.



Черт. 112.

Отв. $R^2 \left[\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi(180 - \varphi)}{360} \right]$.

640. Къ окружности, радіусъ которой $= 1$ метру, изъ одной и той же внѣшней точки M проведены двѣ касательныя MA и MB. Дуга ACB (см. черт. 112) содержитъ 40°. Опредѣлить площадь фигуры AMBC, ограниченной линіями MA, MB и дугою ACB. *Отв.* 0,014909 квадр. метр.

641. Къ окружности радіуса R изъ одной и той же внѣшней точки M (черт. 112), отстоящей отъ центра окружности на разстояніе $= 2$R, проведены двѣ касательныя MA и MB. Опредѣлить сторону правильнаго треугольника, площадь котораго равна площади фигуры AMBC, ограниченной линіями MA, MB и дугою ACB.

Отв. Стор. треуг. $= 2R \sqrt{1 - \frac{\pi \alpha \sqrt{3}}{540}}$, гдѣ $\alpha = arc \cos \frac{1}{2}$, т.-е. сторона $= 2R \sqrt{1 - \frac{\pi \sqrt{3}}{9}}$, ибо $arc \cos \frac{1}{2} = 60^\circ$.

642. Хорда AB дѣлитъ окружность на двѣ неравныя части, изъ которыхъ меньшая есть дуга AMB; концы A и B этой хорды соединены съ центромъ O окружности, такъ что образуется треугольникъ АВО. Зная, что центральный уголъ АОВ содержитъ n градусовъ и что площадь образовавшагося треугольника превышаетъ на k квадр. метровъ площадь сегмента АМВ, опредѣлить радіусъ окружности.

Отв. Иск. радіусъ $= \sqrt{\dfrac{k}{\sin n - \dfrac{\pi n}{360}}}$.

643. Двѣ окружности, изъ которыхъ у одной радіусъ равенъ $3a$, а у другой $=a$, имѣютъ внѣшнее касаніе въ точкѣ С. Опредѣлить: 1) уголъ, образуемый общею внѣшнею касательною АВ (А и В суть точки касанія) къ этимъ окружностямъ съ линіею, проходящею чрезъ ихъ центры, и 2) площадь фигуры АСВ, заключенной между этою касательною и двумя окружностями.

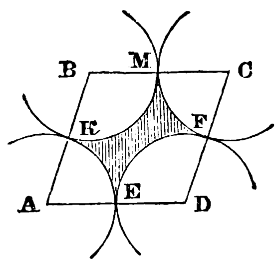
Отв. 1) 30^0; 2) $(4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi)a^2$.

644. Въ данный уголъ α вписанъ кругъ радіуса R. Опредѣлить радіусъ такого круга, который, касаясь извнѣ перваго круга, касается въ то же время обѣихъ сторонъ даннаго угла.

Отв. Два круга удовлетворяютъ требованію: радіусъ одного $=$ $R \, . \, \mathrm{tg}^2(45^0 - \frac{1}{4}\alpha)$, радіусъ другого $= R \, . \, \mathrm{cotg}^2(45^0 - \frac{1}{4}\alpha)$.

645. Въ круговой секторъ, у котораго дуга $= \alpha = 85^0 37' 36''$, а радіусъ $= R = 11{,}06$ дюйм., вписанъ кругъ. Опредѣлить радіусъ этого круга.

Отв. $\dfrac{R \sin\frac{1}{2}\alpha}{2\cos^2(45^0 - \frac{1}{4}\alpha)} = 4{,}4752$ дюйм.



Черт. 113.

646. Сторона ромба $= 57{,}392$ фут., а уголъ его BAD (черт. 113) $= 57^0$. Опредѣлить площадь фигуры KMEF, содержащейся внутри ромба между дугами, описанными изъ вершинъ всѣхъ его угловъ радіусомъ, равнымъ половинѣ его стороны. *Отв.* 175,5 квадр. фут.

647. Окружности двухъ круговъ, радіусы которыхъ суть R и r, пересѣкаются въ точкахъ M и N. Длина хорды MN, соединяющей точки пересѣченія, $= a$. Опредѣлить площадь общей части этихъ круговъ.

Отв. $\frac{1}{2}\left[R^2\left(\frac{\pi\alpha}{180^0}-\sin\alpha\right)+r^2\left(\frac{\pi\beta}{180^0}-\sin\beta\right)\right]$.

при чемъ $\begin{cases} \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2R} \\ \sin\frac{\beta}{2}=\frac{a}{2r} \end{cases}$

648. Параллелограммъ, у котораго одинъ изъ угловъ $=\varphi$, описанъ около круга радіуса r. Опредѣлить: 1) площадь этого параллелограмма и 2) значеніе угла φ, при которомъ эта площадь имѣетъ наименьшую величину.

Отв. Искомая площадь $=\frac{4r^2}{\sin\varphi}$. Minimum этого выраженія имѣетъ мѣсто при $\varphi=90^0$, т.-е. въ томъ случаѣ, когда параллелограммъ, описанный около круга, есть квадратъ.

649. Острый уголъ ромба $=\alpha=39^0 10' 15''$. Опредѣлить площадь этого ромба, зная, что площадь вписаннаго въ него круга $=$ К $= 99,4$ квадр. дюйм.

Отв. Искомая площ. $=\frac{4\,\mathrm{K}}{\pi\,.\sin\alpha}=200,37$ квадр. дюйм.

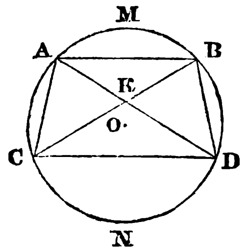
650. Доказать, что если всѣ стороны ромба раздѣлимъ пополамъ и точки дѣленія каждыхъ двухъ смежныхъ сторонъ соединимъ между собою прямой линіей, то четыреугольникъ, который образуется тогда внутри ромба, будетъ прямоугольникомъ; затѣмъ вычислить длины сторонъ этого прямоугольника, полагая, что длина стороны ромба $= 532,5$ фута, а острый уголъ его $= 42^0 40'$.

Отв. Длины смежныхъ сторонъ прямоугольника суть 193,72 ф. и 496,02 ф.

651. Доказать, что если всѣ стороны прямоугольника раздѣлимъ пополамъ и точки дѣленія каждыхъ двухъ смежныхъ сторонъ соединимъ между собою прямой линіей, то четыреугольникъ, который тогда образуется внутри прямоугольника, будетъ ромбомъ; затѣмъ вычислить углы этого ромба, принимая, что длины смежныхъ сторонъ прямоугольника суть 1,3782 ф. и 4,8063 ф.

(Исп. зр. въ Бердянск. гимн. въ 1891 г.)

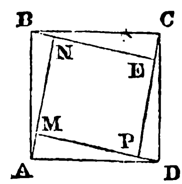
652. Въ кругѣ проведены двѣ параллельныя хорды CD и AB (черт. 114), концы которыхъ соединены прямыми AC, BD, AD и BC. Разность дугъ CND и AMB, соотвѣтствующихъ этимъ хордамъ, $=2n^\circ=$ $=72\frac{2^\circ}{5}$, а величина угла CKD, образуемаго хордами AD и CB, $=m^\circ=84\frac{7^\circ}{15}$. Зная, что разность площадей треугольниковъ CBD и ABC $=F=970{,}94$ кв. дюйм., опредѣлить площадь фигуры CABD.



Черт. 114.

Отв. Иск. площ. $=F\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{m}{2}\cdot\mathrm{cotg}\,\frac{n}{2}=$ $=2696{,}7$ кв. д.

653. Внутри квадрата ABCD (черт. 115), изъ вершины его C, проведена прямая CP, составляющая со стороною CD квадрата уголъ $DCP=\alpha$; изъ вершинъ B и D проведены перпендикулярныя къ этой прямой линіи BE и DM, и на линію BE опущенъ затѣмъ перпендикуляръ AN изъ вершины A. Найти отношеніе площади квадрата ABCD къ площади образовавшейся внутри его фигуры MNEP.



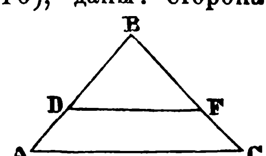
Черт. 115.

Отв. $1:(1-\sin 2\alpha)$.

654. Въ квадратѣ ABCD вписанъ квадратъ PMNQ такъ, что вершины P, M, N и Q лежатъ на сторонахъ квадрата ABCD. Отношеніе площади PMNQ къ площади ABCD $=$ $=m:n=1:2$. Какъ велики углы, образуемые сторонами квадрата PMNQ со сторонами квадрата ABCD?

Отв. Если α — одинъ изъ искомыхъ угловъ, то $\sin 2\alpha=(n-m):m$. Для частнаго случая $m:n=1:2$ имѣемъ $\alpha=45^\circ$.

655. Въ треугольникѣ ABC (черт. 116), даны: сторона $AC=b$ и прилежащіе къ ней углы A и C. Опредѣлить длину линіи DF, параллельной сторонѣ AC и отсѣкающей отъ сторонъ AB и BC отрѣзки AD и FC, сумма которыхъ равна DF.



Черт. 116.

Отв. $DF = \dfrac{b \cdot \cos\frac{1}{2}(A - C)}{2\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}C}$.

656. Около треугольника, углы A и B котораго даны (слѣдовательно извѣстенъ и третій уголъ C), описанъ кругъ. Найти отношеніе площади треугольника къ площади круга.

Отв. $\sin A \sin B \sin C : \dfrac{\pi}{2}$.

657. Въ треугольникъ ABC, углы A и B котораго даны (слѣдов. извѣстенъ и третій уголъ C), вписана окружность, касающаяся стороны BC въ точкѣ A_1, стороны AC — въ точкѣ B_1, и стороны AB — въ точкѣ C_1. Точки прикосновенія A_1, B_1 и C_1 приняты за вершины новаго треугольника $A_1B_1C_1$. Найти отношеніе площади треугольника $A_1B_1C_1$ къ площади треугольника ABC.

Краткое рѣшеніе. Означимъ площадь треуг. ABC чрезъ S, стороны его, противолежащія угламъ A, B и C — соотвѣтственно чрезъ a, b и c, площадь треуг. $A_1B_1C_1$ — чрезъ S_1, стороны, противолежащія угламъ A_1, B_1, C_1, — соотвѣтственно чрезъ a_1, b_1, c_1. Будемъ имѣть:

$$S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2\sin A}; \qquad S_1 = \frac{a_1^2 \cdot \sin B_1 \cdot \sin C_1}{2\sin A_1}.$$

Послѣ этого должно доказать, что $A_1 = 90^0 - \frac{1}{2}A$, $B_1 = 90^0 - \frac{1}{2}B$ и $C_1 = 90^0 - \frac{1}{2}C$,

такъ что $S_1 = \dfrac{a_1^2 \cos\frac{1}{2}B \cdot \cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}$ и слѣдов. $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{a_1^2}{a^2} \cdot \dfrac{\sin\frac{1}{2}A}{2\sin\frac{1}{2}B \cdot \sin\frac{1}{2}C}$.

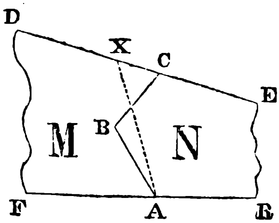
Далѣе можно убѣдиться въ томъ, что

$$BA_1 = \frac{b}{\sin\frac{1}{2}B} = \frac{a_1 \sin B_1}{2\sin A_1 \cdot \sin\frac{1}{2}B} = \frac{a_1 \cos\frac{1}{2}B}{2\cos\frac{1}{2}A \cdot \sin\frac{1}{2}B}$$

и что $CA_1 = \dfrac{a_1 \cos\frac{1}{2}C}{2\cos\frac{1}{2}A \cdot \sin\frac{1}{2}C}$, такъ что $a = BA_1 + CA_1 =$

$= \dfrac{a_1}{2\sin\frac{1}{2}B \cdot \sin\frac{1}{2}C}$. Подставивъ это значеніе a въ вышеполученное выраженіе $\dfrac{S}{S_1}$, найдемъ, что $\dfrac{S}{S_1} = 2\sin\dfrac{A}{2} \cdot \sin\dfrac{B}{2} \cdot \sin\dfrac{C}{2}$.

658. Полевая земля FDEK состоитъ изъ двухъ участковъ M и N, общею границею которыхъ служитъ ломаная линія ABC (черт. 117). Владѣльцы этихъ участковъ, изъ которыхъ одному принадлежитъ M, а другому N, пожелали, чтобы вмѣсто ломаной линіи общею границею ихъ владѣній служила прямая (AX), проведенная изъ точки A такимъ образомъ, чтобы величины площадей двухъ участковъ, на которые этою прямою раздѣлится поле FDER, были равны площадямъ прежнихъ участковъ M и N. Опредѣлить разстояніе точки C отъ точки пересѣченія X прямой DE съ проводимою изъ A прямою AX, предназначенной для выпрямленія общей границы. При этомъ дано, что $AB = 46{,}78$ саж., $BC = 35{,}9$ саж., уголъ $ABC = 136°52'$ и уголъ $BCD = 52°27'21''$. (Предлагается, кромѣ того, показать, какъ рѣшается задача о проведеніи требуемой прямой AX безъ вычисленія длины CX — путемъ геометрическаго построенія).



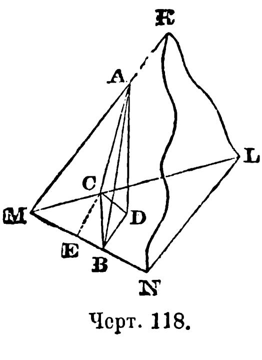
Черт. 117.

Отв. $CX = 15{,}305$ саж.

659. На горизонтальной плоскости MN взяты двѣ точки A и B и внѣ этой плоскости — точка C. Опредѣлить разстояніе C отъ плоскости MN, зная, что разстояніе AB между точками A и B равно $d = 45{,}808$ фут., что уголъ $BAC = \alpha = 38°21'48''$, уголъ $ABC = \beta = 32°38'12''$ и что уголъ, составляемый линіей AC съ плоскостью MN, $= \gamma = 22°30'10''$.

Отв. Иск. разст. $= \dfrac{d \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta)} = 10$ фут.

660. Даны три плоскихъ угла трегграннаго угла MKLN: $\angle KML = \alpha$, $\angle KMN = \beta$ и $\angle LMN = \gamma$. Найти его двугранные углы: KMLN, KNML и NMKL (черт. 118).



Черт. 118.

Рѣшеніе. Означимъ первый изъ искомыхъ двугранныхъ угловъ, т.-е. KMLN, чрезъ x. Взявъ на ребрѣ MK произвольную точку A, означимъ отрѣзокъ MA чрезъ a и опустимъ изъ точки A перпендикуляръ AD на плоскость LMN. Если проведемъ чрезъ линію AD плоскости ADB и ADC, изъ которыхъ первая перпендикулярна къ ребру MN, а вторая къ ребру ML, то ребро MN будетъ перпендикулярно къ линіямъ BA и BD, а ребро ML къ линіямъ CA и CD; изъ послѣдняго слѣдуетъ, что уголъ ACD есть линейный уголъ двуграннаго KMLN и, какъ мѣра послѣдняго, $= x$. Такъ какъ треугольники AMC и AMB — прямоугольные, то $AC = AM . \sin AMC = a . \sin \alpha$, $CM = a . \cos \alpha$, $BM = AM . \cos AMB = a . \cos \beta$, $AB = a . \sin \beta$. Изъ прямоугольнаго треугольника ADC имѣемъ $CD = AC . \cos ACD = a . \sin \alpha . \cos x$, откуда $\cos x = CD : a . \sin \alpha$. Такъ какъ $DC : BC = \sin CBD : \sin BDC$, то

$$DC = \frac{BC . \sin CBD}{\sin BDC} = \frac{BC . \sin (90^{\circ} - CBM)}{\sin (180^{0} - CMB)} = \frac{BC . \cos CBM}{\sin \gamma}$$

и слѣдов. $\cos x = CD : a . \sin \alpha = \dfrac{BC . \cos CBM}{a . \sin \alpha . \sin \gamma}$ . . . . . . (1). Опустивъ изъ точки C перпендикуляръ CE на линію MB, найдемъ, что $MB = ME + EB = MC . \cos CME + BC . \cos CBM$ или $a . \cos \beta = a . \cos \alpha . \cos \gamma + BC . \cos CBM$, откуда $BC . \cos CBM = a (\cos \beta - \cos \alpha . \cos \gamma)$. Подставивъ это значеніе $BC . \cos CBM$ въ равенство (1), получимъ

$$\cos x = \frac{\cos \beta - \cos \alpha . \cos \gamma}{\sin a . \sin \gamma}.$$

Подобнымъ же образомъ, означивъ мѣру двуграннаго угла KNML чрезъ y, а мѣру двуграннаго угла NMKL чрезъ z, найдемъ:

$$\cos y = \frac{\cos \alpha - \cos \beta . \cos \gamma}{\sin \beta . \sin \gamma}, \quad \cos z = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha . \cos \beta}{\sin \alpha . \sin \beta}.$$

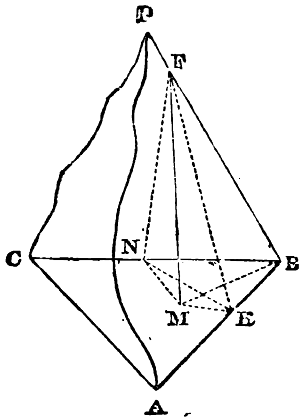
Замѣчаніе. Если плоскость грани KML перпендикулярна къ плоскости грани LMN, то $\cos x = 0$ и слѣдов. $\cos \alpha . \cos \gamma = \cos \beta$. Такимъ обр. условіе перпендикулярности граней двухъ плоскихъ угловъ состоитъ въ томъ, чтобы произведеніе косинусовъ этихъ двухъ плоскихъ угловъ равнялось косинусу третьяго плоскаго угла.

661. Въ трегранномъ углѣ даны три плоскихъ угла: $\alpha = 25^{\circ} 13' 12''$, $\beta = 37^{\circ} 14' 9''$ и $\gamma = 58^{\circ} 31' 51''$. Опредѣлить его двугранные углы.

Отв. Одинъ изъ трехъ искомыхъ двугранныхъ угловъ $= 26^{0} 59'$.

662. Даны плоскіе углы трегранного угла BACP: $\angle PBC=\alpha$, $\angle PBA=\beta$ и $\angle ABC=\gamma$ (черт. 119). Опредѣлить уголъ, составляемый ребромъ BP съ плоскостью грани CBA.

Рѣшеніе. Изъ произвольной точки F ребра BP опускаемъ перпендикуляръ FM на плоскость грани CBA. Такъ какъ угломъ линіи съ плоскостью называется уголъ, составленный этою линіею съ ея проекціею на плоскость, то искомымъ угломъ будетъ уголъ FBM, который означимъ чрезъ x. Длину отрѣзка BF означимъ чрезъ a. Проведемъ чрезъ линію FM во-первыхъ плоскость FMN, перпендикулярную къ ребру BC, а во-вторыхъ—плоскость FMK, перпендикулярную къ ребру BA. Изъ сдѣланнаго построенія слѣдуетъ, что углы FNB, FKB, BNM и MKB суть прямые; а изъ того, что углы BNM и BKM четыреугольника NBKM оказываются прямыми, слѣдуетъ, что около этого четыреугольника можно описать окружность. Такъ какъ эта окружность вмѣстѣ съ тѣмъ является описанной и около треугольника KBN, то радіусъ ея $=KN:2\sin KBN=$ $=KN:2\sin\gamma$. (См. Сборн. тригонометр. задачъ Минина, изд. 6-е, зад. № 561)



Черт. 119.

и слѣдов. діаметръ ея $=KN:\sin\gamma$; но BM есть діаметръ окружности, описанной около четыреугольника MNBK; слѣдовательно $BM=KN:\sin\gamma$ и потому

$$BM^2=KN^2:\sin^2\gamma=(BN^2+BK^2-2\,BN\,.\,BK\,.\cos\gamma):\sin^2\gamma.$$

А такъ какъ $BN=a\cos\alpha$ и $BK=a\cos\beta$,

то $BM^2=(a^2.\cos^2\alpha+a^2.\cos^2\beta-2\,a^2.\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma):\sin^2\gamma$.
Изъ прямоугольнаго треугольника FMB имѣемъ теперь:

$$FM=\sqrt{BF^2-BM^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2.\cos^2\alpha+a^2\cos^2\beta-2a^2.\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}}=$$

$$=\frac{a}{\sin\gamma}\sqrt{1-\cos^2\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Чтобы привести это выраженіе къ виду, удобному для вычисленія, придадимъ къ подкоренному выраженію и вычтемъ изъ него $\cos^2\beta\cos^2\gamma$; получимъ

$$FM = \frac{a}{\sin\gamma}\sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+\cos^2\beta\cos^2\gamma-(\cos\alpha-\cos\beta.\cos\gamma)^2} =$$

$$= \frac{a}{\sin\gamma}\sqrt{\sin^2\beta-\cos^2\gamma\,(1-\cos^2\beta)-(\cos\alpha-\cos\beta.\cos\alpha)^2} =$$

$$= \frac{a}{\sin\gamma}\sqrt{\sin^2\beta\,(1-\cos^2\gamma)-(\cos\alpha-\cos\beta.\cos\gamma)^2} =$$

$$= \frac{a}{\sin\gamma}\sqrt{\sin^2\beta\,.\,\sin^2\gamma-(\cos\alpha-\cos\beta\,.\,\cos\gamma)^2} =$$

$$= \frac{a}{\sin\gamma}\sqrt{(\sin\beta.\sin\gamma+\cos\alpha-\cos\beta.\cos\gamma)(\sin\beta.\sin\gamma-\cos\alpha+\cos\beta.\cos\gamma)}$$

$$= \frac{a}{\sin\gamma}\sqrt{[\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)]\;[\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha]} =$$

$$= \frac{2a}{\sin\gamma}\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}.$$

Подставивъ найденное значеніе FM въ равенство $\sin x = \frac{FM}{a}$, найдемъ

$$\sin x = \frac{2}{\sin\gamma}\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Наконецъ, положивъ $\alpha+\beta+\gamma = 2\psi$, можемъ представить это выраженіе въ такомъ видѣ:

$$\sin x = \frac{2}{\sin\gamma}\sqrt{\sin\psi\,.\,\sin(\psi-\alpha)\,.\,\sin(\psi-\beta).\sin(\psi-\gamma)}.$$

Замѣчаніе. Подобнымъ же образомъ, означивъ чрезъ y уголъ, составляемый ребромъ AB съ плоскостью грани PBC, и чрезъ z — уголъ, составляемый ребромъ CB съ плоскостью грани PBA, найдемъ:

$$\sin y = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\sin\psi.\sin(\psi-\alpha)\,.\,\sin(\psi-\beta).\sin(\psi-\gamma)}$$

$$\sin z = \frac{2}{\sin\beta}\sqrt{\sin\psi.\sin(\psi-\alpha)\,.\,\sin(\psi-\beta)\,.\,\sin(\psi-\gamma)}.$$

663. Показать, что между углами α, β, и γ которые діагональ прямоугольнаго параллелепипеда составляетъ съ его ребрами, существуетъ соотношеніе:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1;$$

кромѣ того, вычислить углы α, β и γ, полагая, что длины реберъ параллелепипеда суть 1, 2 и 3.

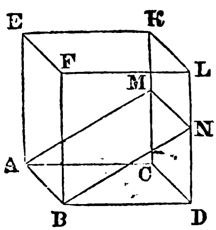
Отв. $74^\circ 29' 56''$; $57^\circ 41' 21''$; $36^\circ 42'$.

664. Опредѣлить sin угла, образуемаго пересѣченіемъ двухъ діагоналей куба. *Отв.* $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

665. Квадратъ, сторона котораго $= a$, служитъ основаніемъ прямоугольнаго параллелепипеда, имѣющаго высоту $= h$. Опредѣлить тангенсы угловъ, образующихся при пересѣченіи діагоналей этого параллелепипеда.

Отв. Изъ четырехъ угловъ, образующихся при пересѣченіи діагоналей, два имѣютъ тангенсъ $= \frac{2ah\sqrt{2}}{h^2 - 2a^2}$, два другихъ — тангенсъ $= \frac{2ah\sqrt{2}}{2a^2 - h^2}$.

666. Плоскость AMNB, проведенная чрезъ ребро AB куба ABCDEFKL (черт. 120) и наклоненная къ плоскости его основанія ABDC подъ угломъ α, дѣлитъ этотъ кубъ на двѣ части, изъ которыхъ одна представляетъ треугольную, а другая — четыреугольную призму. Ребро куба $= a$. Опредѣлить объемъ каждой изъ двухъ образовавшихся частей куба.



Черт. 120.

Отв. 1) $\frac{a^3}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{a^3}{2}(2 - \operatorname{tg}\alpha)$.

667. Плоскость AMNB, проведенная чрезъ ребро AB куба ABCDEFKL (черт. 120) и наклоненная къ плоскости его основанія ABDC подъ угломъ α, дѣлитъ этотъ кубъ на двѣ части, изъ которыхъ одна представляетъ треугольную, а другая — четыреугольную призму. Площадь сѣченія AMNB $=$ S. Опредѣлить объемъ каждой изъ двухъ образовавшихся частей куба.

Отв. 1) $\frac{1}{2}\sin\alpha\sqrt{S^3 . \cos\alpha}$; 2) $\frac{1}{2}(2\cos\alpha - \sin\alpha)\sqrt{S^3 . \cos\alpha}$.

668. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $\alpha = 40^\circ$ и $S = 76{,}603$ квадр. фут.

Отв. 1) 188,6 куб. фут.; 2) 260,92 куб. ф.

669. Объемъ призмы, основаніемъ которой служитъ правильный n—угольникъ, равенъ V; высота ея $= h$. Опредѣлить сторону основанія.

Отв. $2\sqrt{\frac{V}{nh} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}}$.

670. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $V = 36867$ куб. дюйм., $h = 42$ дюйм. и $n = 12$. *Отв.* 8,8544 дюйм.

671. Прямая правильная призма имѣетъ основаніемъ треугольникъ, сторона котораго $= a = 4$ метр. Чрезъ одну изъ сторонъ основанія призмы проведена плоскость, наклоненная къ плоскости основанія подъ угломъ $\alpha = 46^0 8' 46''$. Плоскость эта даетъ въ сѣченіи съ призмою треугольникъ, котораго площадь требуется опредѣлить.

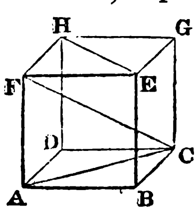
Отв. Иск. пл. $= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \alpha} = 10$ метр.

672. Основаніемъ прямой призмы служитъ треугольникъ ABC, у котораго сторона $AC = 38{,}03$ дюйм., сторона $BC = 34{,}84$ дюйм., а уголъ C, между этими сторонами заключенный, $= 58^0 22'$. Боковое ребро призмы $=$ длинѣ перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины угла C на сторону AB треугольника ABC. Опредѣлить: 1) полную поверхность и 2) объемъ призмы. *Отв.* 1) 3998,76 кв. д.; 2) 17854 куб. д.

673. Треугольникъ, у котораго одинъ изъ угловъ $= 52^0 16'$, а другой $= 87^0 20'$, вписанъ въ кругъ, имѣющій радіусъ $=$ 5,8 метра; этотъ треугольникъ служитъ основаніемъ призмы, боковыя ребра которой, длиною по 9 метровъ, наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ въ $71^0 18' 13''$. Опредѣлить объемъ призмы. *Отв.* 293,69 куб. метр.

(*Указаніе.* См. сборн. тригон. зад. Минина, изд. 6-е, зад. № 565).

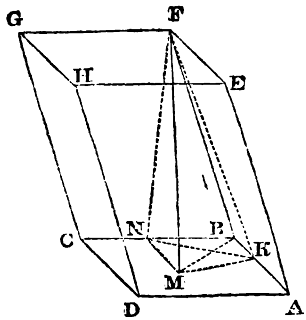
674. a) Прямой параллелепипедъ ABCDEFGH (черт. 121) имѣетъ въ основаніи параллелограммъ, въ которомъ діагональ $AC = 14{,}278$ дцм., сторона $CB = \frac{1}{4} AC$ и уголъ $ABC = 106^0 6' 7''$. Діагональ параллелепипеда FC образуетъ съ плоскостью основанія уголъ $\varphi = 57^0 46' 51''$.



Черт. 121.

Найти объемъ параллелепипеда, а также уголъ между діагоналями основаній АС и ЕН. (Исп. зр. въ Моск. Окр. въ 1896 г.).

Отв. Объемъ $= \frac{1}{4} AC^3 . \sin 60^0 . \operatorname{tg} \varphi = 1000$ куб. дец. ($= 1$ куб. метру). Уголъ $= 30^0$.



Черт. 122.

675. Ребра параллелепипеда, сходящіяся въ одной и той же вершинѣ его, суть a, b и c; при этомъ α есть уголъ между ребрами a и b, β — уголъ между ребрами a и c, γ — уголъ между ребрами b и c. Опредѣлить полную поверхность и объемъ этого параллелепипеда.

Рѣшеніе. Пусть $FB = a$ (черт. 122). $BC = b$, $BA = c$, $\angle FBC = \alpha$, $\angle FBA = \beta$ и $\angle ABC = \gamma$.

Полная поверхность параллелепипеда = удвоенной площади FBCG + удвоенной площади FBAE + удвоенной площади ABCD = $2(ab \sin\alpha + ac \sin\beta + bc \sin\gamma)$. Для опредѣленія объема V параллелепипеда опустимъ изъ вершины F перпендикуляръ FM на плоскость CBAD и проведемъ чрезъ линію FM во-первыхъ плоскость FMN, перпендикулярную къ ребру BC, а во-вторыхъ — плоскость FMK, перпендикулярную къ ребру BA. Способомъ, подробно указаннымъ въ рѣшеніи задачи 662-й, найдемъ, что

$$FM = \frac{2a}{\sin\gamma}\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}$$

и слѣдовательно объемъ $V = BC . BA \ \sin ABC . FM = bc . \sin\gamma \ . FM =$

$$= 2abc\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}.$$

Положивъ (какъ и въ задачѣ 662) $\alpha + \beta + \gamma = 2\psi$, можемъ представить полученное выраженіе такимъ образомъ:

$$V = 2abc\sqrt{\sin\psi . \sin(\psi-\alpha) . \sin(\psi-\beta) . \sin(\psi-\gamma)}.$$

676. **Какъ частный случай предыдущей задачи, рѣшить такую: Опредѣлить полную поверхность и объемъ параллелепипеда, всѣ грани котораго суть равные ромбы, имѣющіе сторону $= a = 8$ метр., а острый уголъ (меньшій 60^0) $= \alpha =$**

$= 50^\circ 12'$, и расположенные такимъ образомъ, что изъ восьми трегранныхъ угловъ параллелепипеда два имѣютъ плоскіе углы исключительно острые, а каждый изъ остальныхъ шести трегранныхъ его угловъ включаетъ въ число своихъ плоскихъ угловъ по одному острому и по два тупыхъ угла. Предлагается, кромѣ того (принимая въ расчетъ, что острый уголъ даннаго ромба $\alpha < 60^\circ$), доказать, что ни одинъ изъ восьми трегранныхъ угловъ упомянутаго параллелепипеда не можетъ имѣть въ числѣ своихъ плоскихъ угловъ исключительно тупые.

Отв. Полн. поверхность $= 6a^2 \sin\alpha = 295{,}02$ кв. метр.

Объемъ $= 2a^3 \sin\frac{1}{2}\alpha \sqrt{\sin\frac{3}{2}\alpha \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha} = 278{,}25$ куб. метр.

677. Основаніемъ правильной пирамиды служитъ n-угольникъ, сторона котораго $= a$. Высота пирамиды $= h$. Найти выраженія: 1) бокового ребра, 2) поверхности и 3) объема пирамиды.

Отв. 1) $\dfrac{1}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}} \sqrt{a^2 + 4h^2 \sin^2\dfrac{180^\circ}{n}}$

2) $\dfrac{na}{4}\left[a \operatorname{cotg}\dfrac{180^\circ}{n} + \sqrt{4h^2 + a^2 \operatorname{cotg}^2\dfrac{180^\circ}{n}}\right]$. 3) $\dfrac{na^2h}{12} \operatorname{cotg}\dfrac{180^\circ}{n}$.

678. Основаніемъ правильной пирамиды служитъ 18-угольникъ, сторона котораго $= 86$ дюймамъ. Высота пирамиды $=$ 38 дюймамъ. Опредѣлить объемъ пирамиды.

679. Основаніемъ правильной пирамиды служитъ 9-угольникъ, периметръ котораго $= p = 54{,}243$ дюйм. Высота пирамиды $= h = 42{,}63$ дюйм. Опредѣлить объемъ пирамиды.

Отв. Иском. об. $= \dfrac{1}{108} hp^2 \operatorname{cogt} 20^\circ = 3190{,}9$ куб. д.

680. Опредѣлить полную поверхность и объемъ правильной четыреугольной пирамиды, у которой боковое ребро, равное a, наклонено къ плоскости основанія пирамиды подъ угломъ α.

Отв. Полн. пов. $= 2a^2 . \cos\alpha(\cos\alpha + \sqrt{1 + \sin^2\alpha})$.

Объемъ $= \frac{2}{3}a^3 . \cos^2\alpha \,.\, \sin\alpha$.

681. Опредѣлить объемъ правильной пятнадцатиугольной пирамиды, у которой боковое ребро, равное $b = 4{,}5735$ дюйм., наклонено къ плоскости основанія пирамиды подъ угломъ $\alpha = 60^0 59' 50''$. *Отв.* $2{,}5\ b^3 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \sin 24^0 = 20$ куб. д.

682. Основаніемъ правильной пирамиды служитъ многоугольникъ, сумма внутреннихъ угловъ котораго $= 540^0$. Опредѣлить объемъ этой пирамиды, зная, что боковое ребро ея, равное $a = 17{,}3$ дюйм., наклонено къ плоскости основанія подъ угломъ $\varphi = 60^0 52' 18''$.

Отв. Иском. объемъ $= \frac{5}{6} a^3 \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \sin 72^0 = 849{,}38$ куб. д.

683. Найти объемъ правильной пятиугольной пирамиды, у которой высота $= 9{,}8$ фут., а уголъ, образуемый каждымъ боковымъ ребромъ съ высотою, содержитъ $23^0 12'$.

(Исп. зр. въ Зап. Спб. 1883 г.)

684. Опредѣлить объемъ правильной n-угольной пирамиды, у которой боковая сторона наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ α, а сторона многоугольника, служащаго основаніемъ пирамиды, $= a$.

Отв. Объемъ $= \frac{1}{24} n a^3 \operatorname{cotg}^2 \frac{180^0}{n} \operatorname{tg} \alpha$.

685. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $n = 24$, $a = 1{,}8757$ фут. и $\alpha = 67^0 11'$. *Отв.* 904,98 куб. фут.

686. Рѣшить ту же задачу, полагая $n = 9$, $a = 2$ метр. и $\alpha = 60^0 18' 8''$.

687. Основаніемъ правильной пирамиды служитъ многоугольникъ, сумма внутреннихъ угловъ котораго $= 540^0$. Боковыя стороны пирамиды наклонены къ плоскости ея основанія подъ угломъ въ $57^0 26' 15''$; высота пирамиды $= 28{,}5$ метра. Опредѣлить объемъ пирамиды. *Отв.* 11431 куб. метр.

688. По объему V правильной n-угольной пирамиды, у которой сторона основанія $= a$, опредѣлить уголъ наклоненія x бокового ребра пирамиды къ плоскости основанія.

$$Отв.\quad \operatorname{tg} x = \frac{24\ V \sin \frac{180^0}{n}}{n a^3 \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}}.$$

689. Основаніе пирамиды есть правильный треугольникъ, а боковыми ея сторонами служатъ равные равнобедренные треугольники, изъ которыхъ каждый имѣетъ площадь въ m разъ бо́льшую, чѣмъ площадь основанія пирамиды. Подъ какимъ угломъ α каждая изъ боковыхъ сторонъ наклонена къ основанію пирамиды? *Отв.* $\cos\alpha = 1 : 3m$.

690. Боковая поверхность правильной девятиугольной пирамиды въ $n = 2$ разъ болѣе площади основанія пирамиды; высота пирамиды $= h = 7{,}8$ дюйма. Опредѣлить объемъ пирамиды.

$$\textit{Отв.}\ \text{Объемъ} = \frac{3h^3 \,.\, \operatorname{tg} 20^0}{n^2 - 1} = 172{,}72 \text{ куб. д.}$$

691. Основаніемъ четыреугольной пирамиды служитъ параллелограммъ, у котораго діогонали суть $d = 2{,}4$ дюйм. и $d_1 = 2{,}0122$ дюйм., а уголъ, между ними заключенный, равенъ $\alpha = 45^0 20'$; линія, соединяющая точку пересѣченія этихъ діагоналей съ вершиной пирамиды, равная $l = 3{,}5$ дюйм., наклонена къ плоскости основанія пирамиды подъ угломъ $\beta = 86^0 35'$. Опредѣлить объемъ пирамиды.

$$\textit{Отв.}\ \text{Объемъ} = \frac{1}{6}\, d d_1 l \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\beta = 2 \text{ куб. дюйм.}$$

692. Полная поверхность правильной двѣнадцатиугольной пирамиды $= S = 6{,}14065$ квадр. фут. Уголъ при вершинѣ пирамиды, образованный двумя послѣдовательными боковыми ребрами ея $= \alpha = 10^0$. Опредѣлить объемъ пирамиды.

$$\textit{Отв.}\ \text{Объемъ} = \frac{\operatorname{cotg} 15^0}{6 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 15^0\right)} \sqrt{\frac{1}{3} S^3 \,.\, \sin 15^0 \,.\, \sin\frac{\alpha}{2} \,.\, \sin\left(15^0 - \frac{\alpha}{2}\right)} =$$
$$= 1{,}0082 \text{ куб. фут.}$$

693. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $S = 11{,}4235$ квадр. дюйм. и $\alpha = 12^0 40'$.

694. Боковыя стороны правильной четыреугольной пирамиды наклонены къ плоскости ея основанія подъ угломъ α; плоскость, проходящая чрезъ вершину пирамиды и діагональ основанія, даетъ въ сѣченіи съ пирамидою треугольникъ, площадь котораго $= M$. Опредѣлить: 1) объемъ, 2) полную поверхность пирамиды.

Отв. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{M^3\sqrt{2}\,.\operatorname{cotg}\alpha}$; 2) $2\sqrt{2}\,.\,M\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.

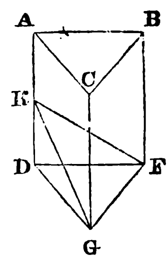
695. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $\alpha = 53^\circ 7' 48''$ и $M = 4{,}243$ квадр. фут.

Отв. Объемъ $= 6{,}0007$ куб. ф.; полн. пов. $= 24{,}002$ квадр. фут.

696. Каждый изъ плоскихъ угловъ при вершинѣ правильной шестиугольной пирамиды $= \alpha$; сумма апоѳемы этой пирамиды и апоѳемы шестиугольника, служащаго основаніемъ пирамиды, $= k$. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

Отв. $\frac{3k^2\sin\alpha\,\sin^2 30^0}{\sin^2\left(30^0+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{3k^2\sin\alpha}{4\sin^2\left(30^0+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

697. Въ прямой призмѣ ABCDFG (черт. 123), основаніемъ которой служитъ правильный треугольникъ DFG, имѣющій сторону $= a$, проведено чрезъ ребро FG сѣченіе FKG, наклоненное къ основанію FDG призмы подъ угломъ $= \alpha$. Опредѣлить: 1) объемъ и 2) полную поверхность пирамиды KDFG.



Черт. 123.

Отв. 1) $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{8}$; 2) $\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}+2\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Замѣчаніе. Для частнаго случая $\alpha = 45^0$ вопросъ рѣшается одними геометрическими соображеніями (см. **511**-ую задачу сборника геометр. задачъ Минина, изд. 12-ое), и мы получимъ:

$$\text{объемъ} = \frac{a^3}{8};\quad \text{полн. пов.} = (3+\sqrt{2})\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

698. Прямая призма имѣетъ основаніемъ равносторонній треугольникъ, чрезъ одну изъ сторонъ котораго проведена плоскость, наклоненная къ основанію призмы подъ угломъ α и отсѣкающая отъ призмы пирамиду, имѣющую объемъ V. Опредѣлить площадь сѣченія.

Отв. Площадь $= \frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}\sqrt[3]{V^2.\operatorname{tg}\alpha}$.

699. Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды наклонено къ плоскости ея основанія подъ угломъ α. Опредѣлить: 1) углы треугольниковъ, служащихъ боковыми сторонами пирамиды, и 2) уголъ между плоскостью боковой грани и плоскостью основанія пирамиды.

Отв. Если означимъ чрезъ x каждый изъ угловъ при основаніи равнобедренныхъ треугольниковъ, служащихъ боковыми сторонами пирамиды, а чрезъ y — уголъ, образуемый плоскостью основанія пирамиды съ плоскостью ея боковой грани, то

$$1)\ \cos x = \cos\alpha \,.\, \cos\frac{90^{0}(n-2)}{2};\quad 2)\ \sin y = \frac{\sin\alpha}{\sin x}.$$

700. Опредѣлить уголъ наклоненія (α) ребра правильнаго тетраэдра къ основанію тетраэдра и уголъ (β) между двумя сторонами тетраэдра.

Рѣшеніе. Пусть будутъ: a — ребро правильн. тетраэдра, h — высота тетр., p — высота равност. треуг., служащ. стороною тетраэдра, ρ — радіусъ круга, вписаннаго въ этотъ треугольникъ; будемъ имѣть:

$$\sin\alpha = h : a = \sqrt{\frac{2}{3}};\quad \alpha = 54^{0}\,44'\,7''$$

$$\cos\beta = \rho : p = \frac{1}{3};\quad \beta = 70^{0}\,31'\,43''.$$

701. Опредѣлить уголъ между двумя сторонами правильнаго октаэдра. *Отв.* $109^{0}\,28'\,26'$.

702. Въ кругѣ, служащемъ основаніемъ цилиндра, проведена хорда, длина которой $= d = 4{,}8$ дюйма; соотвѣтствующій ей центральный уголъ $= \alpha = 26^{0}\,32'\,46''$. Высота цилиндра $= h = 23$ дюймамъ. Опредѣлить объемъ цилиндра.

Отв. Объемъ $= \dfrac{\pi d^{2} h}{4\sin^{2}\frac{1}{2}\alpha} = 7895{,}5$ куб. д.

703. Въ основаніе равносторонняго цилиндра (т.-е. цилиндра, у котораго діаметръ основанія равенъ образующей) вписанъ правильный n-угольникъ, сторона котораго $= a$. Опредѣлить: 1) боковую поверхность и 2) объемъ этого цилиндра

Отв. 1) $\dfrac{\pi a^2}{\sin^2 \dfrac{180^0}{n}}$; 2) $\dfrac{\pi a^3}{4 \sin^3 \dfrac{180^0}{n}}$

704. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $a = 15$ дюйм., $n = 9$.

705. Опредѣлить боковую и полную поверхности конуса, зная, что высота его $= 24$ аршин. и что уголъ, составленный двумя образующими, проведенными къ концамъ одного и того же діаметра основанія, равенъ $15^0 6' 7''$. (Исп. зр въ Пот. окр. 1871 г.).

Отв. Бок. пов. $= 241{,}96$ кв. арш.; полн. пов. $= 273{,}756$ кв. арш.

706. Боковая поверхность конуса $=$ M; образующая его $= a$. Опредѣлить уголъ x при вершинѣ того треугольника, по которому конусъ разсѣкается плоскостью, проходящею чрезъ ось конуса (основаніемъ этого треугольника служитъ діаметръ основанія конуса).

Отв. $\sin \dfrac{x}{2} = \dfrac{M}{\pi a^2}$.

707. Сѣченіе, проходящее чрезъ ось конуса, представляетъ треугольникъ, уголъ котораго, содержащійся между равными сторонами, $= \alpha$. Радіусъ круга, описаннаго около этого треугольника, $=$ R. Опредѣлить объемъ конуса.

Отв. Объемъ $= \dfrac{\pi}{3} (R \sin \alpha)^3 \operatorname{cotg} \dfrac{\alpha}{2}$.

708. По боковой поверхности S и площади основанія K конуса опредѣлить уголъ x, составляемый образующею конуса съ его осью.

Отв. $\sin x = \dfrac{K}{S}$.

709. Уголъ, составляемый образующей конуса съ его осью, $= \alpha = 18^0 45' 50''$; длина образующей $= a = 36{,}17$ дюйм. Опредѣлить полную поверхность и объемъ конуса.

Отв. Полн. пов. $= 2\pi a^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = 1747$ кв. д.

Объемъ $= \frac{\pi}{3} \cdot a^3 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = 4855$ куб. д.

710. Опредѣлить: 1) полную поверхность и 2) объемъ конуса, у котораго образующая наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ α, а высота $= h$.

Отв. 1) $\frac{2\pi h^2 \operatorname{cotg}\alpha}{\sin\alpha}\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $\frac{\pi h^3}{3}\operatorname{cotg}^2\alpha$.

711. Образующая конуса наклонена къ плоскости его основанія подъ угломъ α; радіусъ основанія $=$ R. Опредѣлить полную поверхность и объемъ конуса.

Отв. Поверхн. $= \frac{\pi R^2}{\cos\alpha}(1 + \cos\alpha) = \frac{2\pi R^2}{\cos\alpha} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Обьемъ $= \frac{\pi R^3}{3}\operatorname{tg}\alpha$.

712. Образующая конуса наклонена къ плоскости его основанія подъ угломъ α; длина ея $= a$. Опредѣлить полную поверхность и объемъ конуса.

Отв. Полн. поверхн. $= \pi a^2 \cos\alpha(1 + \cos\alpha) = 2\pi a^2 \cos\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Объемъ $= \frac{\pi a^3}{3}\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha$.

712. а). Сумма высоты и образующей конуса $= m = 7{,}7$ метр., а уголъ между высотою и образующей $= \alpha = 58^0 33' 12''$. Опредѣлить боковую поверхность конуса.

Отв. Бок. пов. $= \frac{\pi m^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 68{,}625$ кв. м.

713. Объемъ конуса, у котораго образующая наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ α, равенъ объему шара радіуса R. Опредѣлить боковую поверхность конуса.

Отв. Бок. пов. $= \frac{2\pi R^2}{\cos\alpha}\sqrt[3]{\frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2\pi R^2}{\sin\alpha}\sqrt[3]{2\operatorname{tg}\alpha}$.

714. Кругъ, радіусъ котораго $=$ R $= 5{,}38$ дюйм., служитъ общимъ основаніемъ двухъ конусовъ, построенныхъ по одну и ту же сторону общаго ихъ основанія. Образующая одного изъ этихъ конусовъ составляетъ съ плоскостью основанія уголъ $= \alpha = 74^0 28'$, образующая другого составляетъ съ тою же плоскостью уголъ $=\beta=60^\circ\,12'$. Опредѣлить объемъ части, заключенной между боковыми поверхностями этихъ конусовъ.

Отв. Иском. объемъ $= \dfrac{\pi R^3 \cdot \sin(\alpha-\beta)}{3\cos\alpha \cdot \cos\beta} = 301{,}95$ куб. д.

715. Чрезъ двѣ образующія конуса, составляющія между собою уголъ $\varphi=52^\circ\,16'$, проведена плоскость, наклоненная къ плоскости основанія конуса подъ угломъ $\alpha=33^\circ\,10'13''$ (ось конуса находится внутри этого угла). Площадь сѣченія конуса проведенною плоскостью $= S = 617{,}5$ кв. дюйм. Опредѣлить высоту конуса.

Отв. Высота $= \sin\alpha \sqrt{S \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}} = 19{,}4145$ дюйм.

716. Объемъ правильной четыреугольной пирамиды $=v$; уголъ наклоненія ея бокового ребра къ плоскости основанія $=\alpha$. Опредѣлить: 1) сторону основанія, 2) боковое ребро и 3) разность объемовъ конусовъ — описаннаго около пирамиды и вписаннаго въ нее.

Отв. 1) $\sqrt[3]{\dfrac{3v\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\alpha}} = \sqrt[3]{3v\sqrt{2} \cdot \operatorname{cotg}\alpha}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{3\,v\sqrt{2} \cdot \operatorname{cotg}\alpha}}{\sqrt{2} \cdot \cos\alpha}$; 3) $\dfrac{\pi v}{4}$.

717. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $v=640$ куб. фут. и $\alpha=61^\circ\,55'39''$.

Отв. 1) 11,313 фут.; 2) 16,999 фут. 3) 502,65 куб. фут.

718. Высота правильной пятиугольной пирамиды, равная $20\,^2/_7$ фут., образуетъ съ боковымъ ребромъ пирамиды уголъ въ $20^\circ\,15'25''$. Опредѣлить: 1) полную поверхность и объемъ пирамиды, 2) полную поверхность и объемъ описаннаго около нея конуса и 3) полную поверхность и объемъ конуса, вписаннаго въ пирамиду.

Отв. 1) 599,06 кв. фут.; 901,12 куб. ф.
2) 684,65 кв. фут.; 1190,6 куб. ф.
3) 518,08 кв. фут.; 779,3 куб. ф.

719. Образующая усѣченнаго конуса наклонена къ его нижнему основанію, имѣющему радіусъ R, подъ угломъ α; радіусъ другого основанія $=r$. Найти выраженіе объема конуса.

Отв. Объемъ $= \dfrac{\pi}{3}(R-r)(R^2+r^2+Rr)\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\pi}{3}(R^3-r^3)\operatorname{tg}\alpha$.

720. Образующая усѣченнаго конуса наклонена къ его нижнему основанію, имѣющему радіусъ $=R=13$ футамъ, подъ угломъ $=\alpha=52^\circ 18' 25''$; радіусъ другого основанія $=r=5$ фут. Опредѣлить боковую поверхность конуса.

Отв. $\dfrac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$.

721. Высота усѣченнаго конуса есть среднее пропорціональное между радіусами его основаній; сумма же радіусовъ основаній $=S$. Уголъ, составляемый образующей усѣченнаго конуса съ плоскостью его основанія, $=\alpha$. Опредѣлить боковую поверхность этого конуса.

Отв. Бок. поверхн. $=\dfrac{\pi S^2}{\sqrt{1+3\sin^2\alpha}}$.

722. Въ шаръ, объемъ котораго $=V=53{,}377$ куб. дюйм., вписанъ конусъ. Опредѣлить объемъ этого конуса, зная что уголъ, составленный двумя его образующими, проведенными къ концамъ одного и того же діаметра основанія, $=$ $=\alpha=42^\circ 18'$.

Отв. Об. конуса $=\dfrac{V}{2}\sin^2\alpha\,.\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=10{,}515$ куб. д.

723. Образующая конуса составляетъ съ его осью уголъ $\alpha=35^\circ 18' 20''$. Опредѣлить отношеніе объема этого конуса къ объему описаннаго около него шара.

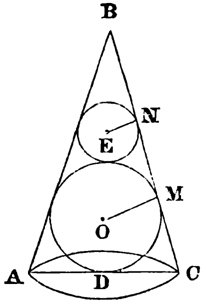
Отв. Иском. отнош. $=\dfrac{\sin^2 2\alpha\,.\cos^2\alpha}{2}=0{,}29629$.

724. Конусъ, у котораго образующая наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ α, вписанъ въ шаръ. Объемъ конуса $=V$. Опредѣлить поверхность шара.

Отв. Поверх. шара $=\dfrac{4}{\sin^2 2\alpha}\sqrt[3]{\dfrac{9\pi V^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

725. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $\alpha=66^\circ 33' 20''$ и $V=0{,}059659$ куб. дюйм. *Отв.* 2,0001 квадр. дюйм.

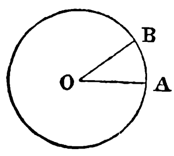
726. Въ конусѣ помѣщены два шара такъ, что касаются другъ друга и поверхности конуса (черт. 124). Отношеніе радіусовъ OM и EN шаровъ$=m:n$. Опредѣлить величину угла ABC при вершинѣ сѣченія, проведеннаго чрезъ ось конуса.



Черт. 124.

$$\text{Отв. } \operatorname{Sin}\frac{x}{2}=\sin\frac{ABC}{2}=\frac{m-n}{m+n}.$$

727. Вычислить объемъ сферическаго сектора, происходящаго отъ вращенія кругового сектора OAB (черт. 125) около радіуса OA, зная, что радіусъ $=2$ дециметрамъ, а уголъ $AOB=54^0\,28'$. *Отв.* 7,0175 куб. децим.



Черт. 125.

728. Круговой секторъ AOB (см. черт. предыд. задачи), площадь котораго$=S$, вращается около радіуса OA. Уголъ $BOA=\alpha$. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

$$\text{Отв. } 4\,S\cdot\frac{120}{\alpha}\sqrt{\frac{360\,S}{\pi\alpha}}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

729. Объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ кругового сектора OAB (черт. 125) около радіуса OA, равенъ четверти объема шара того же радіуса. Опредѣлить уголъ между радіусами OA и OB. *Отв.* 60^0.

730. Усѣченный конусъ, боковая поверхность котораго$=S$, вписанъ въ шаръ. Образующая этого усѣченнаго конуса, равная a, наклонена къ плоскости бóльшаго изъ его основаній подъ угломъ α. Опредѣлить объемъ шарового слоя, основаніями котораго служатъ основанія усѣченнаго конуса.

$$\text{Отв. } \frac{\sin\alpha}{4\pi a}\left[S^2+\pi^2a^4\left(1-\tfrac{1}{8}\sin^2\alpha\right)\right].$$

---

731. Въ треугольникѣ ACB дана сторона $BC=a$ и углы A и B, прилежащіе къ сторонѣ AB. Опредѣлить объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ треугольника ACB около стороны AB.

$$\text{Отв. } \frac{\pi a^3\sin^2B.\sin(A+B)}{3\sin A}.$$

732. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $a=728{,}4$ фута, $A=47^\circ 29'11''$ и $B=64^\circ 56'18''$.

733. Въ треугольникѣ BAC дана сторона $BC=a=25{,}38$ дюйм. и прилежащіе къ ней углы: $ABC=B=47^\circ 28'$ и $ACB=C=29^\circ 12'$. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ треугольника около стороны BC.

Отв. Поверхность $= \dfrac{\pi a^2 . \sin B . \sin C . \cos \frac{B-C}{2}}{\sin(B+C) . \cos \frac{B+C}{2}} = 941{,}02$ кв. д.

Объемъ $= \dfrac{\pi a^3 . \sin^2 B . \sin^2 C}{3 \sin^2 (B+C)} = 2336{,}8$ куб. д.

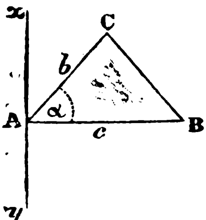
734. Въ тупоугольномъ треугольникѣ ABC (тупой уголъ при вершинѣ A) извѣстны: сторона $BC=a=5{,}82$ фут. и прилежащіе къ ней углы $B=46^\circ 40'$ и $C=24^\circ 20'$. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ этого треугольника около стороны AC.

Отв. Поверхн. $= \dfrac{2\pi a^2 . \sin C . \cos \frac{B}{2} \sin\left(C+\frac{B}{2}\right)}{\sin(B+C)} = 62{,}953$ кв. ф.

Объемъ $= \dfrac{\pi a^3 . \sin B . \sin^2 C}{3 \sin (B+C)} = 26{,}963$ куб. ф.

735. Треугольникъ, углы котораго суть A, B и C, вращается поочередно около каждой изъ своихъ сторонъ. Найти отношеніе объемовъ V_a, V_b и V_c тѣлъ, произведенныхъ этимъ вращеніемъ. *Отв.* $V_a : V_b : V_c = \operatorname{cosec} A : \operatorname{cosec} B : \operatorname{cosec} C$.

Замѣчаніе. Ср. **442**-ую зад. сборн. геом. задачъ Минина.



Черт. 126.

736. Въ треугольникѣ ABC (черт. 126) даны: сторона $AB=c$, сторона $AC=d$ и уголъ $A=\alpha$. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ этого треугольника около оси xy, проходящей чрезъ вершину A и перпендикулярной къ сторонѣ AB.

Отв. Иск. объемъ $= \frac{\pi}{3} \cdot b . c \sin\alpha\,(c + b\cos\alpha)$.

737. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $c=3{,}7047$ фут. $b=2{,}314$ фут., $\alpha=30^\circ 25'35''$. *Отв.* 25,914 куб. ф.

738. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC стороны AC и AB равны каждая 1 метру; заключенный между ними уголъ CAB равенъ 30°. Опредѣлить боковую поверхность S усѣченнаго конуса, описываемую стороною CB при вращеніи треугольника около оси xy, проходящей чрезъ точку A перпендикулярно къ сторонѣ AB.

Отв. $S = 2\pi\left(\frac{1+\cos 30^0}{2}\right)\frac{\sin 30^0}{\sin 75^0} = 2\pi.\cos^2 15^0\cdot\frac{\sin 30^0}{\sin 75^0} =$
$= 2\pi.\sin 75^0.\sin 30^0 = 3{,}0345$ кв. м.

739. Въ треугольникѣ ABC извѣстны прилежащіе къ сторонѣ AC острые углы A и C и соотвѣтствующая этой сторонѣ высота $BD=h$. Опредѣлить: 1) объемъ, 2) боковую поверхность тѣла, образуемаго вращеніемъ треугольника около стороны AC.

Отв. 1) $\frac{\pi h^3.\sin(A+C)}{3\sin A.\sin C}$; 2) $\frac{2\pi h^2.\sin\frac{1}{2}(A+C).\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\sin A.\sin C}$.

740. Полагая $A = 75^0 8' 23''$, $C = 68^0 29' 17''$ и $h = 148{,}19$ ф., опредѣлить объемъ тѣла вращенія, упомянутаго въ предыдущей задачѣ. *Отв.* 2247500 куб. ф.

741. Въ треугольникѣ ABC извѣстны острые углы A и C, прилежащіе къ сторонѣ AC, и высота $BD=h$, соотвѣтствующая этой сторонѣ. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника ABC около прямой xy, проведенной чрезъ вершину B параллельно сторонѣ AC.

Отв. $\frac{2\pi h^3.\sin(A+C)}{3\sin A.\sin C}$.

742. По площади S треугольника ACB, сторонѣ его $AC=b$ и углу $CAB=\alpha$ опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника около стороны AB.

Отв. $\frac{2}{3}\pi b S.\sin\alpha$.

743. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $S=84$ квадр. дюйм., $b=17$ дюйм. и $\alpha=81^0 22' 10''$.

744. Прямоугольный треугольникъ ABC, площадь котораго$=$S, вращается около катета AC, образующаго съ гипотенузою BC уголъ $BCA=\alpha$. Опредѣлить объемъ и боковую поверхность конуса, получающагося вслѣдствіе сказаннаго вращенія.

Отв. Объемъ $= \frac{2}{3}\pi S \sqrt{2S\,tg\alpha}$; боков. пов. $= \frac{2\pi S}{\cos\alpha}$.

745. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $S = 275$ квадр. фут., $\alpha = 22^\circ 37' 32''$.

746. Прямоугольный треугольникъ, котораго площадь $= S$, а одинъ изъ острыхъ угловъ $= B$, вращается около прямой, проведенной чрезъ вершину прямого угла параллельно гипотенузѣ. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

Отв. Объемъ $= \frac{2}{3}\pi . \sin B \sqrt{8 S^3 . \operatorname{cotg} B}$.

747. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $S = 126$ кв. фут. и $B = 28^\circ 10'$. *Отв.* 5404,75 куб. ф.

748. Площадь прямоугольнаго треугольника $= S$; одинъ изъ острыхъ угловъ его $= \alpha$. Чрезъ вершину этого остраго угла проведена прямая, перпендикулярная къ гипотенузѣ и лежащая въ плоскости треугольника. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника около упомянутой прямой.

Отв. Иск. объемъ $= \frac{4}{3}\pi(1 + \cos^2\alpha)\sqrt[3]{\frac{S^3}{\sin 2\alpha}}$.

749. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC, площадь котораго $= S$, данъ уголъ B., заключающійся между равными сторонами AB и BC (слѣдовательно извѣстенъ и уголъ A). Опредѣлить поверхность тѣла, образуемаго вращеніемъ этого треугольника около прямой, проведенной чрезъ вершину B параллельно сторонѣ AC.

Отв. Иском. поверхн. $= \frac{8\pi S}{\sin B} \cdot \sin\frac{B + A}{2} \cdot \cos\frac{B - A}{2}$.

750. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC, площадь котораго $= 545,3$ кв. дюйм., уголъ B., заключающійся между равными сторонами AB и BC, содержитъ $68^\circ 48'$. Опредѣлить поверхность тѣла, образуемаго вращеніемъ этого треугольника около прямой, проведенной чрезъ вершину B параллельно сторонѣ AC. (Исп. зр. въ Моск. Уч. Окр. въ 1893 г.).

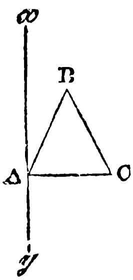
Отв. 12917 кв. д. *Замѣчаніе.* См. предыдущую задачу.

751. Сохраняя условія предыдущей задачи, опредѣлить объемъ тѣла вращенія, упомянутаго въ предыдущей задачѣ.

Отв. 64460 куб. д.

752. Въ треугольникѣ ABC, площадь котораго$=1491,7$ квадр. дюйм., уголъ $A=57^{\circ}\,53'$, уголъ $C=53^{\circ}\,18'20''$. Опредѣлить: 1) поверхность, 2) объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ этого треугольника около прямой, проведенной чрезъ вершину B параллельно сторонѣ AC.

Отв. 1) 35319 квадр. д.; 2) 291271 куб. д.



Черт. 127.

753. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC (черт. 127), площадь котораго$=S$, данъ уголъ B, содержащійся между равными сторонами AB и BC. Опредѣлить поверхность тѣла, образуемаго вращеніемъ этого треугольника около прямой xy, проведенной чрезъ вершину A перпендикулярно къ сторонѣ AC.

Отв. Иском. поверхн. $= \dfrac{8\pi S\cos^2(45^{\circ}-\frac{1}{4}B)}{\cos\frac{1}{2}B}$.

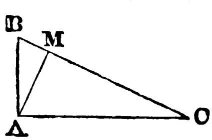
754. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $S=51,775$ квадр. дюйм. и уголъ $B=30^{\circ}\,30'36''$. *Отв.* 851,8 кв. д.

755. Площадь равнобедреннаго треугольника $S=50$ кв. дюйм., а уголъ при вершинѣ $B=100^{\circ}\,26'24''$. Вычислить полную поверхность тѣла, произведеннаго вращеніемъ этого треугольника около прямой, перпендикулярной къ основанію и проведенной чрезъ одинъ изъ его концовъ.

Замѣчаніе. Сравн. 563-ю задачу.

(Исп. вр. въ 3-й Харьковской гимн. въ 1891 г.).

756. Изъ вершины A прямоугольнаго треугольника ABC (черт. 128) опущенъ перпендикуляръ AM на гипотенузу BC. Фигура вращается около катета AB. Зная, что $AB+BC=240,14$ метр., а уголъ $B=47^{\circ}\,15'$, опредѣлить объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ треугольника AMC.



Черт. 128.

Отв. 883675 куб. д.

(Исп. зр. въ Моск. Уч. Окр. въ 1892г.).

757. Въ параллелограммѣ ABCD сторона AB$=a$, сторона CA$=b$, уголъ A$=\alpha$. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ параллелограмма около стороны AB.

Отв. Иск. об. $=\pi a b^2 \sin^2\alpha$.

758. Ромбъ, площадь котораго$=$S, вращается около одной изъ его сторонъ; одинъ изъ угловъ, прилежащихъ къ одной и той же сторонѣ ромба, равенъ α. Опредѣлить объемъ тѣла, происходящаго вслѣдствіе сказаннаго вращенія.

Отв. Иск. об. $=\pi S\sqrt{S\sin\alpha}$.

759. Рѣшить предыдущую задачу, полагая S$=840$ кв. фут. и $\alpha=46^\circ 22' 50''$.

760. Ромбъ и равновеликій ему квадратъ вращаются каждый около одной изъ своихъ сторонъ. Найти отношеніе поверхностей тѣлъ вращенія. *Отв.* 1.

761. Ромбъ и равновеликій ему полукругъ вращаются: первый около одной изъ своихъ сторонъ, а второй около своего діаметра. Опредѣлить отношеніе поверхностей тѣлъ вращенія. *Отв.* Иск. отнош. $=\pi:2$.

762. Въ трапеціи, у которой каждая изъ непараллельныхъ сторонъ$=a$, меньшая изъ параллельныхъ сторонъ$=b$; каждый изъ угловъ, прилежащихъ къ бóльшей изъ параллельныхъ сторонъ,$=\alpha$. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ этой трапеціи около бóльшей изъ ея параллельныхъ сторонъ.

Отв. Иск. объемъ $=\frac{1}{3}\pi a^2(2a\cos\alpha+3b)\sin^2\alpha$.

763. Въ трапеціи, у которой бóльшая изъ параллельныхъ сторонъ$=b$, а каждая изъ непараллельныхъ сторонъ$=a$, каждый изъ угловъ, прилежащихъ къ бóльшей изъ параллельныхъ сторонъ,$=\alpha$. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ этой трапеціи около меньшей изъ параллельныхъ сторонъ ея.

Отв. Иск. объемъ $=\frac{1}{3}\pi a^2(3b-2a\cos\alpha)\sin^2\alpha$.

764. Изъ двухъ параллельныхъ сторонъ трапеціи бóльшая$=a$, меньшая$=b$; одна изъ непараллельныхъ сторонъ равная c, образуетъ съ бо́льшею изъ параллельныхъ сторонъ уголъ $=\alpha$. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ трапеціи около бо́льшей изъ параллельныхъ сторонъ.

Отв. Иск. об. $=\frac{1}{3}\pi c^2(a+2b)\sin^2\alpha$.

765. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $a=15,2$ дюйм., $b=5,9$ дюйм., $c=2,83$ дюйм. и $\alpha=28°17'20''$.

Отв. 50,859 куб. д.

766. Изъ двухъ параллельныхъ сторонъ трапеціи бо́льшая $AB=a$, меньшая $DC=b$; прилежащіе къ бо́льшей изъ параллельныхъ сторонъ углы суть: $DAB=\alpha$ и $CBA=\beta$. Опредѣлить объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ этой трапеціи около стороны AB.

Отв. Иск. об. $=\frac{\pi(a+2b)\ (a-b)^2 . \sin^2\alpha . \sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}$.

767. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $a=32,375$ метр., $b=17,225$ метр., $\alpha=42°30'27''$ и $\beta=61°29'13''$.

Отв. 6013,9 куб. метр.

Задачи съ тригонометрическими данными, расположенныя въ несистематическомъ порядкѣ.

768. Боковое ребро параллелепипеда, равное $c=1,2$ дюйма, наклонено къ плоскости основанія параллелепипеда подъ угломъ $\beta=34°49'$; смежныя стороны основанія, образующія между собою уголъ $=\alpha=66°12'$, суть $a=0,5$ дюйма и $b=0,3$ дюйма. Опредѣлить поверхность шара, равновеликаго упомянутому параллелепипеду

Отв. Иском. пов. $=\sqrt[3]{\pi(6abc . \sin\alpha . \sin\beta)^2} = 1$ квадр. д.

769. Шаръ вписанъ въ прямую призму, основаніемъ которой служитъ прямоугольный треугольникъ. Въ этомъ прямоугольномъ треугольникѣ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, имѣетъ длину $=h=1,725$ дюйм. и составляетъ съ однимъ изъ катетовъ уголъ $=\alpha=20°$. Опредѣлить объемъ призмы.

Отв. Иском. об. $=\frac{h^3\sin 45°}{\sin 2\alpha . \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)} = 6,9997$ куб. д.

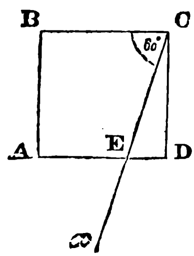
770. Каждое изъ боковыхъ реберъ треугольной пирамиды $=a$. Величины плоскихъ угловъ при вершинѣ ея суть α, β и $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$. Опредѣлить объемъ шара, поверхность котораго равновелика поверхности упомянутой пирамиды.

Отв. Об. шара $= \frac{a^3}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)^3}$.

771. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $a=3{,}3427$ дюйм., $\alpha=60^\circ$, $\beta=44^\circ$ и $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)=76^\circ$.

772. Плоскость, параллельная основанію конуса, объемъ котораго $=V$, дѣлитъ его боковую поверхность пополамъ. Уголъ при вершинѣ осевого сѣченія конуса, противолежащій основанію конуса, $=\alpha$. Опредѣлить полную поверхность образовавшагося усѣченнаго конуса, отсѣкаемаго проведенной плоскостью отъ даннаго конуса.

Отв. Полн. пов. $=\frac{1}{2}\left(3+\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt[3]{9\pi V^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.



Черт. 129.

773. Черезъ вершину C квадрата ABCD (черт. 129), сторона котораго $=a$, проведена прямая Cx, образующая со стороною BC уголъ $BCx=60^\circ$ и пересѣкающая сторону AD въ точкѣ E. Опредѣлить объемъ тѣла. образуемаго вращеніемъ четыреугольника EABC около прямой Cx. *Отв.* $\frac{10-3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}\pi a^3$.

Указаніе. При рѣшеніи задачи слѣдуетъ принять въ расчетъ, что $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

774. Въ треугольникѣ BAC даны: сторона $BC=a$ и прилежащіе къ ней углы B и C (слѣдовательно извѣстенъ и третій уголъ A треугольника). На разстояніи, равномъ d, отъ вершины A треугольника проведена прямая, параллельная сторонѣ BC и пересѣкающая стороны AB и AC въ точкахъ M и N. Опредѣлить полную поверхность и объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ трапеціи MBNC около стороны BC

Отв. Означивъ искомую поверхность чрезъ S, искомый объемъ — чрезъ V, длину NC — чрезъ y, MB — чрезъ z, MN — чрезъ u и разстояніе MN отъ BC — чрезъ x, найдемъ:

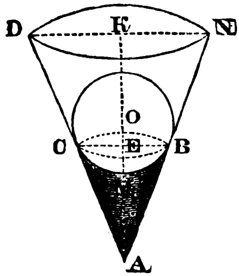
$$x = \frac{a \sin B . \sin C}{\sin A} - d;\ y = \frac{x}{\sin C};\ z = \frac{x}{\sin B};\quad u = \frac{d \sin A}{\sin B \sin C};$$
$$S = \pi x(y + 2u + z);\quad V = \tfrac{1}{3}\pi x^2(a + 2u).$$

775. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $B = 53°8$, $C = 18°55'$, $a = 4{,}4$ дюйм. и $d = 1{,}065$ дюйм.

Отв. S = 3,5504 кв. д.; V = 0,23171 куб. д.

776. Изъ точки C окружности круга проведены двѣ хорды. CB = 41,288 дюйм. и CA = 33,6 дюйм.; дуга BA, заключенная между этими хордами, содержитъ $140°19'52''$. Опредѣлить: 1) радіусъ упомянутаго круга и 2) боковую поверхность конуса, у котораго образующая наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ въ $42°55'$, а основаніемъ служитъ упомянутый кругъ. *Отв.* 1) 23,139 д.; 2) 2293,4 кв. д.

777. Хорда AB, параллельная діаметру DE окружности, дѣлитъ эту послѣднюю на двѣ части, изъ которыхъ меньшая есть дуга AMB. Радіусъ окружности $= R$. Соединивъ точки A и B съ центромъ O окружности, получаемъ центральный уголъ $AOB = \alpha$. Опредѣлить 1) полную поверхность и 2) объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ кругового сектора AMBO около діаметра DE.



Черт. 130.

Отв. 1) $2\pi R^2\left(2\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $\frac{4}{3}\pi R^3 \sin\frac{\alpha}{2}$.

778. Въ конусъ, укрѣпленный въ отвѣсномъ положеніи, вершиною внизъ (черт. 130), брошенъ шаръ радіуса R. Зная, что уголъ DAN треугольника ADN, получаемаго въ сѣченіи конуса плоскостью, проходящею чрезъ ось AK конуса, равенъ 2α, опредѣлить объемъ части конуса, содержащейся между вершиною его A и частью CMB шаровой поверхности.

Отв. Иском. объемъ есть разность объемовъ конуса ACB и шарового сегмента CMB и слѣдовательно =

$$=\frac{\pi R^3 . \cos^4\alpha}{3\sin\alpha}-\frac{\pi R^3}{2}(1-\sin^2\alpha)(1-\sin\alpha)-\frac{\pi R^3}{6}(1-\sin\alpha)^3=$$

$$=\frac{\pi R^3}{3\sin\alpha}(1-2\sin\alpha+\sin^2\alpha)=\frac{\pi R^3}{3\sin\alpha}(1-\sin\alpha)^2=\frac{4\pi R^3}{3\sin\alpha}\sin^4\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right).$$

779. Въ конусъ, укрѣпленный въ отвѣсномъ положенiи, вершиною внизъ, брошенъ шаръ (черт. 130). Зная, что уголъ DAN треугольника, получаемаго въ сѣченiи конуса плоскостью, проходящею чрезъ ось AK конуса, $=2\alpha=72^0$, опредѣлить *отношенiе* объема части конуса, содержащейся между вершиною его A и частью CMB шаровой поверхности, къ объему шара, брошеннаго въ конусъ.

Отв. Иск. отнош. $=\dfrac{\sin^4\left(45^0-\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sin\alpha}$.

780. Въ кругѣ проведена хорда AB, раздѣляющая его на два круговыхъ сегмента, изъ которыхъ меньшiй есть AMB, и затѣмъ изъ центра O круга проведена линiя OM, перпендикулярная къ хордѣ AB и пересѣкающая дугу AMB упомянутаго сегмента въ точкѣ M. Сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержитъ дуга AMB, если сферическая (кривая) поверхность шарового сегмента, описываемая вращенiемъ дуги AMB около линiи OM, равна половинѣ площади упомянутаго круга? *Отв.* $82^0\,49'10''$.

781. Сѣченiе шара нѣкоторою плоскостью представляетъ кругъ, равновеликiй треугольнику, у котораго уголъ $C=48^0\,30'30''$, а стороны, содержащiя этотъ уголъ, суть $a=35{,}73$ дюйм. и $b=48{,}56$ дюйм. Площадь большого круга этого шара = боковой поверхности конуса, у котораго уголъ, составленный высотой и образующей, $=30^0$, а высота $=28$ дюйм. Опредѣлить величину кривой поверхности меньшаго изъ тѣхъ двухъ сегментовъ, на которые шаръ раздѣляется упомянутой плоскостью. *Отв.* 731,17 кв. д.

(Исп. зр. въ Херсонск. гимн. въ 1891 г.).

782. Образующая конуса наклонена къ плоскости его основанiя подъ угломъ $=58^0\,4'25''$. Опредѣлить объемъ этого конуса, зная, что радiусъ круга, служащаго его основанiемъ, на 0,43292 дюйма превышаетъ апоѳему правильнаго 27-угольника, вписаннаго въ этотъ кругъ. *Отв.* **441130 куб. д.**

783. На горизонтальной плоскости лежатъ n равныхъ шаровъ радіуса r, расположенныхъ такъ, что центры ихъ представляютъ вершины угловъ правильнаго n-угольника, а каждый шаръ касается двухъ сосѣднихъ съ нимъ. На эти шары положенъ $(n+1)$-й шаръ радіуса R, касающійся каждаго изъ нихъ. Опредѣлить объемъ конуса, у котораго вершина находится въ центрѣ этого $(n+1)$-го шара, а основаніе есть кругъ, описанный около упомянутаго правильнаго n-угольника.

Отв. Иском. об. $= \dfrac{\pi r^2}{3\sin^2 \dfrac{180^0}{n}} \sqrt{(R+r)^2 - \dfrac{r^2}{\sin^2 \dfrac{180^0}{n}}}$.

784. Уголъ, составленный двумя образующими, проведенными къ концамъ одного и того же діаметра основанія конуса, $=\alpha$; радіусъ основанія конуса $=$ R. Опредѣлить радіусъ сферической поверхности, имѣющей центръ въ вершинѣ конуса и раздѣляющей объемъ конуса пополамъ.

Отв. Иск. рад. $= \dfrac{R}{2} \sqrt[3]{\operatorname{cotg} \dfrac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cosec}^2 \dfrac{\alpha}{4}}$.

785. Рѣшить предыдущую задачу, полагая $\alpha = 68^0 40' 24''$ и $R = 49$ дюйм. (Исп. зр. въ Вѣрнен. гим. въ 1885 г.).

786. Уголъ, составленный двумя образующими, проведенными къ концамъ одного и того же діаметра основанія конуса, $=\alpha$; образующая $= l$. Опредѣлить радіусъ сферической поверхности, имѣющей центръ въ вершинѣ конуса и раздѣляющей объемъ конуса пополамъ.

Отв. Иском. рад. $= \dfrac{l}{2} \sqrt[3]{\operatorname{cotg} \dfrac{\alpha}{4} \cdot \sin 2\alpha}$.

787. Изъ точки А, находящейся внѣ круга и отстоящей отъ его центра О на разстояніе $AO = 24{,}6$ метр., проведена къ окружности этого круга касательная AB (B — точка касанія), составляющая съ линіею AO уголъ OAB, величина котораго вычисляется изъ условія

$$\cos OAB = \frac{0{,}32087 \,.\, \sin 150^0 \; (\sin 110^0 + \sin 70^0)}{\sin 20^0}.$$

Изъ точки В опущенъ перпендикуляръ ВС на линію АО. Вычислить объемъ конуса, образуемаго вращеніемъ треугольника АВС около линіи АО. *Отв.* 2098,2 куб. ф.

(Исп. зр. въ Моск. уч. окр. въ 1895 г.).

788. Сохраняя условія предыдущей задачи, опредѣлить боковую поверхность конуса, упомянутаго въ этой задачѣ.

Отв. Бок. поверхн. $=$ 697,48 квадр. м.

789. Одинъ и тотъ же кругъ служитъ основаніемъ конуса и нижнимъ основаніемъ цилиндра, при чемъ вершина конуса помѣщается въ центрѣ верхняго основанія цилиндра. Разность между объемами цилиндра и конуса $= v = 381{,}53$ куб. фут. Образующая конуса наклонена къ плоскости его основанія подъ угломъ $\alpha = 40^\circ 8' 37''$. Опредѣлить радіусъ общаго основанія цилиндра и конуса.

Отв. Рад. $= \sqrt[3]{\dfrac{2v}{2\pi . \operatorname{tg}\alpha}} = 6$ фут.

790. Два конуса, имѣя общее основаніе, расположены такъ, что одинъ находится внутри другого. Образующая бо́льшаго изъ нихъ наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ $\alpha = 74^\circ 30' 50''$, образующая меньшаго — подъ угломъ $\beta = 60^\circ 59' 50''$. Объемъ тѣла, ограниченнаго боковыми поверхностями этихъ конусовъ, $= v = 236{,}33$ куб. дюйм. Опредѣлить: 1) радіусъ общаго основанія этихъ конусовъ, 2) разстояніе центра этого основанія отъ такой хорды, которая дѣлитъ длину окружности основанія на двѣ части, относящіяся между собою какъ $2:3$, и 3) площадь вписаннаго въ основаніе конусовъ правильнаго многоугольника, сумма внутреннихъ угловъ котораго $= 1260^\circ$.

Отв. 1) Радіусъ $= \sqrt[3]{\dfrac{3v . \cos\alpha . \cos\beta}{\pi . \sin(\alpha - \beta)}} = 5$ дюйм.; 2) 1,5451 дюйм.; 3) 72,313 дюйм.

791. Двѣ правильныя четыреугольныя пирамиды, имѣющія общее основаніе, расположены такъ, что одна изъ нихъ находится внутри другой. Боковое ребро бо́льшей изъ этихъ пирамидъ наклонено къ плоскости ихъ общаго основанія подъ угломъ $\alpha = 70^\circ 10' 48''$, а уголъ наклоненія бокового ребра меньшей пирамиды къ той же плоскости $= \beta = 57^\circ 21' 48''$. Радіусъ круга, описаннаго около общаго основанія пирамидъ, $= R = 2{,}0532$ метр. Опредѣлить объемъ тѣла, ограниченнаго боковыми поверхностями этихъ пирамидъ.

Отв. Объемъ $= \dfrac{2R^3 \sin(\alpha - \beta)}{3 \cos\alpha \cos\beta} = 7$ куб. метр.

792. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC (равныя стороны котораго суть AB и CB) извѣстны: уголъ BAC $= \alpha = 65^\circ 29'$ и высота $BD = h = 3{,}654$ фут., соотвѣтствующая сторонѣ AC. Опредѣлить объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ треугольника ABC около оси, проходящей чрезъ вершину C параллельно сторонѣ AB.

Отв. Объемъ $= \frac{8}{3}\pi h^3 \cos\alpha \operatorname{cotg}\alpha = 77{,}352$ куб. ф.

793. Сохраняя условія предыдущей задачи, опредѣлить поверхность тѣла вращенія, упомянутаго въ этой задачѣ.

Отв. Поверх. $= 2\pi h^2 (3 + 2\cos\alpha) \operatorname{cotg}\alpha$ или [если положимъ $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{2}{3}\cos\alpha$] поверхн. $= \dfrac{6\pi h^2 \operatorname{cotg}\alpha}{\cos^2\varphi} = 146{,}54$ кв. ф.

794. Уголъ при вершинѣ правильной треугольной пирамиды, образованный двумя послѣдовательными боковыми ребрами ея, $= \alpha = 55^\circ$; длина прямой, проведенной по плоскости одной изъ боковыхъ граней и соединяющей средины двухъ боковыхъ реберъ пирамиды, $= m = 37{,}598$ фут. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

Отв. Бок. пов. $= 3m^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = 8146{,}7$ кв. ф.

795. Площадь осевого сѣченія конуса $= K = 22{,}7$ квадр. метр. Уголъ между прямыми, соединяющими средину оси конуса съ концами діаметра его основанія, $= \alpha = 52^\circ 25'$. Опредѣлить: 1) объемъ, 2) боковую поверхность конуса.

Отв. 1) $\dfrac{\pi K}{3}\sqrt{\dfrac{K \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{2}} = 56{,}189$ куб. д.

2) $\dfrac{\pi K \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{2\cos\varphi} = 73{,}443$ кв. м., при чемъ $\operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.

796. Уголъ, составляемый образующей конуса съ плоскостью его основанія, $=\alpha=49^{0}18'42''$, а разность между образующей и радіусомъ основанія $=d=9{,}684$ метр. Опредѣлить поверхность шара, вписаннаго въ этотъ конусъ.

Отв. Иском. поверхн. $=4\pi d^{2}\operatorname{cotg}^{2}\alpha=871{,}14$ кв. м.

797. Шаръ объема $V=84{,}736$ куб. метр. вписанъ въ конусъ, образующая котораго составляетъ съ плоскостью основанія уголъ $\alpha=56^{0}13'$. Опредѣлить объемъ конуса.

Отв. Иском. объемъ $=\frac{1}{4}V\operatorname{cotg}^{3}\frac{1}{2}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\alpha=207{,}79$ куб. м.

798. Полная поверхность конуса $=S=185$ квадр. фут. Образующая его наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ $\alpha=69^{0}41'$. Опредѣлить объемъ конуса.

Отв. Объемъ $=\dfrac{S\,.\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{3\cos\frac{1}{2}\alpha}\sqrt{\dfrac{S\,.\,\cos\alpha}{2\pi}}=167{,}23$ куб. ф.

799. Ромбъ, у котораго сторона $=a=12$ метрамъ, а острый уголъ $=\alpha=54^{0}27'$, вращается около прямой, проведенной чрезъ вершину остраго угла перпендикулярно къ его сторонѣ. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

Отв. Объемъ $=2\pi a^{3}\sin\alpha\,.\,\cos^{2}\dfrac{\alpha}{2}=6984{,}9$ куб. м.

800. Сохраняя условія предыдущей задачи, опредѣлить поверхность тѣла вращенія, упоминаемаго въ этой задачѣ.

Отв. Поверхн. $=8\pi a^{2}\,.\,\cos^{2}\dfrac{\alpha}{2}=2861{,}7$ кв. м.

801. Опредѣлить объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ прямоугольника BADC около оси, проходящей черезъ вершину B и перпендикулярной къ діагонали BD. При этомъ даны длина діагонали $BD=a=5{,}3465$ дюйм. и $\angle DBA=\alpha=62^{0}47'43''$.

(Изъ отчета 2-ой Кіевск. гимназ. за $1894/_5$ г.)

Отв. Иском. объемъ $=\dfrac{1}{2}\pi a^{3}\sin 2\alpha=195{,}22$ куб. м.

802. Сохраняя условія предыдущей задачи, опредѣлить поверхность тѣла вращенія, упоминаемаго въ этой задачѣ.

Отв. Иском. поверхн. $=4\pi a^{2}\sin 45^{0}\cos(\alpha-45^{0})=241{,}85$ кв. д.

803. Въ пирамидѣ SABCD, имѣющей въ основаніи квадратъ ABCD, одно изъ боковыхъ реберъ ея SA, равное $a=$ 32,726 сант., перпендикулярно къ плоскости основанія и образуетъ съ смежнымъ боковымъ ребромъ SB уголъ φ $=24^0 37' 28''$. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

(Исп. зр. въ Моск. уч. ок. въ 1897 г.).

$$\textit{Отв.}\ \text{Бок. пов.} = \frac{2a^2 \operatorname{tg}\varphi \,.\, \cos^2 \frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi} = 1030{,}9 \text{ квадр. сант.}$$

804. Въ основаніе конуса вписанъ квадратъ, сторона котораго $a=63{,}1457$ сант. Плоскость, проходящая чрезъ вершину конуса и одну изъ сторонъ этого квадрата, даетъ въ сѣченіи съ поверхностью конуса треугольникъ, уголъ при вершинѣ котораго $\alpha=66^0 51' 42''$. Найти объемъ конуса.

(Исп. зр. въ Моск. уч. окр. въ 1898 г.).

$$\textit{Отв.}\ \text{Объемъ} = \frac{\pi a^3 \sqrt{\cos\alpha}}{12 \sin\frac{1}{2}\alpha} = 75000 \text{ куб. сант.} = 75 \text{ куб. дец.}$$

805. Полная поверхность правильной четыреугольной пирамиды $=\mathrm{S}=4{,}1623$ кв метр ; уголъ наклоненія плоскости боковой грани къ плоскости основанія пирамиды $=\alpha=71^0 33' 54''$ Опредѣлить объемъ пирамиды.

$$\textit{Отв.}\ \text{Объемъ} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{6\cos\frac{1}{2}\alpha} \sqrt{\frac{\mathrm{S}^3 \cos\alpha}{2}} = 0{,}5 \text{ куб. м.}$$

806. Объемъ правильной четыреугольной пирамиды $=\mathrm{V}$ $=0{,}528$ куб. метра, а уголъ наклоненія плоскости боковой грани къ плоскости основанія пирамиды $=\alpha=78^0 34' 44''$. Опредѣлить полную поверхность пирамиды.

$$\textit{Отв.}\ \text{Полная пов.} = 2\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha \sqrt[3]{4{,}5\,\mathrm{V}^2 \,.\, \operatorname{tg}\alpha} = 4{,}493 \text{ кв. м.}$$

807. Основаніемъ треугольной пирамиды MABC, объемъ котораго $=\mathrm{V}=0{,}06994$ куб. метра, служитъ прямоугольный равнобедренный треугольникъ BAC (прямой уголъ содержится между сторонами AB и AC). Центръ O круга, вписаннаго въ треугольникъ BAC, совпадаетъ съ основаніемъ высоты MO пирамиды. Уголъ наклоненія плоскости грани MBC къ плоскости основанія ABC пирамиды $= \alpha = 53^\circ 7' 48''$. Опредѣлить высоту MO пирамиды.

Отв. Высота $= \sqrt[3]{3\,V\,.\,\mathrm{tg}^2\alpha\,.\,\mathrm{tg}^2 22^\circ 30'} = 0{,}4$ метра.

808. Боковая поверхность конуса, будучи развернута на плоскости, представляетъ круговой секторъ съ угломъ $n = 120^\circ$. Опредѣлить уголъ x при вершинѣ осевого сѣченія упомянутаго конуса.

Отв. $\sin\frac{x}{2} = \frac{n}{360}$. (Когда $n = 120^\circ$, $x = 38^\circ 56' 34''$).

809. Точка E, лежащая внутри равнобедреннаго треугольника ABC на перпендикулярѣ BD, опущенномъ изъ вершины B треугольника на основаніе его AC, соединена съ вершинами A и C прямыми EA и EC. Сторона AC $= b = 11{,}634$ метр., уголъ между AC и каждой изъ равныхъ сторонъ AB и BC треугольника ABC $= \alpha = 42^\circ 16' 36''$, а уголъ между AC и каждой изъ линій AE и CE $= \beta = 22^\circ 43' 24''$. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ около AC той фигуры, которая ограничена ломаными линіями $AB + BC$ и $AE + CE$.

Отв. Объемъ $= \dfrac{\pi b^3 \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}{12\cos^2\alpha\,.\,\cos^2\beta} = 268{,}48$ куб. м.

810. Сохраняя условія предыдущей задачи, опредѣлить поверхность тѣла вращенія, упоминаемаго въ этой задачѣ.

Отв. Пов. $= \dfrac{\pi b^2(\mathrm{tg}\alpha.\cos\beta + \mathrm{tg}\beta.\cos\alpha)}{2\cos\alpha.\cos\beta} = \dfrac{\pi b^2\,\mathrm{tg}\alpha}{2\cos\alpha.\cos^2\varphi} = 357{,}78$ кв. м.,

при чемъ $\mathrm{tg}^2\varphi = \dfrac{\mathrm{tg}\,\beta\,.\cos\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha\,.\cos\beta}$.

811. Плоскости боковыхъ граней правильной треугольной пирамиды, объемъ которой $= V = 25{,}8$ куб. метр., наклонены къ плоскости ея основанія подъ угломъ $\alpha = 52^\circ 37' 15''$. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

Отв. Бок. пов. $= \dfrac{3\,\mathrm{tg}30^\circ}{\cos\alpha}\sqrt[3]{\dfrac{9V^2}{\mathrm{tg}^2\alpha}} = 43{,}304$ кв. м.

812. Средина C стороны AA_1 прямоугольника ABB_1A_1 соединена прямыми CB и CB_1 съ вершинами B и B_1 прямоугольника. Сторона $AB = c = 7{,}3353$ метр., а уголъ CBA, образуемый ею съ линіею BC, $= \alpha = 36^\circ 15' 40''$. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ около AB фигуры $ABCB_1A_1$, составленной изъ двухъ равныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABC и A_1B_1C.

Отв. Объемъ $= 2\pi c^3 \,.\, \mathrm{tg}^2\alpha = 1334{,}4$ куб. м.

813. Сохраняя условія предыдущей задачи, опредѣлить поверхность упоминаемаго въ ней тѣла вращенія.

Отв. $\text{Пов.} = \dfrac{16\pi c^2 . \mathrm{tg}\,\alpha . \cos\frac{1}{2}\alpha . \cos(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) . \cos 45^\circ}{\cos\alpha} = 1474{,}96$ кв. м.

Замѣчаніе. При рѣшеніи задачи должно выраженіе $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$ привести къ виду, удобному для логариѳмическаго вычисленія (см. сборн. тригоном. зад. Минина, изд. 6-е, № 217).

814. Въ кругѣ, служащемъ основаніемъ конуса, проведены двѣ хорды, изъ которыхъ одна $= m = 27{,}5$ метр., а другая, стягивающая дугу, вдвое бо́льшую, чѣмъ первая, $= n = 38{,}2$ метр. Образующая конуса наклонена къ плоскости его основанія подъ угломъ $\alpha = 39^\circ 7'$. Опредѣлить боковую поверхность конуса.

Отв. $\dfrac{\pi m^2}{4\cos\alpha \,.\, \sin^2\frac{1}{2}\beta} = 1479$ кв. м., гдѣ $\dfrac{\beta}{2} = \arccos\dfrac{n}{2m} = 46^\circ 0' 32''$.

815. Въ правильной n-угольной пирамидѣ разность между апоѳемою боковой грани и высотою пирамиды $= d$; плоскость боковой грани наклонена къ плоскости основанія пирамиды подъ угломъ α. Опредѣлить объемъ и полную поверхность пирамиды.

$$\text{Отв.}\left\{\begin{aligned} \text{Объемъ} &= \frac{nd^3 \,.\, \sin 2\alpha \,.\, \cos\alpha}{48\sin^6(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}. \\ \text{Полн. пов.} &= \frac{nd^2 . \cos\alpha . \cos^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin^4(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}. \end{aligned}\right.$$

816. Въ конусъ, у котораго образующая наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ $\alpha = 51^\circ 13'$, а площадь основанія $= F = 43{,}8$ кв. метр., вписанъ шаръ. Опредѣлить разстояніе вершины конуса отъ плоскости того круга, по окружности котораго поверхность шара касается боковой поверхности конуса. (Сравн. задачу 517-ую сборника геометр. задачъ Минина.)

Отв. Иском. разст. $= 2\sqrt{\frac{F}{\pi} \cdot \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sin^2\frac{\alpha}{2}} = 1{,}7361$ м.

817. Уголъ, составленный двумя образующими, проведенными къ концамъ одного и того же діаметра основанія конуса, $= \alpha = 36^\circ\, 41'\, 20''$; высота конуса $= h = 4{,}35$ метр. Опредѣлить объемъ шарового сектора, образующагося чрезъ дополненіе конуса соотвѣтствующимъ шаровымъ сегментомъ.

Отв. Объемъ $= \dfrac{4\pi h^3 \sin^2\frac{1}{4}\alpha}{3\cos^3\frac{1}{2}\alpha} = 10{,}245$ куб. м.

818. Въ прямоугольномъ треугольникѣ, служащемъ основаніемъ прямой призмы, объемъ которой $= V = 2{,}88$ куб. м., одинъ изъ острыхъ угловъ $= \beta = 36^\circ 52'\, 11''$. Опредѣлить объемъ описаннаго около этой призмы цилиндра.

Отв. Объемъ $= \dfrac{\pi V}{\sin 2\beta} = 9{,}42475$ куб. м.

819. Въ прямоугольномъ треугольникѣ, служащемъ основаніемъ прямой призмы, одинъ изъ острыхъ угловъ $= \beta = 36^\circ\, 52'\, 11''$, а катетъ, противолежащій этому углу, $= b = 1{,}2$ метр. Объемъ призмы $= V = 2{,}88$ кубич. метр. Опредѣлить полную поверхность описаннаго около этой призмы цилиндра.

Отв. Полн. пов. $= \dfrac{\pi(b^3 \,.\, \cos\beta + 4\,V \,.\, \sin^2\beta)}{2b \,.\, \cos\beta \,.\, \sin^2\beta} = \dfrac{\pi b^2}{2\sin^2\beta \,.\, \cos^2\varphi} =$

$= 25{,}1327$ кв. м., при чемъ $\operatorname{tg}\varphi = 2\sin\beta\sqrt{\dfrac{V}{b^3 \,.\, \cos\beta}}$ (вспомогательный уголъ $\varphi = 60^\circ$).

820. Опредѣлить полную поверхность и объемъ правильной 25-гранной пирамиды по площади ея боковой грани $= Q = 0{,}3112$ квадр. метр. и углу наклоненія плоскости боковой грани къ плоскости основанія пирамиды $= \alpha = 50^\circ 0'\, 32''$.

Отв. $\begin{cases} \text{Полн. пов.} = 50\,Q \,.\, \cos^2\frac{1}{2}\alpha = 12{,}78 \text{ кв. м.} \\ \text{Объемъ} = \frac{25}{8}\sin\alpha\sqrt{\dfrac{Q^3\cos\alpha}{\operatorname{tg} 7^\circ\, 12'}} = 2{,}5 \text{ куб. м.} \end{cases}$

821. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольникъ, у котораго точка пересѣченія діагоналей совпадаетъ съ основаніемъ высоты пирамиды. Каждое изъ боковыхъ реберъ пирамиды $= m = 2{,}175$ метр. и образуетъ съ одною изъ двухъ смежныхъ сторонъ прямоугольника, служащаго основаніемъ пирамиды, уголъ $\alpha = 33^\circ$, а съ другою — уголъ $\beta = 70^\circ$. Опредѣлить объемъ пирамиды.

Отв. Иском. объемъ $= \frac{4}{3} m^3 . \cos\alpha . \cos\beta \sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha}$.

Замѣчаніе. Если числовыя значенія α и β, какъ въ данномъ случаѣ, таковы, что можно положить $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta} = \cos\varphi$, то полученный результатъ замѣнится выраженіемъ $\frac{2}{3}\sqrt{2} . m^3\cos\alpha . \sin 2\beta . \sin\frac{1}{2}\varphi$, удобнымъ для вычисленія; пользуясь имъ примѣнительно къ числовымъ даннымъ задачи, найдемъ, что вспомогательный уголъ $\varphi = 37^\circ 12'$, а искомый объемъ $= 1{,}668$ куб. м.

822. Основаніемъ прямой призмы, имѣющей объемъ $V = 12{,}4$ кубич. метр., служитъ ромбъ, у котораго одинъ изъ угловъ, прилежащихъ къ одной и той же сторонѣ, $= \alpha = 115^\circ 23' 40''$. Уголъ между діагональю боковой грани призмы и боковымъ ребромъ ея $= \varphi = 18^\circ 36' 9''$. Опредѣлить боковую поверхность призмы.

Отв. Бок. пов. $= 4\sqrt[3]{\frac{V^2 . \operatorname{cotg}\varphi}{\sin^2\alpha}} = 32{,}965$ кв. м.

823. Площадь верхняго основанія правильной усѣченной треугольной пирамиды $= b = 0{,}4$ кв. ф., а площадь нижняго, бóльшаго изъ основаній ея, $= a = 0{,}9$ кв. фут. Прямая, соединяющая центръ K верхняго основанія съ центромъ O нижняго, составляетъ съ линіею, соединяющей точку K съ какой-либо изъ вершинъ нижняго основанія, уголъ $= \alpha = 48^\circ 2' 24''$. Опредѣлить объемъ усѣченной пирамиды.

Отв. Объемъ $= \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{3}\sqrt{\frac{2a}{3\sin 60^0}}(a + b + \sqrt{ab}) = 0{,}474$ куб.ф.

824. Разность площадей двухъ правильныхъ 18-угольниковъ, изъ которыхъ одинъ описанъ около круга, а другой въ тотъ же кругъ вписанъ, $= Q = 1{,}4$ квадр. метр. Опредѣлить объемъ конуса, у котораго образующая составляетъ съ осью уголъ $\alpha = 35^\circ 6' 20''$, а основаніе представляетъ упомянутый кругъ.

Отв. Объемъ $= \dfrac{\pi Q \,.\, \operatorname{cotg} \alpha}{54 \operatorname{tg} 10^\circ \,.\, \sin^2 10^\circ} \sqrt{\dfrac{Q}{18 \operatorname{tg} 10^\circ}} = 83{,}348$ куб.м.

825. Плоскости боковыхъ граней правильной усѣченной четыреугольной пирамиды, объемъ которой $= V = 58{,}7$ куб. метр., наклонены къ плоскости бóльшаго изъ ея основаній подъ угломъ $\alpha = 65^\circ 20' 30''$; площадь нижняго основанія пирамиды въ 9 разъ болѣе площади ея верхняго основанія. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

Отв. Бок. пов. $= 8 \sqrt[3]{\dfrac{18 V^2}{169 \sin \alpha \,.\, \sin 2\alpha}} = 64{,}18$ кв. м.

826. Плоскій уголъ при вершинѣ правильной четыреугольной пирамиды $= \alpha = 41^\circ 41' 30''$; сторона основанія пирамиды $= a = 3{,}6785$ метр. Опредѣлить поверхность шара, вписаннаго въ пирамиду.

Отв. Пов. шара $= \dfrac{\pi a^2 . \sin (45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin (45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)} = 19{,}064$ кв. м.

Указаніе. Если M — вершина пирамиды, K — основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ M на одну изъ сторонъ основанія пирамиды, ME — высота пирамиды и O — центръ вписаннаго шара, то MO : OE = MK : EK (ибо линія OK дѣлитъ уголъ MKE пополамъ).

827. Уголъ между гипотенузою и однимъ изъ катетовъ прямоугольнаго треугольника $= \alpha = 12^\circ 39' 48''$. Найти отношеніе полной поверхности къ боковой поверхности тѣла, образованнаго вращеніемъ этого треугольника около упомянутаго катета.

Отв. Иском. отнош. $= 2 \cos^2 \left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 1{,}21925$.

828. Въ кругѣ, параллельно его діаметру AD, проведена хорда BC, и концы ея B и C соединены прямыми съ точкою A (см. черт. 57). Зная, что дуга $AB = \alpha = 32^\circ 6' 30''$, а объемъ тѣла, произведеннаго вращеніемъ треугольника ABC около AD, равенъ $V = 252{,}3$ куб. метр., опредѣлить радіусъ круга.

Отв. Радіусъ $= \sqrt[3]{\dfrac{3V}{3\pi \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin 2\alpha}} = 174{,}796$ метр.

829. Въ полукругѣ, параллельно его діаметру AB, проведена хорда $CD = d = 3{,}7$ метр., стягивающая дугу $\alpha = 126^\circ 25'$. Изъ конца D этой хорды опущенъ перпендикуляръ DE на діаметръ AB, и основаніе его E соединено съ другимъ концомъ хорды CD. Опредѣлить объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ около AB той фигуры, которая ограничена дугою CD и прямыми CE и ED.

Отв. Объемъ $= \dfrac{\pi d^3}{6 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}} = 33{,}285$ куб. м.

830. Равнобедренный треугольникъ, у котораго уголъ, содержащійся между равными сторонами, $= \alpha = 20^\circ 46' 40''$, а каждая изъ равныхъ сторонъ $= a = 2{,}44$ фут., служитъ основаніемъ треугольной пирамиды, имѣющей объемъ $= V = 0{,}2464$ куб. фут. Одно изъ боковыхъ реберъ пирамиды перпендикулярно къ плоскости ея основанія въ той точкѣ, гдѣ пересѣкаются равныя стороны упомянутаго треугольника. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

Отв. Бок. пов. $= \dfrac{6V + \sin \frac{1}{2}\alpha \sqrt{36V^2 + a^6 \sin^2\alpha . \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}}{a \sin \alpha}$.

Замѣчаніе. Рѣшеніе числового вопроса проще вести независимо отъ рѣшенія задачи въ общемъ видѣ; впрочемъ, чтобы сдѣлать общее рѣшеніе удобнымъ для логариѳм. вычисленія, можно, преобразовавъ его, положить $\operatorname{tg}^2 \psi = \dfrac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \varphi}$, при чемъ $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{a^3 \sin \alpha . \cos \frac{1}{2}\alpha}{6V}$; тогда нашли бы, что боковая поверхность $= \dfrac{6V}{a \sin \alpha \cos^2 \psi} = 2{,}80775$ кв. ф.

831. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ высота втрое длиннѣе стороны основанія. Опредѣлить: 1) уголъ x, образуемый апоѳемою пирамиды съ плоскостью основанія, 2) уголъ y, составляемый боковымъ ребромъ съ высотою пирамиды.

Отв. 1) $\operatorname{tg} x = 6$; $x = 80^\circ 32' 15''$; 2) $\operatorname{cotg} y = 3\sqrt{2}$; $y = 13^\circ 15' 45''$.

832. Боковое ребро правильной четыреугольной пирамиды $= \frac{3}{2}$ стороны ея основанія. Опредѣлить: 1) уголъ накло-

ненія x бокового ребра пирамиды къ плоскости ея основанія, 2) двугранный уголъ y между плоскостью боковой грани и плоскостью основанія пирамиды и 3) двугранный уголъ z между смежными боковыми гранями.

Краткое рѣшеніе. Означимъ сторону квадрата ABCD, служащаго основаніемъ пирамиды, чрезъ a. Такъ какъ перпендикуляры, опущенные изъ концовъ D и B діагонали DB основанія на боковое ребро MC, встрѣчаютъ это ребро въ одной и той же точкѣ K, то $\angle$ DKB есть линейный уголъ двуграннаго угла z. Опустивъ изъ M перпендикуляръ ME на сторону BC квадрата ABCD, соединимъ точку O пересѣченія діагоналей основанія съ точками B, E, C и K. Замѣтивъ, что $\cos x = OC : MC = \frac{1}{2}a\sqrt{2} : \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, найдемъ отсюда, что уголъ $x = 61^\circ 52' 27''$ Далѣе, не трудно найти, что $\operatorname{tg} y = MO : OE = OC .\operatorname{tg} x : OE = \sqrt{2} .\operatorname{tg} x$ и такъ какъ $\operatorname{tg} x = \sqrt{1-\cos^2 x} : \cos x = \sqrt{\frac{7}{2}}$, то $\operatorname{tg} y = \sqrt{7}$, откуда $y = 69^\circ 17' 43''$. Изъ прямоуг. треугольниковъ OKC и OKB имѣемъ: 1) $OK = OC . \sin x$,
2) $OK = OB . \operatorname{cotg}\frac{1}{2}z = OC . \operatorname{cotg}\frac{1}{2}z$. Дѣленіе рав. 1) на 2) даетъ $1 = \sin x : \operatorname{cotg}\frac{1}{2}z$, откуда $\operatorname{tg}\frac{1}{2}z = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$. Зная так. обр. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}z$, по формулѣ tg двойной дуги находимъ, что $\operatorname{tg} z = -3\sqrt{7}$. Если положимъ $3\sqrt{7} = \operatorname{tg} u$ (откуда $u = 82^\circ 49' 9''$), то $z = 180^\circ - u = 97^\circ 10' 51''$.

833. Высота правильной четыреугольной пирамиды вдвое болѣе діагонали основанія пирамиды. Опредѣлить: 1) уголъ наклоненія x бокового ребра пирамиды къ плоскости ея основанія, 2) двугранный уголъ y между плоскостью боковой грани и плоскостью основанія и 3) двугранный уголъ z между смежными боковыми гранями.

Отв. $\begin{cases} 1)\ x = \operatorname{arc\,tg} 4 = 75^\circ 57' 50''. \\ 2)\ y = \operatorname{arc\,tg} 4\sqrt{2} = 79^\circ 58' 30''. \\ 3)\ \operatorname{cotg}\frac{1}{2}z = \sin x;\ z = 91^\circ 44' 10''. \end{cases}$

834. По двугранному углу между смежными боковыми гранями правильной четыреугольной пирамиды $= \delta = 95^\circ 44' 20''$

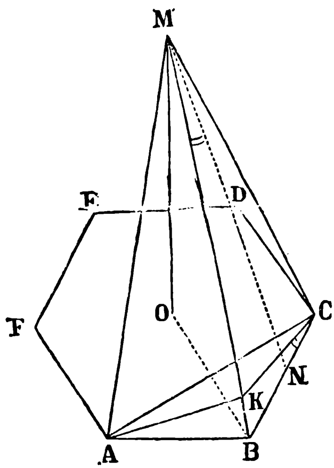
и высотѣ ся $= h = 6$ фут. опредѣлить сторону основанія пирамиды.

Отв. Сторона $= \dfrac{h\sqrt{-\cos\delta}}{\sin 45^\circ . \cos\frac{1}{2}\delta} = 3{,}9998$ ф.

835. Въ правильной шестиугольной пирамидѣ отношеніе высоты къ сторонѣ основанія равно $m = \frac{4}{3}$. Опредѣлить: 1) плоскій уголъ x при вершинѣ пирамиды и 2) двугранный уголъ δ между смежными боковыми гранями пирамиды.

Рѣшеніе. Означимъ сторону основанія чрезъ a, а высоту пирамиды чрезъ h. Построивъ апоѳему MN (черт. 131) пирамиды и пользуясь прямоугольными треугольниками BMN и MOB, легко найдемъ, что

$$\sin\tfrac{1}{2}x = a : 2\sqrt{a^2 + h^2} = 1 : 2\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} = 1 : 2\sqrt{1 + m^2} = 0{,}3,$$



Черт. 131.

такъ что $x = 34^\circ 54' 54''$; пользуясь затѣмъ равнобедреннымъ треугольникомъ ABC (въ которомъ уголъ ABC, какъ уголъ правильнаго шестиугольника, $= 120^\circ$ и $AB = BC = a$) найдемъ, что $AC = 2a\sin 60^\circ$. Послѣ этого, опустивъ изъ точекъ C и A на ребро MB перпендикуляры CK и AK (которые, понятно, встрѣтятъ ребро MB въ общей точкѣ K), построимъ такимъ образомъ уголъ AKC — линейный двуграннаго δ, содержащагося между боков. гранями AMB и BMC. Замѣтивъ, что углы BMN и KCB, какъ углы съ взаимно-перпендикулярными сторонами, равны, опредѣляемъ $KC = AK$ изъ прямоугольнаго треугольника $KCB : KC = CB . \cos KCB$

$$= a . \cos\tfrac{1}{2}x = a\sqrt{1 - \sin^2\frac{x}{2}} = a\sqrt{1 - \frac{1}{4(1+m^2)}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+4m^2}{1+m^2}}.$$

Обращаясь теперь къ равнобедренному треугольнику AKC, найдемъ, что

$\frac{1}{2}AC = KC . \sin\frac{1}{2}CKA$ или $a . \sin 60^\circ = KC . \sin\frac{1}{2}\delta$; слѣдовательно

$$\sin\frac{1}{2}\delta = a.\sin 60^0 : \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+4m^2}{1+m^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+4m^2}{1+m^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3(1+m^2)}{3+4m^2}} = \sqrt{\frac{75}{91}}, \text{ откуда } \delta = 130^0\,25'.$$

836. Плоскій уголъ при вершинѣ правильной n-угольной пирамиды $= \alpha$. Опредѣлить величину двуграннаго угла δ между смежными боковыми гранями пирамиды.

Отв. $\sin\frac{\delta}{2} = \dfrac{\cos\frac{180^0}{n}}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$.

(*Указаніе.* Полезно ознакомиться съ пріемомъ рѣшенія предыдущей задачи. Принимая пирамиду, изображенную на черт. 131, за n-угольную, слѣдуетъ построить, какъ и при рѣшеніи предыдущей задачи, уголъ АКС—линейный искомаго двугран.)

837. Двугранный уголъ между смежными боковыми гранями правильной n-угольной пирамиды $= \delta$. Опредѣлить уголъ x, составляемый боковымъ ребромъ пирамиды со стороною ея основанія.

Отв. $\sin x = \cos\frac{180^0}{n} : \sin\frac{\delta}{2}$. (*Замѣчаніе.* См. предыд. задачу).

838. Правильная девятиугольная пирамида, имѣющая объемъ $= V = 375{,}98$ кубич. дюйм., вписана въ шаръ, центръ котораго находится внутри пирамиды. Уголъ, составляемый плоскостью основанія пирамиды съ шаровымъ радіусомъ, проведеннымъ въ какую-либо изъ вершинъ основанія, $= \alpha = 42^0\,51'$. Опредѣлить разстояніе x центра шара отъ плоскости основанія пирамиды.

Отв. $x = \sqrt[3]{\dfrac{V.\sin\alpha.\operatorname{tg}^2\alpha}{3\sin 40^0.\cos^2(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)}} = 5{,}1404$ д.

839. Въ прямой призмѣ, основаніемъ которой служитъ правильный треугольникъ, чрезъ одну изъ сторонъ нижняго основанія и противолежащую вершину верхняго основанія проведена плоскость, образующая съ плоскостью основанія призмы уголъ $\alpha = 20^0\,14'$; площадь полученнаго сѣченія $= S = 429{,}94$ кв. фут. Опредѣлить объемъ призмы.

Отв. Объемъ $= \sqrt{S^3.\sin 60^0.\sin\alpha.\sin 2\alpha} = 5352{,}5$ куб. ф.

840. Изъ трехъ параллельныхъ прямыхъ EF, KP и RS, находящихся на одной и той же плоскости, средняя KP отстоитъ отъ EF на разстояніе $d = 8$ метрамъ, а отъ RS— на разстояніе $d_1 = 10$ метр. На линіи EF лежитъ вершина C, на линіи KP — вершина B, а на линіи RS — вершина A равносторонняго треугольника ABC, служащаго основаніемъ правильной пирамиды, у которой боковое ребро составляетъ со стороною основанія уголъ $\alpha = 71^\circ 43' 36''$. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

Отв. Бок. пов. $= (d^2 + dd_1 + d_1^2)\operatorname{tg}\alpha = 738{,}94$ кв. м.

Указаніе. Означивъ сторону треуг. чрезъ y, а уголъ (острый) между стороною его BC и линію KP чрезъ x, будемъ имѣть: 1) $d = y\sin x$, 2) $d_1 = y\sin(60^\circ - x)$, такъ что $d : d_1 = \sin x : \sin(60^\circ - x)$. Отсюда найдемъ, что $\operatorname{tg} x = \dfrac{d\sqrt{3}}{d + 2d_1}$ и слѣд. $\sin x = \dfrac{d\sqrt{3}}{2\sqrt{d^2 + dd_1 + d_1^2}}$, такъ что $y = d : \sin x = 2\sqrt{\dfrac{d^2 + dd_1 + d_1^2}{3}}$.

841. Меньшая изъ діагоналей параллелограмма перпендикулярна къ меньшей изъ смежныхъ сторонъ его и противолежитъ углу $\alpha = 36^\circ 40'$. Объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ параллелограмма около меньшей изъ смежныхъ сторонъ его, $= V = 145$ куб. метр. Опредѣлить поверхность этого тѣла вращенія.

Отв. Иском. поверхн. $= \dfrac{4\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha}\sqrt[3]{\dfrac{\pi V^2}{\operatorname{tg}\alpha}} = 200{,}41$ кв. м.

842. Шаръ раздѣленъ плоскостью на два сегмента. Основаніе меньшаго изъ нихъ служитъ и основаніемъ прямого конуса, имѣющаго вершину на кривой поверхности меньшаго сегмента. Боковая поверхность конуса $= M = 5{,}135$ кв. дюйм., а уголъ при осевомъ его сѣченіи $= \alpha = 80^\circ 41' 30''$. Опредѣлить полную поверхность S меньшаго изъ шаровыхъ сегментовъ.

Отв. $S = \dfrac{M}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\left(1 + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right) = 11{,}256$ кв. д.
[Если введемъ вспомогат. уголъ φ, положивъ $\operatorname{tg}\varphi = \sin\frac{1}{2}\alpha$, то $S = \dfrac{2M}{\sin 2\varphi} = 11{,}256$ кв. д.].

842 a). Въ нижнее основаніе цилиндра, имѣющаго боковую поверхность $= S = 103{,}66$ кв. фут., вписанъ правильный многоугольникъ, сумма внутреннихъ угловъ котораго $= 540^\circ$. Многоугольникъ этотъ служитъ основаніемъ пирамиды, у которой вершина помѣщается въ центрѣ верхняго основанія цилиндра, а плоскости боковыхъ граней наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ $\alpha = 38^\circ 3' 20''$. Опредѣлить сторону основанія пирамиды.

Отв. Иском. стор. $= \sqrt{\dfrac{2\,S \,.\, \sin 36^\circ \,.\, \operatorname{tg} 36^\circ \,.\, \operatorname{cotg} \alpha}{\pi}} = 6$ фут.

842 b). Ромбъ, котораго острый уголъ $= \alpha = 37^\circ 12' 18''$, а площадь $= F = 11{,}785$ квадр. фут., вращается около прямой, проведенной чрезъ вершину остраго угла перпендикулярно къ одной изъ его сторонъ. Опредѣлить поверхность тѣла вращенія.

Отв. Иском. поверхн. $= 4\pi F \,.\, \operatorname{cotg} \dfrac{\alpha}{2} = 440$ кв. фут.

842 c). Въ прямой призмѣ, основаніемъ которой служитъ правильный треугольникъ, чрезъ одну изъ сторонъ нижняго основанія и противолежащую вершину верхняго основанія проведена плоскость, наклоненная къ основанію призмы подъ угломъ $\alpha = 41^\circ 10' 28''$. Боковая поверхность призмы $= S = 47{,}401$ кв. фут. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

Отв. Иском. площ. $= \dfrac{S}{6 \sin \alpha} = 12$ кв. фут.

842 d). Основаніемъ правильной пирамиды служитъ многоугольникъ, сумма внутреннихъ угловъ котораго $= 540^\circ$. Сумма апоѳемы этого многоугольника и апоѳемы пирамиды $= m = 25{,}478$ метр. Плоскости боковыхъ граней пирамиды наклонены къ плоскости ея основанія подъ угломъ $\alpha = 48^\circ 37'$. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

Отв. Бок. пов. $= \dfrac{1{,}25\, m^2 \,.\, \cos \alpha \,.\, \operatorname{tg} 36^\circ}{\cos^4 \dfrac{\alpha}{2}} = 565$ кв. м.

842 e). Въ конусъ, образующая котораго наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ $= \alpha = 38^\circ 40' 36''$, вписана правильная четыреугольная пирамида, имѣющая объемъ $= V =$ $= 31{,}56$ куб. фут. Опредѣлить полную поверхность конуса.

Отв. Иском. пов. $= \sqrt[3]{\dfrac{4{,}5\,\pi^3 . V^2 . \cos^4\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha . \sin^2\frac{\alpha}{2}}} = 108{,}765$ кв. ф.

842 f). Изъ вершины C прямоугольнаго треугольника ACB (прямой уголъ — при точкѣ A) радіусомъ $CA = R = 1{,}8757$ фут. описана дуга, пересѣкающая сторону CB въ точкѣ M. Фигура AMB, ограниченная дугою AM и прямыми AB и MB, вращается около прямой, проходящей чрезъ вершину C и перпендикулярной къ CA. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

Отв. Иском. об. $= \frac{4}{3}\pi R^3 . \operatorname{tg}\alpha . \sin^2\frac{\alpha}{2} = 3{,}2614$ куб. ф.

842 g). Объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ прямоугольнаго треугольника около оси, проходящей чрезъ вершину прямого угла параллельно гипотенузѣ, $= V = 564{,}05$ куб. д. Одинъ изъ острыхъ угловъ треугольника $= \alpha = 75^\circ 15'$. Опредѣлить длину прямой, дѣлящей этотъ уголъ пополамъ и проведенной до пересѣченія съ противолежащей ему стороной.

Отв. Иск. длина $= \sqrt[3]{\dfrac{3V}{2\pi . \cos^3\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\alpha . \operatorname{tg}\alpha}} = 5{,}2845$ д.

842 h). Вращеніемъ равнобедреннаго треугольника ABC (равныя стороны котораго суть AB и BC) около оси, проходящей чрезъ вершину C треугольника параллельно высотѣ его BD, соотвѣтствующей сторонѣ AC, производится тѣло, объемъ котораго $= V = 60716$ куб. фут. Уголъ BAC треугольника $= \alpha = 79^\circ 36' 40''$. Опредѣлить высоту BD.

Отв. $BD = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi . \operatorname{cotg}^2\alpha}} = 66$ фут.

842 k). Въ полуокружности радіуса $R = 5{,}229$ дюйм., параллельно ея діаметру AB, проведена хорда CD такъ, что каждая изъ образовавшихся равныхъ дугъ AC и $BD = \alpha$ $= 60^\circ 59' 50''$. Соединивъ точки C и D съ точкою A, вращаютъ около діаметра AB фигуру, ограниченную прямыми AC и AD и дугой CD. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

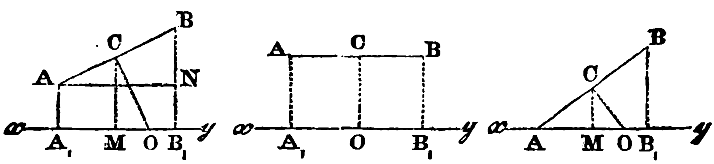
Отв. Объемъ $= \frac{4}{3}\pi R^3 . \cos\alpha = 290{,}37$ куб. д.

842 1). Чрезъ сторону основанія правильной треугольной пирамиды проведена плоскость, наклоненная къ плоскости основанія пирамиды подъ угломъ α и перпендикулярная къ противолежащему боковому ребру. Зная, что объемъ той части пирамиды, которая заключена между плоскостью основанія и плоскостью сѣченія, $= V$, опредѣлить высоту упомянутой правильной треугольной пирамиды.

Отв. Иск. высота $= 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{3\sqrt{3}\,.\,\mathrm{tg}^2\alpha\,.\,\sin\alpha}}$.

II. Нѣкоторыя теоремы, относящіяся: a) къ ученію о поверхностяхъ и тѣлахъ вращенія, b) къ ученію о проекціяхъ.

Теорема I. Если прямая xy и конечная прямая AB лежатъ въ одной плоскости, при чемъ AB вся расположена по одну сторону xy (черт. 132), то поверхность, образуемая вращеніемъ прямой AB около оси xy, равна проекціи (A_1B_1) этой прямой на ось вращенія xy, умноженной на длину окружности, радіусомъ которой служитъ перпендикуляръ (CO), возставленный къ прямой AB изъ средины ея (C) и продолженный до пересѣченія (въ точкѣ O) съ осью вращенія xy.



Черт. 132. Черт. 133. Черт. 134.

Доказательство. Опустивъ изъ точекъ A, C и B (черт. 132) перпендикуляры AA_1, CM и BB_1 на ось xy, замѣчаемъ, что поверхность, образуемая вращеніемъ AB около xy, есть боковая поверхность усѣченнаго конуса, производимаго при этомъ вращеніи трапеціею AA_1BB_1, у которой линіей, соединяющей средины непараллельныхъ сторонъ, служитъ CM; поэтому, если означимъ искомую поверхность чрезъ S_{AB}, то $S_{AB} = 2\pi\,.\,CM\,.\,AB$. Проведя AN, параллельную xy, изъ подобія треугольниковъ ABN и COM, имѣющихъ взаимно-перпендикулярныя стороны, получаемъ $CM : AN = CO : AB$, такъ что

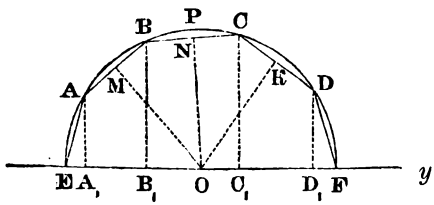
$CM \cdot AB = CO \cdot AN = CO \cdot A_1B_1$, и слѣдов. $S_{AB} = 2\pi \cdot CO \cdot A_1B_1$, что и требовалось доказать.

Замѣчанія. 1) Для того случая, когда прямая AB параллельна оси xy (черт. 133), справедливость теоремы очевидна, ибо тогда

$$S_{AB} = 2\pi \cdot AA_1 \cdot AB = 2\pi \cdot CO \cdot A_1B_1.$$

2) Теорема справедлива и въ томъ случаѣ, когда точка A прямой AB лежитъ на оси xy (черт. 134). Дѣйствительно, тогда $S_{AB} = 2\pi \cdot BB_1 \cdot \frac{AB}{2} = 2\pi \cdot \frac{BB_1}{2} \cdot AB$. Но $\frac{1}{2}BB_1 = CM$ (ибо $CM : BB_1 = AC : AB = 1 : 2$); слѣдов. $S_{AB} = 2\pi \cdot CM \cdot AB$. А такъ какъ $CM \cdot AB = CO \cdot AB_1$ (ибо изъ подобія треугольниковъ MCO и ABB_1 слѣдуетъ, что $CM : AB_1 = CO : AB$), то $S_{AB} = 2\pi \cdot CO \cdot AB_1$.

Теорема II. Если правильная ломаная линія (ABCD) лежитъ вся по одну сторону діаметра (EF) окружности (черт. 135), въ дугу (APD) которой она вписана, то поверхность, образуемая вращеніемъ этой ломаной около оси xy, совпадающей съ діаметромъ (EF) окружности, равна произведенію длины окружности, вписанной въ ломаную линію, на проекцію (A_1D_1) этой послѣдней на ось вращенія.


Черт. 135.

Доказательство. Положимъ, что въ дугу APD полуокружности EPF (черт. 135) вписана правильная ломаная линія ABCD (такъ называется ломаная, составленная изъ равныхъ отрѣзковъ AB, BC, CD..., пересѣкающихся подъ равными углами). Замѣтивъ, что линіи MO, NO и KO, соединяющія средины отрѣзковъ AB, BC и CD съ центромъ O дуги APD, описанной около ломаной линіи, равны апоѳемѣ правильной ломаной линіи, обозначимъ эту апоѳему буквою a. Основываясь на предыдущей теоремѣ и держась тѣхъ же обозначеній, которыми мы пользовались при доказательствѣ этой послѣдней, будемъ имѣть:

$$S_{AB} = 2\pi \cdot MO \cdot A_1B_1 = 2\pi a \cdot A_1B_1$$
$$S_{BC} = 2\pi \cdot NO \cdot B_1C_1 = 2\pi a \cdot B_1C_1$$
$$S_{CD} = 2\pi \cdot OK \cdot C_1D_1 = 2\pi a \cdot C_1D_1$$

Сложивъ эти равенства, получимъ

$S_{AB}+S_{BC}+S_{CD}=2\pi a(A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1)$ или $S_{ABCD}=2\pi a\,.\,A_1D_1$, что и доказываетъ предложенную теорему.

Доказательство, очевидно, не зависитъ отъ числа отрѣзковъ AB, BC,..., изъ которыхъ состоитъ ломаная ABCD, вписанная въ дугу APD полуокружности EPF. Очевидно также, что поверхность, производимая вращеніемъ около EF правильной ломаной линіи EABC, вписанной въ дугу EPC, т.-е. S_{EABC}, равна $2\pi a.\,EC_1$. Если бы концы правильной ломаной линіи совпадали съ концами E и F діаметра EF полуокружности, т.-е. если бы правильная ломаная представляла половину периметра правильнаго многоугольника, вписаннаго въ окружность и имѣющаго четное число сторонъ, то, такимъ же образомъ, какъ и выше, очевидно, нашли бы, что поверхность, описанная этою ломаною линіею, $S_{EABCDF}=2\pi a\,.EF$, т.-е. равна произведенію діаметра окружности, описанной около правильной ломаной линіи, на длину окружности, вписанной въ ту же ломаную линію.

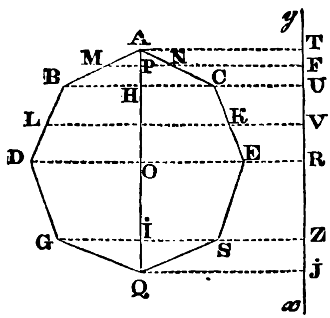
Замѣчаніе. Доказанная теорема даетъ возможность весьма просто вывести формулы поверхности шарового пояса, кривой (сферической) поверхности шарового сегмента и поверхности шара. Обозначимъ радіусъ шаровой поверхности, производимой вращеніемъ полуокружности EPF около діаметра EF, чрезъ R. При безграничномъ удвоеніи числа отрѣзковъ AB, BC,... ломаной ABCD, вписанной въ дугу APD, линія A_1D_1 не измѣняется, а a является перемѣнной величиной, предѣломъ которой служитъ R; точно такъ же не измѣняются линіи EC_1 и EF при безпредѣльномъ удвоеніи числа отрѣзковъ ломаныхъ линій EABC и EABCDF, изъ которыхъ EABC вписана въ дугу EPC, а EABCDF въ полуокружность EPF; слѣдовательно *предѣлъ* $S_{ABCD}=2\pi R\,.\,A_1D_1$, *предѣлъ* $S_{EABC}=2\pi R\,.\,EC_1$, *предѣлъ* $S_{EABCDF}=2\pi R\,.\,EF=2\pi R\,.\,2R=4\pi R^2$.

А такъ какъ предѣлъ S_{ABCD} принимается за поверхность шарового пояса, высотою котораго служитъ A_1D_1, предѣлъ S_{EABC} — за величину кривой поверхности шарового сегмента, высотою котораго служитъ EC_1, а предѣлъ S_{EABCDF} — за поверхность шара, котораго діаметръ $=$ EF, то:

1) поверхность шарового пояса $= 2\pi R \,.\, A_1D_1 = 2\pi R \,.\, H$,
где H — высота пояса;

2) кривая (сферическая) поверхность шарового сегмента $=$ $2\pi R \,.\, EC_1 = 2\pi Rh$, где h — высота шарового сегмента;

3) поверхность шара $= 4\pi R^2$.



Черт. 136.

Теорема III. Поверхость тѣла, образуемаго вращеніемъ правильнаго многоугольника (ABDGQSEC) около оси xy (черт. 136), не пересѣкающей сторонъ многоугольника, лежащей въ плоскости послѣдняго и параллельной одному изъ діаметровъ (AQ) описаннаго около него круга, равна произведенію периметра этого многоугольника на длину окружности, радіусъ которой равенъ разстоянію центра многоугольника отъ оси вращенія.

Доказательство. Пусть число сторонъ многоугольника четное и равно n, длина каждой изъ нихъ $= a$, а разстояніе его центра отъ оси вращенія, т.-е. длина перпендикуляра $OR = d$. Опустивъ изъ точекъ A и Q перпендикуляры AT и QJ на ось вращенія xy, проведемъ діагонали BC, DE, GS, ... многоугольника и продолжимъ ихъ до пересѣченія въ точкахъ U, R, Z, ... съ осью вращенія; полученныя линіи BU, DR, GZ, ..., какъ не трудно убѣдиться, перпендикулярны къ этой оси. Искомая поверхность Σ тѣла вращенія, имѣющаго видъ многограннаго кольца (его называютъ также призматическимъ кольцомъ), равна суммѣ боковыхъ поверхностей усѣченныхъ конусовъ, производимыхъ вращеніемъ трапецій ABUT, ACUT, BDRU, CERU... и т. д. Обозначивъ величины этихъ боковыхъ поверхностей соотвѣтственно чрезъ S_{AB}, S_{AC}, S_{BD}, S_{CE}, ..., проведемъ чрезъ средины M, L, ... сторонъ AB, BD, ... прямыя MF, LV, ..., перпендикулярныя къ оси xy и слѣдов. параллельныя линіямъ AT, BU, DR...; получимъ:

$$S_{AB} = 2\pi \,.\, MF \,.\, AB = 2\pi a \,.\, MF = 2\pi a\,(MP + PF)$$
$$S_{AC} = 2\pi \,.\, NF \,.\, AC = 2\pi a \,.\, NF = 2\pi a\,(PF - PN).$$

Сложивъ эти два равенства (при чемъ замѣтимъ, что $MP = PN$ и что $PF = OR = d$), будемъ имѣть

$$S_{AB} + S_{AC} = 2\pi a \,.\, 2\,PF = 2\pi a \,.\, 2d = 2a \,.\, 2\pi d \ldots\ldots (1).$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что

$$(2) \ldots . S_{BD} + S_{CE} = 2a \,.\, 2\pi d \text{ и что } S_{DG} + S_{ES} = 2a \,.\, 2\pi d \ldots (3).$$

Число всѣхъ равенствъ, подобныхъ (1), (2) и (3), очевидно равно $\frac{1}{2}n$. Сложивъ всѣ эти равенства, получимъ

$$\Sigma = 2a \,.\, 2\pi d \,.\, \frac{n}{2} = an \,.\, 2\pi d,$$

гдѣ an — периметръ многоугольника. Теорема, такимъ образомъ, доказана.

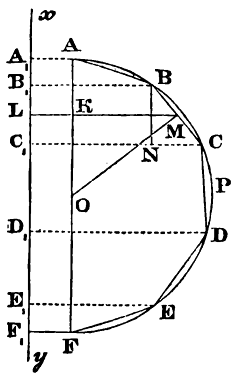
Замѣчаніе. Положимъ, что многоугольникъ ABDGQSEC вписанъ въ кругъ и что число сторонъ многоугольника неограниченно удвоивается; тогда периметръ an многоугольника будетъ безгранично приближаться къ своему предѣлу — окружности круга, а поверхность Σ тѣла (многограннаго кольца), производимаго вращеніемъ многоугольника около xy, — къ поверхности тѣла (такъ называемаго тора или круглаго кольца), производимаго вращеніемъ круга около xy. Обозначая эту послѣднюю поверхность чрезъ S, а радіусъ круга чрезъ R и переходя къ предѣлу, получаемъ

$$S = 2\pi R \,.\, 2\pi d.$$

Такимъ образомъ поверхность тѣла (тора), производимаго вращеніемъ круга около оси, не пересѣкающей круга, равна произведенію длины окружности этого круга на длину окружности, описываемой его центромъ при этомъ вращеніи.

Теорема IV. Выпуклая поверхность тѣла, производимаго вращеніемъ полукруга радіуса R около лежащей въ плоскости полукруга оси xy, параллельной его діаметру и удаленной отъ діаметра на разстояніе d, равна $2\pi^2 dR \pm 4\pi R^2$, гдѣ знакъ + соотвѣтствуетъ тому положенію полукруга, при которомъ его полуокружность обращена своею выпуклостью (черт. 137) въ сторону, противоположную оси вращенія, а знакъ — (минусъ) соотвѣтствуетъ тому положенію, при которомъ полуокружность обращена своею выпуклостью къ оси (черт. 138).

Доказательство. I случай. Полуокружность обращена своею выпуклостью въ сторону, противоположную оси вращенія xy, параллельной діаметру AF полукруга APF (черт. 137) и отстоящей отъ діаметра на разстояніе d. Положимъ, что въ полуокружность вписана правильная ломаная линія ABCDEF, апоѳему которой означимъ чрезъ a, и пусть A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1 и E_1F_1 — проекціи отрѣзковъ AB, BC, CD, DE и EF этой ломаной на ось вращенія xy. Означивъ чрезъ S_{BC} поверхность, описанную отрѣзкомъ BC при вращеніи около xy, т.-е. боковую поверхность усѣченнаго конуса, произведеннаго вращеніемъ трапеціи B_1BCC_1 около xy, и опустивъ изъ средины M отрѣзка BC перпендикуляръ ML на ось xy, будемъ имѣть $S_{BC} = 2\pi . ML . BC = 2\pi . BC(LK + KM) = 2\pi d\ BC + 2\pi . BC . KM$. Соединивъ точку M съ центромъ O и опустивъ изъ B перпендикуляръ BN на линію CC_1, на основаніи подобія треугольниковъ BNC и KMO получимъ пропорцію BC : BN = MO : MK, откуда слѣдуетъ, что $BC . MK = BN . MO = B_1C_1 . a$, такъ что $S_{BC} = 2\pi d . BC + 2\pi a . B_1C_1$. Подобнымъ же образомъ, обозначая поверхности, описанныя при вращеніи около xy отрѣзками AB, CD,... соотвѣтственно чрезъ S_{AB}, S_{CD}... и т. д., найдемъ, что $S_{AB} = 2\pi d . AB + 2\pi a . A_1B_1$, $S_{CD} = 2\pi d . CD + 2\pi a . C_1D_1$,....и т. д. Сложивъ найденныя равенства, опредѣляющія S_{AB}, S_{AB}, S_{CD}, ... S_{EF}, и означивъ сумму $S_{AB} + S_{BC} + \ldots + S_{EF}$ чрезъ Σ, получимъ:



Черт. 137.

$$\Sigma = 2\pi d(AB + BC + \ldots + EF) + 2\pi a(A_1B_1 + B_1C_1 + \ldots + E_1F_1)$$

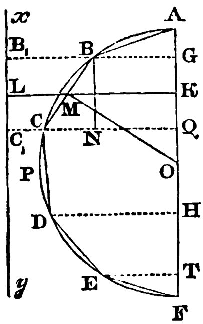
$$\text{или } \Sigma = 2\pi d(AB + BC + CD + DE + EF) + 2\pi a . 2R,$$

гдѣ R — радіусъ данной полуокружности.

При безпредѣльномъ удвоеніи числа отрѣзковъ ломаной линіи ABCDEF, сумма $AB + BC + \ldots + EF$ безпредѣльно приближается къ длинѣ πR полуокружности APF; при этомъ безпредѣльно приближаются: апоѳема a къ R, а Σ къ выпуклой поверхности S тѣла, образованнаго вращеніемъ даннаго полукруга APF около xy; поэтому, перейдя къ предѣлу, найдемъ

$$S = 2\pi d . \pi R + 2\pi R . 2R = 2\pi^2 d R + 4\pi R^2.$$

II случай. Полуокружность обращена своею выпуклостью къ оси вращенія xy, параллельной діаметру AF полукруга APF (черт. 138) и отстоящей отъ діаметра на разстояніе d. Пусть, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, въ полуокружность APF вписана правильная ломаная линія ABCDEF. Соединивъ средину M отрѣзка BC съ центромъ O, проведемъ чрезъ точки M, B, C, D и E линіи LK, B_1G, C_1Q, DH и ET, перпендикулярныя къ AF, и опустимъ изъ точки B перпендикуляръ BN на линію CQ. При доказательствѣ теоремы будемъ держаться тѣхъ же обозначеній, что и въ предыдущемъ случаѣ. Поверхность, описанная отрѣзкомъ BC при вращеніи около xy, т.-е. боковая поверхн. усѣченнаго конуса, произведеннаго вращеніемъ трапеціи B_1BCC_1 около xy, будетъ имѣть своимъ выраженіемъ $S_{BC} = 2\pi . ML . BC = 2\pi . BC(KL - MK) = 2\pi d . BC - 2\pi . BC . MK$. Подобіе треугольниковъ CBN и KMO приводитъ къ пропорціи $BC : BN = MO : MK$, откуда $BC . MK = BN . MO = GQ . a$; поэтому $S_{BC} = 2\pi d . BC - 2\pi a . GQ$.



Черт. 138.

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$S_{AB} = 2\pi d . AB - 2\pi a . AG$, $S_{CD} = 2\pi d . CD - 2\pi a . QH, \ldots$ и т. д.

Так. образомъ $\Sigma = S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DE} + S_{EF} =$

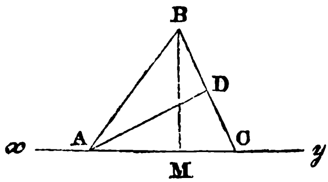
$$= 2\pi d (AB + BC + \ldots . + EF) - 2\pi a (AG + GQ + \ldots . + TF) =$$
$$= 2\pi d (AB + BC + \ldots . + EF) - 2\pi a . 2R.$$

Отсюда, переходя къ предѣлу, получимъ

$$S = 2\pi d . \pi R - 2\pi R . 2R = 2\pi^2 d . R - 4\pi R^2.$$

Замѣчаніе. Для вычисленія *полной* поверхности тѣла, производимаго вращеніемъ полукруга APF около xy, очевидно, должно — какъ въ I-мъ, такъ и во II-мъ случаѣ положенія круга относительно оси xy — придать въ выпуклой поверхности тѣла вращенія боковую поверхность цилиндра, описываемую при вращеніи около xy діаметромъ AF полуокружности.

Теорема V. Объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ треугольника около оси xy, которая проходитъ чрезъ вершину треугольника и лежитъ въ плоскости этого треугольника, но не пересѣкаетъ его, равенъ произведенію поверхности, описанной стороною треугольника, противолежащей упомянутой вершинѣ, на треть соотвѣтствующей этой сторонѣ высоты.



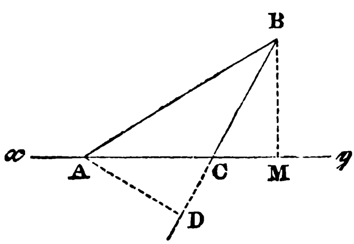
Черт. 139.

Доказательство. При доказательствѣ названной теоремы будемъ различать три случая.

I случай: ось вращенія xy совпадаетъ съ одной изъ сторонъ треугольника. Пусть, напримѣръ, она совпадаетъ со стороною AC (черт. 139). Опустивъ изъ вершины B треугольника перпендикуляръ BM на сторону его AC, а изъ вершины A — перпендикуляръ AD на сторону BC, и означивъ искомый объемъ тѣла вращенія чрезъ V, будемъ имѣть

$$V = \frac{1}{3}\pi . BM^2 . AM + \frac{1}{3}\pi . BM^2 . MC =$$

$= \frac{1}{3}\pi . BM^2 (AM + MC) = \frac{1}{3}\pi . BM . BM . AC$. Такъ какъ удвоенная площадь треугольника выражается, съ одной стороны, произведеніемъ AC . BM, а съ другой — произведеніемъ BC . AD, то BM . AC = BC . AD и слѣдовательно $V = \frac{1}{3}\pi . BM . BC . AD$. Замѣтивъ, что $\pi . BM . BC$ = боковой поверхности конуса, образованнаго вращеніемъ прямоугольнаго треугольника MBC около оси xy, т.-е. поверхности, описываемой линіею BC при сказанномъ вращеніи, и означивъ эту поверхность чрезъ S_{BC}, получимъ



Черт. 140.

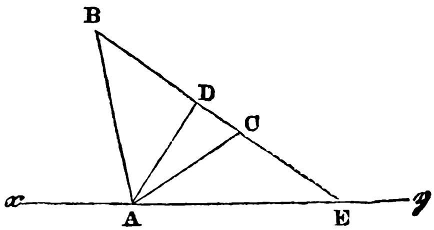
$$V = S_{BC} . \frac{AD}{3}.$$

Замѣчаніе. Если основаніе M высоты BM, соотвѣтствующей сторонѣ AC, лежитъ на *продолженіи* этой стороны (черт. 140), то доказательство теоремы ведется такимъ образомъ:

$$V = \frac{1}{3}\pi . BM^2 . AM - \frac{1}{3}\pi . BM^2 . CM = \frac{1}{3}\pi \ BM^2 \ (AM - CM) =$$
$$= \frac{1}{3}\pi . BM^2 . AC = \frac{1}{3}\pi . BM . BM . AC.$$

Если AD — высота, соотвѣтствующая сторонѣ BC, то $BM . AC = BC . AD$ и слѣдов. $V = \frac{1}{3}\pi . BM . BC . AD$. Такъ какъ $\pi . BM . BC =$ боковой поверхности конуса, образованнаго вращеніемъ треугольника CBM около xy, т.-е. поверхности S_{BC}, описанной при этомъ вращеніи линіею BC, то
$$V = S_{BC} . \frac{AD}{3}.$$

II случай: ось вращенія, проходя чрезъ вершину A треугольника, не совпадаетъ со стороною AC и не параллельна сторонѣ BC, противолежащей вершинѣ A (черт. 141). Продолживъ BC до пересѣченія съ xy въ точкѣ E, замѣчаемъ, что искомый объемъ V тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника ABC около оси xy, есть разность объемовъ тѣлъ, производимыхъ при этомъ вращеніи треугольниками ABE и ACE. Употребляя тѣ же, что и прежде, обозначенія, можемъ выразить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника ABE, чрезъ $S_{BE} . \frac{AD}{3}$, а объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника ACE, — чрезъ $S_{CE} . \frac{AD}{3}$; слѣдовательно

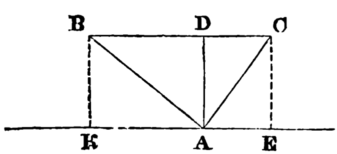


Черт. 141.

$$V = S_{BE} . \frac{AD}{3} - S_{CE} . \frac{AD}{3} = \left(S_{BE} - S_{CE}\right)\frac{AD}{3} = S_{BC} . \frac{AD}{3}.$$

III случай: ось вращенія, проходя чрезъ вершину A треугольника, параллельна сторонѣ его BC (черт. 142).

Опустивъ изъ вершинъ B и C перпендикуляры BK и CE на ось вращенія KE, находимъ, что искомый объемъ



Черт. 142.

$$V = \pi . BK^2 . BC - \frac{1}{3}\pi . BK^2 . AK - \frac{1}{3}\pi . CE^2 . AE =$$

$$= \pi . AD^2 (BC - \frac{1}{3}AK - \frac{1}{3}AE) = \pi . AD^2 (BC - \frac{1}{3}KE) =$$

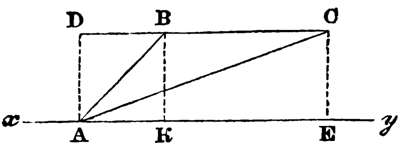
$$= \pi . AD^2 . \frac{2}{3}BC = \frac{1}{3}AD . 2\pi . AD . BC .$$

Но $2\pi . AD . BC$ есть боковая поверхность цилиндра, произведеннаго вращеніемъ прямоугольника KBCE около оси KE, т-е. поверхность, описанная при этомъ вращеніи линіею BC или S_{BC}; поэтому

$$V = S_{BC} . \frac{AD}{3} .$$

Замѣчаніе. Если треугольникъ ABC имѣетъ положеніе, изображенное на черт. 143-мъ, доказательство теоремы ведется такимъ образомъ:

$$V = \frac{1}{3}\pi . BK^2 . AK + \pi . BK^2 . BC - \frac{1}{3}\pi . CE^2 . AE =$$



Черт. 143.

$$= \pi . BK^2 \left(\frac{KA}{3} + BC - \frac{AE}{3}\right) =$$

$$= \pi . BK^2 \left(\frac{AK}{3} + BC - \frac{AK + BC}{3}\right)$$

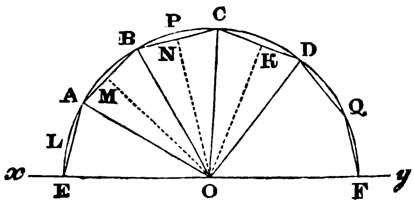
$$= \pi . BK^2 . \frac{2}{3} BC = 2\pi . BK . BC . \frac{AD}{3} .$$

Такъ какъ $2\pi . BK . BC$ есть боковая поверхность цилиндра, произведеннаго вращеніемъ прямоугольника KBCE около оси xy, т.-е. поверхность S_{BC}, описанная при этомъ вращеніи линіею BC, то

$$V = S_{BC} . \frac{AD}{3} .$$

Теорема VI. Объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ правильнаго многоугольнаго (ломанаго) сектора около оси, лежащей въ плоскости сектора и проходящей чрезъ его центръ, равенъ произведенію поверхности, описанной при этомъ вращеніи ломаной линіей, служащей основаніемъ сектора, на треть апоѳемы этой ломаной линіи.

Доказательство. Положимъ, что въ дугу APD полуокружности EPF (черт. 144) вписана правильная ломаная линія ABCD и точки A и D соединены съ центромъ O дуги. Полученная такимъ образомъ фигура OABCD называется правильнымъ многоугольнымъ (или ломанымъ) секторомъ; ломаная линія ABCD называется основаніемъ, а точка O — центромъ этого сектора. Для опредѣленія объема тѣла, производимаго вращеніемъ сектора OABCD около оси xy, которая, положимъ, совпадаетъ съ діаметромъ EF



Черт. 144.

полуокружности, соединимъ центръ O съ точками B и C и такимъ образомъ разобьемъ секторъ на треугольники ABO, BCO и COD. Обозначивъ апоѳему ломаной линіи чрезъ a, объемы тѣлъ, производимыхъ треугольниками ABO, BOC и COD при вращеніи ихъ около xy соотвѣтственно чрезъ V_1, V_2 и V_3, а величины поверхностей, описанныхъ при этомъ вращеніи отрѣзками AB, BC и CD, соотвѣтственно чрезъ S_{AB}, S_{BC} и S_{CD} и принимая въ расчетъ теорему V-ую, будемъ имѣть:

$$V_1 = S_{AB} \cdot \frac{MO}{3} = S_{AB} \cdot \frac{a}{3}; \qquad V_2 = S_{BC} \cdot \frac{NO}{3} = S_{BC} \cdot \frac{a}{3};$$

$$V_3 = S_{CD} \cdot \frac{KO}{3} = S_{CD} \cdot \frac{a}{3}.$$

Сложивъ эти равенства и обозначивъ искомый объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ многоугольнаго сектора OABCD около xy, чрезъ V, а поверхность, описываемую при этомъ вращеніи ломаной линіей ABCD, чрезъ S_{ABCD}, получимъ

$$V = \frac{a}{3}(S_{AB} + S_{BC} + S_{CD}) = \frac{a}{3} \cdot S_{ABCD},$$

что и доказываетъ теорему.

Замѣчаніе. Доказательство теоремы, очевидно, не зависитъ отъ числа отрѣзковъ AB, BC, CD..., изъ которыхъ составлено основаніе многоугольнаго сектора. Очевидно также, что изложенная теорема примѣняется и къ многоугольнымъ секторамъ OEAB и OEABCD, а также и къ полумногоугольнику EABCDQF, который можно разсматривать какъ частный случай многоугольнаго сектора.

Принимая это въ расчетъ, а также и то, что при безпредѣльномъ удвоеніи числа отрѣзковъ, изъ которыхъ составлены ломаныя линіи ABCD, EAB, EABCD и EABCDQF, предѣломъ первой изъ этихъ ломаныхъ служитъ дуга APD, предѣломъ второй — дуга ELB, предѣломъ третьей — дуга EPD, предѣломъ четвертой — полуокружность EPF, а предѣломъ апоѳемы *a* этихъ ломаныхъ – радіусъ R полуокружности, предлагается доказать:

1) что объемъ каждаго изъ шаровыхъ секторовъ, образуемыхъ вращеніемъ круговыхъ секторовъ OAPD, OELB и OEPD около EF, выражается произведеніемъ трети радіуса R на кривую поверхность, описанную соотвѣтственной дугой кругового сектора (эта поверхность называется *основаніемъ* шарового сектора и представляетъ или кривую поверхность шарового сегмента, или поверхность шарового пояса), такъ что $V = 2\pi Rh \cdot \frac{1}{3} R = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, гдѣ V — объемъ какого-либо изъ названныхъ шаровыхъ секторовъ и *h* — высота его основанія;

2) что объемъ V шара, производимаго вращеніемъ полукруга EPF около діаметра его EF, равенъ произведенію трети радіуса R на поверхность, описанную при этомъ вращеніи полуокружностью EPF (служащей предѣломъ ломаной линіи EABCDQF при безпредѣльномъ удвоеніи числа отрѣзковъ этой ломаной), т.-е. что

$$V = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{3} R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Теорема VII. **Объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ правильнаго многоугольника (ABDGQSEC) около прямой *xy* (черт. 136), лежащей въ плоскости многоугольника, не пересѣкающей (сколько бы ни продолжать ее) сторонъ его и параллельной одному изъ діаметровъ (AQ) описаннаго около него круга, равенъ произведенію площади этого многоугольника на длину окружности, радіусъ которой равенъ разстоянію центра многоугольника отъ оси вращенія *xy*.**

Доказательство. Выполнивъ построеніе, подробно изложенное въ доказательствѣ III теоремы (см. черт. 136), и означивъ искомый объемъ чрезъ V, замѣтимъ, что

$$V = (\textit{об. усѣч. кон. } ABUT - \textit{об. усѣч. кон. } ACUT) +$$
$$+ (\textit{об. усѣч. кон. } BDRU - \textit{об. усѣч. кон. } CERU) + \ldots\ldots(1)$$

Найдемъ сперва разность между объемами усѣченныхъ конусовъ ABUT и ACUT.

Такъ какъ *об.* $ABUT = \frac{1}{3}\pi . AH\,(BU^2 + BU . AT + AT^2)$

и *об.* $ACUT = \frac{1}{3}\pi . AH\,(AT^2 + AT . CU + CU^2)$, то

об. ABUT — *об.* $ACUT = \frac{1}{3}\pi . AH\,(BU^2 + BU . AT - AT . CU - CU^2)$.

Но $BU = OR + BH = d + BH$, $CU = OR - CH = d - BH$ и $AT = d$,

слѣдов. *об.* ABUT — *об.* ACUT =

$$= \frac{1}{3}\pi . AH\,[(d + BH)^2 + d\,(d + BH) - d\,(d - BH) - (d - BH)^2] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi . AH \left\{ \begin{array}{l} \;\;\, d^2 + 2\,d . BH + BH^2 \\ + d^2 + \;\; d . BH \\ - d^2 + \;\; d . BH \\ - d^2 + 2\,d . BH - BH^2 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi . AH . 6d . BH = 2\pi d . AH . BH;$$

но AH . BH = площ. треугольника BAC; слѣдов.

об. ABUT — *об.* ACUT $= 2\,\pi\,d$. *площ.* BAC ...... (2).

Опредѣлимъ теперь разность между объемами усѣч. конусовъ BDRU и CERU.

Об. BDRU — *об.* CERU =

$$\frac{1}{3}\pi . OH\,(DR^2 + DR . BU + BU^2 - CU^2 - CU . ER - ER^2) =$$

$$\frac{1}{3}\pi . OH\,\big[(DO + d)^2 + (DO + d)\,(BH + d) +$$

$$+ (BH + d)^2 - (d - BH)^2 - (d - BH)\,(d - DO) - (d - DO)^2\big]$$

$$= \frac{1}{3}\pi . OH \left\{ \begin{array}{llll} \;\;\, d^2 + 2\,d . DO + DO^2 & & & \\ + d^2 + \;\; d . DO & + \;\; d . BH + DO . BH & & \\ + d^2 & + 2\,d . BH & & + BH^2 \\ - d^2 & + 2\,d . BH & & - BH^2 \\ - d^2 + \;\; d . DO & + \;\; d . BH - DO . BH & & \\ - d^2 + 2\,d . DO - DO^2 & & & \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi . OH\,(6d . DO + 6d . BH) = 2\pi d . OH\,(DO + BH).$$

Но $OH\,(DO + BH) = OH \cdot \frac{DE + BC}{2}$ = площади трапеціи BCDE;

слѣдов. *об.* BDRU — *об.* CERU $= 2\,\pi\,d$. *площ.* BCDE ..... (3)

Пользуясь теперь равенствами (2) и (3), можемъ представить равенство (1) въ видѣ:

$$V = 2\pi d\ (\textit{площ.}\ BAC + \textit{площ.}\ BCDE + \ldots .) =$$
$$= 2\pi d \,.\, \textit{площ.}\ \text{многоуг.}\ ABDGQSEC.$$

Теорема, слѣдовательно, доказана.

Замѣчаніе. Положимъ, что многоугольникъ ABDGQSEC вписанъ въ кругъ, и пусть число сторонъ многоугольника неограниченно удвоивается; тогда площадь многоугольника будетъ безгранично стремиться къ своему предѣлу — площади круга, а объемъ V тѣла (многограннаго кольца), производимаго вращеніемъ многоугольника около xy, — къ объему круглаго кольца или тора, производимаго кругомъ при вращеніи около xy. Обозначая этотъ послѣдній объемъ чрезъ v, а радіусъ круга чрезъ R, и переходя къ предѣлу, получаемъ

$$v = \pi R^2 \,.\, 2\pi d.$$

Такимъ образомъ объемъ тѣла (тора), производимаго вращеніемъ круга около оси, не пересѣкающей круга, равенъ произведенію площади этого круга на длину окружности, описываемой его центромъ при этомъ вращеніи.

Теорема VIII. Если правильный многоугольникъ ABDGQSEC (черт. 136) вращается около оси xy, которая, лежа въ плоскости многоугольника, не пересѣкаетъ (сколько бы ни продолжать ее) сторонъ его и параллельна діаметру AQ описаннаго около него круга, то разность между объемами двухъ тѣлъ, изъ которыхъ первое производится вращеніемъ половины ABDGQ многоугольника ABDGQSEC около xy, а второе — вращеніемъ половины ACESQ того же многоугольника ABDGQSEC около xy, равна удвоенному объему тѣла, производимаго вращеніемъ половины ABDGQ правильнаго многоугольника ABDGQSES около діаметра AQ.

Доказательство. Если разстояніе OR центра O многоугольника отъ оси xy означимъ чрезъ d, то объемъ v_1 тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника ABH (черт. 136) около оси xy, =

$$\tfrac{1}{3}\pi \,.\, AH\,(BU^2 + AT^2 + BU \,.\, AT) - \pi \,.\, AT^2 \,.\, AH =$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi \,.\, AH\,[(d + BH)^2 + d^2 + (d + BH)\,d - 3d^2] =$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi \,.\, AH\,(3d \,.\, BH + BH^2) = \pi d \,.\, AH \,.\, BH + \tfrac{1}{3}\pi \,.\, BH^2 \,.\, AH.$$

Замѣтивъ, что AH . BH есть удвоенная площадь треугольника ABH, и означивъ площадь его чрезъ Δ, можемъ представить v_1 въ видѣ $2\pi d.\Delta + \frac{1}{3}\pi.BH^2.AH$. Такъ какъ объемъ v_2 тѣла, производимаго вращеніемъ треугольника AHC около xy, $=$

$$\pi.AT^2.AH - \frac{1}{3}\pi.AH(AT^2 + CU^2 + AT.CU) =$$

$\frac{1}{3}\pi.AH[2d^2 - (d - HC)^2 - d(d - HC)] = \frac{1}{3}\pi.AH(3d.HC - HC^2) =$ $\pi d.AH.HC - \frac{1}{3}\pi.HC^2.AH = \pi d.AH.BH - \frac{1}{3}\pi.BH^2.AH =$ $= 2\pi d.\Delta - \frac{1}{3}\pi.BH^2.AH$, то $v_1 - v_2 = 2.\frac{1}{3}\pi.BH^2.AH$,

т.-е. разность объемовъ тѣлъ, производимыхъ вращеніемъ треугольниковъ ABH и AHC около xy, равна удвоенному объему конуса, производимаго вращеніемъ треугольника ABH около линіи AQ.

Найдемъ теперь разность между объемами v_3 и v_4 двухъ тѣлъ, изъ которыхъ первое производится вращеніемъ около xy трапеціи BHOD, а второе — трапеціи HOEC.

Объемъ $v_3 = \frac{1}{3}\pi.HO(BU^2 + DR^2 + BU.DR) - \pi.OR^2.HO =$ $= \frac{1}{3}\pi.HO\left[(BH + d)^2 + (DO + d)^2 + (BH + d)(DO + d) - 3d^2\right] =$

$$= \frac{1}{3}\pi.HO\left[BH^2 + DO^2 + 3d(BH + DO) + BH.DO\right] =$$

$\pi d.HO(BH + DO) + \frac{1}{3}\pi.HO(BH^2 + DO^2 + BH.DO)$. Замѣтивъ, что HO (BH+DO) есть удвоенная площадь трапеціи BHOD, и означивъ площадь трапеціи чрезъ Q, представляемъ v_3 въ видѣ:

$v_3 = 2\pi d.Q + \frac{1}{3}\pi.HO(BH^2 + DO^2 + BH.DO)$. Далѣе, такъ какъ

$$v_4 = \pi.OR^2.HO - \frac{1}{3}\pi.HO(CU^2 + ER^2 + CU.ER) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi.HO\left[(3d^2 - (d - HC)^2 - (d - EO)^2 - (d - HC)(d - EO)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi.HO\left[3d(HC + EO) - HC.EO - HC^2 - EO^2\right] =$$

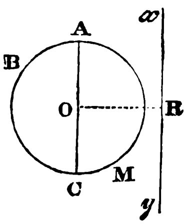
$$= \pi.HO.d(HC + EO) - \frac{1}{3}\pi.HO(HC^2 + EO^2 + HC.EO) =$$

$$= \pi d.HO(BH + DO) - \frac{1}{3}\pi.HO(BH^2 + DO^2 + BH.DO) =$$

$= 2\pi d.Q - \frac{1}{3}\pi.HO(BH^2 + DO^2 + BH.DO)$, то разность $v_3 - v_4$ $= 2.\frac{1}{3}\pi.HO(BH^2 + DO^2 + BH.DO)$, т.-е. равна удвоенному объему усѣченнаго конуса, производимаго вращеніемъ трапеціи DBHO около AQ. Составивъ подобнымъ же образомъ разности между объемами v_5 и v_6 тѣлъ, производимыхъ вращеніемъ около xy трапецій DOIG и OEIS и между объемами v_7 и v_8 тѣлъ, производимыхъ вращеніемъ треугольниковъ GIQ и IQS около xy, и сложивъ разности $v_1 - v_2$, $v_3 - v_4$, $v_5 - v_6$ и $v_7 - v_8$, найдемъ, что сумма этихъ разностей, т.-е. искомая разность x между объемами двухъ тѣлъ, изъ которыхъ первое производится вращеніемъ половины ABDGQ многоугольника ABDGQSEC, а второе вращеніемъ половины ACESQ того же многоугольника около xy, равна удвоенной суммѣ объемовъ тѣлъ, производимыхъ вращеніемъ около линіи AQ треугольника ABH, трапеціи BHDO, трапеціи DOIG и треугольника GIQ, т.-е. удвоенному объему тѣла, производимаго вращеніемъ фигуры ABDGQ около линіи AQ, — слѣд. докажемъ теорему.

Замѣчаніе. Разсматривая площадь круга какъ предѣлъ площадей правильныхъ вписанныхъ въ него многоугольниковъ, число сторонъ которыхъ неограниченно увеличивается, заключаемъ на основаніи доказанной теоремы, что если объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ полукруга ABC (черт. 145), около оси xy, лежащей въ плоскости круга и притомъ не пересѣкающей окружности круга и параллельной его діаметру AC есть V_{ABC}, а объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ полукруга AMC около той же оси, есть V_{AMC}, то разность $V_{ABC} - V_{AMC}$ равна удвоенному объему шара, производимаго вращеніемъ полукруга ABC около его діаметра AC, такъ что, если радіусъ круга означимъ чрезъ R, то

$$V_{ABC} - V_{AMC} = \frac{8}{3}\pi R^3 \ldots\ldots (1).$$



Черт. 145.

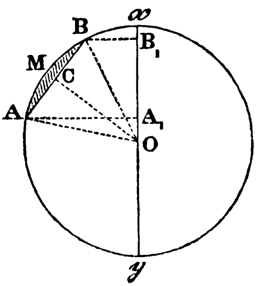
Извѣстно (см. замѣчаніе къ теоремѣ VII), что объемъ v тѣла, производимаго вращеніемъ всего круга ABCM около оси xy, имѣетъ своимъ выраженіемъ $v = \pi R^2 . 2\pi d$, гдѣ d — разстояніе OR центра O отъ оси xy; а такъ какъ $v = V_{ABC} + V_{AMC}$, то

$$V_{ABC} + V_{AMC} = \pi R^2 . 2\pi d \ldots\ldots\ldots (2)$$

Рѣшая систему уравненій (1) и (2), находимъ:

$$V_{ABC} = \frac{\pi R^2}{3}(3\pi d + 4R), \quad V_{AMC} = \frac{\pi R^2}{3}(3\pi d - 4R).$$

Теорема IX. Объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ кругового сегмента (AMB) около діаметра (xy), не пересѣкающаго этого сегмента, равенъ произведенію шестой части площади круга, имѣющаго радіусомъ хорду (AB) сегмента, на проекцію (A_1B_1) этой хорды на ось вращенія (xy) (черт. 146).



Черт. 146.

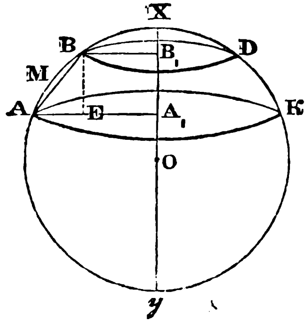
Доказательство. Объемъ V кольцеобразнаго тѣла, производимаго вращеніемъ кругового сегмента AMB около оси xy, есть разность между объемомъ v_1 полаго шарового сектора, образуемаго вращеніемъ кругового сектора AMBO около оси xy, и объемомъ v_2 тѣла, образуемаго вращеніемъ равнобедреннаго треугольника ABO около той же оси. Если A_1B_1 — проекція хорды AB на діаметръ xy, то, какъ извѣстно (см. замѣчаніе къ теоремѣ VI или геометрич. учебникъ Давидова, § 296), первый изъ названныхъ объемовъ $= {}^2/_3 \pi R^2 . A_1B_1$, гдѣ R — радіусъ круга, такъ что $v_1 = {}^2/_3 \pi . AO^2 . A_1B_1$. Объемъ же v_2 тѣла, образуемаго вращеніемъ треугольника ABO около оси xy, равенъ произведенію поверхности, описанной при этомъ вращеніи стороною AB треугольника, на треть CO (см. теорему V), т.-е. $v_2 = S_{AB} \cdot \frac{CO}{3}$. Но $S_{AB} = 2\pi . CO . A_1B_1$ (см. теорему I); слѣдов. $v_2 = \frac{2}{3}\pi . CO^2 . A_1B_1$ и потому
$V = v_1 - v_2 = \frac{2}{3}\pi . AO^2 . A_1B_1 - \frac{2}{3}\pi . CO^2 . A_1B_1 = \frac{2}{3}\pi . A_1B_1 (AO^2 - CO^2)$.
Такъ какъ линія CO, проходящая чрезъ средину линіи AB, перпендикулярна къ AB, то $AO^2 - CO^2 = {}^1/_4 AB^2$ и слѣдов.

$$V = \frac{2}{3}\pi . A_1B_1 \cdot \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{6}\pi . AB^2 . A_1B_1 .$$

Теорема, такимъ образомъ, доказана. Изъ полученнаго выраженія видно, что теорема эта можетъ быть формулирована еще такъ: „Объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ кругового сегмента около діаметра, не пересѣкающаго этого сегмента, равенъ ${}^1/_6$ части объема цилиндра, у котораго радіусомъ основанія служитъ хорда сегмента, а высотою — проекція этой хорды на діаметръ, служащій осью вращенія“.

Теорема X. Объемъ шарового слоя (шарового сегмента о двухъ основаніяхъ) равенъ произведенію высоты слоя на полусумму площадей его основаній, сложенному съ объемомъ шара, діаметръ котораго равенъ высотѣ слоя.

Доказательство. Шаровымъ или сферическимъ слоемъ (иначе: шаровымъ сегментомъ о *двухъ* основаніяхъ) называется часть шара, заключенная между двумя параллельными сѣченіями. Параллельныя сѣченія называются основаніями слоя, а разстояніе между ними — высотою его. Для вывода формулы объема шарового слоя проведемъ въ полукругѣ X A y (черт. 147) хорду AB, отсѣкающую отъ полукруга круговой сегментъ AMB, и опустимъ изъ точекъ A и B перпендикуляры AA_1 и BB_1 на діаметръ Xy. Вращеніемъ части $AMBB_1A_1$ полукруга около діаметра Xy производится шаровой слой, высоту котораго A_1B_1 означимъ чрезъ h, а радіусы AA_1 и BB_1 двухъ его основаній — соотвѣтственно чрезъ r и r_1. Для опредѣленія объема V шарового слоя, очевидно, должно къ объему v тѣла, производимаго вращеніемъ кругового сегмента AMB около Xy, придать объемъ v_1 усѣченнаго конуса, производимаго вращеніемъ трапеціи ABB_1A_1 около Xy. Первый изъ этихъ объемовъ $v = \frac{1}{6}\pi . AB^2 . A_1B_1 = \frac{1}{6}\pi . AB^2 . h$ (см. теорему IX); второй же $v_1 = {}^1/_3\pi h(r^2 + r_1^2 + r . r_1)$. Слѣдов. искомый объемъ $V = v + v_1 = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r_1^2 + r . r_1) + \frac{1}{6}\pi h . AB^2 = \frac{1}{6}\pi h(2r^2 + 2r_1^2 + 2r . r_1 + AB^2)$. Опустивъ изъ точки B перпендикуляръ BE на линію AA_1, находимъ, что $AB^2 = AE^2 + BE^2 = (r - r_1)^2 + h^2 = r^2 - 2r . r_1 + r_1^2 + h^2$; слѣдовательно



Черт. 147.

$$V = \frac{1}{6}\pi h(2r^2 + 2r_1^2 + 2r . r_1 + r^2 - 2r . r_1 + r_1^2 + h^2) =$$

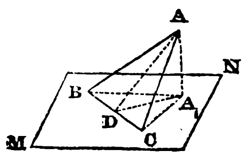
$$\frac{1}{6}\pi h(3r^2 + 3r_1^2 + h^2) = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + 3r_1^2) + \frac{1}{6}\pi h^3 = h\frac{\pi r^2 + \pi r_1^2}{2} + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

Такъ какъ πr^2 и πr_1^2 суть площади круговъ, служащихъ основаніями слоя, а $\frac{1}{6}\pi h^3$ выражаетъ объемъ шара, діаметръ котораго равенъ h, т.-е. высотѣ шарового слоя, то теорема доказана.

Слѣдствіе. Если въ найденной формулѣ положимъ $r_1 = 0$, то получимъ $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3$ — выраженіе объема шарового сегмента съ однимъ основаніемъ или просто шарового сегмента (такъ называется каждая изъ двухъ частей, на которыя шаръ дѣлится какою-нибудь плоскостью, напр. — часть XAK, отсѣкаемая отъ шара плоскостью AK).

Теорема XI. Площадь проекціи треугольника на нѣкоторую плоскость равна произведенію площади его на косинусъ угла, составляемаго плоскостью этого треугольника съ плоскостью проекціи.

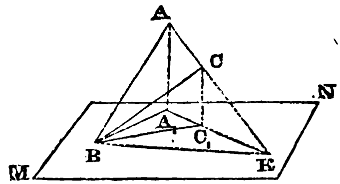
Доказательство. I) Положимъ сначала, что одна изъ сторонъ, напр. BC, треугольника ABC расположена на той плоскости MN, на которую мы проектируемъ этотъ треугольникъ (черт. 148).



Черт. 148.

Опустивъ изъ вершины A треугольника ABC перпендикуляръ AA_1 на плоскость MN, соединимъ основаніе A_1 этого перпендикуляра съ вершинами B и C треугольника ABC, лежащими на плоскости MN; тогда получимъ треугольникъ A_1BC, называемый проекціею треугольника ABC на плоскость MN. Опустимъ изъ точки A_1 перпендикуляръ A_1D на линію BC и соединимъ точку D съ A. Такъ какъ линія BC перпендикулярна къ линіи DA_1, служащей проекціею наклонной линіи DA на плоскость MN, то она перпендикулярна и къ самой наклонной DA; вслѣдствіе этого уголъ ADA_1 есть линейный уголъ двуграннаго угла между плоскостью MN и плоскостью треугольника ABC и потому служитъ мѣрою этого двуграннаго угла. Означимъ уголъ ADA_1 чрезъ α. Такъ какъ треугольники ABC и A_1BC имѣютъ общее основаніе BC, то площади ихъ относятся какъ соотвѣтствующія высоты AD и A_1D, т.-е. *площ.* BA_1C : *площ.* $ABC = A_1D : AD$. Но $A_1D = AD \cdot \cos\alpha$, откуда *площ.* BA_1C = *площ.* $ABC \cdot \cos\alpha$, что и требовалось обнаружить.

II) Пусть теперь у проектируемаго на плоскость MN треугольника ABC только одна изъ вершинъ, напримѣръ B, лежитъ на этой плоскости (черт. 149) и ни одна изъ сторонъ его не параллельна этой плоскости. Обозначимъ, какъ и прежде, уголъ между плоскостью MN и плоскостью треугольника ABC чрезъ α. Продолживъ AC до пересѣченія въ точкѣ K съ плоскостью MN и опустивъ изъ точки A перпендикуляръ AA_1 на эту плоскость, соединимъ точки B, A_1 и K прямыми BA_1, A_1K и BK; получимъ треугольникъ BA_1K, представляющій



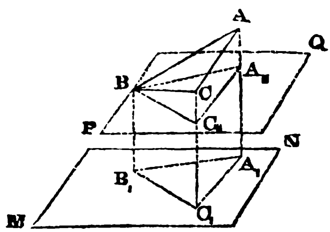
Черт. 149.

проекцію треугольника ABK на плоскость MN. Если изъ точки C опустимъ перпендикуляръ CC_1 на плоскость MN, то основаніе его C_1 должно лежать на линіи A_1K (ибо плоскость AA_1K перпендикулярна къ плоскости MN, такъ какъ проведена чрезъ линію AA_1, перпендикулярную къ плоскости MN). Соединивъ точку C_1 съ точкой B, получаемъ треугольники C_1BK и A_1BC_1, изъ которыхъ первый есть проекція треугольника BCK на плоскость MN, а второй называется проекціею треугольника ABC на ту же плоскость MN. Такъ какъ общая сторона BK треугольниковъ ABK и CBK лежитъ на плоскости MN, то, на основаніи доказаннаго для предыдущаго случая, имѣемъ:

1) *площ.* $A_1BK =$ *площ.* $ABK.\cos\alpha$; 2) *площ.* $C_1BK =$ *площ.* $CBK.\cos\alpha$.

Вычитая изъ перваго равенства второе, получаемъ *площ.* $A_1BC_1 =$ $=$ (*площ.*ABK—*площ.*CBK) $\cos\alpha$ или *площ.* $A_1BC_1 =$ *площ.* $ABC.\cos\alpha$.

III) Положимъ, наконецъ, что треугольникъ ABC имѣетъ произвольное положеніе относительно плоскости MN (черт. 150). Если B_1, A_1 и C_1 — основанія перпендикуляровъ BB_1, AA_1 CC_1, опущенныхъ изъ вершинъ B, A и C треугольника ABC на плоскость MN, то треугольникъ $B_1A_1C_1$ называется проекціей треугольника BAC на плоскость MN. Изъ трехъ вершинъ треугольника ABC пусть B — ближайшая къ плоскости MN. Пусть плоскость PQ, проведенная чрезъ B



Черт. 150.

параллельно плоскости MN, встрѣчаетъ линіи CC_1 и AA_1 въ точкахъ C_{11} и A_{11}. Очевидно, что треугольникъ $BA_{11}C_{11}$ есть проекція треугольника ABC на плоскость PQ и что онъ равенъ треугольнику $A_1B_1C_1$. Означивъ чрезъ α уголъ между плоскостями MN и BAC (а слѣдовательно и между плоскостями PQ и BAC) и основываясь на разсмотрѣнномъ въ предыдущемъ случаѣ, заключаемъ, что *площ.* $BA_{11}C_{11}$ = *площ.* $BAC . \cos\alpha$, а слѣдовательно и *площ.* $B_1A_1C_1$ = *площ.* $BA_{11}C_{11}$ = *площ.* $BAC . \cos\alpha$.

Теорема XII. **Площадь проекціи многоугольника на нѣкоторую плоскость равна произведенію площади его на косинусъ угла, образуемаго плоскостью этого многоугольника съ плоскостью проекціи.**

Доказательство. Означимъ чрезъ S площадь многоугольника, чрезъ Q — площадь его проекціи на плоскость MN, чрезъ α — уголъ между плоскостью MN и плоскостью многоугольника, чрезъ $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ — площади тѣхъ треугольниковъ, на которые данный многоугольникъ раздѣляется діагоналями, проведенными изъ одной и той же вершины его, чрезъ $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ — площади проекцій этихъ треугольниковъ на плоскость MN. На основаніи предыдущей теоремы имѣемъ:

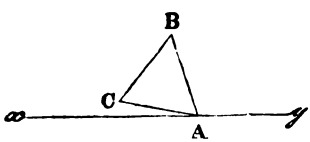
$q_1 = s_1 . \cos\alpha$; $q_2 = s_2 . \cos\alpha$; $q_3 = s_3 . \cos\alpha$; . . . .; $q_n = s_n . \cos\alpha$.

Сложеніе этихъ равенствъ даетъ:

$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) \cos\alpha$ или $Q = S\cos\alpha$.

Съ цѣлью примѣненія вышеизложенныхъ теоремъ рѣшить слѣдующія задачи.

843. Опредѣлить объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ равносторонняго треугольника ABC (черт. 151) около прямой xy, проходящей чрезъ вершину A и образующей со стороною AC уголъ $CAx = 18^\circ$. Сторона треугольника $= a = 7{,}35$ метр.



Черт. 151.

(*Замѣчаніе.* См. теорему V).

Отв. $\frac{1}{2}\pi a^3 . \cos 42^0 = 463{,}51$ куб. метр.

844. Даны длины трехъ сторонъ треугольника ABC: BC = 824 дюйм., AB = 635 дюйм. и AC = 429 дюйм., а также уголъ BEA, подъ которымъ продолженіе стороны BC пересѣкаетъ линію xy, проходящую чрезъ вершину A треугольника и не пересѣкающую его сторонъ: $\angle BEA = 24^{\circ}25'56''$ (см. черт. 141). Опредѣлить объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ треугольника ABC около оси xy.

Отв. 197800000 куб. д. (*Замѣчаніе.* См. теорему V).

845. Въ кругѣ радіуса R проведена хорда на разстояніи m отъ его центра; соотвѣтствующій ей центральный уголъ $= \alpha$. Зная, что объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ этого круга около лежащей въ его плоскости прямой xy, не пересѣкающей круга, равенъ V, — опредѣлить разстояніе центра круга отъ оси вращенія xy. (*Указаніе.* См. замѣчаніе къ теоремѣ VII).

Отв. $\frac{V}{2}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\pi m}\right)^2$.

846. Въ правильный n-угольникъ, площадь котораго $= K$, вписанъ кругъ. Прямая xy, лежащая въ плоскости этого круга и не пересѣкающая его, отстоитъ отъ центра круга на разстояніе, равное сторонѣ такого ромба, острый уголъ котораго $= 30^{\circ}$, а площадь $= 2a^2$. Опредѣлить: 1) поверхность и 2) объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ упомянутаго круга около прямой xy. (*Указаніе.* См. замѣчанія къ теоремамъ III и VII).

Отв. 1) $8\pi^2 a\sqrt{\frac{K}{n}\cdot\operatorname{cotg}\frac{180^{\circ}}{n}}$; 2) $\frac{4\pi^2 a K}{n}\operatorname{cotg}\frac{180^{\circ}}{n}$.

847. Въ кругѣ проведены діаметръ AB и хорда AC, проходящая чрезъ конецъ A діаметра и раздѣляющая кругъ на два сегмента, изъ которыхъ меньшій есть AMC. Какую величину долженъ имѣть уголъ CAB, составляемый этою хордою съ діаметромъ AB, для того, чтобы объемъ тѣла, производимаго вращеніемъ кругового сегмента AMC около діаметра AB, равнялся $\frac{9}{16}$ объема шара, производимаго вращеніемъ полукруга AMB около того же діаметра?

Отв. 30°. (*Замѣчаніе.* См. теорему IX).

848. Площадь проекціи нѣкотораго треугольника на нѣкоторую плоскость составляетъ $\frac{1}{n}$ долю площади треугольника. Опредѣлить уголъ x, составляемый плоскостью треугольника съ плоскостью проекціи. *Отв.* $\cos x = 1 : n$.

849. Неравносторонній треугольникъ, площадь котораго $=S$, проектируется на нѣкоторую плоскость въ видѣ равносторонняго треугольника, имѣющаго сторону $=a$. Опредѣлить уголъ x, составляемый плоскостью упомянутаго неравносторонняго треугольника съ плоскостью проекціи.

Отв. $\cos x = \frac{a^2\sqrt{3}}{4S}$.

850. Опредѣлить величину каждой изъ равныхъ сторонъ равнобедреннаго треугольника, у котораго третья сторона, равная a, параллельна той плоскости, на которую проектируется этотъ равнобедренный треугольникъ. Площадь проекціи упомянутаго треугольника $=S$, а уголъ, составляемый плоскостью его и плоскостью проекціи, $=\alpha$.

Отв. $\frac{\sqrt{16S^2 + a^4\cos\alpha}}{2a\cos\alpha}$.

851. Квадратъ, сторона котораго $=a$, проектируется на нѣкоторую плоскость въ видѣ ромба, у котораго сторона $=b$, а острый уголъ $=\gamma$. Опредѣлить уголъ x, составляемый плоскостью квадрата съ плоскостью проекціи.

Отв. $\cos x = \frac{b^2\sin\gamma}{a^2}$.

852. Правильный n-угольникъ, сторона котораго $=a$, проектируется на нѣкоторую плоскость, составляющую съ плоскостью многоугольника уголъ $=\alpha$. Опредѣлить площадь проекціи.

Отв. $\frac{na^2}{4}\cdot\operatorname{cotg}\frac{180^0}{n}\cdot\cos\alpha$.

853. Площадь нижняго основанія правильной n-угольной пирамиды $=a$, площадь верхняго ея основанія $=b$ (при чемъ $a > b$); полная поверхность пирамиды $=S$. Опредѣлить уголъ x, подъ которымъ каждая изъ боковыхъ сторонъ пирамиды наклонена къ плоскости нижняго основанія.

Отв. $\cos x = \frac{a-b}{S-(a+b)}$.

III. Списокъ задачъ, служившихъ геометрическими темами на испытаніяхъ зрѣлости во всѣхъ учебныхъ округахъ Россіи *).

Петербургскій учебный округъ.

854. Найти высоту конуса (съ приближеніемъ до 0,01), у котораго радіусъ основанія равенъ 21 футу, а объемъ равенъ объему шара, поверхность котораго равна $5028^4/_7$ квадратн. фута. **1873 г.**

(Изъ отчета Олонецкой гимназіи за $18^{72}/_{73}$ уч. г.).

855. *Основная.* Вычислить площадь сектора круга, заключеннаго между двумя радіусами, составляющими уголъ въ $4^0 2'$; величина радіуса $=2$ вершкамъ. **1874 г.**

856. *Запасная.* Въ равностороннемъ треугольникѣ высота $=\frac{5}{2}\sqrt{3}$ вершк. Вычислить объемъ конуса, боковая поверхность котораго $=$ удвоенной площади упомянутаго треугольника, а производящая $=$ высотѣ треугольника.

857. *Основная.* Сторона правильнаго шестиугольника $=6$ аршин. Вычислить объемъ (а если кто пожелаетъ, то и боковую поверхность) такого конуса, котораго основаніе равномѣрно шестиугольнику, а высота равна сторонѣ квадрата, тоже равномѣрнаго съ тѣмъ же шестиугольникомъ. (Вычисленіе производить приблизительно до 0,01). **1875 г.**

588. *Запасная.* Параллельныя стороны трапеціи равны: одна 11 дюйм., а другая 5 дюйм., а непараллельныя равны:

---

*) Перепечатывая эти темы изъ отчетовъ нѣкоторыхъ гимназій, а также изъ журнала М. Н. П. почти совершенно въ томъ видѣ, въ какомъ онѣ были тамъ опубликованы, слагаемъ съ себя отвѣтственность въ неудачномъ формулированіи нѣкоторыхъ изъ этихъ темъ. Немногочисленныя задачи на построеніе, встрѣчающіяся въ этомъ спискѣ, приводимъ лишь для полноты его. (См. *Журналъ М. Н. П.* за августъ 1875 г., сент. 1876, сент. 1877, дек. 1878, дек. 1879, янв. 1881, май 1882, ноябрь и дек. 1885, янв. и дек. 1887, мартъ 1888, іюнь и дек. 1891 и іюль 1892 г., а также *отчеты* различныхъ гимназій за многіе годы). Въ тѣхъ изъ помѣщенныхъ здѣсь темъ, гдѣ говорится о цилиндрѣ и конусѣ, нужно разумѣть исключительно прямой круглый цилиндръ и прямой круглый конусъ.

одна 4 дюйм., а другая 3 дюйм. Найти площадь трапеціи (приблизительно до 0,01).

1876 г. **859**. *Основная*. Боковая поверхность конуса равна 25,83 кв. дюйма, а радіусъ его основанія = 1,8 дюйма. Опредѣлить объемъ этого конуса.

Запасная помѣщена въ отд. IX этого сборника подъ № **375**.

1877 г. *Темою* въ 1877 году служила запасная задача 1876 года (помѣщена въ этомъ сборникѣ подъ № **375**).

860. *Основная*. Данъ конусъ, котораго образующая равна высотѣ трапеціи, имѣющей площадь въ 20 квадратн. дюймовъ, одну изъ параллельныхъ сторонъ въ 4,7 дюйм., а другую — въ 3,3 дюйма; радіусъ основанія конуса есть высота прямой пирамиды, которой ребро = 3,606 дюйма, а основаніе — правильный шестиугольникъ, со сторонами въ 2 дюйма каждая. Въ этотъ конусъ вписанъ шаръ (радіусъ котораго долженъ быть принятъ = 1,5 дюйм.). Опредѣлить отношеніе поверхностей и отношеніе объемовъ вписаннаго шара и даннаго конуса.

1879 г. **861**. *Основная*. Если конусъ пересѣчь плоскостью, проходящей чрезъ его ось, то отъ сѣченія получится равнобедренный треугольникъ, имѣющій периметръ, равный 160 дюйм., а высоту въ 40 дюйм. Опредѣлить высоту цилиндра, имѣющаго тотъ же радіусъ основанія, что и данный конусъ, и равновеликаго по объему съ шаромъ, вписаннымъ въ тотъ же конусъ.

862. *Запасная*. Опредѣлить объемъ цилиндра, вписаннаго въ шаръ. Радіусъ шара = 2,8125 дюйм.; радіусъ вписаннаго цилиндра = 1,6875 дюйм.

1880 г. **863**. *Основная*. Радіусъ основанія цилиндра равенъ $3\frac{1}{3}$ фута, его высота = 9 фут.; радіусъ основанія конуса = 5 фут., его образующая = 13 фут. Найти: 1) радіусъ шара, объемъ котораго равенъ суммѣ объемовъ данныхъ цилиндра и конуса, 2) объемъ правильной призмы, описанной около даннаго цилиндра и имѣющей основаніемъ правильный шестиугольникъ, и 3) объемъ прямой квадратной пирамиды, вписанной въ данный конусъ.

864. *Запасная*. Окружность верхняго (меньшаго) основанія усѣченнаго конуса равна 5,3 фут., окружность нижняго (большаго) основанія = 15,21 фут., а высота конуса = 10 ф. Изъ этого конуса вырѣзана прямая призма, у которой основаніе есть квадратъ, вписанный въ окружность верхняго основанія усѣченнаго конуса, а высота равна также 10 фут. Найти объемъ оставшейся части конуса.

865. Было предложено рѣшить **426** задачу сборника Минина и, кромѣ того, по полученной формулѣ сдѣлать вычисленіе, полагая $a = 6$ фут. **1881 г.**

866. *Основная*. Боковая поверхность конуса равна 60 кв. арш., а полная его поверхность равна площади такого треугольника, стороны котораго суть: 13 арш., 14 арш. и 15 арш. Опредѣлить радіусъ шара, объемъ котораго равенъ объему этого конуса. **1882 г.**

867. *Запасная*. Діаметръ основанія конуса равняется меньшей сторонѣ прямоугольника, периметръ котораго = 68 дюйм., а площадь = 280 кв. дюйм.; поверхность этого конуса равномѣрна боковой поверхности цилиндра, котораго высота равняется бо́льшей изъ параллельныхъ сторонъ нѣкоторой трапеціи, а діаметръ основанія — меньшей. Найти образующую конуса, зная что площадь упомянутой трапеціи содержитъ въ себѣ 414,72 кв. дюйм., высота трапеціи = 23,04 д., одна изъ непараллельныхъ сторонъ = 28,8 дюйм., а другая = 23,2 дюйм.

868. *Основная*. Въ шаръ вписанъ конусъ, объемъ котораго равенъ объему шарового сегмента, имѣющаго съ нимъ общее основаніе. Найти высоту сегмента, предполагая радіусъ шара извѣстнымъ. Для примѣра взять $r = 3{,}12838$. **1883 г.**

869. *Запасная*. Шаровой секторъ по объему равномѣренъ усѣченному конусу, у котораго радіусы основаній равны 4 и 2 вершк., а высота $8\,{}^4/_7$ дюйм. Опредѣлить высоту соотвѣтствующаго этому сектору сегмента, зная, что радіусъ шара, которому онъ принадлежитъ, заключаетъ въ себѣ столько вершковъ, сколько сторонъ имѣетъ многоугольникъ, сумма внутреннихъ угловъ котораго = 540^0.

870. *Основная*. Боковая поверхность конуса равна 60 квадр. арш., а полная его поверхность равна площади такого треугольника, стороны котораго суть 13 арш., 14 арш. и 15 арш. Опредѣлить радіусъ шара, объемъ котораго равенъ объему этого конуса. **1884 г.**

871. *Запасная*. Діаметръ основанія конуса равняется меньшей сторонѣ прямоугольника, периметръ котораго = 68 дюйм., а площадь $=280$ кв. дюйм.; поверхность этого конуса равномѣрна боковой поверхности цилиндра, котораго высота равняется бо́льшей изъ параллельныхъ сторонъ нѣкоторой трапеціи, а діаметръ основанія — меньшей. Найти образующую конуса, зная, что площадь упомянутой трапеціи содержитъ въ себѣ 414,72 кв. дюйм., высота трап. равна 23,04 дюйм., одна изъ параллельныхъ сторонъ $=28{,}8$ дюйм., а другая $=23{,}2$ дюйм.

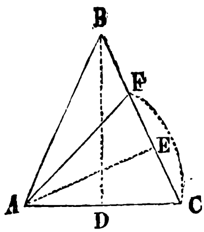
1885 г. **872**. Въ шаръ, радіусъ котораго равенъ 6 дюйм., вписано тѣло, происшедшее отъ обращенія прямоугольнаго треугольника около гипотенузы, совмѣщающейся съ діаметромъ шара. Опредѣлить (точность вычисленія до 0,01) объемъ этого тѣла, полагая меньшій катетъ равнымъ радіусу. (Число $\pi=\frac{22}{7}$).

1886 г. **873**. Ось конуса служитъ діаметромъ шара, который касается основанія конуса. Вычислить объемъ тѣла, общаго шару и конусу, по данному радіусу шара $R=3$ дюйм. и радіусу основанія конуса $r=2$ дюйм. (принимая $\pi=3{,}14$).

1887 г. **874**. Геометрическою темою въ 1887 г. была выбрана **472**-я задача изъ сборника Минина, при чемъ требовалось отвѣтить только на третій вопросъ этой задачи (опредѣленіе объема); для вычисленія дано было при этомъ, что $AD=2a=10$ дюйм., $R=3$ дюйм. и принято $\pi=3{,}1416$.

(См. отчетъ Олонецкой гимназіи 18$^{86}/_{87}$ г.).

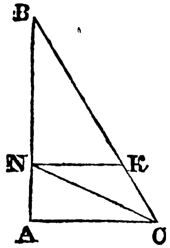
1888 г. **875**. Изъ конца A (черт. 152) основанія AC равнобедреннаго треугольника ABC, въ которомъ высота BD, опущенная на это основаніе, въ $m=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ разъ болѣе высоты $AE=h=7$ (опущенной на боковую сторону BC), описана радіусомъ, равнымъ AC, дуга, которая пересѣкла стор ну BC въ точкѣ F. Соединивъ прямою точки A и F, вычислить площадь треугольника AFC.



Черт. 152.

(Изъ отчета Царскосельской гимназіи за 18$^{87}/_{88}$ уч. г.).

1889 г. **876**. Прямая, дѣлящая пополамъ острый уголъ C прямоугольнаго треугольника ABC (черт. 153), дѣлитъ противолежащій катетъ AB въ точкѣ N на части: $AN=m=6$ дюйм., $NB=n=10$ дюйм. Проведя изъ N прямую, параллельную катету AC, до пересѣченія съ гипотенузою BC въ точкѣ K, получимъ трапецію $ANKC$. Опредѣлить площадь этой трапеціи. (Рѣшеніе этой задачи основывается на свойствѣ равнодѣлящей угла треугольника, на свойствѣ двухъ параллельныхъ прямыхъ, пересѣкающихъ стороны угла, на зависимости между сторонами треугольника и на вычисленіи мѣры площади трапеціи).



Черт. 153.

Основная. См. задачу **561**-ую этого сборника. **1890 г**
Запасная. См. задачу **558**-ую этого сборника.
Основная. См. задачу **559**-ую этого сборника. **1891 г**
Запасная. См. задачу **545**-ую этого сборника.

Московскій учебный округъ.

877. *Основная.* Сторона десятиугольнаго основанія правильной пирамиды равна 0,93 арш., апоѳема пирамиды $=$ $25\frac{5}{8}$ арш. Опредѣлить поверхность и объемъ описаннаго около этой пирамиды конуса, усѣченнаго параллельно основанію; при этомъ дано, что сѣченіе сдѣлано на разстояніи $\frac{7}{9}$ высоты отъ основанія. **1873 г.**

878. *Запасная.* Найти радіусъ шара, объемъ коего равенъ объему тетраэдра, имѣющаго ребро въ 1,14 метра длиною.

Основная. См. № **189** этого сборника. **1874 г.**

879. *Запасная.* Разность между длиною діагонали и длиною стороны квадрата $=6$ аршинамъ. Узнать длину стороны квадрата и радіуса описанной около квадрата окружности (ограничиваясь тремя десятичными знаками).

Основная. См. № **453** въ X отд. этого сборника. **1875 г.**

880. *Запасная.* Въ треугольникѣ ABC (см. чертежъ 116) сторона $AB=1$. Найти на ней такую точку D, чтобы линія DF, проведенная параллельно основанію AC, раздѣлила площадь треугольника на двѣ равновеликія части.

Основная. См. № **471** въ X отд. этого сборника. **1876 г.**

881. *Запасная.* Сторона равносторонняго треугольника, вписаннаго въ кругъ, равна 6 дюймамъ. Опредѣлить площадь сегмента, ею отсѣкаемаго.

Основная. См. задачу **464**-ую этого сборника. **1877 г.**

882. Пирамида, коей высота$=h$, а объемъ$=V$, пересѣчена на разстояніи $^1/_8$ высоты (считая отъ основанія) плоскостью, параллельною основанію. Опредѣлить площадь сѣченія и объемы обѣихъ частей, на которыя раздѣлилась пирамида.

Запасная. Запасною темою была выбрана **486**-я задача изъ сборника Минина.

1878 г. **883**. Вычислить съ точностью двухъ десятичныхъ знаковъ объемъ конуса, котораго боковая поверхность, развернутая на плоскости, представляетъ круговой секторъ съ радіусомъ въ 15 дюймовъ и центральнымъ угломъ въ 120°. (Принимать $\pi=3{,}14$).

Запасная. Запасною темою была выбрана задача, составленная В. Мининымъ и помѣщенная въ этомъ сборникѣ (стр. 35) подъ № **191**.

1879 г. *Основная.* См. **412**-ую задачу этого сборника.

884. *Запасная.* Площадь равносторонняго треугольника, вписаннаго въ кругъ, равняется m^2. Опредѣлить радіусъ круга.

1880 г. *Основная.* См. № **509** этого сборника.

885. *Запасная.* Въ кругъ радіуса R вписанъ правильный шестиугольникъ, площадь котораго равняется боковой поверхности прямой пирамиды, имѣющей въ основаніи квадратъ, коего сторона$=a$. Опредѣлить объемъ пирамиды.

1881 г. *Основная.* См. № **463** этого сборника.

886. *Запасная.* Найти радіусъ шара, равновеликаго объему конуса, у котораго радіусъ основанія равенъ 6 футамъ, а образующая равна 10 фут.

1882 г. **887**. *Основная.* Въ пустомъ конусѣ, обращенномъ вершиною внизъ, остановился шаръ. Отношеніе объемовъ этихъ двухъ геометрическихъ тѣлъ$=m$; отношеніе радіуса основанія конуса къ радіусу шара$=n$; высота конуса$=H$. Вычислить, на какомъ разстояніи, считая отъ вершины конуса, будетъ находиться центръ шара.

Отв. $\frac{H}{4mn}\sqrt{16m^2+n^6}$.

888. *Запасная.* Изъ точки, лежащей на продолженіи діаметра окружности, коей радіусъ$=r$, проведена къ окружности касательная, длина коей$=l$, и изъ точки касанія опущенъ на діаметръ перпендикуляръ. Узнать длину этого перпендикуляра и разстояніе его подошвы отъ одного изъ концовъ діаметра.

Основная. См. задачу **504**-ую этого сборника. **1883 г.**

Запасною темою была выбрана задача **429**-я этого сборника.

889. *Основная.* Площадь правильнаго треугольника, описаннаго около окружности, равна 243 кв. дюймамъ. Узнать сторону вписаннаго въ ту же окружность правильнаго многоугольника, каждый изъ внутреннихъ угловъ коего $= 135^0$. (Ограничиваясь однимъ десятичнымъ знакомъ). *Отв.* 5,2 дюйм. **1884 г.**

890. *Запасная.* Три концентрическихъ шара имѣютъ такое свойство, что поверхность бóльшаго шара, радіусъ коего $= R$, равна суммѣ поверхностей двухъ остальныхъ, а объемъ средняго шара есть средній пропорціональный между объемами двухъ другихъ. Узнать отношеніе между объемами наибольшаго и наименьшаго шара.

Основная. См. зад. **489**-ую этого сборника.

891. *Запасная.* Боковая поверхность правильной четыреугольной пирамиды болѣе площади основанія пирамиды на 16,2 кв. фута. Высота пирамиды $= 7,3$ фут. Найти объемъ этой пирамиды. **1885 г.**

892. Толщина стѣнокъ цилиндрической трубы $= 1$. Отношеніе внѣшней боковой поверхности трубы къ ея внутренней боковой поверхности равно отношенію площади треугольника, коего стороны суть 25, 24 и 7, къ площади трапеціи, которой высота 4, а параллельныя стороны суть 17 и 11. Высота трубы $=$ хордѣ круга радіуса 5, находящейся отъ центра на разстояніи $= 4$. Полная поверхность трубы (т.-е. сумма боковыхъ поверхностей, внутренней и внѣшней, и площадей обоихъ концентрическихъ колецъ) равна боковой поверхности конуса, площадь основанія котораго $= 154$. Опредѣлить образующую этого конуса, полагая $\pi = \frac{22}{7}$. *Отв.* 10. **1886 г.**

893. *Основная.* Прямоугольный параллелепипедъ имѣетъ въ основаніи квадратъ. Боковая поверхность параллелепипеда $=$ боковой поверхности конуса, радіусъ основанія котораго есть r, а образующая есть l, при чемъ l равняется **1887 г.**

гипотенузѣ треугольника, имѣющаго площадь$=24$ квадратн. дюйм. и одинъ изъ катетовъ$=8$ дюйм.; $r=$сторонѣ квадрата, который описанъ около круга, имѣющаго площадь въ $38^1/_2$ кв. дюйм. Полная поверхность параллелепипеда относится къ боковой его поверхности такъ, какъ площадь трапеціи, имѣющей высоту въ 27 дюйм., а среднюю линію равную касательной, проведенной къ окружности радіуса въ 21 дюйм. изъ точки, находящейся въ разст. 35 дюйм. отъ центра этой окружности, относится къ поверхности шара радіуса въ 7 дюймовъ. Опредѣлить ребро параллелепипеда $\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$.

Отв. Сторона основанія$=5$ дюйм.; каждое боковое ребро$=11$ д.

894. *Запасная.* Радіусъ шара$=15''$. По одной и той же сторонѣ центра проведены два параллельныя сѣченія, изъ коихъ бо́льшее отстоитъ отъ центра на $4''$. Поверхность шарового пояса$=753$ кв. дюйм. Вычислить радіусъ меньшаго сѣченія (ограничиваясь одною десятичною цифрою). [$\pi=3,1$].

1888 г. *Основная.* См. № **514** этого сборника.

895. *Запасная.* Въ конусѣ, усѣченномъ параллельно основанію, высота$=16$ дюйм., образующая$=20$ дюйм. Боковая поверхность этого конуса равновелика поверхности шара, радіусъ коего$=15$ дюйм. Опредѣлить радіусы основаній конуса.

1889 г. *Основная.* См. № **522** этого сборника.

896. *Запасная.* Плоскость, пересѣкающая шаръ радіуса R, раздѣляетъ его поверхность въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Найти разстояніе этой плоскости отъ центра шара.

1890 г. *Основная.* См. № **511** этого сборника.

897. *Запасная.* Въ шарѣ радіуса r проведены два параллельныхъ сѣченія, изъ коихъ первое отстоитъ отъ центра шара на длину d. Поверхность шарового пояса, заключеннаго между этими сѣченіями, равна площади круга радіуса b. Найти объемъ конуса, имѣющаго своимъ основаніемъ второе изъ вышеуказанныхъ параллельныхъ сѣченій, а вершину въ центрѣ шара.

1891 г. См. задачу **551**-ую этого сборника.

1892 г. См. задачу **756**-ую этого сборника.

1893 г. См. задачу **750**-ую этого сборника.

См. задачу **787**-ую этого сборника. **1896 г.**
См. задачу **674**-ую этого сборника. **1896 г.**
См. задачу **803**-ью этого сборника. **1897 г.**
См. задачу **804**-ую этого сборника. **1898 г.**

Казанскій округъ.

898. Сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержитъ вписанный уголъ, вершина котораго на окружности круга съ радіусомъ въ 2 фут., если бока этого угла стягиваются дугою, равною по длинѣ 1,5 ф.? ($\pi = {}^{22}/_7$). **1874 г.**

899. *Основная.* Въ трапеціи $ABCD$ основаніе $BC = 18$ фут., углы, прилежащіе къ основанію, равны каждый 45^0, а непараллельныя стороны равны каждая 7 футамъ. Опредѣлить площадь этой трапеціи и площадь треугольника, образуемаго основаніемъ BC съ продолженными сторонами AB и CD. **1875 г.**

900. *Запасная.* Опредѣлить площадь равносторонняго треугольника по разности $d = 2$ футамъ между стороною и высотою.

901. *Основная.* Бокъ равнобедреннаго треугольника равенъ 7,5 фута. Вычислить площадь этого треугольника, зная, что его периметръ равенъ периметру квадрата, котораго діагональ содержитъ 8,485 фута. **1876 г.**

902. *Запасная.* Сторона основанія правильной шестиугольной пирамиды $= 1,5$ фут., а боковое ребро пирамиды $= 3,5$ фута. Опредѣлить объемъ пирамиды.

903. *Основная.* Усѣченная пирамида, высота которой $= 12$ фут., разсѣчена плоскостью, проходящею чрезъ средину высоты параллельно основанію. Найти величину площади сѣченія, зная, что площадь нижняго основанія усѣч. пирам. $= 72$ кв. фут., а площадь верхняго $= 32$ квадр. фут. *Отв.* 50 кв. ф. **1878 г.**

904. *Запасная.* Чрезъ точку P, данную внутри круга C, провести хорду данной длины.

905. (Задача для учениковъ 2-й Казанской гимназіи). На сторонѣ квадрата, котораго бокъ вмѣстѣ съ діагональю содержитъ 24,14 фута, построенъ правильный шестиугольникъ, около котораго описанъ кругъ. Опредѣлить площадь сегмента, отсѣченнаго стороною квадрата и лежащаго внутри квадрата.

1879 г. (Задача для учениковъ 1-й Казанской гимназіи). Построить квадратъ, равномѣрный данному правильному шестиугольнику. (Задача эта заимствована изъ сборника Минина. См. № **626**).

Темою для прочихъ гимназій Казанскаго округа была избрана задача, составленная В. Мининымъ и помѣщенная въ этомъ сборникѣ подъ № **159** (см. стр. 30).

1889 г. Въ 1889 г. темою служила **371**-ая задача этого сборника.

1890 г. **906**. Нижнимъ основаніемъ усѣченной треугольной пирамиды служитъ прямоугольный треугольникъ, у котораго гипотенуза $=6$ дюймамъ, а прилежащій къ ней уголъ $=30^\circ$. Высота усѣченной пирамиды $=1\,{}^1\!/_2$ дюйм.; меньшая сторона верхняго основанія $=2$ дюймамъ. Опредѣлить объемъ этой усѣченной пирамиды.

1891 г. **907**. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, происходящаго отъ обращенія прямоугольнаго треугольника около его гипотенузы. Дано, что катеты треугольника равны 5 и 12 дюйм.

Замѣчаніе. Сравн. **435**-ую задачу этого сборника.

Харьковскій округъ.

1873 г. **908**. Опредѣлить высоту цилиндра, у котораго объемъ $=$ 486 куб. фут., а радіусъ основанія равенъ 8 футамъ.

(Изъ отчета Новочеркасской гимназіи за $18\,{}^{72}\!/_{73}$ уч. г.).

1874 г. **909**. *Основная*. Пирамида имѣетъ высоту $H=10$ метрамъ, а въ основаніи правильный шестиугольникъ, у котораго сторона $a=5$ метр. Пирамида эта разсѣчена на двѣ части плоскостью, параллельною основанію, на разстояніи $b=7$ метрамъ отъ ея вершины. Опредѣлить объемъ между основаніемъ пирамиды и плоскостью.

Запасная. Помѣщена въ X отд. этого сборника подъ № **477**.

1875 г. **910**. *Основная*. Найти окружность основанія цилиндра, котораго высота $h=11$ дюйм., а объемъ $=$ объему куба, имѣющаго ребро длиною въ 64 дюйма.

911. *Запасная*. Дуга большого круга, соотвѣтствующая шаровому сегменту, равна 90°, діаметръ основанія сегмента $=4$ фут. Найти поверхность и объемъ этого сегмента.

1876 г. **912**. *Основная*. Въ параллелограммѣ даны: одна сторона $=b$ и двѣ діагонали D и d; найти его периметръ, полагая, что $b=58$ фут., $D=89$ фут. и $d=52$ футамъ.

913. *Запасная*. Найти объемъ шарового сегмента, у котораго діаметръ основанія $=68$ линіямъ, а высота $=21$ линіи.

Основная. Основною темою служила задача слишкомъ простая для того, чтобы помѣщать ее здѣсь; кромѣ того, эта задача заключала въ себѣ еще ненужное условіе. **1877 г.**

914. *Запасная*. Пирамида, высота которой $=h$, раздѣлена на три части въ отношеніи $m:n:p$ плоскостями, параллельными основанію данной пирамиды. Опредѣлить разстоянія этихъ плоскостей отъ вершины пирамиды, полагая $m=2$, $n=3$, $p=4$ и $h=24$ метрамъ.

915. *Основная*. Построить треугольникъ по двумъ даннымъ его сторонамъ и по данной линіи, раздѣляющей пополамъ уголъ между данными сторонами и оканчивающейся на противолежащей ему сторонѣ. Вывести условія возможности этого построенія. **1878 г.**

916. *Запасная*. Построить равнобедренный прямоугольный треугольникъ по данной суммѣ его гипотенузы и катета.

917. *Основная*. Даны два круга одного и того же радіуса r. Разстояніе между ихъ центрами равно d. Вычислить площадь ромба, образуемаго касательными, проведенными къ каждому кругу изъ центра другого. **1879 г.**

918. *Запасная*. Къ данному кругу радіуса $CA=0{,}035$ фут. проведена касательная AB изъ точки B, которой разстояніе отъ центра есть $BC=0{,}125$ фут. При вращеніи фигуры около линіи BC окружность круга описываетъ шаровую поверхность, касательная AB — боков. поверхн. конуса, которому основаніемъ служитъ кругъ съ радіусомъ, равнымъ перпендикуляру AD, опущенному на линію BC изъ точки A. Вычислить объемъ и поверхность этого конуса.

919. Изъ точки, данной внѣ окружности, провести сѣкущую, опредѣляющую хорду, равную радіусу окружности. Опредѣлить внѣшнюю часть сѣкущей построеніемъ или вычисленіемъ, полагая радіусъ окружности $R=1$, а разстояніе ея центра до данной точки $d=2$. (Изъ отчета Тамбовской гимназіи за $18^{79}/_{80}$ г.). **1880 г.**

920. Треугольникъ съ данными сторонами a, b и c пересѣчь прямою такъ, чтобы она раздѣлила пополамъ какъ периметръ треугольника, такъ и площадь его. **1881 г.**

(Изъ отчета Тамбовской гимназіи за $18^{80}/_{81}$ г.).

1882 г. **921**. *Основная*. Даны двѣ окружности и на одной изъ нихъ точка M, чрезъ которую нужно провести третью окружность, касательную къ двумъ даннымъ.

922. *Запасная*. Даны три стороны a, b и c треугольника, служащаго основаніемъ пирамиды, и общая длина d каждаго изъ ея боковыхъ реберъ. Найти общія формулы высоты и объема пирамиды и вычислить этотъ объемъ при $a=2$, $b=3$, $c=4$ и $d=5$.

1883 г. **923**. *Основная*. По данному основанію a и противолежащему этому основанію углу α построить треугольникъ, равновеликій суммѣ двухъ данныхъ квадратовъ.

924. *Запасная*. Опредѣлить радіусъ шара, объемъ котораго равенъ объему тѣла, происходящаго отъ вращенія треугольника около своего основанія, длина котораго равна половинѣ соотвѣтствующей высоты треугольника.

1884 г. **925**. *Основная*. Построить треугольникъ по даннымъ: радіусу круга, вписаннаго въ треугольникъ, углу A и линіи, раздѣляющей этотъ уголъ пополамъ.

926. *Запасная*. Чрезъ точку A пересѣченія двухъ данныхъ окружностей O и O' провести сѣкущую BAC такъ, чтобы сумма хордъ BA и AC была равна данной прямой S.

1885 г. **927**. *Основная*. Опредѣлить радіусъ круга, зная, что разность между площадью правильнаго вписаннаго въ него восьмиугольника и площадью правильнаго вписаннаго шестиугольника равна 1 квадр. метру.

928. *Запасная*. Около круга радіуса r описанъ правильный шестиугольникъ; опредѣлить отношеніе между поверхностями и объемами тѣлъ, описанныхъ кругомъ и шестиугольникомъ при вращеніи ихъ вокругъ линіи, соединяющей точки касанія противоположныхъ сторонъ шестиугольника.

1886 г. **929**. Построить треугольникъ, зная высоту треугольника h_a, уголъ при вершинѣ A и отношеніе $m:n$ отрѣзковъ, на которые основаніе a треугольника дѣлится высотою h_a.

(Изъ отчета Елатомской гимназіи за 188$^5/_6$ г.).

1887 г. **930**. На плоскости начерчены окружность O и прямая AB. Требуется на этой же плоскости даннымъ радіусомъ r начертить другую окружность такъ, чтобы центръ ея лежалъ на данной прямой AB, а линія, соединяющая точки пересѣченія этихъ двухъ окружностей, была бы данной длины c.

(Изъ отчета Елатомской гимназіи за 188 $^6/_7$ г.).

931. *Основная*. Даны двѣ концентрическія окружности и точка между ними; требуется начертить окружность, проходящую чрезъ данную точку и касательную къ обѣимъ даннымъ окружностямъ. (Изъ отчета Тамбовской гимназіи за 188 $^7/_8$ г.). **1888 г.**

932. *Запасная*. Даны: одинъ изъ угловъ треугольника, прямая, соединяющая вершину другого угла со срединою противолежащей стороны, и высота, проведенная изъ вершины третьяго угла. Построить треугольникъ.

(Изъ отчета Тамбовской гимназіи за 188 $^7/_8$ г.).

933. Около круга даннаго радіуса описать ромбъ, одна изъ діагоналей котораго вдвое болѣе другой, и опредѣлить площадь этого ромба. **1889 г.**

934. *Запасная*. Построить квадратъ, зная сумму его стороны и діагонали.

935—936. *Основныя*. 1) Четыреугольникъ $ABCD$ превратить въ равновеликій ему параллелограммъ съ основаніемъ AD. 2) Радіусы верхняго и нижняго основаній усѣченнаго конуса соотвѣтственно равны 3 и 7, а высота его равна радіусу верхняго основанія. Требуется вычислить боковую поверхность и объемъ полнаго конуса, принимая $\pi = {}^{22}/_7$. **1890 г.**

937—938. *Запасныя*. 1) Данный параллелограммъ превратить въ равновеликій ему ромбъ, имѣющій данную высоту. 2) Вычислить поверхность части шара радіуса r, видимой изъ точки, находящейся отъ шара на разстояніи d ($r = 15$, $d = 7$).

939. Въ секторъ круга, образуемый двумя перпендикулярными радіусами, вписать квадратъ такъ, чтобы двѣ его вершины лежали на окружности, а двѣ другія—на радіусахъ. Вычислить затѣмъ величины угловъ, подъ которыми всѣ стороны этого квадрата видны изъ центра круга. **1892 г.**

(Изъ отчета Тамбовской гимназіи за 189 $^1/_2$ г.).

940. Построить треугольникъ по основанію a, высотѣ h_a и одной изъ двухъ другихъ сторонъ b. Въ построенный по этимъ даннымъ треугольникъ вписать кругъ и вычислить радіусъ этого круга, полагая $a = 6$, $h_a = 8$ и $b = 10$. **1893 г.**

941. На окружности радіуса $r=2$ взята точка C, равноотстоящая отъ конца A діаметра AB и отъ касательной MN, проходящей чрезъ другой конецъ B того же діаметра. Требуется опредѣлить длину дуги AC.

(Изъ отчета Тамбовской гимназіи за 189³/₄ г.).

Одесскій округъ.

1874 г. **942**. *Основная*. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ, у которой высота = 5,4 дюйма, а діагональ основанія = 3,8 дюйма, проведена плоскость сѣченія параллельно основанію; опредѣлить объемъ усѣченной пирамиды, зная, что сторона сѣченія равна 1,6 дюйма.

943. *Запасная*. Конусъ, у котораго высота равна 5,4 фута, а радіусъ основанія равенъ 0,6 фута, разсѣченъ плоскостью, параллельною основанію въ разстояніи 2,4 фута отъ вершины. Опредѣлить кривую поверхность конуса.

1875 г. **944**. *Основная*. Вычислить боковую поверхность правильной четыреугольной пирамиды, у которой боковое ребро = 2,5 фута, а радіусъ круга, описаннаго около основанія, = 0,8 фута.

945. *Запасная*. Вычислить объемъ усѣченнаго параллельно основанію конуса, зная, что образующая его = 9 дюймамъ, окружность основанія = 13,2 дюйм., окружность сѣченія = 8,8 дюйм.

1876 г. **946**. *Основная*. Опредѣлить объемъ правильной десятиугольной пирамиды, у которой высота = 20 дюйм., а боковое ребро = 23,16 дюйм.

947. *Запасная*. Опредѣлить объемъ сферическаго сегмента, зная, что радіусъ шара (которому этотъ сегментъ принадлежитъ) = 8 дюйм. и что основаніе сегмента отстоитъ отъ центра шара на 2 дюйма.

Замѣчаніе. Темы Одесскаго округа за 1877 г. не опубликованы.

1878 г. **948**. Опредѣлить объемъ конуса, усѣченнаго плоскостью параллельною основанію, зная, что радіусъ основанія = 7 дюймамъ, высота усѣченнаго конуса = 18 дюймамъ, а образующая цѣлаго конуса = 23 дюймамъ.

1879 г. **949**. Радіусъ сѣченія шара плоскостью равенъ 9,6 дюйм., а радіусъ шара = 14,4 дюйма. Опредѣлить всю поверхность меньшей изъ двухъ частей шара, на которыя онъ раздѣленъ плоскостью.

950. Какъ велика разность между площадью круга, котораго радіусъ = 19,6 дюйма, и площадью вписаннаго въ немъ правильнаго восьмиугольника? **1880 г.**

951. Конусъ, высота котораго $4^3/_5$ фут., а радіусъ основанія = 1,4 фута, разсѣченъ плоскостью, параллельною основанію, въ разстояніи 2 фут. отъ основанія. Требуется опредѣлить кривую поверхность усѣченнаго конуса. **1881 г.**

Въ 1882 г. темою служила **471**-ая задача изъ геометрическаго задачника Минина. **1882 г.**

Въ 1883 году геометрической темою выбрана была **470**-ая задача изъ сборника Минина. **1883 г.**

952. Вычислить объемъ усѣченнаго конуса, зная, что длины радіусовъ основаній этого конуса суть 8 д. и 4 д., а боковая поверхность его равна суммѣ площадей обоихъ основаній. **1884 г.**

953. Въ конусъ, радіусъ основанія котораго = 7, а высота = 6, вписана пирамида съ квадратнымъ основаніемъ. Вычислить площадь боковой грани пирамиды. **1886 г.**

954. Даны два круга одного и того же радіуса r. Разстояніе между центрами равно d. Вычислить площадь ромба, образуемаго касательными, проведенными къ каждому кругу изъ центра другого, и опредѣлить условіе возможности вопроса. **1888 г.**

(Изъ отчета 2-й Кишиневск. гимн. за $188^7/_8$ г.).

955. Конусъ равновеликъ шару, коего поверхность равна 418 квадр. фут.; высота конуса равна діаметру шара. Вычислить боковую поверхность конуса. **1889 г.**

956. Объемъ шара, имѣющаго въ діаметрѣ 2,4 фута, равенъ объему конуса, имѣющаго діаметръ основанія, равный 1-му футу. Опредѣлить отношеніе боковой поверхности конуса къ поверхности шара. **1890 г.**

Кіевскій округъ.

957. Раздѣлить площадь круга, радіусъ котораго равняется 10 футамъ, концентрическими окружностями на три равныя части. (См. **267**-ую задачу этого сборника). **1874 г.**

(Изъ отчета Житомирской гимназіи за $18^{73}/_{74}$ уч. г.).

958. Опредѣлить объемъ правильной осьмиугольной призмы, описанной около цилиндра, радіусъ котораго = 15 вершкамъ, а высота = $3^1/_2$ сажени. **1875 г.**

959. Сторона правильнаго десятиугольника $= a$. Опредѣлить радіусы круговъ, — вписаннаго въ этотъ десятиугольникъ и описаннаго около него.

1876 г. **960**. Вычислить площадь основанія шарового сегмента, коего высота равняется 2,7 фута, а объемъ $=18$ фут. кубическимъ.

961. Даны: діаметръ цилиндра въ 16 дюйм. и высота его въ 8 фут. Опредѣлить объемъ пятисторонней призмы, около цилиндра описанной.

1877 г. **962**. Мѣдный шаръ (коего радіусъ равенъ 3 дюймамъ), имѣющій шарообразную концентрическую внутри пустоту, погружается до половины въ воду. Зная, что кубич. дюймъ воды вѣситъ 3,84 золотника и что плотность мѣди есть 8,9, найти радіусъ шарообразной пустоты.

963. Построить треугольникъ по данному основанію AB, суммѣ двухъ остальныхъ сторонъ и одному углу при основаніи.

1878 г. **964**. Извѣстно, что литръ, употребляемый для мѣры сыпучихъ тѣлъ, есть цилиндръ, коего діаметръ основанія равенъ высотѣ, а объемъ — кубическому дециметру. Найти эту высоту и радіусъ основанія.

965. Раздѣлить поверхность шара плоскостью, перпендикулярною къ какому-нибудь діаметру, на такія двѣ части, чтобы бо́льшая изъ нихъ была среднепропорціональною между цѣлою поверхностью и меньшею ея частью.

1879 г. **966**. Раздѣлить прямой уголъ на три равныя части.

967. Радіусъ шара $=5$ дюйм. Найти объемъ конуса, вписаннаго въ шаръ.

968. Въ полной пирамидѣ проведена плоскость параллельно основанію такимъ образомъ, что площадь сѣченія равна половинѣ площади основанія. Найти отношеніе между объемомъ нижней усѣченной пирамиды и объемомъ верхней части. Требуется указать, какими теоремами нужно пользоваться при рѣшеніи этой задачи.

969. Полная пирамида раздѣлена плоскостью, параллельною основанію, на двѣ равномѣрныя части. Найти отношеніе между площадью основанія и площадью сѣченія. Требуется указать, какими теоремами нужно пользоваться при рѣшеніи этой задачи.

970. Опредѣлить объемъ шара, котораго поверхность 1881 г.
въ $2^1/_3$ раза болѣе боковой поверхности конуса, имѣющаго высоту въ 4 фута и образующую равную 5 фут.

971. Основаніе треугольной пирамиды вписано въ кругъ 1882 г.
радіуса R; боковое ребро ея равно діаметру того же круга. Опредѣлить высоту правильной четыреугольной пирамиды, основаніе которой вписано въ тотъ же кругъ, при условіи равномѣрности объемовъ обѣихъ пирамидъ.

(Изъ отчета Полтавской гимн. за 188 $^1/_2$ г.).

972. Разность сторонъ квадратовъ, служащихъ основаніями усѣченной пирамиды = 4 футамъ, а полная поверхность пирамиды = 168 кв. фут. Найти стороны основаній.

(Изъ отчета Кіевской 2-ой гимн. за 188 $^1/_2$ г.

(*Замѣчаніе*. Сравн. **432**-ую задачу геом. сборника Минина).

Для Житомирской гимназіи въ 1882 г. геометрическою темою служила задача, составленная В. Мининымъ и помѣщенная въ этомъ сборникѣ подъ № **370**.

(См. отчетъ Житомирской гимн. за 188 $^1/_2$ г.).

Въ 1883 г. геометрическою темою служила задача, заим- 1883 г.
ствованная изъ сборника Минина. См. № **395**.

973. Въ шарѣ радіуса r построенъ цилиндръ, сѣченіе 1884 г.
котораго по оси есть квадратъ. Вычислить объемъ каждой изъ четырехъ частей шара, на которыя онъ разсѣченъ поверхностью цилиндра. (Изъ отчета 2-й Кіевской гимн. за 188 $^3/_4$ г.).

974. Равнобедренный треугольникъ вращается около сво- 1885 г.
его основанія. Требуется опредѣлить объемъ образовавшагося тѣла, зная, что каждая изъ равныхъ сторонъ равнобедреннаго треугольника $= a =$ 5,8 фут., а основаніе его $= b =$ 8,4 фут.

(Изъ отчета Черниговской гимн. за 188 $^4/_5$ г.).

975. Стороны треугольника равны 3, 5 и 7 футамъ. Вы- 1886 г.
числить объемы тѣлъ, произведенныхъ обращеніемъ этого треугольника около бо́льшей стороны, принятой за неподвижную, и около меньшей, и найти, какъ относятся между собою объемы этихъ тѣлъ. (Изъ отчета Каменецъ-Подольской гимн. за 188 $^5/_6$ г.).

976. Шаръ даннаго радіуса r вписанъ въ конусъ, высота 1888 г.
котораго въ два раза болѣе діаметра основанія. Плоскостью, параллельною основанію и проходящею на разстояніи $2r$

отъ него, отсѣкается часть конуса, и требуется найти разность объемовъ усѣченнаго конуса и заключеннаго въ немъ шара, предполагая, что $r = 5$ футамъ.

1889 г. **977**. Въ шаръ, радіусъ котораго $= 6$ футамъ, вписанъ конусъ такъ, что высота конуса дѣлится въ центрѣ шара въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Вычислить объемъ конуса.

(*Замѣчаніе*. Ср. **524**-ую задачу этого сборника).

1890 г. **978**. Данъ треугольникъ, котораго стороны равны соотвѣтственно 60, 21 и 45 дюймамъ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, происшедшаго отъ обращенія этого треугольника около меньшей изъ его сторонъ.

1891 г. **979**. Сѣченіе шара плоскостью отстоитъ отъ центра шара на 3 дюйма. Площадь сѣченія $= 50\,^2/_7$ кв. дюйм. Опредѣлить объемъ шара и боковую поверхность бо́льшаго изъ двухъ вписанныхъ конусовъ, опирающихся на это сѣченіе ($\pi = {}^{22}/_7$).

1892 г. **980**. Вычислить объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія треугольника около стороны $a = 2{,}142$ вершк. Дано, что углы треугольника, прилегающіе къ этой сторонѣ, суть $B = 36^\circ 43' 54''$ и $C = 12^\circ 42' 24''$.

(Изъ отчета 2-й Кіевской гимн. за 189 $^1/_2$ г.).

(*Замѣчаніе*. Сравн. **731**-ую задачу этого сборника.

1893 г. **981**. Радіусъ кругового сектора равенъ R, а центральный уголъ есть α. Опредѣлить полную поверхность тѣла, происходящаго отъ вращенія даннаго сектора около оси, которая проходитъ чрезъ центръ и параллельна хордѣ, стягивающей дугу сектора. Найти искомое сначала въ общемъ видѣ, а затѣмъ вычислить для частнаго случая: $R = 2$ арш., $\alpha = 25^\circ 40' 16''$.

(Изъ отчета 2-ой Кіевской гимн. 189 $^2/_3$ г.).

1894 г. **982**. На окружности круга, радіусъ котораго $= R\ (= 3{,}8735)$, взята дуга AB, равная a $(= 68^\circ 37' 24'',6)$ и чрезъ точку B проведена касательная до встрѣчи въ точкѣ C съ продолженіемъ радіуса, проведеннаго до точки A. Фигура, ограниченная прямыми CA и CB и дугою AB, вращается около линіи AC. Опредѣлить объемъ тѣлъ вращенія.

(Изъ отчета 2-ой Кіевской гимн. за 189 $^3/_4$ г.).

983. Въ полукругѣ, радіусъ котораго $r = 6{,}36674$ фут., провели радіусъ, составляющій уголъ $\alpha = 23^\circ 27' 14''$ съ діаметромъ, ограничивающимъ полукругъ, и изъ конца этого радіуса провели касательную до пересѣченія съ тѣмъ же продолженнымъ діаметромъ. Вычислить объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія полученнаго прямоугольнаго треугольника около гипотенузы какъ около оси.

(Изъ отчета Немировской гимн. 189 $^3/_4$ г.).

Въ 1895 г. темою служила задача, помѣщенная въ этомъ сборникѣ подъ № **801**. **1895 г.**

984. Равнобедренный треугольникъ, у котораго боковая сторона $= b$, а уголъ при вершинѣ $= \alpha$, вращается около боковой стороны. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія, зная, что $b = 34{,}725$ дюйм., а $\alpha = 36^\circ 48' 16''$. **1896 г.**

(Изъ отчета 2-ой Кіевской гимн. за 189 $^5/_6$ г.).

985. Круговой сегментъ, содержащій дугу α, вращается около діаметра, перпендикулярнаго къ одному изъ крайнихъ радіусовъ дуги. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, зная, что дуга $\alpha = 56^\circ 17' 28''$, а ея радіусъ $R = 5{,}6$ дюйм. **1897 г.**

(Изъ „Ежегодника“ Коллегіи Галагана, 1897 г.).

Виленскій округъ.

986. *Основная.* Полная поверхность правильной четырехсторонней пирамиды $= 865$ квадр. дюймамъ. Сторона квадрата, служащаго основаніемъ, $= 5$ дюймамъ. Опредѣлить высоту пирамиды. **1874 г.**

987. *Запасная.* Опредѣлить площади: квадрата, правильныхъ треугольника и шестиугольника, вписанныхъ въ кругъ радіуса r, а также отношенія ихъ между собою.

Основная помѣщена въ IX отд. этого сборника подъ № **383**. **1875 г.**

988. *Запасная.* Опредѣлить объемъ пирамиды, имѣющей высоту въ 0,45 аршина, а въ основаніи правильный шестиугольникъ, сторона котораго $= 1\,^1/_3$ аршина.

989. *Основная.* Опредѣлить объемъ конуса, описаннаго около такого (правильнаго) тетраэдра, ребро котораго $a =$ 12 футамъ. Затѣмъ указать, во сколько разъ объемъ найденнаго конуса болѣе объема конуса, вписаннаго въ тотъ же многогранникъ. **1876 г.**

990. *Запасная.* Опредѣлить отношеніе поверхностей тѣлъ, происшедшихъ отъ обращенія равносторонняго треугольника около одной изъ его сторонъ и около высоты.

1877 г. **991**. *Основная*. По данной сторонѣ a правильнаго шестиугольника опредѣлить объемъ тѣла, происшедшаго отъ обращенія этого шестиугольника около оси, проходящей чрезъ вершины двухъ противоположныхъ его угловъ. Для цыфернаго вычисленія: $a=10$ дюймамъ.

(Сравн. задачу **453**-ю этого сборника).

992. *Запасная*. Въ шарѣ проведена плоскость на разстояніи одной сажени отъ центра. Опредѣлить объемъ этого шара, зная, что площадь означеннаго сѣченія заключаетъ въ себѣ 1,57 квадр. саж.

1878 г. **993**. *Основная*. Въ равнобочной трапеціи, у которой нижнее основаніе $=a$, верхнее $=b$ и высота $=h$, непараллельныя стороны продолжены до встрѣчи. Опредѣлить поверхность тѣла, происходящаго отъ обращенія получившейся фигуры около линіи, соединяющей означенную точку встрѣчи съ срединою нижняго основанія трапеціи. (Для цыфернаго вычисленія: $a=15$, $b=7$ и $h=3$ дюйм.).

994. *Запасная*. Запасною темою служила задача, заимствованная изъ сборника Минина (см. № **253**, стран. 52); при этомъ, для цыфернаго вычисленія, дано было $P=80$ и $m:n=0,8$.

1879 г. *Основная*. См. задачу **557**-ую этого сборника.

995. *Запасная*. Шаровой сегментъ, высота котораго $h=$ 2,7 вершк., имѣетъ объемъ въ 18 кубическихъ вершковъ. Опредѣлить объемъ того шара, отъ котораго отсѣченъ данный сегментъ.

1881 г. *Основною* темою за 1881 г. служила задача, заимствованная изъ сборника Минина (см. № **438**).

Запасною темою выбрана была также задача изъ сборника Минина (см. № **385**).

1884 г. **996**. *Основная*. Въ шарѣ радіуса R вписанъ прямой конусъ, объемъ котораго равенъ объему сегмента, имѣющаго съ нимъ общее основаніе. Вычислить высоту конуса. Частное значеніе $R=1$ фут. Точность до 0,01.

997. *Основная*. Основаніе правильной пирамиды есть квадратъ, сторона котораго $=a$ дюйм. Высота пирамиды $=h$ дюйм.

На разстояніи d дюймовъ отъ основанія проведена плоскость, параллельная основанію. Опредѣлить боковую поверхность усѣченной пирамиды ($a=7$, $h=12$, $d=5\,^1/_2$).

Основною темою въ 1885 г. была выбрана **524**-я задача сборн. Минина. **1885 г.**

998. *Запасная*. Отъ правильной четыреугольной пирамиды, имѣющей апоѳему $=l$, плоскостью, параллельною основанію, отсѣчена пирамида, полная поверхность которой $=s$, а боковая $=s_1$. Опредѣлить объемъ всей данной пирамиды.

999. Въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ катетовъ $= {}^3/_4$ другого, содержащаго a футовъ. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія даннаго треугольника около гипотенузы ($a=8$ фут.; $\pi = {}^{22}/_7$). **1886 г.**

(Изъ отчетовъ 1 и 2 Виленскихъ гимн. за 188 $^5/_6$ г.).

1000. Дана правильная пирамида съ треугольнымъ основаніемъ, сторона котораго $=1$ арш. Вычислить, съ точностью до 0,01, полную поверхность этой пирамиды, зная, что высота пирамиды $=2$ арш. **(Изъ отчета 2-й Виленской гимн. за 188 $^6/_7$ г.).** **1887 г.**

1001. Башня имѣетъ видъ цилиндра, на верхнемъ основаніи котораго поставленъ прямой усѣченный конусъ такъ, что бо́льшее его основаніе совпадаетъ съ верхнимъ основаніемъ цилиндра. Высота башни $=7$ сажен., высота конуса $= {}^1/_3$ высоты башни, а боковая поверхность его равна 198 кв. саж. Зная, что радіусы основаній (верхняго и нижняго круговъ) конуса относятся какъ $1:9$, опредѣлить объемъ конуса ($\pi = {}^{22}/_7$). **1888 г.**

(Изъ отчетовъ Ковенской и Минской гимн. за 188 $^7/_8$ г.).

Основная. См. задачу **562**-ую этого сборника. **1889 г.**

1002. *Запасная*. Въ шарѣ радіуса $R=12$ построенъ цилиндръ, сѣченіе котораго по оси есть квадратъ. Вычислить объемъ этого цилиндра и его полную поверхность (вѣрно до 0,01).

1003. *Основная*. Въ конусъ, у котораго радіусъ основанія $=r$, а образующая $=l$, вписанъ шаръ. Вычислить радіусъ r_1 шара и площадь K круга прикосновенія шара къ конусу ($r=4$; $l=14$). (*Замѣчаніе*. Сравн. **517**-ую задачу этого сборника). **1890 г.**

1004. *Запасная*. Около окружности радіуса r описана трапеція $ABCD$, у которой сторона $AD=2a$, а углы B и C — прямые. Вращеніемъ около BC трапеція образуетъ усѣченный конусъ. Вычислить параллельныя стороны AB и CD трапеціи и объемъ v усѣченнаго конуса ($a = 5$; $r = 3$).

(*Замѣчаніе.* Задача эта представляетъ передѣлку **472**-й задачи сборн. Минина).

1891 г. **1005**. Въ кругѣ радіуса $R = 2$ дециметрамъ центръ соединенъ съ концами хорды, стягивающей дугу въ 120°. Опредѣлить объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія треугольника около одного изъ проведенныхъ радіусовъ.

(Изъ отчета Слуцкой гимн. за 189⁰/₁ г.).

1892 г. Въ этомъ году темою служили **731** и **732** зад. геом. сборн. Минина.

1893 г. **1006**. Площадь треугольника содержитъ S квадр. арш., а двѣ его высоты соотвѣтственно равны h и h_1. Рѣшить треугольникъ ($S = 84$ кв. арш.; $h = 11{,}2$ арш.; $h_1 = 12$ арш.).

(Изъ отчетовъ Виленской 2-й и Ковенской гимн. за 189²/₃ г.).

1894 г. **1007**. Производящая конуса $= 11{,}58$ д., а уголъ, составленный ею съ плоскостью основанія, равенъ $35^{\circ}15'54'',5$. Вычислить полную поверхность конуса.

(Изъ отчетовъ Ковенской и Шавельской гимн. за 189³/₄ г.).

1895 г. **1008**. Параллельныя стороны трапеціи суть m и n; углы, прилежащіе къ бо́льшей изъ этихъ сторонъ, суть A и B. Опредѣлить площадь трапеціи. Данныя для вычисленія: $m = 94{,}146$ д.; $n = 64{,}4$ д.; $A = 47^{\circ}15'20''$; $B = 38^{\circ}22'16''$.

(Изъ отчетовъ Виленской 2-й и Ковенской гимн. за 189⁴/₅ г.).

1896 г. **1009**. Уголъ, составленный образующей конуса съ плоскостью его основанія, $= \beta = 58^{\circ}32'16''$, а сумма образующей и радіуса основанія $= m = 18$ дюймамъ. Опредѣлить радіусъ вписаннаго въ конусъ шара. (Изъ отчетовъ Слуцкой и Витебской гимн. за 189⁵/₆ г.).

Варшавскій округъ.

1875 г. **1010**. Сторона правильнаго шестиугольника равна одному метру. Найти (съ приближеніемъ до 0,001) объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія этого шестиугольника около одной изъ его сторонъ. (*Замѣчаніе.* Сравн. зад. **454**-ую этого сборн.).

1876 г. **1011**. Два круга разныхъ радіусовъ пересѣкаются такъ, что ихъ общая хорда для одного круга есть сторона вписаннаго въ оный правильнаго шестиугольника, а для другого —

сторона вписаннаго въ него квадрата. Требуется найти поверхность двойного сегмента, составляющаго общую часть площади двухъ круговъ, принимая радіусъ бо́льшаго круга равнымъ R.

Основная. См. задачу **543**-ую этого сборника. **1877 г.**

1012. *Запасная*. Даны: 1) объемъ усѣченной пирамиды съ параллельными основаніями $V = 1{,}3125$ кубическ. фут. и 2) сторона нижняго ея основанія $a = 1$ футу. Полагая, что основанія пирамиды суть правильные шестиугольники, а высота пирамиды (усѣченной) равняется апоѳемѣ нижняго основанія, требуется опредѣлить сторону основанія.

1013. *Основная*. Какъ велика поверхность части земли, **1878 г.** видимой воздухоплавателемъ, поднявшимся на высоту h отъ почвы? При этомъ земля принимается за шаръ, радіусъ R котораго извѣстенъ. Окружность экватора можно считать приблизительно равною 40000000 метрамъ. *Примѣчаніе*. Видимая часть земли опредѣляется пересѣченіемъ шара съ конусомъ, описаннымъ около него, предполагая, что въ вершинѣ конуса находится глазъ наблюдателя. (Ср. задачу **532**-ую этого сборника).

1014. *Запасная*. Опредѣлить боковую поверхность правильной десятиугольной пирамиды по извѣстной ея высотѣ h и длинѣ d бокового ребра (соединяющаго вершину пирамиды съ одной изъ вершинъ основанія).

1015. Вычислить объемъ правильной шестиугольной пира- **1884 г.** миды по даннымъ: боковому ребру ея b и площади сѣченія c^2 пирамиды плоскостью, проходящею чрезъ ребро и высоту ($b = 3$ фут., $c = 2$ кв. ф.).

1016. Радіусъ шара $= 2$ футамъ На какомъ разстояніи **1885 г.** отъ поверхности шара должна находиться свѣтящаяся точка, чтобы она могла освѣщать $^1/_4$ часть его поверхности?

1017. Въ шаръ вписанъ конусъ, котораго высота дѣлится **1888 г.** въ центрѣ шара въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Найти отношенія поверхности и объема этого конуса къ поверхности и объему шара. (*Замѣчаніе*. См. **524** задачу этого сборн.).

(Изъ отчета Радомской гимн. за 188$^7/_8$г.).

1018. Въ пустомъ конусѣ, ось котораго вертикальна и **1889 г.** вершина обращена внизъ, лежитъ шаръ. Площадь основанія конуса равномѣрна поверхности этого шара, а объемъ конуса въ 1,5 раза болѣе объема шара. Въ какомъ отношеніи ось конуса дѣлится центромъ шара?

1890 г. **1019**. Въ конусъ, у котораго радіусъ основанія $= r$, а отношеніе образующей къ радіусу основанія $= {}^5/_3$, вписанъ шаръ. Черезъ точки касанія шара съ боковой поверхностью конуса проведена плоскость. Опредѣлить объемъ меньшаго изъ сферическихъ сегментовъ, которые образовались при пересѣченіи шара упомянутой плоскостью. (Изъ отчета Радомской гимн. за $18^{89}/_{90}$ г.).

1891 г. **1020**. Изъ вершины прямого угла равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, катетъ котораго равенъ a, описана, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ катету, дуга, соединяющая концы гипотенузы, на которой, какъ на діаметрѣ, описана внѣ треугольника полуокружность. Вся фигура вращается около оси, проходящей черезъ вершину треугольника и перпендикулярной къ гипотенузѣ. Вычислить объемъ тѣла, заключеннаго между поверхностями, описанными дугами.

(Изъ отчета Радомской гимн. за $18^{90}/_{91}$ г.).

1893 г. **1021**. Ромбъ съ меньшей діагональю $d = 7$ фут. и угломъ $\alpha = 70^0 24' 40''$ вращается около оси, перпендикулярной къ сторонѣ и проходящей чрезъ вершину его остраго угла. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія.

(Изъ отчета Радомской гимн. за $189^2/_3$ г.)

1894 г. **1022**. Около треугольной призмы, объемъ которой $V = 320$ куб. арш., описанъ цилиндръ. Въ треугольникѣ, служащемъ основаніемъ призмы, даны сторона $b = 7$ арш., сторона $a = 20$ арш. и уголъ, противолежащій сторонѣ a, равный $98^0 40' 20''$. Вычислить объемъ этого цилиндра.

(Изъ отчета Радомской гимн. за $189^3/_4$ г.).

1895 г. **1023**. Чрезъ вершину четыреугольной пирамиды, у которой сторона основанія $a = 10{,}325$ дюйм., а плоскій уголъ при вершинѣ $= \alpha = 39^0 28' 58''$, проведена плоскость подъ угломъ $\varphi = 68^0 47' 35''$ къ основанію, параллельно сторонѣ послѣдняго. Опредѣлить площадь треугольника, полученнаго въ сѣченіи. (Изъ отчета Радомской гимн. за $189^4/_5$ г.).

1896 г. **1024**. Задача **829**-ая изъ этого сборника въ предположеніи, что $d = 2{,}768$ метра и $\alpha = 108^0 52' 14''$.

(Изъ отчета Радомской гимн. за $189^5/_6$ г.).

Оренбургскій округъ.

1025. *Основная.* Полная поверхность усѣченнаго конуса **1876 г**
содержитъ 43,69 квадр. фута, а боковая поверхность — 30,615 квадр. фута; ребро его равно 3,9 фута. Найти радіусы основаній усѣченнаго конуса.

Запасная помѣщена въ X отд. этого сборника подъ № **479**.

1026. *Основная.* Вода наполняетъ сосудъ, имѣющій видъ **1877 г.**
шарового сегмента о двухъ параллельныхъ основаніяхъ, которыхъ радіусы: $a = 3$ дюймамъ и $b = 5$ дюймамъ; высота сосуда есть средняя геометрическая между обоими радіусами. Зная, что 1 куб. дюймъ воды вѣситъ 3,84 золотника, вычислить вѣсъ воды, содержащейся въ сосудѣ.

1027. *Запасная.* Сплошной желѣзный конусъ, въ которомъ радіусъ основанія $= 2,5$ дюйм., а высота $= 6,3$ дюйм., плаваетъ въ ртути вершиной внизъ. Опредѣлить объемъ погруженной части конуса. Плотность ртути $= 13,6$; плотность желѣза $= 7,8$.

1028. *Основная.* Сосудъ, имѣющій форму усѣченнаго ко- **1878 г.**
нуса, наполненъ водою. Нижнее основаніе конуса имѣетъ 5 ф. въ діаметрѣ, верхнее — 1 футъ, а высота сосуда $= 4$ футамъ. Опредѣлить, на сколько давленіе на дно сосуда превышаетъ вѣсъ заключенной въ сосудѣ воды. (Вѣсъ кубич. дюйма воды $= 3,84$ золотн.).

1029. *Запасная.* Шаръ, радіусъ котораго $= 0,5$ фута, просверленъ насквозь по направленію діаметра цилиндрическимъ отверстіемъ; радіусъ цилиндрическаго отверстія составляетъ $^1/_2$ радіуса шара. Найти объемъ остающейся части шара.

1030. *Основная.* Цилиндръ и усѣченный конусъ имѣютъ одно основаніе общее и одну и ту же высоту. Найти (съ точностью до 0,001), каково должно быть отношеніе между радіусами основаній конуса, чтобы объемъ его былъ равенъ половинѣ объема цилиндра.

1031. *Запасная.* Сколько квадратныхъ географическихъ миль земной поверхности можетъ обозрѣть воздухоплаватель, поднявшись надъ нею на высоту 0,52 мили, если предположить, что земля — шаръ съ радіусомъ въ 858 географическихъ миль? (См. задачу **532**-ую сборн. Минина).

1032. *Основная.* Отъ сплошного серебрянаго шара, ко- **1880 г.**

тораго радіусъ равенъ 6 дюйм., отсѣченъ сегментъ плоскостью, проведенною на разстояніи отъ центра шара, равномъ половинѣ шарового радіуса. Опредѣлить вѣсъ этого сегмента, зная, что удѣльный вѣсъ серебра $=0,4$, а одинъ кубическій дюймъ воды вѣситъ 0,04 фунта.

1033. *Запасная.* Поле имѣетъ видъ трапеціи, параллельныя стороны которой соотвѣтственно равны 577,3 саж. и 622,7 саж.; разстояніе между ними 25 саж. Сколько десятинъ заключаетъ въ себѣ поле?

1881 г. **1034**. *Основная.* Въ кубъ, ребро котораго $=3,5$ дюйма, вставленъ такой же высоты цилиндръ, касающійся всѣхъ сторонъ куба. Какъ великъ вѣсъ воды, которая помѣщается въ промежуткѣ между кубомъ и цилиндромъ? (кубич. дюймъ воды вѣситъ $^1/_{25}$ фунта).

1035. *Запасная.* Налить воскъ въ сосудъ, имѣющій видъ усѣченнаго конуса, у котораго разстояніе между основаніями $=49$ вершк.; радіусъ верхняго основанія $=2$ вершк., а радіусъ нижняго основанія $=4$ вершк. Затѣмъ изъ этого воска приготовленъ шаръ. Найти радіусъ этого шара.

1882 г. **1036**. *Основная.* Вычислить полную поверхность прямой призмы, у которой въ основаніи находится треугольникъ со сторонами въ 104, 78 и 74 дюйм., а высота равна высотѣ нѣкотораго другого треугольника, равновеликаго съ даннымъ, но съ основаніемъ въ $28^4/_5$ дюйм.

Запасною темою служила запасная задача 1881 г.

1883 г. **1037**. Сторона правильнаго треугольника равна діагонали квадрата, котораго сторона равна $1^1/_2$ дюйм. Вычислить съ точностью до 0,01 поверхность и объемъ шара, радіусъ котораго равенъ радіусу круга, описаннаго около даннаго треугольника.

1884 г. **1038**. *Основная.* Въ шаръ съ радіусомъ въ 10 дюймовъ вписанъ усѣченный конусъ, котораго верхнее и нижнее основанія отстоятъ отъ центра на 8 дюйм. и на 6 дюймовъ. Опредѣлить объемъ и полную поверхность этого конуса.

Запасною темою была выбрана **160**-ая задача изъ сборника Минина.

1885 г. **1039**. *Основная.* Цилиндрическій сосудъ вышиною въ 24 д., съ внутреннимъ діаметромъ въ 12 дюйм., налить до половины водою. Какова будетъ высота уровня воды въ этомъ сосудѣ, если погрузить въ него сполна желѣзный кусокъ, имѣющій форму шестиугольной правильной призмы, которой высота $= 12{,}56$ дюйм., а сторона основанія $= 4$ дюймамъ?

Запасною темою служила задача, заимствованная изъ геометр. сборника Минина (см. № **160**).

1040. *Основная*. Вырытъ колодецъ, котораго глубина 8 саженъ, а основаніе квадратъ, имѣющій сторону $=1$ саж. До глубины 2 аршинъ рабочіе выбрасывали землю руками, а остальную часть поднимали посредствомъ ворота съ бадьей, имѣющей форму усѣченнаго конуса, у котораго діаметръ верхняго основанія равенъ 1 арш., а нижняго $= {}^1/_2$ арш. и производящая $=1{,}5$ арш. Зная, что 1 куб. футъ плотной земли даетъ 1,5 куб. ф. вырытой, опредѣлить, какой объемъ земли пришлось вынуть посредствомъ ворота и сколько разъ пришлось поднять бадью. **1889 г.**

1041. *Запасная*. Сторона правильнаго шестиугольника $=10$ дюймамъ. Требуется опредѣлить объемъ тѣла, которое могло бы образоваться при обращеніи этой фигуры около оси, проходящей чрезъ вершины двухъ противоположныхъ угловъ, и узнать, каковъ бы былъ вѣсъ такого тѣла, если бы удѣльный вѣсъ его вещества равнялся 7,8.

1042. *Основная*. Радіусъ основанія конуса $r = 21$ дюйму. Объемъ этого конуса равенъ объему такого шара, что радіусъ малаго его круга, проведеннаго на разстояніи 9 дюймовъ отъ центра шара, $k=12$ дюйм. Опредѣлить боковую поверхность этого конуса. **1890 г.**

Запасною темою служила запасная тема того же округа за 1889 г.

1043. *Основная*. Въ шарѣ, котораго радіусъ равенъ 15 д., сдѣланы два параллельныя сѣченія плоскостями: первое въ разстояніи 4 дюймовъ отъ центра, а второе въ разстояніи 4 дюймовъ отъ перваго сѣченія. Опредѣлить, какъ велика полная поверхность пояса, образованнаго сѣченіями. (Приближ. до 0,01). **1891 г.**

1044. *Запасная*. Зная, что удѣльный вѣсъ ртути $=13{,}6$, а вѣсъ куб. дюйма воды $= 3{,}8$ золотника, найти, сколько ртути, по вѣсу, можетъ помѣститься въ сосудѣ, имѣющемъ форму усѣченнаго конуса, у котораго образующая$=5$ дюйм., радіусъ нижняго основанія$=3$ дюйм., а верхняго$=4$ дюйм.

1891 г. **1045.** *Основная* (для Уральской гимназіи). Сторона правильной шестиугольной пирамиды$=25$ дюйм., а ребро пирамиды равно 75 дюйм. Опредѣлить, сколько вѣсила бы такая пирамида, если бы она была изъ чугуна, котораго удѣльный вѣсъ $=7{,}5$, и сколько стоила бы окраска ея, если бы за окраску каждаго квадр. дюйма ея поверхности пришлось платить по 0,5 коп. Вѣсъ куб. дюйма воды$=3{,}8$ золотн.

1046. *Запасная* (для Уральской гимназіи). Цилиндръ, у котораго высота H равна 4 дюймамъ, а радіусъ основанія $R=$ 3 дюйм., разсѣченъ двумя плоскостями, проходящими чрезъ ось и составляющими между собой уголъ n, равный 60^0, на четыре части. Вычислить объемы этихъ частей.

Округъ Западной Сибири.

1874 г. Тема 1874 года помѣщена въ IX отд. этого сборника подъ № 385.

1875 г. **1047.** *Основная.* Радіусъ шара равенъ 16,4 фут. Опредѣлить радіусъ основанія и высоту цилиндра, у котораго боковая поверхность и объемъ такой же величины, какъ поверхность и объемъ шара.

1048. *Запасная.* Полная поверхность усѣченнаго конуса содержитъ 96,712 квадр. фут., а діаметры его основаній равны соотвѣтственно 6 фут. и 2 фут. Сколько футовъ содержитъ высота этого конуса?

1876 г. **1049.** *Основная.* Вмѣстимость пустого шара равна 0,90432 кубич. дюйма; наружный діаметръ этого шара больше внутренняго на 1,6 дюйма. Вычислить наружную поверхность шара.

Запасною темою служила задача 1875 г. того же округа.

1877 г. **1050.** *Основная.* Высота сферическаго сегмента, коего поверхность содержитъ въ себѣ 21,98 квадр. фут., равна 1,4 фут. Вычислить объемъ шара, которому принадлежитъ этотъ сегментъ.

1051. *Запасная.* Площадь сектора равна 9,82 квадр. дюйм., а площадь круга, отъ котораго взятъ секторъ, равна 28,8 квадр.

дюйм. Опредѣлить длину дуги, принадлежащей сектору, и число градусовъ въ ней.

1052. Площадь квадрата, вписаннаго въ кругъ, равна 8 квадр. фут. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія правильнаго треугольника, вписаннаго въ тотъ же кругъ, около одной изъ его сторонъ. **1882 г.**

1053. Вычислить поверхность и объемъ шара, радіусъ котораго равняется ребру правильнаго октаэдра, имѣющаго поверхность, равную $10\sqrt{75}$. (Для гимназій Омской, Тобольской и Томской).

1054. Площадь равносторонняго треугольника равна 183,6 кв. фут. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ усѣченнаго конуса, зная, что нижнимъ его основаніемъ служитъ кругъ, описанный около сказаннаго треугольника, верхнимъ — кругъ, вписанный въ тотъ же треугольникъ, а высотою служитъ сторона этого треугольника. (Для Вѣрненской гимназіи).

1055. Боковая поверхность правильной четыреугольной пирамиды $S=32,16$, а высота пирамиды $h=2,24$. Вычислить площадь сѣченія этой пирамиды, зная, что сѣченіе проходитъ чрезъ средину высоты пирамиды параллельно основанію. **1884 г.**

(Для гимназій Тобольской, Томской и Омской).

Въ 1884 году въ качествѣ геометрической темы для Вѣрненской гимназіи служила **234**-ая задача изъ геометрическаго задачника Минина.

1056. Площадь сѣченія по оси усѣченнаго конуса есть $d=43$ кв. дюйм. Производящая l, содержащая 4 дюйма, вдвое болѣе разности радіусовъ основаній конуса. Найти объемъ даннаго усѣченнаго конуса. (Для Вѣрненской гимназіи). **1885 г.**

Для гимназій: Тобольской, Томской и Омской въ качествѣ геометрической темы въ 1885 г. была выбрана **529**-я задача изъ сборника Минина.

1057. *Основная*. Вычислить объемъ правильной усѣченной четыреугольной пирамиды, у которой боковое ребро = 20 дюйм., апоѳема = 16 дюйм., а сторона верхняго основанія = 6 дюйм. Вычисленіе производить съ точностью до 0,1. **1889 г.**

Запасною темою служила **426**-я задача сборника Минина.

1058. *Основная*. Боковая поверхность конуса равновелика **1890 г.**

площади сектора круга съ дугою въ 216^0 и радіусомъ, равнымъ 20 дюймамъ, при чемъ образующая конуса равна радіусу сектора, а окружность основанія конуса — дугѣ сектора. Какъ великъ радіусъ шара, объемъ котораго равенъ объему конуса?

1059. *Запасная.* Діагональ прямоугольнаго параллелепипеда $= 26$, а діагонали сторонъ его равны $8\sqrt{10}$ и $6\sqrt{17}$. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

1891 г. **1060**. *Основная.* Правильный 6-угольникъ, сторона котораго равна a, вращается сперва около діаметра вписаннаго въ него круга, а затѣмъ около діаметра круга, описаннаго около него. Опредѣлить объемы тѣлъ вращенія.

(*Замѣчаніе.* Сравн. **453**-ью задачу этого сборника).

1061. *Запасная.* Діаметръ котла, имѣющаго форму полушара, равенъ 2-мъ аршинамъ. Опредѣлить вмѣстимость котла въ ведрахъ. Ведро $=$ 750 кубич. дюймамъ.

Туркестанскій край.

1884 г. Въ 1884 г. геометрическою темою служила задача, взятая изъ сборника Минина (№ **213**).

1885 г. **1062**. Въ кругъ, котораго діаметръ равенъ 13 дюймамъ вписанъ равносторонній треугольникъ. Найти объемъ пирамиды, основаніе которой равно этому треугольнику, а высота равна 1 футу.

1886 г. **1063**. Въ шарѣ, радіусъ котораго равенъ верстѣ, проведено сѣченіе на разстояніи $^1/_4$ радіуса отъ центра. Въ сѣченіе вписанъ квадратъ, служащій общимъ основаніемъ для двухъ правильныхъ пирамидъ, вершины которыхъ лежатъ на противоположныхъ концахъ шарового діаметра, перпендикулярнаго къ сѣченію. Опредѣлить объемъ образовавшейся двойной пирамиды. (*Замѣчаніе.* Сравн. **458**-ую задачу этого сборн.).

(Изъ отчета Ташкентской гимн. за 188$^5/_6$ г.).

1890 г. Геометрическою темою была выбрана **515**-я задача сборника Минина.

1893 г. **1064**. Площадь квадрата, описаннаго около основанія конуса, равна 36 кв. дюйм. Опредѣлить объемъ этого конуса, зная, что образующая его наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ $\varphi = 58^0 42' 17''$. **(См. отчетъ Ташкентской гимн. за 189$^2/_3$ г.).**

Рижскій округъ.

См. задачу **556**-ую этого сборника. **1889 г.**

1065. Построить такой прямоугольный треугольникъ, чтобы объемъ тѣла, образуемаго его вращеніемъ около гипотенузы, составлялъ $^1/_8$ часть объема шара, имѣющаго діаметромъ эту гипотенузу. **1891 г.**

1066. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія треугольника ABC около стороны его AB. Дано, что сторона $BC=5{,}3(72)$ дюйма, уголъ $A=43^\circ 14' 13''{,}_8$; уголъ $B=81^\circ 13' 6''{,}_7$. **1892 г.**

(Изъ отчета Митавской гимн. за 189$^1/_2$ г.).

Кавказскій округъ.

1067. Въ шарѣ вписанъ цилиндръ, діаметръ основанія котораго равенъ сторонѣ правильнаго треугольника, вписаннаго въ большой кругъ шара. Какую часть объема шара составляетъ объемъ цилиндра и чему онъ равенъ, если поверхность шара $S=5998139$? Желающимъ предлагается опредѣлить отношеніе всѣхъ четырехъ частей, на которыя объемъ шара раздѣляется поверхностью цилиндра: цилиндра двухъ сегментовъ и пояса, окружающаго цилиндръ. **1889 г.**

1068. Треугольникъ, у котораго сторона $a=21$, $b=20$, $c=13$, обращается около стороны a. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія. (Для желающихъ: найти отношеніе объемовъ и поверхностей тѣлъ вращенія, которыя получатся, если треугольникъ послѣдовательно будетъ обращаться около сторонъ a, b, c). **1890 г.**

(*Замѣчаніе*. Сравн. **442**-ую и **443**-ю задачи сборн. Минина)

1069. Полная поверхность конуса $F=28{,}3144$ кв. фут., а боковая $M=20{,}8144$ кв. ф. Какъ великъ объемъ этого конуса? (Для желающихъ: вычислить объемъ шара, въ который помѣщенъ упомянутый конусъ такъ, что высота конуса въ центрѣ шара дѣлится въ среднемъ и крайнемъ отношеніи). **1891 г.**

1070. Даны: S — площадь прямоугольнаго треугольника ABC и уголъ α между гипотенузой и катетомъ AB. Опредѣлить объемъ и боковую поверхность конуса, который образуется отъ вращенія этого прямоугольнаго треугольника около катета AB. Площадь $C=85$, а уголъ $\alpha=54^\circ 34' 20''{,}_{54}$. **1892 г.**

1893 г. **1071.** Даны радіусы $R=3$ арш. и $r=4$ арш. двухъ пересѣкающихся окружностей и разстояніе $d=2$ арш. между ихъ центрами. Вычислить: 1) площадь треугольника, составленнаго линіей, соединяющей центры окружностей, и двумя радіусами, идущими отъ центровъ къ одной точкѣ пересѣченія окружностей, 2) величину общей хорды пересѣкающихся окружностей.

1894 г. **1072.** Прямоугольный треугольникъ ABC вращается около оси, которая, лежа въ плоскости треугольника, проходитъ чрезъ вершину прямого угла A, не пересѣкая треугольника и образуя съ катетомъ AC уголъ α. Опредѣлить полную поверхность получаемаго тѣла вращенія, зная, что катетъ $AC=b=21$, катетъ $AB=c=20$, уголъ $\alpha=60^0$. (Желающимъ предлагается опредѣлить и объемъ тѣла вращеніе).

(Темы подъ №№ 1069—1072 заимст. изъ „Историч. очерка существ. Владикавказской гимназіи 1881—1897 гг.“)

ОГЛАВЛЕНІЕ.