А. Н. Глаголевъ.

СБОРНИКЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ НА ПОСТРОЕНІЕ.

Изданіе 3-е.

1-е изданіе Ученымъ Комитет. Министерства Народн. Просв. одобрено какъ весьма полезное учебное пособіе для среднихъ учебн. заведеній.

Типографія Т-ва И. Д. Сытина, Пятницкая улица, свой домъ

МОСКВА.—1910.

ПРЕДИСЛОВІЕ КЪ I ИЗДАНІЮ.

Существующіе въ нашей учебной литературѣ сборники задачъ на построеніе или содержатъ задачи, расположенныя по методамъ рѣшенія, и пользоваться ими можно только при повтореніи курса геометріи, или страдаютъ неполнотою и не содержатъ вовсе задачъ на многіе очень важные отдѣлы элементарной геометріи.

Цѣль настоящаго изданія—хотя отчасти пополнить этотъ пробѣлъ; предлагаемый сборникъ содержитъ болѣе 3.000 задачъ, расположенныхъ по отдѣламъ курса геометріи, и можетъ, какъ мнѣ кажется, служить пособіемъ при изученіи курса.

Къ сборнику приложенъ учебникъ элементарной геометріи, составленный по программѣ гимназій и реальныхъ училищъ и отличающійся отъ существующихъ у насъ учебниковъ системой изложенія, пріемами доказательствъ нѣкоторыхъ теоремъ, а въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ—и учебнымъ матеріаломъ.

Пособіями при составленіи курса геометріи и сборника задачъ служили однородныя изданія иностранной, по преимуществу нѣмецкой, учебной литературы.

ПРЕДИСЛОВІЕ КО II ИЗДАНІЮ.

Настоящій сборникъ слѣдуетъ разсматривать, какъ второе изданіе книги: «Сборникъ геометрическихъ задачъ на построеніе и краткій курсъ элементарной геометріи», удостоенной одобрительнаго отзыва Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія.

Въ настоящемъ изданіи сдѣланы слѣдующія измѣненія:

1) Задачи на построеніе раздѣлены на 2 отдѣла. Въ 1-ый отдѣлъ вошли задачи, легко рѣшаемыя учениками; во второмъ отдѣлѣ по преимуществу помѣщены задачи, требующія отъ учениковъ нѣкотораго навыка въ ихъ рѣшеніи.

2) Краткій курсъ элементарной геометріи, изданный отдѣльной книгой, опущенъ и вмѣсто него сюда введены задачи практической геометріи и методы рѣшенія задачъ на построеніе.

Послѣдніе 2 отдѣла помѣщались въ I и II изданіяхъ учебника геометріи.

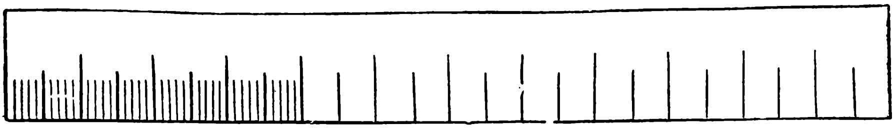
3-е изданіе перепечатано со 2-го безъ измѣненій.

ОТДѢЛЪ I.

ГЛАВА I.

Прямыя линіи. Углы. Параллельныя прямыя. Треугольники и равенство ихъ.

Задачи, рѣшаемыя непосредственно на основаніи теоремъ, и упражненія въ черченіи геометрическихъ фигуръ.



Черт. 1.

Для черченія прямыхъ линій на бумагѣ употребляется линейка. Поверхности, ограничивающія линейку, должны быть плоскостями; края же линейки должны быть прямыя линіи. Для повѣрки вѣрности линейки поступаютъ такъ: проводятъ на плоскости прямую, заставляя скользить карандашъ, остро очиненный, по краю линейки, затѣмъ прикладываютъ линейку тѣмъ же ребромъ къ прямой, но съ другой стороны, и если проведенная прямая и ребро линейки совпадаютъ, то линейкой можно пользоваться для проведенія прямыхъ линій на плоскости.

Для сложенія на бумагѣ отрѣзковъ прямой употребляютъ циркуль; одно изъ условій пригодности циркуля для черченія состоитъ въ томъ, чтобы оконечности ножекъ циркуля въ сложенномъ видѣ сливались въ одну точку.

1. Черезъ данную точку провести нѣсколько прямыхъ линій.
2. Черезъ двѣ данныя точки провести прямую.

3. Построить отрѣзокъ длиною въ 2, 3, 4 сант.

4. На данной прямой отъ данной точки въ обѣ стороны отложить по отрѣзку длиною въ 2, 3 сант.

5. Построить отрѣзокъ, равный суммѣ или разности данныхъ отрѣзковъ.

6. Построить отрѣзокъ, равный по длинѣ ломаной линіи.

7. По данной суммѣ двухъ отрѣзковъ и одному изъ нихъ построить другой.

8. По данной разности двухъ отрѣзковъ и большему изъ нихъ построить меньшій.

9. По данной разности двухъ отрѣзковъ и меньшему изъ нихъ найти большій.

10. Найти разность между суммою двухъ отрѣзковъ и третьимъ отрѣзкомъ.

11. Найти отрѣзокъ, въ три раза большій даннаго.

12. Даны три отрѣзка a b и c; построить отрѣзокъ, равный: 1) $a+b+c$; 2) $a+b-c$; 3) $a-b+c$; 4) $a-b-c$.

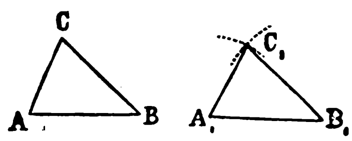
13. Начертить 3 прямыя, пересѣкающіяся въ 3-хъ, 2-хъ и 1-ой точкѣ.

14. Начертить двѣ пересѣкающіяся прямыя; отложить отъ точки пересѣченія по 4 направленіямъ длины въ 2, 3, 4 и 5 сант. и концы ихъ соединить прямыми.

15. Начертить четыре прямыя, пересѣкающіяся въ 1, 2, 3, 4, 5 и 6 точкахъ.

Построить треугольникъ, равный данному треугольнику ABC.

На произвольной линіи откладываемъ отрѣзокъ $A_1B_1 = AB$ (черт. 2) и изъ точекъ A_1 и B_1 описываемъ дуги радіусами, соотвѣтственно равными AC и BC, точку ихъ пересѣченія C_1 соединяемъ съ точками A_1 и B_1.



Черт. 2.

16. **Построить тр—къ, если даны три стороны его.**

Задача приводится къ предыдущей, но для того, чтобы она была возможна, необходимо, чтобы: 1) большая изъ данныхъ линій была меньше суммы двухъ другихъ и 2) меньшая была бы больше разности двухъ другихъ.

17. Данъ треугольникъ ABC, основаніе котораго AB равно данному отрѣзку DE; на этомъ отрѣзкѣ, какъ на основаніи, построить другой треугольникъ, равный данному ABC.

18. На данномъ отрѣзкѣ построить равносторонній треугольникъ.

19. На данномъ отрѣзкѣ, какъ на основаніи, и по данной сторонѣ построить равнобедренный треугольникъ.

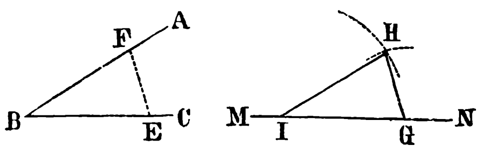
20. Построить треугольникъ, стороны котораго соотвѣтственно равны 6, 7 и 8 сант.

21. Построить равнобедренный треугольникъ, основаніе котораго равно 6 сант., а боковая сторона 9 сант.

22. Построить равносторонній треугольникъ, сторона котораго равна 7 сант.

23. **Перенесеніе угла**. Требуется перенести уголъ ABC на прямую MN такъ, чтобы вершина его находилась въ точкѣ I и одна сторона совпадала съ прямой MN.

Изъ точекъ I и B (черт. 3) описываемъ дуги одинаковыми радіусами, измѣряемъ циркулемъ разстояніе точекъ пересѣченія E и F дуги со сторонами даннаго угла и радіусомъ, равнымъ отрѣзку EF, описываемъ окружность изъ точки G, какъ изъ центра; эта окружность пересѣчетъ первую въ точкѣ H. Соединяя H съ I, получимъ искомый уголъ HIG.



Черт. 3.

Доказательство. Треугольникъ $EBF = \triangle HIG$, ибо $BE = IG$, $BF = IH$ и $GH = EF$, какъ радіусы равныхъ окружностей. Слѣдовательно, $\measuredangle EBF = \measuredangle GIH$, какъ углы, лежащіе противъ равныхъ сторонъ EF и HG.

Примѣчаніе. Задача возможна всегда, если сдѣлать допущеніе, что окружности, описанныя изъ точекъ I и G указанными радіусами, пересѣкутся. Такія окружности пересѣкаются въ двухъ точкахъ, и соотвѣтственно съ этимъ мы получимъ 2 угла, лежащіе по обѣ стороны данной прямой, равные данному углу.

24. Изъ данной точки провести два луча подъ угломъ, равнымъ данному.

25. Изъ данной точки провести 4 луча, составляющіе между собою равные углы.

26. Построить уголъ, равный суммѣ двухъ данныхъ угловъ.

27. Построить уголъ, равный разности двухъ данныхъ угловъ.

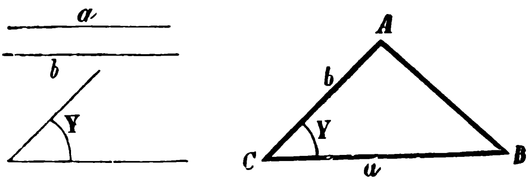
28. По данной суммѣ двухъ угловъ и одному изъ нихъ найти другой уголъ.

29. По данной разности двухъ угловъ и большему изъ нихъ опредѣлить меньшій.

30. По данной разности двухъ угловъ и меньшему изъ нихъ опредѣлить большій.

31. **Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ a и b и углу Y, лежащему между ними.**

Построеніе. Строимъ уголъ BCA, равный данному углу Y, и на сторонахъ его откладываемъ отъ вершины C отрѣзки CB и CA, равные соотвѣтственно даннымъ отрѣзкамъ *a* и *b*; концы A и B этихъ отрѣзковъ соединяемъ и получаемъ искомый треугольникъ ABC (черт. 4).



Черт. 4.

Доказательство. Треугольникъ BCA—искомый, ибо его сторона AC=b, CB=a и уголъ ACB=∡Y по построенію.

Изслѣдованіе. Отрѣзки *b* и *a* могутъ имѣть любую величину; уголъ же Y долженъ быть меньше 2d. Рѣшеніе можетъ быть только одно, ибо всѣ треугольники, удовлетворяющіе сказаннымъ условіямъ, равны между собой.

32. Построить прямоугольный треугольникъ, катеты котораго соотвѣтственно равны 5,2 и 6,5 сант.

33. Построить треугольникъ, двѣ стороны котораго равны 72 мм. и 37 мм. и уголъ между ними равенъ $^1/_3$d.

34. **Построить треугольникъ по сторонѣ и двумъ прилежащимъ къ этой сторонѣ угламъ.**

Построеніе. На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ BC, равный *a*, и при концахъ его строимъ углы B и C, равные соотвѣтственно даннымъ угламъ β и γ; стороны

BA и CA построенныхъ угловъ продолжаемъ до пересѣченія въ точкѣ A и получаемъ искомый треугольникъ BAC.

Доказательство. $BC = a$; $\measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle ACB = \gamma$.

Изслѣдованіе. Задача возможна при всякомъ a, но сумма $\measuredangle\gamma + \measuredangle\beta$ должна быть меньше 2d.

35. Построить треугольникъ, одна сторона котораго равна 9 см., а прилежащіе углы равны $^1/_2$ d и $^2/_3$ d.

Построить прямоугольный треугольникъ:

36—по катету и прилежащему острому углу;

37—по катету и противолежащему острому углу;

38—по гипотенузѣ и острому углу.

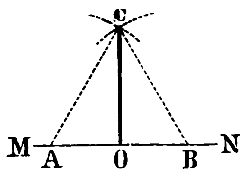
Построить равнобедренный треугольникъ:

39—по основанію и углу при основаніи;

40—по основанію и углу при вершинѣ.

41. Построить равнобедренный прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ, равной 72 мм.

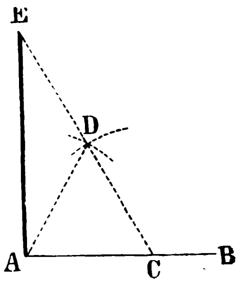
42. **Изъ данной точки O на прямой MN возставить къ ней перпендикуляръ.**



Черт. 5.

Отъ точки O въ обѣ стороны откладываемъ два равныхъ отрѣзка OA и OB (черт. 5); изъ точекъ A и B описываемъ равными радіусами пересѣкающіяся дуги; точку ихъ пересѣченія C соединяемъ съ точкою O; линія CO—искомая, ибо тр—ки AOC и BOC равны между собою, а потому $\measuredangle COA = \measuredangle COB = d$.

43. **Построить прямой уголъ при концѣ A отрѣзка AB.**



Черт. 6.

На прямой AB беремъ отрѣзокъ AC и на немъ строимъ равносторонній треугольникъ ACD (черт. 6), продолжаемъ сторону DC до E, такъ чтобы $DE = DA$, и соединяемъ E съ A, тогда EA будетъ перпендикуляромъ къ AB, ибо $\measuredangle DAC = \frac{2}{3}$ d; $\measuredangle EAD + \measuredangle AEC = 2\measuredangle EAD = \measuredangle ADC = \frac{2}{3}$ d, или $\measuredangle EAD = \frac{d}{3}$; $\measuredangle EAC = \measuredangle EAD + \measuredangle DAC = \frac{d}{3} + \frac{2d}{3} = d$.

44. **Раздѣлить данный отрѣзокъ пополамъ.**

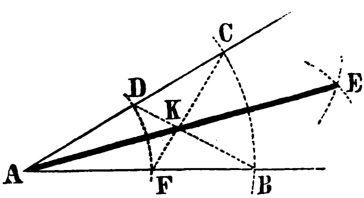
Задача приводится къ построенію двухъ равнобедренныхъ треугольниковъ на данномъ отрѣзкѣ, расположенныхъ одинъ по одну сторону данной прямой, другой—по другую сторону ея. Линія, соединяющая вершины этихъ тр—ковъ, дѣлитъ данный отрѣзокъ пополамъ.

45. Изъ данной точки внѣ прямой опустить на эту прямую перпендикуляръ.

Изъ данной точки радіусомъ, большимъ разстоянія точки до прямой, описываемъ окружность и отсѣкаемую этой окружностью хорду дѣлимъ пополамъ. Линія, соединяющая данную точку съ серединой хорды, — искомая.

46. Данный уголъ раздѣлить пополамъ.

1) Изъ вершины A даннаго угла CAB (черт. 7) описываемъ дугу BC произвольнымъ радіусомъ; изъ точекъ B и C, какъ изъ центровъ, описываемъ равными радіусами дуги и точку ихъ пересѣченія E соединяемъ съ A. Линія AE дѣлитъ уголъ CAB пополамъ, ибо треугольники ACE и ABE равны между собою.



Черт. 7.

2) Или откладываемъ на сторонахъ угла двѣ пары равныхъ между собою отрѣзковъ, именно: $AB = AC$, $AD = AF$ (черт. 7) и, соединяя точку пересѣченія K линій CF и BD съ A, получимъ линію AK, которая дѣлитъ $\sphericalangle CAB$ пополамъ, ибо треугольники CAF и ADB равны между собой, такъ какъ $AC = AB$, $AD = AF$ и $\sphericalangle CAF = \sphericalangle DAB$; изъ равенства этихъ треугольниковъ заключаемъ, что $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AFC$, какъ углы, лежащіе противъ равныхъ сторонъ; далѣе—треугольники AKD и AKF равны, ибо $AD = AF$, AK—общая сторона и $\sphericalangle ADK = \sphericalangle AFK$, изъ равенства же тр—ковъ слѣдуетъ, что $\sphericalangle DAK = \sphericalangle KAF$.

46в. Построить равнобедренный треугольникъ по основанію и высотѣ.

47. Данный отрѣзокъ раздѣлить на 4, 8, 16 и т. д. частей.

48. По данной суммѣ и разности двухъ отрѣзковъ опредѣлить каждый изъ нихъ.

49. Раздѣлить данный уголъ на 4, 8 частей.

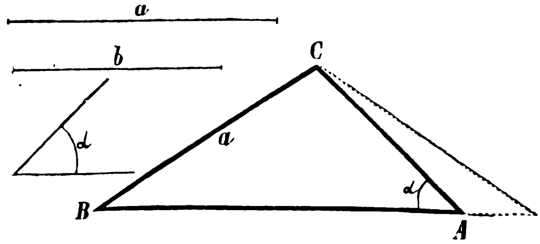
50. По данной суммѣ и разности двухъ угловъ построить каждый изъ нихъ.

51 Раздѣлить прямой уголъ на три равныя части.

Рѣшеніе. На одной изъ сторонъ угла строимъ равносторонній треугольникъ, имѣющій одну изъ вершинъ, общую съ вершиною даннаго прямого угла.

52. **Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ большей изъ данныхъ сторонъ.**

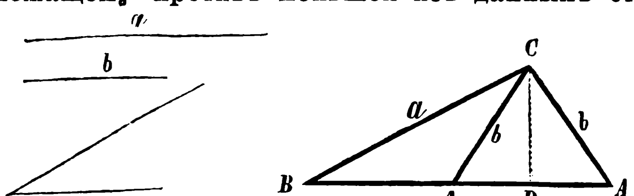
На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ СА (черт. 8), равный меньшей сторонѣ b; при точкѣ А строимъ уголъ А, равный α, и изъ точки С радіусомъ, равнымъ большему отрѣзку a, описываемъ дугу, которая и пересѣчетъ вторую сторону угла α въ точкѣ В; треугольникъ АВС — искомый



Черт. 8.

Изслѣдованіе. Сторона $a > b$; и потому, если b есть наклонная, то a, какъ большая наклонная, пересѣчетъ прямую ВА, и вторая точка пересѣченія должна лечь не на сторонѣ АВ, а на ея продолженіи; отсюда слѣдуетъ, что задача возможна, если данный уголъ $\alpha < 2d$, и рѣшеніе возможно только одно.

53. **Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ и по углу, лежащему противъ меньшей изъ данныхъ сторонъ.**



Черт. 9.

На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ ВС (черт. 9), равный большему отрѣзку a, при одномъ изъ концовъ его строимъ уголъ СВА, равный данному углу β, а изъ другого конца, какъ изъ центра, описываемъ дугу радіусомъ, равнымъ b; если эта дуга пересѣчетъ вторую сторону угла β въ точкѣ A, то треугольникъ ACB — искомый.

Изслѣдованіе: 1) Такъ какъ сторона $CA < CB$, то уголъ β долженъ быть непремѣнно острый; 2) для того, чтобы окружность пересѣкла прямую AB, необходимо, чтобы b была больше перпендикуляра CD; такъ какъ $b < a$, то конецъ наклонной ляжетъ ближе къ основанію перпендикуляра CD, и такихъ наклонныхъ будетъ двѣ: CA_1 и CA. Слѣдовательно, и треугольниковъ будетъ 2: CBA и CBA_1; 3) если $b < CD$, то окружность не пересѣчетъ совсѣмъ стороны BA, и треугольника нельзя построить. Итакъ, чтобы задача была возможна, нужно: 1) чтобы данный уголъ былъ острый; 2) чтобы меньшая сторона не была меньше разстоянія конца большаго отрѣзка, отложеннаго на сторонѣ даннаго угла, отъ другой стороны того же угла. Рѣшеній получимъ 2, если $b > CD$, и одно, если $b = CD$; въ первомъ случаѣ $\sphericalangle CA_1B + \sphericalangle CAB = 2d$.

54. Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и катету.

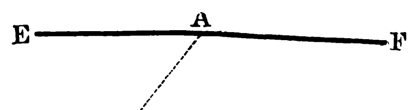
55. Построить равнобедренный треугольникъ по высотѣ и боковой сторонѣ.

56. По высотѣ и углу при основаніи.

57. Построить равносторонній треугольникъ по высотѣ.

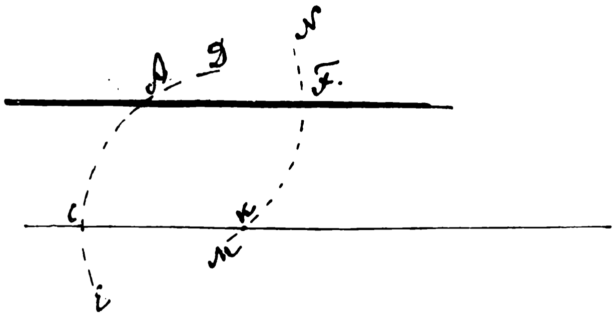
58. **Черезъ данную точку провести къ данной прямой ей параллельную.**

Дана прямая BC и точка A (черт. 10); черезъ точку A проводимъ какую-нибудь прямую AD, пересѣкающую данную прямую подъ угломъ ADC; на отрѣзкѣ AD строимъ $\sphericalangle DAE = \sphericalangle ADC$; тогда $EF \parallel BC$, ибо накрестъ - лежащіе углы, образуемые этими линіями съ сѣкущею AD, равны между собою.



Черт. 10.

Практически обыкновенно поступаютъ такъ: изъ данной точки A описываютъ дугу MN, пересѣкающую данную прямую въ точкѣ K; изъ точки K тѣмъ же радіусомъ описываютъ также дугу DE, пересѣкающую данную прямую въ точкѣ C; откладываютъ дугу KF отъ точки K, равную дугѣ CA; тогда прямая AF будетъ параллельна прямой CK (черт. 11).



Черт. 11.

59. Провести прямую, параллельную данной прямой и находящуюся отъ нея въ данномъ разстояніи.

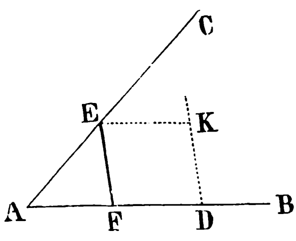
60. Черезъ точку внѣ данной прямой провести прямую такъ, чтобы она съ данной прямой составляла уголъ, равный данному.

61. Между точкой и прямой помѣстить отрѣзокъ данной длины.

62. Между двумя параллельными прямыми помѣстить отрѣзокъ данной длины.

63. Между сторонами угла помѣстить отрѣзокъ данной длины такъ, чтобы онъ былъ параллеленъ данной прямой или составлялъ съ нею данный уголъ.

Рѣшеніе. На сторонѣ AB даннаго угла CAB строимъ уголъ KDA, равный данному (черт. 12), на сторонѣ KD построеннаго угла откладываемъ KD = данному отрѣзку; черезъ точку K проводимъ линію KE || AB и изъ точки E линію EF || KD; EF и будетъ искомая линія.



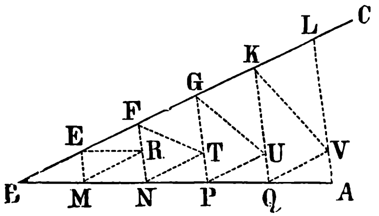
Черт. 12.

64. Даны два угла треугольника. Построить третій уголъ.

65. По данному острому углу прямоугольнаго треугольника построить другой острый уголъ того же треугольника.

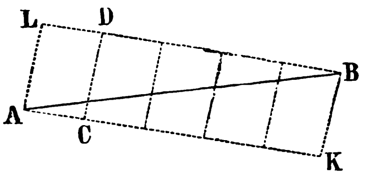
66. Раздѣлить данный отрѣзокъ на n равныхъ между собою частей.

Черезъ конецъ даннаго отрѣзка BA (черт. 13) проводимъ какую-нибудь прямую BC, составляющую съ BA какой-нибудь уголъ, и откладываемъ на ней отъ точки B *n* равныхъ между собою произвольной длины отрѣзковъ BE=EF=FG.....; конецъ L послѣдняго изъ отрѣзковъ соединяемъ съ A и изъ точекъ K, G, F..... проводимъ линіи KQ, GP, FN...., параллельныя AL, которыя пересѣкутъ прямую AB въ искомыхъ точкахъ. Въ самомъ дѣлѣ, проводя прямыя MR, NT, PU..... параллельно BC и соединяя E съ R, F съ T, G съ U и т. д., получимъ рядъ равныхъ между собою тр—овъ: EFR=ERM; FGT=FTN; GUK=GUP и т. д.; изъ равенства этихъ тр—овъ слѣдуетъ, что EF=MR, FG=NT, PU=GK и т. д., а потому BE=MR=NT=PU....; а изъ равенства тр—овъ BEM, MRN, PTN, PUQ и т. д. слѣдуетъ равенство отрѣзковъ: BM=MN=PN=PQ и т. д.



Черт. 13.

2-е рѣшеніе. При концахъ A и B даннаго отрѣзка по разныя стороны его строимъ два луча, составляющіе съ отрѣзкомъ равные углы (черт. 14); отъ вершины этихъ угловъ откладываемъ на каждомъ лучѣ *n* равныхъ между собою отрѣзковъ; концы ихъ соединяемъ прямыми линіями AL, CD..... KB; пересѣченія этихъ прямыхъ съ даннымъ отрѣзкомъ будутъ искомыми точками дѣленія.



Черт. 14.

67а. Построить 2 отрѣзка, изъ которыхъ одинъ составлялъ бы четвертую часть, а другой $^1/_5$ часть даннаго отрѣзка.

67. Построить два отрѣзка, изъ которыхъ одинъ составлялъ бы: a) $^2/_3$, b) $^4/_5$, c) $^5/_6$ другого.

68. По данному углу A при основаніи равнобедреннаго треугольника построить уголъ при его вершинѣ.

69. По данному углу при вершинѣ равнобедреннаго треугольника построить углы, равные угламъ при его основаніи.

70. Построить уголъ, равный углу, составленному равнодѣлящими угловъ при основаніи равнобедреннаго тр—ка, если уголъ его при вершинѣ равенъ C.

71. Построить половину даннаго угла, не дѣля его пополамъ (§ 33, сл. I).

72. Построить уголъ вдвое большій, чѣмъ данный уголъ, не прибѣгая къ сложенію угловъ.

73. Построить уголъ, равный углу, составленному равнодѣлящими острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника.

74. Построить уголъ, равный внѣшнему углу при основаніи равнобедреннаго треугольника, уголъ при вершинѣ котораго равенъ данному углу.

75. Провести окружность радіусомъ, равнымъ 4 сант., и въ ней 5 хордъ длиною въ 3 сант., опустить на эти хорды изъ центра перпендикуляры.

76. Провести окружность радіусомъ, равнымъ 3 сант., и діаметръ, изъ концовъ котораго провести рядъ хордъ, длиною въ 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5 сант. На каждую изъ проведенныхъ хордъ опустить изъ центра перпендикуляры.

77. Начертить окружность радіусомъ, равнымъ 4 сант., и въ концѣ одного изъ діаметровъ возставить къ нему перпендикуляръ.

78. Провести двѣ перпендикулярныя другъ другу прямыя, отъ точки ихъ пересѣченія отложить на четырехъ лучахъ отрѣзки въ $^1/_2$ сант. и изъ концовъ ихъ, какъ изъ центровъ, описать окружности, проходящія черезъ начало лучей.

79. Провести окружность радіусомъ, равнымъ 4 сант., и въ ней два перпендикулярные діаметра; изъ концовъ этихъ діаметровъ, какъ изъ центровъ, описать окружности, проходящія черезъ центръ первой окружности, и изъ точекъ пересѣченія этихъ окружностей описать окружности, проходящія также черезъ центръ первой окружности.

80. Начертить кольцо, ширина котораго $=0,5$ сант., а радіусъ внѣшней окружности $=3$ сант.

81. Начертить два такихъ кольца, какъ и въ предыдущей задачѣ, взаимно пересѣкающихся.

82. Начертить 4 такихъ кольца, какъ въ задачѣ 80, центры которыхъ лежали бы на двухъ перпендикулярныхъ прямыхъ и внѣшнія окружности которыхъ проходили бы черезъ точку пересѣченія прямыхъ.

83. Описать окружность радіусомъ въ 4 сант. и провести горизонтальный діаметръ АОВ; на радіусахъ АО и ОВ по нижнюю сторону ихъ построить двѣ полуокружности и построить на нихъ кольца шириною въ 0,5 сант.

84. Провести двѣ параллельныя прямыя, находящіяся на разстояніи 4 сант. другъ отъ друга. На нижней прямой отмѣтить рядъ точекъ A, B, C, D, E...., находящихся на разстояніи 2 сант. другъ отъ друга; изъ точекъ A, B, C, D..... и т. д., какъ изъ центра, описать дуги радіусами въ 2 сант. длиною и на дугахъ построить кольца шириною въ 0,5 сант.

85. Начертить двѣ параллельныя прямыя, проведенныя на разстояніи 3 сант., на одной изъ нихъ отложить послѣдовательно отрѣзки, длиною въ 3 сант.; на этихъ отрѣзкахъ, какъ на діаметрахъ, описать полуокружности, лежащія между параллельными линіями, изъ концовъ отрѣзковъ возставить перпендикуляры, а на дугахъ полуокружностей построить кольца шириною въ 0,5 сант., принимая эти полуокружности за внѣшнія дуги колецъ.

86. Описать окружность радіусомъ, равнымъ 3 сант.; провести два перпендикулярныхъ діаметра; каждый изъ четырехъ угловъ, образованныхъ этими діаметрами, раздѣлить пополамъ; изъ концовъ каждаго изъ 4-хъ образовавшихся діаметровъ провести дуги радіусами, равными хордамъ, соединяющимъ концы смежныхъ діаметровъ, и на всѣхъ дугахъ построить кольца шириною въ 0,2 сант.

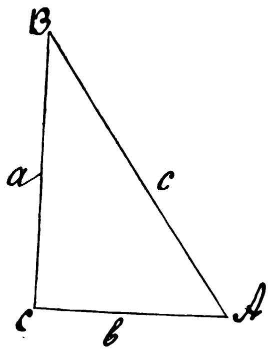
87. Описать окружность радіусомъ въ 3 сант.; провести два перпендикулярныхъ діаметра; каждый изъ 4 прямыхъ угловъ, образованныхъ этими діаметрами, раздѣлить пополамъ; изъ концовъ каждаго изъ 8 радіусовъ радіусами, равными 1,5 сант., описать дуги до пересѣченія ихъ со смежными радіусами и на этихъ дугахъ построить кольца шириною въ 0,3 сант.

88. Сдѣлать такое же построеніе, какъ и въ предыдущей задачѣ, проведя 12 діаметровъ, составляющихъ между собою равные углы.

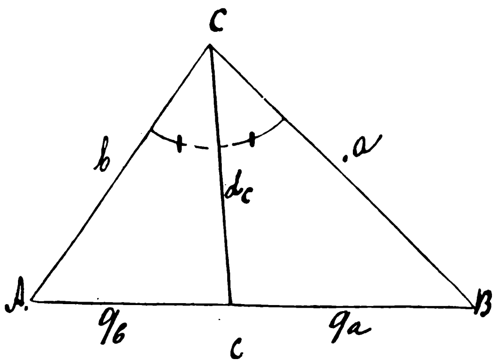
ГЛАВА II.

Простѣйшія задачи на построеніе треугольниковъ.

Обозначенія. 1) Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC катеты BC и AC обозначаются соотвѣтственно буквами a и b; гипотенуза же AB—буквою c (черт. 15).



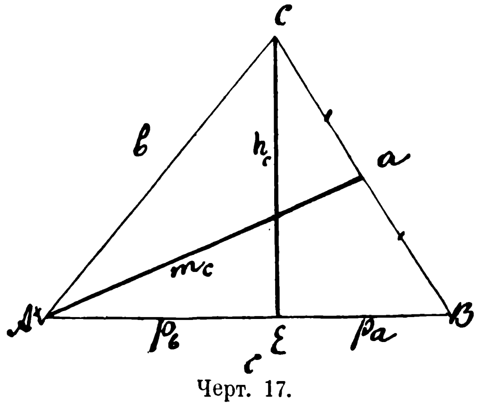
Черт. 15.



Черт. 16.

2) Въ косоугольномъ треугольникѣ стороны AC, BC и BA противъ угловъ B, A и C соотвѣтственно обозначаются буквами b, a и c; равнодѣлящая Cc угла C—буквою α_c; отрѣзки Ac и Bc, образуемые равнодѣлящей Cc на противоположной сторонѣ AB, буквами q_a и q_b. Соотвѣтственно съ этимъ обо значеніемъ равнодѣлящая угла A обозначается буквою α_a, равнодѣлящая угла B буквою α_b (черт. 16).

3) Перпендикуляръ CE, опущенный изъ вершины угла C на противоположную сторону (высота треугольника), буквою h_c; отрѣзки AE и EB стороны AB, образуемые этимъ перпендикуляромъ, обозначаются p_b (проекція стороны b на c) и p_a (проекція стороны a на c). Также высота, опущенная на сторону a, обозначается чрезъ h_a и на сторону b—h_b (черт. 17).



Черт. 17.

Линія, соединяющая вершину A треугольника съ серединою стороны a, обозначается буквою m_a;—вершину B съ серединою стороны b треугольника буквою—m_b.

Равныя стороны равнобедреннаго треугольника—a, a и основаніе треугольника—c.

Уголъ, образуемый линіями K и S—$\angle KS$; такъ уголъ, образуемый равнодѣлящей (биссектриссою) угла C и средней линіей (медіаной), идущей изъ вершины того же угла,—$\angle \alpha_c\, m_c$.

90—132. Построить прямоугольный треугольникъ, если даны: 90. a и α_c, т.-е. катетъ и биссектрисса прямого угла C.

91. b и α_c (катетъ и биссектрисса прилежащаго къ нему угла A).

92. a и A (катетъ и противоположный ему острый уголъ).

93. α_c и $\angle A$ (биссектрисса прямого угла C и уголъ A).

94. α_c; $\angle A = \angle B$ (дана биссектрисса прямого угла C и извѣстно, что искомый прямоугольный треугольникъ есть треугольникъ равнобедренный).

95. α_c; $\angle B$.

96. α_c, $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle B$.

97. α_c, $\sphericalangle A = 3 \sphericalangle B$.

98. α_c, $\sphericalangle A = 5 \sphericalangle B$.

99. a, c.

100. a, h_c.

101. a, m_a

102. b, m_a.

103. a, $\sphericalangle A$.

104. h_c, $\sphericalangle A$.

105. h_c, $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

106. h_c, $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle B$.

107. h_c, $\sphericalangle A = 3 \sphericalangle B$.

108. h_c, $\sphericalangle A = 5 \sphericalangle B$.

109. h_c, $a = b$.

110. a; $a = b$.

111. p_a; $\sphericalangle A$.

112. p_a; $\sphericalangle B$.

113. a; $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

114. a; $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle B$.

115. a; $\sphericalangle A = 3 \sphericalangle B$.

116. a; $\sphericalangle A = 5 \sphericalangle B$.

117. c; $\sphericalangle A$.

118. $\sphericalangle A$; α_a.

119. c; $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

120. c; $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle B$.

121. c; $\sphericalangle A = 3 \sphericalangle B$.

122. c; $\sphericalangle A = 5 \sphericalangle B$.

123. α_a; $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

124. α_a; $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle B$.

125. α_a; $\sphericalangle A = 3 \sphericalangle B$.

126. α_a; $\sphericalangle A = 5 \sphericalangle B$.

127. c; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

128. a; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

129. p_a; h_c.

130. α_a; $a = b$.

131. c; $a = b$.

132. Построить равносторонній треугольникъ по высотѣ h.

Построить равнобедренный треугольникъ по:

134. a; c.
135. c; $\sphericalangle C$.
136. c; $\sphericalangle A$.
137. α_a, $\sphericalangle C$.
138. c, h_c.
139. a, h_c.
140. a, h_a.
141. c, h_a.
142. h_c, $\sphericalangle A$.
143. h_a, $\sphericalangle A$.
144. h_a, $\sphericalangle C$.
145. h_c, $\sphericalangle C$.
146. h_a, $\sphericalangle ch_a$.
147. h_a, $\sphericalangle bh_a$.
148. a; m_a.

Построить косоугольный треугольникъ по:

149. h_c, p_a, p_b.
150. a, p_a, p_b.
151. p_a, p_b, $\sphericalangle A$.
152. a, b, h_c.
153. a, c, h_c.
154. a, h_c, p_b.
155. a, b, p_a.
156. h_a, p_a, p_b ($p_a + p_b = c$).
157. a, h_c, $\sphericalangle C$.
158. a, p_a, $\sphericalangle C$.
159. h_c, p_a, $\sphericalangle C$.
160. a, h_c, $\sphericalangle A$.
161. a, h_c, m_c.
162. c, m_c, $\sphericalangle m_c h_c$.
163. h_c, m_c, p_a.
164. a, h_c, $\sphericalangle cm_c$.
165. c, h_c, $\sphericalangle cm_c$.
166. h_c, p_b, $\sphericalangle B$.
167. a, p_b, $\sphericalangle A$.
168. b, p_a, $\sphericalangle B$.
169. h_a, p_a, $\sphericalangle B$.
170. c, h_c, h_a.
171. h_c, m_c, $\sphericalangle A$.
172. c, h_c, m_c.
173. c, h_a, $\sphericalangle cm_c$.
174. a, p_a, $\sphericalangle cm_c$.
175. h_c, p_a, $\sphericalangle cm_c$.
176. b, h_c, m_c.
177. a, p_a, $\sphericalangle am_a$.
178. h_c, p_a, $\sphericalangle am_a$.
179. c, h_a, m_c.
180. b, p_c, $\sphericalangle cm_c$.
181. a, p_a, m_a.
182. a, h_c, $\sphericalangle am_c$.
183. h_c, m_c, $\sphericalangle am_c$.
184. a, p_a, $\sphericalangle am_c$.
185. c, h_a, $\sphericalangle am_c$.
186. a, p_a, $\sphericalangle cm_a$.
187. h_c, p_a, $\sphericalangle cm_a$.
188. a, h_c, α_c.
189. h_c, α_c, $\sphericalangle C$.
190. h_c, α_c, $\sphericalangle A$.
191. a, α_c, p_a.
192. h_c, α_c, p_b.
193. h_c, α_c, q_b.
194. b, p_b, q_b.
195. a, h_c, q_a.
196. h_c, p_b, q_b.
197. a, h_b, α_c.
198. a, p_a, α_b.
199. a, h_c, $\sphericalangle c\alpha_c$.
200. h_c, α_c, $\sphericalangle A + \sphericalangle B$.
201. a, h_c, $p_a = 2p_b$.
202. a, p_a, $p_b = h_c$.
203. a, h_c, $\sphericalangle A = 2\sphericalangle B$.
204. a, h_c, $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.
205. a, h_a, m_a.
206. c, h_a, $\sphericalangle A$.
207. h_c, p_a, m_a.
208. c, h_a, α_b.
209. a, h_b, h_c.
210. c, h_c, $\sphericalangle A$.
211. h_c, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
212. h_c, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
213. h_a, p_b, $\sphericalangle B$.
214. h_c, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle bh_c$.

215. c, h_a, h_b.
216. h_a, h_b, $\sphericalangle C$.
217. h_b, $\sphericalangle ch_a$, $\sphericalangle ch_b$.
218. h_a, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle cm_c$.
219. h_a, m_c, $\sphericalangle B$.
220. h_c, $\sphericalangle cm_c$, $\sphericalangle am_c$.
221. h_c, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle am_c$.
222. h_b, h_c, $\sphericalangle C$.
223. h_c, q_b, $\sphericalangle B$.
224. h_c, q_a, $\sphericalangle c\alpha_c$.
225. h_c, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle c\alpha_c$.
226. h_c, α_b, p_a.
227. h_c, $\sphericalangle B$, p_b.
228. h_a, $\sphericalangle B$, $c = m_a$.
229. h_c, $\sphericalangle B$, $a = m_a$.
230. h_c, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle cm_c$.
231. h_a, h_b, $\sphericalangle A + \sphericalangle B$.
232. h_c, p_a, $\sphericalangle am_c$.
233. h_a, $\sphericalangle B$, $c = \alpha_b$.
234. h_c, α_b, $\sphericalangle B$.
235. a, p_a, $\sphericalangle A$.
236. p_a, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
237. p_a, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle am_a$.
238. p_a, m_c, $\sphericalangle B$.
239. p_a, m_a, $\sphericalangle B$.
240. p_a, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle am_a$.
241. h_a, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle am_c$.
242. p_a, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle cm_a$.
243. α_c, p_a, $\sphericalangle B$.
244. p_a, q_b, $\sphericalangle B$.
245. α_b, p_a, $\sphericalangle B$.
246. a, c, $\sphericalangle ch_a$.
247. b, $\sphericalangle A$, p_a.
248. a, c, m_c.
249. c; h_a, p_b.
250. a, h_c, α_b.
251. c, $\sphericalangle B$, $m_c = \frac{1}{2} c$.
252. α_c, p_a, $\sphericalangle c\alpha_c$.
253. a, $\sphericalangle B$, $c = 2h_c$.
254. h_c, p_b, α_a.
255. c, m_c, $\sphericalangle cm_c$.
256. a, m_c, $\sphericalangle am_c$.
257. a, α_c, $\sphericalangle C$.
258. a, q_a, $\sphericalangle B$.
259. α_c, q_a, $\sphericalangle c\alpha_c$.
260. a, q_a, $\sphericalangle C$.
261. c, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle cm_c$.
262. m_c, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle cm_c$.
263. a, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle cm_c$.
264. c, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle cm_c$.
265. α_c, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle c\alpha_c$.
266. q_b, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
267. q_b, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$.
268. c, m_c, $\sphericalangle A$.
269. a, m_c, $\sphericalangle B$.
270. a, m_c, $\sphericalangle cm_c$.
271. a, c, $\sphericalangle cm_c$.
272. c, m_c, $\sphericalangle am_c$.
273. a, c, $\sphericalangle am_c$.
274. α_c, q_a, $\sphericalangle C$.
275. a, α_c, $\sphericalangle B$.
276. α_c, q_b, $\sphericalangle A$.
277. a, α_c, $\sphericalangle c\alpha_c$.
278. a, q_a, $\sphericalangle c\alpha_c$.
279. α_a, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$.
280. α_c, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
281. a, α_c, q_a.
282. a, q_a, $\sphericalangle C$.
283. $a + b + c$; a, b.
284. $a + b$; $a - b$; c.
285. c, $\sphericalangle A$; $\sphericalangle A + \sphericalangle B$.
286. c, $\sphericalangle A$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
287. c, $\sphericalangle A$;$+\sphericalangle B$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
288. c, $\sphericalangle C$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
289. a, $\sphericalangle C$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
290. $a + b$; a, $\sphericalangle C$.
291. $a - b$; a, $\sphericalangle C$.

292. $a+b$; $a-b$; $\measuredangle C$.
293. $a+b$, a, h_c.
294. $a-b$, a, h_c.
295. $a+b$, $a-b$, h_c.
296. h_c; $\measuredangle A$; $\measuredangle A \mp \measuredangle B$.
297. h_c; $\measuredangle A$; $\measuredangle A - \measuredangle B$.
298. h_c; $\measuredangle A+\measuredangle B$; $\angle A - \angle B$.
299. $a+b$, a, h_a.
300. $a+b$, a, m_a.
301. $a-b$, a, h_a.
302. $a-b$, a, m_a.
303. $a+b$, $a-b$, c_a.
304. $a+b$; $a-b$; m_a.

ГЛАВА III.

Простѣйшія задачи на построеніе четыреугольниковъ.

Построить квадратъ.

305. По сторонѣ *a*.

306. По діагонали *e*.

307—311. **Построить прямоугольникъ.**

307. По двумъ сторонамъ *a* и *b*.

308. По сторонѣ *a* и діагонали *e*.

309. По діагонали *e* и углу E между діагоналями.

310. По сторонѣ *a* и углу E между діагоналями.

311. По сторонѣ *a* и углу *ae* между стороной и діагональю *e*.

312—318. **Построить ромбъ.**

312. По сторонѣ *a* и углу A.

313. По сторонѣ *a* и діагонали *e*.

314. По діагонали *e* и углу A.

315. По двумъ діагоналямъ *e* и *f*.

316. По сторонѣ *a* и высотѣ *h* ромба.

317. По высотѣ *h* и острому углу A.

318. По діагонали *e* и высотѣ *h*.

319—335. **Построить параллелограммъ.**

319. По двумъ сторонамъ *a* и *b* и углу A между ними.

320. По двумъ сторонамъ *a* и *b* и діагонали.

321. По сторонѣ *a*, прилежащему углу B и діагонали *e*, лежащей противъ угла B.

322. По сторонѣ *a*, діагонали *e* и углу *ae* между ними.

323. По сторонѣ *a* и двумъ діагоналямъ *e* и *f*.

324. По сторонѣ *a*, діагонали *e* и углу E между діагоналями.

325. По двумъ діагоналямъ и углу между ними.

326. По двумъ сторонамъ a, b и высотѣ h_a.

327. По углу A, прилежащей сторонѣ a и высотѣ h_a, опущенной на данную сторону.

328. По высотѣ h_a, углу A и противолежащей діагонали f.

329. По сторонѣ b, высотѣ h_a, опущенной на сторону a и діагонали f, лежащей противъ угла A.

330. По двумъ діагоналямъ e и f и высотѣ h_a.

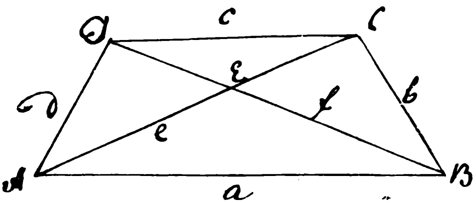
331. По діагонали e, высотѣ h_a и углу E между діагоналями.

332. По сторонѣ a и угламъ ae и be, образуемымъ діагональю со сторонами параллелограмма.

333. По діагонали e и угламъ ae и be, образуемымъ діагональю со сторонами параллелограмма.

334. По высотѣ h_a, $\sphericalangle ae$ и $\sphericalangle be$.

335. По высотѣ h_a, h_b и $\angle$A.



Черт. 18.

336. **Построить трапецію** по тремъ сторонамъ a, b, d и $\angle$B (черт. 18).

337. a, b, $\angle$A, $\sphericalangle$B.

338. По двумъ сторонамъ a, b, діагонали f и $\sphericalangle$B.

339. a, c, e, $\sphericalangle$B.

340. a, b, c, e.

341. a, b, d, e.

342. a, b, c, f.

343. a, b, $\sphericalangle$A, $\sphericalangle$C.

344. a, b, $\sphericalangle$C, $\sphericalangle$D.

345. a, b, c, $\sphericalangle$ae (уголъ между стороною a и діагональю e).

346. a, b, $\sphericalangle$ae и $\sphericalangle$af.

347. a, c, e, $\sphericalangle$ae.

348. c, e, $\sphericalangle$ae и b.

349. c, e, $\sphericalangle$ae и $\sphericalangle$be.

350. a, b, $\sphericalangle$af и $\sphericalangle$bf.

351. a, b, c, h_a.

352. a, b, d, h_a.

353. a, b, f, h_a.

354. a, b, c, $\sphericalangle$B.

355. a, c, e, h_a.

356. a, d, e, h_a.

357. a, e, h_a, $\sphericalangle$A.

358. a, e, f, h_a.

359. b, e, f, h_a.

360. a, c, h_a, $\sphericalangle$B.

361. a, d, h_a, $\sphericalangle$B.

362. a, f, h_a, $\sphericalangle$B.

363. a, h_a, $\sphericalangle$A, $\sphericalangle$B.

364. e, h_a, $\sphericalangle$A, $\sphericalangle$B.

365. e, f, h_a, $\sphericalangle$B.

366. a, h_a, $\sphericalangle$ea, $\sphericalangle$af.

367. e, h_a, $\sphericalangle$eb, $\sphericalangle$de.

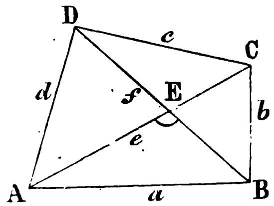
368. a, b, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle E$.
369. a, e, h_a, $\sphericalangle E$.
370. b, e, h_a, $\sphericalangle E$.
371. a, b, h_a, $\sphericalangle E$.
372. a, h_a, $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle E$.
373. a, b, $\angle B$ и извѣстно, что $e = f$.
374. a, b, h_a, $e = f$.
375. a, b, h_a, $2e = f$.
376. a, b, h_a, $\angle ae = \angle af$.
377. a, b, h_a $\angle A = 2\angle B$.
378. a, b, h_a; $d = 2b$.
379. c, h_a, $\sphericalangle B$, $2c = a$.
380. b, e, h_a; $2c = a$.
381. $a = b$, c, e, $\angle B$.
382. $a = b$, c, e, h_a.
383. $a = b$, c, h_a, $\angle E$.
384. a, e, f, $\sphericalangle A = d$ (прямому углу).
385. a, b, $c = d$, $\sphericalangle B$.
386. a, b, e, $c = d$.

Построить равнобедренную трапецію по

387. a, e, h_a.
388. a, b, $\angle B$.
389. a, b, e.
390. a, e, $\sphericalangle B$.
391. b, e, $\angle B$.
392. a, e, $\sphericalangle ae$.
393. b, e, $\sphericalangle be$.
394. a, b, h_a.
395. a, h_a, $\angle A$.
396. b, e, h_a.
397. e, h_a, $\angle B$.
398. a, h_a, $\sphericalangle ae$.
399. b, h_a, $\sphericalangle be$.

400—457. Построить четыреугольникъ по:

401. a, b, c, d, e.
402. a, b, c, e, f.
403. a, b, c, d, $\sphericalangle B$.
404. a, b, d, e, $\sphericalangle A$.
405. a, b, e, $\sphericalangle ce$ и $\sphericalangle de$.
406. a, b, e, $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle D$.
407. a, b, c, f, $\sphericalangle af$.
408. a, b, c, e, $\sphericalangle E$.
409. a, b, e, f, $\sphericalangle af = \sphericalangle bf$.
410. a, b, e, f, $\sphericalangle E$.
411. a, b, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$.
412. a, b, f, $\angle B$, $\angle E$.
413. a, b, c, e, $\angle A$.
414. a, b, c, e, $\angle D$.
415. a, c, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
416. a, b, e, f, $\sphericalangle A$.
417. a, c, e, f, $\sphericalangle A$.
418. a, e, f, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.



Черт. 19.

419. a, e, f, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
420. a, b, f, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
421. a, b, f, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle D$.
422. a, b, e, f, $\sphericalangle A + \sphericalangle D$.
423. a, e, f, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C + \sphericalangle D$.
424. a, e, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
425. a, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle E$.
426. a, e, d, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
427. a, b, c, e, $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.
428. a, e, $\sphericalangle B$, $b = c = d$.
429. a, c, e, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$.
430. a, c, e, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.

431. a, c, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle D$.
432. a, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
433. a, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$.
434. a, b, c, $\sphericalangle af$, $\sphericalangle bf$.
435. a, c, e, $\sphericalangle ae$, $\sphericalangle ce$.
436. a, b, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$; $e = f$.
437. a, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $b = d$.
438. a, b, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
439. a, b, c, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
440. a, b, f, $\sphericalangle ae$, $\sphericalangle af$.
441. a, b, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle af$, $\sphericalangle cf$.
442. a, b, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle af$, $\sphericalangle cf$.
443. a, b, $\sphericalangle af$, $\sphericalangle bf$, $\sphericalangle cf$.
444. a, b, e, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle A + \sphericalangle D$.
445. a, c, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle E$.
446. a, b, c, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle E$.
447. a, b, e, f, $\sphericalangle E$.
448. a, e, $\sphericalangle ae$, $\sphericalangle ce$, $\sphericalangle E$.
449. a, b, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.
450. a, b, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle ec = \sphericalangle de$.
451. a, b, f, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle E$.
452. a, b, c, $\sphericalangle B$, $e = f$.
453. $a = b$, $\sphericalangle B$, e, f, $\sphericalangle E$.
454. $a = b$, $c = d$, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
455. $a = b$, $c = d$, e, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$.
456. a, b, $c = d$, e, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$.
457. a, b, $c = d$, e, f.

ГЛАВА IV.

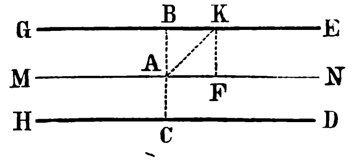
Геометрическія мѣста и задачи, рѣшаемыя помощью геометрическихъ мѣстъ.

I. Геометрическія мѣста.

Многія задачи геометріи приводятся къ отысканію одной точки. Если имѣемъ одну или опредѣленное число точекъ, удовлетворяющихъ условіямъ задачи, то задача называется *опредѣленною*. Если условіямъ задачи удовлетворяетъ безчисленное множество точекъ, то задача называется *неопредѣленною*. Рядъ точекъ, удовлетворяющихъ условіямъ неопредѣленной задачи, называется *геометрическимъ мѣстомъ точекъ*.

458. **Найти точку, которая находится въ данномъ разстояніи отъ данной прямой.**

Построеніе и доказательство. Возставимъ изъ произвольной точки A данной прямой MN перпендикуляры AB и AC (черт. 20), равные данному разстоянію; черезъ точки B и C проводимъ линіи, параллельныя MN; тогда любая точка прямыхъ GE и HD, напр., точка K, удовлетворяетъ условіямъ задачи, ибо KF=AB.

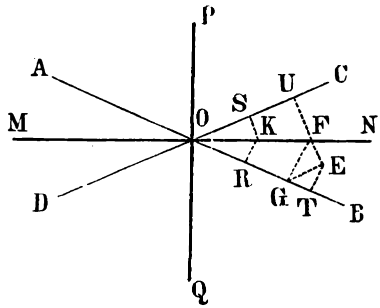


Черт. 20.

Разстояніе всякой точки, не лежащей на этихъ параллельныхъ, будетъ, очевидно, либо больше, либо меньше даннаго разстоянія, а потому эти параллельныя будутъ геометрическимъ мѣстомъ точекъ, находящихся въ данномъ разстояніи отъ данной прямой.

459. **Найти точку, которая находится въ равномъ разстояніи отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ AB и CD.**

Анализъ. Положимъ, что точка K есть искомая (черт. 21), и перпендикуляры KR и KS, опущенные изъ нея на AB и CD, равны между собою. Тогда тр—ки OKS и OKR равны между собою, а потому ∢SOK=∢KOR; слѣд., линія KO—равнодѣлящая угла COB; кромѣ того, легко видѣть, что всѣ точки этой равнодѣлящей находятся въ равномъ разстояніи отъ сторонъ угла.



Черт. 21.

Построеніе и доказательство. Дѣлимъ углы, образуемые пересѣченіемъ линій AB и CD пополамъ линіями MN и PQ, всѣ точки которыхъ равно отстоятъ отъ прямыхъ AB и CD. Каждая точка этихъ равнодѣлящихъ, напр., точка K равно отстоитъ отъ сторонъ угла COB, что слѣдуетъ изъ равенства тр—ковъ SOK и KOR. Кромѣ того, всякая точка E, не лежащая на этихъ равнодѣлящихъ, не находится въ равномъ разстояніи отъ прямыхъ MN и PQ. Въ самомъ дѣлѣ, опустивъ перпендикуляры ET и EU изъ E на прямыя AB и CD и изъ точки F (пересѣченія перпендикуляра EU съ равнодѣлящей MN) на прямую OB, получимъ, что UF=FG; FE+FG>GE; FE+UF=EU; EU>GE, которая, въ свою очередь, какъ наклонная, больше ET, а потому EU>ET. Отсюда заключаемъ, что геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ сторонъ угла, есть двѣ перпендикулярныя между собою линіи, дѣлящія данный и смежный ему углы пополамъ.

Простѣйшія геометрическія мѣста, кромѣ указанныхъ выше, суть слѣдующія:

1. **Геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ разстояніи r отъ одной точки C, есть окружность круга, описанная изъ C, какъ центра, радіусомъ, равнымъ r,** что слѣдуетъ прямо изъ опредѣленія окружности.

2. **Геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ концовъ даннаго отрѣзка, есть перпендикуляръ, возставленный изъ середины этого отрѣзка.**

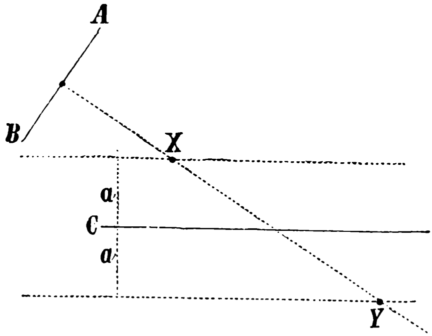
II. Задачи, рѣшаемыя способомъ геометрическихъ мѣстъ.

Элементами фигуръ, разсматриваемыхъ въ элементарной геометріи, служатъ точка, прямая линія и окружность. Изъ нихъ прямая опредѣляется двумя точками, окружность — положеніемъ центра и длиной радіуса, или, что то же, положеніемъ центра и положеніемъ какой-либо точки на окружности. Отсюда слѣдуетъ, что рѣшеніе геометрическихъ задачъ на построеніе можетъ быть приведено къ опредѣленію положенія одной или нѣсколькихъ точекъ. Наиболѣе общій способъ опредѣленія положенія точки состоитъ въ опредѣленіи искомой точки, какъ точки пересѣченія двухъ геометрическихъ мѣстъ.

Положимъ, что задача сведена къ опредѣленію положенія на плоскости нѣкоторой точки F. Если мы отбросимъ одно изъ условій, которому должно удовлетворять положеніе искомой точки, то получимъ неопредѣленную задачу, и остальнымъ условіямъ задачи будетъ удовлетворять не одна точка, а цѣлый рядъ ихъ — *геометрическое мѣсто* точекъ. Если затѣмъ мы удержимъ отброшенное прежде условіе, а отбросимъ новое, получимъ и новую задачу, которой удовлетворяетъ другой рядъ точекъ. Точка общая, обоимъ рядамъ, и есть искомая.

Примѣры. 460. **Найти точку, находящуюся въ равномъ разстояніи отъ концовъ даннаго отрѣзка AB и въ разстояніи a отъ данной прямой CS.**

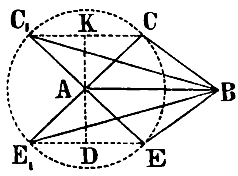
Анализъ и построеніе. Искомая точка должна удовлетворять 2-мъ условіямъ, во-1-хъ, она должна находиться въ равномъ разстояніи отъ концовъ отрѣзка AB, и 2) она должна находиться въ данномъ разстояніи отъ отрѣзка CS. Первому условію удовлетворяютъ всѣ точки перпендикуляра, возставленнаго изъ середины отрѣзка; второму же—всѣ точки, лежащія на прямыхъ, проведенныхъ параллельно CS въ разстояніи a отъ нея. Точки X и Y—пересѣченія этихъ прямыхъ суть искомыя (черт. 22).



Черт. 22.

461. Построить тр—къ по данному основанію c, данной высотѣ h_c и сторонѣ b.

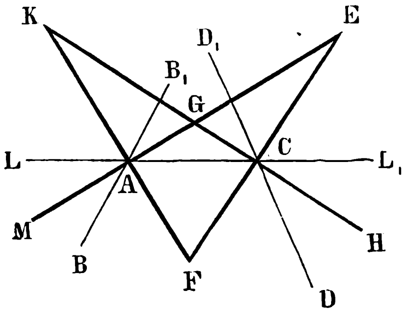
Анализъ. Положимъ, что нужно построить тр—къ по основанію c и сторонѣ b; пусть отрѣзокъ $AB = c$ (черт. 23); вершина C должна находиться отъ A въ разстояніи b, т.-е. должна лежать на окружности, описанной изъ точки A радіусомъ b; кромѣ того, она должна находиться въ разстояніи h отъ AB, т.-е. на линіяхъ, параллельныхъ AB, и проведенныхъ отъ нея въ разстояніи h; а потому искомыя вершины должны лежать въ точкахъ C, C_1, E_1 и E пересѣченія параллельныхъ съ окружностью.



Черт. 23.

462. Найти точку, которая находилась бы въ равномъ разстояніи отъ трехъ пересѣкающихся прямыхъ.

Анализъ и построеніе. Положимъ, что требуется найти точку, находящуюся въ равномъ разстояніи отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ BB_1 и LL_1 (черт. 24); такія точки лежатъ на равнодѣлящихъ ME и KF угловъ, образованныхъ этими прямыми; затѣмъ, точки, равно отстоящія отъ прямыхъ LL_1 и DD_1, лежатъ на равнодѣлящихъ EF и KH угловъ, образованныхъ этими прямыми. Искомыя точки лежатъ на пересѣченіи всѣхъ этихъ равнодѣлящихъ (E, F, G и K).



Черт. 24.

Если условія, опредѣляющія положеніе точки, даны въ задачѣ не явно, то нужно подыскать необходимыя и существенныя условія, опредѣляющія положеніе точки; при чемъ простота рѣшенія зависитъ отъ этого выбора. Разсмотримъ такой примѣръ.

463. Геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ данномъ разстояніи отъ данной точки, есть окружность круга, описаннаго изъ этой точки, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ данному разстоянію.

464. Геометрическое мѣсто вершинъ равнобедренныхъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе, есть перпендикуляръ къ основанію, возставленный изъ средины его.

465. Геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ данномъ разстояніи отъ данной прямой, суть двѣ линіи, параллельныя данной прямой.

466. Геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ, суть равнодѣлящія даннаго угла и смежнаго съ нимъ.

467. Геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ, есть линія, параллельная даннымъ прямымъ и проходящая въ равномъ отъ нихъ разстояніи.

468. Геометрическое мѣсто концовъ отрѣзковъ, имѣющихъ данную длину и составляющихъ съ данной прямой уголъ А, есть линія, параллельная данной прямой, и проходящая черезъ конецъ отрѣзка данной длины, составляющаго съ данной прямой уголъ А.

469. Геометрическое мѣсто концовъ лучей, выходящихъ изъ одной точки и дѣлящихся данной прямой пополамъ, есть прямая, параллельная данной прямой, и проходящая

отъ нея въ разстояніи, равномъ разстоянію точки исхода лучей отъ данной прямой.

470. Геометрическое мѣсто концовъ прямыхъ, идущихъ отъ различныхъ точекъ данной прямой черезъ данную точку и дѣлящихся въ этой точкѣ пополамъ, есть прямая, параллельная данной прямой и проходящая отъ нея въ разстояніи, вдвое большемъ разстоянія данной точки отъ данной прямой.

471. Найти геометрическое мѣсто вершинъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе и данную высоту.

472. Найти геометрическое мѣсто вершинъ тр—ковъ, имѣющихъ общее основаніе и данную среднюю линію.

473. Найти геометрическое мѣсто срединъ прямыхъ, соединяющихъ данную точку съ различными точками данной прямой.

474. Найти геометрическое мѣсто центровъ круговъ даннаго радіуса, окружности которыхъ проходятъ черезъ данную точку.

475. Найти точку, находящуюся въ данномъ разстояніи отъ данной точки и лежащую на данной прямой или на данной окружности.

476. Найти точку, находящуюся въ данныхъ разстояніяхъ отъ двухъ данныхъ точекъ. Найти точку, находящуюся въ равномъ разстояніи отъ концовъ даннаго отрѣзка и

477—лежащую на данной прямой или на данной окружности;

478—находящуюся въ данномъ разстояніи отъ данной точки;

479—находящуюся въ равномъ разстояніи отъ концовъ другого даннаго отрѣзка.

Построить равнобедренный треугольникъ, имѣющій данное основаніе, вершина котораго

481—лежала бы на данной прямой или на данной окружности;

482—находилась бы въ данномъ разстояніи отъ данной точки;

483—находилась бы въ равномъ разстояніи отъ концовъ даннаго отрѣзка;

485—находилась бы въ данномъ разстоянiи отъ другой данной прямой.

Найти точку, находящуюся въ данномъ разстоянiи отъ данной прямой и

487—лежащую на данной прямой или на данной окружности;

488—находящуюся въ данномъ разстоянiи отъ данной точки;

489—въ равномъ разстоянiи отъ концовъ даннаго отрѣзка;

490—въ данномъ разстоянiи отъ другой данной прямой.

Найти точку, находящуюся въ равномъ разстоянiи отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ и

491—лежащую на данной прямой или на данной окружности;

492—находящуюся въ равномъ разстоянiи отъ концовъ даннаго отрѣзка;

493—находящуюся въ данномъ разстоянiи отъ данной точки;

494—находящуюся въ данномъ разстоянiи отъ данной прямой;

495—находящуюся въ равномъ разстоянiи отъ сторонъ даннаго угла.

496—502. Найти точку, находящуюся въ равномъ разстоянiи отъ двухъ параллельныхъ линiй и

497—лежащую на данной прямой или на данной окружности;

498—находящуюся въ данномъ разстоянiи отъ данной точки;

499—въ равномъ разстоянiи отъ концовъ даннаго отрѣзка;

500—въ данномъ разстоянiи отъ данной прямой;

501—въ равномъ разстоянiи отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ;

502—въ равномъ разстоянiи отъ двухъ другихъ параллельныхъ прямыхъ, не параллельныхъ первымъ.

Найти такую точку, чтобы прямая, проведенная изъ нея къ данной прямой, имѣла данную длину a и составляла съ данной прямой уголъ α, равный данному, и чтобы искомая точка находилась:

503—на данной прямой или на данной окружности;

504—въ равномъ разстояніи отъ концовъ даннаго отрѣзка;

505—въ данномъ разстояніи отъ данной точки;

506—въ данномъ разстояніи отъ данной прямой;

507—въ равномъ разстояніи отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ;

508—въ равномъ разстояніи отъ двухъ параллельныхъ линій;

509—чтобы прямая, проведенная изъ искомой точки къ другой данной прямой, составляла съ послѣднею уголъ, равный данному углу β и имѣла данную длину b.

Даны точка A и прямая Z; изъ точки A провести прямую Ax, встрѣчающую прямую Z въ точкѣ x, такъ, чтобы средина отрѣзка Ax находилась:

510—на данной прямой или на данной окружности;

511—въ равномъ разстояніи отъ концовъ даннаго отрѣзка;

512—въ данномъ разстояніи отъ данной точки;

513—въ данномъ разстояніи отъ данной прямой;

514—въ равномъ разстояніи отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ;

515—въ равномъ разстояніи отъ двухъ параллельныхъ линій;

516—чтобы отрѣзокъ прямой, проведенной изъ средины отрѣзка Ax къ другой данной прямой, составлялъ съ послѣднею уголъ, равный данному, и имѣлъ бы данную длину.

517—528. На данномъ основаніи построить треугольникъ, имѣющій данную высоту, и вершина котораго удовлетворяла бы условіямъ, выраженнымъ въ задачахъ 510—516.

528—534. По данному основанію и средней линіи треугольника построить треугольникъ, вершина котораго лежала бы въ точкѣ, удовлетворяющей условіямъ задачъ 510—516.

535—541. Дана прямая Z и точка A; найти такую точку x, чтобы отрѣзокъ xA, идущій отъ нея къ прямой Z черезъ точку A, дѣлился въ этой точкѣ пополамъ, и чтобы искомая точка x удовлетворяла условіямъ задачъ 510—516.

542—548. Дана точка A и прямая Z; найти такую точку x, чтобы отрѣзокъ xA дѣлился прямою Z пополамъ, и чтобы точка x удовлетворяла условіямъ задачъ 510—516.

549—562. Построить треугольникъ по:

550. c, h_c, m_c.

551. c, h_c, a.

552. p_a, p_b, m_c.

553. p_a, p_b, $\angle cm_c$.

554. a, h_a, h_b.

555. b, h_a, h_b.

556. h_a, h_b, $\angle A$.

557. h_a, h_b, $\angle B$.

558. h_a, h_b, $\angle C$.

559. h_a, h_c, p_a.

560. h_a, $\angle C$, $b=h_b$.

561. h_a, $\angle B$, $c=h_c$.

562. h_a, $\angle B$, $p_b=2p_a$.

563. Найти положеніе прямыхъ линій, отсѣкающихъ отъ сторонъ даннаго угла равнобедренные треугольники.

(Искомыя линіи перпендикулярны къ равнодѣлящей даннаго угла или составляютъ съ одной изъ сторонъ даннаго угла уголъ, равный ему).

ГЛАВА V.

Задачи на окружность.

Геометрическія мѣста и приложеніе ихъ къ рѣшенію задачъ на построеніе.

564. На окружности опредѣлить дугу, большую вдвое, втрое и т. д., чѣмъ данная дуга того же круга.

565. Раздѣлить данную дугу на 2, 4, 8 и т. д. частей.

566. Окружность даннаго круга раздѣлить на 12, 24 части.

567. Найти центръ дуги или окружности.

568. Опредѣлить длину линіи, соединяющей вершину прямого угла прямоугольнаго треугольника съ срединою гипотенузы.

569. На данной окружности опредѣлить такую дугу, чтобы вписанный уголъ, на нее опирающійся, былъ равенъ данному углу.

570. Черезъ точку, лежащую внутри круга, провести хорду такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась пополамъ.

571. Черезъ точку, данную на окружности, провести къ ней касательную.

572. Къ концу линіи, не продолжая ея, возставить къ ней перпендикуляръ.

573. Провести къ окружности касательную, параллельно данной прямой.

574. Провести къ окружности касательную, пересѣкающую данную прямую подъ даннымъ угломъ.

575. Даны двѣ параллельныя линіи L и L_1 и окружность; провести къ окружности касательную такъ, чтобы часть ея, лежащая между параллельными линіями, была равна данному отрѣзку.

576. Внутри окружности дана точка P; провести черезъ нее хорду такъ, чтобы концы ея находились въ равномъ разстояніи отъ другой данной точки P_1.

577. Даны окружность O и внѣ ея точка P; провести черезъ P сѣкущую Pxy такъ, чтобы хорда $xy = Px$.

Приводится къ построенію тр—ка по тремъ сторонамъ $2r$, r, OP.

578. Геометрическое мѣсто центровъ окружностей даннаго радіуса, касающихся данной прямой, суть двѣ линіи, параллельныя данной прямой, и проведенныя отъ нея на разстояніи, равномъ данному радіусу.

579—583. Провести окружность даннаго радіуса, касающуюся данной прямой и центръ которой находился бы:

579 — въ равномъ разстояніи отъ концовъ даннаго отрѣзка;

580—въ данномъ разстояніи отъ другой данной прямой;

581—въ равномъ разстояніи отъ двухъ пересѣкающихся линій;

582—въ равномъ разстояніи отъ двухъ параллельныхъ линій;

583—въ данномъ разстояніи отъ данной точки.

584. Геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касающихся данной прямой, въ данной точкѣ ея, есть перпендикуляръ къ прямой въ этой точкѣ.

585—591. Провести окружность, касающуюся данной прямой L въ данной точкѣ K, такъ, чтобы центръ окружности находился:

585—въ данномъ разстояніи отъ данной точки P;

586—въ равномъ разстояніи отъ концовъ даннаго отрѣзка;

587—въ данномъ разстояніи отъ данной прямой L_1;

588—въ равномъ разстояніи отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ;

589—въ равномъ разстояніи отъ двухъ параллельныхъ линій;

590—чтобы отрѣзокъ прямой, проведенный изъ центра къ данной прямой, пересѣкалъ послѣднюю подъ даннымъ угломъ и имѣлъ бы данную длину;

591—чтобы отрѣзокъ, соединяющій центръ окружности съ данною точкою A, дѣлился бы данной прямой L пополамъ.

592. Геометрическое мѣсто центровъ круговъ, касающихся двухъ пересѣкающихся прямыхъ, есть равнодѣлящая угловъ, образуемыхъ этиму прямыми.

593—599. Провести окружность, касающуюся двухъ данныхъ пересѣкающихся прямыхъ, и положеніе центра которой опредѣляется условіями задачъ 585—591.

600. Геометрическое мѣсто центровъ круговъ, касающихся двухъ параллельныхъ линій, есть линія, параллельная имъ и проходящая въ равномъ отъ нихъ разстояніи.

601—607. Провести окружность, касающуюся двухъ параллельныхъ прямыхъ, и положеніе центра которой опредѣляется условіями задачъ 585—591.

608. Геометрическое мѣсто центровъ окружностей даннаго радіуса, касающихся данной окружности, есть окружность, концентрическая данной и описанная радіусомъ, равнымъ суммѣ или разности данныхъ радіусовъ.

609—615. Описать окружность даннымъ радіусомъ, касающуюся данной окружности, и положеніе центра которой опредѣляется условіями задачъ 585—591.

616. Начертить окружность даннаго радіуса, касающуюся данной окружности и данной прямой.

617. Геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касающихся данной окружности въ данной точкѣ, есть сѣкущая этой окружности, проходящая черезъ центръ ея и черезъ данную точку.

618—624. Начертить окружность, касающуюся данной окружности въ данной точкѣ, и положеніе центра которой опредѣляется условіями задачъ 585—591.

625. Геометрическое мѣсто серединъ равныхъ хордъ, проведенныхъ въ данной окружности, есть окружность, концентрическая съ данной, и проведенная радіусомъ, равнымъ разстоянію одной изъ этихъ хордъ отъ центра.

626—632. Въ данной окружности провести хорду данной длины, такъ чтобы средина ея занимала положеніе, указанное въ задачахъ 585—591.

633. Черезъ точку P, данную на окружности, провести хорду, находящуюся въ данномъ разстояніи отъ точки P_1.

634—636. Въ данной окружности провести хорду данной длины, такъ чтобы она

634—была параллельна данной прямой;

635—составляла бы съ данной прямой уголъ, равный данному;

636—дѣлилась бы данной прямой или данной окружностью пополамъ.

637. Геометрическое мѣсто вершинъ равныхъ угловъ, стороны которыхъ проходятъ черезъ двѣ данныя точки, есть окружность круга, проходящая черезъ эти точки и черезъ вершину какого-нибудь одного изъ помянутыхъ угловъ.

638—646. Найти точку, изъ которой отрѣзокъ прямой былъ бы виденъ подъ даннымъ угломъ, и которая была бы:

638—на данной прямой или на данной окружности;

639—въ данномъ разстояніи отъ данной точки;

640—въ данномъ разстояніи отъ данной прямой;

641—въ равномъ разстояніи отъ двухъ пересѣкающихся линій;

642—въ равномъ разстояніи отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ;

643—серединою хорды данной длины, проведенной въ данной окружности;

644—центромъ окружности даннаго радіуса, касающейся данной прямой или данной окружности;

645—центромъ окружности, касающейся данной прямой или данной окружности въ данной точкѣ;

646—центромъ окружности, касающейся двухъ пересѣкающихся прямыхъ или двухъ параллельныхъ прямыхъ.

647. Геометрическое мѣсто центровъ окружностей даннаго радіуса, отсѣкающихъ отъ данной прямой хорду данной длины, есть линія, параллельная данной прямой и проходящая отъ нея въ разстояніи, равномъ катету прямоугольнаго треугольника, гипотенуза котораго есть данный радіусъ,

а другой катетъ есть половина данной хорды, отсѣкаемой окружностью.

648—656. Провести окружность даннаго радіуса, отсѣкающую отъ данной прямой хорду данной длины, и центръ которой удовлетворялъ бы условіямъ задачъ 638—646.

657—659. Провести окружность даннаго радіуса, отсѣкающую отъ данной прямой хорду данной длины и

657—касательную къ другой данной окружности;

658—отсѣкающую отъ другой данной прямой хорду данной длины.

659. Геометрическое мѣсто центровъ окружностей даннаго радіуса, имѣющихъ данной длины хорду, общую съ данною окружностью, есть окружность, концентрическая съ данною и описанная радіусомъ, равнымъ суммѣ или разности разстояній центровъ окружностей отъ ихъ общей хорды.

660—663. Провести окружность даннаго радіуса, имѣющую данной длины хорду, общую съ данною окружностью и

660—касающуюся данной прямой;

661—касающуюся другой данной окружности,

662—отсѣкающую отъ данной прямой хорду данной длины;

663—имѣющую съ другой данной окружностью общую данной длины хорду.

664. Геометрическое мѣсто вершинъ прямыхъ угловъ прямоугольныхъ треугольниковъ, имѣющихъ общую гипотенузу, есть окружность круга, описаннаго на этой гипотенузѣ, какъ на діаметрѣ.

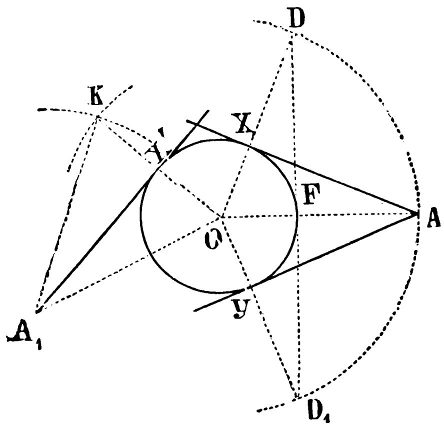
665—673. Построить прямоугольный треугольникъ, имѣющій данную гипотенузу, такъ чтобы вершина его удовлетворяла условіямъ задачъ 638—646.

674. Изъ данной точки внѣ окружности провести къ ней касательную.

Рѣшеніе. 1. Точка прикосновенія лежитъ на пересѣченіи данной окружности съ окружностью, описанной на линіи, соединяющей данную точку съ центромъ, какъ на діаметрѣ.

2. Соединяя центръ круга O съ данной точкой A (черт. 25), въ точкѣ пересѣченія F линіи OA съ окружностью, возставимъ перпендикуляръ DD_1, который пересѣчетъ окружность, концентри-

ческую данной и описанную радіусомъ OA, въ точкахъ D и D_1; соединяя точки D и D_1 съ центромъ O, получимъ въ пересѣченіи прямыхъ OD и OD_1 съ данною окружностью точки X и Y, которыя и будутъ точками прикосновенія искомыхъ касательныхъ.



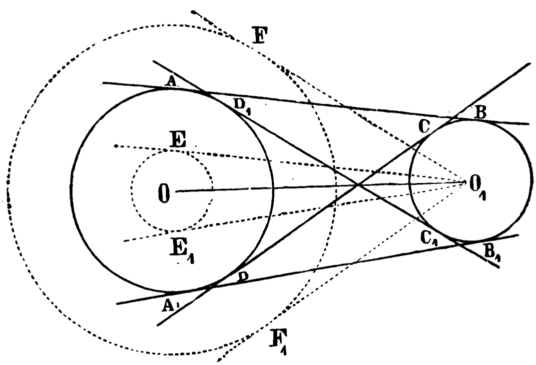
Черт. 25.

3. Строимъ на OA_1, какъ на равной сторонѣ, равнобедренный треугольникъ, основаніе котораго $=2R$, тогда A_1X_1, соединяющая данную точку A_1 съ срединой X_1 основанія OK этого треугольника, и будетъ искомой касательной.

675. Геометрическое мѣсто концовъ равныхъ касательныхъ данной длины, проведенныхъ къ данной окружности, есть окружность, концентрическая съ данной и описанная радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, одинъ катетъ котораго есть радіусъ данной окружности, а другой—длина данной касательной.

676—684. Найти такую точку, чтобы касательная, проведенная изъ нея къ данной окружности, имѣла данную длину, и чтобы искомая точка удовлетворяла условіямъ задачъ 638—646.

685. Провести касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ.



Черт. 26.

Анализъ. Данныя окружности O и O_1; ихъ радіусы R и r; искомая касательная AB (черт. 26). Проведя изъ центра O_1 линію $O_1E \parallel AB$ видимъ, что O_1E есть касательная къ окружности радіуса $R—r$. Слѣд., искомая касательная должна быть параллельна

O_1E; касательная CD (внутренняя) параллельна касательной O_1F_1, проведенной изъ O_1 къ окружности радіуса $R+r$.

686. Геометрическое мѣсто срединъ хордъ даннаго круга, пересѣкающихся въ данной точкѣ, есть окружность, описанная на линіи, соединяющей центръ съ данной точкой, какъ на діаметрѣ.

687. Черезъ данную точку провести въ данной окружности хорду такъ, чтобы она данной прямой или данною окружностью дѣлилась пополамъ.

688. Геометрическое мѣсто центровъ окружностей даннаго радіуса, пересѣкающихъ данную окружность подъ прямымъ угломъ (т.-е. такъ, чтобы касательныя, проведенныя въ точкѣ пересѣченія къ обѣимъ окружностямъ, были перпендикулярны между собою), есть окружность, концентрическая съ данною и описанная радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, катеты котораго суть радіусы данныхъ окружностей.

689—695. Провести окружность даннаго радіуса, пересѣкающую данную окружность подъ прямымъ угломъ, и центръ которой занималъ бы положеніе, указанное въ задачахъ 585—591.

696—700. Провести окружность даннаго радіуса, пересѣкающую данную окружность подъ прямымъ угломъ и

696—касающуюся данной прямой;

697—касающуюся другой данной окружности;

698—отсѣкающую отъ данной прямой хорду данной длины;

699—имѣющую хорду данной длины, общую съ другою данною окружностью;

700—пересѣкающую другую данную окружность подъ прямымъ угломъ.

701. Геометрическое мѣсто центровъ окружностей даннаго радіуса, дѣлящихъ данную окружность пополамъ, есть окружность концентрическая съ данной и описанная радіусомъ, равнымъ катету прямоугольнаго треугольника, другой катетъ котораго есть радіусъ даннаго круга, а гипотенуза—данный радіусъ.

702—710. Данную окружность раздѣлить другою окружностью пополамъ, такъ, чтобы центръ послѣдней находился

702—на данной прямой или окружности;

703—въ данномъ разстояніи отъ данной точки;

704—въ данномъ разстояніи отъ данной прямой;

705—въ равномъ разстояніи отъ концовъ даннаго отрѣзка;

706—въ равномъ разстояніи отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ;

707—въ равномъ разстояніи отъ двухъ параллельныхъ линій;

708—могъ бы служить центромъ другой окружности, касающейся данной прямой или данной окружности въ данныхъ точкахъ;

709—чтобы изъ этого центра отрѣзокъ данной длины былъ бы виденъ подъ даннымъ угломъ;

710—чтобы касательныя, проведенныя изъ него къ данной окружности, имѣли данную длину.

Провести окружность даннымъ радіусомъ, дѣлящую данную окружность пополамъ и

711—касающуюся данной прямой;

712—касающуюся другой данной окружности;

713—отсѣкающую отъ данной прямой хорду данной длины;

714—имѣющую съ другой данной окружностью общую хорду данной длины;

715—пересѣкающую другую данную окружность подъ прямымъ угломъ;

716—дѣлящую другую данную окружность пополамъ.

717. Найти геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ то свойство, что каждая пара касательныхъ, проведенныхъ изъ нихъ къ данной окружности, составляетъ между собою равные углы.

Отв.—Окружность, концентрическая данной.

718. Найти геометрическое мѣсто точекъ срединъ всѣхъ хордъ, проведенныхъ параллельно данной прямой.

Отв.—Діаметръ, перпендикулярный къ данной прямой.

719. Найти геометрическое мѣсто центровъ круговъ, отсѣкающихъ отъ одной изъ двухъ параллельныхъ линій хорду данной длины и касающуюся другой параллельной линіи.

ГЛАВА VI.

Вписанные и описанные треугольники и четыреугольники. (Радіусъ описаннаго круга обозначенъ буквою R и вписаннаго буквою r.)

Треугольникъ вписанный.

720. Даны: сторона вписаннаго треугольника c, противоположный уголъ C,—опредѣлить радіусъ круга описаннаго.

721. Даны: R—радіусъ круга, сторона вписаннаго въ этотъ кругъ треугольника, — опредѣлить противоположный этой сторонѣ уголъ.

722. Даны: радіусъ круга R, уголъ C вписаннаго въ этотъ кругъ треугольника, — опредѣлить противоположную этому углу сторону треугольника.

723. Построить треугольникъ, вписанный въ кругъ, если даны:

724. R, a, c.
725. R, c, h_c.
726. R, c, $\angle A$.
727. R, a, h_c.
728. R, c, m_c.
729. R, a, b.
730. R, a, $\angle B$.
731. R, $\angle A$, $\angle B$.
732. R, a, h_c.
733. R, h_c, $\angle C$.
734. R, h_c, $\angle A$.
735. R, h_c, p_a.
736. R, p_a, p_b.
737. R, h_a, $\angle C$.
738. R, m_c, $\angle C$.

Построить равнобедренный треугольникъ, вписанный въ кругъ, если даны:

739. R, a.
740. R, c.
741. R, $\angle A$.
742. R, $\angle C$.
743. R и h_c.

Треугольникъ описанный.

Примѣчаніе. Радіусъ вписаннаго въ кругъ треугольника обозначимъ чрезъ r, радіусъ извнѣ вписаннаго круга, касающагося стороны a—чрезъ r_a; стороны b—черезъ r_b и стороны c—черезъ r_c.

744. r, c, $\angle A$.
745. r, $\angle A$, $\angle B$.
746. r, a, $\angle C$.

747. r, h_c, a (стр. прям. треуг. по a и h_c).

748. r, h_c, $\measuredangle A$.

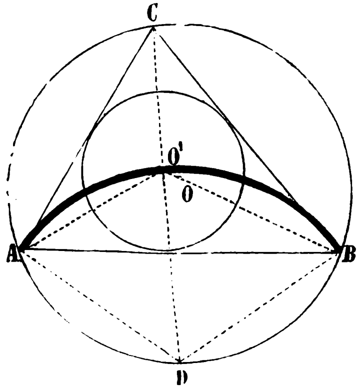
749. r, a, $\measuredangle C = d$ (прям.).

750. c, r, $\measuredangle C = d$ (прям.).

751. r, $\measuredangle A$; $a = b$ (равнобедр.).

752. r, $\measuredangle C$; $a = b$ (равнобедр.).

753. Дана окружность и вписанный въ нее треугольникъ ACB (черт. 27); если точки A и B остаются неподвижными, а вершина C перемѣщается по дугѣ ACB окружности, то какъ будетъ перемѣщаться центръ O_1, вписанной въ этотъ треугольникъ окружности (геометрическое мѣсто центровъ вписанныхъ въ треугольникъ окружностей).



Черт. 27.

Рѣшеніе. $\measuredangle O_1AB = \frac{A}{2}$; $O_1BA = \frac{B}{2}$; $AO_1B = 2d - \frac{A+B}{2} = 2d - \frac{2d - C}{2} = d + \frac{C}{2}$. Слѣд., хорда AB изъ центра вписанной въ треугольникъ окружности видна подъ угломъ $d + \frac{C}{2}$; геометрическое мѣсто такихъ точекъ есть окружность, и центръ этой окружности лежитъ на дугѣ ADB. Въ самомъ дѣлѣ: продолжимъ равнодѣлящую CO_1D угла C до пересѣченія ея съ окружностью въ точкѣ D и разсмотримъ треуг. AO_1D: $\measuredangle O_1AB = \measuredangle \frac{A}{2}$; $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = \measuredangle \frac{C}{2}$, слѣд., $\measuredangle O_1AD = \measuredangle O_1AB + \measuredangle BAD = \frac{\measuredangle A + \measuredangle C}{2}$; также $\measuredangle AO_1D = \measuredangle ACO_1 + \measuredangle CAO_1 = \measuredangle \frac{A}{2} + \measuredangle \frac{C}{2} = \frac{\measuredangle A + \measuredangle C}{2}$; $\triangle AO_1D$ равнобедренный и $DO_1 = AD = DB$; слѣд., D есть центръ и AD—радіусъ искомой дуги.

754. a_c, r, $\measuredangle C$.

Указаніе. Строимъ $\measuredangle C$; a_c (равнодѣлящая) даетъ возможность опредѣлить положеніе вершины A или B, какъ точки пересѣченія касательной изъ конца a_c со сторонами угла C.

755. h_c, r, $\measuredangle C$.

Указаніе. Строимъ $\measuredangle C$, вписываемъ въ него кругъ радіуса r, сторона c должна касаться двухъ круговъ—вписаннаго и круга радіуса h_c, описаннаго изъ вершины C.

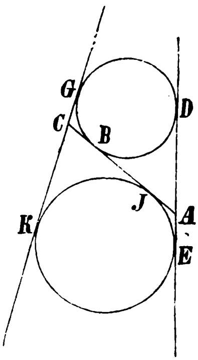
756. c, R и r.

Указаніе. Строимъ кругъ радіуса R, вписываемъ хорду c въ него, центръ вписаннаго круга лежитъ на окружности радіуса R съ центромъ въ серединѣ дуги, стягиваемой хордою (см. зад. 753), и въ разстояніи r отъ C и т. д.

757. R, r, $\measuredangle C$.

758. c, r, $\measuredangle C$.

Указаніе. Строимъ $\measuredangle C$, опредѣляемъ центръ вписаннаго круга, сторона c должна касаться круга радіуса r и круга извнѣ вписаннаго радіуса r_c; положеніе же центра послѣдняго опредѣляемъ на основаніи свойства отрѣзковъ внѣшнихъ касательныхъ къ двумъ кругамъ и внутренней касательной. Это послѣднее свойство выводится слѣд. образомъ (черт. 28): $GK = DE$, гдѣ точки G, K, D и E суть точки прикосновенія внѣшнихъ касательныхъ къ двумъ окружностямъ; но $GK = GC + CK = CB + CJ$; $DE = DA + AE = AB + AJ$; откуда $2GK = 2DE = (CB + AB) + (CJ + AJ) = 2CA$ и т. д.



Черт. 28.

759. c, r_c, r (зад. прив. къ предыд.).

Построить вписанный четыреугольникъ если даны:

760. R, a, b, c

761. R, a, b, $\measuredangle A$.

762. R, a, c, $\measuredangle A$.

763. R, a, $\measuredangle A$, $\measuredangle B$.

764. R, a, $\measuredangle C$, $\measuredangle B$.

765. R, a, e, $\measuredangle A$.

766. R, a, c, e.

767. R, a, b, f.

768. R, a, e, f.

769. R, a, b, $\measuredangle E$.

770. R, a, e, $\measuredangle E$.

771. R, a, $\measuredangle A$, $\measuredangle E$.

772. R, a, $\measuredangle C$, $\measuredangle E$.

773. a, b, c, $\measuredangle B$.

774. a, b, c, $\measuredangle A$.

775. a, b, $\measuredangle A$, $\measuredangle B$.

776. a, b, $\measuredangle C$, $\measuredangle D$.

777. a, b, f, $\measuredangle B$.

Построить трапецію, вписанную въ кругъ, если даны:

778. R, a, $\measuredangle A$.

779. R, a, e.

780. R, a, c.

781. R, a, h.

Построить описанный четыреугольникъ, если извѣстны:

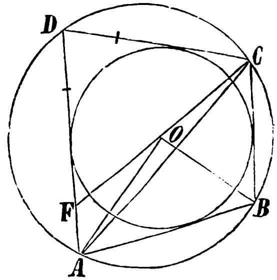
782. r, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
783. r, a, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$.
784. r, a, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
785. r, a, b, $\sphericalangle A$.
786. r, a, f, $\sphericalangle A$.
787. r, a, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
788. r, a, b, $\sphericalangle B$.
789. r, a, e, $\sphericalangle B$.
790. a, b, c, $\sphericalangle A$ $(d=a+c-b)$.
791. a, b, c, $\sphericalangle B$.
792. a, b, c, e.

Четыреугольники описанные около которыхъ можно въ свою очередь, описать окружность.

Примѣчаніе. Такъ какъ въ такихъ четыреугольникахъ существуетъ соотношеніе между сторонами $(a+c)=(b+d)$ и между углами $(\sphericalangle A = 2d - \sphericalangle C)$, то число данныхъ, необходимыхъ для опредѣленія четыреугольника, должно быть не болѣе 3-хъ.

793. a, r, $\sphericalangle A$ (строимъ треуг. AOB (по a (AB); $h=r$; $\sphericalangle OAB = \sphericalangle \frac{A}{2}$) $(A-2d=\sphericalangle C)$ и т. д.

794. a, r, $\sphericalangle C$.
795. r, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
796. e, r, $\sphericalangle A$ (опр. $\sphericalangle C$).
797. a, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
798. a, b, R.
799. a, e, R.
800. a, R, $\sphericalangle B$.
801. a, R, $\sphericalangle D$.



Черт. 29.

ГЛАВА VII.

Смѣшанныя задачи, относящіяся къ предыдущимъ отдѣламъ.

802. Раздѣлить пополамъ уголъ между двумя не пересѣкающимися и не параллельными прямыми, не продолжая ихъ до пересѣченія.

803. Построить треугольникъ, котораго вершина лежала бы въ данной точкѣ, а двѣ другія стороны оканчивались бы

на данныхъ параллельныхъ линіяхъ, образуя съ ними углы, равные даннымъ.

Черезъ данную точку провести прямую, пересѣкающую стороны даннаго прямого угла C въ точкахъ x и y такъ, чтобы

804—$\angle Cxy = \angle Cyx$;

805—$\angle Cxy = 2 \angle Cyx$;

806—$\angle Cxy = 3 \angle Cyx$;

807—$\angle Cxy = 5 \angle Cyx$.

Между сторонами прямого угла помѣстить отрѣзокъ данной длины такъ, чтобы углы X и Y, образуемые этимъ отрѣзкомъ со сторонами даннаго угла,

808—были равны между собою;

809—$\angle X = 2 \angle Y$;

810—$\angle X = 3 \angle Y$;

811—$\angle X = 5 \angle Y$.

Даны два луча L и L_1, выходящіе изъ одной точки A; провести черезъ точку K, лежащую на лучѣ L, прямую пересѣкающую другой лучъ L_1 въ точкѣ X, такъ чтобы

812—$\angle XAK = \angle AXK$;

813—$\angle AKX = \angle XAK$.

814. Данъ отрѣзокъ AB; внѣ его найти такую точку X, находящуюся въ данномъ разстояніи отъ A, чтобы проекція прямой XA на AB имѣла данную длину.

815. Найти такую точку X внѣ прямой AB, чтобы два луча, выходящіе изъ нея, пересѣкали бы данную прямую въ точкахъ Z и Y подъ данными углами, и чтобы проекція отрѣзка XZ на AB была бы равна данному отрѣзку.

816. Между сторонами даннаго угла помѣстить данной длины отрѣзокъ такъ, чтобы проекція его на одну изъ сторонъ даннаго угла имѣла данную длину.

Данъ отрѣзокъ AB, найти такую точку C внѣ этого отрѣзка, чтобы CB равнялась данной длинѣ *a* и

817—чтобы перпендикуляръ, опущенный изъ конца отрѣзка A на прямую CB, былъ бы равенъ данной длинѣ;

818—чтобы перпендикуляръ, опущенный изъ конца A на CB, составлялъ бы съ данной прямой уголъ, равный данному.

819. Стороны даннаго угла C пересѣчь прямою, проходящею черезъ данную точку и лежащею на одной изъ сто-

ронъ такъ, чтобы разность угловъ, образуемыхъ прямою съ сторонами даннаго угла, была равна данному углу.

Даны двѣ прямыя L и L_1, пересѣкающіяся въ точкѣ A, и точка K внѣ ихъ; провести черезъ точку K прямую, пересѣкающую L въ точкѣ x и L_1 въ точкѣ y, такъ чтобы

820—$xy = xA$;

821—$xy = Ay$;

822—$Ax = Ay$;

823—$Ax = Kx$;

824—$Ay = Ky$;

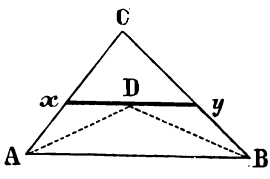
825—чтобы xy дѣлилась въ точкѣ K пополамъ;

826—Kx дѣлилось въ точкѣ y пополамъ;

827—Ky дѣлилось въ точкѣ x пополамъ.

828. **Данъ треугольникъ; требуется пересѣчь стороны этого треугольника линіей, параллельной основанію, такъ, чтобы отрѣзокъ сѣкущей, лежащей внутри треугольника, равнялся бы суммѣ отрѣзковъ сторонъ этого треугольника, лежащихъ между основаніемъ и сѣкущей.**

Анализъ. Положимъ, что задача рѣшена и данный тр—къ ABC пересѣченъ искомой линіей xy (черт. 30), которая по условію параллельна AB и равна $Ax + By$; пусть часть $xD = Ax$ и $yD = yB$; тогда, соединяя D съ A мы будемъ имѣть равнобедренный треугольникъ AxD, а потому $\sphericalangle xAD = \sphericalangle xDA$; но т. к. $xy \parallel AB$, то $\sphericalangle ADx = \sphericalangle DAB$; слѣд., $\sphericalangle xAD = \sphericalangle DAB$, т.-е. AD есть равнодѣлящая $\sphericalangle A$; подобнымъ образомъ найдемъ, что BD—равнодѣлящая $\sphericalangle B$; слѣд., искомая прямая параллельна AB и проходитъ черезъ точку пересѣченія равнодѣлящихъ угловъ при основаніи даннаго треугольника.



Черт. 30.

Построеніе. Дѣлимъ углы A и B при основаніи пополамъ и черезъ точку ихъ пересѣченія D проводимъ прямую параллельно основанію; отрѣзокъ ея xy, лежащій между сторонами угла, и будетъ искомымъ.

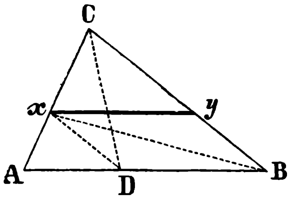
Доказательство. Уголъ $xDA = \sphericalangle DAB = \sphericalangle DAx$, а потому $xD = Ax$; также, $\sphericalangle yDB = \sphericalangle DBA = \sphericalangle DBy$ и $yD = yB$;

складывая почленно полученныя равенства между отрѣзками, получимъ: $xD + yD = Ax + yB = xy$.

Изслѣдованіе. Такъ какъ черезъ точку къ данной прямой можно провести всегда параллельную, и т. к. равнодѣлящія внутреннихъ угловъ треугольника всегда пересѣкутся, то задача всегда возможна.

829. **Данъ треугольникъ; требуется пересѣчь стороны этого тр—ка прямою, параллельною основанію, такъ, чтобы верхній отрѣзокъ одной стороны (лежащей между вершиною и искомою прямою) равнялся бы нижнему отрѣзку другой стороны (лежащему между искомой прямою и основаніемъ).**

Анализъ. Предположимъ, что задача рѣшена, и данный треугольникъ ABC пересѣченъ прямою xy такъ, чтобы $Cx = By$ (черт. 31); тогда, проведя изъ x линію $xD \parallel By$, получимъ, что $xD = By$ (какъ отрѣзки параллельныхъ между параллельными), а потому $xD = xC$, и треугольникъ xCD— равнобедренный; уголъ $\sphericalangle xDC = \sphericalangle xCD = \sphericalangle DCB$; слѣд., CD — равнодѣлящая $\sphericalangle$ C. Зная же D, найдемъ x, какъ пересѣченіе линіи Dx, параллельной BC, и стороны AC.



Черт. 31.

Построеніе. Дѣлимъ уголъ при вершинѣ C пополамъ; изъ точки пересѣченія равнодѣлящей съ основаніемъ тр—ка проводимъ линію, параллельную BC. Эта линія пересѣчетъ сторону AC въ точкѣ x; проведя черезъ послѣднюю линію, параллельную AB, получимъ искомую xy.

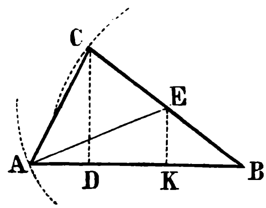
830. Въ треугольникѣ ABC провести прямую DE данной длины такъ, чтобы верхній отрѣзокъ CD стороны CA равнялся нижнему отрѣзку EB стороны BC.

Указаніе. Помѣщаемъ отрѣзокъ данной длины между вершиной B и стороною CA, въ полученномъ новомъ треугольникѣ дѣлаемъ построеніе, указанное въ предшествующей задачѣ.

831. Въ треугольникѣ ABC провести прямую $DE \perp AC$, такъ чтобы верхній отрѣзокъ CD стороны CA равнялся нижнему отрѣзку EB стороны CB.

832. **Построить треугольникъ по данной сторонѣ его a, по проекціи p_a этой стороны на основаніе и по средней линіи m_a, соединяющей средину стороны a съ противоположной ей вершиной.**

Анализъ. Положимъ, что треугольникъ ACB есть искомый; сторона BC=a, BD=p_a и AE=m_a (черт. 32). Разсматривая прямоугольный треугольникъ BCD, видимъ, что въ немъ даны гипотенуза BC и катетъ p_a, а потому треугольникъ вполнѣ опредѣленъ. Вершина A искомаго треугольника также опредѣлена, ибо она находится въ разстояніи m_a отъ середины E прямой BC и лежитъ на продолженіи BD.



Черт. 32.

Построеніе. Строимъ сперва треугольникъ BCD; беремъ прямой уголъ CDB, на сторонѣ DB откладываемъ BD$=p_a$; изъ точки B описываемъ дугу радіусомъ, равнымъ a, которая пересѣчетъ другую сторону прямого угла въ точкѣ C; затѣмъ дѣлимъ CB пополамъ въ точкѣ E, изъ этой послѣдней описываемъ дугу радіусомъ m_a. Точка пересѣченія этой дуги съ продолженіемъ стороны BD дастъ третью вершину A искомаго тр—ка. Соединяя A съ C, получимъ искомый треугольникъ ABC.

Доказательство. ABC—есть искомый треугольникъ, ибо BC$=$a по построенію; BD$=p_a$ и есть проекція стороны a на основаніе AB, ибо CD $\perp$ AB по построенію, и AE$=m_a$, также по построенію.

Изслѣдованіе. Задачу можно рѣшить тогда, 1) когда дуга, описанная изъ точки B радіусомъ a пересѣчетъ DC, т.-е. когда $a > p_a$; 2) когда дуга, описанная изъ точки E, пересѣчетъ сторону AB, т.-е. когда $m_a >$ KE—перпендикуляра, опущеннаго изъ точки E на DB; 3) она имѣетъ одно рѣшеніе, если, m_a=EK, и два, если KE$< m_a$, ибо тогда дуга, описанная радіусомъ m_a, пересѣчетъ AB въ двухъ точкахъ.

Двѣ стороны треугольника пересѣчь прямою, параллельною третьей такъ, чтобы отрѣзокъ сѣкущей, лежащій между сторонами треугольника,

833—равнялся суммѣ отрѣзковъ, лежащихъ между параллельною и третьею стороною;

834—равнялся разности тѣхъ же отрѣзковъ.

Рѣшеніе. Искомая прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія равнодѣлящей одного угла при основаніи и равнодѣлящей смежнаго со вторымъ угломъ.

Двѣ стороны треугольника пересѣчь прямой, параллельной 3-ей сторонѣ такъ, чтобы третья сторона равнялась:

835—суммѣ отрѣзковъ, лежащихъ между параллельными линіями;

836—разности тѣхъ же отрѣзковъ.

Двѣ стороны треугольника пересѣчь прямою, параллельною третьей сторонѣ такъ, чтобы

837—сумма отрѣзковъ, лежащихъ между параллельными линіями, равнялась данной длинѣ.

Анализъ. Откладываемъ данную длину на основаніи отъ вершины какого-нибудь угла, прилежащаго къ основанію, и изъ конца проведя параллельную сторонѣ, противоположной этой вершинѣ, получимъ новый треугольникъ, въ которомъ основаніе должно быть равно суммѣ отрѣзковъ, лежащихъ между параллельными сторонами.

838—разность тѣхъ же отрѣзковъ равнялась данной длинѣ.

Продолженіе двухъ сторонъ треугольника пересѣчь прямой, параллельной третьей сторонѣ такъ, чтобы

839—отрѣзокъ сѣкущей, лежащей между пересѣкаемыми сторонами, равнялся суммѣ отрѣзковъ сторонъ, заключающихся между параллельными линіями;

840—этотъ же отрѣзокъ равнялся разности отрѣзковъ, лежащихъ между параллельными линіями;

841—третья сторона треугольника равнялась суммѣ отрѣзковъ сторонъ, лежащихъ между параллельными линіями;

842—третья сторона равнялась разности тѣхъ же отрѣзковъ;

843—сумма отрѣзковъ сторонъ, лежащихъ между параллельными, была равна данной длинѣ;

844—разность тѣхъ же отрѣзковъ равнялась данной длинѣ.

845. Даны три точки; требуется провести черезъ одну изъ нихъ прямую такъ, чтобы перпендикуляры, опущенные на нее изъ двухъ другихъ точекъ, были между собою равны.

Два случая: 1) данныя точки лежатъ по разныя стороны искомой прямой; 2)—по одну сторону искомой прямой.

846. Данъ кругъ и двѣ точки; провести къ окружности касательную такъ, чтобы перпендикуляры, опущенные на нее изъ двухъ данныхъ точекъ, были между собою равны.

Тогда перпендикуляры къ діаметру, параллельному касательной, будутъ между собою равны.

847. Данъ кругъ и двѣ точки; провести черезъ одну изъ точекъ прямую такъ, чтобы перпендикуляръ, опущенный на нее изъ другой точки, и отрѣзокъ касательной, перпендикулярной къ искомой прямой и лежащій между точкою прикосновенія и искомой прямой, были равны между собою.

Діаметръ, перпендикулярный къ искомой прямой, будетъ равенъ касательной.

Даны два круга и точка; требуется:

848—провести черезъ точку прямую такъ, чтобы отрѣзки касательныхъ къ даннымъ кругамъ, перпендикулярные къ искомой прямой, между точками прикосновенія и прямой были между собою равны;

849—провести касательную къ одному изъ круговъ такъ, чтобы отрѣзокъ касательной, къ другой окружности, проведенный перпендикулярно къ искомой касательной былъ равенъ перпендикуляру, опущенному на нее изъ данной точки.

850. Даны три окружности; провести къ одной изъ нихъ касательную такъ, чтобы отрѣзки касательныхъ къ двумъ другимъ окружностямъ, проведенные перпендикулярно къ искомой, были между собою равны.

ОТДѢЛЪ II.

Болѣе сложныя задачи на построеніе.

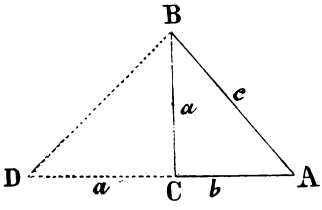
ГЛАВА VIII.

Треугольники.

Построить прямоугольный треугольникъ по:

851. $a+b$, c.

Анализъ. На продолженіи катета AC (черт. 33) откладываемъ $CD=CB=a$; соединяя D съ B, получимъ равнобедренный прямоугольный треугольникъ DBC. Треугольникъ DBA вполнѣ опредѣленъ, ибо $AD=a+b$, $AB=c$ и $\sphericalangle D=\frac{d}{2}$; вершины A и B треугольника ABD будутъ вершинами искомаго треугольника; третья же вершина C есть вершина равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника BCD.



Черт. 33.

852. $a+b$; $\measuredangle B$.
853. $a+b$; $\measuredangle A$.
854. $a+c$; b.
855. $a+c$; $\measuredangle B$.
856. $a+c$; $\measuredangle A$.
857. $a+h_c$; $\measuredangle B$.
858. $a+h_c$; $\sphericalangle A$.

Построить равнобедренный треугольникъ по:

859. $a+c$; $\sphericalangle A$.
860. $a+c$; $\measuredangle C$.
861. $a+h_c$; c.
862. $a+h_c$; $\sphericalangle A$.
863. $a+h_c$; $\sphericalangle C$.
864. $c+h_a$; $\sphericalangle A$.
865. $c+h_a$; $\sphericalangle C$.
866. $a+h_a$; $\sphericalangle C$.
867. $a+\alpha_c$; $\sphericalangle A$.

868. Построить равносторонній треугольникъ по $a + h$.

Построить косоугольный треугольникъ по:

869. $a + b$, $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle C$.

(Рѣшеніе такое же какъ и въ задачѣ 857, и задача приводится къ построенію треугольника по сторонѣ, равной $a + b$ и прилежащимъ угламъ B и $\frac{C}{2}$).

870. $a + b$; c; $\sphericalangle B$.

871. $a + b$; c; $\sphericalangle C$.

872. $a + b$; c; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

Рѣшеніе. Задача приводится къ построенію треугольника по двумъ сторонамъ c и $a + b$, при чемъ уголъ, лежащій противъ большей изъ сторонъ, $= \frac{\sphericalangle A - \sphericalangle B}{2} + d$.

873. $a + b$, h_c; $\sphericalangle B$.

874. $a + b$, h_c; p_a.

875. $a + b$, h_a; $\sphericalangle B$.

876. $a + b$, h_a; $\sphericalangle C$.

877. $a + b$, c; $\sphericalangle A$.

878. $a + b$, h_c; $\sphericalangle A$.

879. $a + b$, h_a; c.

880. $a + b$, h_b; c.

881. $a + b$, h_b; $\sphericalangle A$.

882. $a + b$, h_b; $\sphericalangle C$.

883. $a + h_c$, b, $\sphericalangle B$.

884. $a + h_c$, c, $\sphericalangle B$.

885. $a + h_c$, p_a; p_b.

886. $a + h_c$, m_c; $\sphericalangle B$.

887. $a + h_c$, m_a; $\sphericalangle B$.

888. $a + h_c$, h_a; $\sphericalangle B$.

889. $a + h_c$, α_c; $\sphericalangle B$.

890. $a + h_c$, α_b; $\sphericalangle B$.

891. $a + h_c$; $\sphericalangle A$; $\sphericalangle B$.

892. $a + h_c$, $p_a - p_b$; $\sphericalangle B$.

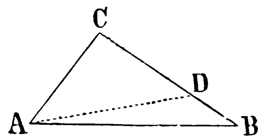
893. $a + m_c$, c; $\sphericalangle B$.

894. c, $a + m_c$; $\sphericalangle cm_c$.

895. h_c, $a + p_a$; $b + p_b$.

896. $a - b$, $\sphericalangle B$; $\sphericalangle C$.

Анализъ. ABC — искомый треугольникъ (черт. 34), на CB откладываемъ $CD = AC$ и, соединяя D съ A, получимъ треугольникъ ADB, въ которомъ $\sphericalangle B$—данъ, сторона $DB = a - b$; $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACD + CAD = \sphericalangle C + \frac{2d - \sphericalangle C}{2} = d + \sphericalangle \frac{C}{2}$. Уголъ $DAB = \frac{\sphericalangle A - \sphericalangle B}{2}$; а потому треугольникъ ADB вполнѣ опредѣленъ. Двѣ вершины A и B этого треугольника будутъ вершинами искомаго треугольника.



Черт. 34.

Построить прямоугольный треугольникъ по:

897. $a - b$; $\sphericalangle B$ $\left(\text{сторона} = a - b;\ \text{прилежащ. углы } B \text{ и } \frac{3d}{2}\right)$.

898. $a - b$, c.

899. $a - b$, $\sphericalangle A$.

900. $c - a$, b (отложить гипотенузу по катету).

901. $c-a$; $\sphericalangle B$.
902. $c-a$; $\sphericalangle A$.
903. $a-h_c$; $\sphericalangle B$.
904. $a-h_c$; $\sphericalangle A$.
905. Построить равносторонній треугольникъ по $a-h_c$.

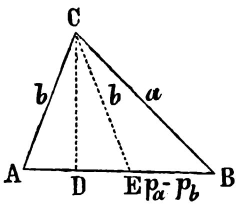
Построить равнобедренный треугольникъ по:

906. $a-c$; $\sphericalangle A$.
907. $a-c$; $\sphericalangle C$.
908. $a-h_c$; c.
909. $a-h_c$; $\sphericalangle A$.
910. $c-h_a$; $\sphericalangle A$.
911. $c-h_a$; $\sphericalangle C$.
912. $a-h_a$; $\sphericalangle C$.

Построить косоугольный треугольникъ по:

913. $a-b$; c; $\sphericalangle B$.
914. $a-b$; c; $\sphericalangle C$.
915. $a-b$; c; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
916. $a-b$; h_c; $\sphericalangle B$.
917. $a-b$; h_c; p_a.
918. $a-b$; h_a; C.
919. $a-b$; h_a; c.
920. $a-b$; c; $\sphericalangle A$ (при анализѣ отложить по меньшей сторонѣ b большую a).
921. $a-b$; h_c; $\sphericalangle A$.
922. $a-b$; h_b; c.
923. $a-b$; h_b; $\sphericalangle C$.
924. $a-h_c$; b; $\sphericalangle B$.
925. $a-h_c$; c; $\sphericalangle B$.
926. $a-h_c$; $\sphericalangle A$; $\sphericalangle B$.
927. $a-h_c$; p_a; p_b.
928. $a-h_c$; m_c; $\sphericalangle B$.
929. $a-h_c$; m_a; $\sphericalangle B$.
930. $a-h_c$; h_a; $\sphericalangle B$.
931. $a-h_c$; α_c; $\sphericalangle B$.
932. $a-h_c$; α_b; $\sphericalangle B$.
933. c; $a-m_c$; $\sphericalangle B$.
934. c; $a-m_c$; $\sphericalangle cm_c$.
935. h_c; $a-p_a$; $b-p_b$.
936. a; b; p_a-p_b.

Анализъ. Искомый треугольникъ ABC (черт. 35), $CD=h_c$; $AD=p_b$ и $BD=p_a$. Откладывая $DE=AD$ и соединяя C съ E, получимъ треугольникъ BCE, въ которомъ $BE=p_a-p_b$, $CE=b$ (такъ какъ треугольникъ $ADC = CDE$) и $BC=a$; слѣд., треугольникъ BCE опредѣленъ данными задачи; вершины B и C этого треугольника служатъ вершинами искомаго, третья же вершина A находится въ разстояніи b отъ C на продолженіи BE. Кромѣ того, $\sphericalangle CEB = 2d - \sphericalangle A$; $\sphericalangle BCE = \sphericalangle CEA - \sphericalangle CBE = \sphericalangle A - \sphericalangle B$.



Черт. 35.

937. a; p_a-p_b; $\sphericalangle A$.
938. p_a-p_b; $\sphericalangle B$; $\sphericalangle A$.
939. a; h_c; p_a-p_b.
940. b; h_c; p_a-p_b.
941. c; h_c; p_a-p_b; $(c=p_a+p_b)$.
942. h_c; p_a-p_b; $\sphericalangle A$.
943. h_c; p_a-p_b; $\sphericalangle B$.
944. h_a; p_a-p_b; $\sphericalangle B$.
945. c; p_a-p_b; $\sphericalangle A$.
946. c; p_a-p_b; $\sphericalangle B$.
947. b; c; p_a-p_b.

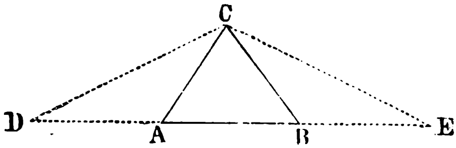
948. a; c; $p_a - p_b$.
949. a; b; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
950. a; $p_a - p_b$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
951. a; h_c, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
952. b; h_c; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
953. h_c; p_a; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
954. b; $p_a - p_b$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
955. b; h_a; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
956. c; h_a; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
957. a; h_b; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
958. h_a; $\sphericalangle C$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
959. $a+b$; $a-b$; $p_a - p_b$.
960. $a+b$; $a-b$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

Построить прямоугольный треугольникъ по:

961. $p_a - p_b$; $\sphericalangle A$.
962. $p_a - p_b$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
963. h_c; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

964. Построить косоугольный треугольникъ по $a+b+c$, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.

Анализъ. Искомый треугольникъ ABC (черт. 36). Откладывая $AD = AC$ и $BE = BC$ на продолженіяхъ стороны AB и соединяя D и E съ C, получимъ треугольникъ DEC, въ которомъ $DE = a+b+c$;



Черт. 36.

$\sphericalangle CDE = \sphericalangle \frac{A}{2}$; $\sphericalangle CED = \sphericalangle \frac{B}{2}$. Уголъ же $DCE = \sphericalangle C + \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B}{2} = d + \sphericalangle \frac{C}{2}$; вершины же A и B искомаго треугольника опред. какъ верш. равнобедренныхъ треугольниковъ, построенныхъ на сторонахъ DC и CE, какъ на основаніяхъ.

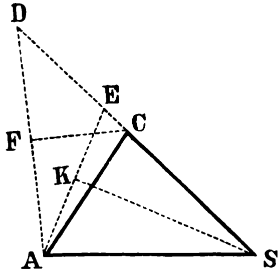
965. $a+b+c$; h_c; $\sphericalangle B$.
966. $a+b+c$; h_c; $\sphericalangle A$.
967. $a+b+c$; h_c; p_a.
968. $a+b+c$; p_a; $\sphericalangle B$.
969. Построить прямоугольный треугольникъ по $a+b+c$; $\sphericalangle A$.

Построить равнобедренный треугольникъ по:

970. $a+b+c$; $\sphericalangle A$.
971. $a+b+c$; $\sphericalangle C$.
972. $a+b+c$; h_c.

973. Построить треугольникъ по $a+b-c=d$, т.-е. по разности между суммою двухъ сторонъ и третьей стороною, и по двумъ угламъ S и C.

Анализъ. Предположимъ, что искомый треугольникъ—ASC (черт. 37); продолжаемъ сторону его SC и откладываемъ на ней $SD=a+b$, и отъ S отрѣзокъ SE, равный сторонѣ его c; соединивъ D и E съ вершиною A, получимъ треугольникъ ADE, въ которомъ $DE=d$; $\sphericalangle D=\sphericalangle\frac{C}{2}$, такъ какъ треугольникъ DCA — равнобедренный, а уголъ C—внѣшній уголъ его. Уголъ DEA, какъ внѣшній уголъ равнобедреннаго треугольника AES, равенъ $\sphericalangle S+EAB=\sphericalangle S+\frac{2d-\sphericalangle S}{2}=d+\frac{\sphericalangle S}{2}$. Слѣд., треугольникъ DEA опредѣляется вполнѣ двумя углами и стороною, лежащею между ними; а опредѣливъ этотъ треугольникъ, имѣющій вершину A, общую съ вершиною искомаго треугольника, легко найти и двѣ другія вершины; такъ, вершина S есть вершина равнобедреннаго треугольника, имѣющаго основаніемъ AE, а вершина C есть вершина равнобедреннаго треугольника, имѣющаго основаніемъ AD.



Черт. 37.

Построеніе. Строимъ треугольникъ DAE: при концахъ отрѣзка DE, равнаго по длинѣ отрѣзку d, строимъ по одну сторону углы, равные $\sphericalangle\frac{C}{2}$ и $\sphericalangle\left(d+\frac{S}{2}\right)$; пересѣченіе двухъ сторонъ этихъ угловъ дастъ вершину A треугольника. Возставляя перпендикуляръ KS къ AE въ ея срединѣ и продолжая его до пересѣченія S съ продолженіемъ стороны DE, получимъ другую вершину S искомаго треугольника. Наконецъ, возставляя перпендикуляръ FC къ прямой AD въ ея срединѣ и продолжая его до пересѣченія C съ продолженіемъ стороны DE, получимъ третью вершину искомаго треугольника; соединяя A съ C, получимъ искомый треугольникъ.

974. $a+b-c$; $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.

975. $a+b-c$; h_a; $\sphericalangle C$.

976. $a+b-c$; h_a; $\sphericalangle B$.

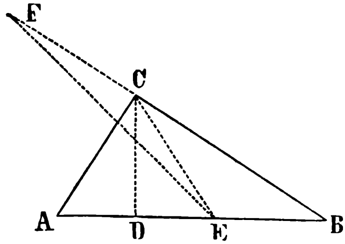
Построить прямоугольный треугольникъ по:

977. $a+b-c$; $\sphericalangle A$.

978. p_a-p_b, $a+b$; $\sphericalangle B$.

Анализъ. Искомый треугольникъ ABC (черт. 38); $CD=h_c$; $AD=p_b$ и $BD=p_a$. Отъ точки D на основаніи AB откладываемъ

DE=AD; на продолженіи CB откладываемъ CF=AC, и соединяя E съ F, получимъ треугольникъ FBE, въ которомъ $FB = a + b$; $BE = p_a - p_b$, и уголъ между ними B; слѣд., треугольникъ FBE опредѣленъ данными задачи; его вершина B служитъ вершиною искомаго треугольника. Вершина C искомаго треугольника есть вершина равнобедреннаго треугольника FCE, а вершина A отстоитъ отъ C на разстояніи AC = CE.



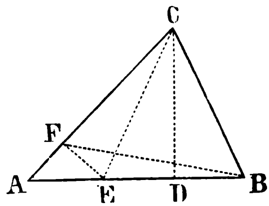
Черт. 38.

979. $p_a - p_b$; $a + b$; $\sphericalangle C$.

980. $p_a - p_b$; $a + b$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

981. $p_b - p_a$; $b - a$; $\sphericalangle A$.

Анализъ. Треугольникъ ABC — искомый; $CD = h_c$, $BD = p_a$, $AD = p_b$ (черт. 39). Откладывая на основаніи AB отъ точки D отрѣзокъ DE = DB и на AC отъ C отрѣзокъ CF = CB, соединяя E съ F, получимъ треугольникъ AFE, въ которомъ $AF = b - a$, $AE = p_b - p_a$ и уголъ между этими сторонами A; треугольникъ FAE опредѣляется данными задачи, и, построивъ его, легко построить искомый треугольникъ; $\sphericalangle AFE = d + \frac{\sphericalangle B - \sphericalangle A}{2}$ и $\sphericalangle AEF = \sphericalangle \frac{C}{2}$.



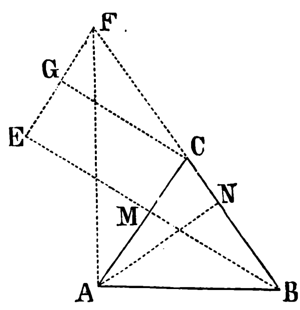
Черт. 39.

982. $p_b - p_a$; $b - a$; $\sphericalangle C$.

983. $p_b - p_a$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$, $b - a$;

984. $h_a + h_b$; b; $\sphericalangle C$.

Анализъ. Треугольникъ ABC искомый (черт. 40); $AN = h_a$ и $MB = h_b$; на продолженіи MB откладываемъ $EM = AN = h_a$; изъ точки E проводимъ линію EF, параллельную AC, до точки встрѣчи F съ продолженіемъ стороны BC; тогда прямоугольный треугольникъ BEF опредѣляется данными задачи, ибо въ немъ катетъ $BE = h_b + h_a$ и $\sphericalangle EFB = C$. Вершина B этого треугольника служитъ вершиною искомаго. Если проведемъ изъ C линію CG ‖ BE, то получимъ треугольникъ CFG, равный треугольнику CAN, а потому FC = AC = b, т.-е. вторая вершина искомаго треугольника лежитъ на разстояніи b отъ вершины F



Черт. 40.

и на сторонѣ FB; наконецъ, соединяя F съ A, получимъ, что AF равнодѣлящая угла EFB; слѣд., третья вершина A искомаго треугольника находится на равнодѣлящей угла EFB и въ разстояніи b отъ $\sphericalangle C$.

985. $h_a + h_b$; c; $\sphericalangle A + \sphericalangle B$.

986. $h_a + h_b$; a; b, гипотенуза $BF = a + b$ (черт. 40).

987. $h_a + h_b$; $\sphericalangle B$; $\sphericalangle C$.

988. $a + b$; $h_a + h_b$; c.

989. $h_a + h_b$; a; $\sphericalangle C$.

990. $a + b$; $h_a + h_b$; $\sphericalangle B$.

991. $a + b$; $h_a + h_b$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$ (опред. $\sphericalangle C$).

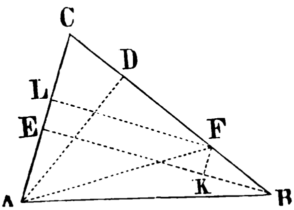
992. $a + b$; h_a; h_b.

993. $a - b$; $h_a + h_b$; $\sphericalangle C$.

994. $h_a + h_b$; c; $\sphericalangle A$.

995. $h_b - h_a$; b; $\sphericalangle C$.

Анализъ. Треугольникъ ACB—искомый (черт. 41); $AD = h_a$ и $BE = h_b$. На EB откладываемъ отъ точки E линію $EK = AD = h_a$; изъ K проводимъ $FK \parallel AC$; прямоугольный треугольникъ FKB опредѣленъ данными задачи, ибо $BK = h_b - h_a$; $\sphericalangle KFB = C$. Кромѣ того, $CF = AC = b$; $FB = a - b$; линія AF — равнодѣлящая угла CFK; отсюда легко вывести построеніе искомаго треугольника.



Черт. 41.

996. $h_b - h_a$; c; $\sphericalangle C$.

997. $h_b - h_a$; c; $\sphericalangle A$.

998. $h_b - h_a$; a; $\sphericalangle C$.

999. $h_b - h_a$; c; $\sphericalangle A + \sphericalangle B$.

1000. a; b; $h_b - h_a$.

1001. $h_b - h_a$; $\sphericalangle B$; $\sphericalangle C$.

1002. $h_b - h_a$; $\sphericalangle A$; $\sphericalangle B$.

1003. $a - b$; $h_b - h_a$; $\sphericalangle C$.

1004. $a - b$; $h_b - h_a$; $\sphericalangle B$.

1005. $a - b$; $h_b - h_a$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

1006. $a + b$; $h_b - h_a$; $\sphericalangle C$.

1007. $a - b$; h_a; h_b.

1008. $a + b + h_a + h_b$; $\sphericalangle C$; c.

1009. $a - b + h_b - h_a$; c; $\sphericalangle C$.

Построить равнобедренный треугольникъ по:

1010. $h_a + h_c$; $\sphericalangle A$.

1011. $h_a + h_c$; $\sphericalangle C$.

1012. $a + c$; $h_a + h_c$.

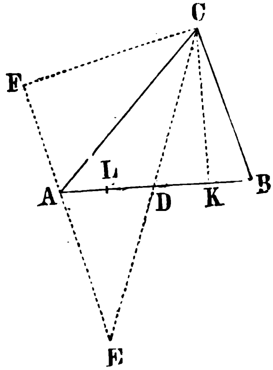
1013. $a - c$; $h_c - h_a$.

1014. $h_c - h_a$; $\sphericalangle A$.

1015. $h_c - h_a$; $\sphericalangle C$.

1016. a; b; m_c.

Анализъ. Искомый треугольникъ ABC (черт. 42); $CD = m_c$. Продолжаемъ CD и дѣлаемъ $DE = CD = m_c$. Тогда треугольникъ ACE опредѣленъ данными задачи, ибо $CE = 2m_c$; $AC = b$; $AE = a$ (изъ равенства треугольниковъ CDB и ADE) и т. д.



Черт. 42.

1017. a; m_c; $\measuredangle bm_c$.

1018. a; b; $\measuredangle am_c$.

1019. a; $\measuredangle am_c$; $\measuredangle bm_c$.

1020. m_c; $\measuredangle am_c$; $\measuredangle bm_c$.

1021. a; m_c; $\measuredangle A$.

1022. a; m_c; $p_b - p_a$. (Анализъ см. зад. 1017, черт. 42; откладывая $AL = KB$; $DK = \frac{p_b - p_a}{2}$ и т. д.)

1023. $h_c + m_c$; $p_b - p_a$; $\measuredangle C$.

1024. $h_c + m_c$; $\angle h_c m_c$; $\angle C$.

1025. $m_c - h_c$; $\measuredangle h_c m_c$; $\measuredangle C$.

1026. a; h_a; m_c ($CF \perp AE$; черт. 42).

1027. b; h_a; m_c.

1028. h_a; m_c; $\measuredangle bm_c$.

1029. $a + b$; $a - b$; m_c.

1030. $m_c - h_c$; $p_b - p_a$; $\measuredangle C$.

1031. m_c; $p_b - p_a$; $\measuredangle A$.

Построить прямоугольный треугольникъ по:

1032. a; m_c.

1033. m_c; $\measuredangle A$.

1034. h_c; m_c.

1035. c; m_a.

1036. m_a; $\measuredangle cm_a$.

1037. m_a; $\measuredangle B$.

1038. h_c; m_a.

1039. c; m_c; m_a (приводится къ построенію тр—ка по 3 сторонамъ: $\frac{c}{2}$, $\frac{1}{3} m_c$ и $\frac{2}{3} m_a$).

1040. h_c; m_c; $\measuredangle cm_a$.

1041. h_c; m_b; $\angle cm_a$ (высота, опущ. на сторону c тр—ка, образован. линіями m_a, c и $\frac{a}{2}$ равна $\frac{1}{2} h_c$).

1042. c; $\measuredangle cm_a$; $\measuredangle cm_b$.

1043. c, m_a; $\measuredangle m_a m_b$.

1044. m_a; m_b; $\measuredangle m_a m_b$.

1045. m_a; m_b; $\measuredangle cm_a$.

1046. m_a; m_b; m_c.

1047. m_c; $\measuredangle m_a m_c$; $\measuredangle m_b m_c$.

1048. h_c, m_c; m_a.

1049. h_c; m_a; m_b.

1050. m_a; m_c; $\angle h_c m_c$.

1051. h_c, $p_a - p_b$; m_a.

1052. m_c; m_a; $p_a - p_b$.

1053. c, $m_a + m_b$; $\angle cm_a$.

1054. c, $m_b - m_a$; $\measuredangle cm_a$.

1055. c; $m_a + m_b$; $\angle m_a m_b$.

1056. c; $m_b - m_a$; $\angle m_a m_b$.

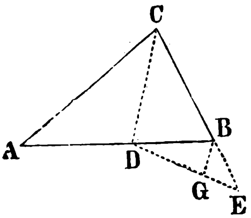
1057. h_c; m_a; $a = b$.

1058. c; $\angle h_c m_a$; $a = b$.

1059. h_c; $\angle h_c m_a$; $a = b$.

1060. m_a; m_b; $\measuredangle C = \angle d$.
1061. c; $\angle m_a m_b$; $\angle C = \angle d$.
1062. a; α_c; $\measuredangle A - \measuredangle B$ ($\measuredangle \alpha_c h_c = \angle A - \angle B$).
1063. α_c; $\angle C$; $\angle A - \angle B$ ($\angle \alpha_c h_c = \measuredangle A - \angle B$).
1064. a; $\alpha_c + h_c$; $\angle A - \angle B$.
1065. a; $\alpha_c - h_c$; $\angle A - \angle B$.
1066. α_c; q_a; $\angle A - \angle B$.
1067. h_c, q_a; $\angle A - \angle B$.
1068. h_c; q_b; $\angle A - \angle B$.
1069. q_a; q_b; $\angle A$.

Анализъ. Треугольникъ ABC—искомый (черт. 43): $CD = \alpha_c$; на CB откладываемъ $CE = AC$ и соединяемъ E съ D; получаемъ треугольникъ $DCE = ADC$ и $DE = AD = q_b$; $DB = q_a$; $\measuredangle DEB = \measuredangle A$; $\measuredangle BDE = \measuredangle B - \angle A$; $\angle DBE = 2d - \measuredangle B$; $BE = b - a$. Построивъ треугольникъ DBE, легко построить и треугольникъ ABC.



Черт. 43.

1070. q_a, q_b; $\angle B$.
1071. q_a, q_b; $\measuredangle B - \angle A$.
1072. q_a, q_b; $b - a$.
1073. $b - a$; q_a; $\angle A$.
1074. $b - a$; q_b; $\angle A$.
1075. $b - a$; q_a; $\angle B$.
1076. $b - a$; q_b; $\angle B$.
1077. $b - a$; q_a; $\angle A - \angle B$.
1078. $b - a$; q_b; $\angle A - \angle B$.
1079. $q_a - q_b$; $\angle A$; $\angle B$.
1080. $q_a - q_b$; $a - b$; $\angle C$.

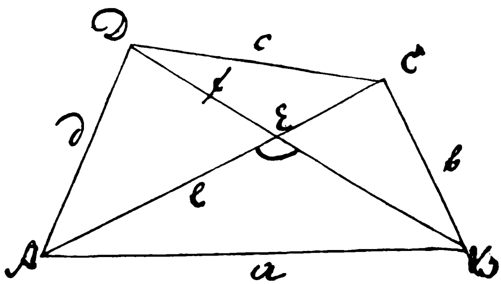
Анализъ. Откладывая $DG = DB$ (черт. 43) и соединяя G съ B, получимъ треугольникъ BGE, въ которомъ $BE = b - a$; $GE = q_a - q_b$ и $\measuredangle GBE = \frac{1}{2} \measuredangle C$ и т. д.

1081. $q_a - q_b$; $a - b$; $\angle A - \angle B$.
1082. $q_a - q_b$; h_a; $\angle B$.
1083. q_a, q_b, h_a.
1084. q_a; h_a; $\angle B$.
1085. α_c; $\angle A - \angle B$; $\angle C = d$ (прямому углу).
1086. $q_a - q_b$; $a - b$; $\angle C = d$.

ГЛАВА IX.

Четыреугольникъ.

Обозначенія. Стороны четыреугольника (черт. 44) ABCD обозначаются такъ: $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$ и $DA = d$; діагональ $AC = e$, $BD = f$; уголъ AEB между діагоналями обозначается черезъ $\sphericalangle E$; углы четыреугольника обозначаются буквами, стоящими при его вершинахъ: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle D$. Высота параллелограмма, опущенная на сторону $a = h_a$, на сторону $b = h_b$.



Черт. 44.

Построить квадратъ по:

1087. $a+e$.

1088. $e-a$.

Построить прямоугольникъ по:

1089. $a+b$, e.

1090. $a-b$; e.

1091. a; $b+e$.

1092. a, $e+b$.

1093. $a+b$; $\sphericalangle ae$.

1094. $a-b$; $\sphericalangle ae$.

1095. $a+b$; $\sphericalangle E$.

1096. $a-b$; $\sphericalangle E$.

1097. $a+b+c+d$; e.

1098. $a+b+c+d$, $\sphericalangle E$.

Построить ромбъ по:

1099. $e-a$, $\sphericalangle A$.

1100. a; $e+f$.

1101. a; $e-f$.

1102. $e+f$; $\sphericalangle A$.

1103. $e-f$; $\sphericalangle A$.

1104. $a+h_a$, $\sphericalangle A$.

1105. $a-h_a$, $\sphericalangle A$.

Построить параллелограммъ по:

1106. $a+b$; e, $\sphericalangle B$.

1107. $a-b$, c, $\sphericalangle B$.

1108. $a+b$; h_a, $\sphericalangle A$.

1109. $a+b$; e, h_a.

1110. $a-b$; e, h_a.

1111. a; $b+e$, $\sphericalangle B$.

1112. a; $e-b$, $\sphericalangle B$.

1113. a; $b+h_a$, $\sphericalangle A$.

1114. a; $b-h_a$, $\sphericalangle A$.

1115. a; $e+f$, $\sphericalangle E$.

1116. a, $e-f$, $\measuredangle E$.
1117. a; $e+f$, $\measuredangle ae$.
1118. a; $e-f$, $\measuredangle ae$.
1119. $e+f$, $\sphericalangle ae$, $\measuredangle af$.
1120. $e-f$, $\measuredangle ae$, $\measuredangle af$.
1121. $a+b+c+d$, e, $\measuredangle B$.
1122. $a+b+c+d$, h_a, $\measuredangle A$.
1123. $a+b+c+d$, e; h_a.

Построить трапецію по:

1124. a, b, h_a, $\measuredangle D$.

Построить равнобедренную трапецію по:

1125. a, b, $\measuredangle E$.
1126. a, h_a, $\measuredangle E$.

Построить трапецію по:

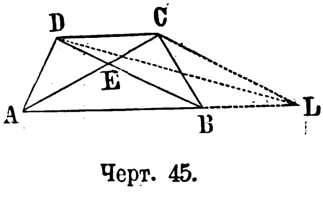
1127. $a+b$, c, e, $\measuredangle B$.
1128. $a+b$, d, e, $\measuredangle B$.
1129. $a+b$, e, $\sphericalangle A$, $\measuredangle B$.
1130. $a+b$, e, f, $\sphericalangle B$.
1131. $a+b$, e, $\measuredangle B$, $\measuredangle E$.
1132. $a+b$, c, d, e.
1133. $a+b$, c, e, $\measuredangle D$.
1134. $a+b$, c, d, $\measuredangle D$.
1135. $a+b$, c, e, $\measuredangle ce$.
1136. $a+b$, c, $\measuredangle ce$, $\measuredangle de$.
1137. $a+b$, e, h_a, $\measuredangle E$.
1138. $a+b$, e, f, $\measuredangle E$.
1139. $a+b$, c, h_a, $\measuredangle B$.
1140. $a+b$, h_a, $\measuredangle A$, $\measuredangle B$.
1141. $a+b$, h_a, $\measuredangle B$, $\measuredangle E$.
1142. $a+b$, f, h_a, $\sphericalangle B$.
1143. $a+b$, $\measuredangle B$, $\measuredangle be$, $\measuredangle bf$.
1144. $a-b$, c, e, $\sphericalangle B$
1145. $a-b$, d, e, $\measuredangle B$.
1146. $a-b$, e, $\measuredangle A$, $\measuredangle B$.
1147. $a-b$, e, f, $\measuredangle B$.
1148. $a-b$, e, $\measuredangle B$, $\sphericalangle E$.
1149. $a-b$; $\measuredangle B$; $\measuredangle be$, $\measuredangle bf$.
1150. $a-b$, c, d, e.
1151. $a-b$, c, e, $\measuredangle D$.
1152. $a-b$, e, f, h_a.
1153. $a-b$, c, d, $\measuredangle D$.
1154. $a-b$, e, h_a; $\measuredangle E$.
1155. $a-b$, c, e, $\measuredangle ce$.
1156. $a-b$, e, $\measuredangle ce$, $\measuredangle de$.
1157. $a-b$, h_a, $\measuredangle A$, $\sphericalangle B$.
1158. $a-b$, c, h_a, $\measuredangle B$.
1159. $a-b$, h_a, $\measuredangle B$, $\measuredangle E$.
1160. $a-b$, f, h_a, $\measuredangle B$.
1161. a, b, c, d.

Анализъ. Изъ вершины D трапеціи ABCD проведемъ $DE \parallel BC$, получимъ треугольникъ ADE, въ которомъ $AD=d$, $DE=b$, $AE=a-c$; построивъ этотъ треугольникъ, легко построить и искомую трапецію.

1162. a, c, $\measuredangle A$, $\measuredangle B$.
1163. $a-c$, e, $\measuredangle A$, $\measuredangle B$.
1164. a, b, c, $\measuredangle A$.
1165. a, b, d, $\measuredangle A$.
1166. b, d, e, $\measuredangle A$.
1167. $a-c$, b, e, $\sphericalangle A$.
1168. $a-c$, b, e, $\measuredangle A+\measuredangle B$.
1169. a, b, c, $\measuredangle A+\measuredangle B$.
1170. a, b, d, $\sphericalangle A+\sphericalangle B$.
1171. b, d, e, $\sphericalangle A+\sphericalangle B$.
1172. b, d, $\sphericalangle bf$, $\sphericalangle df$.
1173. $a-c$, b, d, e.
1174. $a-c$, b, d, f.
1175. $a-c$, b, e, h_a.

1176. $a-c$, e, h_a.
1177. a, b, d, $\measuredangle A-\measuredangle B$.
1178. b, d, e, $\measuredangle A-\measuredangle B$.
1179. a, b, h_a, $\measuredangle A-\measuredangle B$.
1180. b, h_a, e, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.
1181. a, $b+d$, h_a, $\sphericalangle A$.
1182. $b+d$, e, h_a, $\sphericalangle A$.
1183. a, $b+d$, h_a, $\sphericalangle B$.
1184. a, $b+d$, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
1185. $d+b$, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
1186. a, $b-d$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle A$.
1187. $b-d$, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
1188. a, $b-d$, h_a, $\sphericalangle A$.
1189. $b-d$, e, h_a, $\sphericalangle A$.
1190. $a-c$, $b+d$, e, $\sphericalangle A$.
1191. $a-c$, $b-d$, e, $\sphericalangle A$.
1192. $a-c$, $b+d$, e, $\sphericalangle A+\sphericalangle B$.
1193. $a-c$, $b-d$, e, $\sphericalangle A+\sphericalangle B$.
1194. $a-c$, $b+d$, e, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.
1195. $a-c$, $b-d$, e, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.
1196. $a+b+d-c$, e, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
1197. $a+b+d-c$, e, h_a, $\sphericalangle A$.
1198. $a+c$, b, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
1199. $a+c$, b, d, $\sphericalangle A$.
1200. $a+c$, b, d, $\sphericalangle A+\sphericalangle B$.
1201. $a+c$, h_a, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
1202. $a+c$, b, d, h_a.
1203. $a+c$, b, d, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.
1204. $a+c$, $b+d$, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
1205. $a+c$, $b-d$, $\sphericalangle A$, $\measuredangle B$.
1206. $a+c$, $b+d$, h_a, $\sphericalangle A$.
1207. $a+c$, $b-d$, h_a, $\measuredangle A$.
1208. a, e, f, $\measuredangle E$.

Анализъ. Искомая трапеція ABCD (черт. 45). Проведя CL=BD до пересѣченія ея съ продолженіемъ стороны AB, получимъ параллелограммъ BDCL, въ которомъ $BL=c$, $CL=f$ и треугольникъ ACL, въ которомъ $AL=b+c$, $AC=e$, $CL=f$, $\measuredangle ACL=\sphericalangle AEB$; этотъ треугольникъ опредѣляется данными задачи и т. д.



Черт. 45.

1209. b, e, f, $\measuredangle E$.
1210. e, f, $\measuredangle E$, $\sphericalangle B$.
1211. $a-c$, e, f, $\measuredangle E$ (опр. a и c).
1212. $a+c$, e, f, $\measuredangle B$.
1213. a, c, e, f.
1214. a, c, e, $\measuredangle E$.
1215. $a+c$, b, e, $\measuredangle E$.
1216. $a+c$, e, $\measuredangle B$, $\sphericalangle E$.
1217. a, c, $\measuredangle ae$, $\measuredangle af$.
1218. $a+c$, b, $\measuredangle ae$, $\measuredangle af$.
1219. $a+c$, b, e, h.

1220. a+c, h_a, e, ∡B.
1221. a, c, ∡be, ∢bf.
1222. a, e+f, ∡E, ∡ae.
1223. a, e—f, ∡E, ∡ ae.
1224. a, e+f, ∡ae, ∡ef.
1225. a, e—f, ∢ae, ∡af.
1226. a+c, b, e+f, ∢E.
1227. a+c, f—e, ∡E.

Построить равнобедренную трапецію по:

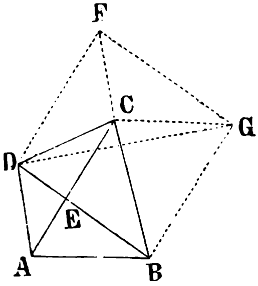
1228. a, b, c.
1229. a, c, ∡A.
1230. a—c, b, e.
1231. a —c, e, ∡A.
1232. a, c, h_a.
1233. a—c, h_a, ∡E.
1234. a—c, e, ∡E.
1235. a, e, ∢E.
1236. b, e, ∢E.
1237. a, c, ∡E.
1238. c, ∡E, ∡B.
1239. a, h_a, ∡E.
1240. b, h_a, ∡E.
1241. h_a, ∢A, ∢E.

Построить четыреугольникъ по:

1242. a+b, c, d, e, ∡B.
1243. a+b, c, e, ∡B, ∡C.
1244. a+b, c, e, f, ∡B.
1245. a+b, e, ∡A, ∡B, ∡C.
1246. a+b, e, f, ∡A, ∡B.
1247. a+b, e, f, ∡B, ∡E.
1248. a+b, c, e, ∡B, ∡E.
1249. a+b, e, ∡A, ∡B, ∡E.
1250. a+b, e, ∢B, ∡D, ∡E.
1251. a+b, c, d, ∢B, ∡D.
1252. a+b, c, d, ∡A, ∢D.
1253. a+b, c, d, e, ∡A.
1254. a+b, c, d, f, ∡A.
1255. a+b, d, f, ∡A, ∡C.
1256. a+b, e, f, ∡A, d.
1257. a+b, c—d, e, ∡B, ∡D.
1258. a—b, c, d, e, ∡B.
1259. a—b, c, e, ∡B, ∡C.
1260. a—b, c, e, f, ∡B.
1261. a—b, e, ∡A, ∢B, ∡C.
1262. a—b, e, f, ∡A, ∡B.
1263. a—b, e, f, ∡B, ∡E.
1264. a—b, c, e, ∡B, ∢E.
1265. a—b, e, ∡A, ∡B, ∡E
1266. a—b, c, d, ∡B, ∡D.
1267. a—b, c, d, ∡A, ∢D.
1268. a—b, c, d, e, ∢A.
1269. a—b, c, d, f, ∢A.
1270. a—b, c, f, ∡A, ∡C.
1271. a—b, d, f, ∡A, ∡C.

1272. a+b, d, f, ∡A, ∡E.
1273. a+b, e, ∡B, ∡ce, ∡de.
1274. a+b, e, ∡B, ∡cf, ∡df.
1275. a+b, f, ∡E, ∡ae, ∡be.
1276. a, b, e+f, ∡B, ∡E.
1277. a, b+e, f, ∡A, ∢B.
1278. a+b, c+d, e, ∡B, ∡D.
1279. a—b, d, f, ∢A, ∡E.
1280. a—b, e, ∢B, ∡ce, ∢de.
1281. a—b, e, ∡B, ∡cf, ∡df.
1282. a—b, c, d, ∡ae, ∡be.
1283. a—b, f, ∡E, ∡ae, ∡be.
1284. c, a, e, f, ∡E.

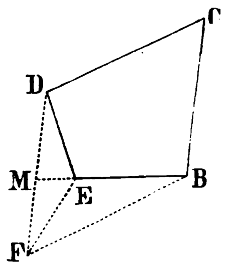
А н а л и з ъ. Искомый четыреугольникъ ABCD (черт. 46); діагонали BD=f и AC=e; проведя изъ концовъ діагонали BD линіи, параллельныя діагонали AC, а изъ вершины C — линію CF ‖ AD и CG ‖ AB, получимъ три параллелограмма ACFD, ACGB, DFGB, при чемъ $DF = e$, $FG = f$ и $\angle DFG = \angle E$; а потому параллелограммъ DBFD опредѣленъ данными задачи. Вершины D и B этого параллелограмма суть вершины искомаго четыреугольника; вершина C находится въ разстояніи a отъ вершины G и въ разстояніи c отъ вершины D; вершина A въ разстояніи e отъ C и въ разстояніи a отъ B.



Черт. 46.

1285. e, f, $\angle E$, a, $\angle bf$.
1286. e, f, $\angle E$, $\angle ae$, $\angle bf$.
1287. e, f, $\angle E$, $\angle ae$, $\angle ce$.
1288. e, f, $\angle E$, $\angle af$, $\angle bf$.
1289. e, f, a, $\angle ce$, $\angle cf$.
1290. e, f, $a+c$, $\angle E$, $\angle B + \angle C$.
1291. e, f, $\angle E$, $a-c$, $\angle B + \angle C$.
1292. $e+f$, a, c, $\angle E$, $\angle B + \angle C$.
1293. $e-f$, a, c, $\angle E$, $\angle B + \angle C$.
1294. b, d, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Анализъ. Проведя BF ‖ DC и DF ‖ BC, получимъ параллелограммъ DCBF и треугольникъ EDF (черт. 47), въ которомъ $DF = b$, $ED = d$ и $\angle EDF = \angle E + \angle B - 2d$. Треугольникъ DEF опредѣленъ данными задачи; вершина B находится на пересѣченіи стороны FB угла $DFB = \angle C$ съ стороною EB угла $DEB = \angle E$ и т. д. (Здѣсь вм. $\angle A$ взять $\angle E$).



Черт. 47.

1295. a, e, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.
1296. b, e, d, $\angle A$, $\angle B$.
1297. a, b, d, $\angle C$, $\angle D$.
1298. a, b, c, d, $\angle A + \angle B$.
1299. a, b, d, $\angle A + \angle B$, $\angle C$.

Задачи на окружность.

1300. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, отсѣкающихъ отъ двухъ параллельныхъ линій хорды данной длины.

1301. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касательныхъ двухъ данныхъ концентрическихъ окружностей.

Отв. Двѣ окружности, концентрическія даннымъ.

Построить треугольникъ по.

1302. c, h_c, $\sphericalangle C$.

1303. c, m_c, $\sphericalangle C$.

1304. p_a, p_b, $\sphericalangle C$.

1305. q_a, q_b, $\sphericalangle C$.

1306. p_a, p_b. h_a.

1307. p_a, p_b, $\sphericalangle m_c a$.

1308. c, $\sphericalangle cm_c$, $\sphericalangle C$.

1309. c, $\sphericalangle am_c$, $\sphericalangle C$.

1310. c, $\sphericalangle am_c$, $\sphericalangle bm_c$.

1311. c, h_c, $\sphericalangle am_c$.

1312. a, h_a, h_b.

1313. a, b, $\sphericalangle cm_c$.

Рѣшеніе. Если черезъ вершину $\sphericalangle A$ треугольника ABC проведемъ линію m_c до пересѣченія E съ продолженіемъ стороны BC, то получимъ треугольникъ ABE, въ которомъ $BE=2a$ и $\sphericalangle EAB=$ $=\sphericalangle cm_c$ и т. д.

1314. $a, b, \sphericalangle c\alpha_a$ (см. предыд.).

1315. $c, h_a, \sphericalangle C=d$ (прямому).

1316. p_b, p_a, $\sphericalangle C=d$.

1317. q_a, q_b, $\sphericalangle C=d$.

1318. a, $\sphericalangle am_c$, $\sphericalangle C=d$.

1319. c, q_b-q_a, $\sphericalangle C$.

1320. h_c, p_b-p_a, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.

1321. p_b, p_a, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.

1322. c, p_b-p_a, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.

1323. $a+b$, h_b, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.

1324. $a+h_c$, h_b, $\sphericalangle B$.

1325. $a-b$, h_a, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.

1326. $a+b+c$; h_c, $\sphericalangle C$.

1327. $a+b+c$, p_a, $\sphericalangle C$.

1328. $a+p_b$, $b+p_a$, $\sphericalangle C$.

1329. $a+p_b$, $b+p_a$, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.

1330. $a-b+c$, h_a, $\sphericalangle A$.

1331. c, h_c, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.

Рѣшеніе. Высота h_c искомаго треугольника ABC—CD; отъ D откладываемъ DE=AD; прямую CE продолжаемъ до пересѣченія F съ перпендикуляромъ AF къ прямой AB; F соединяемъ съ B, получимъ прямоугольный треугольникъ ABF, въ которомъ $AF=2h_c$ и $AB=c$; вершина C лежитъ на геометрическомъ мѣстѣ точекъ, изъ которыхъ прямая BF видна подъ угломъ $[2d-(\sphericalangle A-$ $-\sphericalangle B)]$, и въ разстояніи h_c отъ основанія AB.

1332. $a+b$, h_a, $\sphericalangle A-\sphericalangle B$.

Построить параллелограммъ по:

1333. a, h_a, h_b.

1334. c, h_a, h_b.

1335. a, h_a, $\sphericalangle be$.

1336. e, f, $\sphericalangle A$.

1337. e, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle E$.

1338. e, $\sphericalangle af$, $\sphericalangle bf$.

Построить трапецію по:

1339. a, b, e, ∢df.

1340. a, b, ∢B, ∢df.

1341. a, b, h_a, ∢df.

1342. a, h_a, ∢be, ∢df.

Построить четыреугольникъ по:

1343. a, b, c, ∢B, ∢D.

1344. a, b, f, ∡B, ∡D.

1345. a, b, e, f, ∢D.

1346. a, c, e, ∢B, ∡D.

1347. a, e, f, ∡B, ∢D.

1348. a, b, c, e, ∡df.

1349. a, e, f, ∢be, ∢df.

1350. a, b, ∢B, ∢cf, ∢df.

1351. a, b, e, ∢cf, ∢df.

1352. a, b, e, f, ∢E.

1353. a, b, ∢B, ∢D, ∢E.

1354. a, b, ∢A, ∢B, ∡E.

1355. a, b, c, e, ∢E.

1356. a, b, c=d, ∢B, ∡D.

1357. a, b, c=d, e, ∢D.

1358. a, b, e=f; ∢B, ∡D.

1359. Провести окружность, касающуюся двухъ пересѣкающихся линій и притомъ одной изъ нихъ въ данной точкѣ.

1360. Провести окружность, которая касалась бы данной линіи и даннаго круга въ данной точкѣ (см. предыд.).

1361. Провести окружность, касающуюся данной прямой въ данной точкѣ и данной окружности.

Рѣшеніе. Центръ искомой окружности лежитъ на перпендикулярѣ къ прямой, соединяющей центръ данной окружности съ точкой, находящейся отъ данной точки въ разстояніи радіуса и на перпендикулярѣ къ данной прямой.

1362. Провести окружность, касающуюся двухъ данныхъ окружностей, при чемъ одной изъ нихъ въ данной точкѣ.

1363. Провести прямую, пересѣкающую два данныхъ круга такъ, чтобы хорды пересѣченія были данной длины.

1364. Въ треугольникѣ опредѣлить точку, изъ которой всѣ три стороны его видны подъ равными углами.

1365. Даны три точки; около одной изъ нихъ описать окружность такъ, чтобы касательныя, проведенныя къ ней изъ двухъ точекъ, составляли между собою данный уголъ.

На окружности дана точка M;

1366—провести черезъ нее хорду такъ, чтобы она находилась въ данномъ разстояніи отъ центра;

1367—провести діаметръ, находящійся въ данномъ разстояніи отъ точки M;

1368—провести хорду данной длины и находящуюся въ данномъ разстояніи отъ точки M.

Внутри окружности дана точка М;

1369—провести черезъ М хорду данной длины;

1370—провести черезъ М хорду, отсѣкающую такую дугу, которая вмѣщаетъ данный уголъ.

1371. Внѣ окружности дана точка P и черезъ нее проведены двѣ сѣкущія PAB и PCD, пересѣкающія окружность въ точкахъ A, B, C, D; черезъ ту же точку P провести сѣкущую Pxy, пересѣкающую ту же окружность въ точкахъ x и y такъ, чтобы $\smile Ax = \smile Dy$ ($\smile AD = \smile xy$).

1372. Черезъ точку P, лежащую внѣ окружности, проведена сѣкущая PAB, пересѣкающая окружность въ точкахъ A и B; черезъ ту же точку P провести сѣкущую Pxy, пересѣкующую окружность въ точкахъ x и y такъ, чтобы одна изъ дугъ, заключенная между этими сѣкущими, была вдвое болѣе другой.

1373. Черезъ точку, лежащую внѣ круга, проведена сѣкущая, черезъ ту же точку провести другую сѣкущую такъ, чтобы сумма дугъ, лежащихъ между обѣими сѣкущими, была равна данной дугѣ.

1374. Черезъ точку P, лежащую внѣ круга, проведена сѣкущая, проходящая черезъ центръ O; черезъ ту же точку провести сѣкущую Pxy, пересѣкающую кругъ въ точкахъ x и y такъ, чтобы большая дуга, лежащая между сѣкущими, была втрое больше меньшей.

Черезъ точку P, лежащую внутри круга, проведенъ діаметръ AB; провести черезъ ту же точку хорду xy такъ, чтобы

1375—$\smile By = 2 \smile Ax$;

1376—$\smile By = 3 \smile Ax$.

1377. Черезъ двѣ точки внутри окружности провести 2 равныя и параллельныя между собою хорды.

1378. Черезъ двѣ точки P и P_1, лежащія внутри круга, провести двѣ равныя между собою хорды, пересѣкающіяся подъ даннымъ угломъ

1379. Черезъ двѣ точки A и B, лежащія внѣ окружности, провести двѣ сѣкущія Axy и Bx′y′, которыя въ точкѣ пересѣченія дѣлились бы пополамъ.

Сѣкущія—діагонали параллелограмма и $xx' = AB$.

Къ окружности проведена касательная; найти на ней такую точку,

1380—чтобы сѣкущая, идущая отъ нея къ концу діаметра, проходящаго черезъ точку прикосновенія, дѣлилась бы окружностію пополамъ;

1381—чтобы другая касательная, проведенная изъ нея и продолженная до пересѣченія съ продолженнымъ діаметромъ, проходящимъ черезъ точку прикосновенія первой касательной, дѣлилась окружностію пополамъ.

Уголъ между касательными $= \frac{2d}{3}$.

Даны окружность и прямая; между ними провести прямую данной длины такъ, чтобы она

1382—была параллельна данной прямой;

1383—касалась данной окружности;

1384—пересѣкала данную окружность, и часть ея, лежащая внутри данной окружности, была равна данному отрѣзку.

1385. Между прямою и окружностью провести прямую, перпендикулярную къ данной прямой такъ, чтобы она окружностью круга дѣлилась пополамъ.

Даны прямая и окружность; на прямой отложить отрѣзокъ данной длины такъ,

1386—чтобы сѣкущія, проведенныя черезъ центръ круга изъ концовъ отрѣзка, заключали между собою дуги, хорды которыхъ параллельны данной прямой;

1387—чтобы касательныя къ кругу, проведенныя изъ концовъ отрѣзка, были между собою равны;

1388—чтобы перпендикуляры, опущенные изъ концовъ отрѣзка на данный діаметръ этого круга, отсѣкали равныя между собою дуги.

1389. Дана точка A, прямая L и окружность; найти на прямой такую точку x, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ окружности и прямая Ax составляли равные углы съ прямою L.

1390. Даны двѣ окружности и прямая L; найти на прямой такую точку, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ окружностямъ, составляли съ прямою L равные углы.

Даны двѣ окружности; провести прямую такъ, чтобы

1391—она касалась одной окружности и чтобы другая окружность отсѣкала отъ нея хорду данной длины;

1392—обѣ окружности отсѣкали отъ нея хорды данной длины;

1393—чтобы прямая была параллельна данной прямой и чтобы часть ея, лежащая между двумя окружностями, имѣла данную длину.

1394. Между двумя окружностями провести прямую, которая дѣлилась бы въ данной точкѣ пополамъ.

1395. На окружности даны двѣ точки A и A_1; провести черезъ нихъ двѣ хорды, которыя пересѣкались бы на окружности и вмѣстѣ съ данною прямою L образовали бы равнобедренный треугольникъ.

Высота искомаго треугольника перпендикулярна къ L и проходитъ черезъ середину дуги AA_1.

На окружности даны двѣ точки A и A_1; провести черезъ нихъ двѣ хорды, пересѣкающіяся на окружности круга такъ, чтобы

1396—отрѣзокъ прямой L, заключенный между ними, былъ бы равенъ данной прямой;

1397—чтобы сумма этихъ хордъ равнялась данному отрѣзку;

1398—чтобы разность хордъ равнялась данному отрѣзку;

1399—чтобы линія, дѣлящая уголъ между хордами пополамъ, проходила черезъ данную точку B.

Даны двѣ точки A и A_1, лежащія внутри окружности; провести черезъ нихъ двѣ хорды такъ, чтобы онѣ пересѣкались на окружности и

1400—чтобы хорда, соединяющая другіе концы этихъ хордъ, была равна діаметру;

1401—чтобы уголъ между ними равнялся данному углу;

1402—чтобы хорда, соединяющая концы искомыхъ хордъ равнялась данному отрѣзку.

Въ окружности проведена хорда AB; провести въ ней же другую хорду, которая въ точкѣ пересѣченія ея съ AB дѣлилась бы пополамъ и

1403—составляла съ хордой AB уголъ, равный данному;

1404—проходила бы черезъ данную точку P

Въ окружности проведена хорда AB и на продолженіи хорды дана точка D. Провести черезъ D сѣкущую такъ,

1405—чтобы сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ на хорду AB изъ точекъ пересѣченія сѣкущей съ окружностью, была равна данной длинѣ;

1406—чтобы сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ A и B на сѣкущую, равнялась данной длинѣ.

Въ окружности проведена хорда AB и на ней дана точка P; провести черезъ нее хорду такъ,

1407—чтобы разность перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ концовъ этой хорды на хорду AB равнялась данной длинѣ (прямая линія, соединяющая средины діагоналей трапеціи, равна полуразности параллельныхъ сторонъ);

1408—чтобы разность перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ A и B на искомую хорду, равнялась данной длинѣ.

Даны двѣ пересѣкающіяся окружности; черезъ точку A ихъ пересѣченія провести прямую,

1409 — отъ которой окружности отсѣкали бы равныя хорды (опредѣлить уголъ искомой линіи съ прямой, соединяющей A съ срединою линіи центровъ);

1410—отъ которой окружности отсѣкали бы хорды, сумма которыхъ равна данной длинѣ, и самыя хорды лежали бы по разныя стороны отъ A;

1411—отъ которой окружности отсѣкали бы хорды, сумма которыхъ равна данной длинѣ, и хорды лежали бы по одну сторону отъ A;

1412—отъ которой окружности отсѣкали бы хорды, разность которыхъ равна данной длинѣ, и хорды лежали бы по одну сторону отъ A;

1413—отъ которой окружности отсѣкали бы хорды, разность между которыми равнялась бы данной длинѣ, но хорды лежали бы по разныя стороны отъ A;

1414—которая отсѣкала бы дуги, вмѣщающія равные углы.

Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей провести двѣ хорды—одну въ одной и другую—въ другой окружности, составляющія между собою данный уголъ, и притомъ такъ, чтобы

1415—хорды эти были между собою равны;

1416—сумма ихъ равнялась данной длинѣ;

1417—разность ихъ равнялась данной длинѣ.

Даны двѣ окружности и къ нимъ проведена общая внѣшняя касательная; на касательной между точками прикосновенія найти такую точку, чтобы

1418—касательныя, проведенныя изъ нея къ даннымъ окружностямъ, составляли съ 1-ой касательной равные углы.

1419—сумма этихъ угловъ равнялась данному углу;

1420—разность этихъ угловъ равнялась данному углу;

1421—одинъ уголъ былъ вдвое болѣе другого.

1422—1425. Рѣшить тѣ же задачи, какъ 1418—1421, такъ, чтобы искомая точка находилась внѣ отрѣзка, лежащаго между точками прикосновенія.

1426—1429. Найти такую же точку, какъ и въ предыдущихъ задачахъ, на внутренней касательной къ двумъ даннымъ окружностямъ такъ, чтобы искомая точка лежала 1) на отрѣзкѣ между точками прикосновенія и 2) внѣ его.

Даны двѣ окружности и къ нимъ проведена общая внѣшняя касательная, найти на этой касательной двѣ такія точки,

1430 — чтобы касательныя, проведенныя изъ нихъ къ двумъ даннымъ окружностямъ, составляли съ 1-ой касательной равные углы;

1431—чтобы сумма этихъ угловъ равнялась данному углу;

1432—чтобы разность этихъ угловъ равнялась данному углу.

1433—1435. Найти такія же точки, какъ и въ задачахъ 1430—1432, на внутренней касательной къ двумъ даннымъ окружностямъ.

Даны два концентрическіе круга, и точка A на окружности большого круга; провести черезъ A хорду такъ, чтобы хорда, лежащая въ большей окружности, была

1436—вдвое больше хорды, лежащей въ меньшей;

1437—въ n разъ больше хорды, лежащей въ меньшей окружности.

1438. Даны двѣ концентрическія окружности и точка A внутри круга меньшей окружности. Провести черезъ точку A отрѣзокъ прямой, дѣлящійся въ точкѣ A пополамъ, такъ чтобы одинъ конецъ отрѣзка лежалъ на меньшей окружности концентрическáго круга, а другой на большей окружности.

1439. Даны двѣ концентрическія окружности и точка P, не лежащая на окружностяхъ данныхъ круговъ; провести черезъ точку P хорду такъ, чтобы часть ея, лежащая внутри окружности большого круга, была вдвое больше части ея, лежащей въ окружности меньшаго круга.

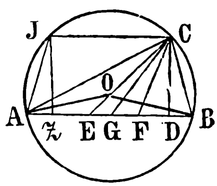
1440. Даны двѣ параллельныя линіи L и L_1 и окружность; провести къ окружности сѣкущую такъ, чтобы часть ея, лежащая между параллельными линіями и внутри окружности, была равна данному отрѣзку.

ГЛАВА X.

Вписанные и описанные треугольники и четыреугольники.

Треугольникъ вписанный.

I. Треугольникъ ABC вписанъ въ окружность O (черт. 48). Соединяя центръ описаннаго круга O съ точками A, B, C, получимъ треугольники AOB, BOC, AOC, въ которыхъ $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle C$, $\sphericalangle COB = 2\sphericalangle A$, $\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle B$; стороны $OA = BO = CO = R$. Опуская изъ C перпендикуляръ $CD = h_c$ на сторону AB, соединяя C съ центромъ O и продолжая OC до пересѣченія E съ стороною AB, получимъ треугольникъ DCE,



Черт. 48.

въ которомъ $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ACD - \sphericalangle ACE = d - \sphericalangle A - \frac{(2d - 2B)}{2} =$
$= d - \sphericalangle A - d + \sphericalangle B = \sphericalangle B - \sphericalangle A.$

1441. R, h_c, a.

1442. R, a, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

1443. R, b, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

1444. R, c, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

1445. R, h_c, m_c (опред. прям. тр — къ CGD, гдѣ G — средина AB).

1446. R, h_c, $\sphericalangle B + \sphericalangle A$.

II. Если раздѣлимъ прямою CF $\sphericalangle ACB$ пополамъ (черт. 48), то та же линія раздѣлитъ и $\sphericalangle ECD$ пополамъ, такъ что $\sphericalangle ECF = \sphericalangle FCD = \frac{\sphericalangle B - \sphericalangle A}{2}$.

1447. R, h_c, $\sphericalangle B - \sphericalangle A$ (тр. FCD; черт. 48).

1448. R, h_c, α_c.

1449. R, α_c, $\sphericalangle B - \sphericalangle A$.

III. Проведя изъ вершины C линію $CJ \parallel AB$ (черт. 48), опуская изъ J перпендикуляръ JZ на AB и соединяя J съ A, получимъ треугольникъ $JAZ = CBD$; $\sphericalangle JAZ = \sphericalangle B$; $\sphericalangle JAC = \sphericalangle B - \sphericalangle A$; $CJ = ZD = AD - AZ = AD - DB = p_b - p_a$.

1450. R, h_c, $p_b - p_a$.

1451. R, h_c, b.

1452. R, $p_b - p_a$, $\sphericalangle B - \sphericalangle A$.

1453. R, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$, a.

1454. R, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$, b.

1455. R, $a + b$, $\sphericalangle C$ (опр. тр. AOB).

1456. R, $a - b$, $\sphericalangle C$.

1457. R, $a + b$, c.

1458. R, $a - b$, c.

1459. R, $a + b + c$, $\sphericalangle C$.

1460. R, $a + b - c$, $\sphericalangle C$.

1461. $c + R$, a, $\sphericalangle C$.

1462. $c + R$, h_c, $\sphericalangle C$.

1463. $c + R$, m_c; $\sphericalangle C$.

1464. $c - R$, a, $\sphericalangle C$.

1465. $c - R$, h_c, $\sphericalangle C$.

1466. $c - R$, m_c, $\sphericalangle C$.

1467. R, $h_c + \alpha_c$, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$ (тр-къ FCD).

1468. R, $\alpha_c - h_c$, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

1469. R, $h_c + m_c$, $p_a - p_b$.

1470. R, $m_c - h_c$, $p_a - p_b$.

1471. h_c, m_c, $\sphericalangle B - \sphericalangle A$ (ECD).

1472. m_c, $p_a - p_b$, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$ (GCD).

1473. h_c, $p_a - p_b$, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.

1474. h_c, α_c, $p_a - p_b$ (CFD).

1475. m_c, α_c, $p_a - p_b$ (GCD).

1476. α_c, $p_a - p_b$, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$ ($\sphericalangle CFD$).

1477. m_c, α_c, $\sphericalangle B - \sphericalangle A$.

Построить равнобедренный вписанный треугольникъ по:

1478. R, a.

1479. R, c.

1480. R, $\sphericalangle A$.

1481. R, $\sphericalangle C$.

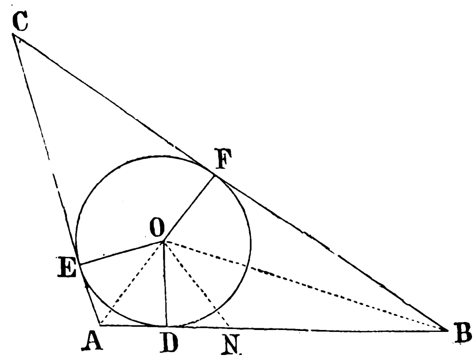
1482. R, h_c.
1483. $h_c - R$, $\measuredangle C$.
1484. $c + R$, $\measuredangle C$.
1485. $c - R$, $\measuredangle C$.

Построить равносторонній треугольникъ по:

1486. R.
1487. $a + R$.
1488. $a - R$.
1489. $h_c - R$.

Треугольникъ описанный.

I. Треугольникъ ABC описанъ около окружности O (черт. 49); $OF = OE = OD = r$; $CF = CE$; $BF = BD$; $AD = AE$; $CE = FC = a - BF$ и $CE = CF = b - AE$; складывая два послѣднія равенства, найдемъ: $2\,CE = 2CF = a + b - (BF + AE) = a + b - (BD + AD) = a + b - c$, или $CE = CF = \frac{a + b - c}{2}$.



Черт. 49.

Также найдемъ $AD = AE = \frac{c + b - a}{2}$ и $BF = BD = \frac{a + c - b}{2}$.

1490. r, c, $\sphericalangle C$.
1491. r, a, h_c.
1492. r, h_c, p_a.
1493. r, α_c, $\measuredangle C$.
1494. r, h_c, $\sphericalangle A - \measuredangle B$.
1495. r, α_c, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
1496. r, $h_c + \alpha_c$; $\measuredangle A - \measuredangle B$.
1497. r, $\alpha_c - h_c$; $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
1498. r, h_c, $\sphericalangle C$.
1499. r, $a + b - c$, h_c.
1500. r, $a + b - c$, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$ (опр. $\sphericalangle C$).
1501. $a + b - c$, h_c, $\sphericalangle C$ (опр. r).
1502. $a + b - c$, $h_c - r$, $\sphericalangle C$.
1503. $a + b - c$, $h_c - r$, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
1504. $a + b - c$, r, α_c.
1505. $a + b - c$, α_c, $\measuredangle C$.
1506. $h_c + r$, α_c, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
1507. $h_c - r$, α_c, $\sphericalangle A - \measuredangle B$.
1508. r, $a - b$, c.

Ан. Откладывая $DN = AD$, получимъ $BN = a - b$ (черт. 49).

1509. r, $a - b$, $\measuredangle A$ (опр. тр—къ AOB; черт. 49).
1510. r, $a - b$, $\sphericalangle B$.
1511. r, $a - b$, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$ ($\measuredangle NOB = \frac{\measuredangle A - \measuredangle B}{2}$ черт. 49).
1512. R, r, $\sphericalangle$ (Опр.: тр—къ AOB; черт. 49).

Построить прямоугольный тр—къ.

1513. r, a.
1514. r, $\angle A$.
1515. r, c,
1516. r, α_c.
1517. r, h_c.
1518. $a+b-c$, h_c.
1519. $a+b-c$, α_c.
1520. R, r.
1521. r, $a+b$.

Построить равнобедренный треугольникъ.

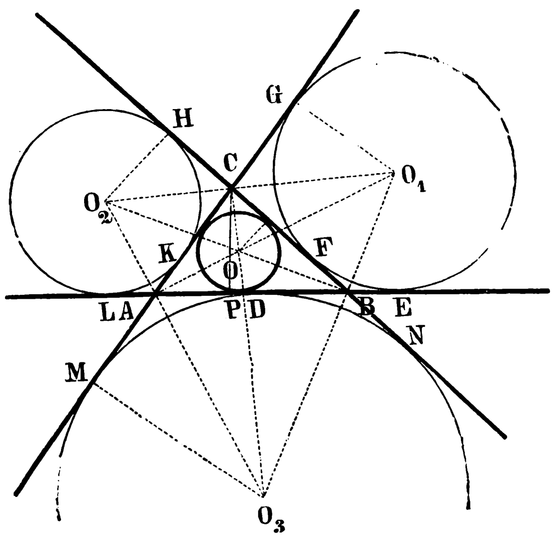
1522. r, h_c.
1523. h_c-r, $\angle C$.

Построить равносторонній тр—къ.

1524. r.
1524a. h_c-r.

Окружности, вписанныя въ треугольникъ извнѣ.

Радіусъ окружности, касающейся стороны a и продолженія сторонъ b и c, назовемъ r_a; радіусъ окружности, касающейся стороны b и продолженія сторонъ c и a, черезъ r_b; радіусъ окружности, касающейся c и продолженія b и a, черезъ r_c (черт. 50), $AE = c + BE = c + BF$; $AG = AE = b + CG = b + CF$. Складывая эти равенства, получимъ: $2AE = c + b + (BF + CF) = b + c + a$; откуда $AE = \frac{a+b+c}{2}$



Черт. 50.

Также найдемъ $AG = \frac{a+b+c}{2} = BH = BL = CM = CN$. Кромѣ того: $BE = AE - AB = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} = BE$. Также $CG = CF = \frac{a+c-b}{2}$; $BN = \frac{c+b-a}{2}$.

1525. c, r_a, $\sphericalangle A$.
1526. c, r_a, $\sphericalangle B$.
1527. r_a, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
1528. c, r_a, $\sphericalangle C$.
1529. R, r_a, $\sphericalangle C$.
1530. c, R, r_a.
1531. c, r_b, $\sphericalangle A$.
1532. r_a, h_c, $\angle A$.
1533. r, r_a, $\angle A$ (общ. кас.).
1534. r, r_a, $\angle B$.
1535. r, r_a, $\sphericalangle C$.
1536. r, r_c, $\sphericalangle A$.
1537. r, r_c, $\sphericalangle C$.
1538. r_a, r_b, $\sphericalangle A$.
1539. r_a, r_b, $\sphericalangle C$.
1540. r_a, r_c, $\sphericalangle C$.
1541. r, r_c, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
1542. r, $a+b+c$, $\angle C$.
1543. r_a, $a+b+c$, $\angle C$.
1544. r_c, $a+b+c$, $\angle A$.
1545. r, r_c, $a+b+c$.
1546. r_a, r_b, $a+b+c$.
1547. r_c, $a+b-c$, $\angle C$.
1548. r, r_c, $a+b-c$.
1549. r_a, $a+b-c$, $\angle A$.
1550. r_a, $a+b-c$, $\sphericalangle C$.
1551. r, r_a, $a+b-c$.
1552. r_a, r_b, $a+b-c$.
1553. r_a, r_c, $a+b-c$.

Четыреугольникъ вписанный.

1554. R, e, f, $\angle E$.
1555. R, e, $\angle A$, $\angle E$.
1556. R, $\angle A$, $\angle B$, $\sphericalangle E$.
1557. r, $a \pm b$, c, $\sphericalangle C$.
1558. r, $a \pm b$, c, $\angle A$.
1559. r, $a \pm b$, e, f.
1560. r, $a \pm b$, e, $\angle E$.
1561. r, $a \pm b$, c, $\angle B$.
1562. r, $a \pm b$, $\angle A$, $\angle B$.
1563. r, $a \pm b$, $\angle C$, $\angle D$.
1564. r, $a \pm b$, f, $\angle B$.
1565. r, $a \pm b$, $\angle B$, $\angle E$.
1566. a, b, f, $\angle B$.
1567. a, b, $\angle B$, $e=f$.
1568. a, b, c, $\angle E$.
1569. a, c, e, $\angle B$.
1570. a, e, $\sphericalangle A$, $\angle B$.
1571. a, e, $\angle C$, $\angle D$.
1572. a, e, f, $\angle B$.
1573. a, e, $\angle B$, $\angle E$.

Вписанная трапеція.

1574. R, a, $\angle E$.
1575. r, a, e, $\angle A$.
1576. a, c, e, $\sphericalangle B$.
1577. a, b, $\sphericalangle A$, $\angle B$.
1578. a, b, e, $\sphericalangle A$.
1579. a, e, $\angle A$, $\angle B$.

Трапеція, въ которую можно вписать окружность.

1580. r, a, $\angle B$ ($h=2r$).
1581. r, a, e.
1582. r, b, e.
1583. r, e, $\sphericalangle B$.
1584. r, $a \pm b$, $\sphericalangle B$,
1585. r, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.
1586. r, b, $\sphericalangle A$.
1587. r, b, d.
1588. r, $a-c$, $\sphericalangle A$.
1589. r, $a+b+c-d$, $\angle A$.

Четыреугольникъ, около котораго можно описать окружность и въ который можно вписать другую окружность.

1590. r, $a+c$, $\measuredangle A$, (изв. $c+d$).
1591. a, $\measuredangle A$, $\sphericalangle B$.
1592. a, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$.
1593. $a-b$; c, e ($d=a-b+c$).
1594. $a-b$, c, $\measuredangle D$.
1595. $a-b$, c, $\sphericalangle B$.
1596. R, a, $\measuredangle B$.
1597. R, $a\pm b$, e.
1598. R, $a\pm b$, $\measuredangle B$.
1599. R, a, $e\pm b$.

Смѣшанныя задачи, относящіяся къ предыдущимъ отдѣламъ.

Даны три точки P, P_1 и P_{11}; провести прямую такъ, чтобы

1600—она была въ равномъ разстояніи отъ нихъ;

1601—ея разстояніе отъ P было вдвое болѣе разстоянія отъ P_1 и P_{11}.

Даны три точки P, P_1 и P_{11}; черезъ точку P провести прямую такъ, чтобы

1602—она была въ равномъ разстояніи отъ P_1 и P_{11};

1603—ея разстояніе отъ P_1 было вдвое болѣе, чѣмъ отъ P_{11}.

Между сторонами даннаго угла провести прямую данной длины такъ, чтобы

1604—сумма отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ ею отъ сторонъ угла, равнялась данной длинѣ,

1605—разность тѣхъ же отрѣзковъ была равна данной длинѣ.

Стороны даннаго угла пересѣчь прямою, составляющею съ одною изъ сторонъ угла уголъ, равный данному, такъ, чтобы

1606—сумма отсѣкаемыхъ ею отъ сторонъ угла отрѣзковъ была равна данной длинѣ;

1607—разность тѣхъ же отрѣзковъ была равна данной длинѣ.

Черезъ точку, лежащую на сторонѣ даннаго угла, провести прямую такъ, чтобы

1608—сумма отсѣкаемаго ею отрѣзка отъ другой стороны угла и части ея, лежащей между сторонами угла, была равна данной длинѣ;

1609—разность тѣхъ же линій была равна данной длинѣ;

1610—сумма того же отрѣзка стороны даннаго угла и перпендикуляра, опущеннаго изъ конца его на другую сторону угла, была равна данной длинѣ;

1611—разность тѣхъ же линій была равна данной длинѣ.

Къ концамъ даннаго отрѣзка провести два луча, выходящіе изъ одной точки, такъ, чтобы разность угловъ, образуемыхъ ими съ даннымъ отрѣзкомъ, была равна данному углу, и чтобы

1612—сумма отрѣзковъ лучей, лежащихъ между точкой исхода лучей и концами отрѣзка, была равна данной прямой;

1613—разность тѣхъ же линій была равна данной длинѣ.

1614. Пересѣчь данную прямую подъ данными углами двумя лучами, выходящими изъ одной точки, такъ, чтобы разность проекцій отрѣзковъ лучей, лежащихъ между данною точкою и данною прямою, была равна данной длинѣ.

1615. Пересѣчь данную прямую двумя лучами, выходящими изъ одной точки, такъ, чтобы отрѣзки лучей, лежащіе между точкой исхода лучей и данною прямою, имѣли данную длину, и чтобы разность угловъ, образуемыхъ ими съ данною прямою, равнялась данному углу.

Подъ данными углами пересѣчь прямую двумя лучами, выходящими изъ одной точки, такъ, чтобы

1616—сумма отрѣзковъ лучей и части прямой, лежащей между ними, была равна данной длинѣ;

1617—разность между суммою отрѣзковъ лучей и отрѣзка данной прямой, лежащей между ними, равнялась данной длинѣ.

1618. Между сторонами даннаго угла провести прямую такъ, чтобы сумма этой прямой и одного изъ отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ ею отъ сторонъ угла, была равна данной длинѣ, и чтобы разность проекцій тѣхъ же линій на другую сторону угла была равна данной длинѣ.

Черезъ точку, данную на сторонѣ угла, провести прямую, пересѣкающую стороны угла, такъ, чтобы

1619—сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ концовъ этой прямой на стороны угла, равнялась данной длинѣ;

1620—разность тѣхъ же перпендикуляровъ была равна данной длинѣ.

1621. Пересѣчь прямую двумя лучами, выходящими изъ одной точки, такъ, чтобы отрѣзки лучей, лежащіе между точкою исхода лучей и прямою, имѣли данную длину, и чтобы середина отрѣзка прямой, лежащаго между лучами, находилась въ данномъ разстояніи отъ точки исхода лучей.

1622. Даны три точки A, B, C; нужно черезъ одну изъ нихъ A провести прямую такъ, чтобы сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ на нее изъ двухъ другихъ точекъ B и C, была равна данной длинѣ S.

Рѣшеніе 1. Двѣ точки B и C лежатъ по разныя стороны искомой прямой. Искомая прямая параллельна касательной, проведенной изъ точки B къ кругу радіуса, равнаго данной суммѣ S, описанному изъ другой точки C, какъ изъ центра.

2. Двѣ точки B и C лежатъ по одну сторону искомой. Искомая прямая есть непараллельная сторона трапеціи, перпендикулярная къ параллельнымъ сторонамъ ея, и касательная къ кругу радіуса $\frac{S}{2}$, описанному изъ средины линіи BC, соединяющей двѣ данныя точки.

1623. Даны три точки A, B и C; требуется черезъ одну изъ нихъ A провести прямую такъ, чтобы разность перпендикуляровъ, опущенныхъ на нее изъ двухъ другихъ точекъ B и C, была равна данной длинѣ (2 случая).

Рѣшеніе 1. Точки B и C лежатъ по разныя стороны искомой прямой; соединяя A съ B и проведя изъ C прямую $CB_1 \parallel AB$, сдѣлаемъ $CB_1 = AB$; проведя изъ B_1 окружность радіусомъ, равнымъ разности d, а изъ A—касательную къ ней, получимъ искомое направленіе.

2. Точки B и C лежатъ по одну сторону прямой; искомое направленіе параллельно касательной изъ C или B къ окружности радіуса $= \frac{d}{2}$, описанной изъ средины BC, какъ изъ центра.

Даны двѣ точки и кругъ; провести къ кругу касательную такъ, чтобы

1624—сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ на нее изъ двухъ данныхъ точекъ, была равна данной длинѣ;

1625—разность тѣхъ же перпендикуляровъ была равна данной длинѣ.

Даны двѣ точки и окружность; провести черезъ одну изъ точекъ прямую такъ, чтобы

1626—сумма касательной къ данному кругу, проведенной перпендикулярно къ искомой прямой, и перпендикуляра къ ней, опущеннаго изъ другой точки, была равна данному отрѣзку;

1627—разность тѣхъ же линій была равна данному отрѣзку.

Даны два круга и точка; черезъ точку провести прямую такъ, чтобы

1628—сумма касательныхъ, проведенныхъ къ даннымъ окружностямъ, перпендикулярно къ искомой прямой, была равна данному отрѣзку;

1629—разность тѣхъ же касательныхъ была равна данному отрѣзку.

Даны два круга и точка; къ одному изъ круговъ провести касательную такъ, чтобы

1630—сумма касательной къ другой окружности, проведенной перпендикулярно съ искомой касательной, и перпендикуляра къ ней же, опущеннаго изъ данной точки, была равна данному отрѣзку;

1631—разность тѣхъ же линій была равна данному отрѣзку.

Даны три круга; къ окружности одного изъ нихъ провести касательную такъ, чтобы

1632—сумма касательныхъ, проведенныхъ къ двумъ другимъ окружностямъ перпендикулярно къ искомой, была равна данному отрѣзку.

1633—разность тѣхъ же касательныхъ была равна данному отрѣзку.

1634. Даны три точки; черезъ одну изъ нихъ провести прямую такъ, чтобы сумма отрѣзковъ этой прямой между перпендикулярами, опущенными на нее изъ двухъ другихъ точекъ, и первой точкой равнялась данному отрѣзку.

Анализъ. Искомая прямая проходитъ чрезъ точку A, перпендикуляры, опущенные на нее изъ другихъ точекъ B и C, отсѣкаютъ отъ нея отрѣзки DA и EA, сумма которыхъ равна S; если черезъ A провести прямую перпендикулярно къ искомой прямой и изъ точекъ B и C опустить на нее перпендикуляры, то сумма этихъ перпендикуляровъ будетъ равна также S.

1635. Даны три точки; черезъ одну изъ нихъ провести прямую такъ, чтобы разность отрѣзковъ искомой прямой, лежащихъ между точкой и перпендикулярами, опущенными на нее изъ двухъ другихъ точекъ, была равна данному отрѣзку.

Даны двѣ параллельныя прямыя и на каждой изъ нихъ дано по точкѣ; черезъ третью данную точку, не лежащую на параллельныхъ, провести прямую, пересѣкающую параллельныя такъ, чтобы

1636—сумма отрѣзковъ параллельныхъ, лежащихъ между данными точками и искомой прямой, была равна данному отрѣзку;

1637—разность тѣхъ же отрѣзковъ была равна данной длинѣ.

Даны двѣ параллельныя линіи; на каждой изъ нихъ дано по одной точкѣ и, кромѣ того, дана окружность; провести къ послѣдней касательную, пересѣкающую параллельныя линіи такъ, чтобы

1638—сумма отрѣзковъ параллельныхъ, лежащихъ между данными на нихъ точками и касательной, была равна данному отрѣзку;

1639—разность тѣхъ же отрѣзковъ была равна данной длинѣ.

Чрезъ концы хорды, проведенной въ данной окружности, провести двѣ другія параллельныя между собою хорды,

1640—сумма которыхъ была бы равна данному отрѣзку;

1641—разность которыхъ была бы равна данному отрѣзку.

1642. Черезъ точку, лежащую между двумя параллельными линіями, провести прямую такъ, чтобы разность отрѣзковъ ея, лежащихъ между точкою и параллельными линіями, была равна данному отрѣзку.

Черезъ точку, лежащую внѣ параллельныхъ линій, провести прямую, пересѣкающую параллельныя, такъ, чтобы

1643—сумма отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ параллельными линіями отъ искомой прямой, равнялась данной длинѣ;

1644—разность тѣхъ же отрѣзковъ равнялась данной длинѣ.

Въ треугольникѣ провести линію, пересѣкающую двѣ стороны его параллельно третьей сторонѣ такъ, 1645—чтобы сумма верхняго отрѣзка (между параллельной и вершиной треугольника) одной стороны и нижняго отрѣзка (между параллельной и третьей стороной) равнялась данной длинѣ;

1646—чтобы разность тѣхъ же отрѣзковъ равнялась данной длинѣ.

Въ треугольникѣ между двумя сторонами помѣстить прямую данной длины такъ,

1647—чтобы сумма верхняго отрѣзка одной стороны и нижняго отрѣзка другой равнялась данной длинѣ;

1648—чтобы разность тѣхъ же отрѣзковъ равнялась данной длинѣ.

Двѣ стороны треугольника пересѣчь прямой, перпендикулярной къ одной изъ пересѣкаемыхъ сторонъ, такъ,

1649—чтобы сумма верхняго отрѣзка одной стороны и нижняго отрѣзка другой равнялась данной длинѣ;

1650—чтобы разность тѣхъ же линій была равна данной длинѣ.

Стороны треугольника пересѣчь прямою параллельно данной прямой такъ, чтобы

1651—сумма верхняго отрѣзка одной стороны и нижняго отрѣзка другой равнялась данной длинѣ;

1652—разность тѣхъ же отрѣзковъ равнялась данной длинѣ.

1653. Къ данной окружности провести касательную такъ, чтобы часть ея, лежащая между двумя данными продолженными радіусами, равнялась данной длинѣ.

1654. Къ данной окружности проведены двѣ касательныя; провести къ той же окружности касательную такъ, чтобы отрѣзокъ ея, лежащій между данными касательными равнялся данной длинѣ.

Даны двѣ непараллельныя прямыя и точка на одной изъ нихъ; опредѣлить на первой же прямой другую точку,

1655—разстояніе которой отъ данной точки равно разстоянію искомой точки отъ второй прямой;

Рѣшеніе. Искомая точка лежитъ на равнодѣлящей угла между перпендикуляромъ къ 1 прямой въ данной точкѣ и 2 прямою.

1656—разстояніе которой отъ данной точки равно отрѣзку перпендикуляра къ 1-й прямой въ искомой точкѣ, лежащей между данными прямыми.

1657. Даны прямая и окружность, на прямой дана точка; на данной прямой найти другую точку такую, чтобы ея разстоянія отъ данной точки и отъ данной окружности были между собою равны.

Рѣшеніе. Два рѣшенія, соотвѣтствующія наибольшему и наименьшему разстоянію искомой точки отъ окружности. Проводимъ радіусъ, параллельный данной прямой, и конецъ его соединяемъ съ данною точкою; тогда линія, соединяющая центръ данной окружности съ точкою пересѣченія проведенной прямой съ окружностію, пересѣчетъ данную прямую въ искомой точкѣ.

1658. Даны прямая и окружность; на прямой дана точка́; на той же прямой найти такую точку, чтобы разстояніе ея отъ данной точки равнялось части перпендикуляра между прямою и окружностію, возставленнаго къ данной прямой въ искомой точкѣ.

1659. Между двумя данными параллельными прямыми дана точка; провести прямую, пересѣкающую данныя прямыя параллельно другой данной прямой, такъ, чтобы точки пересѣченія ея съ данными параллельными находились въ равномъ разстояніи отъ данной точки.

Рѣшеніе. Изъ точки проводимъ прямую параллельно данной прямой, и чрезъ средину проведеннаго отрѣзка проводимъ прямую параллельно даннымъ параллельнымъ прямымъ до пересѣченія съ перпендикуляромъ къ тому же отрѣзку въ данной точкѣ. Точка пересѣченія лежитъ на искомой прямой.

1660. Даны двѣ параллельныя прямыя и точка между ними; помѣстить между этими параллельными отрѣзокъ данной длины такъ, чтобы концы этого отрѣзка находились въ равномъ разстояніи отъ данной точки.

1661. На данной прямой найти такую точку, чтобы линіи, соединяющія ее съ двумя данными точками, лежащими по одну сторону прямой, составляли съ данной прямой равные углы.

Рѣшеніе. Изъ первой данной точки опускаемъ на данную линію перпендикуляръ и продолжаемъ его внизъ за прямую на разстояніе, равное разстоянію 1 точки до прямой; линія, соединяющая конецъ этого перпендикуляра со 2 точкой, пересѣчетъ данную прямую въ искомой точкѣ. Конецъ перпендикуляра называется точкой, симметричной 1 точкѣ относительно прямой.

1662. Даны прямая, точка и кругъ. Найти на прямой такую точку, чтобы касательная, проведенная изъ нея къ окружности даннаго круга, и прямая, соединяющая искомую точку съ данной, составляли съ данной прямой равные углы.

1663. Даны прямая и два круга; найти на прямой такую точку, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ даннымъ окружностямъ, составляли равные углы.

1664. Даны прямая и двѣ точки; найти на прямой такую точку, чтобы разность угловъ, образуемыхъ съ данной прямой линіями, соединяющими данныя точки съ искомой, была равна данному углу.

Анализъ. Находимъ точку, симметричную одной изъ данныхъ по отношенію къ прямой, пересѣкающей данную прямую подъ угломъ, равнымъ данной разности, и т. д.

1665. На сторонѣ треугольника найти такую точку, чтобы сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нея на двѣ другія стороны, была равна данной длинѣ.

Рѣшеніе. Помѣщая между 1 и 2 сторонами треугольника данную сумму перпендикулярно къ 1 сторонѣ, изъ точки пересѣченія этого перпендикуляра со 2-ю стороною проводимъ прямую, параллельно 1 сторонѣ, и уголъ, образованный этой параллельною и 2 стороною, дѣлимъ пополамъ; равнодѣлящая пересѣчетъ 3 сторону въ искомой точкѣ.

1666. На продолженіи одной изъ сторонъ треугольника найти такую точку, сумма разстояній которой отъ двухъ другихъ сторонъ равна данной длинѣ.

Примѣчаніе. Задачи 1665—1668 рѣшаются легко на основаніи 2 теоремъ: 1) Сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой-нибудь точки основанія на равныя стороны равнобедреннаго треугольника, равна перпендикуляру, опущенному изъ вершины при основаніи на противоположную сторону.

2) Разность перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки, лежащей на продолженіи основанія равнобедреннаго треугольника на равныя стороны его, равна перпендикуляру, опущенному изъ вершины при основаніи на сторону того же треугольника.

1667. На одной изъ сторонъ треугольника найти такую точку, чтобы разность перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нея на двѣ другія стороны, была равна данной длинѣ.

1668. Найти такую же точку на продолженіи одной изъ сторонъ треугольника.

На одной изъ сторонъ треугольника найти такую точку,

1669—чтобы сумма отрѣзковъ прямыхъ, проведенныхъ изъ нея параллельно двумъ другимъ сторонамъ, лежащимъ между искомою точкою и сторонами треугольника, была равна данной длинѣ;

1670—чтобы разность тѣхъ же отрѣзковъ была равна данной длинѣ.

На продолженіи одной изъ сторонъ треугольника найти точку,

1671—чтобы сумма отрѣзковъ (между точкою и стороною) прямыхъ, проведенныхъ изъ нея параллельно 2 другимъ сторонамъ, была равна данной длинѣ;

1672—чтобы разность тѣхъ же отрѣзковъ была равна данной длинѣ.

Данъ уголъ и окружность; на окружности найти такую точку,

1673—чтобы сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нея на стороны даннаго угла, была равна данной длинѣ;

1674—чтобы разность тѣхъ же перпендикуляровъ была равна данной длинѣ.

Дана окружность и уголъ; на окружности найти такую точку,

1675—чтобы сумма отрѣзковъ прямыхъ, параллельныхъ сторонамъ угла между искомой точкою и сторонами угла, была равна данной длинѣ;

1676—чтобы разность тѣхъ же линій была равна данной длинѣ.

Даны три пересѣкающіяся въ одной точкѣ прямыя; на одной изъ нихъ найти такую точку, чтобы

1677—сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нея на двѣ другія линіи, равнялась данной длинѣ;

1678—разность тѣхъ же перпендикуляровъ равнялась данной длинѣ;

1679—чтобы сумма отрѣзковъ, проведенныхъ изъ нея параллельно двумъ другимъ линіямъ, была равна данной длинѣ;

1680—разность тѣхъ же отрѣзковъ была равна данной длинѣ.

Къ одной изъ сторонъ даннаго угла проведена линія, ей параллельная; опредѣлить на этой послѣдней такую точку, чтобы

1681—сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нея на двѣ стороны угла, равнялась данной длинѣ;

1682—разность тѣхъ же перпендикуляровъ равнялась данной длинѣ;

1683—сумма отрѣзка данной параллельной, лежащаго между искомою точкою и стороною угла и отрѣзка, проведеннаго изъ искомой точки параллельно той же сторонѣ, была равна данной длинѣ;

1684—разность тѣхъ же отрѣзковъ была равна данной длинѣ;

1685—сумма отрѣзка данной параллельной, лежащаго между искомой точкой и стороною угла и перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на другую сторону угла, равнялась данной длинѣ;

1686—разность тѣхъ же линій равнялась данной длинѣ.

1686а. Даны двѣ прямыя и точка на одной изъ нихъ; на той же прямой найти точку, сумма или разность разстояній которой отъ данной точки и отъ другой прямой равнялась данной длинѣ.

1687. Даны двѣ прямыя и точка на 1-й изъ нихъ; найти на первой прямой такую точку, чтобы сумма или разность перпендикуляра, возставленнаго изъ искомой точки къ 1 прямой до встрѣчи со второй прямой и разстоянія искомой точки до данной равнялась данной длинѣ.

1688. Построить равносторонній треугольникъ, вершины котораго лежали бы послѣдовательно на трехъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ.

Анализъ. Пусть данныя прямыя $X \parallel Y \parallel Z$ и треугольникъ ABC—равносторонній; вершина A лежитъ на X, B на Y и C на Z; описываемъ окружность около треугольника; она пересѣчетъ X—въ точкѣ M; $\sphericalangle BMA = \frac{4}{3}d$ и $\sphericalangle BMC = BAC = \frac{2}{3}d$, слѣд., равнодѣлящая угла, равнаго $\frac{4}{3}d$, построеннаго на сторонѣ X, пересѣчетъ Z—въ C, а сторона этого угла—параллельную Y, въ точкѣ B и т. д.

1689. Построить треугольникъ, углы котораго равны A, B, C, а вершины лежатъ на трехъ параллельныхъ линіяхъ.

1690. Построить равносторонній треугольникъ, вершины котораго лежатъ на трехъ концентрическихъ окружностяхъ.

1691. Построить квадратъ, стороны котораго проходятъ черезъ четыре данныя точки.

Рѣшеніе. Если данныя точки A, B, C и D расположены такъ, что A занимаетъ верхнее положеніе чертежа, C — нижнее, B—направо отъ AC и D — налѣво, то, соединяя A съ C, опускаемъ перпендикуляръ на AC изъ B и дѣлаемъ этотъ перпендикуляръ BF равнымъ AC; тогда прямая, проходящая черезъ D и F, будетъ стороною квадрата.

1692. Въ равносторонній треугольникъ вписать другой равносторонній треугольникъ, сторона котораго равна данной длинѣ (центры искомаго и даннаго треугольника совпадаютъ).

1693. Въ данный квадратъ вписать другой квадратъ съ данной стороной.

1694. Построить правильный шестиугольникъ, восьмиугольникъ и двѣнадцатиугольникъ, сторона которыхъ равна данной длинѣ.

1695. Построить правильный шестиугольникъ, восьмиугольникъ и двѣнадцатиугольникъ по данному радіусу вписаннаго круга.

1696. Построить треугольникъ, если дано положеніе срединъ его сторонъ.

1697. Построить треугольникъ, если дано положеніе срединъ двухъ его сторонъ и положеніе точки пересѣченія высоты съ основаніемъ того же треугольника.

1698. Построить треугольникъ, если дано положеніе срединъ двухъ сторонъ его и точка пересѣченія съ одной изъ этихъ сторонъ высоты, опущенной на нее.

1699. Построить треугольникъ, въ которомъ дано положеніе точекъ пересѣченія высотъ съ противоположными сторонами.

Примѣчаніе. Высота треугольника дѣлитъ уголъ, составленный прямыми, соединяющими его основаніе съ основаніями двухъ другихъ высотъ, пополамъ.

1700. Построить треугольникъ, въ которомъ дано положеніе центра вписаннаго и положеніе центровъ двухъ круговъ, извнѣ вписанныхъ въ него.

1701. Построить треугольникъ, въ которомъ дано положеніе центровъ извнѣ вписанныхъ круговъ.

1702. Доказать, что линіи, соединяющія средины смежныхъ сторонъ четыреугольника, образуютъ параллелограммъ, и что точка пересѣченія прямыхъ, соединяющихъ средины противоположныхъ сторонъ, лежитъ въ срединѣ линіи, соединяющей средины діагоналей четыреугольника.

1703. Построить пятиугольникъ, если дано положеніе срединъ его сторонъ.

ГЛАВА XI.

Площади прямолинейныхъ фигуръ.

Преобразовать треугольникъ въ другой, равновеликій съ нимъ, имѣющій съ нимъ одинаковое основаніе, и

1704—вершина котораго лежала бы на данной линіи;

1705—одна изъ сторонъ котораго равна данному отрѣзку;

1706—уголъ при основаніи котораго равенъ данному углу;

1707—средняя линія котораго равна данной линіи;

1708—уголъ при вершинѣ котораго равенъ данному углу;

1709—высота котораго, соотвѣтствующая одной изъ сторонъ, равна данной длинѣ;

1710—средняя линія котораго, соотвѣтствующая одной изъ сторонъ, равнялась бы данной длинѣ;

1711—проекція одной изъ сторонъ котораго (p_a или p_b) на основаніе равнялась бы данной длинѣ;

1712—разность проекцій сторонъ котораго ($p_a - p_b$) на основаніе равнялась бы данной длинѣ;

1713—разность угловъ котораго при основаніи равнялась бы данному углу;

1714—чтобы радіусъ круга, описаннаго около этого треугольника равнялся данной длинѣ.

Данный треугольникъ преобразовать въ другой, равновеликій ему прямоугольный, такъ, чтобы какая-нибудь сторона даннаго треугольника

1715—была катетомъ искомаго;

1716—была гипотенузою искомаго.

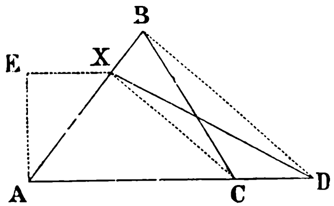
Данный треугольникъ преобразовать въ другой, равновеликій ему равнобедренный такъ, чтобы какая-нибудь сторона даннаго треугольника

1717—была одной изъ равныхъ сторонъ равнобедреннаго.

1718—была основаніемъ равнобедреннаго.

1719. Данный треугольникъ преобразовать въ другой, равновеликій ему, имѣющій данный отрѣзокъ стороною.

Анализъ. Если ABC — данный треугольникъ (черт. 51) и AD — данная сторона искомаго треугольника AXD, то изъ равенства площадей ABC и AXD слѣдуетъ равенство площадей треугольниковъ XBC и XCD, имѣющихъ общую сторону XC; а потому BD || XC.



Черт. 51.

1719a. Данный треугольникъ преобразовать въ другой, равновеликій ему, имѣющій данный отрѣзокъ основаніемъ и удовлетворяющій условіямъ задачъ 1704—1714.

1720. Данный треугольникъ преобразовать въ другой, равновеликій ему, и двѣ стороны котораго равны даннымъ отрѣзкамъ.

1721. Данный треугольникъ преобразовать въ другой прямоугольный, равновеликій ему, и имѣющій данный отрѣзокъ катетомъ или гипотенузою.

1722. Данный треугольникъ преобразовать въ другой, равнобедренный, равновеликій первому и имѣющій данный отрѣзокъ основаніемъ или равною стороною.

1723. Преобразовать данный треугольникъ въ другой, равновеликій ему и имѣющій данный отрѣзокъ высотою.

Рѣшеніе. Пусть данный треугольникъ ABC; данная высота—h; изъ точки A къ основанію AC возставляемъ перпендикуляръ AE=h; изъ точки E проводимъ линію, параллельную AC, которая пересѣчетъ AB въ точкѣ x; соединимъ x съ C и проведемъ изъ B линію BD || xC, которая пересѣчетъ продолженіе AC въ точкѣ D; тогда треугольникъ AxD—искомый.

1724. Данный треугольникъ преобразовать въ другой, ему равновеликій, имѣющій высотою данный отрѣзокъ и удовлетворяющій условіямъ задачъ 1704—1714.

1725. Данный треугольникъ преобразовать въ равновеликій ему прямоугольникъ, имѣющій данный отрѣзокъ высотою.

1726. Данный треугольникъ преобразовать въ равновеликій ему треугольникъ, вершина котораго лежитъ въ данной точкѣ, находящейся внутри даннаго треугольника.

Рѣшеніе. Соединяя данную точку съ вершинами даннаго треугольника, полученные три треугольника преобразуемъ такъ, чтобы вершины ихъ упали на продолженіе основанія даннаго треугольника.

1727. Данный треугольникъ преобразовать въ другой равнобедренный, равновеликій ему и имѣющій данный отрѣзокъ высотою.

1728. Построить треугольникъ, площадь котораго вдвое больше площади даннаго.

1729. Построить треугольникъ, площадь котораго равна суммѣ площадей двухъ треугольниковъ, имѣющихъ равныя высоты.

1730. Построить треугольникъ, равновеликій суммѣ площадей двухъ треугольниковъ, имѣющихъ разныя высоты.

Построить треугольникъ, площадь котораго равна разности площадей двухъ треугольниковъ,

1731—имѣющихъ равныя высоты;

1732—имѣющихъ разныя высоты.

Данный параллелограммъ преобразовать въ другой, ему равновеликій, имѣющій съ первымъ общее основаніе и

1733—другая сторона котораго равна данному отрѣзку;

1734—діагональ котораго равна данному отрѣзку;

1735—уголъ при основаніи котораго равенъ данному углу;

1736—уголъ между діагоналями котораго равенъ данному углу.

Данный параллелограммъ преобразовать

1737—въ равновеликій ему прямоугольникъ, имѣющій съ нимъ общее основаніе;

1738—въ равновеликій ему ромбъ, имѣющій съ даннымъ общее основаніе.

1739. Данный параллелограммъ преобразовать въ прямоугольникъ или ромбъ, имѣющій съ первымъ общую діагональ.

Данный параллелограммъ преобразовать въ другой, равновеликій ему и у котораго даны

1740—двѣ стороны;

1741—основаніе и діагональ;

1742—основаніе и уголъ при немъ;

1743—основаніе и уголъ, образованный діагоналями;

1744—сторона и высота;

1745—діагональ и высота;

1746—высота и уголъ при основаніи;

1747—двѣ діагонали.

Данный параллелограммъ преобразовать въ прямоугольникъ, имѣющій данный отрѣзокъ

1748—стороною;

1749—основаніемъ;

1750—діагональю.

1751. Въ данный кругъ вписать прямоугольникъ, равновеликій данному квадрату.

Параллелограммъ преобразовать въ равновеликій ему ромбъ, если даны его

1752—основаніе;

1753—діагональ;

1754—высота.

1755. Данный прямоугольникъ преобразовать въ квадратъ.

1756. Построить квадратъ, равновеликій суммѣ двухъ квадратовъ.

1757. Построить квадратъ, равновеликій разности двухъ квадратовъ.

1758. Построить квадратъ въ 2, 3, 4, 5... разъ большій даннаго квадрата.

1759. Доказать, что, если въ параллелограммѣ провести діагональ и черезъ какую-нибудь точку ея линіи, параллельныя сторонамъ параллелограмма, то площади образовавшихся параллелограммовъ, черезъ которыя не проходитъ діагональ, будутъ равновелики.

1760. Показать, что квадратъ, построенный на суммѣ двухъ линій, равновеликъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на каждой изъ данныхъ линій, увеличенной на двойную площадь прямоугольника, сторонами котораго служатъ данныя линіи.

1761. Квадратъ, построенный на разности двухъ линій, равновеликъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на каждой изъ нихъ, уменьшенной на двойную площадь прямоугольника, имѣющаго сторонами данныя линіи.

1762. Разность квадратовъ, построенныхъ на двухъ линіяхъ, равновелика площади прямоугольника, имѣющаго сторонами сумму и разность этихъ линій.

1763. Если соединимъ какую-нибудь точку E, лежащую въ плоскости параллелограмма, съ его вершинами, то сумма площадей треугольниковъ, имѣющихъ основаніемъ противоположныя стороны параллелограмма и общею вершиною точку E, равновелика половинѣ площади параллелограмма.

1764. Треугольникъ, основаніе котораго есть непараллельная сторона трапеціи, а вершина—середина другой непараллельной стороны, равновеликъ половинѣ площади трапеціи.

1765. Если провести черезъ вершины какого-нибудь четыреугольника линіи, параллельныя его діагоналямъ, то образованный этими линіями параллелограммъ имѣетъ площадь, вдвое большую площади четыреугольника.

1766. Площадь каждаго четыреугольника вдвое болѣе площади параллелограмма, образованнаго линіями, соединяющими средины смежныхъ сторонъ четыреугольника.

1767. Если діагонали четыреугольника пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, то суммы квадратовъ, построенныхъ на противоположныхъ сторонахъ, равны между собою.

1768. Если двѣ хорды пересѣкаются внутри круга подъ прямымъ угломъ, то сумма четырехъ квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ хордъ, равна квадрату, построенному на діаметрѣ того же круга.

1769. Въ каждомъ четыреугольникѣ сумма квадратовъ, построенныхъ на четырехъ сторонахъ его, равновелика суммѣ квадратовъ, построенныхъ на его діагоналяхъ, увеличенной на квадратъ, построенный на линіи, соединяющей средины діагоналей.

1770. Въ каждой трапеціи сумма квадратовъ, построенныхъ на непараллельныхъ сторонахъ, равна разности между суммою квадратовъ, построенныхъ на діагоналяхъ, и удвоенной площадью прямоугольника, неравныя стороны котораго суть параллельныя стороны трапеціи.

1771. Данный треугольникъ преобразовать въ равновеликій ему параллелограммъ, имѣющій съ треугольникомъ общій уголъ при основаніи.

Рѣшеніе. Черезъ средину D основанія AB треугольника ABC проводимъ линію, параллельную сторонѣ AC, черезъ C параллельную AB и т. д.; или черезъ средину AC проводимъ линію, параллельную AB, и черезъ B—параллельную AC и т. д.

1772. Данный треугольникъ преобразовать въ равновеликій ему параллелограммъ, при чемъ уголъ параллелограмма долженъ быть равенъ данному.

Данный треугольникъ преобразовать

1773—въ прямоугольникъ;

1774—въ ромбъ;

1775—въ квадратъ.

1776. Данный параллелограммъ преобразовать въ равновеликій ему треугольникъ, имѣющій съ параллелограммомъ общій уголъ при основаніи.

Данный параллелограммъ преобразовать въ треугольникъ, у котораго дано

1777—основаніе;

1778—высота;

1779—двѣ стороны;

1780—основаніе и уголъ при вершинѣ.

Данный параллелограммъ преобразовать

1781—въ прямоугольный треугольникъ;

1782—въ равнобедренный треугольникъ.

1783. Преобразовать четыреугольникъ въ равновеликій ему треугольникъ.

1784. Преобразовать многоугольникъ въ другой, имѣющій одною стороною меньше даннаго и равновеликій ему.

1785. Преобразовать многоугольникъ въ треугольникъ.

Четыреугольникъ преобразовать въ треугольникъ такъ, чтобы

1786—вершина треугольника лежала на данной прямой;

1787—одна изъ сторонъ его равнялась данному отрѣзку;

1788—уголъ при основаніи былъ равенъ данному углу;

1789—средняя линія треугольника равнялась данному отрѣзку;

1790—уголъ при вершинѣ былъ равенъ данному;

1791—высота, опущенная на одну изъ его сторонъ, была равна данному отрѣзку;

1792—проекція одной изъ сторонъ была равна данной длинѣ;

1793—разность проекцій сторонъ на основаніе равнялась данному отрѣзку;

1794—радіусъ описаннаго около треугольника круга равнялся данной длинѣ;

1795—разность угловъ при основаніи равнялась данной величинѣ;

1796—треугольникъ былъ прямоугольный и имѣлъ данный отрѣзокъ катетомъ или гипотенузою;

1797—треугольникъ былъ равнобедреннымъ и данный отрѣзокъ служилъ ему равною стороною или основаніемъ.

1798. Данный четыреугольникъ преобразовать въ равновеликій ему квадратъ.

1799. Правильный шестиугольникъ или восьмиугольникъ преобразовать въ равновеликій ему треугольникъ.

1800. Правильный шестиугольникъ или восьмиугольникъ преобразовать въ равновеликій ему квадратъ.

1801. Превратить какой-нибудь многоугольникъ въ равновеликій ему квадратъ.

1802. Превратить четыреугольникъ въ равновеликій ему ромбъ.

1803. Построить треугольникъ, равновеликій суммѣ двухъ данныхъ четыреугольниковъ.

1804. Раздѣлить площадь треугольника на n равныхъ частей линіями, проходящими черезъ вершины.

1805. Раздѣлить площадь параллелограмма на n равныхъ частей линіями, параллельными одной изъ его сторонъ.

1806. Площадь даннаго параллелограмма раздѣлить на 2n (четное число) частей линіями, выходящими изъ данной вершины параллелограмма.

Рѣшеніе. Проводимъ черезъ данную вершину діагональ и дѣлимъ на n частей каждый изъ двухъ треугольниковъ, на которые раздѣлился параллелограммъ діагоналями.

1807. Данный параллелограммъ линіями, проходящими черезъ данную вершину, раздѣлить на нечетное $(2n + 1)$ число частей.

Дѣлимъ параллелограммъ на $4n + 2$ частей, и каждыя 2 части соединяемъ вмѣстѣ.

1808. Трапецію раздѣлить на n равновеликихъ между собою частей параллельными линіями, пересѣкающими параллельныя стороны трапеціи.

Дѣлимъ среднюю линію на n частей и проводимъ параллельныя линіи, пересѣкающія параллельныя стороны трапеціи.

1809. Построить квадратъ, равновеликій половинѣ даннаго квадрата.

Построить равнобедренный прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго равна сторонѣ даннаго квадрата (или искомый квадратъ построить на половинѣ діагонали даннаго квадрата).

1810. Построить квадратъ, равный третьей, 4-й, 5-й части даннаго квадрата.

1811. Треугольникъ раздѣлить на n равновеликихъ частей линіями, проходящими черезъ точку, данную на сторонѣ треугольника.

Рѣшеніе. Данъ треугольникъ ABC и точка O на сторонѣ AB. Дѣлимъ сперва треугольникъ на n частей линіями, проходящими черезъ вершину C; точки дѣленія стороны AB—будутъ D, E, F, G....; тогда преобразуемъ треугольники CAD, CAE... въ треугольники, имѣющіе основаніемъ одинъ опредѣленной длины отрѣзокъ.

1812. Треугольникъ ABC раздѣлить на n равныхъ частей линіями, проходящими черезъ точку O, данную внутри треугольника.

Рѣшеніе. Преобразуемъ данный треугольникъ въ треугольникъ, вершина котораго лежитъ въ точкѣ O; пусть новое основаніе, совпадающее съ AB есть DE; дѣлимъ ODE на n частей и преобразуемъ полученные треугольники такъ, чтобы вершины ихъ лежали на AC, BC и т. д.

1813. Четыреугольникъ раздѣлить на n частей линіями, выходящими изъ данной вершины.

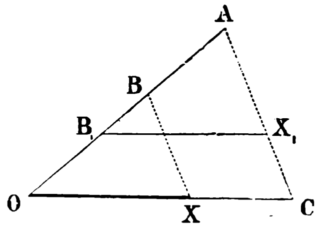
Преобразуемъ четыреугольникъ въ треугольникъ съ вершиною, совпадающей съ данною и т. д.

ГЛАВА XII.

Задачи на пропорціональныя линіи.

1814. Къ тремъ даннымъ линіямъ найти четвертую пропорціональную.

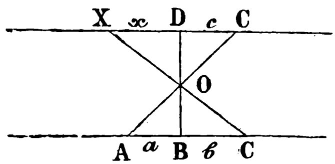
Даны три отрѣзка a, b, c; найти четвертый x, такъ чтобы $a : b = c : x$.



Черт. 52.

1. На одной сторонѣ произвольнаго угла AOC (черт. 52) откладываемъ $OA = a$ и $OB = b$, т.-е. линіи, составляющія члены перваго отношенія, а на второй $OC = c$; соединяемъ C съ A и проводимъ изъ B прямую $BX \parallel AC$, тогда $OX = x$.

2. Откладывая $OA = a$, $OC = c$, соединяемъ A съ C и, взявъ $AB_1 = b$, проводимъ $B_1X_1 \parallel OC$; тогда $B_1X_1 = x$.



Черт. 53.

3. Взявъ двѣ параллельныя линіи, откладываемъ на одной параллельной $AB = a$, $BC = b$, а на другой $DC_1 = c$; соединяя A съ C_1 и D съ B, черезъ точку пересѣченія O прямыхъ DB и AC_1 проводимъ CO, которая пересѣчетъ 2-ю параллельную въ точкѣ X; тогда $DX = x$ (ибо $\frac{c}{a} = \frac{OD}{OB} = \frac{x}{b}$ и т. д.) (черт. 53).

1815. Пользуясь свойствами пропорціональныхъ линій въ кругѣ, найти къ тремъ даннымъ линіямъ a, b, c четвертую, имъ пропорціональную.

Рѣшеніе. 1. Выбираемъ такіе два отрѣзка, чтобы ихъ сумма была больше отрѣзка c; откладываемъ отрѣзокъ AE=a и BE=b на одной прямой; чрезъ концы отложенныхъ отрѣзковъ проводимъ какую-нибудь окружность; изъ точки E радіусомъ, равнымъ EC=c, проводимъ окружность, которая пересѣчетъ первую въ точкѣ C; продолжая отрѣзокъ EC по другую сторону AB, получаемъ искомый отрѣзокъ DE=x, ибо $c.x=a.b$, или $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$.

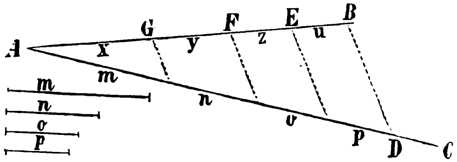
2. На большемъ изъ данныхъ отрѣзковъ BE=b откладываемъ отрѣзокъ EA=a; чрезъ точки B и A проводимъ какую-нибудь окружность, и изъ точки E радіусомъ, равнымъ c, описываемъ окружность; точку C пересѣченія окружностей соединяемъ съ E; внѣшній отрѣзокъ сѣкущей DE — искомый, ибо $b.a=x.c$, или $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$.

1816. Найти отрѣзокъ, который былъ бы четвертымъ пропорціональнымъ къ двумъ даннымъ отрѣзкамъ a и b.

Рѣшеніе. Задача приводится къ предшествующей, если положить въ условіяхъ послѣдней c=b. Кромѣ того, ее можно рѣшить такъ: строимъ прямоугольный треугольникъ ADC, катеты котораго AD=a и DC=b; къ гипотенузѣ AC этого треугольника въ точкѣ C возставляемъ перпендикуляръ CB; продолжаемъ его до точки B пересѣченія съ продолженіемъ катета AD, получаемъ новый прямоугольный треугольникъ ACB, въ которомъ отрѣзокъ DB гипотенузы есть искомый отрѣзокъ, ибо AD : DC=DC : DB, или a : b=b : x.

1817. **Отрѣзокъ прямой раздѣлить на нѣсколько отрѣзковъ, находящихся въ данномъ отношеніи m : n : o : p.**

1. Изъ конца отрѣзка AB проводимъ прямую AC составляющую съ ней какой-нибудь уголъ. На AC, отъ точки A откладываемъ отрѣзки m, n, o и p. Конецъ послѣдняго отложеннаго отрѣзка соединяемъ съ B, а изъ концовъ остальныхъ отрѣзковъ проводимъ прямыя, параллельныя BD. Тогда данный отрѣзокъ AB проведенными параллельными раздѣлится на отрѣзки AG, GF, FE и EB, относящіеся между собою, какъ m : n : o : p.



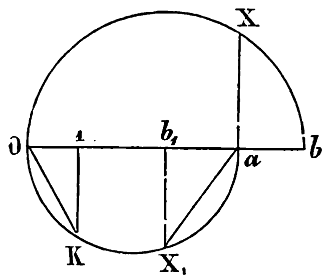
Черт. 54.

2. Къ данному отрѣзку AB проводимъ гдѣ-нибудь прямую, ей параллельную; откладываемъ на этой послѣдней прямой отрѣзки m, n, o и p, и соединяемъ C съ B и A съ D. Затѣмъ чрезъ точку O пересѣченія прямыхъ AD и BC и чрезъ концы отложенныхъ отрѣзковъ проводимъ прямыя, продолженіе которыхъ пересѣчетъ AB въ точкахъ, дѣлящихъ AB въ данномъ отношеніи.

1818. **Найти среднiй пропорціональный отрѣзокъ къ двумъ даннымъ отрѣзкамъ.**

1. Описываемъ окружность, какъ на діаметрѣ, на отрѣзкѣ Ob, равномъ суммѣ данныхъ отрѣзковъ $a+b$; изъ конца отрѣзка a возставляемъ перпендикуляръ, который пересѣчетъ окружность въ точкѣ X; отрѣзокъ aX — искомый, ибо $aX : Oa = ab : aX$ (черт. 55).

2. На большемъ изъ отрѣзковъ Oa откладываемъ меньшій $ab_1 = b$; на Oa, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность; изъ точки b_1 возставляемъ перпендикуляръ b_1X_1 и соединяемъ X съ a тогда aX_1 есть искомая прямая, ибо $Oa : aX_1 = aX_1 : ab_1$.

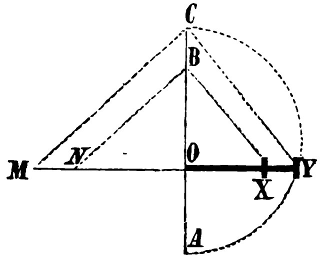


Черт. 55.

3. Беремъ большій отрѣзокъ $a = DB$, откладываемъ на немъ меньшій отрѣзокъ $b = BC$ и черезъ точки D и C проводимъ какую-нибудь окружность; касательная BA къ этой окружности есть искомый отрѣзокъ x, ибо $\frac{DB}{BA} = \frac{BA}{BC}$, или $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

1819. **Въ пропорціи извѣстны крайніе члены и отношеніе среднихъ; найти величину этихъ послѣднихъ.**

Извѣстные члены суть отрѣзки—a и b; отношеніе среднихъ членовъ x и y равно $m : n$. Тогда $a : x = y : b$ и $x : y = m : n$; найдемъ четвертую пропорціональную c къ m, n и b изъ пропорціи $m : n = c : b$; для этого возьмемъ двѣ перпендикулярныя другъ къ другу прямыя MO и AC и, отложивъ на OM отрѣзки OM и ON, относящіеся между собою, какъ m, n, и на OC отрѣзокъ OB=b, соединимъ N съ B; изъ M проведемъ MC параллельно NB; тогда OC=c. Итакъ, мы имѣемъ, что $a : x = y : b$ и $x : y = b : c$ $(= m : n)$.

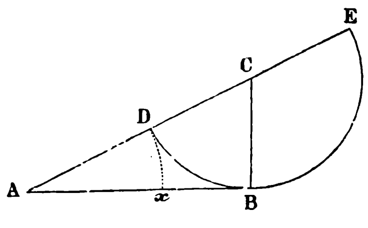


Черт. 56.

Отсюда слѣдуетъ, что $a : y = y : c$. Для построенія откладываемъ OA, равную a, и описываемъ окружность на CA, какъ на діаметрѣ; тогда перпендикуляръ OY къ діаметру CA—есть y; а x есть четвертая пропорціональная къ m, n и y или къ b, c и y, которую и найдемъ, соединяя C съ Y и проводя BX параллельно CY. Отрѣзокъ $OX = x$ (черт. 56).

1820. **Данную прямую раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы вся линія была больше большей части ея во столько разъ, во сколько большая часть больше меньшей части линіи,** или короче: **раздѣлить линію въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.**

Дана прямая AB (черт. 57), изъ конца ея B возставляемъ перпендикуляръ $BC = \frac{1}{2}$ AB; изъ точки C описываемъ радіусомъ CB окружность, которая коснется AB въ точкѣ B. Соединивъ A съ C, получимъ сѣкущую AE; тогда $AE : AB = AB : AD$; откуда $\frac{AE-AB}{AB} = \frac{AB-AD}{AD}$; откладывая $Ax = AD$ и замѣтивъ, что $AE - AB = DA = Ax$, получимъ — $Ax : AB = xB : Ax$; слѣд., точка x—искомая.



Черт. 57.

Примѣчаніе. Кромѣ того, замѣтимъ, что мы имѣли $AE : AB = AB : AD$, а т. к. $AB = DE$, то $AE : DE = DE : AD$, т.-е. линія AE въ точкѣ D также раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи: а это даетъ возможность рѣшить такую задачу: *найти прямую, часть которой, равная данной прямой, была бы средней пропорціональной между искомой линіей и остальной ея частію.*

1821. Геометрическое мѣсто techniques серединъ лучей, идущихъ отъ данной точки къ окружности, есть окружность.

1822. Найти среднюю пропорціональную къ двумъ даннымъ прямымъ.

1823. Найти двѣ прямыя, если дана сумма или разность ихъ, и извѣстна средняя пропорціональная между ними.

1824. Въ пропорціи извѣстны крайніе члены и сумма или разность среднихъ, найти средніе члены.

Рѣшеніе. Средняя пропорціональная между крайними членами равна средней пропорціональной между средними; приводится къ предыдущей.

1825. Данный отрѣзокъ AB продолжить до точки x такъ, чтобы Ax : Bx, какъ два данные отрѣзка m и n.

1826. По данному отношенію двухъ отрѣзковъ и длинѣ одного изъ нихъ опредѣлить другой.

1827. Сторону AC треугольника ABC раздѣлить прямою, параллельною BC, въ данномъ отношеніи.

1828. Стороны треугольника пересѣчь прямою, параллельною сторонѣ треугольника, такъ, чтобы часть сѣкущей, лежащей между сторонами угла, находилась въ данномъ отношеніи къ сторонѣ, параллельной ей.

Черезъ точку, лежащую внутри угла, провести сѣкущую такъ, чтобы

1829—отрѣзокъ ея, лежащій между сторонами угла, дѣлился въ данной точкѣ въ данномъ отношеніи;

1830—стороны угла, лежащія между вершиною и сѣкущею, дѣлились въ данномъ отношеніи.

1831. Даны три луча, выходящіе изъ одной точки, и точка въ плоскости этихъ лучей; провести черезъ эту точку прямую, пересѣкающую три луча, такъ чтобы части сѣкущей, лежащія между лучами, находились въ данномъ отношеніи.

Даны три точки; черезъ одну изъ нихъ провести прямую такъ, чтобы

1832—перпендикуляры, опущенные на нее изъ двухъ другихъ точекъ, были въ данномъ отношеніи;

1833—отрѣзки искомой прямой, лежащіе между перпендикулярами, находились въ данномъ отношеніи.

1834. Прямую линію раздѣлить на два отрѣзка такъ, чтобы большой отрѣзокъ былъ среднею пропорціональною между линіею и меньшимъ отрѣзкомъ.

Отрѣзокъ данной прямой продолжить на такую длину, чтобы

1835—продолженная часть была среднею пропорціональною между даннымъ отрѣзкомъ и длиною всей продолженной линіи;

1836—чтобы данный отрѣзокъ былъ среднею пропорціональною между продолженной частью линіи и всею линіею.

1837. Прямую линію раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы прямоугольникъ, неравныя стороны котораго равнялись бы частямъ этой прямой, былъ равновеликъ данному прямоугольнику.

1838. Данный отрѣзокъ продолжить такъ, чтобы прямоугольникъ, неравными сторонами котораго служатъ отрѣзокъ прямой и его продолженіе, былъ равновеликъ данному прямоугольнику.

1839. Данный отрѣзокъ раздѣлить на два отрѣзка такъ, чтобы площадь прямоугольника, имѣющаго сторонами эти отрѣзки, была равна площади даннаго квадрата.

Построить треугольникъ, если дано:

1840. $a : b$; $\measuredangle C$, a.
1841. $a : b$; a, $\measuredangle A$.
1842. $a : b : c$, a.
1843. $a + b$; $a : b$, $\angle C$.
1844. $a - b$; $a : b$, $\angle C$.
1845. $a + b$; $a : b$, $\measuredangle A$.
1846. $a - b$; $a : b$, $\measuredangle A$.
1847. $a + b + c$, $a : b : c$.
1848. $a : b$, a, h_c.
1849. $a : b$, h_c, p_b.
1850. $a : b$, h_a; $\measuredangle C$.
1851. a, c, $p_a : p_b$.
1852. c, $p_a : p_b$, $\measuredangle C$.
1853. c, $p_a : p_b$, $\angle A - \measuredangle B$.
1854. c, h_c, $p_a : p_b$.
1855. a, h_c, $p_a : p_b$.
1856. h_c, $p_a : p_b$, $\angle B$.
1857. c, h_a, $p_a : p_b$.
1858. h_a, $p_a : p_b$, $\angle B$.
1859. $(a+b) : c$, h_a, $\angle B$.
1860. $(a-b) : c$, h_a, $\angle B$.
1861. R, $a : b$, $\angle A$.
1862. R, $c : h_c$, $\angle C$.
1863. R, $c : m_c$, $\angle C$.
1864. R, $c : m_a$, $\angle C$.
1865. R, c, $p_a : p_b$.
1866. R, $\angle C$, $p_a : p_b$.
1867. R, $c : (a+b)$, $\angle C$.
1868. R, $c : (a-b)$, $\angle C$.
1869. R, $c : r$, $\angle C$.
1870. R, $c : r_c$, $\angle C$.
1871. c, $R : h_c$, $\measuredangle C$.

1872. h_c, $a : a_c$, ∡A—∢B.
1873. h_c, $c : m_c$, $p_a—p_b$.
1874. h_c, $p_a—p_b$, $R : m_c$.
1875. $a : b$, h_a+h_b, ∢C.
1876. $a : b$, $h_b—h_a$, ∡C.
1877. $a+b$, $h_a : h_b$, ∡C.
1878. $a—b$, $h_a : h_b$, ∢C.
1879. $(a+b) : c$, h_a+h_b, ∡C.
1880. $(a—b) : c$, $h_b—h_a$, ∢C.

Построить трапецію:

1881. a, b, $e : f$, ∡B.
1882. a, $b : d$, e, ∢B.
1883. $a : c$, b, e, ∢B.
1884. a, b, $e : f$, h.
1885. a, $e : f$, h, ∢B.
1886. a, $b : d$, e, h.
1887. $a : c$, b, e, h.
1888. $a : h$, b, d, ∢A.
1889. $a : h$, b, ∡A, ∢B.
1890. $a : c$, b, ∢A, ∢B.
1891. $a : c$, b, d, ∢A.
1892. $a : c$, e, f, ∡E.
1893. $a : c$, e, h, ∢E.
1894. $a : h$, e, f, ∢E.

Построить четыреугольникъ, если дано:

1895. a, b, c, $e : f$, ∢B.
1896. a, b, $e : f$, ∡B, ∡D.
1897. $a : c$, b, e, f, ∢B.
1898. $a : c$, b, d, e, ∢B.
1899. a, $b : d$, e, ∢A, ∡B.
1900. a, b, $e : f$, ∡B, ∢E.

1901. Два отрѣзка a и b увеличить или уменьшить на отрѣзокъ x, такъ чтобы $a \pm x : b \pm x = c : d$.

1902. Треугольникъ раздѣлить линіями, проходящими черезъ его вершину, на 3 части, такъ чтобы площади полученныхъ частей треугольника находились въ данномъ отношеніи.

1903. Данный треугольникъ преобразовать въ равнобедренный, имѣющій съ даннымъ общій уголъ и равновеликій ему.

Анализъ. Данный треугольникъ ABC, искомый—Cxy; прямая xy пересѣкаетъ сторону CA въ точкѣ x, продолженіе стороны CB въ точкѣ y; тогда отношеніе $CAB : Cxy$ — сложное и равно $CA . CB : Cx . Cy$; но т. к. $CAB = Cxy$, то и $CA . CB = Cx . Cy$; искомый треугольникъ равнобедренный, а потому $Cx = Cy$ и $CA . CB = Cx^2$ и т. д.

1904. Данный треугольникъ преобразовать въ другой, равновеликій ему, имѣющій съ даннымъ общій уголъ при вершинѣ, въ которомъ стороны, заключающія этотъ уголъ, относятся какъ $m : n$.

1905. Данный треугольникъ преобразовать въ другой прямоугольный, равновеликій ему и имѣющій съ даннымъ общій уголъ при основаніи.

Анализъ. Если данный треугольникъ ABC, а искомый Bxy, при чемъ x лежитъ на сторонѣ AB, y на продолженіи стороны BC, при чемъ $\measuredangle yxB = d$ (прямому), тогда $Bx \cdot By = BA \cdot BC$. Проведя высоту CD треугольника ABC, найдемъ $Bx : By = BD : BC$; откуда $Bx^2 = AB \cdot BD$ и т. д.

1906. Данный треугольникъ ABC преобразовать въ другой, равновеликій ему, имѣющій общій съ первымъ уголъ при вершинѣ и уголъ при основаніи, равный данному.

1907. Данный треугольникъ преобразовать въ другой равносторонній и равновеликій первому.

1908. Данный четыреугольникъ ABCD превратить въ равновеликую ему трапецію такъ, чтобы сторона AB и прилежащіе къ ней углы остались общими съ даннымъ четыреугольникомъ.

1909. Данный параллелограммъ превратить въ ромбъ, равновеликій ему и имѣющій съ параллелограммомъ равный уголъ.

1910. Данный параллелограммъ превратить въ другой, имѣющій съ первымъ равные углы, при чемъ стороны искомаго должны находиться въ данномъ отношеніи.

1911. Раздѣлить параллелограммъ линіями, параллельными одной изъ сторонъ его, на части, площади которыхъ были бы въ данномъ отношеніи.

1912. Построить квадратъ такъ, чтобы площадь его относилась къ площади даннаго квадрата, какъ $m : n$.

Ук. Стор. дан. квад. a; $x^2 : a^2 = m : n = m^2 : nm$; $nm = p^2$ и $x^2 : a^2 = m^2 : p^2$ или $x : a = m : p$ и т. д.

1913. Данный треугольникъ ABC раздѣлить линіей, перпендикулярной къ основанію, на двѣ равновеликія части.

Анализъ. Искомый перпендикуляръ xy пересѣкаетъ AB въ x и BC въ y, тогда отношеніе площадей двухъ треугольниковъ ABC и xyB равно $Bx \cdot By : AB \cdot BC = 1 : 2$, или $Bx \cdot By = \frac{1}{2} AB \cdot BC$. Проведя высоту CD, найдемъ $Bx : By = BD : BC$, откуда $Bx^2 = \frac{1}{2} AB \cdot BD$ и т. д.

1914. Данный треугольникъ ABC раздѣлить прямыми перпендикулярными къ основанію на 3, 4.....n равновеликихъ между собою частей.

1915. Данный треугольникъ раздѣлить прямыми, параллельными данной прямой, на n равновеликихъ между собою частей.

Построить треугольникъ, если дано:

1916. $ab=q^2$; $a\pm b$, c.

1917. $ab=q^2$; $a\pm b$, $\angle C$.

1918. $ab=q^2$; $a\pm b$, h_c.

1919. $ab=q^2$; $a\pm b$, m_c.

1920. $ab=q^2$; $a\pm b$, h_a.

1921. $ab=q^2$; $a\pm b$, m_a.

1922. $ab=q^2$; $a\pm b$, R.

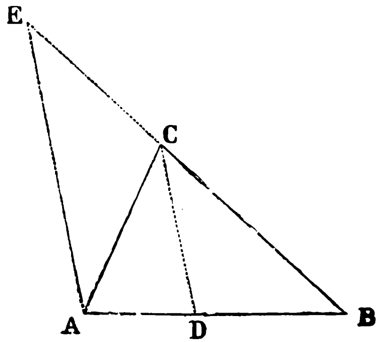
1923. $ab=q^2$; $a\pm b$, h_a+h_b.

1924. $ab=q^2$; $h_a\pm h_b$, $\angle C$.

1925. $ab=q^2$; $a-b$; h_a-h_b.

1926. Построить треугольникъ по a, b, α_c.

Рѣшеніе. Искомый треугольникъ ABC; $CD=\alpha_c$; проведя $AE \parallel CD$ до пересѣченія E съ продолженіемъ стороны BC, получимъ $BC:BE=CD:AE$ или $a:(a+b)=\alpha_c:AE$; находимъ AE и строимъ тр—къ ABC.



Черт. 58.

1926a. Построить треугольникъ по h_a, h_b, h_c.

Рѣшеніе. $a:b=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}$ или $h_b:h_a=a:b$, откуда $h_b:(h_a+h_b)=a:(a+b)=\alpha_c:AE$, находимъ AE и т. д.

Построить треугольникъ, если дана его площадь $\frac{1}{2}c\,.\,h_c=q^2$ и

1927. a, c.

1928. c, $\angle A$.

1929. c, $\angle C$.

1930. c, $\angle A-\angle B$.

1931. c, h_a.

1932. c, m_c.

1933. c, m_a.

1934. a, α_c.

1935. c, R.

1936. R, $\angle C$.

1937. p_a, p_b.

1938. a, h_c.

1939. h_c, $\angle A$.

1940. h_c, $\angle C$.

1941. h_c, $\angle A-\angle B$.

1942. h_c, m_c.

1943. p_a-p_b, h_c.

1944. p_a-p_b, m_c.

1945. h_c, m_a.

1946. h_c, α_c.

1947. α_c, $\angle A-\angle B$

1948. $a\pm b$, c.

Построить параллелограммъ, если дана площадь его $a \, . \, h_a = q^2$ и

1949. a, b.
1950. a, $\times A$.
1951. a, e.
1952. h_a, $\times A$.
1953. b, h_a.
1954. h_a, e.

Построить трапецію, если дана площадь ея $\frac{(a+c) \, . \, h}{2} = q^2$ и

1955. a, b, c.
1956. a, c, e.
1957. a, c, $\sphericalangle A$.
1958. b, d, h.
1959. h, $\sphericalangle A$, $\times B$.
1960. $\times A$, $\sphericalangle B$, $a+c$.
1961. b, h, $\sphericalangle E$.
1962. $a+c$, b, $\sphericalangle E$.
1963. $a+c$, $\times A$, $\sphericalangle E$.
1964. h, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle E$.
1965. h, a, $\times E$.
1966. a, b, h.
1967. a, h, $\times A$.
1968. a, h, $\sphericalangle A \pm \sphericalangle B$.

ГЛАВА XIII.

Подобіе фигуръ.

1969—2016. Построить треугольникъ, если данъ одинъ изъ слѣдующихъ элементовъ его: a, c, h_c, m_c, α_c, p_a или p_b, $p_a - p_b$, h_a, m_a, R, r, и, кромѣ того, если форма треугольника опредѣляется:

1969. $a : h_c$, $\sphericalangle C$.
1970. $a : h_c$, $\sphericalangle A$.
1971. $c : h_c$, $\sphericalangle A$.
1972. $h_c : p_a$, $\sphericalangle A$.
1973. $h_c : p_a$, $\times C$.
1974. $h_c : p_a : p_b$.
1975. $a : m_c$, $\sphericalangle B$.
1976. $c : m_c$, $\times B$.
1977. $a : \alpha_c$, $\sphericalangle B$.
1978. $a : \alpha_c$, $\sphericalangle C$.
1979. $h_c : \alpha_c$, $\sphericalangle B$.
1980. $h_c : \alpha_c$, $\sphericalangle C$.
1981. $h_c : m_c$, $\times B$.
1982. $h_c : \alpha_c$, $\sphericalangle A$.
1983. $a : b$, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
1984. $a : h_c$, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
1985. $p_b : p_a$, $\times A$.
1986. $p_b : p_a$, $\sphericalangle C$.
1987. $p_b : p_a$, $\sphericalangle A - \sphericalangle B$.
1988. $c : h_c$, $\sphericalangle C$.
1989. $c : m_c$, $\times C$.
1990. $a : b : m_c$.
1991. $a : m_c$, $\sphericalangle A$.
1992. $a : m_c$, $\sphericalangle C$.
1993. $h_c : m_c$, $\times C$.
1994. $(a+b+c) : h_c$, $\times A$.

1995. $(a+b+c):h_c,\ \angle C$.
1996. $c:h_c,\ \sphericalangle A - \sphericalangle B$.
1997. $c:\alpha_c,\ \angle A - \angle B$.
1998. $h_a:m_c,\ \sphericalangle A$.
1999. $h_a:m_c,\ \angle C$.
2000. $m_a:m_c,\ \sphericalangle C$.
2001. $m_a:m_b,\ \sphericalangle C$.
2002. $m_a:m_b:m_c$.
2003. $m_a:m_b;\ \sphericalangle m_am_b$.
2004. $\angle A,\ \angle m_am_b$.
2005. $\angle C,\ \sphericalangle m_am_b$.
2006. $c:R,\ \angle A$.
2007. $c:R,\ \sphericalangle A - \angle B$.
2008. $R:h_c,\ \angle A$.
2009. $R:h_c,\ \sphericalangle C$.
2010. $R:m_c,\ \angle C$.
2011. $h_c:m_c:\alpha_c$.
2012. $c:r,\ \angle A$.
2013. $c:r,\ \sphericalangle C$.
2014. $r:h_c,\ \sphericalangle A$.
2015. $r:h_c,\ \angle C$.
2016. $r:\alpha_c,\ \sphericalangle C$.

Построить ромбъ, если дано:

2017. $a,\ e:f$.
2018. $h,\ e:f$.

Построить прямоугольникъ, если дано:

2019. $a:b,\ e$.
2020. $a:e,\ b$.

Построить параллелограммъ, если дано:

2021. $a:b,\ e,\ \sphericalangle B$.
2022. $a,\ e:f,\ \angle E$.
2023. $a,\ e:f,\ \sphericalangle A$.
2024. $a:h_a,\ b,\ \angle A$.
2025. $a:h_a,\ b,\ \angle E$.
2026. $h_a,\ e:f,\ \angle E$.

Построить равнобедренную трапецію, если дано:

2027. $a:b,\ e,\ \sphericalangle B$.
2028. $a:c,\ e,\ \sphericalangle A$.
2029. $a:c,\ b,\ \angle A$.
2030. $a:c,\ b,\ \sphericalangle E$.

Построить трапецію, если дано:

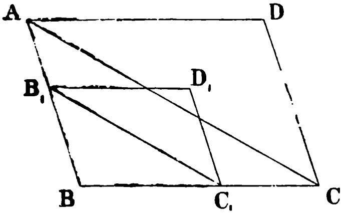
2031. $a:b,\ c,\ e,\ \sphericalangle B$.
2032. $a:b,\ e,\ \sphericalangle A,\ \sphericalangle B$.
2033. $a:b,\ e,\ f,\ \sphericalangle B$.
2034. $a:e,\ b,\ \sphericalangle A,\ \sphericalangle B$.
2035. $a:e,\ h,\ \angle A,\ \sphericalangle B$.
2036. $a:b,\ h,\ \sphericalangle A,\ \sphericalangle B$.
2037. $a-c,\ b:d,\ e,\ \sphericalangle A$.
2038. $b:d,\ e,\ h,\ \angle A$.
2039. $a+c,\ b,\ e:f,\ \angle E$.
2040. $a,\ c,\ e:f,\ \sphericalangle E$.
2041. $a,\ h,\ e:f,\ \sphericalangle E$.
2042. $b,\ h,\ e:f,\ \angle E$.
2043. $a-c,\ h,\ e:f,\ \angle E$.
2044. $a:b,\ c,\ \angle A,\ \sphericalangle B$.
2045. $a:b,\ c,\ \sphericalangle B,\ \sphericalangle E$.
2046. $a:h,\ c,\ \angle A,\ \sphericalangle B$.
2047. $a:h,\ c,\ \angle B,\ \sphericalangle E$.
2048. $a:b:c:d,\ e$.

2049. a : b : c, e, ∡A.
2050. a : b : c, d, ∡A.
2051. a : c, e, ∡A, ∡B.
2052. a, e : f, ∡E, ∢B.
2053. a : c, e, ∡B, ∡E.
2054. a : c, b, ∡B, ∡E.

Построить четыреугольникъ, если дано:

2055. a : b, e, ∡A, ∡B, ∢C.

Рѣшеніе. Строимъ сперва какой-нибудь четыреугольникъ, опредѣляемый формою a : b, ∡A, ∡B, ∡C (черт. 59), на сторонахъ угла B откладываемъ два отрѣзка BB_1 и BC_1, отношеніе которыхъ = a : b; при B_1 строимъ уголъ BB_1D_1, равный ∡A, а при C_1 строимъ ∡BC_1D_1 = = ∡C. Затѣмъ между сторонами угла B помѣщаемъ отрѣзокъ AC, равный e и параллельный B_1C_1; изъ A и C проводимъ AD ‖ B_1D_1 и CD ‖ C_1D_1; четыреугольникъ ABCD—искомый.



Черт. 59.

2057. a : b, c, d, e, ∢B.
2058. a : b, c, e, ∡A, ∡B.
2059. a : b, c, e, ∡B, ∡D.
2060. a : b, c, e, f, ∡B.
2061. a : b, e, f, ∢A, ∡B.
2062. a : b, e, f, ∡B, ∢D.
2063. a : b, e, f, ∢B, ∡E.
2064. a : b, e, ∢A, ∡B, ∢E.
2065. a : b, e, ∢B, ∡cf, ∡df.
2066. a, b : e, c, d, ∢B.
2067. a, b : e, f, ∡A, ∡B.
2068. a : b, c, ∢A, ∡B, ∡C.
2069. a : b : c, d, ∡A, ∡B.
2070. a : b : c, d, ∢B, ∡D.
2071. a : b : c, e, ∢A, ∡B.
2072. a : b, f, ∢A, ∡B, ∢E.
2073. a : b, c, ∡A, ∢B, ∢E.
2074. a : b, c, ∢B, ∡D, ∢E.
2075. a : e, f, ∢A, ∡B, ∡C.
2076. f, ∡cf, ∢df, ∢ae, ∡be.
2077. f, ∢ae, ∡be, ∢ce, ∡de.
2078. f, ∢ae, ∢be, ∡ce, ∡E.
2079. a, ∢be, ∡ce, ∢cf, ∡df.
2080. a : c, b, ∡A, ∢B, ∡C.
2081. a : c, e, ∢A, ∡B, ∡C.
2082. a : b : d, c, ∡C, ∡D.
2083. a, b : c : d, ∢A, ∢B.
2084. a : b : d, c, ∡C, ∡D.
2085. a, e : f, ∢E, ∢A, ∡C.
2086. a, e : f, ∡E, ∡A, ∡B.

Построить вписанный четыреугольникъ, если дано:

2087. R, a : b, ∡A, ∢B.

Центры круговъ, описанныхъ около четыреугольника ABCD и подобнаго ему $A_1B_1C_1D_1$, лежатъ на одной прямой съ общею вершиною B.

2088. R, a : b, $\measuredangle$C, $\sphericalangle$D.
2089. R, a : b : c, $\measuredangle$B.
2090. R, a : b, $\measuredangle$B, $\measuredangle$E.
2091. R, a : e, $\measuredangle$A, $\sphericalangle$B.
2092. R, e : f, $\measuredangle$E, $\sphericalangle$A.
2093. R, a : c, b, $\sphericalangle$E.
2094. a : b, e, $\measuredangle$A, $\measuredangle$B.
2095. a : b, e, f, $\measuredangle$B.
2096. a : b, e, $\sphericalangle$B, $\measuredangle$E.
2097. a : b, c, $\measuredangle$A, $\measuredangle$B.
2098. a : b : c, d, $\measuredangle$B.
2099. a : b, c, $\measuredangle$B, $\sphericalangle$E.
2100. a : e, f, $\measuredangle$A, $\sphericalangle$B.
2101. a : c, b, $\measuredangle$A, $\sphericalangle$B.
2102. a : c, e, $\sphericalangle$A, $\sphericalangle$B.

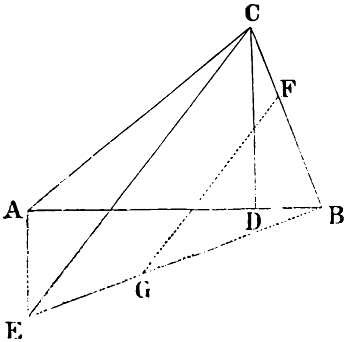
Построить описанный четыреугольникъ, если дано:

2103. r, a : b, $\sphericalangle$A, $\measuredangle$B.
2104. r, a : e, $\sphericalangle$A, $\sphericalangle$B.
2105. r, a : c, $\sphericalangle$A, $\sphericalangle$B.
2106. r, a : c, $\sphericalangle$A, $\sphericalangle$C.
2107. r, a : b, e, $\measuredangle$B.
2108. a : r, e, $\sphericalangle$B, $\measuredangle$C.
2109. e, a : r, $\measuredangle$A, $\sphericalangle$C.
2110. a, c : r, $\sphericalangle$A, $\sphericalangle$B.
2111. a : b, e, $\measuredangle$A, $\measuredangle$B.
2112. a : b, c, $\measuredangle$A, $\sphericalangle$B.
2113. a : e, b, $\measuredangle$A, $\sphericalangle$B.
2114. a : e, f, $\measuredangle$A, $\measuredangle$B.
2115. a : c, e, $\measuredangle$A, $\measuredangle$B.
2116. a : c, b, $\measuredangle$A, $\measuredangle$B.

Построить треугольникъ, если дано:

2117. $c : h_c$, a, b.

Анализъ. Положимъ, что задача рѣшена, искомый треугольникъ ABC (черт. 60). Возставляемъ перпендикуляръ къ BC и къ AB; получимъ треугольникъ AEB; $\measuredangle$ABC$=$$\measuredangle$AEB, какъ углы съ перпендикулярными сторонами и оба острые въ данномъ случаѣ, и треугольникъ AEB∞CDB; откуда AB : CD$=$BE : CB или $c : h_c = m : n$ (данному отношенію). Соединяя C съ E, получимъ треугольникъ CEB, форма котораго опредѣляется данными задачи: BE : BC $=$ m : n и $\measuredangle$B$=$d. Построеніе: откладываемъ на сторонахъ прямого угла CBE два отрѣзка BF и BG такіе, чтобы BG : BF$=$m : n; откладываемъ по BF линію BC$=$a и, проведя CE $\parallel$ FG, получимъ треугольникъ CBE. Третья вершина искомаго треугольника лежитъ въ разстояніи$=$b отъ C и на геометрическомъ мѣстѣ вершинъ прямыхъ угловъ, стороны которыхъ проходятъ черезъ E и B.



Черт. 60.

2118. $c : h_c$, a, m_a.
2119. $c : h_c$, a, h_a.
2120. $c : h_c$, a, h_b.
2121. $c : h_c$, a, p_a.
2122. $c : h_c$, a, R.
2123. $c : h_c$, $b : h_b$, a.
2124. $c : h_c$, m_a, m_b.
2125. p_a, p_b, $a : h_a$.
2126. $c : h_c$, $a : b$, m_c.
2127. $c : h_c$, $a : b$, α_c.

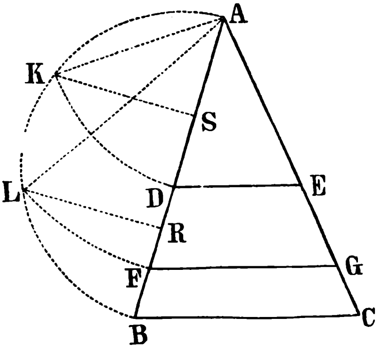
Построить параллелограммъ, если дано:

2128. $a : h_a$, b, e.
2129. $a : h_a$, e, f.

Построить трапецію, если дано:

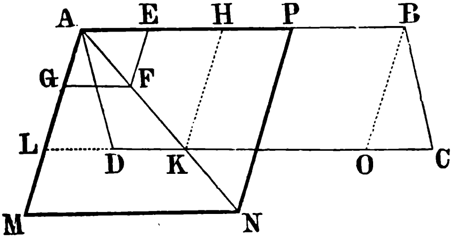
2130. $a : h$, b, c, e.
2131. $a : h$, b, d, e.
2132. $a : h$, b, e, $\angle A$.
2133. $a : h$, b, e, f.
2134. $a : h$, b, e, $\angle E$.

2135. Треугольникъ раздѣлить прямыми линіями, параллельными одной изъ сторонъ его, на части, площади которыхъ находятся въ данномъ отношеніи $m : n : p$.


Черт. 61.

Анализъ. Пусть DE и FG искомыя линіи, площади $ADE : DEGF : BFGC = m : n : p$; тогда $ADE : AFG : ABC = m : (m + n) : (m + n + p)$. Но треугольники $ADE : AFG : ABC = AD^2 : AF^2 : AB^2 = m : (m + n) : (m + n + p)$. Описывая на AB полуокружность и сдѣлавъ $AD = AK$, $AF = AL$, получимъ: $AD^2 : AF^2 : AB^2 = AK^2 : AL^2 : AB^2 = m : (m + n) : (m + n + p)$. Опуская перпендикуляры изъ K и L на AB, найдемъ, что $AK^2 : AL^2 : AB^2 = AS : AR : AB = m : (m + n) : (m + n + p)$ или $AS : SR : RB = m : n : p$ и т. д. (черт. 61).

2136. Построить параллелограммъ, который былъ бы равновеликъ данному параллелограмму и подобенъ другому данному параллелограмму.


Черт. 62.

Анализъ. Искомый параллелограммъ $APNM$ (черт. 62); онъ подобенъ $AEFG$ и равновеликъ $ABCD$. Если $AMNP \infty AEFG$, то AF и AN

составляютъ одну прямую. Проведя KH || PN, имѣемъ AL : AH= =AM : AP, или AL . AB : AH . AB=AM . AP : AP . AP, но площ. AMNP=площ. ABOL=площ. ABCD, а потому AM : AL=AB : AP; откуда AH . AB=AP² или AH : AP=AP : AB и т. д.

2137. Построить треугольникъ, подобный данному и равновеликій другому данному треугольнику.

2138. Даны двѣ подобныя фигуры; найти третью фигуру, подобную имъ и равновеликую суммѣ или разности ихъ.

2139. Построить фигуру, которая подобна одной данной фугурѣ и равновелика другой данной фигурѣ.

2140. Черезъ точку P, лежащую внѣ даннаго угла, провести прямую такъ, чтобы она вмѣстѣ съ отсѣкаемыми сторонами угла образовала треугольникъ, площадь котораго равновелика площади даннаго квадрата.

Анализъ. Вершина даннаго угла A, сѣкущая PXY, X и Y— точки пересѣченія сторонъ угла съ сѣкущей; искомый треугольникъ AXY, сторона даннаго квадрата=q. Черезъ точку P проводимъ параллельную къ AY, которая пересѣчетъ AX въ точкѣ B. Преобразуемъ треугольникъ въ равновеликій ему параллелограммъ, имѣющій съ треугольникомъ общій уголъ A и сторона котораго= =AB; этотъ параллелограммъ ABCD (D—лежитъ на AY, а C на продолженіи BP) долженъ быть равновеликъ площади даннаго квадрата, а потому его можно построить по даннымъ задачи, и PC и AD—величины извѣстныя и т. д.

2141. Данный треугольникъ ABC раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей прямыми, выходящими изъ точки, лежащей внѣ фигуры треугольника.

2142. Данный треугольникъ раздѣлить прямою на двѣ фигуры, имѣющія одинаковую площадь и одинаковый периметръ.

Анализъ. Данный треугольникъ ABC; искомая прямая XY пересѣкаетъ CB въ Y и AC въ X. Площади ACB : CXY=AC . CB : CX . CY=2 : 1; откуда $CX \cdot CY=\frac{1}{2}AC \cdot CB$. Периметръ $CX+CY+XY=XY+AX+AB+BY=XY+AC-CX+AB+CB-CY$, откуда $CX+CY=\frac{1}{2}(AB+AC+CB)$. (Зад. № 1837).

2143. Данный равносторонній треугольникъ преобразовать въ другой равносторонній, площадь котораго относилась бы къ площади даннаго, какъ m : n.

2144. Данный квадратъ преобразовать въ другой, площадь котораго относилась бы къ площади даннаго какъ m : n.

ГЛАВА XIV.

Геометрическія мѣста и задачи, рѣшаемыя помощью геометрическихъ мѣстъ. Геометрическія мѣста линій. Задачи Аполлонія.

2145. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи рядъ лучей, идущихъ изъ одной точки къ данной прямой, есть прямая, параллельная данной прямой и проходящая черезъ точку, дѣлящую одинъ изъ отрѣзковъ лучей въ данномъ отношеніи.

2146. Геометрическое мѣсто концовъ лучей, выходящихъ изъ данной точки и дѣлящихся данной прямой въ данномъ отношеніи, есть прямая, параллельная данной прямой.

2147. Геометрическое мѣсто концовъ прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, дѣлясь въ ней въ данномъ отношеніи, и идущихъ отъ точекъ данной прямой, есть прямая, параллельная этой прямой.

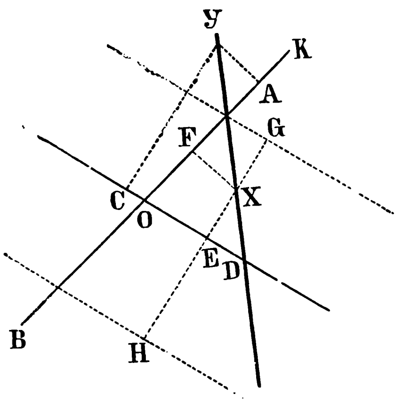
2148. Геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ разстояніе отъ пересѣкающихся прямыхъ находится въ данномъ отношеніи, суть двѣ прямыя, проходящія черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ.

2149. Геометрическое мѣсто точекъ, разстояніе которыхъ отъ двухъ параллельныхъ линій находится въ данномъ отношеніи, есть прямая, параллельная даннымъ прямымъ.

2150. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ отрѣзки прямыхъ, лежащихъ между двумя параллельными прямыми, въ данномъ отношеніи, есть линія, параллельная этимъ прямымъ.

2151. Геометрическое мѣсто точекъ, сумма или разность разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная, есть четыре прямыхъ линіи.

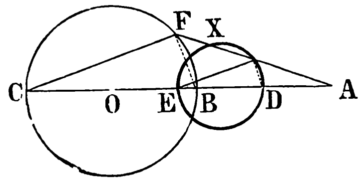
Анализъ. Двѣ прямыя суть AB и CD, пересѣкающіяся въ точкѣ O; тогда, если одна изъ искомыхъ точекъ есть X, то $XE + XF = s =$ данному отрѣзку, гдѣ $XE \perp CD$ и $XF \perp AB$; откладывая на продолженіи XE часть $XG = XF$, получимъ, что $EG = s$; геометрическое мѣсто такихъ точекъ, какъ G, суть двѣ прямыя G и H, параллельныя CD, точка X находится въ равномъ разстояніи отъ прямой G и отъ AF, слѣд., лежитъ на равнодѣлящей угла, образованнаго этими прямыми, которая и будетъ искомымъ мѣстомъ; точка Y, взятая на продолженіи XY, будетъ отстоять отъ AB и CD на разстояніи YA и YC, разность между которыми равна также s.



Черт. 63.

2152. Геометрическое мѣсто рединъ лучей, идущихъ отъ данной точки къ окружности, есть окружность.

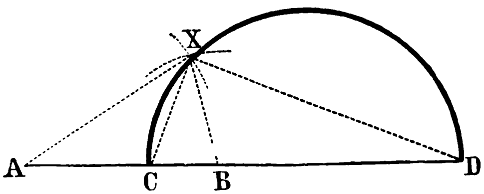
Анализъ. Дана окружность, центръ которой есть O, и точка A внѣ этой окружности; соединимъ центръ окружности O съ точкою A прямою AC, раздѣлимъ отрѣзки AC и AB въ точкахъ E и D пополамъ; тогда точки E и D должны лежать на искомомъ геометрическомъ мѣстѣ. Затѣмъ проведемъ какую-нибудь прямую AF и найдемъ ея середину X; соединяя X съ E и F съ C, получимъ двѣ параллельныя прямыя CF и EX, ибо $CE : EA = FX : XA$; FB и XD также параллельны; но уголъ $CFB = d$, а потому и $\angle EXD = d$, слѣд., точка X лежитъ на окружности круга, описаннаго на ED, какъ на діаметрѣ и т. д.



Черт. 64.

2153. Геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе разстояній которыхъ отъ концовъ даннаго отрѣзка равно данной величинѣ, есть окружность (Аполлонія), описанная какъ на діаметрѣ на отрѣзкѣ, опредѣляемомъ точками, дѣлящими данное разстояніе въ данномъ отношеніи (гармоническое дѣленіе).

Анализъ. Положимъ, что данное отношенiе равно $a : b$; данныя точки A и B. Соединимъ A и B и изъ A и B опишемъ окружности радiусами, равными a и b, или радiусами, имъ пропорцiональными; точка пересѣченiя X этихъ окружностей есть одна изъ искомыхъ точекъ. Раздѣливъ $\measuredangle AXB$ и уголъ, смежный съ нимъ, пополамъ прямыми XC и XD, найдемъ двѣ другiя точки C и D, также лежащiя на геометрическомъ мѣстѣ точекъ, $\measuredangle CXD=d$, а потому X лежитъ на окружности, описанной на CD, какъ на дiаметрѣ.



Черт. 65.

2154. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ лучи, выходящiе изъ одной точки и ограниченные данной окружностiю, въ данномъ отношенiи, есть окружность, центръ которой лежитъ на лучѣ, проходящемъ черезъ центръ даннаго круга.

2155. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношенiи рядъ параллельныхъ отрѣзковъ, лежащихъ между сторонами угла, есть прямая, проходящая черезъ вершину этого угла.

2156. Геометрическое мѣсто точекъ, сумма квадратовъ разстоянiй которыхъ (площадей квадратовъ, построенныхъ на разстоянiяхъ) отъ двухъ данныхъ точекъ равна данному квадрату, есть окружность круга, центръ котораго лежитъ на серединѣ даннаго отрѣзка.

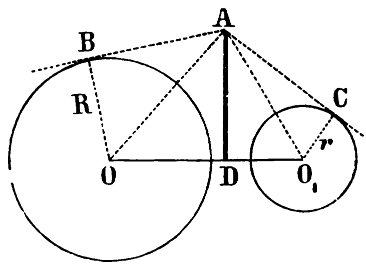
Анализъ. Пусть A и B данныя точки; $AB=c$, D—середина отрѣзка AB и C—одна изъ искомыхъ точекъ, f—сторона даннаго квадрата. Опуская изъ C перпендикуляръ CE на AB и соединяя C съ D, A и B, получимъ: $\overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-2\frac{c}{2}.DE$; $BC^2=CD^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2+2\frac{c}{2}.DE$; откуда: $CD^2=\frac{1}{2}f^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2$, т.-е. квадратъ, построенный на разстоянiи искомой точки отъ середины отрѣзка, есть величина постоянная и равновелика разности площадей прямоугольника $\frac{1}{2}f.\,f$ и квадрата $\left(\frac{c}{2}\right)^2$; а потому и разстоянiе точки C отъ D есть величина постоянная, т.-е. такія точки, какъ точка C, лежатъ на окружности.

2157. Геометрическое мѣсто точекъ, разность квадратовъ разстояній которыхъ (площадей квадратовъ, построенныхъ на разстояніяхъ) отъ концовъ даннаго отрѣзка равновелика площади даннаго квадрата, есть прямая, перпендикулярная къ данному отрѣзку и дѣлящая этотъ отрѣзокъ на два другіе, разность квадратовъ которыхъ равновелика данному квадрату.

Анализъ. Данный отрѣзокъ AB; C—одна изъ искомыхъ точекъ; CD — перпендикуляръ, опущенный изъ C на AB; тогда $AC^2-CB^2=a^2$; но $AC^2=CD^2+AD^2$ и $CB^2=CD^2+DB^2$, а потому $AD^2-DB^2=a^2$; но любая точка k перпендикуляра CD обладаетъ тѣмъ же свойствомъ: $kA^2-kB^2=AD^2-DB^2=a^2$ и т. д.

2158. Геометрическое мѣсто концовъ равныхъ касательныхъ, проведенныхъ къ двумъ даннымъ окружностямъ, есть радикальная ось, т.-е. перпендикуляръ, возставленный къ линіи центровъ этихъ окружностей въ точкѣ, дѣлящей эту линію на два такіе отрѣзка, разность квадратовъ которыхъ равна разности квадратовъ, построенныхъ на радіусахъ, причемъ большій отрѣзокъ прилежитъ большему кругу.

Доказательство. Даны двѣ окружности, радіусъ первой есть R, второй—r; линія центровъ OO_1. Тогда $AB^2=AO^2-R^2$; $AC^2=AO_1^2-r^2$, или $AO^2-AO_1^2=R^2-r^2$; слѣд., точка A лежитъ на перпендикулярѣ AD къ OO_1, см. 2157. Если окружности касаются, то геометрическое мѣсто—общая касательная; если пересѣкаются—общая хорда пересѣченія. Для построенія радикальной оси можно поступать такъ: пересѣчемъ двѣ окружности третьей, тогда точка (радикальный центръ), касательныя изъ которой къ тремъ окружностямъ равны между собою, лежитъ на пересѣченіи общихъ хордъ пересѣченія; опуская изъ этой точки перпендикуляръ на линію центровъ, получимъ радикальную ось. Или проведя общую касательную къ обѣимъ окружностямъ, изъ середины ея опустимъ перпендикуляръ на линію центровъ; или соединимъ середины двухъ общихъ касательныхъ; тогда прямая, соединяющая середины общихъ касательныхъ, будетъ радикальною осью.

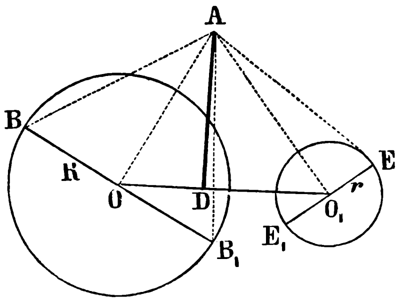


Черт. 66.

2159. Геометрическое мѣсто центровъ окружностей, пересѣкающихъ данныя окружности подъ прямымъ угломъ, есть также радикальная ось.

2160. Геометрическое мѣсто центровъ круговъ, дѣлящихъ двѣ окружности пополамъ, есть перпендикуляръ, возставленный къ линіи центровъ данныхъ круговъ въ точкѣ, которая дѣлитъ эту линію на два отрѣзка, разность квадратовъ которыхъ равна разности квадратовъ, построенныхъ на радіусахъ, при чемъ большій отрѣзокъ прилежитъ къ меньшему кругу.

Доказательство. Даны два круга O и O_1, точка A искомая. Опустимъ изъ A перпендикуляръ AD; если $DO_1{}^2-OD^2=R^2-r^2$, то, проведя діаметры BB_1 и EE_1, перпендикулярные къ AO и AO_1, докажемъ, что B, B_1, E и E_1 лежать на одной окружности радіуса AB, описанной изъ A какъ изъ центра: $AB^2=AO^2+R^2=AD^2+$ $+OD^2+R^2$, а $AE^2=AO_1{}^2+$ $+r^2=AD^2+DO_1{}^2+r^2$. Изъ равенства $DO_1{}^2-OD^2=$ R^2-r^2 слѣдуетъ: $DO_1{}^2+r^2=OD^2+R^2$; слѣд., $AB=AE$.



Черт. 67.

2161. Геометрическое мѣсто центровъ круговъ, пересѣкающихъ одинъ изъ двухъ данныхъ круговъ подъ прямымъ угломъ и дѣлящихъ другой кругъ пополамъ, есть линія, перпендикулярная къ линіи, соединяющей центры данныхъ круговъ, въ точкѣ, дѣлящей линію центровъ на два отрѣзка, разность квадратовъ которыхъ равна суммѣ квадратовъ, построенныхъ на радіусахъ.

2162. Геометрическое мѣсто точекъ, разстояніе которыхъ отъ данной точки равно касательной къ данной окружности, есть прямая, перпендикулярная къ линіи, соединяющей центръ данной окружности съ данной точкой, въ точкѣ, дѣлящей эту прямую на два отрѣзка, разность квадратовъ которыхъ равна квадрату радіуса данной окружности.

2163. Геометрическое мѣсто центровъ окружностей, проходящихъ черезъ данную точку и пересѣкающихъ данную окружность подъ прямымъ угломъ, есть перпендикуляръ къ прямой, соединяющей точку съ окружностью.

2164. Геометрическое мѣсто концовъ касательныхъ къ двумъ даннымъ окружностямъ, находящихся въ данномъ отношенiи, есть окружность круга.

2165. Составить нѣсколько задачъ на опредѣленiе положенiя точки, рѣшаемыхъ помощью геометрическихъ мѣстъ настоящей и предшествующей главъ.

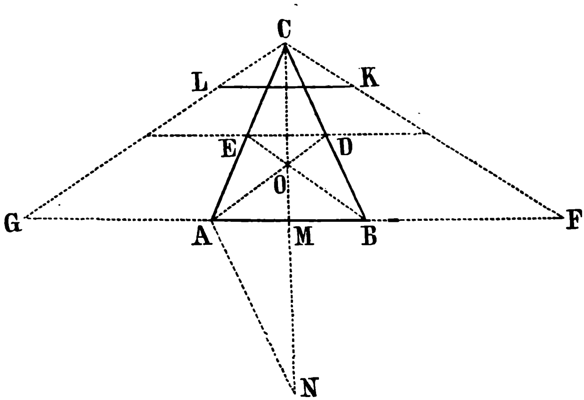
Построить треугольникъ по:

2166. c, $a:b=m:n$, α_c.
2167. $a:b$, c, h_c.
2168. $a:b$, c, m_c.
2169. $a:b$, c, h_a.
2170. $a:b$, c, R.
2171. $a:b$, p_a, p_b.
2172. $a:b$, c, p_a-p_b.
2173. $a:b$, a, $\angle c\alpha_c$.
2174. $a:b$, c, $\sphericalangle cm_c$.
2175. $a:b$, c, $\angle am_c$.
2176. $a:b$, c, $p_a:p_b$.
2177. a, b, $p_a:p_b$.
2178. α_c, q_a, q_b.
2179. q_a, q_b, $p_a:p_b$.
2180. h_c, q_a, q_b.
2181. m_c, q_a, q_b.
2182. q_a, q_b; p_b-p_a.
2183. $a:b$, h_c, m_c.
2184. $a:b$, h_c, p_a-p_b.
2185. $a:b$, m_c, p_a-p_b.
2186. $a:b$, c, m_a.
2187. q_a, q_b, m_a.
2188. $a:b$, c, $\sphericalangle m_a\, m_b$.
2189. q_a, q_b, $\angle m_a\, m_b$.
2190. c, h_c, $a:m_a$.
2191. c, m_c, $a:m_a$.
2192. c, $a:m_a$, $b:m_b$.
2193. c, $m_a:m_b$, $\angle A$.
2194. c, $m_a:m_b$, $\sphericalangle C$.
2195. a, c, $m_a:m_b$.
2196. c, h_c, $m_a:m_b$.
2197. c, m_c, $m_a:m_b$.
2198. p_a, p_b, $m_a:m_b$.
2199. c, h_a, $m_a:m_b$.
2200. c, R, $m_a:m_b$.
2201. R, $\sphericalangle C$, $m_a:m_b$.
2202. c, $m_a:m_b$, $\angle cm_c$.
2203. c, $a:b$, $m_a:m_b$.
2204. q_a, q_b, $m_a:m_b$.
2205. a, b, $\angle m_a\, m_b$.

Анализъ. Данный треугольникъ ABC; $m_a=AD$ и $m_b=BE$; проведемъ BF и AG такъ, чтобы $BF=AB$ и $AG=AB$; соединимъ G и F съ C; тогда $CG=2m_a$ и $CF=2m_b$ и $\sphericalangle GCF=\sphericalangle m_a m_b$. Проведя $KL \parallel GF$, получимъ треугольникъ CLK, форма котораго опредѣляется данными задачи и т. д. (черт. 68).

2206. $a:b$, m_a, m_c.

Продолжая $CM = m_c$ до N, такъ чтобы $MN = m_c$ (черт. 68), получимъ треугольникъ ACN, въ которомъ вершина A лежитъ на кругѣ Аполлонія и въ разстояніи $^2/_3\ m_a$ отъ O и т. д.



Черт. 68.

Построить параллелограммъ, если дано:

2207. $a,\ b:e,\ h_a$.
2208. $a:b,\ c,\ h_a$.
2209. $a:b,\ e,\ f$.
2210. $a:b,\ e,\ \measuredangle E$.
2211. $a,\ e:f,\ h_a$.

Построить трапецію, если дано:

2212. $a,\ c,\ b:e,\ h$.
2213. $a,\ b:e;\ f,\ h$.
2214. $a,\ b:e,\ h,\ \sphericalangle A$.
2215. $a,\ b:e,\ h,\ \sphericalangle E$.
2216. $a:b,\ c,\ d,\ e$.
2217. $a:b,\ e,\ f,\ h$.
2218. $a:b,\ c,\ h,\ \sphericalangle E$.
2219. $a,\ c,\ b:d,\ h$.
2220. $a,\ b,\ c,\ e:f$.
2221. $a,\ c,\ e:f,\ \sphericalangle B$.
2222. $a,\ c,\ e:f,\ h$.

Построить четыреугольникъ:

2223. $a,\ b,\ c:d,\ \sphericalangle A,\ \sphericalangle B$.
2224. $a,\ b,\ c:d,\ f,\ \sphericalangle B$.
2225. $a,\ b,\ c:d;\ e,\ f$.
2226. $a,\ b,\ c:d,\ e,\ f$.
2227. $a,\ b,\ c:d,\ \measuredangle B,\ \measuredangle D$.
2228. $a,\ b,\ c:d,\ e,\ \sphericalangle E$.
2229. $a,\ b,\ e,\ c:f,\ d:f$.
2230. $a:b,\ c:d,\ e,\ \sphericalangle B,\ \sphericalangle D$.
2231. $a:b,\ c:d,\ e,\ f,\ \sphericalangle B$.

Построить вписанный четыреугольникъ, если дано:

2232. $R,\ a,\ b,\ c:d$.
2233. $R,\ a,\ c:d,\ \sphericalangle B$.
2234. $R,\ a,\ e,\ c:d$.
2235. $R,\ e,\ a:b,\ c:d$.

2236. $a, b, c:d, e$.
2237. $a, b, c:d, \measuredangle B$.
2238. $a, b, c:d, \measuredangle D$.
2239. $a:b, e, \measuredangle ce, \measuredangle de$.
2240. $a:b, c, d, e$.

Построить треугольникъ, если дано:

2241. $c, a^2-b^2, \measuredangle A$.
2242. $c, a^2-b^2, \measuredangle C$.
2243. c, a^2-b^2, h_c.
2244. c, a^2-b^2, m_c.
2245. c, a^2-b^2, h_a.
2246. c, a^2-b^2, R.
2247. $c, a^2-b^2, \sphericalangle A-\measuredangle B$.
2248. a^2-b^2, q_a, q_b.
2249. $a^2-b^2, h_a, \measuredangle B$.
2250. $a^2-b^2, R, \measuredangle C$.
2251. $a^2-b^2, m_c, \measuredangle A$.
2252. $a^2-b^2, m_c, \measuredangle C$.
2253. a^2-b^2, h_c, m_c.
2254. a^2-b^2, h_c, m_c.
2255. c, a^2-b^2, m_a.
2256. $c, a^2-b^2, \measuredangle A$.
2257. $c, a^2-b^2, \measuredangle m_a m_b$.
2258. $c, a^2-b^2, m_a:m_b$.
2259. $a^2-b^2, p_a-p_b, \measuredangle A$.
2260. $a^2-b^2, p_a-p_b, \sphericalangle C$.
2261. $a^2-b^2, p_a-p_b, \measuredangle A-\measuredangle B$.
2262. a^2-b^2, p_a-p_b, R.
2263. a^2-b^2, h_c, p_a-p_b.
2264. a^2-b^2, p_a-p_b, m_c.
2265. a^2-b^2, p_a-p_b, h_a.
2266. a^2-b^2, p_a-p_b, m_a.
2267. $a+b, c, p_a-p_b$.
2268. $a-b, c, p_a-p_b$.
2269. $p_a, p_b, a+b$.
2270. $p_a, p_b, a-b$.

Построить треугольникъ по:

2271. $c, a^2+b^2, \measuredangle A$.

Рѣшеніе. $AB=c$; продолжая BA за A такъ, чтобы $AE=\frac{1}{2}f$ (гдѣ $a^2+b^2=f^2$), изъ E возставляемъ перпендикуляръ $EF=\frac{1}{2}f$ къ EA; изъ середины D отрѣзка c перпендикуляръ DG; изъ A описываемъ окружность радіусомъ AF, который пересѣчетъ DG въ точкѣ G; тогда DG—радіусъ окружности, представляющей искомое геометрическое мѣсто.

2272. $c, a^2+b^2, \measuredangle C$.
2273. c, a^2+b^2, h_c.
2274. c, a^2+b^2, h_a.
2275. c, a^2+b^2, R.
2276. c, a^2+b^2, m_a.
2277. $a^2+b^2, h_a, \measuredangle B$.
2278. $a^2+b^2, R, \measuredangle C$.
2279. $c, a^2+b^2, m_a:m_b$.
2280. $c, a^2+b^2, h_a:h_b$.
2281. $a^2+b^2, m_c, \measuredangle A$.
2282. $a^2+b^2, m_c, \measuredangle C$.
2283. $a+b^2, m_c, \measuredangle cm_c$.
2284. a^2+b^2, h_c, p_a-p_b.
2285. a^2+b^2, m_c, p_a-p_b.
2286. a^2+b^2, m_a, m_c.

Геометрическое мѣсто линій.

Прямая линія опредѣляется двумя условіями, напр., двумя точками; точкою, черезъ которую она проходитъ, и направленіемъ ея; точкой и окружностію, къ которой прямая должна быть касательною; двумя окружностями, которыхъ прямая должна касаться. Если одного изъ условій недостаетъ, то направленіе прямой остается неопредѣленнымъ, и мы получимъ безчисленное множество прямыхъ, связанныхъ между собою тѣмъ, что онѣ удовлетворяютъ только одному условію, т.-е. онѣ должны или проходить черезъ одну точку, или касаться одной окружности, или имѣть одно извѣстное направленіе. Тогда это точка, или эта окружность, или условіе, опредѣляющее направленіе прямой, также называется геометрическимъ мѣстомъ линій. Такъ, напр., геометрическое мѣсто равныхъ хордъ, проведенныхъ въ данной окружности, есть окружность концентрическая данной, проведенная радіусомъ, равнымъ разстоянію одной изъ этихъ хордъ отъ центра (геометрическое мѣсто рединъ равныхъ хордъ).

2287. Геометрическое мѣсто прямыхъ, разстояніе которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ находится въ данномъ отношеніи, суть двѣ точки, дѣлящія прямую, соединяющую данныя точки, въ данномъ отношеніи (внѣш. и внутр.).

2288. Геометрическое мѣсто линій, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ имѣетъ данную длину, есть окружность, центръ которой находится въ рединѣ прямой, соединяющей данныя точки, а радіусъ равенъ половинѣ данной суммы разстояній.

2289. Линіи, разность разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ равна данной длинѣ, представляютъ систему параллельныхъ между собою прямыхъ, направленіе которыхъ опредѣляется угломъ, образуемымъ линіей, соединяющей данныя точки съ касательной, проведенной чрезъ одну изъ этихъ точекъ къ окружности, описанной радіусомъ, равнымъ данной разности, изъ другой точки, какъ изъ центра.

2290. Геометрическое мѣсто прямыхъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи вписанные углы, опирающіеся на одну и ту же дугу, есть точка, лежащая на этой дугѣ (т.-е. искомыя прямыя проходятъ черезъ эту точку).

2291. Геометрическое мѣсто общихъ хордъ всѣхъ окружностей, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки и пересѣкающихъ данную окружность, есть точка, лежащая на линіи, соединяющей данныя точки.

2292. Черезъ данную точку провести прямую, пересѣкающую данную окружность такъ, чтобы часть ея, лежащая внутри круга, была равна данной длинѣ.

2293. Двѣ окружности пересѣчь прямою такъ, чтобы части ея, лежащія внутри данныхъ круговъ, давали бы данной длины хорды.

2294. Стороны четыреугольника ABCD пересѣчь прямою такъ, чтобы суммы разстояній ея отъ A и C и отъ B и D были равны между собою.

2295. Черезъ двѣ точки A и B провести окружность, которая пересѣчетъ данную окружность такъ, что разстоянія общей хорды пересѣченія отъ двухъ данныхъ точекъ C и D были бы въ данномъ отношеніи.

2296. Даны четыре точки A, B, C и D, изъ которыхъ каждыя три не лежатъ на одной прямой. Черезъ точку A провести прямую такъ, чтобы ея разстояніе отъ точки B было равно суммѣ разстояній искомой прямой отъ точекъ C и D.

2297. Къ кругу провести касательную такъ, чтобы разстояніе ея отъ двухъ данныхъ точекъ было равно данной суммѣ.

2298. Въ данный кругъ вписать треугольникъ, одна изъ сторонъ котораго была бы равна и параллельна данному отрѣзку, а равнодѣлящая противоположнаго угла проходила бы черезъ данную точку.

2299. Раздѣлить дугу круга на двѣ такихъ части, хорды которыхъ находились бы въ данномъ отношеніи.

2300. Черезъ двѣ данныя точки провести окружность, пересѣкающую данную окружность такъ, чтобы общая хорда была касательною къ другой данной окружности.

2301. Даны кругъ и три точки A, B и C. Черезъ A и B провести прямыя, пересѣкающія окружность такъ, чтобы хорды пересѣченія ZX и UY прошли черезъ C.

Задачи Аполлонія.

2302. Провести окружность, касающуюся данной прямой и проходящую черезъ 2 данныя точки.

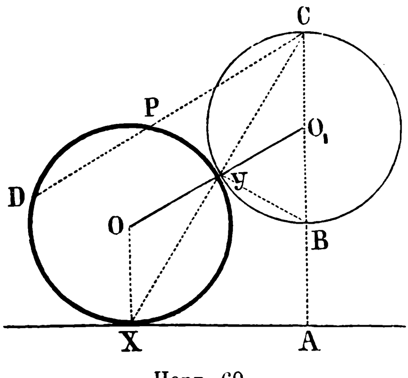
Рѣшеніе. Проводимъ черезъ двѣ точки какой-нибудь кругъ и прямую, пересѣкающую данную прямую въ точкѣ C; изъ C проводимъ касательную CE къ кругу и откладываемъ CD = CE на данной прямой; тогда точка D этой прямой и будетъ точкой прикосновенія искомаго круга къ данной касательной.

2303. Провести окружность, касающуюся даннаго круга и проходящую черезъ двѣ данныя точки, лежащія внѣ этого круга.

Рѣшеніе. Проведемъ какую-нибудь окружность, проходящую черезъ двѣ данныя точки A и B и пересѣкающую данный кругъ въ точкахъ E и F; продолжая прямыя AB и EF до точки ихъ пересѣченія D, проводимъ касательную DC къ данному кругу, которая и будетъ общей касательной къ данному и искомымъ кругамъ.

2304. Построить кругъ, проходящій черезъ данную точку, касающійся данной прямой и данной окружности.

Анализъ. Искомый кругъ O касается круга O_1 въ точкѣ Y, данной прямой AX въ точкѣ X, и проходитъ чрезъ данную точку P. Опускаемъ изъ O_1 перпендикуляръ O_1A, который пересѣчетъ данную окружность въ точкахъ B и C. Соединяемъ C и P; прямая CP пересѣчетъ искомую окружность въ точкѣ D. Проведя линію центровъ OO_1, которая пройдетъ черезъ Y, соединяя Y съ C и X, получимъ два равнобедренныхъ треугольника YOX и CO_1Y; углы XOY и CO_1Y между собою равны, какъ накрестъ лежащіе, а потому



Черт. 69.

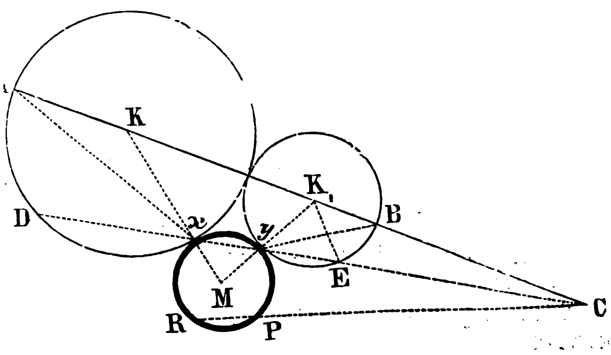
$\measuredangle OYX = \measuredangle CYO_1$ и линія XYC прямая; $\measuredangle CYB$—прямой, а потому и $\measuredangle XYB$ также прямой; $\measuredangle XYB + \measuredangle XAB = 2d$ и четыреугольникъ XYBA—вписанный, а потому $CX.CY = CA.CB$; но $CX.CY = CD.CP$, а потому $CA.CB = CD.CP$, т.-е. точки A, B, P и D лежать на одной окружности. Слѣд., окружность, проходящая черезъ A, B и P, пересѣчетъ продолженіе CP въ точкѣ D; искомая окружность должна проходить черезъ двѣ точки D и P и касаться прямой AX.

2305. Провести окружность, касающуюся двухъ данныхъ прямыхъ и проходящую черезъ данную точку.

Анализъ. Центръ O лежитъ на равнодѣлящей AO угла между прямыми AB и AK; если соединимъ данную точку P съ вершиною угла A прямою PA и изъ какой-нибудь точки C прямой AP проведемъ линію $CD \parallel OP$, которая пересѣчетъ AO въ точкѣ D; тогда, опустивъ перпендикуляръ DE на AB, получимъ $DE : Ox = AD : AO = CD : PO$, гдѣ Ox—радіусъ искомаго круга, идущаго въ точку прикосновенія его съ прямою AB; т. к. $Ox = PO$, то $DE = CD$. Отсюда слѣдуетъ такое построеніе: изъ произвольной точки E прямой AB возставимъ перпендикуляръ DE, пересѣкающій равнодѣлящую угла BAK въ точкѣ D; изъ D описываемъ окружность радіусомъ DE, пересѣкающую прямую PA въ точкѣ C; прямая PO, параллельная CD, пересѣчетъ равнодѣлящую въ O—центрѣ искомаго круга (два рѣшенія).

2306. Провести окружность, проходящую черезъ данную точку и касающуюся двухъ данныхъ окружностей.

Анализъ. Пусть M—центръ искомаго круга (черт. 70), который проходитъ черезъ данную точку P и касается данныхъ круговъ, центры которыхъ K и K_1, въ точкахъ x и y. Проведемъ линію центровъ KK_1, которая пересѣчетъ окружности въ точкахъ A и B; продолжимъ линію xy, пересѣкающую окружности въ точкахъ D и E, до пересѣченія съ линіей центровъ KK_1 въ точкѣ C.



Черт. 70.

Соединяемъ K съ D и M, также K_1 съ E и M. Тогда $\sphericalangle KxD = \sphericalangle Mxy = \sphericalangle xyM = \sphericalangle K_1Ey$; слѣд., $Kx \parallel K_1E$, также $KD \parallel K_1y$. А потому положеніе точки C на линіи центровъ опредѣляется изъ такой пропорціи: $Kx:K_1E=KC:K_1C$, откуда $\frac{KC-K_1C}{K_1C}=$ $=\frac{Kx-K_1E}{K_1E}$ или $\frac{KK_1}{K_1C}=\frac{R-r}{r}$. Соединяемъ A съ x и B съ y; легко видѣть, что сумма $\sphericalangle Axy+\sphericalangle ABy=2d$; слѣд., четыреугольникъ AxyB вписанный и $CB.CA=Cy.Cx=CP.CR$; а потому точки A, B, P и R также лежатъ на окружности, и проведя окружность чрезъ точки A, B, P, получимъ точку R, чрезъ которую проходитъ искомая окружность; тогда остается провести окружность, проходящую черезъ двѣ точки R и P и касающуюся данной окружности.

2307. Провести окружность, касающуюся двухъ данныхъ прямыхъ и данной окружности.

Анализъ. Пусть M — центръ искомой окружности, касающейся первой прямой въ точкѣ x, а второй въ точкѣ y, даннаго круга въ точкѣ z; пусть центръ даннаго круга K; описываемъ около M радіусомъ MK кругъ и проведемъ касательныя къ этому кругу, параллельныя даннымъ прямымъ; положеніе этихъ касательныхъ будетъ опредѣлено, ибо ихъ разстояніе отъ данныхъ линій равно радіусу даннаго круга; тогда задача приведется къ проведенію круга, окружность котораго касается двухъ прямыхъ и проходитъ черезъ данную точку.

2308. Провести окружность, касающуюся двухъ данныхъ круговъ и прямой.

Анализъ. Пусть K и K_1 центры двухъ данныхъ круговъ, R и r—ихъ радіусы, пусть $R>r$; данная прямая—L; центръ искомаго круга M; этотъ послѣдній касается прямой L въ точкѣ x, круга K—въ точкѣ y и круга K_1—въ точкѣ z. Около M описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ MK_1, которая пересѣчетъ MK въ точкѣ A; къ этой окружности проводимъ касательную L_1, параллельную L; положеніе L_1 опредѣлено данными задачи: она параллельна L и находится въ разстояніи r отъ нея. Около K описываемъ другую окружность радіусомъ $KA=R-r$; задача приведется къ проведенію окружности, касающейся данной прямой L_1, данной окружности (радіуса $R-r$) и проходящей черезъ данную точку K_1.

2309. Провести окружность, касающуюся трехъ данныхъ круговъ.

Анализъ. Центры данныхъ круговъ—K, K_1 и K_2, ихъ радіусы r, r_1 и r_2, при чемъ $r>r_1>r_2$; центръ искомой окружности M; точки прикосновенія ея съ данными окружностями—x, y и z. Описываемъ около M кругъ радіусомъ MK_2, который пересѣчетъ MK въ A и MK_1 въ B; тогда $AK=r-r_2$ и $BK_1=r_1-r_2$. Описываемъ около K кругъ радіусомъ AK и около K_1 кругъ радіусомъ BK_1. Тогда первый проведенный нами кругъ коснется двухъ послѣднихъ и пройдетъ черезъ точку K_2 и т. д.

2310. Построить кругъ, касающійся данной прямой, центръ котораго находится на данной линіи и окружность котораго проходитъ черезъ данную точку.

2311. На данной прямой найти центръ окружности, проходящей черезъ данную точку и касающейся данной окружности.

2312. Построить кругъ, касающійся данной прямой и данной окружности и центръ котораго лежитъ на данной прямой.

2313. Построить кругъ, касающійся двухъ данныхъ круговъ и центръ котораго лежитъ на данной прямой.

2314. Черезъ двѣ точки провести окружность, дѣлящую окружность даннаго круга пополамъ.

2315. Черезъ двѣ точки провести окружность, имѣющую съ данной окружностію общую данной длины хорду.

2316. Черезъ двѣ точки провести окружность, которая отъ данной прямой отсѣкаетъ хорду данной длины.

2317. Построить окружность, проходящую черезъ данную точку и дѣлящую двѣ данныя окружности пополамъ.

2318. Построить окружность, дѣлящую три данные круга пополамъ.

2319. Черезъ двѣ точки провести окружность, пересѣкающую данный кругъ подъ прямымъ угломъ.

2320. Построить окружность, пересѣкающую три данные круга подъ прямымъ угломъ.

2321. Построить окружность, проходящую черезъ данную точку и пересѣкающую два данные круга подъ прямымъ угломъ.

2322. Построить кругъ, котораго окружность проходитъ черезъ данную точку и который дѣлится окружностями двухъ данныхъ круговъ пополамъ.

2323. Построить кругъ, котораго окружность проходитъ черезъ данную точку и который однимъ даннымъ кругомъ дѣлится пополамъ, а другимъ пересѣкается подъ прямымъ угломъ.

2324. Построить кругъ, который коснется данной прямой въ данной точкѣ и дѣлитъ данный кругъ пополамъ.

2325. Построить кругъ, который коснется даннаго круга въ данной точкѣ и дѣлитъ другой данный кругъ пополамъ.

2326. Построить кругъ, пересѣкающій два данные круга подъ прямымъ угломъ и дѣлящій третій данный кругъ пополамъ.

2327. Даны кругъ и касательная къ нему; построить другой кругъ такъ, чтобы онъ 1) касался данной касательной; 2) чтобы центръ его лежалъ на окружности даннаго круга; 3) чтобы окружность искомаго круга проходила черезъ конецъ діаметра даннаго круга, другой конецъ котораго проходитъ черезъ точку прикосновенія данной касательной.

ГЛАВА XV.

Смѣшанныя задачи. Вписанныя и описанныя фигуры. Задачи на maximum и minimum.

2328. Даны двѣ точки и прямая; найти на прямой такую точку, чтобы сумма разстояній ея отъ двухъ данныхъ точекъ была равна данной длинѣ.

Анализъ. Данная прямая—L, данныя точки—A и B, искомая точка x и данная сумма S; тогда $Ax+Bx=S$; откладывая на продолженіе Ax отъ x отрѣзокъ $xC=Bx$, найдемъ, что $AC=S$; искомая точка x прямой L будетъ служить центромъ круга, окружность котораго проходитъ черезъ точку B и касается круга радіуса S съ центромъ въ точкѣ A.

2329. На прямой линіи найти точку, разность разстояній которой отъ двухъ данныхъ точекъ имѣетъ данную длину.

2330. На прямой линіи найти точку, сумма разстояній которой отъ данной прямой и отъ данной точки равна данной длинѣ.

Анализъ. Первая прямая L, искомая точка на ней—x, другая прямая L_1 и данная точка A, опускаемъ перпендикуляръ xB на L_1 и на продолженіи его откладываемъ $BC=xA$; получимъ xC=данной длинѣ, проведемъ черезъ C прямую L_2, параллельно L_1, тогда L_2—будетъ прямая, опредѣленная данными задачи, и x—есть центръ окружности, касающейся прямой L_2, проходящей черезъ точку A и имѣющей центръ на прямой L.

2331. На данной линіи найти точку, разность разстояній которой отъ данной точки и отъ данной прямой равна данной длинѣ.

2332. На прямой линіи опредѣлить точку, сумма разстояній которой отъ данной точки и отъ данной окружности равна данной длинѣ.

Анализъ. Описывая изъ центра данной окружности радіусомъ, равнымъ данной длинѣ, кругъ, приведемъ задачу къ отысканію на данной прямой центра окружности, проходящей черезъ данную точку и касательную къ данной окружности.

2333. На данной прямой найти точку, разность разстояній которой отъ данной точки и отъ данной окружности равна данной длинѣ.

2334. На прямой найти точку, сумма разстояній которой отъ двухъ данныхъ окружностей равна данной длинѣ.

2335. На прямой найти точку, разность разстояній которой отъ двухъ данныхъ окружностей равна данной длинѣ.

2336. Даны прямая, точка и окружность; на прямой найти такую точку, чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на разстояніи искомой точки отъ данной и на касательной, проведенной изъ искомой точки къ данной окружности, была равна данному квадрату.

2337. Дана прямая, точка и окружность; на прямой найти такую точку, чтобы разность квадратовъ, построенныхъ на разстояніи искомой точки до данной и на касательной, проведенной изъ искомой точки къ данной окружности, была равна данному квадрату.

На прямой линіи найти такую точку,

2338—чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на касательныхъ, проведенныхъ изъ искомой точки къ двумъ даннымъ окружностямъ, была равна данному квадрату;

2339—чтобы разность квадратовъ, построенныхъ на касательныхъ, проведенныхъ изъ искомой точки къ даннымъ окружностямъ, была равна данному квадрату.

2340. На сторонѣ треугольника найти такую точку, разстояніе которой отъ двухъ другихъ сторонъ треугольника находится въ данномъ отношеніи.

2341. Найти точку, разстоянія которой отъ трехъ данныхъ точекъ имѣютъ данное отношеніе.

2342. На прямой линіи найти такую точку, чтобы уголъ, образуемый двумя касательными, проведенными изъ данной точки къ данной окружности, былъ равенъ углу, образуемому двумя касательными, проведенными изъ той же точки къ другой данной окружности.

Указаніе. Если искомая точка x, центры данныхъ круговъ K и K_1 и радіусы r и r_1, то $Kx : K_1x = r : r_1$.

2343. Даны три равныхъ окружности; найти такую точку, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ даннымъ окружностямъ, были между собою равны.

2344. Найти такую точку, чтобы пары касательныхъ, проведенныхъ изъ нея къ тремъ даннымъ окружностямъ, образовали между собою равные углы.

2345. На двухъ сторонахъ треугольника даны два отрѣзка; найти на третьей сторонѣ того же треугольника такую точку, которая могла бы служить вершиною двухъ равновеликихъ треугольниковъ, имѣющихъ данные отрѣзки основаніями.

Указаніе. Разстоянія искомой точки отъ сторонъ треугольника обратно пропорціональны даннымъ отрѣзкамъ.

2346. На трехъ сторонахъ треугольника даны отрѣзки; найти точку, которая могла бы служить вершиною трехъ равновеликихъ треугольниковъ, имѣющихъ данные отрѣзки основаніями.

Даны два отрѣзка; найти такую точку, которая могла бы служить общею вершиною двухъ равновеликихъ треугольниковъ, имѣющихъ эти отрѣзки основаніями и

2347—чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на двухъ сторонахъ одного треугольника, равнялась суммѣ квадратовъ, построенныхъ на двухъ сторонахъ другого треугольника;

2348—чтобы разность квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ одного треугольника, равнялась разности квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ другого треугольника.

2349. На діаметрѣ круга дана точка; на продолженіи этого діаметра найти такую другую точку, разстояніе которой отъ данной точки находилось бы въ данномъ отношеніи къ касательной, проведенной изъ искомой точки къ окружности.

2350. На прямой дана точка; на той же прямой найти такую другую точку, разстояніе которой отъ данной точки находилось бы въ данномъ отношеніи къ касательной, проведенной изъ нея къ данной окружности.

2351. Между сторонами угла дана точка; между сторонами того же угла провести прямую, параллельную данной прямой, такъ, чтобы концы ея находились въ равномъ разстояніи отъ данной точки.

2352. На сторонѣ треугольника найти такую точку, чтобы прямоугольникъ, неравныя стороны котораго равны разстояніямъ этой точки до другихъ сторонъ треугольника, былъ равновеликъ данному прямоугольнику.

2353. На продолженіи одной изъ сторонъ треугольника опредѣлить такую точку, чтобы прямоугольникъ, неравныя стороны котораго равны разстояніямъ искомой точки отъ двухъ другихъ сторонъ треугольника, былъ равновеликъ данному прямоугольнику.

2354. На сторонѣ треугольника или на ея продолженіи опредѣлить такую точку, чтобы прямоугольникъ, имѣющій неравными сторонами отрѣзки прямыхъ, проведенныхъ изъ этой точки параллельно двумъ другимъ сторонамъ до пересѣченія ихъ съ сторонами треугольника, былъ равновеликъ данному прямоугольнику.

2355. На сторонѣ треугольника опредѣлить такую точку, чтобы прямоугольникъ, имѣющій сторонами отрѣзокъ 1 стороны, лежащей между искомой точкой и 2 стороною, и отрѣзокъ прямой, параллельной 2 сторонѣ, между искомой точкою и третьей стороной треугольника, былъ равновеликъ данному прямоугольнику.

2356. Двѣ стороны треугольника пересѣчены прямой, параллельной третьей сторонѣ; на этой прямой найти такую точку, чтобы разстояніе ея отъ третьей стороны треугольника было среднимъ пропорціональнымъ между разстояніями той же точки отъ двухъ другихъ сторонъ.

2357. Рѣшить ту же задачу, предполагая, что параллельная прямая проходитъ черезъ вершину треугольника.

2358. На дугѣ круга, стягиваемой хордой AB, найти такую точку x, чтобы $Ax : Bx = m : n$.

2359. Данъ кругъ, центръ котораго K, и внутри его точка P; черезъ точку P провести хорду xy такъ, чтобы $Px : Py = m : n$.

Анализъ. Проведя $Zy \parallel Kx$ до пересѣченія съ KP, получимъ $KP : PZ = m : n$; Zy опредѣляется изъ пропорціи $r : Zy = m : n$.

2360. Данъ кругъ, центръ котораго K, хорда этого круга AB и точка P на окружности круга. Провести черезъ P хорду Px, пересѣкающую AB въ y и окружность въ x такъ, чтобы $Py : xy = m : n$.

2361. Данъ кругъ, центръ котораго K, и точка P внѣ этого круга; провести черезъ точку P сѣкущую такъ, чтобы часть сѣкущей, лежащей внутри круга, была бы въ данномъ отношеніи съ частію ея, лежащей внѣ круга.

2362. Даны два круга и точка P между окружностями этихъ круговъ. Провести черезъ точку P отрѣзокъ, ограниченный окружностями данныхъ круговъ, такъ, чтобы онъ дѣлился въ точкѣ P въ данномъ отношеніи.

2363. Между окружностями двухъ концентрическихъ круговъ дана точка P; черезъ P провести отрѣзокъ, ограниченный окружностями данныхъ круговъ, такъ, чтобы онъ въ точкѣ P дѣлился въ данномъ отношеніи.

2364. Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей провести прямую такъ, чтобы часть ея, лежащая внутри окружности одного круга, дѣлилась окружностью другого круга въ данномъ отношеніи.

2265. Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей провести прямую такъ, чтобы части ея, составляющія хорды данныхъ окружностей, были бы въ данномъ отношеніи.

2366. Двѣ стороны треугольника пересѣчь прямою, параллельной третьей сторонѣ, такъ, чтобы площадь прямоугольника, неравныя стороны котораго равны отрѣзкамъ сторонъ треугольника, лежащимъ между параллельными линіями, была равна площади даннаго квадрата.

2367. Двѣ стороны треугольника, или ихъ продолженія, пересѣчь прямою, параллельною третьей сторонѣ, такъ, чтобы сумма или разность квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ сторонъ, лежащихъ между параллельными линіями, была равна площади даннаго квадрата.

2368. Двѣ стороны треугольника, или ихъ продолженія, пересѣчь прямою, параллельною третьей сторонѣ, такъ, чтобы квадратъ, построенный на отрѣзкѣ сѣкущей, лежащемъ между сторонами треугольника, былъ равновеликъ площади прямоугольника, стороны котораго были бы равны отрѣзкамъ сторонъ треугольника, лежащимъ между параллельными линіями.

2369. Двѣ стороны треугольника, или ихъ продолженія, пересѣчь прямою, параллельною третьей сторонѣ треугольника, такъ, чтобы квадратъ, построенный на отрѣзкѣ сѣкущей, лежащемъ между сторонами, былъ равновеликъ суммѣ или разности квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ сторонъ треугольника, лежащихъ между параллельными прямыми.

2370. Двѣ стороны треугольника пересѣчь прямою, параллельною третьей сторонѣ треугольника, такъ, чтобы прямоугольникъ, стороны котораго равны отрѣзкамъ сторонъ, лежащимъ между параллельными прямыми, былъ равновеликъ прямоугольнику, стороны котораго равны другимъ отсѣкаемымъ параллельною прямой отрѣзкамъ сторонъ треугольника.

2371. Черезъ данную точку провести прямую, пересѣкающую двѣ параллельныя линіи, такъ, чтобы прямоугольникъ, имѣющій сторонами отрѣзки прямой между точкою и параллельными, былъ равновеликъ площади даннаго прямоугольника.

2372. Черезъ данную точку провести прямую, пересѣкающую двѣ параллельныя прямыя, такъ, чтобы сумма или разность квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ сѣкущей, образуемыхъ параллельными линіями, была равна данному квадрату.

2373. Черезъ точку, лежащую внутри круга, провести хорду такъ, чтобы сумма или разность квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ хорды, равнялась данному квадрату.

Черезъ точку, лежащую внѣ круга, провести сѣкущую такъ:

2374—чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ сѣкущей (всей сѣкущей и внѣшней ея части), была равновелика данному квадрату;

2375—чтобы разность квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ сѣкущей, была равновелика данному квадрату;

2376—чтобы прямоугольникъ, стороны котораго равны внѣшней и внутренней части сѣкущей, былъ равновеликъ данному квадрату.

2377. Черезъ вершину угла треугольника провести прямую, пересѣкающую третью сторону, такъ, чтобы отрѣзокъ сѣкущей, лежащій внутри треугольника, былъ бы среднею пропорціональною величиною между отрѣзками третьей стороны.

Анализъ. Данный треугольникъ ABC, искомая линія—AD; продолжаемъ AD по другую сторону BC такъ, чтобы AD=DE; тогда $AD^2 = AD \cdot DE = BD \cdot DC$, т.-е. точка E и вершины треугольника лежатъ на окружности; задача приводится къ проведенію въ этой окружности линіи AE, дѣлящейся хордою BC пополамъ.

2378. Изъ конца діаметра круга проведена касательная къ окружности; провести изъ другого конца того же діаметра прямую, пересѣкающую окружность и касательную такъ, чтобы прямоугольникъ, имѣющій сторонами отрѣзки этой прямой, былъ равновеликъ данному прямоугольнику.

2379. Въ окружности дано положеніе двухъ радіусовъ; провести къ той же окружности хорду такъ, чтобы она данными радіусами дѣлилась на три равныя части.

2380. На продолженіи діаметра круга возставленъ къ нему перпендикуляръ; черезъ противоположный конецъ діаметра провести прямую такъ, чтобы часть ея, лежащая между окружностью и перпендикуляромъ, имѣла данную длину.

2381. Данъ уголъ и точка внѣ его; провести черезъ точку прямую, пересѣкающую стороны угла, такъ, чтобы прямоугольникъ, имѣющій сторонами отрѣзки, лежащіе между точкою и сторонами угла, былъ равновеликъ данному прямоугольнику.

Даны три точки; провести черезъ одну изъ нихъ прямую такъ,

2382—чтобы перпендикуляры, опущенные на нее изъ двухъ другихъ точекъ, находились въ данномъ отношеніи;

2383—чтобы отрѣзки ея, лежащіе между данной точкой и основаніями перпендикуляровъ, опущенныхъ на нее изъ двухъ другихъ точекъ, находились въ данномъ отношеніи;

2384—чтобы прямоугольникъ, имѣющій сторонами отрѣзки прямой между данной точкой и основаніями перпендикуляровъ, былъ равновеликъ данному прямоугольнику;

2385—чтобы прямоугольникъ, стороны котораго равны перпендикулярамъ, опущеннымъ на нее изъ двухъ другихъ точекъ, былъ равновеликъ данному прямоугольнику;

2386—чтобы сумма или разность квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ прямой, лежащихъ между данной точкой и основаніями перпендикуляровъ, опущенныхъ на нее изъ двухъ другихъ точекъ, была равновелика данному квадрату;

2387—чтобы сумма или разность квадратовъ, построенныхъ на перпендикулярахъ, опущенныхъ на нее изъ двухъ другихъ точекъ, была равновелика данному квадрату.

Даны двѣ точки и окружность; черезъ одну изъ этихъ точекъ провести прямую такъ:

2388—чтобы перпендикуляръ, опущенный на нее изъ другой точки, и касательная къ данной окружности, проведенная перпендикулярно къ искомой прямой, находились въ данномъ отношеніи между собою;

2389—чтобы прямоугольникъ, имѣющій сторонами перпендикуляръ, опущенный изъ другой точки, и касательную къ данной окружности, проведенную перпендикулярно къ искомой прямой, былъ равновеликъ площади даннаго прямоугольника;

2390—чтобы сумма или разность квадратовъ, построенныхъ на перпендикулярѣ и касательной, была равна данному квадрату.

Даны двѣ окружности и точка; черезъ точку провести прямую такъ:

2391—чтобы касательныя къ даннымъ окружностямъ, проведенныя перпендикулярно къ искомой прямой, находились въ данномъ отношеніи;

2392—чтобы прямоугольникъ, построенный на касательныхъ, проведенныхъ перпендикулярно къ искомой прямой, былъ равновеликъ данному прямоугольнику;

2393—чтобы сумма или разность квадратовъ, построенныхъ на тѣхъ же касательныхъ, была равновелика данному квадрату.

Въ кругѣ проведена хорда; черезъ концы ея провести двѣ другія хорды такъ:

2394—чтобы эти хорды находились въ данномъ отношеніи;

2395—чтобы прямоугольникъ, стороны котораго равны этимъ хордамъ, былъ равновеликъ данному прямоугольнику;

2396—чтобы сумма или разность квадратовъ, построенныхъ на этихъ хордахъ, была равновелика данному квадрату.

Примѣчаніе. Описать треугольникъ около даннаго треугольника значитъ построить треугольникъ, стороны котораго проходили бы черезъ вершины даннаго треугольника.

2397. Около даннаго треугольника описать треугольникъ, одна сторона котораго была бы параллельна данной прямой, высота, соотвѣтствующая этой сторонѣ, была бы равна данной длинѣ, а уголъ, лежащій противъ той же стороны, равнялся бы данному углу.

Рѣшеніе. Если ABC данный треугольникъ, то прямая, проходящая черезъ A параллельно данной прямой, опредѣляетъ положеніе основанія; прямая, параллельная ей и проведенная на разстояніи данной высоты,—геом. мѣсто вершины, а дуга, имѣющая хордою BC и вмѣщающая уголъ A,—другое геом. мѣсто той же вершины и т. д.

Около даннаго треугольника описать другой, если дано:

2398—углы и положеніе какой-нибудь точки на высотѣ искомаго треугольника;

2399—два угла и сторона искомаго тр-ка;

2400—три стороны искомаго тр-ка;

2401—два угла и разность отрѣзковъ, образуемыхъ вершиной даннаго на сторонѣ искомаго тр-ка;

2402—два угла и площадь прямоугольника, имѣющаго сторонами отрѣзки, образуемые вершиною даннаго на одной сторонѣ искомаго;

2403—два угла и разность или сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на тѣхъ же отрѣзкахъ искомаго.

Около даннаго треугольника описать другой такъ:

2404—чтобы двѣ стороны искомаго были равны данной длинѣ, при чемъ одна изъ этихъ сторонъ должна быть параллельна сторонѣ даннаго;

2405—чтобы одна изъ сторонъ искомаго треугольника имѣла данную длину и была бы параллельна сторонѣ даннаго треугольника и чтобы средняя линія, соотвѣтствующая той же сторонѣ искомаго треугольника, была параллельна данной прямой;

2406—чтобы одна изъ сторонъ искомаго и соотвѣтствующая ей средняя линія имѣли данную длину, и чтобы данная сторона была параллельна одной изъ сторонъ даннаго треугольника;

2407—чтобы одна изъ сторонъ a и высота h_b, соотвѣтствующая другой сторонѣ, имѣли данную длину, и чтобы эта послѣдняя сторона (b) была параллельна данной прямой.

Около даннаго треугольника описать другой, въ которомъ даны:

2408—двѣ его высоты, при чемъ одна сторона, соотвѣтствующая одной изъ этихъ высотъ, должна быть параллельна одной изъ сторонъ даннаго треугольника;

2409—сторона и противолежащій ей уголъ, при чемъ данная сторона должна быть параллельна одной изъ сторонъ даннаго треугольника;

2410—сторона и разность прилежащихъ угловъ, при чемъ данная сторона должна быть параллельна одной изъ сторонъ даннаго треугольника;

2411—высота и разность угловъ при основаніи, при чемъ основаніе должно быть параллельно одной изъ сторонъ даннаго треугольника;

2412—сторона и сумма двухъ другихъ сторонъ, при чемъ данная сторона должна быть параллельна одной изъ сторонъ даннаго треугольника;

2413—высота, опущенная на основаніе искомаго треугольника, сумма или разность двухъ другихъ сторонъ, при чемъ основаніе должно быть параллельно одной изъ сторонъ даннаго треугольника;

2414—сторона и радіусъ описаннаго круга, при чемъ данная сторона должна быть параллельна одной изъ сторонъ даннаго треугольника;

2415—высота и радіусъ описаннаго круга, при чемъ сторона, на которую опущена высота, должна быть параллельна сторонѣ даннаго треугольника;

2416—сторона, разность или сумма квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, при чемъ одна изъ сторонъ должна быть параллельна одной изъ сторонъ даннаго треугольника.

Примѣчаніе. Около треугольника описать параллелограммъ значитъ построить такой параллелограммъ, одна вершина котораго совпадала бы съ вершиною даннаго треугольника, а двѣ стороны, не прилежащія къ этой вершинѣ, проходили бы черезъ двѣ другія вершины треугольника.

2417. Около даннаго треугольника описать ромбъ, уголъ котораго равенъ данному углу.

2418. Около даннаго треугольника описать квадратъ.

2419. Около даннаго треугольника описать прямоугольникъ, имѣющій данный периметръ.

2420. Около даннаго треугольника описать прямоугольникъ, разность неравныхъ сторонъ котораго равна данному отрѣзку.

2421. Около даннаго треугольника описать прямоугольникъ, имѣющій данную площадь.

Около даннаго треугольника описать параллелограммъ, если въ послѣднемъ извѣстны:

2422—уголъ и периметръ;

2423—уголъ и разность неравныхъ сторонъ;

2424—уголъ и отношеніе неравныхъ сторонъ;

2425—уголъ и площадь.

Около даннаго треугольника описать прямоугольникъ, если въ послѣднемъ даны:

2426—одна сторона;

2427—діагональ;

2428—разность квадратовъ неравныхъ сторонъ.

2429. Около даннаго треугольника описать ромбъ, въ которомъ дано отношеніе діагоналей.

Около даннаго треугольника описать параллелограммъ, въ которомъ дано:

2430—отношеніе діагоналей и уголъ между ними;

2431—уголъ и сумма или разность квадратовъ сторонъ.

Примѣчаніе. Вписать въ треугольникъ другой треугольникъ значитъ построить другой треугольникъ такъ, чтобы вершины его лежали на сторонахъ даннаго.

Въ данный треугольникъ вписать другой, въ которомъ извѣстны:

2432—длина двухъ сторонъ и направленіе одной изъ нихъ;

2433—сторона, соотвѣтствующая ей высота и направленіе стороны;

2434—сторона, ея направленіе и уголъ, лежащій противъ нея;

2435—сторона, ея направленіе и средняя линія, соотвѣтствующая данной сторонѣ;

2436—сторона, ея направленіе и высота, соотвѣтствующая данной сторонѣ;

2437—сторона, ея направленіе и средняя линія, соотвѣтствующая одной изъ двухъ другихъ сторонъ;

2438—сторона, ея направленіе и отношеніе двухъ другихъ сторонъ;

2439—сторона, ея направленіе и сумма или разность квадратовъ двухъ другихъ сторонъ;

2440—сторона, ея направленіе и площадь треугольника;

2441—сторона, ея направленіе и сумма или разность двухъ другихъ сторонъ.

2442. Въ равнобедренный треугольникъ вписать другой равнобедренный же, въ которомъ дана одна сторона.

2443. Въ данный треугольникъ вписать другой, подобный третьему треугольнику, такъ чтобы одна изъ вершинъ второго была бы въ данной точкѣ стороны перваго треугольника.

2444. Въ равносторонній треугольникъ вписать другой равносторонній, одна изъ вершинъ котораго лежала бы въ данной точкѣ стороны перваго треугольника.

2445. Въ данный треугольникъ вписать другой, стороны котораго были бы перпендикулярны сторонамъ даннаго.

Примѣчаніе. Вписать въ данный треугольникъ четыреугольникъ значитъ построить четыреугольникъ такъ, чтобы на одной сторонѣ треугольника лежали бы двѣ вершины четыреугольника, а на каждой изъ остальныхъ двухъ сторонъ треугольника лежали бы по одной вершинѣ искомаго четыреугольника.

2446. Въ треугольникъ вписать четыреугольникъ, подобный данному.

2447. Въ треугольникъ вписать квадратъ.

2448. Въ треугольникъ вписать ромбъ, уголъ котораго равенъ данному углу.

2449. Въ треугольникъ вписать прямоугольникъ, неравныя стороны котораго находятся въ данномъ отношеніи.

2450. Въ треугольникъ вписать параллелограммъ, въ которомъ извѣстны уголъ и отношеніе двухъ сторонъ.

2451. Въ треугольникъ вписать прямоугольникъ такъ, чтобы одна изъ его діагоналей была параллельна сторонѣ треугольника.

2452. Въ треугольникъ вписать параллелограммъ, уголъ котораго извѣстенъ, такъ, чтобы одна изъ его діагоналей была параллельна сторонѣ треугольника.

2453. Въ треугольникъ вписать ромбъ такъ, чтобы діагональ его была параллельна сторонѣ треугольника.

2454. Въ треугольникъ вписать прямоугольникъ такъ, чтобы діагональ его была параллельна данной прямой.

2455. Въ треугольникъ вписать параллелограммъ, уголъ котораго извѣстенъ, такъ, чтобы діагональ его была параллельна данной сторонѣ.

2456. Въ треугольникъ вписать ромбъ такъ, чтобы діагональ его была параллельна данной прямой.

2457. Въ треугольникъ вписать ромбъ, въ которомъ дано отношеніе діагоналей.

2458. Въ треугольникъ вписать параллелограммъ, если извѣстно отношеніе діагоналей и уголъ между ними.

Въ треугольникъ вписать прямоугольникъ, если дано:

2459—діагональ прямоугольника;

2460—разность неравныхъ сторонъ прямоугольника;

2461—площадь прямоугольника;

2462—разность квадратовъ неравныхъ сторонъ;

2463—сумма діагонали и данной стороны;

2464—разность діагонали и данной стороны.

Въ треугольникъ вписать параллелограммъ, имѣющій съ треугольникомъ общій уголъ, если, кромѣ того, извѣстны:

2465—периметръ параллелограмма;

2466—разность сторонъ параллелограмма;

2467—площадь параллелограмма;

2468—разность квадратовъ сторонъ параллелограмма.

Въ треугольникъ вписать параллелограммъ, въ которомъ извѣстны:

2469—уголъ и периметръ;

2470—уголъ и разность сторонъ;

2471—уголъ и площадь;

2472—уголъ и разность квадратовъ обѣихъ сторонъ.

Въ кругъ вписать:

2473—квадратъ;

2474—правильный шестиугольникъ;

2475—правильный десятиугольникъ;

2476—правильный пятиугольникъ;

2477—правильный пятнадцатиугольникъ.

2478. Въ данный сегментъ круга вписать квадратъ такъ, чтобы двѣ вершины его лежали на хордѣ сегмента, а двѣ другія—на дугѣ.

2479. Въ данный сегментъ круга вписать прямоугольникъ, въ которомъ извѣстно отношеніе сторонъ.

2480. Въ секторъ круга вписать квадратъ такъ, чтобы двѣ вершины его лежали на дугѣ круга, а двѣ другія вершины—на радіусахъ сектора.

2481. Въ секторъ вписать прямоугольникъ, въ которомъ извѣстно отношеніе сторонъ.

2482. Вписать въ квадратъ другой квадратъ, сторона котораго дана.

2483. Пересѣчь стороны квадрата прямыми такъ, чтобы получился правильный восьмиугольникъ.

2484. Въ квадратъ вписать равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы онъ имѣлъ съ квадратомъ общую вершину, а двѣ другія вершины его лежали бы на сторонахъ, не прилежащихъ къ общей вершинѣ.

Около четыреугольника описать:

2485—ромбъ, уголъ котораго данъ;

2486—квадратъ;

2487—прямоугольникъ, въ которомъ извѣстенъ периметръ;

2488—параллелограммъ, если извѣстенъ уголъ его и разность обѣихъ сторонъ;

2489—прямоугольникъ, если извѣстно отношеніе его сторонъ;

2490—прямоугольникъ, если извѣстна его сторона;

2491—параллелограммъ, въ которомъ извѣстны сторона и уголъ;

2492—прямоугольникъ, если извѣстна его діагональ;

2493—ромбъ, въ которомъ извѣстно отношеніе діагоналей;

2494—параллелограммъ, въ которомъ извѣстны отношеніе діагоналей и уголъ между ними;

2495—параллелограммъ, въ которомъ извѣстны уголъ и сумма или разность квадратовъ сторонъ.

Около даннаго квадрата описать другой такъ, чтобы

2496—сторона послѣдняго равнялась данной длинѣ;

2497—каждая сторона вершиною даннаго квадрата дѣлилась въ данномъ отношеніи;

2498—разность отрѣзковъ, образуемыхъ вершинами даннаго квадрата на сторонахъ искомаго, была равна данной длинѣ;

2499—площадь прямоугольника, построеннаго изъ тѣхъ же отрѣзковъ стороны искомаго квадрата, была равна данной величинѣ;

2500—сумма квадратовъ отрѣзковъ стороны равнялась данному прямоугольнику.

2501. Даны три точки, лежащія на одной прямой; построить квадратъ такъ, чтобы одна изъ его вершинъ лежала въ одной изъ данныхъ точекъ, а стороны, не прилежащія къ этой вершинѣ (или ихъ продолженія), проходили черезъ двѣ другія точки.

2502. Даны три точки, лежащія на одной прямой; построить ромбъ, уголъ котораго равенъ данному углу, такъ, чтобы одна изъ вершинъ его лежала въ данной точкѣ, а двѣ другія стороны, не прилежащія къ этой вершинѣ, проходили черезъ двѣ другія точки.

Даны три точки, лежащія на одной прямой; построить четыреугольникъ такъ, чтобы одна изъ его вершинъ лежала въ одной изъ этихъ точекъ, а двѣ стороны, не прилежащія къ этой вершинѣ (или ихъ продолженія), проходили черезъ двѣ другія данныя точки, если этотъ четыреугольникъ:

2503—прямоугольникъ, въ которомъ дано отношеніе двухъ сторонъ;

2504—прямоугольникъ, въ которомъ даны или a) периметръ, или b) разность неравныхъ сторонъ, или c) площадь, или d) одна изъ сторонъ, или e) діагональ, или f) сумма или разность квадратовъ сторонъ;

2505—параллелограммъ, въ которомъ даны или a) уголъ между сторонами и отношеніе сторонъ, или b) уголъ и периметръ, или c) уголъ и разность сторонъ, или d) уголъ и площадь, или e) уголъ и сторона, или f) уголъ между діагоналями и ихъ отношеніе, или g) уголъ между сторонами и сумма или разность квадратовъ сторонъ.

2506. Построить квадратъ, котораго стороны (или ихъ продолженія) проходили бы черезъ четыре точки, расположенныя на одной прямой линіи.

На прямой даны четыре точки; построить четыреугольникъ такъ, чтобы стороны его (или ихъ продолженія) проходили черезъ эти точки, если этотъ четыреугольникъ:

2507—ромбъ, въ которомъ извѣстенъ уголъ или отношеніе діагоналей;

2508—прямоугольникъ, въ которомъ извѣстны: a) периметръ, или b) разность сторонъ, или c) площадь, или d) отношеніе сторонъ, или e) сторона, или f) діагональ, или g) разность квадратовъ сторонъ;

2509—параллелограммъ, въ которомъ извѣстны: a) уголъ и периметръ, или b) уголъ и разность сторонъ, или c) уголъ и площадь, или d) уголъ и отношеніе сторонъ, или e) одна сторона и уголъ, или f) отношеніе діагоналей и уголъ между ними, или g) уголъ и сумма или разность квадратовъ сторонъ.

Доказать:

2510. Изъ всѣхъ равновеликихъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковое основаніе, равнобедренный треугольникъ имѣетъ наименьшій периметръ.

2511. Изъ всѣхъ равновеликихъ треугольниковъ равносторонній имѣетъ наименьшій периметръ.

2512. Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковое основаніе и одинаковый периметръ, равнобедренный имѣетъ наибольшую площадь.

2513. Изъ всѣхъ треугольниковъ съ равными периметрами равносторонній имѣетъ наибольшую площадь.

2514. Изъ всѣхъ равновеликихъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковый уголъ при вершинѣ, равнобедренный имѣетъ наименьшее основаніе и наименьшій периметръ.

2515. Изъ всѣхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ круговой сегментъ и имѣющихъ общимъ основаніемъ хорду этого сегмента, равнобедренный имѣетъ и наибольшую площадь и наибольшій периметръ.

2516. Изъ всѣхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ, равносторонній имѣетъ и наибольшую площадь и наибольшій периметръ.

2517. Изъ всѣхъ одноименныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ, правильный многоугольникъ имѣетъ и наибольшую площадь и наибольшій периметръ.

2518. Изъ всѣхъ равновеликихъ одноименныхъ многоугольниковъ (съ одинаковымъ числомъ сторонъ) равносторонній имѣетъ наименьшій периметръ.

2519. Изъ всѣхъ одноименныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ одинаковый периметръ, равносторонній имѣетъ наибольшую площадь.

2520. Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ по двѣ соотвѣтственно равныхъ стороны, имѣетъ наибольшую площадь тотъ, въ которомъ уголъ между соотвѣтственно равными сторонами прямой.

2521. Изъ всѣхъ треугольниковъ, сумма двухъ сторонъ которыхъ имѣетъ одинаковую длину, наибольшую площадь имѣетъ прямоугольный равнобедренный треугольникъ.

2522. Изъ всѣхъ равновеликихъ четыреугольниковъ квадратъ имѣетъ наименьшую діагональ.

2523. Изъ всѣхъ n — угольниковъ съ вершинами на окружности, (n—1) сторонъ которыхъ имѣютъ данную длину, тотъ, вершины котораго лежатъ на полуокружности, описанной на n—ой сторонѣ, какъ на діаметрѣ, имѣетъ наибольшую площадь.

2524. Изъ всѣхъ многоугольниковъ, стороны которыхъ имѣютъ данную длину, вписанный имѣетъ наибольшую площадь.

2525. Изъ всѣхъ одноименныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ одинаковый периметръ, правильный имѣетъ наибольшую площадь.

2526. Изъ всѣхъ многоугольниковъ съ одинаковою площадью и опредѣленнымъ числомъ сторонъ правильный имѣетъ наименьшій периметръ.

2527. Изъ всѣхъ правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ, наибольшую площадь и наибольшій периметръ имѣетъ тотъ, число сторонъ котораго наибольшее.

2528. Изъ двухъ правильныхъ многоугольниковъ, описанныхъ около круга, наименьшую площадь и наименьшій периметръ имѣетъ тотъ, стороны котораго меньше.

2529. Изъ двухъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ одинаковый периметръ, наибольшую площадь имѣетъ тотъ, сторонъ у котораго больше.

2530. Изъ двухъ равновеликихъ правильныхъ многоугольниковъ наименьшій периметръ имѣетъ многоугольникъ съ наибольшимъ числомъ сторонъ.

2531. Кругъ изъ всѣхъ фигуръ съ одинаковымъ периметромъ имѣетъ наибольшую площадь и изъ всѣхъ равновеликихъ фигуръ наименьшій периметръ.

2532. На данной прямой найти точку, сумма разстояній которой отъ двухъ данныхъ точекъ была бы наименьшая.

2533. Даны прямая и двѣ точки, лежащія по разныя стороны прямой; найти на данной прямой точку, разность разстояній которой отъ двухъ данныхъ точекъ имѣетъ наибольшую длину.

На данной окружности найти точку, сумма разстояній которой отъ данныхъ точекъ имѣетъ:

2534—наибольшую длину;

2535—наименьшую длину.

2536. Даны три точки; найти такую четвертую точку, сумма разстояній которой отъ данныхъ точекъ имѣла бы наименьшую длину.

2537. Найти такую точку, сумма разстояній которой отъ двухъ данныхъ точекъ и отъ данной прямой имѣетъ наименьшую длину.

2538. На данной прямой или данной окружности найти такую точку, изъ которой данный отрѣзокъ былъ бы виденъ подъ наибольшимъ угломъ.

2539. На данной прямой найти такую точку, отношеніе разстояній которой отъ двухъ данныхъ точекъ было бы наименьшее или наибольшее.

2540. Въ данный квадратъ вписать прямоугольникъ съ наибольшею площадью.

2541. Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей провести прямую наибольшей длины, ограниченную окружностями.

2542. На данной прямой найти точку, сумма разстояній которой отъ данной точки и отъ данной прямой была бы наименьшая.

2543. Данную прямую раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ, была бы наименьшая.

2544. Изъ всѣхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ данный треугольникъ и имѣющихъ вершиною данную на сторонѣ точку, и противоположная сторона которыхъ параллельна той же сторонѣ даннаго треугольника, построить такой, который имѣлъ бы наибольшую площадь.

2545. Въ данный треугольникъ вписать параллелограммъ, имѣющій данный уголъ и наибольшую площадь.

Черезъ точку, лежащую внутри даннаго угла, провести прямую, пересѣкающую стороны угла такъ, чтобы отсѣкаемый ею треугольникъ имѣлъ:

2546—наименьшую площадь;

2547—наибольшій периметръ.

2548. Черезъ точку, данную внутри угла, провести прямую такъ, чтобы сумма отсѣкаемыхъ ею отрѣзковъ отъ сторонъ угла была бы наименьшая.

2549. Черезъ точку, лежащую на равнодѣлящей даннаго угла, провести прямую такъ, чтобы часть ея, лежащая между сторонами угла, имѣла наименьшую длину.

2550. Черезъ точку, лежащую внутри угла, провести прямую такъ, чтобы прямоугольникъ, имѣющій сторонами отрѣзки этой прямой (между точкой и сторонами угла), имѣлъ наименьшую площадь.

2551. Даны двѣ точки, лежащія на окружности; на той же окружности найти такую точку, чтобы прямоугольникъ, имѣющій сторонами разстояніе искомой точки отъ данныхъ точекъ, имѣлъ наибольшую площадь.

2552. На данномъ основаніи построить треугольникъ, имѣющій наибольшую площадь, и отношеніе двухъ сторонъ котораго имѣетъ данную величину.

2553. Изъ всѣхъ треугольниковъ, сумма двухъ сторонъ которыхъ и уголъ между ними имѣютъ данную величину, какой имѣетъ наибольшую площадь?

2554. Черезъ вершину угла, стороны котораго имѣютъ данную длину, провести прямую такъ, чтобы сумма проекцій на нее сторонъ угла имѣла наибольшую длину.

2555. Въ данный остроугольный треугольникъ вписать другой съ наименьшимъ периметромъ.

2556. На прямой линіи опредѣлить такую точку, чтобы сумма квадратовъ разстояній ея отъ двухъ данныхъ точекъ была наименьшая.

2557. Найти такую точку, чтобы сумма квадратовъ разстояній ея отъ трехъ данныхъ точекъ была наименьшая.

2558. Въ плоскости даннаго треугольника найти такую точку, чтобы произведеніе чиселъ, измѣряющихъ разстоянія ея отъ сторонъ треугольника, было наименьшее.

2559. Изъ всѣхъ четыреугольниковъ, вершины которыхъ лежатъ на четырехъ концентрическихъ окружностяхъ, построить такой, который имѣлъ бы наибольшую площадь.

2560. Раздѣлить площадь треугольника на двѣ части, находящіяся въ данномъ отношеніи, прямою наименьшей длины.

2561. Между продолженіями двухъ радіусовъ данной окружности провести къ ней касательную наименьшей длины.

2562. Между двумя касательными къ данной окружности провести третью касательную къ той же окружности наименьшей длины.

2563. Въ данный сегментъ вписать прямоугольникъ наибольшаго периметра.

2564. Около даннаго сегмента описать треугольникъ наименьшей площади.

2565. Въ данный сегментъ вписать прямоугольникъ наибольшей площади.

Различные пріемы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

А. О симметричныхъ фигурахъ.

I. Фигуры, симметричныя относительно точки.

Всякія двѣ точки, расположенныя на одной прямой въ равномъ разстояніи отъ одной точки на ней, называются точками **симметричными**. Такъ, если отрѣзокъ AA_1 дѣлится точкою M пополамъ, то отрѣзки MA и MA_1 равны между собою и расположены по разныя стороны точки M; точки A и A_1 называются **симметричными** относительно M, а точка M называется **центромъ симметріи**. Изъ этого опредѣленія симметричныхъ точекъ слѣдуетъ:

1. **Данной точкѣ можетъ соотвѣтствовать относительно одного центра только одна точка, ей симметричная.**

2. **Отрѣзокъ, соединяющій двѣ симметричныя точки, всегда проходитъ чрезъ центръ симметріи и дѣлится въ немъ пополамъ.**

3. **Каждой точкѣ плоскости относительно даннаго центра всегда можно найти точку, ей симметричную.**

Если возьмемъ на плоскости двѣ точки A и B и по отношенію къ какому-нибудь центру M найдемъ ему симметричныя точки A_1 и B_1, то прямыя A_1B_1 и AB называются симметричными прямыми по отношенію къ центру M. Изъ этого слѣдуетъ:

1. **Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ концамъ какого-нибудь отрѣзка, симметричны относительно середины этого отрѣзка,** ибо, проведя черезъ какую-нибудь точку перваго перпендикуляра и центръ симметріи прямую, мы найдемъ въ

пересѣченіи этой прямой со вторымъ перпендикуляромъ точку симметричную первой, и оба перпендикуляра будутъ опредѣляться двумя парами симметричныхъ точекъ.

2. **Двѣ параллельныя прямыя симметричны относительно любой точки прямой, параллельной имъ и проходящей въ равномъ отъ нихъ разстояніи.**

3. **Двѣ прямыя, симметричныя относительно одного центра, параллельны между собою.**

4. **Если двѣ симметричныя прямыя пересѣчь новой прямой, проходящей чрезъ центръ симметріи, то въ сѣченіи получимъ двѣ симметричныя точки.**

5. **Двѣ прямыя, проходящія чрезъ центръ симметріи, отсѣкаютъ отъ прямыхъ симметричныхъ относительно этого центра равные отрѣзки,** или отрѣзокъ AB равенъ отрѣзку A_1B_1, если A симметрична A_1 и B симметрична B_1, относительно центра симметріи.

6. **Если двѣ прямыя пересѣкаются, то и симметричныя имъ прямыя также пересѣкаются, образуя углы, равные угламъ, образованнымъ первыми прямыми.**

Если имѣемъ треугольникъ ABC и найдемъ точки A_1, B_1, C_1, соотвѣтственно симметричныя вершинамъ перваго треугольника, то треугольникъ $A_1B_1C_1$ симметриченъ треугольнику ABC и равенъ ему, ибо стороны такихъ треугольниковъ соотвѣтственно равны между собою. Вообще, если имѣемъ двѣ группы точекъ, соотвѣтственно симметричныхъ относительно одного центра, то многоугольникъ, вершинами котораго служатъ точки одной группы, симметриченъ многоугольнику, вершинами котораго служатъ точки второй группы; стороны и углы такихъ многоугольниковъ, на основаніи указанныхъ выше свойствъ симметричныхъ прямыхъ, соотвѣтственно равны между собою. Два симметричныхъ многоугольника можно разсматривать, какъ одинъ геометрическій образъ, или одну фигуру, и такую фигуру называютъ центральной, или имѣющей центръ. Также нѣкоторыя фигуры можно разсматривать, какъ фигуры, составленныя изъ частей, симметричныхъ относительно одной точки, называемой центромъ симметріи. Примѣромъ послѣднихъ могутъ служить: параллелограммъ, прямоугольникъ, ромбъ, квадратъ и окружность круга; центромъ симметріи первыхъ четырехъ фигуръ служитъ точка пересѣченія діагоналей, а для окружности—центръ круга.

Многія свойства геометрическихъ фигуръ легко доказываются на основаніи свойствъ симметричныхъ прямыхъ, напримѣръ:

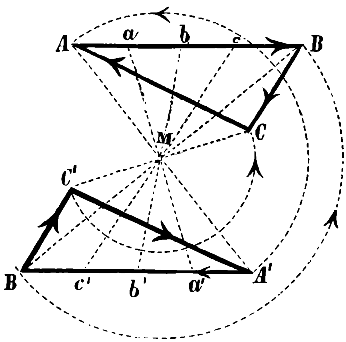
Прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія діагоналей параллелограмма, пересѣкаетъ противоположныя стороны его, образуя съ ними соотвѣтственно равные углы, и отрѣзокъ ея между точками пересѣченія со сторонами дѣлится первой точкой пополамъ, потому что точки пересѣченія суть симметричныя точки.

Линія, соединяющая середины непараллельныхъ сторонъ трапеціи, параллельна основаніямъ, ибо эта линія есть геометрическое мѣсто центровъ симметріи основаній трапеціи.

Какъ на особенность симметричныхъ фигуръ слѣдуетъ обратить вниманіе на расположеніе соотвѣтственныхъ элементовъ этихъ фигуръ. Возьмемъ треугольникъ ABC и треугольникъ $A_1B_1C_1$, симметричный ему относительно одного центра M; оба треугольника равны, ибо всѣ его элементы равны, но расположеніе соотвѣтственныхъ элементовъ не одинаково. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что по сторонѣ AB въ направленіи отъ A къ B перемѣщается какая-либо точка, занимая послѣдовательно положеніе a, b, c; этимъ точкамъ на прямой A_1B_1 симметричны точки a_1, b_1, c, и въ то время, когда точка двигается по прямой AB слѣва направо, симметричная ей точка двигается справа налѣво, т.-е. въ сторону, прямо противоположную. Точно также, если бы мы представили себя идущими по AB, отъ A къ B, то точка C была бы вправо отъ насъ, и, двигаясь въ томъ же направленіи по A_1B_1 (отъ A_1 къ B_1), мы видѣли бы точку C_1 влѣво отъ AB (черт. 71).

На этомъ основаніи говорятъ, что стороны какой-нибудь фигуры имѣютъ прямо противоположное направленіе, и вершины—обратное расположеніе сторонамъ и вершинамъ фигуры, симметричной первой.

Симметричные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны между собою и при наложеніи должны совпасть, но если бы мы наложили треугольникъ ABC на $\triangle A_1B_1C_1$ (черт. 71), повертывая его такъ, чтобы B_1 упала въ A и A_1—въ B, то вершина C_1 легла бы по другую сторону AB относительно вершины C. Если бы мы при этомъ плоскость треугольника повернули около совмѣщенныхъ сторонъ AB и A_1B_1, доведя ее до совпаденія съ плоскостью треугольника ABC, то точка C_1 все-таки не совпала бы съ C (если углы A, B и C не равны между собой). Слѣдовательно, для совмѣщенія симметричныхъ фигуръ недостаточно наложить ихъ равными сторонами, въ этомъ также состоитъ различіе ихъ отъ равныхъ между собою фигуръ съ одинаковымъ расположеніемъ ихъ элементовъ. Для совмѣщенія симметричныхъ фигуръ поступаютъ такъ: вращаютъ около центра симметріи (M) одну фигуру ($A_1B_1C_1$), доведя симметричныя точки до совпаденія (A_1 съ A, B_1 съ B); тогда лучи (MA_1, MB_1 и MC_1), идущіе отъ центровъ симметріи къ вершинамъ фигуры, будутъ радіусами вращенія, и каждый изъ нихъ съ своимъ начальнымъ положеніемъ образуетъ уголъ, равный $2d$.



Черт. 71.

II. Фигуры, симметричныя относительно прямой линіи.

Двѣ точки, лежащія на одномъ перпендикулярѣ къ прямой, въ равномъ отъ нея разстояніи, называются точками **симметричными** относительно этой прямой, называемой **осью** симметріи. Изъ опредѣленія симметричныхъ точекъ относительно оси слѣдуетъ:

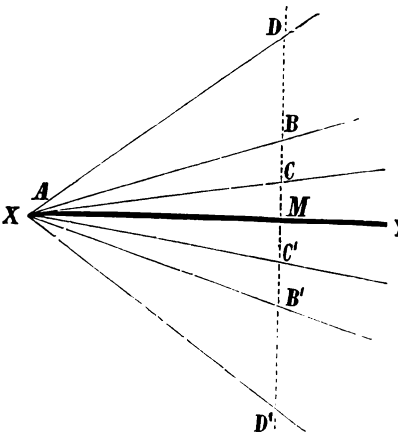
1. Каждой точкѣ плоскости можно найти точку, симметричную относительно данной оси, и притомъ только одну.

2. Отрѣзокъ прямой, соединяющій двѣ точки, симметричныя относительно оси, перпендикуляренъ къ ней и дѣлится въ точкѣ пересѣченія съ осью пополамъ.

3. Каждую точку оси симметріи можно разсматривать какъ точку, симметричную самой себѣ.

Прямыя AB и вообще всякій многоугльникъ ABCD симметриченъ многоугольнику $A_1B_1C_1D_1$, если вершинамъ A,B,C,D перваго многоугольника симметричны относительно одной оси вершины второго A_1, B_1, C_1, D_1.

Возьмемъ за ось симметріи прямую XY; изъ какой-нибудь точки ея проведемъ два луча AB и AB_1 въ одну сторону, наклоненные къ оси подъ одинаковыми углами и расположенные по разныя стороны оси XY. Тогда прямыя AB AB_1 симметричны относительно XY, ибо точки пересѣченія ихъ съ перпендикулярами къ оси симметричны между собой ($BM = B_1M$, изъ равенства треугольника AMB_1 и AMB) (черт. 72).



Черт. 72.

Проведемъ еще такія же двѣ прямыя AC и AD и имъ симметричныя AC^1 и AD_1, при чемъ каждая пара симметричныхъ прямыхъ составляетъ съ осью симметріи равные углы. Положимъ, кромѣ того, что углы DAB и BAC не равны между собою. Тогда очевидно, что $\sphericalangle DAC = \sphericalangle C_1AD_1$; $\sphericalangle DAB = \sphericalangle D_1AB_1$ и $\sphericalangle BAC = \angle B_1AC_1$. Если бы мы попытались наложить пучокъ лучей, лежащихъ подъ осью, такъ, чтобы AD_1 совпала съ AC, тогда AC_1 совпала бы съ AD, но лучъ AB_1 не пошелъ бы по AB, ибо уголъ BAC не равенъ углу D_1AB_1. И здѣсь для совмѣщенія слѣдуетъ употреблять, какъ и въ случаѣ центральной симметріи, особый пріемъ, а именно, обѣ части плоскости, раздѣленной осью симметріи, вращаютъ около оси или перегибаютъ по оси, доведя ихъ до совпаденія; тогда симметричныя точки окажутся лежащими на одномъ перпендикулярѣ къ оси по одну сторону оси и въ равномъ отъ нея разстояніи, слѣдовательно, необходимо совмѣстятся.

Путемъ указаннаго наложенія легко доказать слѣдующія свойства симметричныхъ прямыхъ и точекъ:

1. Каждой точкѣ соотвѣтствуетъ только одна точка, ей симметричная, относительно данной оси.

2. Концы отрѣзка прямой симметричны относительно перпендикуляра, возставленнаго къ этому отрѣзку въ серединѣ его.

3. Стороны угла симметричны относительно равнодѣлящей его.

4. Точки пересѣченія двухъ симметричныхъ прямыхъ съ перпендикуляромъ къ оси—суть симметричныя между собою точки.

5. Двѣ прямыя, проходящія черезъ двѣ симметричныя точки и образующія съ отрѣзкомъ, соединяющимъ эти точки, равные углы, симметричны относительно перпендикуляра, возставленнаго въ серединѣ этого отрѣзка.

6. Двѣ точки, лежащія на симметричныхъ лучахъ, въ равномъ разстояніи отъ точки исхода лучей, симметричны между собою.

7. Если прямая параллельна оси симметріи, то и симметричная ей прямая параллельна оси.

8. Если двѣ симметричныя прямыя параллельны между собою, то и ось симметріи параллельна имъ.

9. Точка пересѣченія двухъ прямыхъ симметрична точкѣ пересѣченія прямыхъ, симметричныхъ первымъ прямымъ.

10. Отрѣзокъ прямой, соединяющій двѣ точки, равенъ отрѣзку прямой, соединяющему симметричныя имъ точки.

11. Уголъ между двумя лучами равенъ углу, образуемому лучами, симметричными первымъ лучамъ.

12. Если отъ двухъ симметричныхъ точекъ по одинаковому направленію симметричныхъ прямыхъ отложить равные отрѣзки, то концы этихъ отрѣзковъ симметричны.

13. Если двѣ симметричныя прямыя пересѣкаются прямыми, перпендикулярными къ оси симметріи, то въ сѣченіи получаются симметричныя точки.

14. Если каждую изъ двухъ симметричныхъ точекъ будемъ соединять съ одною и тою же точкою оси, то получимъ два пучка лучей, соотвѣтственно симметричныхъ другъ другу.

15. Три данныя точки, не лежащія на одной прямой, и три точки, имъ симметричныя, суть вершины двухъ равныхъ и симметричныхъ треугольниковъ. Точно также, три прямыя, пересѣкающіяся между собою, и прямыя, имъ симметричныя, опредѣляютъ два равныхъ треугольника.

Двѣ группы точекъ, соотвѣтственно симметричныхъ относительно одной прямой, можно принять за вершины одного многоугольника, имѣющаго ось симметріи. Приведемъ примѣры такихъ фигуръ.

Равнобедренный треугольникъ симметриченъ относительно высоты, опущенной изъ вершины на неравную сторону. Равносторонній треугольникъ имѣетъ три оси симметріи, пересѣкающіяся въ одной точкѣ.

Равнобедренная трапеція симметрична относительно прямой, соединяющей середины параллельныхъ сторонъ.

Діагонали ромба суть его оси симметріи. Квадратъ имѣетъ четыре оси симметріи,—двѣ діагонали и двѣ прямыя, соединяющія середины противоположныхъ сторонъ.

Прямоугольникъ симметриченъ относительно прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ сторонъ.

Въ правильномъ многоугольникѣ каждый перпендикуляръ къ сторонѣ въ ея серединѣ и каждая равнодѣлящая угловъ многоугольника суть его оси симметріи. Число осей симметріи въ каждомъ правильномъ многоугольникѣ равно числу его сторонъ или вершинъ.

Каждый діаметръ окружности есть ея ось симметріи.

Свойствомъ симметричныхъ точекъ и прямыхъ относительно оси можно пользоваться для вывода геометрическихъ свойствъ различныхъ фигуръ. Такъ, прибѣгая только къ пріему совмѣщенія симметричныхъ фигуръ — перегибанію около оси, можно доказать слѣдующія теоремы:

1. Каждая хорда окружности симметрична относительно перпендикулярнаго къ ней діаметра.

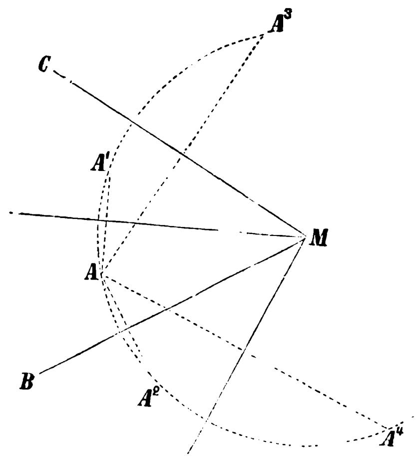
2. Каждой точкѣ пересѣченія прямой съ окружностью симметрична другая точка относительно перпендикулярнаго къ ней діаметра, которая служитъ, слѣдовательно, второй точкой пересѣченія прямой съ окружностью.

Если при этомъ ось симметріи пройдетъ чрезъ точку пересѣченія прямой съ окружностью, то самая прямая будетъ касательная къ окружности, а точка прикосновенія, какъ лежащая на оси симметріи, симметрична сама себѣ и должна быть разсматриваема, какъ двойная точка. Слѣдовательно, касательная симметрична относительно діаметра, проходящаго чрезъ точку прикосновенія.

3. Изъ всѣхъ хордъ, проходящихъ чрезъ данную внутри круга точку, самая длинная та, относительно которой окружность симметрична, и самая короткая та, которая симметрична относительно діаметра, проходящаго черезъ данную точку.

4. Если изъ точки, лежащей внѣ круга, провести къ послѣднему 2 касательныя, то послѣднія симметричны относительно линіи, соединяющей точку пересѣченія касательныхъ съ центромъ круга. Отсюда слѣдуетъ, что касательныя, проведенныя въ концахъ хорды, симметричны относительно діаметра, перпендикулярнаго къ хордѣ.

5. Геометрическій образъ, представляемый двумя кругами, симметриченъ относительно линіи центровъ; а потому, если два круга пересѣкаются въ одной точкѣ, то они необходимо пересѣкутся и въ другой точкѣ, симметричной первой, относительно оси симметріи. Общая хорда пересѣкающихся круговъ также симметрична относительно линіи центровъ. Въ частномъ случаѣ общая хорда дѣлается общей касательной въ одной точкѣ, лежащей на оси симметріи; эта точка должна быть разсматриваема, какъ двойная точка, симметричная самой себѣ.



Черт. 73.

Покажемъ теперь нѣкоторыя новыя свойства симметричныхъ точекъ и прямыхъ.

1. Положимъ, что намъ дана точка A и пучокъ лучей, точка исхода котораго есть

M. Находимъ точки A_1, A_2, A_3....., симметричныя точкѣ A, относительно каждаго изъ этихъ лучей.

Точки A, A_1, A_2....., очевидно, лежатъ на окружности, описанной изъ M, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ AM.

2. **Всякая точка и точки, симметричныя ей относительно двухъ пересѣкающихся прямыхъ, лежатъ на окружности, описанной изъ точки пересѣченія прямыхъ радіусомъ, равнымъ разстоянію данной точки отъ точки пересѣченія прямыхъ, при чемъ дуговое разстояніе между двумя точками, симметричными данной, вдвое болѣе дугового разстоянія той же окружности между сторонами угла** (черт. 73).

Теорема очевидна изъ чертежа, гдѣ данная точка — A, пересѣкающіяся прямыя — MC и MB, симметричныя точки A_1 и A_2.

3. Если намъ данъ пучокъ лучей и точка, какъ было въ первомъ случаѣ, и мы станемъ искать точку, симметричную данной, относительно перваго луча; точку, симметричную найденной нами относительно второго луча; затѣмъ точку, симметричную найденной нами во второй разъ точкѣ относительно третьяго луча, и т. д., то всѣ эти точки вмѣстѣ съ данной лежатъ на окружности. Это свойство симметричныхъ точекъ имѣетъ приложеніе въ физикѣ.

4. Точно также легко доказать слѣдующую теорему *точки, симметричныя точкѣ пересѣченія высотъ треугольника относительно трехъ его сторонъ, лежатъ на окружности круга, описаннаго около треугольника.*

III. Рѣшеніе задачъ по способу симметріи.

Обыкновенный пріемъ рѣшенія геометрическихъ задачъ состоитъ въ томъ, что данную задачу приводимъ къ другой, а эту послѣднюю—къ слѣдующей задачѣ и т. д., до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ такой задачѣ, рѣшеніе которой легко усматривается изъ условій вопроса, или же къ одной изъ основныхъ задачъ, рѣшеніе которыхъ должно быть намъ извѣстно. При такихъ послѣдовательныхъ подстановкахъ вводятся обыкновенно новыя вспомогательныя построенія, облегчающія рѣшеніе данной задачи. Свойство симметричныхъ фигуръ даетъ возможность дѣлать такія вспомогательныя построенія по опредѣленному правилу. Способъ состоитъ въ томъ, что, предположивъ задачу рѣшенной, дѣлаютъ предполагаемое построеніе; берутъ какую-либо изъ данныхъ прямыхъ или берутъ новую прямую за ось симметріи, отыскиваютъ фигуру, симметричную относительно этой оси или всей данной фигурѣ или ея части, и такимъ образомъ получаютъ новую фигуру, отличную отъ начальной, при чемъ въ нѣкоторыхъ задачахъ является возможность установить такую зависимость между искомыми и данными, которая прежде могла оставаться незамѣченной, и съ помощью которой задача или рѣшается непосредственно, или рѣшеніе ея сводится къ рѣшенію болѣе легкой задачи.

Примѣры.

2566. **Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ a и b и по разности противолежащихъ угловъ E.**

a) Положимъ, что искомый треугольникъ ABC.

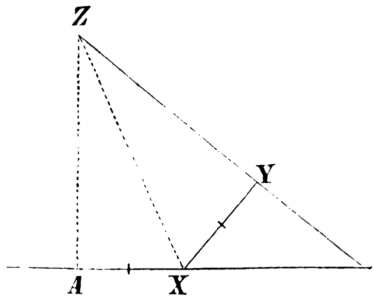
Возьмемъ за ось симметріи высоту его CD и находимъ прямую CA_1, симметричную прямой AC. Разсматривая образовавшийся треугольникъ CA_1B, находимъ, что $CA_1 = b$; $CB = a$; $\sphericalangle\ A_1CB = \sphericalangle\ A - B = \sphericalangle\ E$. Слѣдовательно, треугольникъ A_1CB можно построить непосредственно, и вершины его C и B суть и вершины искомаго треугольника, а третья вершина A симметрична вершинѣ A_1 относительно общей обоимъ треугольникамъ высоты CD.

b) За ось симметріи можно принять перпендикуляръ, возставленный изъ средины основанія AB. Отыскиваемъ треугольникъ, симметричный треугольнику ABC, или, другими словами, перегибаемъ треугольникъ около оси; тогда точка B упадетъ въ A и вершина C упадетъ въ точку C_1. Треугольникъ ACC_1 опредѣляется непосредственно данными задачи и т. д.

2567. **Даны двѣ прямыя линіи и на одной изъ нихъ точка A; найти на той же прямой такую точку X, чтобы ея разстояніе XY отъ другой прямой было равно AX.**

Рѣшеніе. Предположимъ задачу рѣшенной: искомая точка X (черт. 74); XY перпендикулярна ко второй прямой. Беремъ за ось симметріи равнодѣлящую угла AXY и находимъ симметричную AZ второй прямой YZ; прямая AZ перпендикулярна къ AX и пересѣкается съ ZY на оси. Отсюда слѣдуетъ такое построеніе.

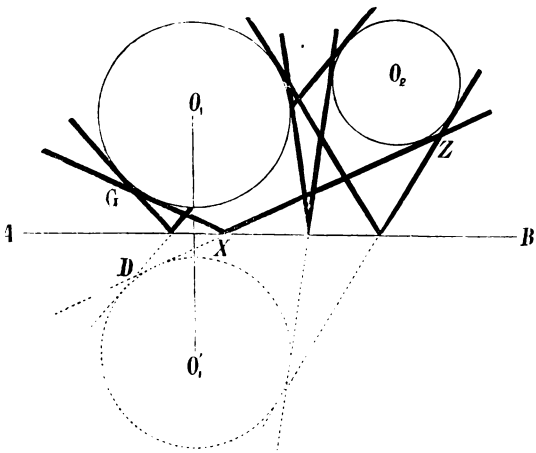
Возставляемъ перпендикуляръ AZ въ точкѣ A къ прямой AX, продолжаемъ его до пересѣченія съ ZY въ точкѣ Z; равнодѣлящая угла AZY пересѣчетъ прямую AX въ искомой точкѣ.



Черт. 74.

2568. **Два круга O_1 и O_2 лежатъ по одну сторону прямой AB; требуется на этой прямой найти такую точку, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ двумъ даннымъ окружностямъ, составляли съ данной прямой равные углы.**

Положимъ, что X есть искомая точка, XC и XZ — искомыя касательныя (черт. 75): примемъ за ось симметріи прямую AB и найдемъ кругъ O_1', симметричный O_1; если $\measuredangle$ GXA $=\measuredangle$ ZXB, то $\measuredangle$GXA$=\measuredangle$AXD и продолженіе XZ коснется окружности круга O_1'. Слѣдовательно, искомая точка лежитъ на пересѣченіи данной прямой съ общей касательной къ кругамъ O_1' и O_2.



Черт. 75.

Примѣчаніе. Таково же рѣшеніе задачъ, въ которыхъ вмѣсто одного круга, или вмѣсто обоихъ круговъ, даются точки. Въ послѣднемъ случаѣ задача иногда выражается такъ: *даны двѣ точки O_1 и O_2 и прямая AB; найти на послѣдней такую точку X, чтобы сумма разстояній ея отъ точекъ O_1 и O_2 (O_1X+O_2X) была наименьшая.* Эта задача имѣетъ приложеніе въ физикѣ, а именно—въ теоріи плоскихъ зеркалъ. Лучъ, выходящій изъ точки O_1, попадаетъ въ O_2, отразившись отъ зеркала въ точкѣ X, лежащей на пересѣченіи прямой AB съ прямой, соединяющей точку O_2 съ точкою O_1', симметричною O_1, такъ что путь луча—самый короткій изъ всѣхъ путей, какими можно пройти изъ O_1 въ O_2, проходя чрезъ какую-нибудь точку прямой AB.

Задача о бильярдныхъ шарахъ рѣшается такъ же: если AB—край бильярда; O_1 и O_2 — два бильярдныхъ шара, то шаръ O_1, ударившись о край бильярда въ точкѣ X, попадетъ въ O_2, если X лежитъ на прямой, соединяющей центръ шара O_2 съ точкой O_1', симметричной центру перваго шара O_1.

B. Способъ вращенія фигуръ.

При совмѣщеніи фигуръ, симметричныхъ относительно точки, намъ пришлось воспользоваться вращеніемъ фигуры около центра симметріи, какъ способомъ наиболѣе удобнымъ для совмѣщенія такихъ фигуръ. Подобнымъ вращеніемъ фигуры около точки можно пользоваться не только для совмѣщенія фигуръ, имѣющихъ центръ симметріи, но и для вывода свойствъ различныхъ геометрическихъ фигуръ и для рѣшенія задачъ. Разберемъ условія, которыя слѣдуетъ имѣть въ виду при пользованіи такимъ способомъ.

Если говорятъ, что точка вращается, то разумѣютъ подъ этимъ то, что точка перемѣщается по окружности, при чемъ центръ этой окружности наз. центромъ вращенія точки.

Вращеніе точки будетъ опредѣлено, если будутъ опредѣлены сама окружность и величина дуги, пройденной точкою, или, если будутъ даны элементы, по которымъ могутъ быть опредѣлены какъ окружность, такъ и пройденная дуга, напр., начальное и конечное положеніе точки и положеніе центра окружности; начальное положеніе точки, положеніе центра вращенія и величина угла, описаннаго радіусомъ, идущимъ въ перемѣщающуюся точку.

Очевидно, что отрѣзокъ прямой, идущей отъ начальнаго положенія точки къ ея конечному положенію, есть хорда окружности, а потому:

1. Если двѣ точки могутъ быть совмѣщены вращеніемъ, то перпендикуляръ, возставленный къ отрѣзку прямой, соединяющей эти точки, въ серединѣ его, проходитъ чрезъ центръ вращенія.

2. Всякая точка можетъ быть совмѣщена со всякой другой точкой вращеніемъ ея около любой точки перпендикуляра, возставленнаго изъ средины отрѣзка, соединяющаго обѣ точки.

Если прямая вращается около точки, лежащей внѣ прямой, то разстояніе ея отъ центра вращенія остается неизмѣннымъ. Слѣдовательно, прямая во все время вращенія—касательная къ окружности, описанной изъ центра вращенія радіусомъ, равнымъ разстоянію центра вращенія отъ прямой. Если такая прямая вращеніемъ можетъ быть совмѣщена съ другой прямой, то эта другая прямая должна касаться къ той же окружности, такъ что прямыя, совмѣщаемыя вращеніемъ около точки, лежащей внѣ ихъ, должны быть касательными къ одной окружности. Отсюда слѣдуетъ:

1. Равнодѣлящая угла между прямыми, совмѣщаемыми вращеніемъ около точки, пройдетъ всегда чрезъ центръ вращенія, потому что равнодѣлящая угла между двумя касательными пройдетъ черезъ центръ.

2. Прямая можетъ быть приведена въ совпаденіе съ другой прямой вращеніемъ ея около любой точки равнодѣлящей угла между прямыми.

Даны два равныхъ отрѣзка AB и A_1B_1, которые должны быть совмѣщены вращеніемъ; найдемъ центръ вращенія.

Если прямая AB совмѣщается вращеніемъ съ прямой A_1B_1, то центръ вращенія долженъ лежать на равнодѣлящей угла между прямыми. Если же точка A совмѣщается вращеніемъ съ точкой A_1, то центръ вращенія долженъ лежать на перпендикулярѣ къ AA_1 въ серединѣ его. Слѣдовательно, искомый центръ долженъ лежать на пересѣченіи равнодѣлящей угла между AB и A_1B_1 съ перпендикуляромъ къ отрѣзку AA_1 въ серединѣ его или съ перпендикуляромъ къ BB_1 въ серединѣ BB_1.

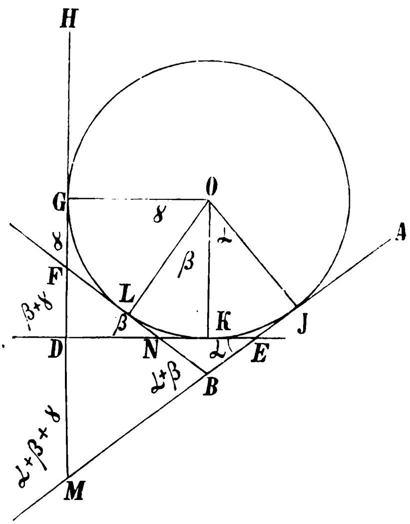
Отсюда легко вывести слѣдующія теоремы:

1. Если даны два равныхъ угла съ пересѣкающими сторонами, то углы могутъ быть совмѣщены вращеніемъ около точки, лежащей на пересѣченіи равнодѣлящихъ угловъ, образуемыхъ пересѣкающимися сторонами.

2. Если два треугольника или многоугольника равны между собою и элементы ихъ одинаково расположены, то

они могутъ быть совмѣщены вращеніемъ на нѣкоторый уголъ около центра, лежащаго на пересѣченіи перпендикуляровъ, возставленныхъ къ отрѣзкамъ въ ихъ серединѣ, соединяющимъ соотвѣтственныя вершины многоугольниковъ, или на пересѣченіи равнодѣлящихъ угловъ, образуемыхъ соотвѣтственными сторонами.

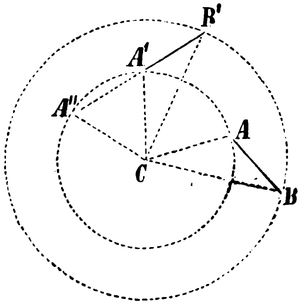
Опредѣлимъ теперь величину угла, на который слѣдуетъ вращать прямую для приведенія ея въ совмѣщеніе съ другой прямой. Дана прямая AE, ея разстояніе до центра вращенія — OJ; вращая прямую OJ на уголъ $KOJ = \alpha$, мы приведемъ прямую AE въ положеніе DE, которое съ прежнимъ положеніемъ прямой образуетъ уголъ $DEM = \alpha$. Если повернемъ OK на уголъ $KOL = \beta$, тогда прямая займетъ положеніе FN, образуя со вторымъ положеніемъ уголъ FND, также равный β, и съ первымъ положеніемъ уголъ, равный $\beta + \alpha$. Вращая еще разъ OL на уголъ GOL, мы приведемъ прямую въ положеніе HD, составляющее съ третьимъ положеніемъ прямой уголъ γ, со вторымъ—уголъ $\beta + \gamma$ и съ первымъ положеніемъ—$\alpha + \beta + \gamma$ (черт. 76).



Черт. 76.

. Но прямая AE можетъ принять положеніе DE, вращаясь около точки E, на уголъ α, затѣмъ можетъ перейти въ положеніе FN, вращаясь около N на уголъ β, и, наконецъ, можетъ принять положеніе HD, вращаясь около F на уголъ γ, при чемъ уголъ, образуемый конечнымъ положеніемъ прямой и его начальнымъ положеніемъ, равенъ суммѣ всѣхъ угловъ, на которые прямая вращалась послѣдовательно около различныхъ точекъ ея.

На этомъ свойствѣ вращенія можно основать выводъ формулы, выражающей сумму угловъ треугольника и многоугольника. Данъ треугольникъ ABC; будемъ вращать сторону AB около вершины B, пока продолженіе AB не совпадетъ съ BC; затѣмъ вращаемъ BC около C, пока продолженіе BC не совпадетъ съ CA, и, наконецъ, CA—около A, доводя продолженіе CA до совпаденія съ AB; тогда сторона AB треугольника, вращаясь около различныхъ точекъ, взятыхъ на ней, на углы, равные внѣшнимъ угламъ треугольника, сдѣлаетъ полный оборотъ; а потому сумма такихъ угловъ равна 4d; а такъ какъ сумма всѣхъ угловъ и внутреннихъ и внѣшнихъ равна 6d, то сумма внутреннихъ угловъ=2d [1]).



Черт. 77.

Вращая треугольникъ около точки, мы можемъ вывести условія равенства треугольниковъ. Возьмемъ два треугольника ABC и A_1B_1C, имѣющихъ общую вершину C, и станемъ искать, какимъ условіямъ должны удовлетворять стороны и углы треугольника, чтобы вращеніемъ около центра C треугольники могли быть совмѣщены (черт. 77). Очевидно, что, вращая $\triangle A_1B_1C$ около C, мы можемъ довести CB_1 до совпаденія съ CB и CA_1—съ CA, если только $\measuredangle A_1CB_1 = \measuredangle ACB$ (1 случай равенства треуг.). Если бы намъ въ треугольникахъ ABC и A_1B_1C было бы извѣстно, кромѣ равенства сторонъ, пересѣкающихся между собою въ точкѣ C, еще равенство угловъ B и B_1, то противъ угла B_1 могли бы лежать двѣ стороны $A_{11}C$ и A_1C, и мы получили бы два треугольника A_1B_1C и $A_{11}B_1C$, имѣющіе указанные элементы одина-

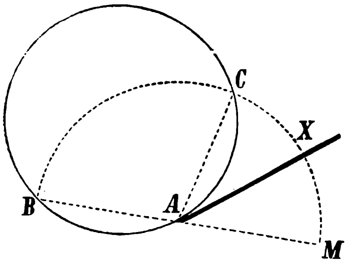
[1]) Это доказательство принадлежитъ профессору математики въ Геттингенѣ, товарищу Гаусса, Thibaut, который допустилъ какъ аксіому, что вращеніе прямой вокругъ трехъ вершинъ треугольника даетъ тотъ же результатъ, какъ и полный оборотъ ея вокругъ одной точки. Если бы послѣднее допущеніе можно было принять за аксіому, то теорія параллельныхъ линій могла бы быть изложена уже безъ аксіомы (11-й пост. Евкл.).

ковыми съ треугольникомъ ABC (4 случ.), а потому для установленія равенства необходимо дать добавочное условіе о положеніи второй равной стороны (см. 4 сл. равенства треуг.).

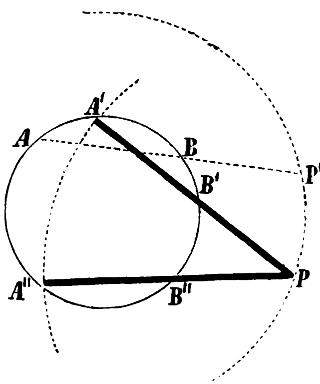
Рѣшимъ нѣсколько задачъ на построеніе, примѣняя способъ вращенія фигуръ около точки.

2569. **Къ данной окружности O въ данной на ней точкѣ A провести касательную.**

Рѣшеніе (черт. 78). Черезъ точку A проведемъ какую-нибудь сѣкущую ABM. Станемъ вращать отрѣзокъ AB около A: тогда конецъ его B опишетъ окружность, пересѣкающую данную въ точкѣ C. При вращеніи хорда CA, начиная съ положенія CA, начнетъ уменьшаться, и точка пересѣченія ея съ окружностію станетъ приближаться къ A; когда же обѣ точки сольются въ



Черт. 78.



Черт. 79.

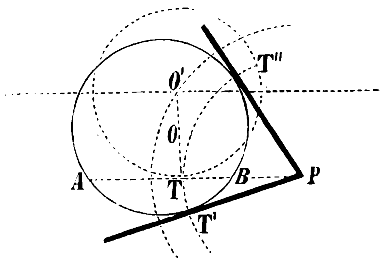
одну, сѣкущая приметъ положеніе касательной AX, при чемъ $\sphericalangle CAX = \sphericalangle XAM$ (ибо $\sphericalangle XAM$ измѣряется $^1/_2$ дуги AB, равной дугѣ CA) и дуги MX и CX равны между собою. Отсюда слѣдуетъ такое построеніе: чрезъ данную точку проводимъ произвольную хорду BA, изъ точки A радіусомъ, равнымъ AB, описываемъ полуокружность, и часть ея, лежащую внѣ круга, дѣлимъ пополамъ въ точкѣ X; прямая XA—искомая касательная.

2570. **Чрезъ данную точку p внѣ круга провести къ окружности O сѣкущую такъ, чтобы часть ея, лежащая внутри круга, равнялась данной длинѣ d.**

Отложимъ въ окружности гдѣ-нибудь хорду AB, равную данной длинѣ d, и станемъ вращать и хорду и кругъ около центра O до тѣхъ поръ, пока продолженіе хорды не пройдетъ черезъ p (черт. 79). Если затѣмъ будемъ вращать и кругъ и хорду въ обратномъ направленіи до прежняго положенія, то точка р опишетъ часть дуги окружности радіуса, равнаго Ор, и займетъ прежнее положеніе $р_1$ на продолженіи хорды АВ. Отсюда слѣдуетъ такое построеніе: описываемъ изъ О радіусомъ, равнымъ Ор, окружность; въ данной окружности откладываемъ хорду АВ гдѣ-нибудь, равную данной длинѣ, продолжаемъ ее до пересѣченія съ окружностью радіуса Ор въ точкѣ $р_1$, и радіусомъ, равнымъ $Ар_1$, изъ р описываемъ новую окружность, которая пересѣчетъ данную окружность въ точкахъ $А_1$ и $А_{11}$; искомыя прямыя—$рА_1$ и $рА_{11}$.

2571. **Изъ точки р внѣ круга провести къ окружности круга О касательную.**

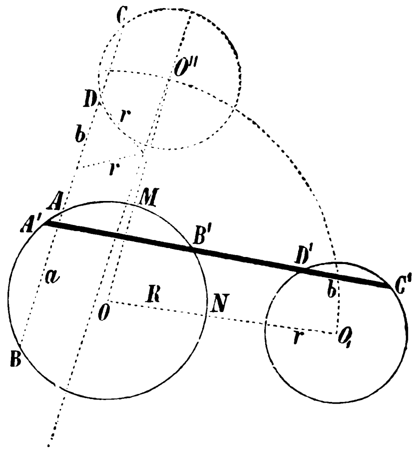
Чрезъ точку р проводимъ какую-нибудь сѣкущую, пересѣкающую окружность въ точкахъ А и В (черт. 80). Затѣмъ вращаемъ всю окружность около р, какъ центра, оставляя сѣкущую на мѣстѣ до тѣхъ поръ, пока точки А и В не сольются въ одну точку, и окружность не приметъ положенія касательной къ Ар въ точкѣ Т. Новое положеніе центра О находится въ разстояніи радіуса отъ АВ. При обратномъ вращеніи окружности вмѣстѣ съ касательной къ ней точка Т опишетъ окружность радіуса, равнаго рТ, и касательная займетъ положеніе $рТ_1$. Отсюда слѣдуетъ такое построеніе: чрезъ р проводимъ произвольную сѣкущую АВ; на разстояніи радіуса отъ нея проводимъ прямую, ей параллельную; изъ точки р радіусомъ, равнымъ Ор, описываемъ окружность, которая пересѣчетъ параллельную въ точкѣ $О_1$; изъ $О_1$ опускаемъ перпендикуляръ $О_1Т$ на Ар и радіусомъ рТ изъ р описываемъ окружность, которая пересѣчетъ данную окружность въ точкахъ $Т_1$ и $Т_{11}$. Прямыя $рТ_{11}$ и $рТ_1$—искомыя.



Черт. 80.

2572. **Пересѣчь прямою двѣ данныя окружности О и $О_1$ такъ, чтобы первая окружность отсѣкала отъ сѣкущей хорду длиною а, а вторая—хорду длиною b.**

Проведемъ въ первой окружности хорду AB длиною a и продолжимъ ее (черт. 81). Затѣмъ вращаемъ второй кругъ O_1 около центра O перваго круга до тѣхъ поръ, пока этотъ кругъ не отсѣчетъ отъ прямой AB отрѣзокъ CD, равный данному отрѣзку; тогда центръ круга будетъ лежать на прямой, параллельной AB и проходящей чрезъ вершину равнобедреннаго треугольника, основаніе котораго b, а равныя стороны равны радіусамъ второго круга. Кругъ O_1 при этомъ повернется на уголъ MON, и точка N опишетъ дугу MN. Если затѣмъ повернемъ окружность вмѣстѣ съ сѣкущей BC въ обратномъ направленіи на тотъ же уголъ, то точки B и A опишутъ дуги BA_1 и AB_1, равныя каждая дугѣ MN, и сѣкущая BC займетъ искомое положеніе A_1C_1. Отсюда слѣдуетъ такое построеніе: въ первой окружности проводимъ хорду данной длины AB=a; продолжаемъ хорду за окружность, гдѣ-нибудь на ней откладываемъ отрѣзокъ, равный b, и принимаемъ этотъ отрѣзокъ за основаніе равнобедреннаго треугольника, равныя стороны котораго равны радіусамъ второго круга;

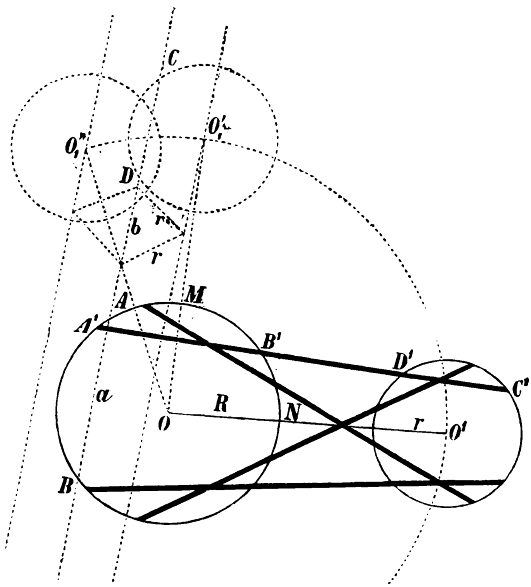


Черт. 81.

чрезъ вершину этого треугольника проводимъ прямую, параллельную прямой AB; изъ точки O радіусомъ, равнымъ разстоянію между центрами OO_1, описываемъ дугу, которая пересѣчетъ параллельную прямую въ точкѣ O_{11}; соединяемъ O_{11} съ центромъ O прямою $O_{11}O$, которая пересѣчетъ первую окружность въ точкѣ M. Наконецъ отъ A откладываемъ дугу AB_1 и отъ B дугу BA_1, равныя каждая дугѣ MN (N лежитъ на линіи центровъ). Прямая A_1B_1 — искомая; симметричная ей прямая представляетъ второе рѣшеніе. Если бы сдѣлали такое же построеніе по вторую сторону прямой AB, то получили бы новую пару рѣшеній (черт. 82).

2573. **Къ двумъ даннымъ окружностямъ O и O_1 провести общую касательную** (черт. 83).

Построеніе касательныхъ дѣлается такъ же, какъ и въ предыдущей задачѣ. Проводимъ къ одной изъ данныхъ окружностей O въ произвольной точкѣ касательную AB; вращаемъ

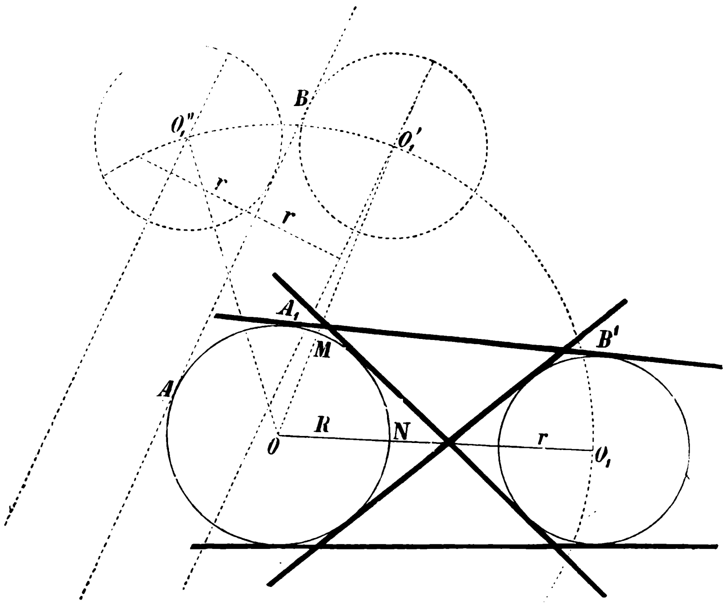


Черт. 82.

вторую окружность около O до тѣхъ поръ, пока она не коснется касательной AB; тогда центръ ея будетъ находиться въ разстояніи радіуса r второй окружности отъ AB, а уголъ вращенія равенъ $\measuredangle$ MON. Вращая окружность и AB въ обратномъ направленіи на уголъ MON, получимъ искомое положеніе касательныхъ.

Построеніе. Въ какой-либо точкѣ A первой окружности проводимъ къ ней касательную. Изъ O радіусомъ, равнымъ OO′, описываемъ окружность, которая пересѣчетъ параллельную къ AB прямую, проведенную на разстояніи радіуса r второй окружности, въ точкѣ O_1', соединяемъ O_1' съ O;

прямая $O_1'O$ пересѣчетъ первую окружность въ точкѣ M; затѣмъ отъ A откладываемъ дугу AA_1, равную MN; A_1 есть точка прикосновенія искомой касательной; касательная, ей симметричная относительно линіи центровъ, вторая внѣш-



Черт. 83.

няя касательная. Внутреннія касательныя соотвѣтствуютъ положенію O_1'' второй окружности, когда эта послѣдняя касается AB съ другой стороны ея.

С. Параллельное перемѣщеніе.

При вращеніи фигуры около точки, лежащей внѣ фигуры, всѣ точки ея перемѣщались по дугамъ концентрическихъ круговъ. Такое перемѣщеніе фигуры, при которомъ всѣ точки фигуры перемѣщаются по прямымъ линіямъ, проходя равные пути, наз. *параллельнымъ перемѣщеніемъ* [1]).

---

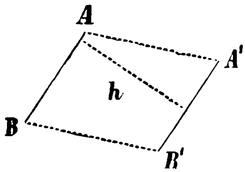
1) Параллельное перемѣщеніе можно разсматривать какъ частный случай вращенія фигуры около точки, находящейся въ безконечно большомъ разстояніи отъ перемѣщающейся фигуры.

При параллельномъ перемѣщеніи прямой линіи всѣ точки прямой описываютъ равные и параллельные пути.

При параллельномъ перемѣщеніи путь, пройденный каждой точкой отрѣзка, называется *величиной перемѣщенія*; уголъ между перемѣщающейся прямой и направленіемъ перемѣщенія наз. *угломъ перемѣщенія*; длина перпендикуляра, измѣряющаго разстояніе между начальнымъ и конечнымъ положеніемъ отрѣзка, наз. *высотою перемѣщенія*.

Такъ, если прямая AB перемѣщается по направленію BB_1 въ положеніе A_1B_1, то величиною перемѣщенія служитъ сторона BB_1 или AA_1 параллелограмма, образованнаго перемѣщеніемъ концовъ отрѣзка AB, угломъ перемѣщенія — $\angle ABB_1$ и высотою перемѣщенія—высота параллелограмма h между перемѣщающимися сторонами (черт. 84).

Если перемѣщается параллельно какая-либо прямолинейная фигура, то всѣ точки ея описываютъ одинаковой длины пути; слѣдовательно, величина перемѣщенія всѣхъ точекъ фигуры одинакова, высота же и уголъ перемѣщенія различныхъ сторонъ фигуры могутъ быть различны.



Черт. 84.

Между высотою, угломъ и величиною перемѣщенія существуетъ такая вполнѣ очевидная зависимость: если взять длину перемѣщенія за діаметръ нѣкотораго круга, построить при концѣ этого діаметра вписанный уголъ, равный углу перемѣщенія, тогда длина хорды, соотвѣтствующей этому углу, есть высота перемѣщенія.

Изъ сказаннаго о параллельномъ перемѣщеніи можно вывести такія слѣдствія:

1. Два равныхъ и параллельныхъ отрѣзка могутъ быть совмѣщены параллельнымъ перемѣщеніемъ одного изъ нихъ.

2. Два равныхъ угла съ одинаковымъ расположеніемъ сторонъ могутъ быть совмѣщены помощью параллельнаго перемѣщенія, если двѣ соотвѣтствующія стороны этихъ угловъ параллельны.

3. Два треугольника или многоугольника, равные между собою, съ одинаковымъ расположеніемъ сторонъ и угловъ,

могутъ быть совмѣщены параллельнымъ перемѣщеніемъ, если двѣ соотвѣтственныя стороны ихъ параллельны.

Ниже мы укажемъ приложеніе способа параллельнаго перемѣщенія къ выводу геометрическихъ свойствъ фигуръ, а теперь рѣшимъ нѣсколько задачъ на построеніе, пользуясь этимъ пріемомъ.

2574. **Построить треугольникъ, равный данному треугольнику, такъ, чтобъ основаніе его совпало съ данной прямой L, а вершина легла бы на другой прямой L_1.**

На прямой L гдѣ-нибудь строимъ треугольникъ ABC такъ, чтобы основаніе AB лежало на L и чтобы треугольникъ былъ равенъ данному. Затѣмъ перемѣщаемъ треугольникъ по L до тѣхъ поръ, пока вершина C не упадетъ на L_1. Величина перемѣщенія равна отрѣзку прямой, параллельной L и проходящей чрезъ C, отъ вершины C до встрѣчи съ прямой L_1. На такую же длину должны перемѣститься и остальныя вершины треугольника.

2575. **Построить трапецію, если даны ея четыре стороны.**

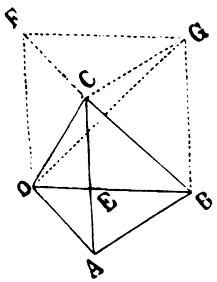
Перемѣщаемъ одну изъ непараллельныхъ сторонъ трапеціи по направленію основаній; величина перемѣщенія равна длинѣ меньшаго основанія. Получаемъ треугольникъ, три стороны котораго извѣстны и т. д.

2576. **Построить трапецію по a, e, f, $\measuredangle$E.**

Искомая трапеція ABCD; перемѣщаемъ параллельно діагональ f по направленію параллельныхъ сторонъ такъ, чтобы величина перемѣщенія равнялась длинѣ меньшей изъ параллельныхъ сторонъ. Тогда діагональ f займетъ положеніе CL. Соединяя B съ L, получимъ треугольникъ ACL, который по даннымъ задачи легко построить ($AC=e$, $CL=f$; $\measuredangle ACL = \measuredangle E$). Построивъ треугольникъ ABC, вновь переносимъ параллельно CL такъ, чтобы величина перемѣщенія равнялась $(AL - a) = BL$, тогда линія CL займетъ положеніе DB, и точка D будетъ служить четвертой вершиной искомой трапеціи (черт. 45).

2577. **Построить четыреугольникъ, если дано c, a, e, f, $\measuredangle$E.**

Искомый четыреугольникъ ABCD. Перемѣщаемъ діагональ $e = AC$ параллельно самой себѣ на величину перемѣщенія $AB=a$ по направленію AB. Тогда діагональ займетъ положеніе BG. Затѣмъ ту же діагональ перемѣщаемъ въ другую сторону по направленію AD и на величину перемѣщенія, равную AD, въ положеніе DF. Тогда получимъ три параллелограмма (черт. 85): ACGB, ACFD и DBGF. Такъ какъ

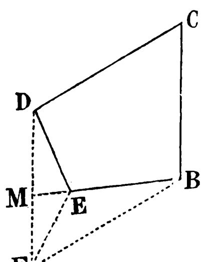


Черт. 85.

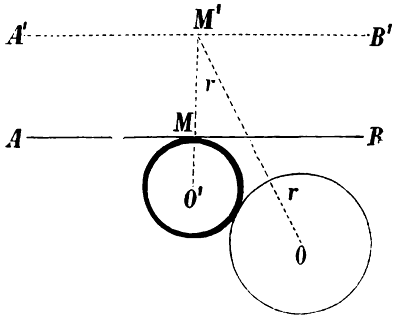
$DF = e$, $DB = f$ и $\sphericalangle FDB = \sphericalangle E$, то параллелограммъ DFGB строится непосредственно по даннымъ задачи. Вершины D и B параллелограмма суть въ то же время и вершины искомаго четыреугольника; вершина же C находится въ разстояніи a отъ G и въ разстояніи c отъ D, слѣдовательно, лежитъ на пересѣченіи окружностей, описанныхъ радіусами a и c изъ точекъ G и D, какъ изъ центровъ. Наконецъ вершина A есть четвертая вершина A параллелограмма ABGC, три вершины котораго опредѣлены предыдущимъ построеніемъ.

2578. **Построить четыреугольникъ по b, d, $\sphericalangle E$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.**

Искомый четыреугольникъ CBED (черт. 86). Перемѣщаемъ CB параллельно самой себѣ по направленію CD такъ, чтобы величина перемѣщенія была равна CD, въ положеніе



Черт. 86.



Черт. 87.

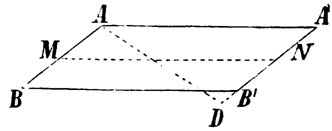
DF; получаемъ параллелограммъ BCDF и треугольникъ EDF, въ которомъ $DF = CB = b$; $ED = d$ и $\sphericalangle EDF = (\sphericalangle E + \sphericalangle B) - - 2d$ (изъ тр-ка MED) и т. д.

2579. **Провести окружность, касающуюся данной прямой въ данной точкѣ и данной окружности.**

Перемѣщаемъ данную прямую AB по направленію, перпендикулярному къ AB, такъ, чтобы величина перемѣщенія была равна r — радіусу даннаго круга (черт. 87); тогда центръ искомаго круга долженъ находиться въ равномъ разстояніи отъ M_1 и отъ O и т. д.

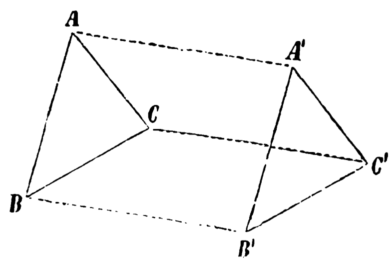
Однимъ изъ наиболѣе удобныхъ пріемовъ преобразованія фигуръ служитъ методъ параллельнаго перемѣщенія. Разсмотримъ нѣсколько случаевъ такого преобразованія.

1. Положимъ, что отрѣзокъ AB перемѣщается параллельно самому себѣ, по какому-либо направленію, изъ положенія AB въ положеніе A_1B_1; соединяя концы отрѣзковъ прямыми AA′ и BB′, получимъ параллелограммъ AA′B′B (черт. 88). Величина перемѣщенія прямой есть линія BB_1, описанная концомъ отрѣзка B, высота перемѣщенія—отрѣзокъ AD, служащій высотой параллелограмма, и уголъ перемѣщенія равенъ углу параллелограмма. Итакъ, *прямая, перемѣщаясь параллельно самой себѣ въ какомъ-нибудь направленіи, описываетъ параллелограммъ, основаніе котораго — перемѣщающійся отрѣзокъ, а высота—высота перемѣщенія.* Очевидно, что параллелограммъ, образованный перемѣщеніемъ какого-либо отрѣзка (AB), равенъ суммѣ всѣхъ параллелограммовъ, образованныхъ каждой частью этого отрѣзка (AM и BM).



Черт. 88.

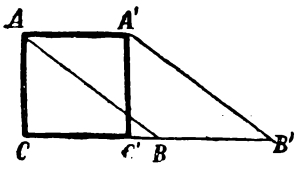
2. *Если перемѣщается треугольникъ ABC (*черт. 89) *въ какомъ-нибудь направленіи, то каждая изъ его сторонъ опишетъ параллелограммъ, и площадь наибольшаго изъ нихъ (ABB′A′) равна суммѣ площадей двухъ другихъ (ACC′A′+BCC′B′),* ибо, отнимая изъ пятиугольника AA′C′B′B треугольникъ ABC, получимъ сумму параллелограммовъ, описанныхъ сторонами AC и CB; и отнимая изъ того же пятиугольника треугольникъ A′B′C′, получимъ параллелограммъ, описанный стороною AB.



Черт. 89.

3. Если треугольникъ перемѣщается по направленію одной изъ его сторонъ, то площадь параллелограмма, описаннаго этой стороною, равна 0, а потому площади, описанныя двумя другими сторонами, должны быть равны между собою.

Такъ, если перемѣщается по плоскости прямоугольный треугольникъ ABC (черт. 90) по направленію CC′, то площадь AA′B′B параллелограмма, описаннаго гипотенузою AB, равновелика площади прямоугольника AA′CC′, описаннаго катетомъ AC.



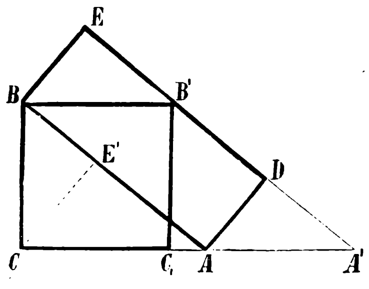
Черт. 90.

Приложеніе этихъ свойствъ перемѣщающихся фигуръ мы покажемъ ниже.

Докажемъ нѣсколько теоремъ по методу параллельнаго перемѣщенія.

Теорема. **Квадратъ, построенный на катетѣ прямоугольнаго треугольника, равновеликъ площади прямоугольника, основаніе котораго равно гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, а высота—проекціи этого катета на гипотенузу.**

Возьмемъ прямоугольный треугольникъ ABC и перемѣстимъ его по направленію катета CA такъ, чтобы величина перемѣщенія была равна катету BC (черт. 91). Заключаемъ, что квадратъ CBB_1C_1 равновеликъ параллелограмму ABB_1A_1, а этотъ послѣдній равновеликъ прямоугольнику ABED, въ которомъ $AD \perp AB$ и $BE \perp AB$. Если мы станемъ вращать треугольникъ BEB_1 около B на величину угла, равную d, такъ, чтобы BB_1 совпала съ BC, тогда BE пойдетъ по BA, ибо уголъ EBB_1 равенъ углу CBA, какъ углы съ перпендикулярными сторонами, а EB_1 займетъ положеніе CE_1. Отсюда слѣдуетъ, что квадратъ BB_1C_1C, построенный на катетѣ прямоугольнаго треугольника, равновеликъ прямоугольнику BEDA, основаніе котораго равно гипотенузѣ

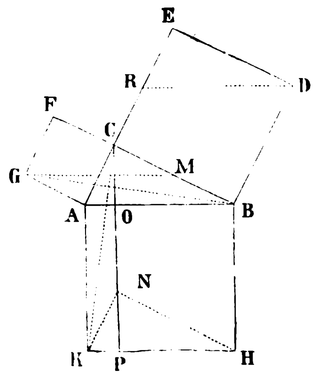


Черт. 91.

треугольника, а высота $BE = BE_1$, проекціи упомянутаго катета на гипотенузу.

Теорема. **Квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равновеликъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ этого треугольника.**

Способъ параллельнаго перемѣщенія можетъ быть примѣненъ и здѣсь для вывода теоремы: перемѣщаемъ треугольникъ ABC по направленію перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины C на гипотенузу AB такъ, чтобы величина перемѣщенія была равна гипотенузѣ. Такъ какъ гипотенуза перемѣщается по направленію, перпендикулярному къ ней, то она опишетъ прямоугольникъ, высота котораго равна величинѣ перемѣщенія AB т.-е. квадратъ $AB . AB$. Катетъ AC опишетъ параллелограммъ, площадь котораго есть $AC . AC$, ибо высота перемѣщенія равна хордѣ, прилежащей діаметру AB и противолежащей вписанному въ ту же окружность углу перемѣщенія ACO, равному $\sphericalangle CBA$, противъ котораго лежитъ хорда AC.

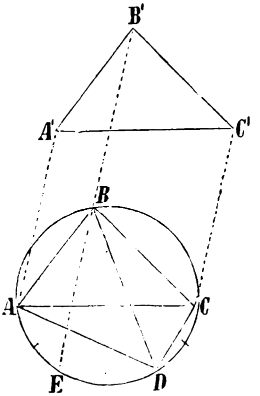


Черт. 92.

Точно также площадь параллелограмма CBHN, описаннаго стороной BC, равна квадрату $CB . CB$, такъ какъ высота перемѣщенія въ окружности діаметра AB равна хордѣ CB, лежащей противъ угла A, равнаго углу BCO; слѣдовательно, $AC . AC + CB . CB = AB . AB$.

Теорема Птоломея. **Площадь прямоугольника, неравныя стороны котораго суть діагонали вписаннаго въ кругъ четыреугольника, равна суммѣ площадей двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ неравными сторонами противоположныя стороны четыреугольника.**

Докажемъ эту теорему способомъ параллельнаго перемѣщенія. Данный четыреугольникъ ABCD (черт. 93) раздѣлимъ діагональю AC на два треугольника. Возьмемъ $\triangle ABC$ и перемѣстимъ его параллельно самому себѣ на величину діаметра круга, а направленіе выберемъ такое, чтобы площадь параллелограмма, образованнаго перемѣщающеюся стороною AB, была равновелика площади прямоугольника, основаніе котораго AB, а высота CD; чтобы найти уголъ перемѣщенія, замѣтимъ, что высота перемѣщенія CD должна служить хордой, стягивающей дугу, на которую опирается уголъ перемѣщенія, какъ уголъ вписанный, а потому, откладывая отъ A—дугу AE, равную DC, соединяя B съ E, получимъ направленіе BE, въ которомъ должна перемѣщаться сторона AB для образованія параллелограмма ABB_1A_1, площадь котораго выразится—AB . CD.



Черт. 93.

Перемѣщеніемъ стороны BC образуется параллелограммъ BB_1C_1C, уголъ перемѣщенія EBC опирается на дугу ED+CD, или ED+AE=AD, а потому высота перемѣщенія = хордѣ AD, и площадь параллелограмма BB_1C_1C равновелика площади прямоугольника, основаніе котораго BC и высота AD.

Наконецъ сторона AC, перемѣщаясь параллельно самой себѣ на величину діаметра круга, образуетъ параллелограммъ AA_1C_1C, уголъ перемѣщенія BKC соотвѣтствуетъ вписанному углу, опирающемуся на дугу, равную суммѣ дугъ BC+AE, или BC+CD, т.-е. равенъ углу BAD, а этому послѣднему соотвѣтствуетъ хорда BD, которая и будетъ высотой перемѣщенія. Параллелограммъ же, описанный стороною AC, равновеликъ площади прямоугольника AC . BD, имѣющаго стороною AC и высотою BD. И мы имѣемъ

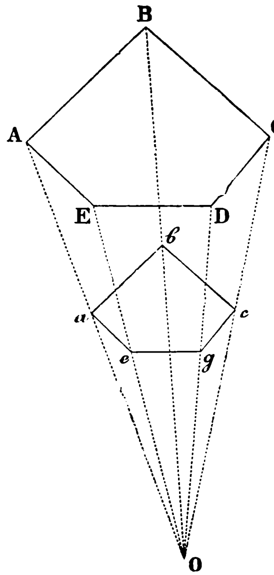
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Д. Методъ подобія.

Теорема. **Если два подобные многоугольника расположены такъ, что двѣ стороны многоугольника параллельны двумъ сходственнымъ сторонамъ другого, то и остальныя сходственныя стороны этихъ многоугольниковъ будутъ также параллельны, и линіи, соединяющія соотвѣт-**

ственныя вершины многоугольниковъ, пересѣкутся въ одной точкѣ.

Даны два многоугольника ABCDE и abcge, при чемъ дано $AB \parallel ab$ и $BC \parallel bc$ (черт. 94); соединимъ A съ a и B съ b и продолжимъ прямыя Aa и Bb до ихъ пересѣченія въ точкѣ O. Точку O соединимъ съ остальными вершинами перваго многоугольника ABCDE; если $AB \parallel ab$ и $BC \parallel bc$, то (вслѣдствіе равенства угловъ $\sphericalangle ABC = \sphericalangle abc$ и $\sphericalangle BCD = bcg$...., $DC \parallel gc$ и т. д.) $\frac{AO}{aO} = \frac{BO}{bO} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$, то мы заключаемъ, что точки c, C и O лежатъ на одной прямой. Также докажемъ, что g лежитъ на DO и e на EO.



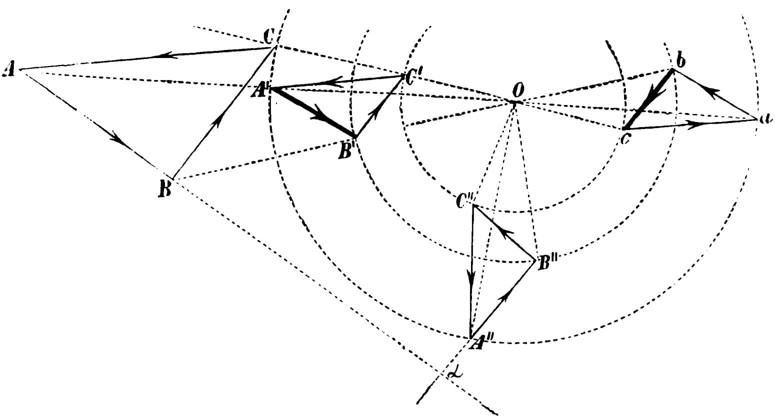
Черт. 94.

Точку O можно разсматривать какъ общую обоимъ многоугольникамъ сходственную точку. Точка O называется *центромъ подобія*; отношеніе $OA : Oa$ называется *отношеніемъ подобія*, а лучи, идущіе изъ центра къ соотвѣтствующимъ вершинамъ, *лучами подобія*.

Такое положеніе двухъ подобныхъ многоугольниковъ наз. *перспективнымъ* по аналогіи съ такимъ же названіемъ положенія фигуръ пространства, помѣщаемыхъ способомъ, подобнымъ указанному.

Два подобныхъ треугольника или многоугольника, стороны которыхъ одинаково расположены, мы всегда можемъ поставить въ перспективное положеніе относительно точки, извѣстнымъ образомъ выбранной.

Имѣемъ два подобныхъ треугольника ABC и $A_{11}B_{11}C_{11}$ (черт. 95), т.-е. такихъ, углы которыхъ равны и стороны пропорціональны; найдемъ уголъ α между соотвѣтствующими сторонами $A_{11}B_{11}$ и AB, для чего продолжимъ сходственныя стороны AB и $A_{11}B_{11}$ до ихъ взаимнаго пересѣченія. Пусть искомый уголъ—α. Если вращеніемъ около неизвѣстной пока точки O прямая $A_{11}B_{11}$ приведется въ положеніе A_1B_1, параллельное AB, то лучъ OA_{11} опишетъ при этомъ уголъ α; если далѣе мы представимъ, что чрезъ точки A_{11}, A и O проходитъ окружность, то дуга этой окружности, проходящая чрезъ O и имѣющая хордой отрѣзокъ AA_{11}, вмѣщаетъ уголъ α; слѣдовательно, неизвѣстный центръ вращенія лежитъ на дугѣ окружности, описанной на AA_{11}, какъ на хордѣ и вмѣщающей уголъ α; точно также тотъ же центръ лежитъ на дугѣ, вмѣщающей уголъ α и описанной на BB_{11}, какъ на хордѣ и т. д.; а потому, искомый центръ вращенія лежитъ на пересѣченіи дугъ круговъ, описанныхъ на отрѣзкахъ, соединяющихъ соотвѣтствующія вершины тре-



Черт. 95.

угольниковъ, какъ на хордахъ, и вмѣщающихъ уголъ, равный углу, образуемому соотвѣтствующими сторонами треугольниковъ. Этотъ центръ вращенія будетъ въ то же время центромъ подобія треугольниковъ. Вращая около центра O треугольникъ $A_{11}B_{11}C_{11}$ на уголъ α, очевидно, приведемъ его въ положеніе $A_1B_1C_1$, перспективное тр-ку ABC. Если мы опредѣлимъ самое подобіе, какъ свойство треугольниковъ занять указанное перспективное положеніе относительно нѣкоторой точки, то можно найти условія, которымъ должны удовлетворять элементы треугольниковъ, чтобы они могли занять перспективное положеніе, и эти условія тожественны съ условіями подобія треугольниковъ.

Если треугольникъ $A'B'C'$ мы повернемъ на уголъ 180° около точки O такъ, что онъ займетъ положеніе abc, то въ новомъ своемъ положеніи треугольникъ будетъ симметриченъ треугольнику $A'B'C'$ и подобенъ треугольнику ABC, но его соотвѣтственные элементы расположатся въ обратномъ порядкѣ. Точка O есть центръ подобія относительно треугольниковъ ABC и $A'B'C'$ и центръ обратнаго подобія относительно треугольниковъ ABC и abc, при чемъ точка O дѣлитъ отрѣзокъ AA' въ отношеніи $AB : A'B'$ внѣшне, ибо $OA : OA' = AB : A'B'$; и та же точка дѣлитъ отрѣзокъ $A'a$ въ томъ же отношеніи, и это дѣленіе внутреннее.

Если мы возьмемъ на одномъ изъ двухъ подобныхъ многоугольниковъ, перспективно расположенныхъ, какую-нибудь точку M, то на другомъ найдемъ соотвѣтствующую точку M_1, и разстояніе этихъ точекъ отъ центра подобія равно $\frac{p}{q} = \frac{MO}{M_1O}$; точно также каждому отрѣзку, лежащему въ плоскости перваго многоугольника, будетъ соотвѣтствовать отрѣзокъ въ плоскости другого, при чемъ отношеніе этихъ отрѣзковъ также равно $\frac{p}{q}$, такъ что одинъ изъ этихъ многоугольниковъ можно разсматривать, какъ увеличенное или уменьшенное изображеніе второго въ отношеніи $\frac{p}{q}$, или какъ, можно сказать, изображеніе, вычерченное по масштабу $\frac{p}{q}$. Если мы будемъ удалять одну фигуру отъ другой, оставляя углы лучей, идущихъ изъ центра, неподвижными, то масштабы изображенія будутъ измѣняться отъ 0 до какой угодно величины.

Этимъ послѣднимъ свойствомъ перспективныхъ фигуръ можно пользоваться для рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ, а именно: если въ условіяхъ задачи даются углы неизвѣстной фигуры, или отношеніе элементовъ, и только одна опредѣленная длина какого-нибудь элемента, то можемъ употребить такой пріемъ: построить сперва фигуру, имѣющую только углы, равные даннымъ, или только такую, въ которой отношеніе элементовъ было бы равно данному; элементъ же, величина котораго дана, будетъ какой-нибудь;

затѣмъ, проведя лучи подобія изъ центра подобія, мы перемѣщаемъ по лучамъ построенную фигуру до такого положенія, при которомъ указанный элементъ пріобрѣтетъ величину, равную данной.

2580. **Построить треугольникъ по двумъ угламъ его и сторонѣ, или высотѣ, или равнодѣлящей, или средней линіи, или радіусу круга, вписаннаго или описаннаго.**

Рѣшеніе. Строимъ какой-нибудь треугольникъ, имѣющій углы, равные даннымъ угламъ. Проводимъ лучи изъ какой-нибудь точки, которую принимаемъ за центръ подобія, чрезъ вершины тр-ка; опредѣляемъ отношеніе даннаго элемента къ соотвѣтствующему элементу построеннаго треугольника; дѣлимъ лучи внѣшнимъ дѣленіемъ въ этомъ отношеніи и, соединивъ точки дѣленія, получимъ искомый треугольникъ.

2581. **Построить треугольникъ, если дано отношеніе двухъ сторонъ его** $m:n$, **уголъ C, между ними лежащій, и противоположная ему сторона c.**

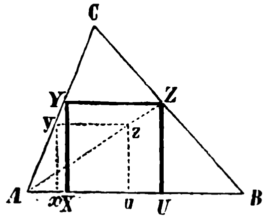
Строимъ какой-нибудь треугольникъ, имѣющій уголъ C и стороны котораго, заключающія уголъ C, находились бы въ отношеніи $m:n$. Соединяемъ концы этихъ сторонъ прямою, а вершины фигуры — съ какой-нибудь точкою; находимъ отношеніе построенной стороны c_1 къ данной c; дѣлимъ отрѣзки лучей между вершинами и центромъ подобія въ отношеніи $c:c_1$, и, соединивъ полученныя точки дѣленія, найдемъ искомый треугольникъ.

Послѣднее построеніе производится такъ: между лучами подобія, проходящими чрезъ концы отрѣзка c_1, помѣщаемъ отрѣзокъ, параллельный c_1 и равный c; концы отрѣзка опредѣляютъ положеніе двухъ вершинъ искомаго треугольника, и, проводя чрезъ концы этого отрѣзка прямыя, параллельныя соотвѣтствующимъ сторонамъ построеннаго треугольника, находимъ искомый треугольникъ.

Приведемъ примѣры другого типа задачъ, для рѣшенія которыхъ можно пользоваться свойствами перспективно подобныхъ фигуръ.

2582. Въ треугольникъ ABC вписать квадратъ такъ, чтобы вершины его лежали на сторонахъ даннаго треугольника.

Строимъ какой-нибудь квадратъ $xyzu$, три вершины котораго лежатъ на сторонахъ треугольника; принимая A за центръ подобія и проведя лучъ AZ до пересѣченія со стороною CB въ точкѣ Z, строимъ квадратъ XYZU, перспективно подобный построенному квадрату xyzu (черт. 96).



Черт. 96.

Теорема. **Двѣ системы точекъ перспективно подобны, если въ ихъ плоскостяхъ существуютъ двѣ точки въ одной O и въ другой O′ такія, что отрѣзки, соединяющіе точку O съ различными точками первой системы, параллельны отрѣзкамъ, соединяющимъ точку O′ съ соотвѣтствующими точками второй системы, и находятся съ ними въ постоянномъ отношеніи.**

Ибо, если $OA : O_1A_1 = m : n$ и если $OA \parallel A_1O_1$, то прямыя AA_1 и OO_1 пересѣкутся въ точкѣ S и $OA : O_1A_1 = OS : O_1S = m : n$; взявъ другую пару отрѣзковъ $OB : O_1B_1 = m : n$, найдемъ, что $BS_1 : B_1S_1 = OS_1 : O_1S_1 = m : n = OS : O_1S$, т.-е., что прямая BB_1 пройдетъ чрезъ S—точку пересѣченія AA_1 и OO_1 и т. д.

Отсюда слѣдуетъ, что:

1) Два подобныхъ многоугольника съ параллельными сторонами—*перспективно подобны.*

2) *Двѣ окружности перспективно подобны,* и центръ подобія S лежитъ на линіи центровъ OO_1 въ такой точкѣ этой линіи, что

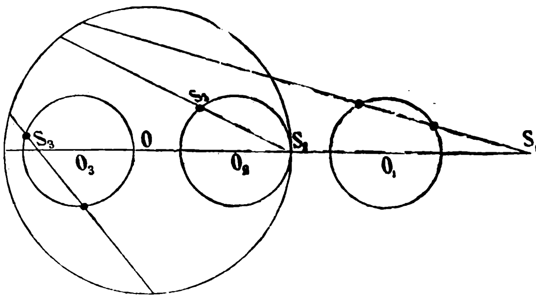
$$\frac{S_1O_1}{SO} = \frac{R_1}{R}.$$

Воспользуемся послѣднимъ свойствомъ для вывода нѣкоторыхъ свойствъ окружности. Замѣтивъ прежде всего, что точки одной изъ перспективно подобныхъ фигуръ суть точки, дѣлящія отрѣзки подобныхъ лучей, лежащихъ между центромъ подобія и соотвѣтствующими точками второй фигуры, въ постоянномъ отношеніи, мы можемъ сказать, что одна изъ фигуръ есть геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ отрѣзки лучей подобія между центромъ подобія и соотвѣтствующими точками второй фигуры въ данномъ отношеніи.

Перспективно подобное изображеніе круга относительно центра подобія есть также кругъ.

Если $\frac{SO}{SO_1} = \frac{R}{R_1} = \frac{m}{n}$ и если SO, SO_1 и R — величины постоянныя, то и R_1 есть величина постоянная. Чтобы построить такой кругъ, дѣлимъ отрѣзокъ SO въ отношенiи $m:n$; изъ точки дѣленiя O_1 описываемъ окружность радiусомъ, равнымъ $SO_1 = \frac{n}{m} R$.

Слѣдовательно, *геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ отрѣзки лучей, идущихъ отъ точки къ окружности, въ отношенiи $m:n$, есть окружность круга* (см. задачи на пропорц. линiи).

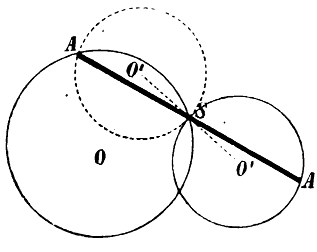


Черт. 97.

При этомъ можно разсмотрѣть три случая, соотвѣтствующiе тремъ положенiямъ центра подобiя: внѣ окружности, на окружности и внутри окружности (черт. 97).

Рѣшимъ, пользуясь свойствами перспективно подобныхъ фигуръ и способомъ геометрическихъ мѣстъ, нѣсколько задачъ, которыя по своему содержанiю не подходятъ подъ типы, указанные выше.

2583. **1. Чрезъ точку пересѣченiя двухъ круговъ провести сѣкущую такъ, чтобы части, отсѣкаемыя обѣими окружностями отъ этихъ сѣкущихъ, были между собою равны.**



Черт. 98.

Даны двѣ пересѣкающiяся окружности O и O_1 (черт. 98). Примемъ точку ихъ пересѣченiя S за центръ подобiя и найдемъ перспективное изображенiе круга O_1 относительно S, равное ему (т.-е. отношенiе подобiя = 1). Тогда части сѣкущихъ, лежащiя въ кругахъ O_1' и O_1 и проходящiя чрезъ S должны быть равны между собою, слѣдовательно, и хорда AS должна равняться хордѣ SA_1, такъ какъ обѣ хорды составляютъ часть сѣкущей, проходящей чрезъ S и лежащей въ кругахъ O_1 и O_1'.

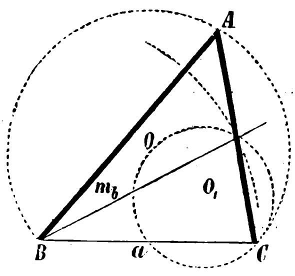
Если отношеніе между хордами по условіямъ задачи должно быть равно $\frac{p}{q}$, то слѣдовало бы построить изображеніе круга O_1' въ масштабѣ $\frac{p}{q}$.

2. Чрезъ точку S, лежащую внутри круга, провести хорду такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась въ отношеніи $\frac{m}{n}$.

Принимаемъ точку S за центръ подобія, строимъ перспективное изображеніе даннаго круга въ масштабѣ $\frac{m}{n}$, и точки пересѣченія окружностей соединяемъ съ S.

2584. **Построить треугольникъ по сторонѣ** a, **средней линіи** m_b **и по углу A.**

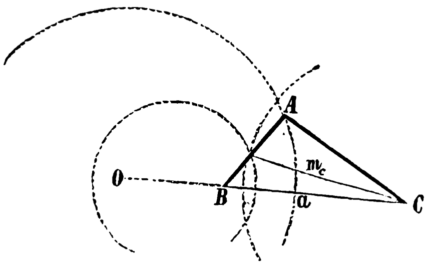
Откладываемъ данный отрѣзокъ BC (черт. 99), равный a; вершина угла A должна лежать на дугѣ круга, вмѣщающей уголъ A и описанной на BC, какъ на хордѣ; середина стороны $b = AC$ должна лежать на окружности круга, описаннаго изъ B, какъ изъ центра радіусомъ, равнымъ m_b; слѣдовательно, если найдемъ второе мѣсто для конца m_b, то треугольникъ найденъ; замѣтимъ, что сторона AC есть хорда перваго круга, и концомъ m_b она дѣлится пополамъ, а потому, если построимъ перспективное изображеніе перваго круга, начерченное въ масштабѣ $^1/_2$, то найдемъ геометрическое мѣсто серединъ хордъ, проходящихъ чрезъ C, т.-е. второе искомое мѣсто. Пересѣченіе послѣдняго круга съ кругомъ вторымъ (радіуса m_b и описаннаго изъ B) дастъ положеніе середины стороны a, слѣдовательно, и стороны b.



Черт. 99.

2585. **Построить треугольникъ по сторонѣ** a, **средней линіи** m_c **и по отношенію сторонъ** b : c.

Разсужденіемъ, подобнымъ предыдущему, приходимъ къ такому построенію: откладываемъ отрѣзокъ BC, равный a (черт. 100), строимъ кругъ Аполлонія, т.-е. находимъ геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ BC въ отношеніи m : n; изъ C описываемъ дугу радіусомъ m_c и находимъ перспективное изображеніе круга Аполлонія относительно центра B въ масштабѣ $^1/_2$; точка пересѣченія перспективнаго круга съ кругомъ, описаннымъ изъ C радіусомъ m_c, дастъ положеніе середины стороны c, а слѣдовательно, и положеніе всей стороны c будетъ опредѣлено.



Черт. 100.

2586. Провести окружность, касающуюся сторонъ угла и проходящую чрезъ данную точку M.

Проводимъ какой-нибудь кругъ O, касающійся двухъ сторонъ угла; вершину S угла принимаемъ за центръ подобія, строимъ кругъ, перспективно подобный первому и проходящій чрезъ точку M. Для этого проводимъ лучъ SM, который пересѣчетъ окружность O въ точкахъ A и B; проводя изъ M линіи, параллельныя линіямъ OA или OB, найдемъ въ пересѣченіи этихъ линій съ равнодѣлящей угла центры искомыхъ круговъ.

2587. На прямой XY найти точку, разстоянія которой отъ данной точки A и прямой CD были бы въ отношеніи m : n.

Изъ какой-нибудь точки D прямой XY опускаемъ перпендикуляръ DE = n на CD, и изъ точки D описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ m; точку пересѣченія XY и CD принимаемъ за центръ подобія; строимъ кругъ, подобный построенному и проходящій чрезъ данную точку A и т. д.

Практическое приложеніе геометріи.

Такъ какъ нѣкоторые существенные признаки геометрическихъ понятій одинаковы съ признаками предметовъ дѣйствительно существующихъ, то является возможность пользоваться выводами геометріи для практическихъ цѣлей; и многіе пріемы, употребляемые для рѣшенія практическихъ вопросовъ, легко объясняются геометрически, такъ какъ свойства нѣкоторыхъ геометрическихъ образовъ и свойства дѣйствительно существующихъ предметовъ одинаковы.

1) Когда плотникъ заготовляетъ бревно для обтесыванія изъ него балки, онъ прежде всего опредѣляетъ положеніе ребра балки; направленіе ребра, которое должно быть прямою линіею, опредѣляется направленіемъ туго натянутой нити между двумя точками, взятыми на бревнѣ.

2) Лучи свѣта распространяются отъ свѣтящейся точки (незначительно удаленной) по прямымъ линіямъ. Для опредѣленія направленія прямой, по которой идетъ лучъ свѣта изъ какой-нибудь точки въ нашъ глазъ, могъ бы служить приборъ, состоящій изъ линейки, на концахъ которой укрѣплены два острія. Помѣщая глазъ и линейку такъ, что свѣтящіяся точки и концы острій казались бы намъ совпавшими, мы можемъ утверждать, что прямая, опредѣляемая концами острій, есть та, по которой идетъ лучъ въ нашъ глазъ.

Линія, проходящая чрезъ концы острій, называется *линіей визированія*, а совмѣщеніе этой линіи съ линіей зрѣнія, направленной къ какому-нибудь предмету, наз. *визированіемъ*. Такое визированіе производится при стрѣльбѣ изъ ружей, гдѣ линія визированія проходитъ чрезъ значки, помѣщенные на стволѣ ружья, и визируемымъ предметомъ служитъ цѣль.

3) Для опредѣленія направленія линіи на мѣстности пользуются сигналами естественными или искусственными. Естественными сигналами могутъ служить колокольни, башни, деревья и другіе предметы, случайно находящіеся на линіи. Искусственными сигналами служатъ вѣхи, поставленныя извѣстнымъ способомъ на линіи. Два такіе сигнала опредѣляютъ двѣ точки, лежащія на прямой, а слѣдовательно, и самую прямую.

Для измѣренія прямыхъ, проведенныхъ на мѣстности между двумя точками, употребляютъ: а) мѣрительную металлическую ленту съ нанесенными на ней дѣленіями, указывающими число единицъ длины — метровъ или саженей;

b) мѣрительную цѣпь, которая приготовляется изъ проволоки; цѣпь состоитъ изъ опредѣленнаго числа звеньевъ, обыкновенно 100 звеньевъ при длинѣ всей цѣпи въ 10 саженъ, соединенныхъ между собою кольцами; c) мѣрную тесьму — послѣдняя употребляется обыкновенно при измѣреніи небольшихъ разстояній и имѣетъ въ длину 5 или 10 саженей; d) мѣрные брусья, приготовляемые обыкновенно изъ дерева и имѣющіе въ длину 5 метровъ; мѣрные брусья употребляются обыкновенно для измѣренія разстоянія за границей. Для опредѣленія длины прямой, мѣрный снарядъ вытягиваютъ по измѣряемой линіи одинъ или нѣсколько разъ, смотря по величинѣ разстоянія, и, такимъ образомъ, узнаютъ длину измѣряемой линіи.

Углы.

1) Линіи, проведенныя на мѣстности, также могутъ пересѣкаться, быть перпендикулярными или параллельными. Нѣкоторыя изъ этихъ линій имѣютъ опредѣленныя направленія и носятъ опредѣленныя названія.

Если къ нити, прикрѣпленной съ одного конца, привязать грузъ и оставить всю систему въ равновѣсіи, то направленіе прямой, совпадающей съ осью нити, наз. *вертикальнымъ* или *отвѣснымъ*.

Всякое свободно падающее на землю тѣло двигается по этой линіи. Плоскость, проходящая чрезъ вертикальную линію, наз. также *вертикальной плоскостью*.

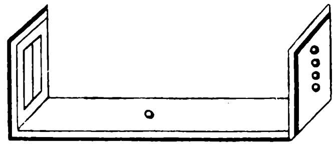
Линія, перпендикулярная къ отвѣсной линіи, наз. *горизонтальной линіей*. Если всѣ линіи, проведенныя на плоскости, горизонтальны, то сама плоскость наз. *горизонтальной плоскостью*.

Углы, которые чаще всего приходится опредѣлять, лежатъ въ плоскости горизонтальной или вертикальной. Опредѣленіе угловъ дѣлается помощью особыхъ инструментовъ, о которыхъ мы дадимъ здѣсь только нѣкоторое понятіе.

Главнѣйшею частью каждаго угломѣрнаго инструмента служитъ линейка, на концахъ которой помѣщаются *діоптры*[1]). Діоптрами наз. двѣ металлическія пластинки, изъ которыхъ

[1]) Греч. сл. dia—насквозь и op—корень глагола—смотрѣть.

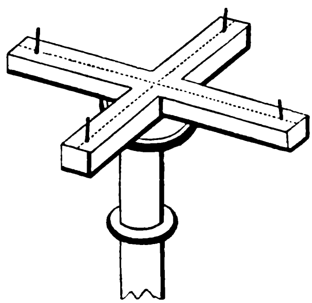
одна имѣетъ нѣсколько круглыхъ отверстій, расположенныхъ на прямой линіи, и эта пластинка наз. *глазнымъ діоптромъ* (черт. 101); другая пластинка имѣетъ четыреугольный вырѣзъ, въ серединѣ котораго натянутъ черный конскій волосъ параллельно линіи, по которой расположены отверстія глазного діоптра. Этотъ діоптръ наз. *предметнымъ діоптромъ*. Оба діоптра помѣщены на концахъ пластинки такъ, чтобы линіи, по которымъ натянутъ волосокъ предметнаго діоптра и расположены отверстія глазного діоптра, были перпендикулярны къ плоскости линейки, которая назыв. *алидадою* [1]. Плоскость, проходящая чрезъ волосъ и одно изъ отверстій, наз. *коллимаціонной плоскостью* [2].



Черт. 101.

Помощью алидады съ діоптрами обыкновенно опредѣляютъ направленіе линіи на мѣстности или, какъ говорятъ, провѣшиваютъ линіи. Для этой цѣли коллимаціонную плоскость устанавливаютъ такъ, чтобы она содержала въ себѣ искомую линію; линейку алидады устанавливаютъ на подставкѣ горизонтально и затѣмъ устанавливаютъ на мѣстности вѣхи такъ, чтобы, смотря на нихъ въ отверстіе глазного діоптра, видѣть ихъ оси покрытыми волоскомъ предметнаго діоптра. Тогда оси вѣхъ, вертикально установленныхъ, будутъ лежать въ коллимаціонной плоскости, и точки ихъ, лежащія въ одной горизонтальной или наклонной плоскости, располагаются по одной прямой.

3. Для проведенія на мѣстности линій, составляющихъ между собою опредѣленные углы, напр., углы, равные одному прямому углу или равные половинѣ прямого угла, употребляются приборы, называемые *экерами* [3]. Простѣйшій изъ нихъ крестообразный экеръ (черт. 102) со-



Черт. 102.

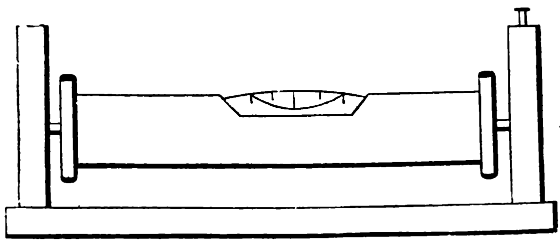
[1] Арабск. сл. означаетъ—ручка, нарукавникъ.

[2] Отъ лат. сл. collimare—совпадать.

[3] Франц. сл. equerre.

треугольника прикрѣплена нить съ привязаннымъ къ ней грузомъ. Когда нить находится въ равновѣсіи, направленіе ея вертикально, и если нижній брусокъ установленъ горизонтально, нить проходитъ чрезъ середину перекладины, гдѣ и дѣлается отмѣтка O.

Для того, чтобы установить плоскость, горизонтально помѣщаютъ брусокъ на плоскости по разнымъ направленіямъ, устанавливая плоскость такъ, чтобы нить отвѣса совпадала съ серединой перекладины. Такъ какъ положеніе плоскости опредѣляется двумя пересѣкающимися линіями, то достаточно переложить на ней ветерпасъ два раза по направленіямъ приблизительно перпендикулярнымъ; при чемъ установка по второму направленію дѣлается вращеніемъ плоскости около оси, параллельной бруску въ первомъ его положеніи. Ватерпасъ обыкновенно употребляется для проведенія горизонтальныхъ линій при постройкахъ. Болѣе точнымъ приборомъ для той же цѣли служитъ уровень; онъ состоитъ изъ стекляннаго цилиндрическаго сосуда, заключеннаго въ мѣдную оправу (черт. 105). Въ стеклянномъ сосудѣ налита жидкость (спиртъ или сѣрный эѳиръ), которая не вполнѣ наполняетъ приборъ, гдѣ образуется искусственно безвоздушный пузырекъ, который всегда занимаетъ высшее мѣсто въ приборѣ. Если оси прибора горизонтальны, то пузырекъ перемѣщается на середину трубки.



Черт. 105.

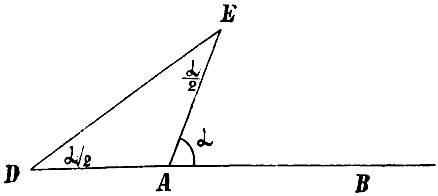
Примѣчаніе. Нижеслѣдующія задачи рѣшаются при помощи экера. Такъ какъ приготовить такой экеръ, коллимаціонныя плоскости котораго были бы дѣйствительно перпендикулярны, трудно, то мы предполагаемъ, что экеръ нашъ невѣрный, что уголъ, образованный его осями, равенъ какому-нибудь углу α, при чемъ величина его есть величина постоянная. Кромѣ того, каждый разъ при установкѣ экера мы предполагаемъ, что плоскости линеекъ экера устанавливаются посредствомъ уровня или ватерпаса горизонтально.

2588. **Провести на мѣстности уголъ, вдвое большiй угла, опредѣляемаго осями экера.**

Рѣшенiе. Проводимъ какую-нибудь прямую на мѣстности и, установивъ экеръ въ какой-нибудь точкѣ прямой, направляемъ одну линейку экера по прямой (параллельно прямой), а въ коллимацiонной плоскости второй линейки провѣшиваемъ новую прямую; затѣмъ поворачиваемъ экеръ на уголъ, равный углу экера, направляемъ вторую линейку параллельно первой прямой, а въ коллимацiонной плоскости первой линейки устанавляемъ вѣхи. Уголъ между 2 послѣдними провѣшенными прямыми — искомый.

2589. **Провѣсить на мѣстности уголъ, вдвое меньшiй угла экера, пользуясь, кромѣ экера, и мѣрной лентой или цѣпью.**

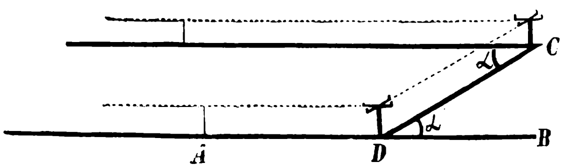
Рѣшенiе. На произвольной прямой AB помощью экера строимъ уголъ α, провѣшивая прямую по одной оси экера и совмѣстивъ предварительно вторую съ прямой AB. Затѣмъ отмѣряемъ два равныхъ отрѣзка, одинъ на сторонѣ AE угла α и другой AD, равный AE, на продолженiи другой стороны; тогда $\measuredangle$EDA—искомый (черт. 106).



Черт. 106.

2590. **Чрезъ точку C провести прямую, параллельную данной прямой на мѣстности** (черт. 107).

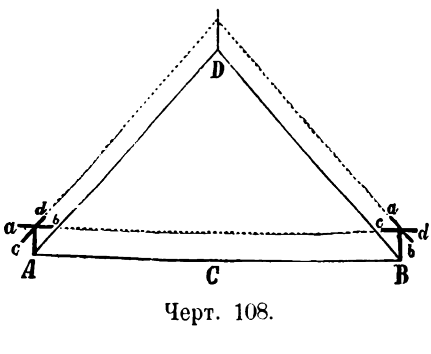
Рѣшенiе. Идемъ по прямой AB, направляя все время одну линейку экера по AB, дотѣхъ поръ, пока коллимацiонная плоскость второй линейки не пройдетъ черезъ C; тогда, отмѣтивъ то положенiе экера D на прямой вѣхой, уходимъ съ экеромъ въ точку C, визируемъ чрезъ одну линейку точку D; тогда другая линейка экера укажетъ направленiе искомой прямой.



Черт. 107.

2591. **Возставить перпендикуляръ къ прямой на мѣстности изъ данной точки на ней** (черт. 108).

Рѣшенiе. Отмѣриваемъ



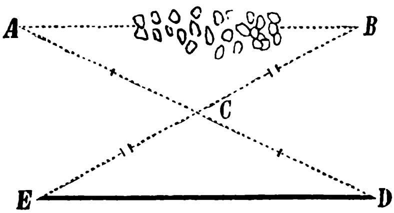
Черт. 108.

отъ точки C по обѣ стороны два равныхъ отрѣзка AC и CB. Поставивъ экеръ въ A, направляемъ линейку ab по AB, а по линейкѣ cd провѣшиваемъ прямую. Затѣмъ, перейдя въ точку B, направляемъ линейку cd по AB и по линейкѣ ab провѣшиваемъ прямую. Точку пересѣченія D провѣшенныхъ прямыхъ соединяемъ съ C; прямая CD искомая.

2592. **Изъ данной точки D опустить на прямую перпендикуляръ.**

Рѣшеніе. Направляя линейку ab экера по AB, идемъ по AB до той точки ея A, изъ которой D будетъ визироваться по прямой cd—оси второй линейки экера; изъ этой же точки A по другую сторону прямой AB провѣшиваемъ линію AE по прямой ab, направляя cd по линіи AB, отмѣриваемъ AE=AD и найдемъ, что прямая DE—искомая.

2593. **Измѣрить разстояніе между двумя точками A и B, если по линіи AB нельзя пройти съ мѣрной цѣпью.**

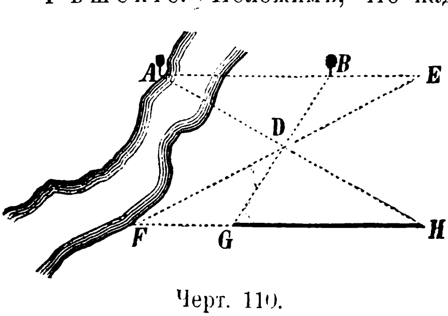


Черт. 109.

Рѣшеніе. Выбираемъ такую точку C, изъ которой были бы видны какъ точка A, такъ и B. Провѣшиваемъ AC и BC, продолжаемъ ихъ за точку C и отмѣряемъ CD=AC и EC=CB. Тогда линія ED равна AB (черт. 109).

2594. **Измѣрить разстояніе между двумя точками, если можно подойти только къ одной изъ нихъ** (черт. 110).

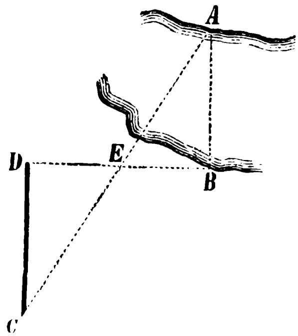
Рѣшеніе. Положимъ, что надо измѣрить разстояніе между двумя деревьями A и B, при чемъ одно изъ этихъ деревьевъ находится за рѣкой. Провѣшиваемъ и измѣряемъ прямую BE, находящуюся на продолженіи AB. Выбираемъ на мѣстности точку D, изъ которой видны точки A, B и E. Провѣшиваемъ прямыя BDG и EDF и отмѣряемъ FD = DE и DG = BD. Идемъ по прямой FG, визируя точку A, пока не найдемъ такую точку H, которая лежитъ на прямой AD. Тогда GH — искомое разстояніе.



Черт. 110.

2595. **Измѣрить ширину рѣки** (черт. 111).

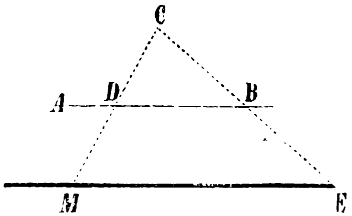
Рѣшеніе. Отмѣтимъ прямую AB, опредѣленную двумя точками A и B, лежащими по разныя стороны рѣки. Помощью экера проведемъ прямую опредѣленной длины BD, перпендикулярно къ AB. Дѣлимъ DB пополамъ въ точкѣ E. Возставляемъ перпендикуляръ DC къ BD въ точкѣ D; идемъ по DC, визируя A до той точки C, которая лежитъ на прямой AE. Длина DC равна AB.



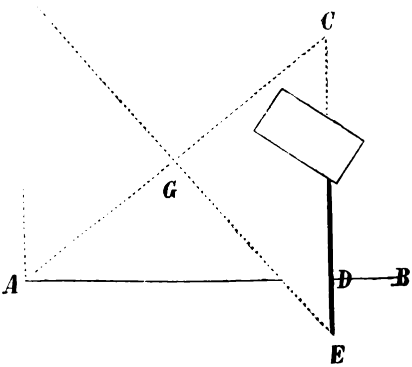
Черт. 111.

2596. **Помощью мѣрной цѣпи провести чрезъ точку M прямую, параллельную данной прямой AB** (черт. 112).

Рѣшеніе. Изъ точки M провѣшиваемъ прямую MC, пересѣкающую AB въ точкѣ D; дѣлаемъ MD = DC. Изъ точки C провѣшиваемъ новую прямую CE, пересѣкающую AB въ точкѣ B. Дѣлаемъ BE=CB. Прямая ME—искомая.



Черт. 112.



Черт. 113.

2597. **Раздѣлить уголъ между прямыми AO и BO пополамъ.**

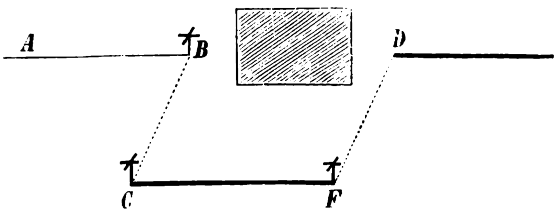
Рѣшеніе. Отмѣряемъ OA = OB. Середину AB соединяемъ съ вершиной O угла; эта послѣдняя прямая — искомая.

2598. **Найти на прямой AB проекцію на нее точки C, если между C и AB, на пути перпендикуляра изъ C на AB, лежитъ препятствіе** (черт. 113).

Рѣшеніе. Изъ той точки A прямой AB, гдѣ позволяетъ мѣстность и изъ которой видна точка C, возставляемъ перпендикуляръ AF къ прямой AB; провѣшиваемъ AC, дѣлимъ ее въ точкѣ G пополамъ и провѣшиваемъ FG; отмѣряемъ GE = FG; перпендикуляръ ED, опущенный изъ E на AB, опредѣляетъ искомую точку D.

2599. **Продолжить прямую за препятствіе, не позволяющее видѣть направленіе прямой.**

Рѣшеніе. Положимъ, что на пути прокладываемой прямой AB (черт. 114) находится зданіе, которое закрываетъ для наблюдателя, стоящаго въ B, мѣстность, лежащую на пути AB. Тогда изъ точки B провѣшиваютъ прямую BC подъ угломъ къ AB равнымъ углу экера, переходятъ въ C и провѣшиваютъ помощью того же экера прямую CF подъ угломъ съ прямою BC, равнымъ углу экера, затѣмъ идутъ по CF до той точки ея F, изъ которой видна мѣстность, лежащая за зданіемъ на пути прямой AB, и провѣшиваютъ прямую, параллельную BC, отмѣряютъ на ней отрѣзокъ DF, равный BC; точка D — лежитъ на прямой AB. Длина BD, очевидно, равна CF.



Черт. 114.

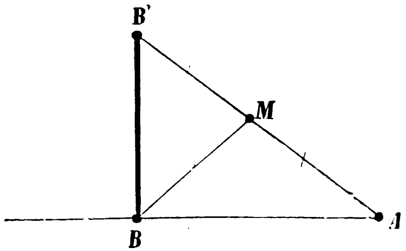
Помощью мѣрнаго шнура, опираясь на свойства параллелограмма и ромба, можно произвести многія измѣренія на мѣстности. Для этой цѣли шнуру даютъ такой видъ: два одинаковой длины шнура соединяютъ кольцомъ, къ свободнымъ концамъ привязываютъ также по кольцу; размѣры кольцамъ даютъ такіе, чтобы чрезъ нихъ могли свободно проходить колья или вѣхи, употребляемые для обозначенія точекъ на мѣстности.

2600. **Построить на мѣстности ромбъ, одна изъ сторонъ котораго совпала бы съ данной прямой.**

Рѣшеніе. Среднее кольцо и начало шнура, вытягивая шнуръ, укрѣпляютъ на данной прямой; другой конецъ шнура, вытягивая, прикрѣпляютъ внѣ прямой. Закрѣпляютъ оба конца, а среднее кольцо переносятъ по другую сторону прямой, опредѣляемой концами шнура, также натягивая шнуръ; тогда концы шнура и два послѣдовательныя положенія средняго кольца опредѣляютъ положеніе вершинъ искомаго ромба.

2601. **Построить прямоугольный треугольникъ на мѣстности на данной линіи AB.**

Рѣшеніе. Вытягиваемъ шнуръ такъ, чтобы только начало шнура A лежало на данной прямой AB; закрѣпивъ среднее кольцо M и начало шнура и отмѣтивъ положеніе конца B_1 шнура, переносимъ послѣдній въ точку B на данной прямой: треугольникъ, вершины котораго A, B, и B′—прямоугольный (черт. 115).



Черт. 115.

2602. **Въ данной точкѣ на прямой возставить къ послѣдней перпендикуляръ.**

Рѣшеніе. Помѣщая концы шнура такъ, чтобы конецъ его помѣстился въ данной точкѣ B, а начало гдѣ-нибудь на данной прямой въ разстояніи BA′, равномъ половинѣ длины шнура, вытягиваемъ шнуръ за среднее кольцо M; укрѣпивъ послѣднее и начало шнура, освобождаемъ конецъ шнура B, вытягиваемъ весь его по прямой MA; тогда новое положеніе конца шнура B′ лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ B къ прямой BA.

2603. **Раздѣлить данный уголъ пополамъ.**

Рѣшеніе. Укрѣпивъ среднее кольцо на вершинѣ угла, вытягиваемъ шнуръ по сторонамъ; укрѣпляемъ концы, освобождаемъ среднее кольцо и натягиваемъ шнуръ, помѣщая среднее кольцо между сторонами угла; равнодѣлящая проходитъ чрезъ два послѣдовательныя положенія средняго кольца.

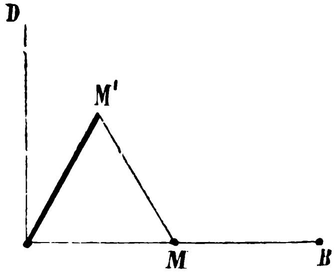
2604. **Данный отрѣзокъ раздѣлить пополамъ.**

Рѣшеніе. Уменьшая на одинаковую длину съ обоихъ концовъ отрѣзокъ, получаемъ отрѣзокъ, меньшій длины шнура. Концы шнура укрѣпляемъ въ концахъ уменьшеннаго, такимъ образомъ, отрѣзка и вытягиваемъ шнуръ два раза, помѣщая среднее кольцо по разныя стороны отрѣзка. Прямая, опредѣляемая двумя послѣдовательными положеніями средняго кольца, дѣлитъ данный отрѣзокъ пополамъ.

2605. **Чрезъ данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.**

Рѣшеніе. Строимъ ромбъ такъ, какъ указано въ зад. 2601, помѣщая одинъ изъ концовъ шнура въ данной точкѣ. Если разстояніе точки отъ прямой велико, то строимъ послѣдовательно нѣсколько ромбовъ такъ, чтобы каждые два ромба имѣли общую сторону, параллельную данной прямой.

2606. **Раздѣлить прямой уголъ на три равныя части.**



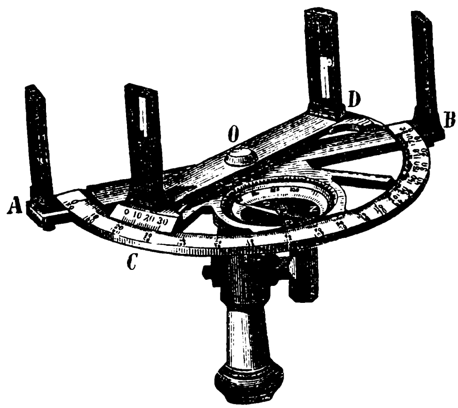
Черт. 116.

Рѣшеніе. Вытягиваемъ шнуръ по одной сторонѣ прямого угла, помѣщая начало шнура въ точкѣ A; затѣмъ переносимъ конецъ шнура въ ту точку, гдѣ приходилось среднее кольцо; вытягиваемъ шнуръ за среднее кольцо такъ, чтобы онъ занялъ положеніе AM'M; $\measuredangle$ DAM' $= \frac{1}{3}$ d (черт. 116).

2607. **Какъ помощью шнура опустить изъ данной точки на прямую перпендикуляръ?**

Угломѣрные инструменты.

На геометрическихъ свойствахъ дугъ и центральныхъ угловъ основано устройство угломѣрныхъ инструментовъ, дающихъ возможность опредѣлить величину угла въ градусахъ и доляхъ градуса.

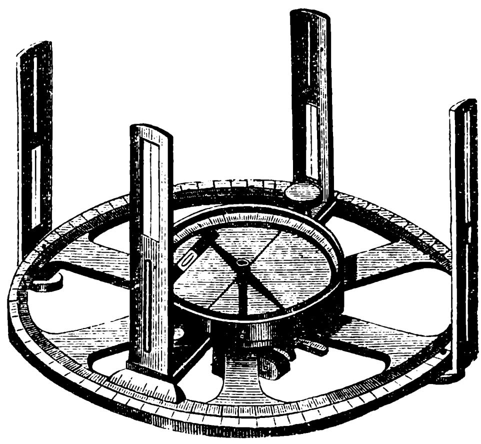


Черт. 117.

1. Простѣйшимъ изъ нихъ можетъ служить *графометръ* (черт. 117); онъ состоитъ изъ полуокружности ABC (*лимбъ*), на концахъ діаметра которой укрѣплены неподвижно два діоптра, такъ что коллимаціонная плоскость діоптровъ перпендикулярна къ плоскости лимба. Около центра круга, скользя по окружности лимба, вращается линейка (*алидада*), снабженная такимъ же способомъ установленными діоптрами. Полуокружность лимба раздѣлена на градусы отъ 0 до 180°, при чемъ эти послѣднія дѣленія стоятъ въ концахъ неподвижнаго діаметра. Конецъ линейки снабженъ верньеромъ, дающимъ возможность отсчитывать доли дѣленій лимба,

при чемъ 0 верньера лежитъ въ коллимаціонной плоскости линейки. Приборъ помѣщается на штативѣ. Для опредѣленія угла между двумя провѣшенными на мѣстности линіями, устанавливаютъ приборъ такъ, чтобы лимбъ лежалъ въ горизонтальной плоскости, а центръ его совпадалъ съ вершиною угла или лежалъ бы съ послѣдней на одной отвѣсной линіи; затѣмъ весь лимбъ поворачиваютъ около центра его въ горизонтальной плоскости такъ, чтобы коллимаціонная плоскость неподвижныхъ діоптровъ совпала съ одной изъ сторонъ опредѣляемаго угла; установивъ неподвижный лимбъ, приводятъ въ совпаденіе коллимаціонную плоскость алидады со второй стороной угла; тогда число градусовъ опредѣляемаго угла прямо читаемъ на лимбѣ между смежными неподвижнымъ A и подвижнымъ C діоптрами, противъ 0 верньера алидады, такъ какъ часть дуги AC между ними измѣряетъ уголъ между визирными линіями, совпадающими со сторонами угла.

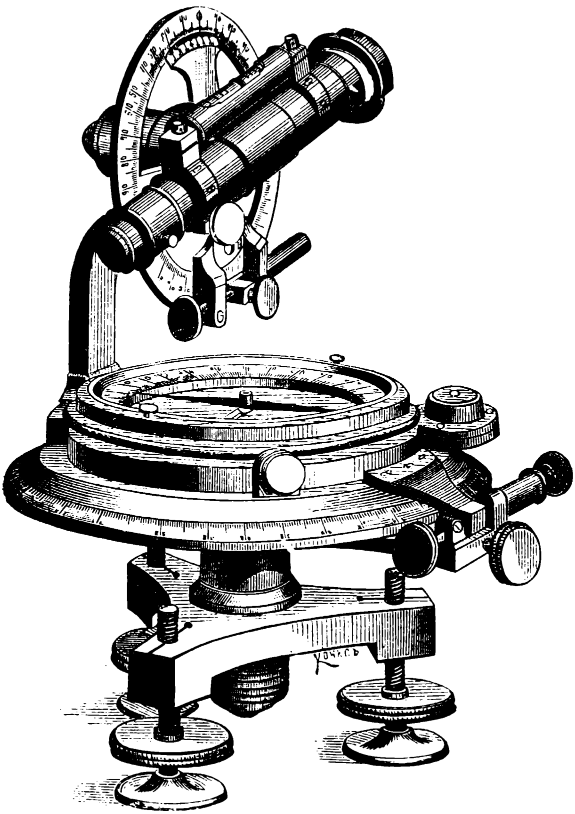
2. Самый распространенный у насъ приборъ, служащій для измѣреній угловъ, есть *астролябія* (черт. 118). Лимбъ ея состоитъ изъ полнаго круга, въ концахъ одного изъ діаметровъ котораго, проходящаго чрезъ 0 и 180^0 градусныхъ дѣленій, прикрѣплены неподвижно два діоптра. Въ центрѣ лимба на оси вращается линейка — алидада, снабженная на своихъ концахъ также діоптрами. На одномъ концѣ вращающейся линейки сдѣлана отмѣтка, а на другомъ—верньеръ; 0 (нуль) верньера и отмѣтка лежатъ въ коллимаціонной плоскости подвижныхъ діоптровъ. Въ срединѣ алидады въ центрѣ лимба закрѣпленъ компасъ, состоящій изъ коробки и магнитной стрѣлки, наложенной на шпиль и свободно



Черт. 118.

вращающейся на немъ, при чемъ шпиль обыкновенно помѣщается въ центрѣ лимба. Для приведенія лимба въ горизонтальное положеніе его снабжаютъ уровнемъ. Установка и опредѣленіе угловъ дѣлается такъ же, какъ съ помощью графометра. Вмѣсто діоптровъ на алидадѣ иногда укрѣпляютъ зрительную трубу, которая и служитъ визирнымъ снарядомъ.

3. Простѣйшимъ угломѣрнымъ снарядомъ служитъ *буссоль*. Снарядъ этотъ обыкновенно состоитъ изъ линейки съ діоптрами на концахъ, а въ серединѣ линейки помѣщается компасъ, который и есть, собственно, буссоль. На чертежѣ (119) представлена буссоль Брейтгаупта, въ соединеніи съ теодолитомъ.



Черт. 119.

Она состоитъ изъ коробки компаса, который можетъ вращаться вмѣстѣ съ прикрѣпленной къ ней зрительной трубкой въ горизонтальной плоскости, при чемъ углы, на которые вращается коробка, отсчитываются по дѣленіямъ неподвижнаго горизонтальнаго круга. Зрительная труба можетъ вращаться, кромѣ того, въ вертикальной плоскости, и углы, на которые производится это вращеніе, отсчитываются по вертикальному кругу.

Это приспособленіе даетъ возможность измѣрять высоту точекъ надъ плоскостью горизонта и вообще углы въ вертикальной плоскости.

Для опредѣленія угла между двумя прямыми, помѣщаютъ обыкновенную буссоль такъ, чтобы центръ визирнаго прибора лежалъ на одной отвѣсной прямой съ вершиной опредѣляемаго угла, и затѣмъ направляютъ визирный снарядъ сперва по одной сторонѣ угла, затѣмъ—по другой, и число градусовъ дуги, которую опишетъ конецъ линейки визирнаго снаряда по неподвижному лимбу и есть уголъ между прямыми.

Кромѣ опредѣленія угла между прямыми, тѣ же приборы даютъ возможность вполнѣ опредѣлить направленіе каждой прямой на мѣстности. А именно, мы видѣли, что, какъ астролябія, такъ и буссоль снабжены компасомъ. Внутри коробки компаса обыкновенно помѣщается высеребренное кольцо такихъ размѣровъ, чтобы концы магнитной стрѣлки достигали его окружности. Кольцо это раздѣлено на градусы отъ 0^0 до 360^0, или раздѣлено на 4 равныя части, и дуга каждой изъ нихъ раздѣлена на 90 частей.

Магнитная стрѣлка, свободно подвѣшенная, имѣетъ опредѣленное направленіе; а потому уголъ между осью стрѣлки и прямой опредѣляетъ положеніе прямой. Уголъ между осью стрѣлки, считая отъ конца ея, направленнаго къ сѣверу, и какимъ-нибудь направленіемъ называется *магнитнымъ азимутомъ* [1]). Азимутъ отсчитывается вправо отъ сѣвернаго конца стрѣлки отъ 0^0 до 360^0. Ось магнитной стрѣлки не совпадетъ съ географическимъ меридіаномъ, и уголъ между осью магнитной стрѣлки и географическимъ меридіаномъ называется магнитнымъ *склоненіемъ*. Если намъ извѣстно склоненіе стрѣлки въ данномъ мѣстѣ, то понятно, что помощью буссоли мы можемъ опредѣлить уголъ между прямою на мѣстности и географическимъ меридіаномъ, т.-е. то, что называютъ *истиннымъ азимутомъ*. Въ тѣхъ буссоляхъ, въ которыхъ кольцо компаса раздѣлено на четыре части, между магнитной стрѣлкой и прямой опредѣляется только острый уголъ отъ сѣвернаго или южнаго конца стрѣл-

[1]) Азимутъ—арабское слово—значитъ дорога, тропинка.

ки въ обѣ стороны; такъ опредѣляемый уголъ наз. уже не азимутомъ, а *магнитнымъ румбомъ*; изъ магнитнаго румба, сдѣлавъ поправку на склоненіе стрѣлки, можно найти истинный *румбъ,* т.-е. уголъ между прямой и меридіаномъ.

Румбическій уголъ только тогда опредѣляетъ положеніе прямой на мѣстности, когда извѣстна та четверть круга компаса, чрезъ которую она проходитъ. Четверти эти называются: NO (нордъ-остъ), SO (зюдъ-остъ), SW (зюдъ-вестъ) и NW (нордъ-вестъ).

Само собою понятно, что если намъ извѣстны азимуты двухъ линій, или ихъ румбическіе углы (съ указаніемъ частей горизонта, чрезъ которыя онѣ проходятъ въ послѣднемъ случаѣ), то мы сложеніемъ или вычитаніемъ найдемъ и углы между прямыми. А потому, опредѣленіе угла между прямыми приводится къ опредѣленію азимутовъ сторонъ угла.

Покажемъ, какъ пользуются этими инструментами при рѣшеніи нѣкоторыхъ элементарныхъ задачъ на мѣстности.

2608. **Чрезъ данную точку M провести прямую, параллельную прямой AB на мѣстности.**

Становимся на линіи AB такъ, чтобы отвѣсная линія изъ центра буссоли падала на линію AB; направляемъ алидадный кругъ (или алидаду) такъ, чтобы ось визирнаго прибора пошла по направленію AB; отсчитавъ азимутъ AB по компасу, идемъ въ точку M, направляемъ алидадный кругъ такъ, чтобы ось визирнаго снаряда составляла съ осью стрѣлки тотъ же азимутъ; тогда прямая, провѣшенная по оси визирнаго снаряда,—искомая.

2609. **Изъ точки M мѣстности опустить перпендикуляръ на прямую AB.**

Опредѣляемъ азимутъ α прямой AB, какъ указано выше, переходимъ въ M, устанавливаемъ алидадный кругъ такъ, чтобы ось визирнаго снаряда имѣла азимутъ $(\alpha+90)$, и провѣшиваемъ линію по оси визирнаго снаряда (предполагая $\alpha < 180^0$; если же $\alpha > 180^0$, то азимутъ оси въ M долженъ быть равенъ $\alpha - 90$).

2610. **Найти на мѣстности точку, лежащую на прямой AB** (непровѣшенной).

---

[1]) Румбъ греч., rhómbos—кругъ, колесо.

Выбираемъ на глазъ точку C, приблизительно лежащую на AB, направляемъ трубку на A; затѣмъ, вращая трубу въ вертикальной плоскости, не трогая лимба, переводимъ объективъ ея въ противоположную сторону, визируемъ точку B; и, если окажется, что эта послѣдняя лежитъ правѣе оси трубы, то перемѣщаемся со снарядомъ вправо въ точку C_1, и снова провѣряемъ тѣмъ же путемъ положеніе точки C_1, до тѣхъ поръ, пока не найдемъ такого положенія, при которомъ точки A и B совмѣстятся съ осью трубы.

2611. **Изъ точки C прямой AB возставить къ ней перпендикуляръ.**

Опредѣляемъ азимутъ α прямой AB, вращая алидадный кругъ въ горизонтальной плоскости до тѣхъ поръ, пока ось визирнаго прибора не будетъ имѣть азимута $\alpha + 90^0$ (или $\alpha + 270^0$). Затѣмъ провѣшиваемъ искомую прямую по оси.

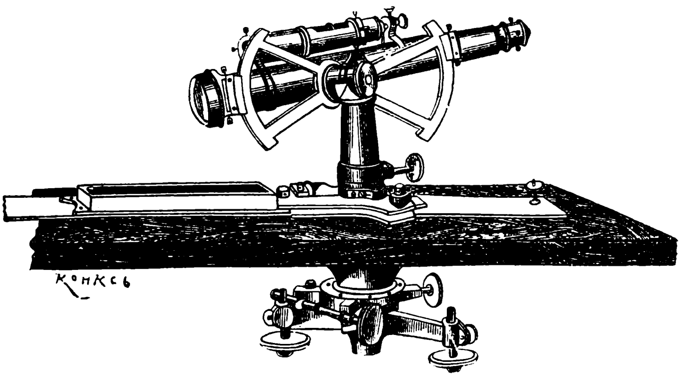
2612. **При точкѣ A прямой AB на мѣстности построить уголъ, имѣющій β^0.**

Опредѣляемъ азимутъ α прямой и затѣмъ вращаемъ алидадный кругъ на уголъ $\alpha + \beta$ или $\beta - \alpha$; тогда получаемъ два искомыхъ направленія, лежащихъ по разныя стороны прямой.

Разсмотрѣнные до сихъ поръ угломѣрные снаряды опредѣляютъ величину угла между двумя линіями на мѣстности въ градусахъ и доляхъ градуса; указанный на черт. 120 инструментъ даетъ возможность опредѣлить величину такого же угла прямо графически. Инструментъ состоитъ изъ доски квадратной формы съ плоскою поверхностью, устроенной такъ, чтобы она не могла коробиться; доска эта положена на штативъ или треножникъ, который такъ устраивается, чтобы доска, на него наложенная, могла быть приведена въ горизонтальное положеніе и могла бы вращаться около вертикальной оси. Приборъ наз. *мензулой*.

На самой доскѣ помѣщается визирный приборъ и уровень, помощью котораго доска приводится въ горизонтальное положеніе. Визирный приборъ состоитъ изъ алидады, т.-е. металлической линейки, на концахъ которой укрѣплены діоптры. Діоптры обыкновенно помѣщаются на линейкахъ такъ, чтобы ихъ коллимаціонная плоскость совпадала съ краемъ линейки. По линейкѣ и чертятъ линіи мѣстности, лежащія въ коллимаціонной плоскости ея. Вмѣсто діоптровъ на алидадѣ помѣщается иногда на цилиндрической подставкѣ зрительная труба, ось которой совпадаетъ съ направленіемъ линейки; алидада съ зрительной трубою наз. *кипрегелемъ* [1]). Такая мензула и показана на черт. 120. Кромѣ того, приборъ снабжается особымъ приспособленіемъ (вилкою), помощью котораго можно убѣдиться, стоитъ ли какая-нибудь точка *a* мензулы на одной отвѣсной линіи съ соотвѣтствующей точкой A мѣстности.

Чтобы помощью мензулы начертить на бумагѣ уголъ, равный углу BAC, образуемому двумя линіями на мѣстности, поступаютъ такъ: ставятъ мензулу въ вершинѣ A измѣряемаго угла, приведя предварительно доску съ наклеенной на



Черт. 120.

ней бумагою въ горизонтальное положеніе, опредѣляютъ на доскѣ помощью вилки ту точку, a, которая стоитъ на одной отвѣсной линіи съ A на мѣстности, затѣмъ, приставивъ алидаду краемъ къ a, визируютъ точку B, а потомъ точку C, и послѣ каждаго визированія проводятъ остро очиненнымъ карандашомъ по краю алидады линіи ac и ab, и тогда уголъ bac равенъ углу BAC.

Доска мензулы при этомъ устанавливается такъ, что линіи, соединяющія точки верхней поверхности доски, параллельны соотвѣтствующимъ линіямъ на мѣстности; такая установка наз. *оріентированіемъ мензулы.*

---

[1]) Отъ нѣм. слова kippen—вращаться, и франц. слова—règle—линейка.

Чтобы помощью мензулы провести линію АС, составляющую съ линіей АВ на мѣстности уголъ въ извѣстное число градусовъ, чертятъ предварительно на мензулѣ, помощью транспортира уголъ cab, имѣющій требуемое число градусовъ, ставятъ мензулу такъ, чтобы точка a приходилась надъ А мѣстности, прямая ab была бы параллельна АВ (оріентируютъ по ab), и затѣмъ край линейки визирнаго снаряда совмѣщаютъ съ ac, и ставятъ въ коллимаціонной плоскости алидады вѣхи, которыя и опредѣляютъ искомое направленіе АС—прямой на мѣстности.

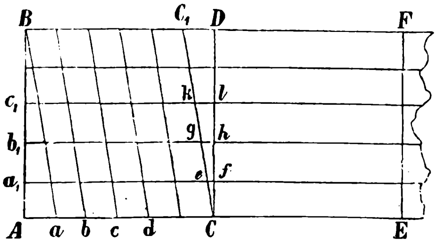
Масштабъ.

Масштабъ есть приборъ, помощью котораго линіи опредѣленной длины на мѣстности наносятся на бумагу въ уменьшенномъ видѣ.

Линейнымъ масштабомъ можетъ служить простая линейка (черт. 1), раздѣленная, напр., на сантиметры и миллиметры. Если условимся отрѣзокъ, начерченный на бумагѣ, длиною въ 1 сантиметръ считать соотвѣтствующимъ линіи въ 100 метровъ на мѣстности, то отрѣзокъ длиною въ 1 мил. надо принять соотвѣтствующимъ длинѣ линіи въ 10 метровъ. Длина 1 сантиметръ называется основаніемъ масштаба.

Такъ, чтобы начертить на бумагѣ линію, соотвѣтствующую 240 метрамъ, мы чертимъ на бумагѣ линію длиною въ 2 сант. и 4 мил., нанося эту длину съ линейнаго масштаба помощью циркуля. Если бы длина наносимой линіи была равна 243 метрамъ, то съ масштаба пришлось бы сносить на чертежъ кромѣ 240 милл. еще 0,3 миллиметра, и такое мелкое дѣленіе пришлось бы дѣлать на глазъ, т.-е. съ ошибкою трудно опредѣляемой, а потому въ такихъ случаяхъ прибѣгаютъ къ болѣе сложному прибору, называемому *поперечнымъ масштабомъ*.

Устройство поперечнаго масштаба основано на свойствахъ пропорціональныхъ линій. Приборъ приготовляютъ такъ: берутъ линейный масштабъ и въ концахъ отрѣзковъ его, принятыхъ за основаніе масштаба, возставляютъ перпендикуляры AB, CD, EF..., на которыхъ откладываютъ произвольныя, но равныя между собою длины. Основаніе масштаба AC—дѣлятъ на m равныхъ частей (черт. 121); конецъ перваго изъ этихъ



Черт. 121.

дѣленій a соединяютъ съ концомъ B перваго перпендикуляра, изъ остальныхъ точекъ дѣленія b, c, d... проводятъ прямыя, параллельныя прямой aB. Перпендикуляръ AB дѣлятъ на n частей и изъ точекъ дѣленія проводятъ прямыя, параллельныя AC. Тогда нетрудно видѣть, что длина отрѣзка ef этого масштаба равна $\frac{1}{m.\ n}$ длины отрѣзка, взятаго за основаніе.

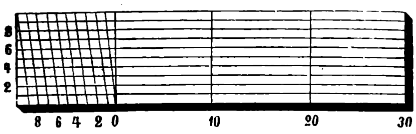
Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $ef \parallel DC_1$, то $\frac{ef}{DC_1}=\frac{fC}{CD}$, или $ef=$ $=\frac{fC\ .\ DC_1}{CD}$; но $fC=\frac{1}{n}CD$; $DC_1=\frac{1}{m}$ AC, то $ef=\frac{1}{mn}$ AC.

Также найдемъ, что отрѣзокъ $gh=\frac{2}{mn}$ AC; $kl=\frac{3}{mn}$ AC.

Въ нашемъ примѣрѣ $ef=\frac{1}{30}$ AC.

Такъ что, если мы условимся отрѣзокъ AC считать за 30 саженъ, то отрѣзокъ ef надо принять равнымъ 1 сажени, отрѣзокъ gh—двумъ саженямъ и т. д.

Общій видъ масштаба данъ на черт. 122; масштабъ даетъ возможность откладывать $^1/_{10}$ доли наименьшаго дѣленія линейнаго масштаба.



Черт. 122.

Для того, чтобы по этому масштабу отложить 2,43, циркулемъ измѣряютъ длину по третьей снизу горизонтальной линіи, ставя одну ножку циркуля въ точкѣ пересѣченія этой линіи съ перпендикуляромъ, отмѣченнымъ цифрою 20, а вторую ножку на пересѣченіе той же линіи съ наклонной линіей, отмѣченной цифрою 4.

За основаніе линейнаго масштаба можно взять любой отрѣзокъ, но обыкновенно берутъ часть той единицы мѣры длины, которою измѣряются линіи на мѣстности. У насъ длина измѣряется саженями и за основаніе масштаба берутъ 1 дюймъ $= {}^1/_{84}$ сажени. Отношеніе основанія масштаба къ длинѣ линіи, ею обозначаемой, называется *численнымъ масштабомъ*. Численный масштабъ обыкновенно выражается дробью. Если въ каждомъ дюймѣ считать сто саженей, то численный масштабъ при такихъ условіяхъ $= \frac{1}{8400}$.

Когда рѣшаютъ вопросъ, въ какомъ масштабѣ удобнѣе изобразить линіи на мѣстности, то руководствуются какъ размѣрами чертежа, такъ и его ясностью; при этомъ руководствуются тѣмъ соображеніемъ, что наименьшая длина, свободно различаемая простымъ глазомъ на бумагѣ $= {}^1/_{200}$ части дюйма; такъ что наименьшая длина, отличаемая при масштабѣ $\frac{1}{8400}$, выражаетъ длину на мѣстности въ 0,5 саж., при масштабѣ $\frac{1}{4200}$ — 0,25 саж.

Числа 0,5, 0,25... называются точностью масштаба.

Перерисовка плановъ.

Построеніе фигуръ подобныхъ имѣетъ приложеніе при перерисовкѣ плановъ съ измѣненіемъ масштаба. Пріемы такой перерисовки слѣдующіе.

1. Дѣлятъ фигуру оригинала на треугольники; изъ этихъ треугольниковъ выбираютъ такой, который занимаетъ среднее положеніе относительно остальныхъ треугольниковъ; на копіи чертятъ прежде всего треугольникъ, подобный этому среднему треугольнику, въ измѣненномъ, согласно требованію, масштабѣ, и къ нему одинъ за однимъ пристраиваютъ треугольники, подобные соотвѣтствующимъ треугольникамъ оригинала. При такомъ построеніи погрѣшности самого построенія въ одну сторону уменьшаются.

2. Около фигуры оригинала чертятъ прямоугольникъ ABCD такъ, чтобы вся фигура оригинала лежала въ этомъ

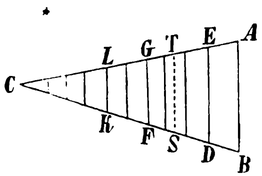
прямоугольникѣ. Затѣмъ разбиваютъ этотъ прямоугольникъ на квадраты линіями, параллельными сторонамъ прямоугольника. На листѣ бумаги чертятъ другой прямоугольникъ abcd, подобный первому, такъ, чтобы

$$AB : ab = BC : bc = m : n,$$

гдѣ число $\frac{m}{n}$ указываетъ, въ какомъ отношеніи должны быть измѣнены линіи копій. Прямоугольникъ abcd, въ свою очередь, дѣлятъ на такое же число квадратовъ, на которое былъ раздѣленъ прямоугольникъ ABCD, и въ каждомъ квадратѣ копіи (abcd) чертятъ тѣ части фигуры, которыя находятся въ соотвѣтствующемъ квадратѣ оригинала.

Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ способѣ перерисовки фигуръ, требуется умѣть всѣ линіи оригинала уменьшать въ одно и то же число разъ; для этой цѣли существуетъ нѣсколько пріемовъ.

1. *Построеніе діаграммы* [1]). Строятъ такой равнобедренный треугольникъ ABC (черт. 123), чтобы боковыя стороны его AC и CB были нѣсколько больше наибольшей изъ линій оригинала, а основаніе BA должно быть равно соотвѣтствующей линіи копіи такъ, чтобы $BC : AB = m : n$, гдѣ $m : n$ — отношеніе, которое должны имѣть соотвѣтствующія линіи оригинала и копіи. Затѣмъ проводятъ рядъ отрѣзковъ ED, FG... KL, параллельныхъ основанію. Чтобы уменьшить въ данномъ отношеніи какую-нибудь линію оригинала, берутъ ея длину циркулемъ, наносятъ на боковую сторону діаграммы, ставя одну ножку въ вершину треугольника, и если вторая ножка упадетъ въ K, то KL — искомая длина копіи, ибо $CK : KL = CB : AB = m : n$.



Черт. 123.

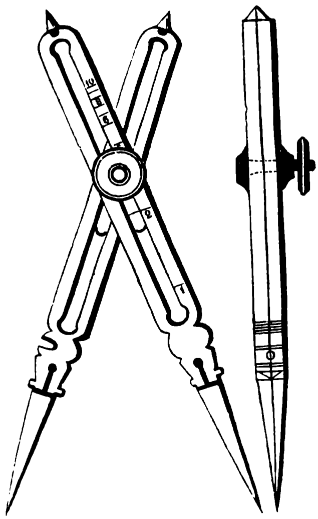
Если конецъ откладываемаго отрѣзка упадетъ между дѣленіями діаграммы въ точку S, то, проводя изъ S линію ST, параллельную AB, найдемъ, что ST есть искомая линія копіи, такъ какъ $SC : ST = CB : AB = m : n$.

2. Можно построить масштабъ, въ которомъ сдѣланъ планъ и масштабъ, въ которомъ должна быть построена ко-

[1]) Греч. сл. διά—насквозь, γράφω—пишу, обвожу.

пія, и взявъ линіи оригинала, узнаютъ ихъ длину по масштабу оригинала, и той же длины линіи по масштабу копіи наносятъ на чертежъ.

3. *Пропорціональный циркуль* [1]). Приборъ, служащій для измѣненія длины данныхъ линій въ извѣстномъ отношеніи, состоитъ изъ двухъ одинаковой длины пластинокъ, оканчивающихся остреями (черт. 124). Въ пластинкахъ по ихъ длинѣ сдѣланы прорѣзы, въ которые вложены двѣ короткія пластинки, соединенныя между собою шарниромъ, около котораго онѣ, слѣдовательно, и ножки циркуля, могутъ вращаться; когда циркуль сложенъ, то по ослабленіи гайки шарнира пластинки могутъ перемѣщаться въ прорѣзахъ такъ, что длина ножемъ циркуля (отъ центра вращенія) можетъ измѣняться. Понятно, что, во сколько разъ верхнія части ножекъ короче нижнихъ частей, во сколько же разъ и разстояніе между остреями верхнихъ частей ножекъ меньше разстоянія между остреями нижнихъ частей ножекъ. Для уменьшенія линій оригинала въ данномъ отношеніи устанавливаютъ центръ вращенія ножекъ такъ, чтобы длина верхнихъ и нижнихъ частей ножекъ находилась въ данномъ отношеніи; для облегченія установки центра на самихъ пластинкахъ указаны цифрами мѣста центра для полученія простѣйшихъ отношеній между длиною ножекъ; закрѣпивъ центръ вращенія, ставятъ концы нижнихъ ножекъ на концы отрѣзковъ оригинала, и разстояніе между концами верхнихъ ножекъ будетъ искомая длина соотвѣтствующаго отрѣзка копіи.



Черт. 124.

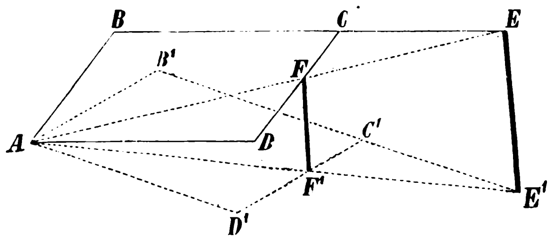
4. *Пантографъ* [2]). Возьмемъ параллелограммъ ABCD, стороны котораго могутъ вращаться около вершинъ. Положимъ,

[1]) Изобрѣтеніе приписываютъ Ю. Бюти (1552—1632). (А. Бикъ к. н. г.).

[2]) Греч. сл. πάντος — все, γςαφεῖν — описывать, чертить. Изобрѣтеніе приписываютъ іезуиту Христофору Шейнеру (1603 г.). (А. Бикъ к. н. г.).

что вершина A параллелограмма укрѣплена неподвижно, а точка E, взятая на продолженіи стороны BC, опишетъ прямую EE_1; тогда точка F, лежащая на пересѣченіи стороны CD съ прямою AE, опишетъ прямую FF_1, а параллелограммъ ABCD займетъ новое положеніе $AB_1C_1D_1$.

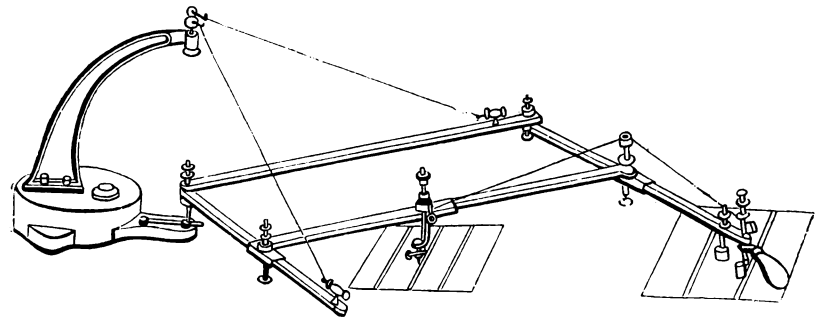
1. Замѣтимъ, что при этомъ новомъ положеніи точка F_1 будетъ лежать также на прямой AE_1; въ самомъ дѣлѣ, при начальномъ положеніи параллелограмма прямыя AE и CD (черт. 125) со сторонами параллелограмма образуютъ два подобныхъ треугольника AFD и CFE, что даетъ такое отношеніе между сторонами CE : : CF = AD : FD; въ новомъ положеніи параллелограмма длины этихъ отрѣзковъ не измѣнились, такъ какъ точки E и F занимаютъ на сторонахъ опредѣленное мѣсто, а потому $C_1E_1 : C_1F_1 = AD_1 : F_1D_1$; углы же, лежащіе между этими сторонами $\sphericalangle F_1C_1E_1$ и $\sphericalangle F_1D_1A$, равны между собою, какъ накрестъ лежащіе, а потому треугольники AF_1D_1 и $F_1C_1E_1$ подобны, $\sphericalangle C_1F_1E_1 = AF_1D_1$ и отрѣзки AF_1 и F_1E_1 должны составлять одну прямую.



Черт. 125.

2. Въ начальномъ положеніи параллелограмма $\triangle ABE \backsim \triangle CFE$ и BE : EC = AB : CF = AE : FE. Во второмъ положеніи параллелограмма $\triangle AB_1E_1 \backsim \triangle F_1C_1E_1$ и $B_1E_1 : C_1E_1 = AE_1 : E_1F_1$; но такъ какъ длина перемѣщавшихся сторонъ параллелограмма и ихъ продолженій не измѣнилась и $BE = B_1E_1$ и $CE = C_1E_1$, то $AE : FE = AE_1 : E_1F_1$, а потому $FF_1 \parallel EE_1$ ($\triangle AEE_1$) и $FF_1 : EE_1 = AF : AE = BC : BE$. Слѣдовательно, линія FF_1, пройденная точкою F, во столько разъ менѣе EE_1, во сколько длина отрѣзка BE больше стороны BC. Но длину BE мы можемъ измѣнять по произволу, а потому и отношеніе линій, описанныхъ точками E и F, можетъ быть сдѣлано произвольнымъ. На этомъ свойствѣ параллелограмма и устроенъ пантографъ системы *Оттъ* и *Коради*, указанный на чер.

тежѣ 126. Весь приборъ виситъ на проволокѣ, концы которой прикрѣплены къ журавлю. На продолженіи стороны параллелограмма (въ точкѣ, соотвѣтствующей точкѣ E, черт. 125) укрѣпляется штифтъ, которымъ обводятся линіи



Черт. 126.

оригинала, а на смежной сторонѣ параллелограмма укрѣпляется трубочка (въ точкѣ, соотвѣтствующей точкѣ F, черт. 125) со вставленнымъ въ немъ карандашомъ, которымъ чертятся линіи копіи.

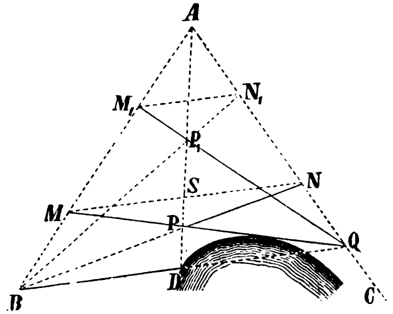
Задачи практической геометріи.

2613. На прямой между точками A и B находится лѣсъ, требуется проложить линію AB черезъ лѣсъ и отмѣтить точки, по ней лежащія; на мѣстности нѣтъ такой точки, изъ которой были бы видны одновременно обѣ точки A и B; но отъ точки A пролегаетъ по лѣсу просѣка, идущая въ сторону отъ AB. Чтобы указать различныя точки прямой AB, поступаютъ такъ: отъ точки A вдоль случайной просѣки провѣшиваютъ прямую; изъ точки B, при помощи экера или другого угломѣрнаго инструмента, опускаютъ на нее перпендикуляръ BD=h; затѣмъ дѣлятъ всю длину AD просѣки на n частей и изъ точекъ дѣленія возставляютъ къ AD перпендикуляры въ сторону опредѣляемой прямой; какія длины слѣдуетъ отмѣрить на этихъ перпендикулярахъ, чтобы концы ихъ лежали на опредѣляемой прямой? *Отв.* $\frac{1}{n}h$, $\frac{2}{n}h$.... $\frac{n-1}{n}h$.

2614. Для измѣренія длины прямой, пролегающей черезъ лѣсъ, не дѣлая въ немъ просѣки, поступили такъ: выбрали точку C на открытой мѣстности, изъ которой видны два дерева A и B, стоящіе у опушки лѣса на концахъ измѣряемой прямой; измѣрили разстояніе CA=800 саж. и CB=640 саж. Затѣмъ отъ C по направленію CA отмѣрили CD, равную 80 саж. и на CB по направленію CB отрѣзокъ CE длиной въ 64 саж., и, наконецъ, опредѣлили длину ED, которая оказалась равной 120 саж. Какъ велико разстояніе AB? *Отв.* 2 верст. 200 саж.

2615. Прямая AB пролегаетъ чрезъ лѣсъ, точки A и B лежатъ по разныя стороны лѣса и B находится вдали отъ опушки лѣса, вправо отъ него. Желая поставить вѣху на прямой AB, вправо отъ лѣса, на самой опушкѣ его, поступаютъ такъ: выбираютъ вдали отъ лѣса такую точку C, изъ которой видны какъ A, такъ и B; измѣряютъ разстояніе AC = 1200 саж. и CB = 960 саж.; затѣмъ отъ C отмѣрили по CA отрѣзокъ CD=300 саж. и по CB отрѣзокъ CE равный 240 саж.; изъ C визируютъ опушку лѣса и находятъ, что линія визированія пересѣкаетъ DE въ точкѣ F; измѣряютъ CF и находятъ, что она равна 200 саж.; наконецъ, продолжаютъ CF на длину, равную FK, находятъ точку K, лежащую на AB. Опредѣлить, какова должна быть длина FK, и какъ велико разстояніе между A и K, A и B, если DE равна 400 саж. и EF = 80 саж. *Отв.* FK = 600 саж., AK = = 1280 саж. и AB = 1600 саж.

2616. Для продолженія прямой BD за препятствіе поступаютъ такъ (черт. 127): проводятъ двѣ какія-нибудь прямыя AB и AD, пересѣкающіяся въ A; изъ A проводятъ прямую AC; изъ какой-нибудь точки M прямой AB проводятъ прямую, параллельную BD, которая пересѣчетъ AD въ S и AC въ N; на AD отмѣчаютъ точку P, лежащую и на прямой BN, и провѣшиваютъ MP, которая пройдетъ за препятствіе;



Черт. 127.

берутъ другую точку M_1, и дѣлая такія же построенія, находятъ на пересѣченіи MP и M_1P_1 искомую точку Q. Этимъ способомъ, не производя никакихъ измѣреній линій, можно намѣтить рядъ точекъ, лежащихъ на BD. Доказать справедливость сдѣланныхъ построеній.

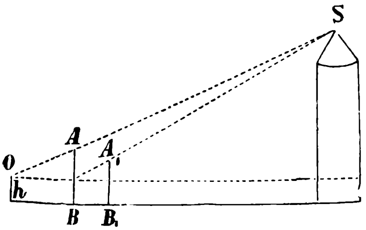
2617. Желая продолжить AB за препятствіе (зданіе), мѣшающее непосредственному провѣшиванію, поступаютъ такъ: изъ A провѣшиваютъ прямую подъ угломъ α съ AB до точки C, изъ которой видна мѣстность, лежащая за препятствіемъ; изъ той же точки A провѣшиваютъ другую такую же прямую AD подъ угломъ β съ AB по другую сторону ея, причемъ изъ точки D видна вѣха, поставленная въ C; затѣмъ изъ D провѣшиваютъ прямую DX подъ угломъ α съ CD въ сторону, противоположную отъ зданія, а изъ точки C— прямую CX, составляющую съ CD уголъ β, расположенный по ту же сторону CD, какъ и $\sphericalangle XDC$. Показать, что точка X пересѣченія прямыхъ CX и DX лежитъ на AB, и вычислить разстояніе AX, если $AC = 150$ саж.; $AD = 150$ саж.; $DX = 50$ саж.; $CX = 70$ саж. и $CD = 100$ саж. *Отв.* 180 саж.

2618. Концы A и B прямой, лежащей на мѣстности, не видны изъ средней ея части, а между тѣмъ требуется отмѣтить въ этой части прямой точку, на ней лежащую. Для этого поступаютъ такъ: отъ концовъ прямой AB отступаютъ по ней по направленію къ серединѣ на разстояніе AM и BN; изъ M и N проводятъ двѣ параллельныя между собою прямыя MA_1 и NB_1, отмѣривая на нихъ $MA_1 = MA$ и $NB_1 = NB$; затѣмъ провѣшиваютъ прямыя NA_1 и MB_1, и изъ точки ихъ пересѣченія C провѣшиваютъ прямую CO, параллельную прямымъ MA_1 и NB_1 и равную $\frac{AM \cdot BN}{BN + AM}$. Показать, что точка O лежитъ на прямой AB.

2619. Для опредѣленія радіуса цилиндрической башни, къ основанію которой нельзя подойти, отмѣтили вдали отъ башни угломѣрнымъ приборомъ части сторонъ треугольника ABC, касающихся окружности сѣченія башни горизонтальной плоскостью. Въ вершинахъ треугольника провели прямыя, параллельныя противоположнымъ этимъ вершинамъ сторонамъ треугольника, получили треугольникъ $A_1B_1C_1$, стороны котораго по измѣреніи оказались равными 61, 74 и 87 саженямъ. Опредѣлить радіусъ сѣченія башни. (Предполагается, что башню можно обозрѣвать со всѣхъ сторонъ). *Отв.* 10 саж.

2620. Требуется опредѣлить радіусъ цилиндрической башни, если она недоступна и если ее можно обозрѣвать только съ одной стороны, Для этой цѣли изъ точки A, изъ которой видна башня, провѣшиваютъ на возможную длину касательныя AP и AQ къ сѣченію башни горизонтальной плоскостью; изъ какой-нибудь точки B касательной AP провѣшиваютъ такимъ же пріемомъ касательную BS, пересѣкающую вторую касательную AQ въ точкѣ S. Опредѣляютъ положеніе центра C вписаннаго въ треугольникъ ABS круга, изъ C опускаютъ перпендикуляръ CH на AP, а при B строятъ уголъ ABK, равный $180^0 - \sphericalangle BCA$ и сторону этого угла BK продолжаютъ до пересѣченія K съ продолженіемъ CH. Показать, что HK есть радіусъ башни.

2621. Для опредѣленія высоты вертикально стоящей башни ставятъ шестъ AB длиною H (черт. 128) и становятся въ такомъ разстояніи d_1 отъ шеста, чтобы лучъ зрѣнія OA, идущій чрезъ конецъ шеста, прошелъ чрезъ вершину s башни. Разстояніе башни отъ положенія наблюдателя въ указанномъ положеніи d, а радіусъ сѣченія башни горизонтальной плоскостью — r. Вычислить высоту башни. *Отв.*



Черт. 128.

$\dfrac{(d+r)\ (H-h)+hd_1}{d_1}$ (гдѣ h — высота глаза надъ горизонтомъ).

2622. Для опредѣленія высоты неприступной башни дѣлаютъ измѣреніе, указанное въ предыдущей задачѣ, при возможномъ положеніи шеста A_1B_1, затѣмъ въ плоскости оси башни и шеста отступаютъ на разстояніе A отъ перваго положенія и дѣлаютъ такое же построеніе. Если въ первомъ положеніи шеста A_1B_1 пришлось отступить отъ него, чтобы видѣть вершину башни по лучу зрѣнія, идущему чрезъ конецъ шеста на а фут., а при второмъ положенiи на a_1 фут., то какова должна быть высота башни? *Отв.* $x=\frac{(H-h)a+h(a_1-a)}{(a_1-a)}$.

2623. Фонарный столбъ вышиною въ $1^1/_2$ сажени бросаетъ тѣнь длиной въ 2 сажени, а домъ въ то же время бросаетъ тѣнь длиною въ 8 саженъ. Какъ велика высота дома? *Отв.* 6 саж.

2624. Каково должно быть отношенiе между высотою домовъ и шириной улицъ или разстоянiемъ между строенiями, чтобы тѣнь отъ домовъ въ полдень осенняго равноденствiя не достигала противоположныхъ построекъ въ городахъ, стоящихъ подъ широтами въ 30^0, 36^0, 45^0, 54^0, 60^0 и 72^0? *Отв.* наиб. отн. 1,73; 1,37; 1,073; 0,58; 0,32.

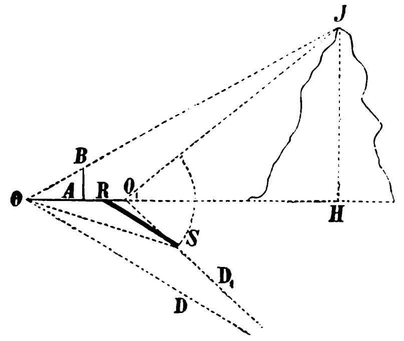
2625. Въ разстоянiи 100 фут. отъ колокольни установили вертикальную вѣху вышиною въ 6 футовъ; отступая отъ нея на $2^1/_2$ фут., нашли, что конецъ вѣхи для глаза, находящагося надъ поверхностью земли на $2^1/_4$ фут., покрываетъ вершину колокольни. Какъ велика высота колокольни? *Отв.* 22 с. 2 ф.

2626. Для опредѣленiя высоты холма устанавливаютъ двѣ вѣхи вышиною каждая въ 12 фут., находящiяся другъ отъ друга въ разстоянiи 120 фут. и лежащiя въ одной вертикальной плоскости съ вершиною холма; для глаза, находящагося надъ поверхностью земли въ 5 ф., конецъ ближайшей къ холму вѣхи покрываетъ вершину холма тогда, когда наблюдатель находится въ разстоянiи 32 фут. отъ вѣхи; конецъ же другой вѣхи покрываетъ вершину холма, когда наблюдатель находится отъ вѣхи въ разстоянiи 36 ф. Опредѣлить высоту холма. *Отв.* 31 саж. и 5 фут.

2627. Для опредѣленiя высоты креста, укрѣпленнаго въ вершинѣ колокольни, наблюдатель, имѣя въ рукахъ шестъ, поставивъ его вертикально на нѣкоторомъ разстоянiи отъ колокольни, помѣстился самъ въ такомъ разстоянiи d отъ шеста, чтобы лучъ, идущiй изъ конца креста въ глазъ наблюдателя, проходилъ чрезъ конецъ шеста, при чемъ длина шеста оказалась h_1 фут. Затѣмъ, стоя на мѣстѣ, наблюдатель приказалъ углублять въ землю конецъ шеста до тѣхъ поръ, пока лучъ, идущiй изъ яблока, на которомъ укрѣпленъ крестъ, въ глазъ наблюдателя не прошелъ чрезъ конецъ шеста; оказалось, что вышина надъ поверхностью земли (горизонтальной плоскостью, проходящей чрезъ основаніе колокольни) стала h фут. Перемѣняя мѣсто и производя точно такія же наблюденія, наблюдатель нашелъ, что длина шеста имѣла для перваго наблюденія H_1 фут. и для второго H ф., при разстояніи D ф. отъ шеста. Какъ велика длина креста? *Отв.* $x = (d - D) : \left[\frac{d}{h_1 - h} - \frac{D}{H_1 - H}\right]$.

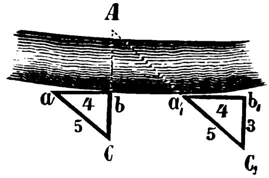
2628. Для опредѣленія высоты башни наблюдатель положилъ на землю въ разстояніи d саженей отъ основанія башни зеркальце и затѣмъ самъ помѣстился въ такое разстояніе отъ зеркала, что увидѣлъ въ немъ отраженіе вершины башни; оказалось, что при этомъ наблюдатель находится отъ зеркала въ разстояніи d_1 футовъ; ростъ же самого наблюдателя h футовъ; чему равна высота башни? *Отв.* $\frac{d \cdot h}{d_1}$.

2629. Для опредѣленія высоты горы поступаютъ такъ: вдали отъ горы (черт. 129) на горизонтальной мѣстности выбираютъ двѣ точки O и O_1, лежащія въ одной вертикальной плоскости съ осью горы; измѣряютъ углы JOO_1 и JO_1O, образуемые лучами, идущими изъ O и O_1 къ вершинѣ горы; на горизонтальной плоскости провѣшиваютъ прямыя OD и O_1D_1, составляющія съ прямой OO_1 углы O_1OD и OO_1D_1, равные измѣреннымъ угламъ, дѣлятъ $\sphericalangle O_1OD$ пополамъ прямой OS, пересѣкающей прямую O_1D_1 въ точкѣ S, проводятъ SR || OD. Измѣряютъ $OR \cdot OO_1$ и затѣмъ, помѣстивъ вертикально стоящій шестъ AB между лучомъ OJ и горизонтальной прямой OO_1, измѣряютъ AB и OA и находятъ высоту горы. Доказать, что высота горы $= JH = \frac{OJ \cdot AB}{\sqrt{OA^2 + AB^2}}$, гдѣ $OJ = \frac{OR \cdot OO_1}{OO_1 - OR}$.



Черт. 129.

2630. Ширину рѣки можно опредѣлить и безъ помощи какого-либо угломѣрнаго инструмента; а именно, беремъ веревку (черт. 130), отмѣчаемъ ея длины узлами на разстояніи другъ отъ друга 3, 4 и 5 фут., связываемъ концы и, ставъ на берегу рѣки, укрѣпляемъ часть веревки длиною въ 4 ф. въ узлахъ на землѣ вдоль берега, вытягиваемъ ее за третій узелъ, ставя вѣхи въ узлахъ b и c, ограничивающихъ часть веревки длиною въ 3 фут.; на линіи, опредѣляемой этими вѣхами, на другомъ берегу отмѣчаемъ точку A; затѣмъ идемъ по берегу съ веревочнымъ тр—комъ до тѣхъ поръ, пока отмѣченная точка A не будетъ находиться на продолженіи гипотенузы веревочнаго тр—ка $a_1b_1c_1$, расположеннаго такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ. Чему равна ширина рѣки, если ba_1=728 фут.? *Отв.* 78 саж.

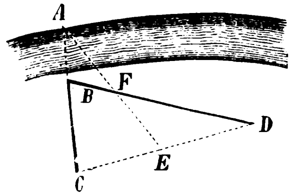


Черт. 130.

2631. Для измѣренія ширины рѣки, стоя на правомъ берегу, замѣтили нѣкоторую точку K, лежащую на лѣвомъ берегу рѣки; направивъ веревочный прямоугольный треугольникъ (со сторонами 5, 4 и 3) однимъ изъ катетовъ въ точку K, а другимъ вправо по берегу рѣки, такъ что катетъ AC направленъ перпендикулярно къ берегу рѣки, катетъ CB—по берегу; затѣмъ на продолженіи катета CB взяли точку D въ разстояніи 30 саж. отъ C, а на продолженіи катета CA—точку E въ разстояніи 10 саж. отъ C. Помощью веревочнаго же тр—ка возставили къ AE въ точкѣ E перпендикуляръ и продолжили его до встрѣчи съ продолженіемъ прямой KD въ точкѣ F. Длина EF оказалась равной 55 саж. Какъ велика ширина рѣки? *Отв.* 12 саж.

2632. Для измѣренія ширины рѣки съ приблизительно параллельными берегами поступаютъ такъ: на берегу рѣки отмѣряютъ длину AB, равную 40 саж.; въ точкѣ A по направленію, перпендикулярному къ AB, визируютъ точку C, лежащую на другой сторонѣ рѣки, въ концѣ B прямой AB провѣшиваютъ прямую BE, перпендикулярную къ AB въ сторону, противоположную рѣкѣ; идутъ по BE на разстояніи 15 саж. (BE=15 с.) и изъ точки E визируютъ C; прямая CE пересѣкаетъ AB въ точкѣ F, находящейся на разстояніи 10 саж. отъ B (FB=10 саж.). Чему равна ширина рѣки? *Отв.* 45 саж.

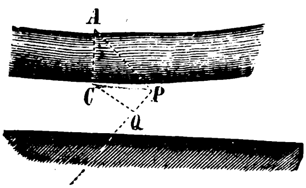
2633. Берегъ рѣки, ширину которой желаютъ опредѣлить, неудобенъ для непосредственнаго проведенія на немъ линій и для опредѣленія ширины рѣки поступаютъ такъ: визируя линію AB, перпендикулярную къ берегамъ рѣки (берега предполагаютъ параллельными, черт. 131), на продолженіи AB берутъ точку C и, выбравъ нѣкоторую точку D на мѣстности, видимую изъ B и C, провѣшиваютъ CD и BD, отмѣчаютъ середину E прямой CD; изъ E визируютъ EA и отмѣчаютъ точку F пересѣченія EA съ BD; измѣряя BC = a, BF = b и DF = c, находятъ ширину рѣки. Какъ велика ширина рѣки?



Черт. 131.

Отв. $\frac{ab}{c-b}$.

2634. Находясь на неширокой набережной, застроенной въ нѣкоторомъ разстояніи отъ берега домами, и желая опредѣлить ширину рѣки (черт. 132), визируютъ точку A на противоположномъ берегу по прямой CA, перпендикулярной къ берегамъ; становятся въ точку P берега и провѣшиваютъ прямую PQ, перпендикулярную къ AP, а изъ C провѣшиваютъ другую прямую CQ, перпендикулярную къ PQ. Показать, что ширина рѣки выразится формулой $CA = \frac{PQ \cdot CP}{CQ}$.

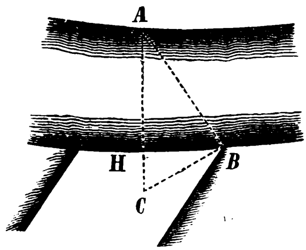


Черт. 132.

2635. Для опредѣленія разстоянія между данной точкою O и точкой неприступной M, поступаютъ такъ: провѣшиваютъ изъ O какую-нибудь прямую OA, въ такомъ направленіи, чтобы изъ A можно было видѣть M, провѣшиваютъ на нѣкоторое разстояніе AM и, идя по AO, находятъ точку H, изъ которой M видна подъ прямымъ угломъ съ OA. Затѣмъ изъ O опускаютъ перпендикуляръ OB на AM и провѣшиваютъ прямую AK, проходящую чрезъ точку K пересѣченія перпендикуляровъ OB и MH, наконецъ, перпендикуляръ OC на AK опредѣляетъ направленіе искомой прямой. Для опредѣленія же длины OM измѣрили OH, OA и OC. Чему равна длина OM?

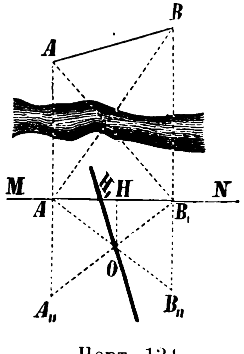
Отв. $OM = \frac{OH \, . \, OA}{OC}$.

2636. Къ берегу рѣки примыкаетъ улица, застроенная домами и препятствующая свободному движенію вдоль ея береговъ. Берега рѣки предполагаются параллельными; для опредѣленія ея ширины поступаютъ такъ: визируютъ по направленію, перпендикулярному къ берегу, точку A на другомъ берегу (черт. 133) и, идя по берегу, насколько позволяетъ мѣстность, до точки B, провѣшиваютъ прямую BC, перпендикулярную къ BA. Показать, что ширина рѣки AH выразится или формулой $\frac{BH^2}{HC}$, или же $AH = \frac{(BC + HC)(BC - HC)}{HC}$.



Черт. 133.

2637. На прямую AB, недоступную для наблюдателя, требуется опустить перпендикуляръ. Для этой цѣли поступаютъ такъ: отыскиваютъ проекціи A_1 и B_1 точекъ A и B на доступную прямую MN, провѣшиваютъ части прямыхъ AB_1 и BA_1; возставляютъ перпендикуляры къ нимъ B_1A_{11} и A_1B_{11}; изъ точки ихъ пересѣченія O опускаютъ перпендикуляръ OH на MN, откладываютъ $A_1H_1 = B_1H$ и OH_1 — искомая прямая. Доказать справедливость построенія (черт. 134).



Черт. 134.

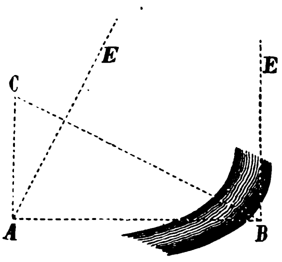
Доказательство. $AA_1 = \frac{A_1B_1^2}{A_1A_{11}}$; $BB_1 = \frac{A_1B_1^2}{B_1B_{11}}$ и $AA_1 - BB_1 = BC = A_1B_1^2 \left(\frac{1}{A_1A_{11}} - \frac{1}{B_1B_{11}}\right)$, $\triangle B_1OH \backsim \triangle A_{11}A_1B_1$ и $\triangle A_1OH \backsim \triangle A_1B_1B_{11}$ и изъ ихъ подобія имѣемъ $\frac{1}{A_1A_{11}} =$

$=\frac{HB_1}{A_1B_1.OH}$ и $\frac{1}{B_1B_{11}}=\frac{A_1H}{OH.A_1B_1}$; откуда $BC=\frac{A_1B_1}{OH}(A_1H-B_1H)$, или $\frac{BC}{A_1B_1}=\frac{HH_1}{OH}$, или $\frac{BC}{AC}=\frac{HH_1}{OH}$; а потому $\triangle ABC \backsim \triangle OHH_1$ и OH_1 перпендик. къ AB. (C—основаніе перпендикуляра изъ A на BB_1).

2638. Пользуясь построеніемъ предыдущей задачи, опредѣлить разстояніе между 2-мя неприступными точками. *Отв.* $AB=\frac{OH_1}{OH}A_1B_1$.

2639. Требуется опустить перпендикуляръ изъ точки C на прямую AB. Для этой цѣли поступаютъ такъ: провѣшиваютъ прямую AC и измѣряютъ ее; отъ A на данной прямой отмѣряютъ отрѣзокъ AB, равный AC; измѣряютъ BC и на прямой AB отъ B къ A откладываютъ отрѣзокъ Bx, по длинѣ равный $\frac{BC^2}{2AB}$. Показать, что точка x есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ C на AB.

2640. Требуется возставить перпендикуляръ къ прямой AB въ точкѣ ея B, при чемъ къ этой точкѣ нельзя подойти. Возставляемъ помощью экера перпендикуляръ къ AB въ какой-нибудь точкѣ A, отмѣримъ на немъ произвольное разстояніе AC, отыщемъ помощью экера или другимъ способомъ подошву D перпендикуляра AD на CB, продолжимъ AD за точку D на разстояніе $DE=\frac{AD^3}{CD^2}$; тогда окажется, что точка E лежитъ на перпендикулярѣ къ AB въ точкѣ B. Откладывая по AC другую длину, найдемъ такимъ же способомъ и другую точку E', лежащую на искомомъ перпендикулярѣ. Доказать справедливость построенія (черт. 135).

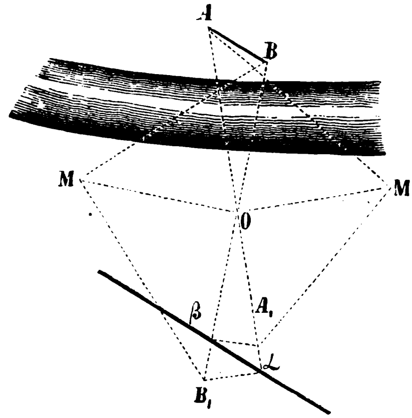


Черт. 135.

2641. Требуется кругомъ пруда разсадить деревья такъ, чтобы они располагались на окружности круга; для этой цѣли отмѣчаютъ концы діаметра AB искомаго круга и подъ острымъ угломъ къ нему провѣшиваютъ прямую AC, идутъ по ней, визируя B до той точки C, изъ которой B видно подъ прямымъ угломъ съ AC. Показать, что C лежитъ на окружности искомаго круга.

2642. Чрезъ данную точку O провести прямую, параллельную прямой AB, лежащей на недоступной мѣстности.

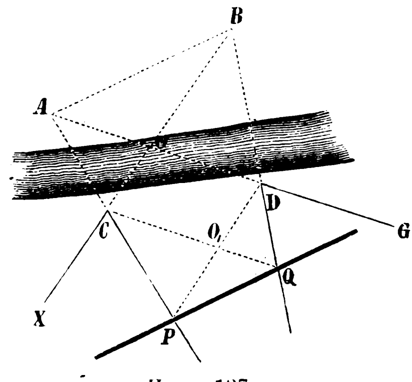
Рѣшеніе. Изъ точки O (черт. 136) помощью экера возставляемъ перпендикуляръ OM къ прямой OB, а изъ M—перпендикуляръ MB_1 къ MB. Тогда $MO^2 = BO \,.\, OB_1$. Точно также возставляемъ перпендикуляръ $M_1O = MO$ изъ O къ AO, а изъ M_1 перпендикуляръ M_1A_1 къ AM_1; тогда $M_1O^2 = AO.OA_1$; а такъ какъ $M_1O = MO$, то $AO \,.\, OA_1 = BO \,.\, OB_1$, или $\frac{AO}{OB} = \frac{OB_1}{OA_1}$; слѣдовательно, прямая B_1A_1 образуетъ съ AA_1 такой же уголъ, какъ и прямая AB съ прямой B_1B. Наконецъ, опуская перпендикуляръ $B_1\alpha$ на AA_1 изъ точки B_1 и перпендикуляръ $A_1\beta$ изъ A_1 на BB_1, найдемъ, что $\alpha\beta$ — искомая параллельная прямая, ибо $\triangle O\beta A_1 \backsim \triangle OB_1\alpha$ и $\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{O\alpha}{O\beta} = \frac{AO}{OB}$.



Черт. 136.

2643. Пользуясь построеніемъ предыдущей задачи, найти разстояніе между двумя неприступными точками, если были измѣрены отрѣзки M_1O, $\alpha\beta$, OA и $O\alpha$. *Отв.* $AB = \frac{M_1O^2.\alpha\beta}{OA_1.O\alpha}$.

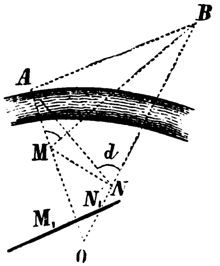
2644. Для проведенія на мѣстности прямой, параллельной другой прямой AB, лежащей на недоступной мѣстности, употребляютъ такой пріемъ: выбираютъ двѣ произвольныя точки C и D, лежащія въ мѣстности, гдѣ удобно производить измѣренія (черт. 137). Провѣшиваютъ CP, лежащую на продолженіи AC, и DG, лежа-



Черт. 137.

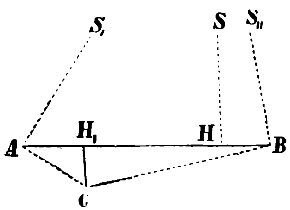
щую на продолженіи AD; тоже—CX и DQ, лежащія на продолженіяхъ BC и BD. Затѣмъ проводятъ DP параллельно CX, до пересѣченія параллельной со стороной AC, и CQ параллельно DG, до пересѣченія съ прямой DQ. Доказать, что PQ параллельна AB.

2645. Провести прямую, параллельную прямой, лежащей на недоступной мѣстности. Доказать справедливость слѣдующаго построенія. Изъ точки O (черт. 138) провѣшиваютъ прямыя OA и OB. Помощью графометра опредѣляютъ уголъ AMB, равный d^0. Идутъ по прямой BO и находятъ такую точку N, изъ которой AB видна также подъ угломъ равнымъ d. Затѣмъ при точкѣ N_1, чрезъ которую нужно провести параллельную, строятъ уголъ BN_1M_1, равный углу AMN, и тогда, какъ легко доказать, N_1M_1 — искомая прямая.



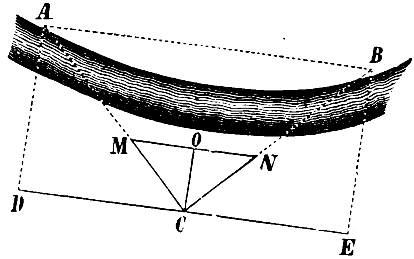
Черт. 138.

2645a. Требуется опредѣлить разстояніе (кратчайшее) отъ дороги, направленіе которой можно принять за прямолинейное, весьма отдаленнаго предмета. Для этой цѣли поступаютъ такъ: изъ двухъ точекъ дороги A и B (черт. 139) помощью угломѣрнаго прибора, провѣшиваютъ на нѣкоторое разстояніе прямыя AS_1 и BS_{11}, направленныя къ предмету S, изъ A къ AS_1 и изъ B къ BS_{11} возставляютъ перпендикуляры AC и BC; изъ точки ихъ пересѣченія опускаютъ перпендикуляръ CH_1 и на AB опредѣляютъ подошву H перпендикуляра, опущеннаго изъ S на AB. Затѣмъ измѣряютъ BH_1, AH_1 и CH_1. Чему равно разстояніе SH? *Отв.* $SH = \frac{AH_1.BH_1}{CH_1}$ (слѣдуетъ прежде доказать, что $AH_1 = BH$).



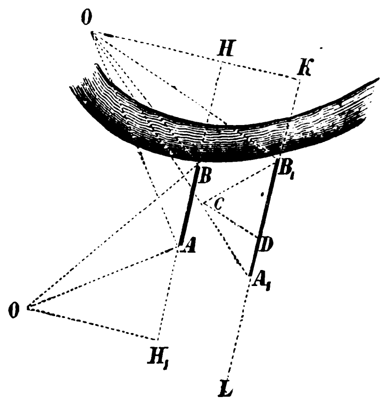
Черт. 139.

2646. Требуется измѣрить разстояніе между двумя неприступными точками A и B; для этой цѣли на мѣстности, гдѣ можно производить измѣреніе, провѣсили часть произвольной прямой AC (черт. 140); идя по ней и визируя B, нашли такую точку C, изъ которой B видна подъ прямымъ угломъ съ прямой AC, отложили отъ C два отрѣзка CM и CN, равные между собою, раздѣлили MN въ точкѣ O пополамъ, къ OC возставили перпендикуляръ въ точкѣ C и нашли на этомъ перпендикулярѣ точки D и E, изъ которыхъ A и B видны подъ прямымъ угломъ съ DE; измѣривъ DC и CE, нашли возможность опредѣлить длину AB. Чему равна AB? *Отв.* $AB = \sqrt{2(DC^2 + CE^2)}$.



Черт. 140.

2647. За рѣкой виднѣется прямолинейная шоссейная дорога, а въ сторонѣ отъ нея видна колокольня сельской церкви. Чтобы узнать, въ какомъ разстояніи находится колокольня отъ дороги, поступаютъ такъ: отъ прямой, составляющей продолженіе дороги, провѣшиваютъ части прямыхъ OB и OA, и изъ точекъ B и A провѣшиваютъ прямыя BO_1 и AO_1, соотвѣтственно перпендикулярныя ко BO и AO, изъ O_1 опускаютъ перпендикуляръ O_1H_1 на BH; наконецъ, измѣряютъ H_1A, H_1B и O_1H и находятъ искомое разстояніе OH. Чему равно OH? *Отв.* $\frac{H_1A.H_1B}{O_1H_1}$ (черт. 141).

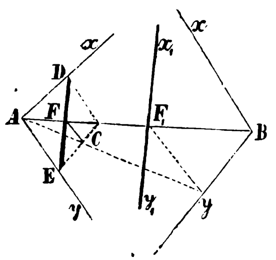


Черт. 141.

Примѣчаніе. Въ этомъ рѣшеніи, какъ нетрудно видѣть, точки H и H_1 симметричны относительно середины отрѣзка AB (четыр. O_1OBA — вписанный и середина OO′ — центръ описанн. круга), а потому, если находимся далеко отъ мѣста измѣренія, то размѣры подлежащихъ измѣренію линій будутъ велики.

2648. Для измѣренія разстоянія отдаленнаго предмета отъ дороги KL (черт. 141), находящейся вдали, но направленіе которой можно опредѣлить, нельзя было воспользоваться способомъ, указаннымъ въ предшествующей задачѣ, требующимъ большого пространства, годнаго для провѣшиванія прямыхъ значительной длины; тогда поступили такъ: изъ точекъ A_1 и B_1, лежащихъ на прямой, совпадающей съ дорогой, находящейся на другой сторонѣ рѣки, провѣшиваютъ на нѣкоторую длину прямыя B_1O и A_1O; опускаютъ перпендикуляръ B_1C на OA_1, изъ C проводятъ прямую CD, параллельную OB_1, и измѣряютъ B_1C, CA_1 и DA_1. Чему равно искомое разстояніе? *Отв.* $OK = \frac{B_1C.CA_1}{DA_1}$.

2649. Изъ двухъ селъ (A и B), расположенныхъ на прямолинейной шоссейной дорогѣ, идутъ дороги Ax и Ay, Bx и By въ два города, лежащіе по разныя стороны шоссе; предполагая, что эти дороги также прямолинейныя, опредѣлить разстояніе между уѣздными городами, если мѣстность между селами позволяетъ дѣлать измѣренія.



Черт. 142.

Рѣшеніе. Изъ точки C шоссейной дороги проводимъ прямую CD, параллельную Bx, и CE, параллельную By, до пересѣченія ихъ въ точкахъ D и E съ дорогами, идущими изъ A; провѣшиваютъ DE, опредѣляютъ точку F пересѣченія DE съ AC. Находятъ на AB точку F_1, соотвѣтствующую точкѣ F (черт. 142); прямая $x_1F_1y_1$ есть направленіе прямой, соединяющей города, а искомое разстояніе $xy = DE \cdot \frac{AF_1}{AF}$.

2650. Въ городъ ведутъ двѣ дороги — шоссейная и желѣзная; обѣ дороги прямолинейны и ихъ направленіе пересѣкается въ нѣкоторой точкѣ A, лежащей въ городѣ. По шоссейной дорогѣ идетъ въ городъ пѣшеходъ и, желая узнать, сколько ему осталось до города, замѣчаетъ на желѣзной дорогѣ два телеграфныхъ столба, а на горизонтѣ двѣ отдаленныя точки B и C (безконечно удаленныя); съ того момента, когда первый изъ этихъ столбовъ покрылъ точку B, онъ сталъ считать свои шаги; пройдя 155 шаговъ, увидѣлъ, что и второй столбъ покрылъ точку B; черезъ 200 слѣдующихъ шаговъ первый столбъ покрылъ вторую точку C, а сдѣлавъ еще 150 шаговъ, онъ замѣтилъ, что и второй столбъ покрылъ точку C. Сдѣлавъ расчетъ, онъ узналъ, сколько шаговъ ему осталось сдѣлать, чтобы попасть въ точку A города. Какъ велико разстояніе пѣшехода до точки A? *Отв.* 10.500 шаговъ.

2651. Изъ вагона желѣзной дороги впереди пути по одну сторону ея видны два села A и B; лучи зрѣнія, идущіе отъ этихъ селъ въ глазъ пассажира, образуютъ нѣкоторый уголъ, который измѣняется по мѣрѣ движенія поѣзда; въ нѣкоторый моментъ K, когда поѣздъ находится въ точкѣ M своего прямолинейнаго пути, этотъ уголъ достигаетъ своего maximum'а, затѣмъ уменьшается до 0, снова возрастаетъ и въ точкѣ M_1 чрезъ a минутъ послѣ момента K достигаетъ своего второго maximum'а. Лучъ зрѣнія, идущій къ A, становится перпендикулярнымъ къ направленію дороги чрезъ b минутъ, а идущій къ точкѣ B — чрезъ c минутъ послѣ момента K. Опредѣлить разстояніе между селами и разстояніе селъ отъ желѣзнодорожнаго пути, если поѣздъ двигался со скоростью v верстъ въ минуту.

Отв. $\frac{av}{2}\left[\sqrt{\frac{a-2b}{a-2c}}-\sqrt{\frac{a-2c}{a-2b}}\right]$; $v\sqrt{\frac{a-2b}{a-2c}\cdot\frac{ab+ac-2bc}{2}}$; $v\sqrt{\frac{a-2c}{a-2b}\cdot\frac{ab+ac-2bc}{2}}$.

Указаніе. Точки M и M_1 суть точки прикосновенія окружностей, проходящихъ чрезъ A и B и касательныхъ къ направленію дороги, съ центрами, лежащими по разныя стороны AB.

2652. Требуется вычислить площадь фигуры, имѣющей видъ треугольника, всѣ три вершины котораго недоступны; для этой цѣли въ сторонѣ отъ опредѣляемаго треугольника провѣшиваютъ прямую L и опредѣляютъ на ней точку P пересѣченія прямыхъ AC и L и точку Q пересѣченія прямой AB и L; изъ P проводятъ прямую PS, параллельную BQ, до встрѣчи ея съ продолженіемъ QC въ точкѣ S, изъ Q — прямую QR, параллельную PC, до встрѣчи ея въ точкѣ R съ прямой BP; прямыя PS и QR пересѣкаются въ O; вычисляютъ площади доступныхъ треугольниковъ POQ и ROS и по нимъ опредѣляютъ площадь искомаго. Чему равна площадь недоступнаго треугольника ABC? *Отв.* $ABC = \frac{POQ^2}{ROS}$.

2653. Для опредѣленія площади фигуры, имѣющей видъ треугольника ABC, при чемъ изъ трехъ вершинъ треугольника доступна только одна вершина C, поступили такъ: чрезъ C провѣсили произвольную прямую L, нашли на ней проекціи A_1 и B_1 вершинъ A и B, возставили въ точкѣ C перпендикуляры CA_{11} и CB_{11} соотвѣтственно къ прямымъ AC и BC, до ихъ пересѣченія въ точкахъ A_{11} и B_{11} съ прямыми AA_1 и BB_1, и измѣрили $CA_1 = a$, $CB_1 = b$; $A_{11}A_1 = a_1$ и $B_{11}B_1 = b_1$. Опредѣлить по a, b, a_1 и b_1 площадь треугольника ABC.

Отв. $\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1}\right)$.

Примѣчаніе. 1) Такъ какъ всякую прямолинейную фигуру можно разбить на треугольники, то этимъ путемъ можно опредѣлить площадь всякаго многоугольника, если хотя одна изъ его вершинъ доступна. 2) Если недоступны всѣ три вершины A, B и C, то вычисленіе площади можно сдѣлать тѣмъ же пріемомъ: выбравъ доступную точку O, вычисляемъ площади треугольниковъ ABO, ACO и BCO, при чемъ искомая площадь есть разность между однимъ изъ этихъ треугольниковъ и суммою площадей двухъ другихъ.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

Линіи и плоскости параллельныя, перпендикулярныя и пересѣкающіяся.

1) При рѣшеніи стереометрическихъ задачъ неизвѣстныя величины могутъ быть опредѣляемы такими же данными, какими они опредѣляются и въ планиметріи; такъ, точка можетъ быть опредѣлена пересѣченіемъ двухъ линій, пересѣченіемъ прямой съ окружностью, съ которой она лежитъ въ *одной плоскости*, пересѣченіемъ двухъ окружностей, лежащихъ въ *одной* плоскости; прямая—двумя точками, точкой и условіемъ касанія къ окружности, лежащей съ точкой въ одной плоскости и т. д. Такія задачи приводятся къ за-

дачамъ планиметріи, а именно, прежде всего предполагаютъ построенной плоскость, содержащую данныя и искомыя задачи и уже на этой плоскости производятъ самое построеніе по способамъ, указаннымъ въ планиметріи.

2) Кромѣ указанныхъ данныхъ въ стереометрическихъ задачахъ присоединяется новый элементъ, который можетъ служить однимъ изъ данныхъ для опредѣленія геометрическихъ величинъ, а именно, плоскость (вообще поверхность), такъ что точка можетъ быть опредѣлена пересѣченіемъ прямой и плоскости, пересѣченіемъ трехъ плоскостей; прямая линія—пересѣченіемъ двухъ плоскостей и т. д. Въ такихъ задачахъ требуемыя для рѣшенія построенія не производятся въ самомъ дѣлѣ, а только воображаются, и пособіемъ для рѣшенія такихъ задачъ могутъ служить модели фигуръ.

3) Самыя задачи, какъ и въ планиметріи, дѣлятся на элементарныя задачи, которыя могутъ служить пособіемъ при рѣшеніи другихъ задачъ и болѣе сложныя задачи. Элементарныя задачи не строятся каждый разъ при рѣшеніи сложныхъ задачъ, т.-е. поступаютъ такъ же, какъ и въ планиметріи, гдѣ задачи о дѣленіи прямой или угла пополамъ принимаютъ за элементарныя.

2654. Чрезъ данную точку провести къ данной прямой прямую параллельную, перпендикулярную или составляющую съ ней уголъ, равный данному углу.

Рѣшеніе. Чрезъ точку и прямую проведемъ плоскость, и на этой послѣдней искомую прямую.

2655. Дана плоскость M и двѣ пересѣкающіяся прямыя L и L_1 внѣ ея и наклонныя къ ней; провести на плоскости M прямую, пересѣкающую прямыя L и L_1.

Отв. Линія пересѣченія плоскости M и плоскости, опредѣляемой прямыми L и L_1.

2656. Построить плоскость, перпендикулярную къ данной прямой въ данной точкѣ ея.

2657. Провести плоскость, перпендикулярную къ данной прямой и проходящую чрезъ данную точку внѣ этой прямой.

2658. Чрезъ данную точку A плоскости M возставить къ ней перпендикуляръ.

Рѣшеніе. Проводятъ какую-нибудь прямую L на плоскости M; чрезъ L проводятъ какую-нибудь плоскость N; опускаютъ перпендикуляры AC на L въ плоскости M и DC на L въ плоскости N; перпендикуляръ въ A къ AC въ плоскости прямыхъ AC и DC и есть искомый.

2659. Изъ точки B внѣ плоскости M опустить перпендикуляръ на послѣднюю.

Рѣшеніе. Чрезъ точку B и какую-нибудь прямую L на плоскости M проводятъ плоскость N, въ этой послѣдней опускаютъ перпендикуляръ BC на L и въ плоскости M возставляютъ перпендикуляръ CA къ L въ точкѣ C; перпендикуляръ, опущенный изъ B на AC въ плоскости прямыхъ AC и BC, и есть искомый.

2659a. Найти точку, находящуюся въ равномъ разстояніи отъ трехъ данныхъ точекъ A, B и C.

Рѣшеніе. Проводимъ плоскость M чрезъ точки A, B и C, отыскиваемъ на M центръ O круга, описаннаго около треугольника ABC, возставляемъ въ O перпендикуляръ къ M и т. д.

2660. Чрезъ данную точку B прямой L провести плоскость, пересѣкающую двѣ лежащія въ одной плоскости прямыя L_1 и L_{11}.

2661. Найти точку, находящуюся въ равномъ разстояніи отъ четырехъ данныхъ точекъ.

2662. Чрезъ данную прямую L провести плоскость, находящуюся въ данномъ разстояніи d отъ точки A, лежащей внѣ прямой L.

Рѣшеніе. Чрезъ точку A проводимъ плоскость M, перпендикулярную L и пересѣкающую ее въ A_1. Тогда $A_1A \perp L$. На AA_1, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность въ плоскости M и отъ A откладываемъ въ ней по разныя стороны діаметра хорды AC и AC_1, равныя каждая d. Плоскость прямыхъ A_1C и L, а также и плоскость прямыхъ A_1C_1 и L—искомыя.

2663. Чрезъ точку A прямой L провести плоскость, образующую съ L уголъ, равный данному углу α.

Рѣшеніе. Проводимъ какую-нибудь плоскость M чрезъ L, на ней при A строимъ прямоугольный треугольникъ ABC, имѣющій гипотенузою отрѣзокъ AB прямой L и острый уголъ $A=\alpha$, чрезъ AC проводимъ плоскость, перпендикулярную къ катету BC, послѣдняя плоскость—искомая.

2664. Чрезъ точку A, лежащую внѣ прямой L, провести плоскость, образующую съ L уголъ, равный углу α.

2665. Чрезъ точку A плоскости M провести прямую L, составляющую съ этой плоскостью уголъ, равный данному углу, если положеніе проекціи L на M дано.

2666. Чрезъ точку A внѣ плоскости M провести прямую L, составляющую съ плоскостью M уголъ α, если проекція L на M дана.

2667. Чрезъ точку, лежащую внѣ прямой, провести плоскость, параллельную ей (зад. неопр.).

2668. Чрезъ точку, лежащую внѣ плоскости, провести къ послѣдней параллельную прямую (зад. неопр.).

2669. Чрезъ одну изъ двухъ скрещивающихся прямыхъ провести плоскость, параллельную другой.

Рѣшеніе. Плоскость опредѣляется одной прямой и прямой, пересѣкающей ее и параллельной второй прямой.

2670. Чрезъ данную точку провести плоскость, параллельную двумъ даннымъ прямымъ L_1 и L_2. Сколько рѣшеній имѣетъ задача, если $L_1 \parallel L_2$?

2671. Чрезъ данную точку провести прямую, параллельную двумъ пересѣкающимся плоскостямъ.

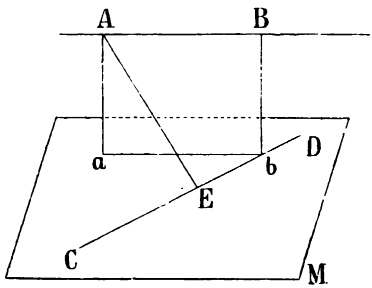
2672. Провести прямую, пересѣкающую двѣ изъ данныхъ прямыхъ и параллельную третьей данной прямой.

Построеніе. Чрезъ одну изъ первыхъ двухъ прямыхъ проводятъ плоскость, параллельную третьей прямой и чрезъ точку пересѣченія этой плоскости со второй прямой проводятъ въ этой же плоскости прямую, параллельную третьей прямой. Задача не имѣетъ рѣшенія, если третья прямая параллельна одной изъ первыхъ двухъ.

2673. Провести прямую, пересѣкающую двѣ данныя прямыя и параллельную данной плоскости.

2674. Провести прямую, пересѣкающую двѣ данныя прямыя подъ прямымъ угломъ, или найти кратчайшее разстояніе между двумя скрещивающимися прямыми.

Рѣшеніе. Даны скрещивающіяся прямыя AB и CD (черт. 143). Проведемъ черезъ CD плоскость M, параллельную AB; изъ какой-нибудь точки A прямой AB опустимъ перпендикуляръ Aa на плоскость M, а изъ a проведемъ прямую ab $\parallel$ AB; изъ точки пересѣченія b прямой ab съ CD проведемъ линію bB $\parallel$ Aa въ плоскости, проходящей черезъ прямыя AB и ab. Тогда bB $\perp$ M и

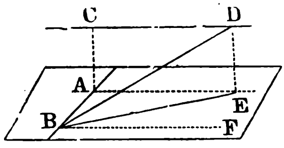


Черт. 143.

$bB \perp AB$; а потому bB перпендикулярна къ CD и къ AB. Всякая другая прямая AE, наклонная къ плоскости M, больше Aa, а слѣд., больше и bB.

2675. **Между двумя прямыми помѣстить отрѣзокъ данной длины такъ, чтобы онъ съ обѣими прямыми образовалъ равные углы.**

Рѣшеніе. Двѣ скрещивающіяся прямыя AB и CD; AC—ихъ кратчайшее разстояніе (черт. 144). Проведемъ черезъ AB плоскость, параллельную CD. Пусть BD—искомое положеніе отрѣзка, такъ что $\sphericalangle CDB = ABD$. Проведемъ черезъ B линію BF параллельно CD. Тогда $\sphericalangle DBF = \sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD$. Проекція BD есть BE; $\sphericalangle EBA = EBF$. Проведя $AE \parallel CD \parallel BF$, имѣемъ: $\sphericalangle BEA = \sphericalangle EBF = \sphericalangle EBA$, и треугольникъ BEA — равносторонній; $AB = AE = BE$.



Черт. 144.

Прямоугольный треугольникъ опредѣляемъ по BD и DE и т. д. (Четыре рѣшенія).

2676. **Чрезъ прямую, параллельную данной плоскости, провести плоскость, образующую съ данной плоскостью уголъ данной величины.**

2677. **Даны плоскость и прямая, пересѣкающая плоскость; черезъ прямую провести плоскость, пересѣкающую данную плоскость подъ даннымъ угломъ.**

2678. **Черезъ данную точку провести плоскость, которая была бы перпендикулярна къ данной плоскости и съ другою плоскостью образовала бы уголъ, равный данному.**

2679. **Построить линію пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей.**

Рѣшеніе. Изъ произвольной точки A опускаемъ на каждую изъ плоскостей перпендикуляры AB и AB_1. Черезъ эти перпендикуляры AB и AB_1 проводимъ плоскость M; въ этой послѣдней плоскости къ прямымъ AB и AB_1 проводимъ перпендикуляры BC и B_1C, которые пересѣкутся въ точкѣ C, лежащей на искомой линіи, перпендикулярной въ точкѣ C къ плоскости M.

2680. **Построить слѣдъ прямой на плоскости.**

Рѣшеніе. Черезъ данную прямую проводимъ произвольную плоскость, строимъ ея пересѣченіе съ данною плоскостью и опредѣляемъ точку пересѣченія слѣда плоскости съ данной прямой.

2681. Черезъ данную точку провести прямую, пересѣкающую двѣ данныя прямыя.

Рѣшеніе. Черезъ каждую изъ данныхъ прямыхъ и точку проводимъ плоскости и строимъ пересѣченіе этихъ плоскостей и т. д.

2682. Провести прямую, параллельную данной прямой, пересѣкающую двѣ другія данныя прямыя.

Рѣшеніе. Черезъ каждую изъ двухъ послѣднихъ прямыхъ проводятъ плоскости, параллельныя первой прямой; пересѣченіе этихъ плоскостей—искомая прямая.

2683. Черезъ данную точку провести прямую, параллельную двумъ даннымъ плоскостямъ.

2684. Черезъ данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости и пересѣкающую данную прямую.

2685. Черезъ данную точку провести прямую, пересѣкающую данную прямую и данную окружность.

2686. Даны плоскость и пересѣкающая ее прямая. На данной плоскости черезъ слѣдъ данной прямой провести прямую, образующую съ данной прямой уголъ, равный данному.

Рѣшеніе. Изъ любой точки B данной прямой AB опускаемъ перпендикуляръ Bb на данную плоскость; тогда Ab—проекція AB (A—слѣдъ прямой); на какой-нибудь плоскости строимъ вспомогательный прямоугольный треугольникъ, имѣющій гипотенузою AB и прилегающій уголъ α=данному углу. На данной плоскости строимъ треугольникъ, имѣющій гипотенузою Ab и катетомъ линію AD, равную катету, прилежащему данному углу α вспомогательнаго треугольника. AD—искомая прямая.

2687. Черезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы она пересѣкала данную прямую и съ данной плоскостью образовала уголъ, равный данному.

2688. Черезъ данную точку провести прямую, которая была бы параллельна данной плоскости и съ другою плоскостью образовала бы уголъ, равный данному.

2689. Провести прямую параллельно данной прямой и пересѣкающую данную окружность и данную прямую.

2690. Найти пересѣченіе прямой, опредѣляемой двумя точками, съ плоскостью, опредѣляемой тремя точками.

Доказать, что:

2691. Противоположныя стороны плоскаго четыреугольника, вписаннаго въ четыреугольникъ, вершины котораго не лежатъ въ одной плоскости, пересѣкаются на діагоналяхъ послѣдняго.

2692. Если одна изъ двухъ параллельныхъ прямыхъ параллельна плоскости, то и другая должна быть ей параллельна.

2693. Если прямая параллельна одной изъ двухъ параллельныхъ плоскостей, то она параллельна и другой плоскости.

2694. Всѣ прямыя, параллельныя между собою, въ центральной проекціи на плоскость даютъ прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ, именно въ точкѣ пересѣченія плоскости проекцій съ прямой, параллельной даннымъ прямымъ и проведенной изъ центра проектирующихъ лучей.

2695. Если прямая и плоскость перпендикулярны къ одной плоскости, то они параллельны между собою.

2696. Прямая и плоскость, перпендикулярныя къ одной прямой, параллельны между собою.

2697. Если двѣ плоскости перпендикулярны каждая въ одной изъ двухъ скрещивающихся линій, то линія пересѣченія этихъ плоскостей параллельна кратчайшему разстоянію между скрещивающимися линіями.

2698. На плоскости M проведены двѣ пересѣкающіяся въ точкѣ B прямыя CD и EF, при чемъ $BE = BF$ и $BC = BD$. Если точка A лежитъ внѣ плоскости и $AE = AF$, также $AC = AD$, то AB перпендикулярна къ M.

2699. Три плоскости, перпендикулярныя каждая одной сторонѣ треугольника въ срединѣ ея, пересѣкаются по прямой линіи, перпендикулярной къ плоскости треугольника въ центрѣ круга, описаннаго около этого треугольника.

2700. Если точка A, находящаяся внѣ плоскости, равно отстоитъ отъ n точекъ, расположенныхъ на плоскости, то эта точка лежитъ на перпендикулярѣ къ плоскости въ центрѣ круга, на которомъ лежатъ эти n точекъ *(2 обратныхъ)*.

2701. Двугранные углы съ параллельными гранями имѣютъ параллельныя ребра и равны между собою, или сумма ихъ равна 2d угламъ.

2702. Если прямая образуетъ равные углы съ двумя плоскостями, то слѣды этой прямой находятся въ равномъ разстояніи отъ линіи пересѣченія плоскостей и въ равномъ разстояніи отъ самихъ пересѣкающихся плоскостей.

2703. Середины сторонъ четыреугольника со скрещивающимися противоположными сторонами лежатъ на одной плоскости и образуютъ вершины параллелограмма.

2704. Три линіи, соединяющія средины противоположныхъ сторонъ и середины діагоналей четыреугольника пересѣкаются въ одной точкѣ и въ точкѣ пересѣченія дѣлятся пополамъ.

2705. Если четыре стороны четыреугольника со скрещивающимися противоположными сторонами пересѣкаютъ плоскость, параллельную діагоналямъ четыреугольника, то точки пересѣченія суть вершины параллелограмма и дѣлятъ стороны четыреугольника на пропорціональные отрѣзки.

2706. Если стороны одного треугольника параллельны сторонамъ другого, то треугольники подобны, и прямыя, соединяющія вершины равныхъ угловъ этихъ треугольниковъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

2707. Геометрическія мѣста точекъ, равно отстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ, есть плоскость, перпендикулярная къ прямой, соединяющей эти точки въ ея серединѣ.

2708. Геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ трехъ данныхъ точекъ, есть прямая, перпендикулярная къ плоскости, опредѣляемой тремя данными точками и проходящая черезъ центръ круга, проходящаго черезъ эти точки.

2709. Геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ сторонъ угла, суть двѣ плоскости, перпендикулярныя къ плоскости угла и проходящія черезъ равнодѣлящія даннаго угла и угла, смежнаго съ нимъ.

2710. Геометрическое мѣсто точекъ исхода лучей, идущихъ къ сторонамъ угла и одинаково наклоненныхъ къ нимъ, есть плоскость, перпендикулярная къ плоскости даннаго угла и проходящая черезъ равнодѣлящую его.

2711. Геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ сторонъ двуграннаго угла, суть двѣ перпендикулярныя между собою плоскости, дѣлящія пополамъ одна данный двугранный уголъ, а другая уголъ, смежный съ нимъ.

2712. Геометрическое мѣсто точекъ, разстояніе которыхъ отъ сторонъ двуграннаго угла находится въ данномъ отношеніи, суть двѣ плоскости, проходящія черезъ ребро двуграннаго угла.

2713. Между точкой и плоскостью провести прямую данной длины, параллельную другой данной прямой.

2714. Провести прямую, проходящую черезъ данную точку, такъ, чтобы часть ея, лежащая между данной прямой и параллельной ей плоскостью, была равна данной длинѣ.

2715. Черезъ данную точку провести прямую, пересѣкающую данную прямую и двѣ данныя плоскости такъ, чтобы разстояніе точекъ пересѣченія съ послѣдними отъ данной прямой находилось въ данномъ отношеніи.

2716. На данной плоскости провести прямую такъ, чтобы разстоянія точекъ ея отъ двухъ данныхъ внѣ плоскости прямыхъ были равны между собою.

2717. На данной прямой или на данной окружности опредѣлить точку, находящуюся въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ точекъ.

2718. На данной плоскости найти точку, равноотстоящую отъ трехъ точекъ, находящихся внѣ плоскости.

2719. Построить прямую, параллельную тремъ даннымъ прямымъ и находящуюся отъ нихъ въ равномъ разстояніи.

2720. Даны три плоскости, линіи пересѣченія которыхъ параллельны между собою; найти прямую, параллельную тремъ плоскостямъ и находящуюся отъ нихъ въ равномъ разстояніи.

2721. Построить равносторонній треугольникъ такъ, чтобы одна изъ его вершинъ лежала въ данной точкѣ, другая—на данной прямой и третья—на данной плоскости.

2722. Найти точку, находящуюся отъ четырехъ данныхъ точекъ въ равномъ разстояніи.

2723. Найти точку, находящуюся отъ четырехъ данныхъ плоскостей въ равномъ разстояніи.

2724. Найти точку, разстоянія которой отъ четырехъ данныхъ плоскостей находились бы въ отношеніи $m:n:p:q$.

2725. Опредѣлить точку, которая находится въ равномъ разстояніи отъ четырехъ сторонъ четыреугольника, не лежащихъ въ одной плоскости.

2726. На прямой или на окружности опредѣлить точку, которая находилась бы въ данномъ разстояніи отъ данной плоскости.

2727. На данной плоскости опредѣлить точку, которая находилась бы въ данномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ плоскостей.

2728. На данной прямой опредѣлить точку, сумма или разность разстояній которой отъ двухъ данныхъ плоскостей имѣла бы данную длину.

2729. На данной плоскости найти геометрическое мѣсто точекъ, находящихся отъ данной плоскости въ данномъ разстояніи.

2730. Опредѣлить на плоскости точки, находящіяся въ данномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ плоскостей.

2731. Опредѣлить на данной плоскости геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ плоскостей.

2732. Черезъ двѣ данныя точки провести плоскости, которыя образовали бы съ двумя данными плоскостями равные углы.

2733. Построить плоскости, которыя проходятъ черезъ данную точку и съ тремя данными плоскостями образуютъ равные углы.

2734. Построить плоскости, которыя проходятъ черезъ данную точку, и образуютъ съ двумя данными прямыми или съ двумя данными плоскостями равные углы.

2735. Построить плоскости, которыя равно удалены отъ двухъ данныхъ точекъ и съ двумя данными плоскостями или съ двумя прямыми образуютъ равные углы.

2736. На данной плоскости черезъ данную точку провести прямую, которая отъ другой данной точки находится въ данномъ разстояніи.

2737. Въ данной плоскости черезъ данную точку провести прямую, которая съ данной прямой образуетъ данный уголъ.

2738. Черезъ данную прямую провести плоскости, находящіяся въ данномъ разстояніи отъ данной точки.

2739. Построить плоскости, которыя находятся въ равномъ разстояніи отъ двухъ точекъ и въ данномъ разстояніи отъ третьей точки.

2740. Черезъ данную точку провести плоскость, параллельную данной плоскости и находящуюся отъ нея въ данномъ разстояніи.

2741. Черезъ данную точку провести прямую, пересѣкающую данную прямую и образующую съ данной плоскостью данный уголъ.

2742. Черезъ данную точку провести прямую, образующую съ двумя данными прямыми равные углы и съ третьею прямою данный уголъ.

2743. Черезъ данную точку провести плоскость, которая образовала бы съ данной прямой данный уголъ и пересѣкала бы его въ данной точкѣ.

2744. Черезъ данную точку провести плоскость, которая была бы параллельна къ данной прямой и съ другой данной прямой образовала бы уголъ, равный данному.

2745. Черезъ данную точку провести плоскость, которая была бы перпендикулярна данной плоскости и съ данной прямою образовала бы уголъ, равный данному.

2746. Черезъ данную точку провести плоскость, равно удаленную отъ двухъ данныхъ точекъ и образующую съ прямою уголъ, равный данному.

2747. Построить параллельную данной прямой и находящуюся въ данномъ разстояніи отъ двухъ другихъ прямыхъ.

2748. Построить прямую, пересѣкающую три данныя прямыя такъ, чтобы отрѣзки искомой прямой, лежащіе между данными прямыми, находились въ данномъ между собою отношеніи.

2749. Провести прямую, дѣлящую противоположныя стороны четыреугольника на пропорціональные между собою отрѣзки и пересѣкающую одну изъ этихъ сторонъ подъ прямымъ угломъ.

2750. На данной прямой опредѣлить точку, сумма разстояній которой отъ двухъ точекъ внѣ ея была бы наименьшая.

2751. На данной плоскости опредѣлить точку, сумма разстояній которой отъ двухъ точекъ внѣ этой плоскости была бы наименьшая.

2752. Даны плоскость и три точки, внѣ этой плоскости; провести изъ данныхъ точекъ три прямыя, пересѣкающіяся на плоскости и образующія съ данной плоскостью равные между собою углы.

2753. На плоскости черезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы разстояніе ея отъ точки, лежащей внѣ плоскости, имѣло данную длину.

2754. На плоскости провести прямую, имѣющую данное разстояніе отъ двухъ точекъ, лежащихъ внѣ плоскости.

2755. Опредѣлить уголъ между проекціями сторонъ даннаго угла, если даны углы между сторонами угла и плоскостью проекціи.

2756. Черезъ данную прямую провести плоскость, которая находилась бы въ данномъ разстояніи отъ данной точки.

2757. Черезъ данную точку провести плоскость, параллельную данной прямой и находящуюся отъ нея въ данномъ разстояніи.

2758. Черезъ данную точку провести прямую, находящуюся въ данномъ разстояніи отъ двухъ прямыхъ.

2759. Изъ точки, лежащей на данной прямой, провести прямую данной длины и образующую съ данной плоскостью уголъ, равный данному.

2760. Черезъ сторону даннаго угла провести плоскость, образующую съ другою стороною того же угла уголъ, равный данному.

2761. Черезъ данную прямую провести плоскость, образующую съ другой данной прямой уголъ, равный данному.

2762. Черезъ данную точку провести прямую, образующую уголъ, равный данному съ одною плоскостью, и параллельную другой плоскости.

2763. Между данной прямой (или окружностію) и плоскостью помѣстить прямую данной длины такъ, чтобы она была параллельна данной плоскости и съ другой данной плоскостью образовала бы данный уголъ.

2764. Между прямою и плоскостью помѣстить отрѣзокъ данной длины такъ, чтобы онъ былъ параллеленъ данной плоскости и съ данной прямой образовалъ бы уголъ, равный данному.

2765. Двѣ скрещивающіяся прямыя соединить прямою, параллельною данной плоскости и съ одной изъ двухъ скрещивающихся линій образующею данный уголъ.

2766. Даны двѣ точки и прямая. На прямой найти такую третью точку, чтобы треугольникъ, имѣющій вершинами эти три точки, имѣлъ данную площадь.

2767. Построить плоскость, находящуюся въ равномъ разстояніи отъ трехъ данныхъ точекъ и образующую съ данной прямой данный уголъ.

2768. Найти кратчайшее разстояніе между двумя скрещивающимися прямыми.

2769. Между двумя скрещивающимися прямыми помѣстить прямую данной длины такъ, чтобы она съ одною изъ данныхъ прямыхъ образовала уголъ, равный данному.

2770. Построить прямую, пересѣкающую двѣ данныя прямыя и параллельную данной плоскости.

2771. Провести прямую параллельно данной плоскости, пересѣкающую двѣ данныя прямыя и образующую съ одной изъ нихъ уголъ, равный данному.

2772. Въ какую фигуру проектируется n-угольникъ на плоскость?

2773. На плоскости даны три луча, выходящіе изъ одной точки, и треугольникъ, вершины котораго лежатъ на этихъ лучахъ. Какой фигуры въ пространствѣ можетъ служить начерченная фигура проекціей на плоскость послѣдней?

2774. Площади проекцій многоугольниковъ, лежащихъ на одной плоскости, на какую-нибудь другую плоскость пропорціональны площадямъ многоугольниковъ, и площадь каждаго многоугольника относится къ площади проекціи его, какъ какая-нибудь сторона многоугольника къ ея проекціи.

2775. Между двумя скрещивающимися прямыми помѣстить отрѣзокъ данной длины такъ, чтобы проекція его на данную плоскость имѣла данную длину.

2776. Данный квадратъ помѣстить такъ, чтобы противоположныя вершины его лежали на двухъ данныхъ скрещивающихся прямыхъ, и чтобы онъ проектировался на данную плоскость въ видѣ ромба, имѣющаго данной величины площадь.

2777. Если изъ произвольнаго числа прямыхъ въ пространствѣ каждыя двѣ лежатъ въ одной плоскости, при чемъ всѣ въ одной плоскости не лежатъ, то всѣ прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ.

2778. Если два треугольника, лежащіе въ разныхъ плоскостяхъ, поставлены въ центральной перспективѣ, т.-е. прямыя, соединяющія соотвѣтствующія вершины треугольниковъ, пересѣкаются въ одной точкѣ, то соотвѣтственныя стороны треугольниковъ пересѣкаются на одной прямой.

ГЛАВА II.

Трегранные и многогранные углы.

2779. Если пересѣчь грани треграннаго угла плоскостями параллельными, то въ сѣченіи получатся треугольники, замѣчательныя точки которыхъ лежатъ на прямыхъ, проходящихъ черезъ вершину треграннаго угла.

2780. Если изъ какой-нибудь точки пространства провести параллельныя и одинаково направленныя съ ребрами треграннаго угла прямыя, то проведенныя прямыя образуютъ ребра треграннаго угла, равнаго данному.

2781. Если внутри треграннаго угла провести прямую, то сумма угловъ, образуемыхъ этой прямой съ ребрами угла, меньше суммы плоскихъ угловъ треграннаго угла.

2782. Плоскости, дѣлящія двугранные углы треграннаго угла пополамъ, пересѣкаются по одной прямой, точки которой равно отстоятъ отъ сторонъ угла.

2783. Три плоскости, проходящія черезъ каждое ребро и равнодѣлящую угла противоположной грани треграннаго угла, пересѣкаются по одной прямой.

2784. Плоскости, проходящія черезъ ребра треграннаго угла, перпендикулярно къ противоположнымъ гранямъ, пересѣкаются по одной прямой.

2785. Плоскости, перпендикулярныя къ гранямъ треграннаго угла и проходящія черезъ равнодѣлящія этихъ граней, пересѣкаются по одной прямой, точки которой равно отстоятъ отъ реберъ треграннаго угла.

2786. Если пересѣчь плоскостью ребра треграннаго угла, плоскіе углы котораго прямые, то въ сѣченіи получится треугольникъ, точка пересѣченія высотъ котораго есть проекція вершины треграннаго угла на плоскость треугольника.

2787. Если въ трегранномъ углѣ два плоскихъ угла прямые, то и противоположные имъ двугранные углы также прямые.

2788. Если сумма плоскихъ угловъ треграннаго угла равна 2d, то плоскости, дѣлящія двугранные углы пополамъ, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

2789. Геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ граней треграннаго угла, есть четыре прямыхъ.

2790. Геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ реберъ треграннаго угла—четыре прямыхъ.

2791. На сторонѣ треграннаго угла дана прямая; провести черезъ эту прямую плоскость, пересѣкающую ребра треграннаго угла такъ, чтобы въ сѣченіи получился равнобедренный треугольникъ, при чемъ данная прямая должна быть: 1) равной стороной, 2) основаніемъ.

2792. На сторонѣ треграннаго угла дана прямая; провести черезъ нее плоскость такъ, чтобы въ сѣченіи получился прямоугольный треугольникъ, при чемъ данная прямая должна быть: 1) катетомъ, 2) гипотенузою.

2793. Построить трегранный уголъ, если даны три стороны его (т.-е. построить на плоскости линейные углы, измѣряющіе двугранные углы трегранна го угла).

2794. Построить трегранный уголъ, зная величину угловъ двухъ граней треграннаго угла и двугранный уголъ между ними (т.-е. по даннымъ элементамъ треграннаго угла построить на плоскости величину остальныхъ).

2795. Построить трегранный уголъ по сторонѣ и двумъ прилежащимъ угламъ.

2796. Построить трегранный уголъ по тремъ угламъ его.

2797. Построить трегранный уголъ по двумъ сторонамъ и по углу, лежащему противъ одной изъ нихъ.

2798. Построить трегранный уголъ по двумъ угламъ и по сторонѣ, лежащей противъ одного изъ нихъ.

2799. Въ трегранномъ углѣ даны двѣ стороны и уголъ, заключенный между ними, $=d$; опредѣлить третью сторону.

2800. Въ равнобедренномъ трегранномъ углѣ даны двѣ равныя стороны и уголъ между ними; построить неравную сторону.

2801. Построить углы треграннаго угла, въ которомъ данъ уголъ одной грани, и углы другихъ граней прямые.

2802. По даннымъ сторонамъ равносторонняго треграннаго угла построить углы его.

2803. Въ данномъ трегранномъ углѣ опредѣлить углы, образуемые ребрами съ противоположными гранями.

2804. Опредѣлить углы, образуемые ребрами съ линіями, дѣлящими противоположную грань пополамъ.

2805. Построить углы, образуемые ребрами съ линіей пересѣченія плоскостей, равнодѣлящихъ углы треграннаго угла съ противоположными гранями.

2806. Построить равносторонній трегранный уголъ, если извѣстенъ уголъ, образуемый ребромъ его съ противоположной гранью.

Построить равнобедренный трегранный уголъ, если извѣстны:

2807—одна изъ равныхъ сторонъ и уголъ, образованный съ нею противоположнымъ ребромъ;

2808—неравная сторона и уголъ, образованный равною стороною съ противоположнымъ ребромъ;

2809—одна изъ равныхъ сторонъ и уголъ, образованный неравною стороною съ противоположнымъ ребромъ;

2810—неравная сторона и уголъ, образованный ею съ противоположнымъ ребромъ;

2811—одинъ изъ равныхъ двугранныхъ угловъ и уголъ ребра его съ противоположною стороною;

2812—неравный двугранный уголъ и уголъ между ребромъ другого угла и противоположною стороною;

2813—одинъ изъ равныхъ двугранныхъ угловъ и уголъ между ребромъ другого угла съ противоположною стороною;

2814—неравный двугранный уголъ и уголъ между ребромъ его и противоположной стороною.

2815. Построить прямоугольный трегранный уголъ по сторонѣ и углу, образованному этой стороною съ противоположнымъ ребромъ.

Построить трегранный уголъ, если извѣстны:

2816—двѣ стороны и уголъ, образованный третьею стороною съ противоположнымъ ребромъ;

2817—двѣ стороны и уголъ, образованный одной изъ нихъ съ противоположнымъ ребромъ;

2818—два угла и уголъ, образованный ребромъ третьяго угла съ противоположною стороною;

2819—два угла и уголъ, образованный ребромъ одного изъ нихъ съ противоположною стороною;

2820—сторона, прилегающій уголъ и уголъ, образованный данной стороною съ противоположнымъ ребромъ;

2821—сторона, противоположный уголъ и уголъ, образованный другою стороною съ противоположнымъ ребромъ;

2822—сторона и два угла, образованные двумя другими сторонами съ ребрами, противоположными имъ;

2823—сторона, уголъ, образованный ею съ противоположнымъ ребромъ, и уголъ, образованный другою стороною съ противоположнымъ ребромъ;

2824—двѣ стороны и уголъ, образованный ребромъ съ равнодѣлящей плоскаго угла одной изъ данныхъ сторонъ;

2825—сторона, прилежащій уголъ и уголъ, образованный равнодѣлящей даннаго плоскаго угла съ противоположнымъ ребромъ;

2826—сторона и два угла, образованные противоположнымъ данной сторонѣ ребромъ, со стороною и съ равнодѣлящею даннаго плоскаго угла;

2827—двугранный уголъ, уголъ прилежащей стороны съ противоположнымъ ребромъ и уголъ равнодѣлящей плоскаго угла этой стороны съ тѣмъ же ребромъ;

2828—сторона, уголъ другой стороны съ противоположнымъ ребромъ и уголъ равнодѣлящей плоскаго угла той же стороны съ тѣмъ же ребромъ;

2829—два двугранные угла и уголъ ребра одного изъ нихъ съ линіей пересѣченія плоскости, равнодѣлящей этотъ уголъ, съ противоположною стороною (плоскій уголъ равнодѣлящей плоскости).

2830—два двугранные угла и плоскій уголъ равнодѣлящей плоскости третьяго двуграннаго угла;

2831—сторона, уголъ другой стороны съ противоположнымъ ребромъ и плоскій уголъ равнодѣлящей плоскости, соотвѣтствующей той же сторонѣ;

2832—двугранный уголъ, уголъ ребра его съ противоположной стороною и плоскій уголъ равнодѣлящей плоскости даннаго двуграннаго угла;

2833—двугранный уголъ, уголъ прилежащей стороны съ противоположнымъ ребромъ его и плоскій уголъ равнодѣлящей плоскости, проходящей черезъ это ребро;

2834—двугранный уголъ, плоскій уголъ равнодѣлящей плоскости его и уголъ прилежащей стороны того же двуграннаго угла съ противоположнымъ ребромъ.

2835. Сумма плоскихъ угловъ трегранпаго угла равна 2d; извѣстна сторона этого угла и противоположный ей двугранный уголъ; построить двѣ другія стороны и опредѣлить два другіе угла этого трегранпаго угла.

2836. На каждой изъ двухъ сторонъ трегранпаго угла дано по одной прямой; опредѣлить уголъ между этими прямыми и линію пересѣченія плоскости этого угла съ третьей стороною трегранпаго угла.

2837. Черезъ ребро трегранпаго угла проведена плоскость, образующая данный уголъ съ прилежащей стороною двуграннаго угла; построить уголъ, образуемый линіей пересѣченія стороны трегранпаго угла плоскостью и прилежащимъ ребромъ.

2838. Черезъ ребро трегранпаго угла проходитъ плоскость, образующая со стороной данный уголъ; опредѣлить уголъ между линіею пересѣченія стороны и плоскости съ противоположнымъ ребромъ.

2839. На сторонѣ трегранпаго угла проведена прямая, проходящая черезъ вершину трегранпаго угла и черезъ эту прямую проведена плоскость, которая образуетъ со стороною данный уголъ. Построить полученную въ пересѣченіи фигуру.

2840. Извѣстны разстоянія точки до сторонъ трегранпаго угла; построить проекціи этой точки на стороны угла и на ребро его.

2841. На каждой изъ двухъ сторонъ трегранпаго угла дано по одной точкѣ. Построить разстояніе линіи, соединяющей эти точки, отъ вершины угла, и уголъ этой линіи съ сторонами и ребрами угла.

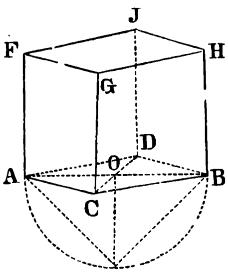
ГЛАВА III.

Многогранники.

2842. Начертить кубъ такъ, чтобы передняя и задняя стороны его были квадраты, сокращеніе реберъ, не составляющихъ стороны этихъ квадратовъ, было равно $^1/_3$, и уголъ послѣднихъ съ горизонтальными ребрами былъ бы равенъ 30^0. Показать, въ какомъ направленіи долженъ быть помѣщенъ глазъ, чтобы полученная фигура могла быть параллельной ортогональной проекціей куба.

2843. Построить кубъ въ такой же перспективѣ съ такимъ же сокращеніемъ, какъ и въ предыдущей задачѣ, притомъ такъ, чтобы одна изъ діагоналей основанія имѣла истинную величину.

Рѣшеніе. Пусть AB — длина діагонали куба (черт. 145), проведенная горизонтально на плоскости проекцій (чертежа). Дѣлимъ AB пополамъ, черезъ средину AB подъ угломъ въ 30^0 съ нею проводимъ прямую CD, равную по длинѣ $^1/_3$ AB, такъ, чтобы CD въ точкѣ O дѣлилась пополамъ. Соединяя A и B съ D и C, получимъ параллелограммъ ACBD, служащій проекціей основанія куба. Для опредѣленія длины реберъ описываемъ около AB, какъ около діаметра, окружность, и сторона равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника AEB дастъ истинную величину AE—реберъ куба; перпендикуляры AF и BH къ AB, равные каждый сторонѣ этого треугольника, суть проекціи реберъ и т. д.

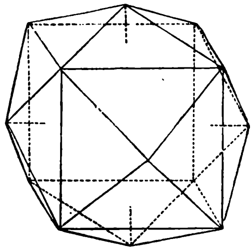


Черт. 145.

2844. Начертить въ проекціи фигуру, которая получится, если ребра, сходящіяся въ вершинахъ куба, пересѣчь плоскостями такъ, чтобы отъ каждаго ребра, начиная отъ вершины, отсѣкалась $^1/_4$ его. Опредѣлить родъ и величину фигуръ, полученныхъ въ сѣченіяхъ, и уголъ наклоненія плоскостей сѣченія (графически) къ плоскости основанія куба (кубъ съ притупленными углами).

2845. Сдѣлать такое же построеніе, какъ и въ предшествующей задачѣ, предполагая, что плоскости отсѣкаютъ половины реберъ куба или $^1/_3$ ихъ.

2846. Въ срединахъ сторонъ куба возставить перпендикуляры къ нимъ, длиною равные $^1/_4$ стороны куба; черезъ концы этихъ перпендикуляровъ и соотвѣтствующія ребра сторонъ проведены плоскости. Начертить полученную фигуру въ параллельной перспективѣ съ такимъ же сокращеніемъ, какъ и въ задачѣ 2842 (черт. 146).



Черт. 146.

Тѣло называется тетракисъ-гексаедромъ или пирамидальнымъ кубомъ.

2847. Сдѣлать такое же построеніе, какъ и въ предыдущей задачѣ, предполагая, что кубъ расположенъ относительно плоскости проекцій, какъ и въ задачѣ 2843.

2848. Срѣзать пирамиды, лежащія на сторонахъ куба въ тетракисъ-гексаедрѣ (см. 2846), плоскостями, отсѣкающими $^3/_4$ ребра пирамиды, считая отъ вершины пирамиды.

Получимъ тѣло, называемое въ минералогіи кубомъ съ заостренными ребрами.

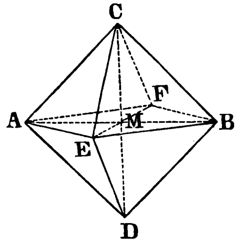
2849. Сдѣлать такое же построеніе, какъ и въ предыдущей задачѣ, для ромбическаго додекаедра.

Получимъ тѣло, называемое кубомъ, притупленнымъ въ ребрахъ или обезребреннымъ.

2850. Трегранные углы ромбическаго додекаедра срѣзать плоскостями, отсѣкающими $^2/_3$ каждаго ребра, считая отъ вершины.

Полученный многогранникъ называется октаедромъ съ притупленными ребрами.

2851. Представить въ такой же перспективѣ, какъ и предыдущія тѣла, правильный октаедръ.



Черт. 147.

Рѣшеніе. Проводимъ AB и CD перпендикулярно другъ къ другу и такъ, чтобы въ точкѣ пересѣченія M они дѣлились пополамъ. черезъ M проводимъ $EF = {}^1/_3\,AB$ подъ угломъ 30^0 съ AB такъ, чтобы EF въ точкѣ M дѣлилась пополамъ, соединяемъ A, E, B, F съ C и D, получимъ искомую проекцію октаедра (черт. 147).

2852. Срѣзать вершины октаедра по $^1/_4$ ребра плоскостями.

2853. На граняхъ октаедра построить пирамиды данной высоты.

Полученное тѣло называется пирамидальнымъ октаедромъ и въ минералогіи тріакисъ-октаедромъ; въ проекціи высоты пирамидъ лежатъ на линіи, соединяющей M съ срединой треугольника (центръ тяжести).

2854. Изъ правильнаго октаедра получить ромбическій додекаедръ.

Найти высоты пирамидъ, построенныхъ на граняхъ октаедра.

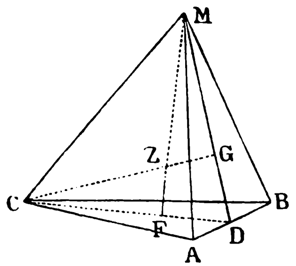
2855. Отрѣзать вершины пирамидъ пирамидальнаго октаедра плоскостями, отсѣкающими $^3/_4$ реберъ пирамидъ.

Полученное тѣло называется октаедромъ, пріостреннымъ въ ребрахъ.

2856. Построить октаедръ съ притупленными ребрами, отсѣкая часть реберъ плоскостями.

2857. Построить въ параллельной перспективѣ правильный тетраедръ съ сокращеніемъ $= {}^1/_3$ такъ, чтобы высота основанія проектировалась въ истинную величину, если даны ребра тетраедра.

Рѣшеніе. Если дано ребро тетраедра, то дѣйствительная высота основанія тетраедра опредѣляется какъ высота равносторонняго треугольника. Предполагаемъ, что эта высота параллельна плоскости чертежа. Откладываемъ высоту CD по горизонтальной линіи (черт. 148). Въ концѣ ея проведемъ AB равную $^1/_3$ истинной величины ребра подъ угломъ въ 30^0 къ CD, притомъ такъ, чтобы AB въ точкѣ D дѣлилась пополамъ. Соединяя A съ C и B съ C, получимъ треугольникъ ACB, служащій параллельной перспективой основанія тетраедра; на CD откладываемъ $FD = {}^1/_3 CD$ и возставляемъ перпендикуляръ FM, равный высотѣ тетраедра. M есть вершина тетраедра. FM опредѣлится, какъ катетъ прямоугольнаго треугольника по гипотенузѣ (ребро) и другому катету $= {}^2/_3$ CD.



Черт. 148.

2858. Построить среднюю точку тетраедра (центръ тяжести), т.-е. точку равноудаленную отъ его поверхности.

Рѣшеніе. Проведя MD и откладывая $DG = {}^1/_3$ MD, соединимъ C съ G; точка пересѣченія MF и CG—искомая. Легко доказать, что $FZ = {}^1/_4$ FM (черт. 148).

2859. Изъ срединъ граней тетраедра возставлены перпендикуляры къ нимъ, по длинѣ равные, считая отъ поверхности, $^1/_5$ части высоты тетраедра и служащіе высотами треугольныхъ пирамидъ, имѣющихъ основаніемъ грани тетраедра. Построить полученное тѣло въ параллельной перспективѣ.

Полученное тѣло называется пирамидальнымъ тетраедромъ или тріакисъ-тетраедромъ. Для построенія слѣдуетъ продолжить высоты тетраедра на $^1/_5$ ихъ длины и соединить концы продолженій съ вершинами тетраедра.

2860. Показать, что, соединяя средины реберъ тетраедра, получимъ параллельную проекцію правильнаго октаедра.

2861. Какимъ построеніемъ получить изъ проекціи октаедра проекцію тетраедра?

2862. Срѣзать углы тетраедра плоскостями, пересѣкающими ребра (притупить углы).

2863. Срѣзать углы тетраедра такъ, чтобы получился тетраедръ, притупленный въ ребрахъ.

2864. Срѣзать углы пирамидальнаго тетраедра такъ, чтобы получился тетраедръ съ пріостренными ребрами.

Примѣчаніе. Для полученія многогранниковъ правильной системы, представляющихъ формы кристалловъ, поступаютъ такъ: берутъ три оси, пересѣкающіяся между собою подъ прямымъ угломъ и представляющія линіи пересѣченія трехъ перпендикулярныхъ плоскостей, которыя дѣлятъ все пространство на 8 октантовъ. Въ каждомъ изъ октантовъ откладываютъ отрѣзки a, b, c, на трехъ осяхъ въ различномъ порядкѣ и черезъ концы этихъ отрѣзковъ въ каждомъ ихъ положеніи проводятъ плоскости; линіи пересѣченія этихъ плоскостей служатъ ребрами многогранника. Многогранники, такимъ образомъ полученные, опредѣляются длиной осей и ихъ направленіемъ. Если оси обозначимъ черезъ x, y, z, а длину откладываемыхъ на нихъ отрѣзковъ черезъ a, 2a, 3a..., то многогранникъ можно обозначить такъ: a, 2a, 3a; всѣхъ различныхъ положеній этихъ отрѣзковъ будетъ: $6 = 3.2$ въ каждомъ октантѣ.

a, 2a, 3a;
a, 3a, 2a;
2a, a, 3a;
2a, 3a, a;
3a, a, 2a;
3a, 2a, a.

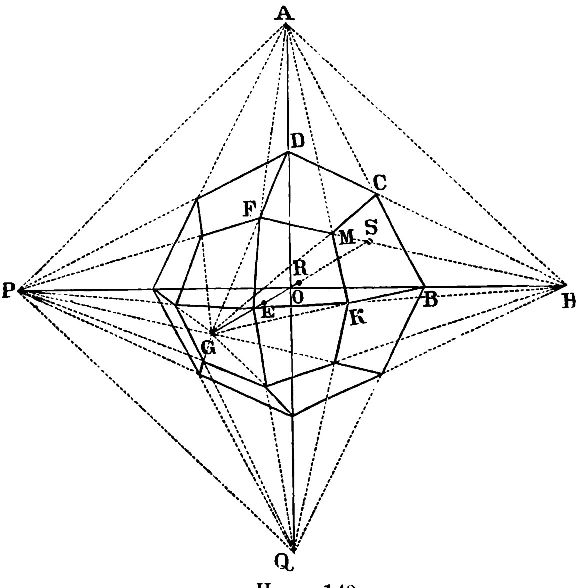
Многогранникъ a, 2a, 3a называется *гексакисъ-октаедромъ*. Многогранникъ a, xa, ∞ a, въ которомъ одна изъ осей уходитъ въ безконечно удаленную точку, называется *тетракисъ-гексаедромъ*. Многогранникъ a, xa, xa—*трапецоедромъ*. Многогранникъ a, ∞ a, ∞ a, двѣ оси котораго уходятъ въ безконечность,—*кубомъ*. Многогранникъ, малыя оси котораго равны a, a, xa — *тріакисъ - октаедромъ*. Многогранникъ, двѣ малыя оси котораго равны, а большая уходитъ въ безконечность: a, a, ∞ a, называется *ромбическимъ додекаедромъ*. Многогранникъ, всѣ три оси котораго равны a, a, a, — *октаедромъ* и т д.

2865. Представить въ параллельной перспективѣ трапецоедръ: a, 2a, 2a.

Указаніе. Беремъ три перпендикулярныя оси AQ=z, PH=x и GS=y, пересѣкающіяся въ точкѣ O, и представляемъ ихъ въ перспективѣ. Затѣмъ на каждой изъ осей откладываемъ отрѣзки a и 2a въ обѣ стороны отъ точки ихъ пересѣченія. Разсмотримъ одинъ изъ октантовъ — трехгранный уголъ O . AHG. На ребрахъ этого угла данной длины отрѣзки могутъ имѣть три различныя положенія:

z, x, y;
2a, 2a, a;
a, 2a, 2a;
2a, a, 2a.

Въ первомъ случаѣ концы отрѣзковъ будутъ A, H, E, проведемъ черезъ эти точки плоскость AHE; во второмъ случаѣ концы отрѣзковъ будутъ D,H,G; плоскость HDG, черезъ нихъ проходящая, пересѣчетъ плоскость AHE по линіи FH. Въ третьемъ случаѣ концы отрѣзковъ будутъ A, B, G и плоскость ABG пересѣкаетъ первую плоскость AHE по линіи AK, и вторую DHG по



Черт. 149.

линіи GC; три линіи пересѣченія AK, FH и GC трехъ пересѣкающихся плоскостей могутъ либо пересѣкаться въ одной точкѣ, либо быть параллельными; въ данномъ случаѣ онѣ пересѣкутся въ точкѣ M, которая и будетъ угломъ многогранника; дѣлая такія же построенія въ другихъ октантахъ, начертимъ искомую перспективу трапецоедра.

Представить въ параллельной перспективѣ тѣла:

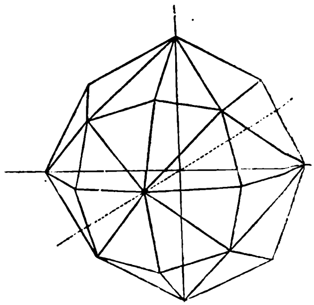
2866. a, 2a, 3a — гексакисъ-тетраедръ (фиг. 150).

2867. a, xa, xa,

2868. a, a, a.

2869. a, ∽ a, ∽ a.

2870. a, a, ∽ a.



Черт. 150.

П р и з м а.

2871. Доказать, что въ треугольной призмѣ, усѣченной плоскостью, непараллельною основанію, три точки пересѣченія продолженій соотвѣтственныхъ сторонъ треугольниковъ, лежащихъ въ основаніяхъ призмы, лежатъ на одной прямой (треугольники основаній называются перспективными).

2872. Данная четыреугольная призма пересѣчена плоскостью не параллельною основанію и проходящею черезъ три точки, данныя на трехъ ребрахъ ея; найти точку пересѣченія сѣкущей плоскости съ четвертымъ ребромъ ея.

2873. Доказать, что, если двѣ діагональныя плоскости параллелепипеда перпендикулярны къ основаніямъ, то параллелепипедъ прямой.

2874. Если двѣ діагональныя плоскости параллелепипеда суть равные между собою прямоугольники, то параллелепипедъ прямоугольный.

2875. Если діагональныя плоскости четыреугольной призмы проходятъ черезъ одну точку, то призма есть параллелепипедъ.

2876. Если соединимъ вершины треугольной призмы, прилежащія къ одному основанію, съ срединами противоположныхъ реберъ другого основанія, то линія, соединяющая эти точки, и линія, соединяющая центры тяжести обоихъ основаній, пересѣкутся въ одной точкѣ, дѣлящей каждую изъ этихъ линій въ отношеніи 1 : 2.

2877. Если проведемъ черезъ вершины, прилежащія къ одному основанію треугольной призмы, плоскости, проходящія черезъ противолежащія ребра другого основанія, то эти плоскости пересѣкутся по одной точкѣ, лежащей на линіи, соединяющей центры тяжести обоихъ основаній.

2878. Плоскости, перпендикулярныя къ боковымъ гранямъ и проходящія черезъ боковыя ребра треугольной призмы, пересѣкаются по одной прямой.

2879. Плоскости, дѣлящія углы, образуемые боковыми гранями треугольной призмы, пересѣкаются по одной прямой.

2880. Плоскости, перпендикулярныя къ гранямъ треугольной призмы и проходящія черезъ центръ тяжести этихъ граней, пересѣкутся въ одной грани.

2881. Прямоугольный параллелепипедъ данъ тремя измѣреніями его. Построить (на плоскости) сѣченіе этого параллелепипеда плоскостью, проходящей черезъ ребро нижняго основанія и средины противоположныхъ боковыхъ реберъ.

2882. Дана правильная шестиугольная призма, сторона основанія которой $= a$. Построить на плоскости сѣченіе этой призмы плоскостью, проходящей черезъ одну изъ сторонъ основанія и наклоненной къ основанію подъ угломъ, равнымъ 45^0.

Построить ребро куба, если дано:

2883—длина діагонали его;

2884—периметръ діагональной плоскости его;

2885—площадь діагональной плоскости.

По данному ребру a куба построить его параллельную проекцію на плоскости:

2886—перпендикулярной къ его діагонали;

2887—образующей съ діагональю уголъ въ 60^0.

2888. Въ треугольной призмѣ извѣстны основаніе, длина ребра его, проекція ребра его на основаніе по длинѣ и положенію ея. Построить на плоскости боковыя стороны и уголъ наклоненія ихъ къ плоскости основанія.

2889. Даны основаніе треугольной призмы, длина и положеніе проекціи одного изъ реберъ ея на основаніе и уголъ наклоненія одной изъ граней ея къ плоскости основанія. Построить остальные элементы призмы.

2890. Даны основаніе треугольной призмы, длина проекціи на плоскости основанія одного изъ реберъ его и углы наклоненія двухъ сторонъ; опредѣлить остальные элементы призмы.

2891. Даны основаніе треугольной призмы, проекція ребра на основаніе, углы наклоненія одной изъ сторонъ къ основанію и къ другой сторонѣ; опредѣлить остальные элементы призмы.

2892. Даны основаніе треугольной призмы, ея высота, уголъ наклоненія стороны къ основанію и къ другой сторонѣ; опредѣлить остальные элементы призмы.

2893. Какъ пересѣчь плоскостью ребра куба, чтобы въ сѣченіи получить правильный шестиугольникъ?

2894. Наоборотъ, опредѣлить кубъ, сѣченіемъ котораго могъ бы быть данный правильный шестиугольникъ.

Пирамида.

2895. Точки пересѣченія сторонъ основанія съ соотвѣтствующими сторонами непараллельнаго сѣченія пирамиды лежатъ на одной прямой.

2896. Соотвѣтствующія стороны перспективныхъ треугольниковъ или параллельны, или точки пересѣченія соотвѣтствующихъ сторонъ лежатъ на одной прямой (перспективными треугольниками называются такіе, соотвѣтственныя вершины которыхъ лежатъ на параллельныхъ между собою линіяхъ или на прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ).

2897. Черезъ три точки, лежащія на ребрахъ четыреугольной пирамиды, проходитъ плоскость; опредѣлить точку пересѣченія четвертаго ребра пирамиды съ этой плоскостью.

2898. Плоскости, проходящія черезъ боковыя ребра пирамиды, перпендикулярно основанію пирамиды, пересѣкаются по одной прямой.

2899. Каждыя три плоскости, проходящія черезъ ребра трегранной пирамиды и черезъ среднія линіи противоположныхъ граней, пересѣкаются по одной прямой.

2900. Пересѣчь тетраедръ такъ, чтобы въ сѣченіи получился равнобедренный треугольникъ.

2901. Пересѣчь тетраедръ плоскостями такъ, чтобы въ сѣченіи получились параллелограммы.

2902. Пересѣчь тетраедръ плоскостью такъ, чтобы въ сѣченіи получился параллелограммъ съ данною стороною.

2903. Пересѣчь тетраедръ плоскостью такъ, чтобы въ сѣченіи получился параллелограммъ, имѣющій данную діагональ.

2904. Пересѣчь тетраедръ плоскостью такъ, чтобы въ сѣченіи получился ромбъ.

2905. При какомъ условіи можно получить въ сѣченіи квадратъ.

2906. Найти геометрическое мѣсторединъ параллелограммовъ, получаемыхъ въ сѣченіи тетраедра.

2907. Шесть плоскостей, проходящихъ черезъ ребра и середины противоположныхъ реберъ тетраедра пересѣкаются въ одной точкѣ.

2908. Линіи, соединяющія середины противоположныхъ реберъ тетраедра, пересѣкаются въ одной точкѣ.

2909. Линіи, соединяющія вершины тетраедра съ центромъ тяжести противоположныхъ граней, пересѣкаются въ одной точкѣ, называемой центромъ тяжести тетраедра, и дѣлятся въ этой точкѣ въ отношеніи $1:3$.

2910. Если провести черезъ центръ тяжести тетраедра плоскость, параллельную двумъ противоположнымъ ребрамъ тетраедра, то эта плоскость равно удалена отъ этихъ реберъ.

2911. Если проведемъ плоскость, проходящую черезъ центръ тяжести тетраедра, то сумма разстояній отъ этой плоскости вершинъ тетраедра, лежащихъ по одну сторону плоскости, равна суммѣ разстояній вершинъ, лежащихъ по другую сторону плоскости.

2912. Построить на плоскости линіи, соединяющія середины противоположныхъ реберъ тетраедра, ребра котораго даны.

2913. Если провести плоскости, перпендикулярныя къ ребрамъ тетраедра въ срединѣ этихъ реберъ, то эти плоскости пересѣкутся въ одной точкѣ.

2914. Въ равностороннемъ тетраедрѣ всѣ высоты равны.

2915. Въ равностороннемъ тетраедрѣ уголъ между двумя гранями равняется углу между двумя другими гранями.

2916. Въ равностороннемъ тетраедрѣ линіи, соединяющія середины противоположныхъ реберъ, перпендикулярны между собою.

2917. Если проведемъ черезъ ребра равносторонняго тетраедра плоскости, параллельныя противолежащимъ ребрамъ, то получимъ въ пересѣченіи этихъ плоскостей параллелепипедъ.

2918. Если двѣ пары противоположныхъ реберъ тетраедра перпендикулярны между собою, то и третья пара противоположныхъ реберъ перпендикулярна между собою.

2919. Пересѣчь тетраедръ, противоположныя ребра котораго перпендикулярны, плоскостью такъ, чтобы въ сѣченіи получился квадратъ.

2920. Центры тяжести граней даннаго тетраедра суть вершины другого тетраедра, подобнаго данному.

2921. Если черезъ середины реберъ провести прямыя, параллельныя противоположнымъ ребрамъ, то эти прямыя образуютъ ребра другого тетраедра, симметричнаго данному.

2922. Даны грани тетраедра; построить на плоскости слѣдъ высоты на основаніи, длину высоты, уголъ наклоненія боковыхъ граней и реберъ къ плоскости основанія.

Построить тетраедръ по основанію и по:

2923—угламъ, образуемымъ боковыми гранями съ плоскостью основанія;

2924—угламъ, образуемымъ высотою съ боковыми гранями тетраедра;

2925—угламъ, образуемымъ боковыми ребрами съ плоскостью основанія;

2926—двумъ угламъ наклоненія основанія къ двумъ гранямъ и углу наклоненія ребра пересѣченія третьей грани съ одной изъ двухъ первыхъ къ плоскости основанія;

2927—высотѣ и двумъ угламъ наклоненія двухъ боковыхъ граней къ плоскости основанія.

2928—высотѣ и угламъ двухъ реберъ къ плоскости основанія;

2929—высотѣ и угламъ наклоненія одной боковой грани и одного ребра къ плоскости основанія тетраедра;

2930—высотѣ и двумъ ребрамъ;

2931—высотѣ, ребру и углу наклоненія другого ребра къ плоскости основанія;

2932—высотѣ, ребру и углу наклоненія стороны, проходящей черезъ это ребро къ плоскости основанія;

2933—высотѣ, ребру и углу наклоненія противоположной грани къ плоскости основанія;

2934—высотѣ и двумъ угламъ, образуемымъ ребромъ съ двумя ребрами основанія;

2935—высотѣ и угламъ, образуемымъ боковыми ребрами съ плоскостью основанія и съ однимъ изъ реберъ основанія;

2936—углу боковой грани съ плоскостью основанія и по угламъ противоположнаго ребра съ ребрами основанія;

2937—высотѣ, угламъ наклоненія боковой грани съ плоскостью основанія и боковаго ребра къ ребру основанія.

2938. Построить тетраедръ по высотѣ, тремъ боковымъ ребрамъ и угламъ наклоненія двухъ боковыхъ граней къ плоскостямъ основаній.

2939. Построить тетраедръ по высотѣ и двумъ боковымъ ребрамъ и по угламъ наклоненія трехъ боковыхъ граней къ плоскости основанія.

2940. Даны всѣ грани тетраедра и три точки, лежащія на граняхъ. Построить разстояніе плоскости, опредѣляемой этими тремя точками, отъ вершинъ тетраедра.

2941. Опредѣлить элементы тетраедра, боковыя ребра котораго перпендикулярны къ противоположнымъ ребрамъ основанія, если извѣстны основанія и одно изъ реберъ.

2942. Въ равностороннемъ тетраедрѣ извѣстна одна изъ граней, построить самый тетраедръ.

Построить грани правильной прямой n-гранной пирамиды, если извѣстны:

2943—высота и уголъ наклоненія двухъ граней;

2944—сторона основанія и уголъ наклоненія одного изъ реберъ къ плоскости основанія;

2945—высота и уголъ наклоненія одной изъ боковыхъ граней къ плоскости основанія;

2946—сторона основанія и уголъ между двумя боковыми ребрами.

2947. Даны многоугольникъ, лежащій въ основаніи пирамиды, и три смежныя боковыя ребра; построить боковыя грани пирамиды.

2948. Даны верхнее и нижнее основанія параллельно усѣченной треугольной пирамиды и высота ея. Построить боковыя грани этой пирамиды.

2949. Въ прямой призмѣ съ даннымъ квадратнымъ основаніемъ и данной высотой поставлена пирамида, имѣющая общее основаніе съ призмою, и вершину въ центрѣ другого основанія призмы; построить боковыя грани полаго тѣла, которое получится, если вынуть пирамиду изъ призмы.

2950. Дана усѣченная пирамида, высота которой h и площадь верхняго основанія которой относится къ площади нижняго какъ 1 : 16. Пересѣчь эту пирамиду плоскостью, параллельною основанію, такъ, чтобы площадь сѣченія была въ 4 раза больше площади верхняго основанія.

2951. Пересѣчь четыреугольную пирамиду плоскостью, проходящею чрезъ данную точку, такъ, чтобы въ сѣченіи получился параллелограммъ.

ГЛАВА IV.

Круглыя тѣла.

I. Цилиндръ.

2952. Геометрическое мѣсто точекъ (или прямыхъ), находящихся въ данномъ (кратчайшемъ) разстояніи отъ данной прямой, есть поверхность цилиндра, ось котораго — данная прямая и радіусъ основанія—данное разстояніе.

2953. Геометрическое мѣсто прямыхъ или плоскостей, параллельныхъ данной прямой и находящихся отъ нея въ данномъ разстояніи, есть поверхность цилиндра, ось котораго—данная прямая и радіусъ—данное разстояніе.

2954. Построить линію пересѣченія поверхности цилиндра съ плоскостью, параллельной оси цилиндра (опредѣлить точки пересѣченія плоскости съ окружностями основаній).

2955. Построить точки пересѣченія прямой съ поверхностью цилиндра.

2956. Если пересѣчь прямой цилиндръ плоскостью, проходящей черезъ ось цилиндра, и черезъ образующую на этой плоскости провести 2-ю плоскость, перпендикулярную къ 1-й, то вторая плоскость коснется цилиндра по образующей.

2957. Плоскость, проходящая черезъ ось цилиндра, перпендикулярная къ плоскости, касающейся поверхности цилиндра, пройдетъ черезъ линію прикосновенія касательной плоскости.

2958. Плоскость, проходящая черезъ ось прямого цилиндра и линію прикосновенія касательной плоскости, перпендикулярна къ касательной плоскости.

2959. Плоскость, проходящая черезъ линію прикосновенія касательной плоскости перпендикулярно къ послѣдней, пройдетъ черезъ ось.

2960. Двугранный уголъ, ребро котораго лежитъ на поверхности прямого цилиндра, а грани пересѣкаютъ поверхность цилиндра по двумъ образующимъ, равенъ половинѣ двуграннаго угла, ребро котораго совпадаетъ съ осью цилиндра и грани проходятъ черезъ тѣ же образующія.

2961. Если въ прямой цилиндръ вписать треугольную призму, ребра которой—образующія цилиндра, и если одна изъ боковыхъ граней призмы проходитъ черезъ ось цилиндра, то двѣ другія боковыя грани перпендикулярны между собою.

2962. Сумма противоположныхъ двугранныхъ угловъ всякой четыреугольной призмы, ребра которой составляютъ образующія прямого цилиндра, равна двумъ прямымъ угламъ.

2963. Двѣ плоскости, касающіяся поверхности прямого цилиндра, или параллельны между собою, или линія пересѣченія ихъ параллельна оси цилиндра.

2964. Плоскость, проходящая черезъ ось цилиндра и черезъ прямую, параллельную оси и лежащую внѣ цилиндра, дѣлитъ пополамъ уголъ между двумя касательными плоскостями, проходящими черезъ эту внѣшнюю прямую.

2965. Найти геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ данномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ прямыхъ.

2966. Сколько можно провести плоскостей, которыя имѣли бы данныя разстоянія отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ?

2967. Сколько можно провести прямыхъ черезъ данную точку, находящихся въ данномъ разстояніи отъ двухъ скрещивающихся прямыхъ?

2968. Черезъ точку внутри прямого цилиндра провести плоскость, пересѣкающую поверхность цилиндра по двумъ прямымъ такъ, чтобы разстояніе между ними было наименьшее.

2969. Провести плоскость, касательную къ поверхности цилиндра и проходящую черезъ данную образующую его.

2970. Около данной треугольной призмы описать цилиндръ.

2971. Въ данную правильную призму вписать цилиндръ.

2972. Около данной прямой правильной призмы описать цилиндръ.

2973. Въ данный цилиндръ вписать такую треугольную призму, стороны основанія которой составляли бы между собою данной величины углы.

2974. Черезъ прямую, параллельную оси прямого цилиндра и лежащую внѣ его, провести плоскость, касательную къ цилиндру.

2975. Къ двумъ даннымъ прямымъ цилиндрамъ, основанія которыхъ лежатъ на одной плоскости, провести общую касательную плоскость.

2976. Построить цилиндръ, касающійся граней двуграннаго угла и поверхность котораго проходитъ черезъ точку, лежащую внутри этого угла.

2977. На одной изъ двухъ пересѣкающихся плоскостей данъ кругъ; построить и на другой плоскости такой кругъ, который съ первымъ лежалъ бы на одной и той же цилиндрической поверхности.

II. Конусъ.

2978. Геометрическое мѣсто прямыхъ или плоскостей, пересѣкающихъ данную прямую въ данной точкѣ подъ даннымъ угломъ, есть поверхность конуса, ось котораго есть данная прямая.

2979. Геометрическое мѣсто прямыхъ или плоскостей, проходящихъ черезъ данную точку и наклоненныхъ къ данной плоскости подъ даннымъ угломъ, есть поверхность конуса, вершина котораго находится въ данной точкѣ и ось котораго проходитъ черезъ данную точку перпендикулярно къ данной плоскости.

2980. Если въ кругѣ основанія прямого конуса проведемъ рядъ равныхъ между собою хордъ и проведемъ плоскости, проходящія черезъ вершину конуса и эти хорды, то полученныя въ сѣченіи фигуры будутъ между собою равны.

2981. Можно вписать конусъ въ пирамиду, если въ основаніе пирамиды можно вписать кругъ, при чемъ боковыя грани пирамиды будутъ касаться поверхности конуса.

2982. Около пирамиды можно описать конусъ, если около многоугольника, лежащаго въ основаніи пирамиды, можно описать кругъ, при чемъ ребра пирамиды будутъ образующими конуса.

2983. Два конуса совмѣстимы, если имѣютъ равныя основанія, равныя оси, и если углы наклоненія осей къ плоскости основанія равны между собою.

2984. Два конуса, имѣющіе разныя вершины и оси которыхъ лежатъ на одной прямой, пересѣкаются по кругу перпендикулярному къ оси, или образующія ихъ параллельны.

2985. Цилиндръ и конусъ, поверхности которыхъ пересѣкаются и оси которыхъ совпадаютъ, пересѣкаются по кругу, перпендикулярному къ общей оси.

2986. Построить прямой конусъ, въ которомъ дано положеніе оси и двѣ точки, одна на поверхности его, а другая на окружности круга основанія.

2987. Построить прямой конусъ, въ которомъ дано положеніе вершины, точка на окружности основанія и двѣ точки на поверхности конуса, при чемъ никакія двѣ изъ трехъ данныхъ точекъ не должны лежать на одной прямой съ вершиной конуса.

2988. Построить прямой конусъ, въ которомъ даны двѣ точки на окружности круга основанія и прямая, съ которой совпадаетъ образующая.

2989. Даны радіусъ и высота прямого конуса; построить на плоскости грани вписанной въ этотъ конусъ правильной десятиугольной пирамиды.

2990. Построить пересѣченіе двухъ прямыхъ конусовъ, имѣющихъ общую вершину, если даны оси и уголъ наклоненія образующей къ оси.

2991. Черезъ точку, данную на поверхности конуса, провести плоскость, касательную къ конусу.

2992. Черезъ точку провести плоскости, пересѣкающія данный конусъ подъ даннымъ угломъ съ осью конуса.

2993. Найти геометрическое мѣсто перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ данной точки на плоскости, касательныя къ конусу.

2994. Провести общую касательную къ двумъ конусамъ, имѣющимъ общую вершину.

III. Шаръ.

2995. Геометрическое мѣсто точекъ, разстояніе которыхъ отъ одной точки равно данной длинѣ, есть поверхность шара.

2996. Геометрическое мѣсто срединъ параллельныхъ прямыхъ, соединяющихъ точки, лежащія на поверхности шара, есть плоскость большого круга.

2997. Построить пересѣченіе данной плоскости съ поверхностію шара, котораго центръ и радіусъ даны.

Указаніе. Изъ центра опускаемъ перпендикуляръ на плоскость и строимъ прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго равна радіусу шара и катетъ—разстоянію центра шара отъ плоскости. Другой катетъ этого треугольника есть радіусъ искомаго круга сѣченія.

2998. Построить точки пересѣченія прямой съ поверхностію шара.

Указаніе. Черезъ данную прямую проводимъ плоскость и строимъ кругъ пересѣченія этой плоскости съ шаромъ; точки пересѣченія этого круга съ прямой — искомыя точки.

2999. Черезъ данную точку провести прямую, касательную къ шару, параллельную данной плоскости.

Указаніе. Черезъ данную точку проводимъ плоскость, параллельную данной плоскости и пересѣкающую поверхность шара, и черезъ данную точку проведемъ касательную къ кругу пересѣченія.

3000. Построить линію пересѣченія поверхностей двухъ данныхъ шаровъ.

Указаніе. Проводимъ плоскость черезъ центры двухъ шаровъ и строимъ круги пересѣченія этой плоскости съ поверхностію шаровъ, проводимъ плоскость перпендикулярно къ плоскости полученныхъ круговъ черезъ середину ихъ общей хорды и строимъ на ней кругъ, діаметръ котораго равенъ общей хордѣ круговъ.

3001. Построить точку пересѣченія трехъ шаровыхъ поверхностей.

3002. Построить линію пересѣченія шаровой поверхности съ данною окружностію.

3003. Черезъ двѣ данныя точки провести плоскость, касательную къ поверхности даннаго шара.

3004. Произведеніе отрѣзковъ хордъ шара, проходящихъ черезъ одну точку, есть величина постоянная.

3005. Изъ всѣхъ плоскостей, пересѣкающихъ данный шаръ и проходящихъ черезъ одну точку, лежащую внутри шара, дастъ наименьшій кругъ та плоскость, которая перпендикулярна къ радіусу шара, проведенному въ данную точку.

3006. Поверхность цилиндра или конуса, ось котораго проходитъ черезъ центръ шара, пересѣкаетъ поверхность шара по кругу.

3007. Геометрическое мѣсто плоскостей, пересѣкающихъ шаръ по кругу даннаго радіуса, есть шаръ концентрическій съ даннымъ.

3008. Геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, поверхность которыхъ проходитъ черезъ три данныя точки, есть прямая, перпендикулярная къ плоскости данныхъ точекъ и находящаяся отъ нихъ въ равномъ разстояніи.

3009. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровыхъ поверхностей даннаго радіуса, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки.

3010. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, касающихся данной плоскости въ данной точкѣ.

3011. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ даннаго радіуса, касающихся данной плоскости.

3012. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, касающихся 2-хъ плоскостей.

3013. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ даннагѐ радіуса, касающихся даннаго шара.

3014. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, касающихся даннаго шара въ данной точкѣ.

Построить шаръ, имѣющій центромъ данную точку и

3015—проходящій черезъ другую данную точку;

3016—касающійся данной плоскости;

3017—касающійся даннаго шара;

3018—пересѣкающій данную плоскость по кругу даннаго радіуса.

3019. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ даннаго радіуса, пересѣкающихъ данную плоскость по кругу, радіусъ котораго данъ.

3020. Опредѣлить геометрическое мѣсто центровъ шаровъ даннаго радіуса, проходящихъ чрезъ данную точку и касательныхъ къ данной плоскости.

3021. Даннымъ радіусомъ описать шаръ, проходящій черезъ три данныя точки.

Описать шаръ даннаго радіуса, касающійся

3022—данной плоскости въ данной точкѣ ея;

3023—поверхности даннаго шара въ данной точкѣ.

3024. Построить шаръ, касающійся даннаго шара или плоскости въ данной точкѣ и проходящій черезъ другую данную точку.

3025. Построить шаръ, проходящій черезъ три данныя точки и касающійся данной плоскости.

3026. Построить шаръ, касающійся четырехъ данныхъ плоскостей.

Смѣшанныя задачи на круглыя тѣла.

3027. Геометрическое мѣсто плоскостей, разстояніе которыхъ отъ трехъ, не лежащихъ на одной прямой, точекъ находится въ данномъ отношеніи, суть прямыя, лежащія въ плоскости данныхъ точекъ и разстояніе которыхъ отъ трехъ данныхъ точекъ находится въ данномъ отношеніи.

3028. Геометрическое мѣсто реберъ равныхъ двугранныхъ угловъ, проходящихъ черезъ двѣ данныя параллельныя между собою прямыя, есть поверхность цилиндра, образующія котораго—данныя параллельныя прямыя.

3029. Геометрическое мѣсто вершинъ прямыхъ угловъ, стороны которыхъ проходятъ чрезъ двѣ данныя точки, есть поверхность шара, діаметръ котораго — отрѣзокъ прямой, соединяющей данныя точки.

3030. Геометрическое мѣсто точекъ, разстояніе которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ находится въ данномъ отношеніи, есть поверхность шара, имѣющаго діаметромъ отрѣзокъ прямой, соединяющей точки, въ которыхъ отрѣзокъ между двумя данными точками дѣлится внѣшнимъ и внутреннимъ образомъ въ данномъ отношеніи.

3031. Геометрическое мѣсто точекъ, разстояніе которыхъ отъ трехъ данныхъ точекъ равно данному отношенію, есть окружность круга, которая дѣлится плоскостью данныхъ точекъ пополамъ и пересѣкаетъ эту плоскость въ двухъ точкахъ, разстояніе которыхъ отъ трехъ данныхъ точекъ находится въ данномъ отношеніи.

3032. Геометрическое мѣсто концовъ равныхъ касательныхъ къ шару и геометрическое мѣсто вершинъ конусовъ, описанныхъ около шара и образующія которыхъ въ меридіанальномъ сѣченіи образуютъ равные между собою углы, есть шаръ, концентрическій съ даннымъ шаромъ.

3033. Геометрическое мѣсто точекъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что касательныя, проведенныя изъ нихъ къ двумъ шарамъ, имѣютъ равныя длины, есть плоскость (плоскость равныхъ степеней), перпендикулярная къ линіи центровъ шаровъ.

П р и м ѣ ч а н і е. Если шары пересѣкаются, то плоскость пересѣченія ихъ и есть плоскость равныхъ степеней. Плоскости равныхъ степеней трехъ шаровъ пересѣкаются по прямой, перпендикулярной къ плоскости центровъ трехъ шаровъ и называемой линіей равныхъ степеней. Шесть плоскостей равныхъ степеней четырехъ шаровъ пересѣкаются въ одной точкѣ.

3034. Если изъ 2-хъ различныхъ точекъ прямой, какъ изъ вершинъ, провести касающіеся шара конусы, то круги прикосновенія этихъ конусовъ пересѣкутся въ двухъ точкахъ, лежащихъ на поверхности шара и служащихъ точками прикосновенія двухъ плоскостей къ шару, проходящихъ черезъ данную прямую.

3035. Если около шара описанъ конусъ, черезъ вершину его проведена сѣкущая конуса, то часть сѣкущей, лежащая внутри шара, дѣлится точкою пересѣченія сѣкущей съ плоскостью круга прикосновенія и вершиной конуса въ одинаковомъ отношеніи (гармонически).

3036. Если къ шару проведены два касательныхъ конуса, и вершина одного изъ нихъ лежитъ въ плоскости круга соприкосновенія другого, то и вершина 2-го лежитъ въ плоскости круга прикосновенія 1-го конуса.

3037. Найти центръ шара, если дана вся или часть его поверхности.

3038. Начертить поверхность, проходящую черезъ 4 точки, не лежащія на одной плоскости.

3039. Построить поверхность шара, проходящую черезъ данную окружность и черезъ точку, лежащую внѣ плоскости данной окружности.

3040. Черезъ точку, лежащую внутри шара, провести хорду такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась въ данномъ отношеніи и была параллельна данной плоскости.

3041. Два концентрическихъ шара пересѣчь плоскостью, параллельной данной плоскости, такъ, чтобы площадь круга сѣченія внутренняго шара была вдвое меньше площади круга сѣченія внѣшняго шара.

3042. На данной прямой найти точку, разстоянія которой отъ двухъ данныхъ точекъ находились бы въ данномъ отношеніи.

3043. На данной окружности найти точку, изъ которой отрѣзокъ данной прямой былъ бы виденъ подъ прямымъ угломъ.

3044. Найти точку, изъ которой четыре данные шара были бы видны подъ равными углами.

3045. На данной плоскости или на поверхности даннаго шара найти точку, изъ которой три данные шара были бы видны подъ однимъ угломъ.

3046. Найти точку, изъ которой три шара были бы видны подъ данными углами.

3047. Построить шаръ, который изъ четырехъ данныхъ точекъ былъ бы виденъ подъ данными углами.

3048. На данной прямой найти точку, разстоянія которой отъ другой данной прямой и отъ точки, лежащей на этой послѣдней, находились бы въ данномъ отношеніи.

3049. На данной окружности найти точку, разстоянія которой отъ другой данной прямой и отъ точки, лежащей на этой послѣдней, находились бы въ данномъ отношеніи.

3050. Построить прямую данной длины между двумя плоскостями такъ, чтобы она образовала съ плоскостями углы данной величины и пересѣкала бы данную прямую.

Черезъ данную точку провести прямую, касающуюся

3051—двухъ данныхъ конусовъ;

3052—двухъ данныхъ цилиндровъ;

3053—даннаго цилиндра и даннаго конуса;

3054—даннаго шара и даннаго цилиндра или конуса.

Провести прямую, параллельно данной прямой, которая находилась бы отъ данной точки въ данномъ разстояніи и

3055—пересѣкала бы шаръ по хордѣ данной длины;

3056—была бы отъ данной прямой въ данномъ разстояніи.

3057. Черезъ данную прямую провести плоскость, которая касалась бы данной окружности.

Данъ трегранный уголъ; построить шаръ даннаго радіуса, который касался бы

3058—граней треграннаго угла;

3059—реберъ треграннаго угла.

3060. Въ данный конусъ вписать шаръ, касающійся данной прямой, пересѣкающей поверхность конуса.

Данъ трегранный уголъ, вписать въ него шаръ такъ, чтобы онъ касался прямой, пересѣкающей грани треграннаго угла, и касался

3061—граней треграннаго угла;

3062—реберъ треграннаго угла.

3063. Построить шаръ, поверхность котораго проходитъ черезъ три данныя точки и (который) касается данной плоскости или даннаго шара.

Построить шаръ, поверхность котораго проходитъ черезъ двѣ данныя точки и который касается

3064—двухъ данныхъ плоскостей;

3065—двухъ данныхъ шаровъ;

3066—даннаго шара и данной плоскости.

3066a. Провести плоскость, касательную къ двумъ даннымъ шарамъ, параллельно данной прямой.

3067. Къ тремъ даннымъ шарамъ провести общую касательную плоскость.

3068. Къ даннымъ конусу и шару провести общую касательную плоскость.

3069. На данной плоскости черезъ данную точку или параллельно данной прямой провести прямую, представляющую слѣдъ двухъ плоскостей, равно наклоненныхъ къ данной плоскости касательныхъ къ двумъ шарамъ, лежащимъ по одну сторону данной плоскости.

3070. Построить радіусъ описаннаго около тетраедра шара, если даны грани тетраедра.

3071. Построить радіусы вписанныхъ въ тетраедръ шаровъ, если даны грани его.

3072. Около тетраедра описанъ шаръ, и въ вершинахъ его проведены плоскости, касательныя шару; построить линіи пересѣченія этихъ плоскостей съ плоскостями граней тетраедра.

3073. Построить шары, которые касаются трехъ боковыхъ реберъ тетраедра и основанія его.

3074. Даны грани n-гранной правильной пирамиды. Построить высоту, уголъ наклоненія боковыхъ граней къ плоскости основанія, радіусъ описаннаго шара и радіусы шаровъ, касающихся граней и реберъ пирамиды.

3075. Даны радіусы шаровъ описаннаго и вписаннаго (или касающагося реберъ) въ n-гранную правильную пирамиду. Построить грани пирамиды.

3076. Извѣстны: 1) радіусъ описаннаго около n-гранной правильной пирамиды шара и 2) радіусъ шара, касающагося реберъ пирамиды, и уголъ двухъ реберъ; построить грани пирамиды.

3077. Извѣстны высота правильной пирамиды и радіусъ шара, вписаннаго или описаннаго около пирамиды, опредѣлить грани пирамиды.

3078. Извѣстны радіусъ вписаннаго въ правильную n-гранную пирамиду шара и радіусъ описаннаго около нея шара (или радіусъ шара, касающагося реберъ пирамиды) и уголъ двухъ боковыхъ реберъ; опредѣлить грани пирамиды.

Построить грани n-гранной правильной пирамиды, если извѣстны радіусы описаннаго и вписаннаго шаровъ и

3079—уголъ двухъ боковыхъ граней;

3080—уголъ наклоненія боковой грани къ плоскости основанія;

3081—уголъ бокового ребра съ плоскостью основанія.

3082. Построить грани правильной n-гранной пирамиды, если извѣстны уголъ двухъ образующихъ вписаннаго или описаннаго конуса, лежащій въ плоскости меридіанальнаго сѣченія его (проходящей черезъ ось), и полная поверхность пирамиды.

3083. Даны грани n-гранной правильной пирамиды. Найти радіусъ шара, касающагося основанія и боковыхъ реберъ пирамиды. Опредѣлить радіусы круговъ сѣченія шара плоскостями боковыхъ граней пирамиды.

3084. Въ правильную четырегранную пирамиду, основаніе которой и высота даны, вписанъ шаръ; къ шару проведена касательная плоскость, параллельно основанію пирамиды. Построить грани получившейся усѣченной пирамиды.

3085. Около правильной четыреугольной пирамиды, сторона основанія которой и высота даны, описанъ шаръ; къ послѣднему проведены касательныя плоскости, параллельныя гранямъ тетраедра и не проходящія черезъ вершины его; опредѣлить боковыя грани усѣченныхъ пирамидъ, лежащихъ между параллельными плоскостями, боковыя ребра которыхъ суть продолженія реберъ данной пирамиды.

3086. Даны всѣ грани правильной четырегранной пирамиды; построить высоту, радіусъ описаннаго шара, и уголъ наклоненія граней ея реберъ къ плоскости основанія.

3087. Опредѣлить радіусы шаровъ описаннаго или вписаннаго или касающагося реберъ правильнаго многогранника.

3088. Данъ радіусъ шара вписаннаго или радіусъ описаннаго или касающагося реберъ правильнаго многогранника. Опредѣлить грани его.

ГЛАВА V.

Поверхности и объемы многогранниковъ и тѣлъ вращенія. Правильные многогранники.

3089. Сумма квадратовъ четырехъ діагоналей прямоугольнаго параллелепипеда равна суммѣ квадратовъ 12-ти реберъ его.

3090. Сумма квадратовъ площадей шести діагональныхъ плоскостей прямоугольнаго параллелепипеда = удвоенной суммѣ квадратовъ шести граней его.

3091. Всякій отрѣзокъ прямой, проходящій черезъ центръ (точку пересѣченія діагоналей) параллелепипеда или черезъ средину оси правильной призмы или цилиндра, ограниченной поверхностію тѣла, дѣлится въ этой точкѣ пополамъ.

3092. Плоскость, проходящая черезъ средину оси параллелепипеда или правильной съ четнымъ числомъ сторонъ призмы, дѣлитъ параллелепипедъ на двѣ симметричныя и призму на двѣ равныя части.

3093. Опредѣлить, какой изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ при данной высотѣ и данной суммѣ его реберъ имѣетъ наибольшій объемъ.

Отв. Тотъ, въ основаніи котораго лежитъ квадратъ.

3094. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ одинаковую сумму реберъ, наибольшій объемъ имѣетъ кубъ.

3095. Найти такой прямоугольный параллелепипедъ съ квадратнымъ основаніемъ, сумма высоты и ребра основанія котораго имѣла бы данную длину и который имѣлъ бы наибольшій объемъ.

3096. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ съ квадратнымъ основаніемъ, имѣющихъ данный объемъ, наименьшую сумму высоты и ребра основанія имѣетъ тотъ, въ которомъ высота равна половинѣ основанія.

3097. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ одинаковую высоту и одинаковую сумму реберъ, какой имѣетъ наименьшую діагональ?

Отв. Тотъ, въ основаніи котораго лежитъ квадратъ.

3098. Найти, какой изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ одинаковую сумму реберъ, имѣетъ наименьшую діагональ [1]).

Отв. Кубъ.

3099. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ одинаковую діагональ, какой имѣетъ наибольшую сумму реберъ?

Отв. Кубъ.

3100. Между всѣми прямоугольными параллелепипедами, имѣющими одинаковую высоту и равновеликія основанія, какой имѣетъ наименьшую діагональ?

Отв. Тотъ, у котораго въ основаніи лежитъ квадратъ.

3101. Между всѣми прямоугольными параллелепипедами съ одинаковыми объемами кубъ имѣетъ наименьшую діагональ, и между всѣми прямоугольными параллелепипедами, имѣющими одинаковыя діагонали, кубъ имѣетъ наибольшій объемъ.

3102. Между всѣми прямоугольными параллелепипедами съ одинаковою поверхностію кубъ имѣетъ наименьшую діагональ, и между всѣми прямоугольными параллелепипедами съ одинаковыми діагоналями кубъ имѣетъ наибольшую поверхность.

3103. Между всѣми прямоугольными параллелепипедами съ квадратнымъ основаніемъ и съ одинаковой діагональю боковой стороны узнать такой, который имѣлъ бы наибольшій объемъ.

Отв. Тотъ, въ которомъ высота равна половинѣ діагонали основанія.

3104. Какой изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ одинаковый объемъ и одинаковую высоту, имѣетъ наименьшую поверхность?

Отв. Тотъ, въ основаніи котораго лежитъ квадратъ.

3105. Изъ всѣхъ параллелепипедовъ съ равнымъ объемомъ кубъ имѣетъ наименьшую поверхность, и изъ всѣхъ параллелепипедовъ съ одинаковой поверхностью кубъ имѣетъ наибольшій объемъ.

---

[1]) Отсюда слѣдуетъ, что если вообще

1) $x+y+z=s$, то min. $(x^2+y^2+z^2)$ будетъ при $x=y=z={}^1/_3 s$;

2) если $x^2+y^2+z^2=d^2$, то max. $(x+y+z)$ будетъ при $x=y=z$.

3106. Построить такой прямоугольный параллелепипедъ, у котораго, при данномъ объемѣ, сумма боковой поверхности и одного изъ основаній была бы наименьшая.

Отв. Основаніе искомаго параллелепипеда — квадратъ, и высота равна половинѣ стороны этого квадрата.

3107. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ квадратное основаніе, и сумма площадей основанія и одной боковой грани которыхъ есть данная величина, найти такой, объемъ котораго наибольшій.

Отв. Искомый параллелепипедъ долженъ имѣть высоту вдвое большую, чѣмъ сторона основанія.

3108. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ съ квадратнымъ основаніемъ и имѣющихъ одинаковый объемъ, тотъ, высота котораго равна двойной сторонѣ основанія, имѣетъ наименьшую сумму площадей основанія и одной изъ граней.

3109. Изъ всѣхъ параллелепипедовъ съ квадратнымъ основаніемъ, сумма площадей основаній и перпендикулярной къ основанію діагональной плоскости которыхъ есть данная величина, найти такой, который имѣлъ бы наибольшій объемъ.

Отв. Высота искомаго параллелепипеда должна равняться діагонали основанія, или діагональная плоскость, перпендикулярная къ основанію, должна быть квадратомъ.

3110. Прямоугольный параллелепипедъ съ квадратнымъ основаніемъ, сумма площадей обоихъ основаній и одной изъ діагональныхъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ основаніямъ, котораго есть данная величина, имѣетъ тогда наибольшій объемъ, когда высота его равна двойной діагонали основанія.

3111. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ съ квадратнымъ основаніемъ и даннымъ объемомъ, сумма обоихъ основаній и діагональной плоскости, перпендикулярной къ нимъ, будетъ наименьшая тогда, когда высота параллелепипеда равна двойной діагонали основанія его.

3112. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ съ квадратнымъ основаніемъ, въ которыхъ сумма площадей основанія и обѣихъ діагональныхъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ основаніямъ, есть данная величина, наибольшій объемъ имѣетъ тотъ параллелепипедъ, въ которомъ высота равна половинѣ діагонали основанія.

3113. Построить параллелепипедъ, въ которомъ: 1) трегранный уголъ имѣлъ бы данную величину; 2) сумма реберъ равнялась бы данной длинѣ и который имѣлъ бы наибольшій объемъ.

Отв. Ребра искомаго параллелепипеда должны быть равны.

3114. Изъ всѣхъ призмъ, имѣющихъ одинаковое основаніе и одинаковый объемъ, прямая имѣетъ наименьшую поверхность.

3115. Изъ всѣхъ n-гранныхъ призмъ съ равновеликими основаніями и одинаковымъ объемомъ наименьшую поверхность имѣетъ та, въ которой лежитъ правильный n-угольникъ.

3116. Изъ всѣхъ n-гранныхъ призмъ съ равными поверхностями и равными высотами та имѣетъ наибольшій объемъ, въ основаніи которой лежитъ правильный n-угольникъ.

3117. Построить такой параллелепипедъ, въ которомъ даны площади основаній параллелепипеда, площади боковыхъ граней и объемъ котораго долженъ быть наибольшій.

3118. Въ основаніи параллелепипеда лежитъ прямоугольникъ, площадь котораго и площади боковыхъ граней — даны; опредѣлить условіе, при которомъ параллелепипедъ имѣетъ наибольшій объемъ.

3119. Между всѣми параллелепипедами съ равными объемами, имѣющими по равному данному трегранному углу и по одному равному ребру, опредѣлить такой, который имѣетъ наименьшую поверхность.

Отв. Боковыя стороны, которымъ данное ребро обще, должны быть равны между собою.

3120. Между всѣми параллелепипедами одного объема и имѣющими одинаковый трегранный уголъ наименьшую поверхность имѣетъ тотъ, всѣ грани котораго равны.

3121. Между всѣми параллелепипедами, имѣющими одинаковый трегранный уголъ и одинаковую поверхность, найти такой, который имѣлъ бы наибольшій объемъ.

Отв. Три высоты искомаго параллелепипеда должны быть равны между собою.

3122. Между всѣми треугольными прямыми призмами, имѣющими данную высоту и равновеликія основанія и данный уголъ двухъ боковыхъ граней, та призма имѣетъ наименьшую поверхность, въ основаніи которой лежитъ равнобедренный треугольникъ.

3123. Дана поверхность n-гранной правильной прямой призмы; опредѣлить, при какомъ условіи такая призма будетъ имѣть наибольшій объемъ.

Отв. Высота призмы должна равняться діаметру вписаннаго въ основаніе призмы круга.

3124. Между всѣми правильными n-гранными призмами съ равными объемами какая имѣетъ наименьшую поверхность?

Отв. Та, высота которой равна діаметру круга, вписаннаго въ основаніе призмы.

3125. Если пересѣчь цилиндръ двумя плоскостями, наклонными къ оси, то объемъ части цилиндра, лежащей между этими плоскостями, равенъ объему прямого цилиндрическаго слоя (съ параллельными основаніями), высота котораго равна отрѣзку оси, лежащему между плоскостями сѣченія.

3126. Поверхность цилиндра всегда меньше поверхности призмы, имѣющей съ цилиндромъ одинаковый объемъ и одинаковую высоту.

3127. Между всѣми цилиндрами съ равными поверхностями какой имѣетъ наибольшій объемъ?

Отв. Тотъ, высота котораго равна діаметру круга основанія.

3128. Между всѣми цилиндрами съ равными объемами какой имѣетъ наименьшую поверхность?

Отв. Тотъ, высота котораго равна діаметру круга основанія.

3129. Построить тетраедръ, который имѣлъ бы данный трегранный уголъ при вершинѣ, данную сумму боковыхъ реберъ (или данную сумму боковыхъ граней) и объемъ котораго былъ бы наибольшій.

3130. Если въ треугольной пирамидѣ трегранный уголъ при вершинѣ образованъ тремя прямыми плоскими углами, то 1) въ основаніи пирамиды лежитъ треугольникъ съ острыми углами; 2) проекціи боковыхъ реберъ на основаніе направлены по высотамъ основанія; 3) проекція вершины на основаніе совпадаетъ съ точкой пересѣченія высотъ основанія; 4) квадратъ числа, измѣряющаго величину площади основанія, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ, измѣряющихъ величину боковыхъ граней.

3131. Если правильная четыреугольная пирамида дѣлится на двѣ равновеликія части плоскостью, проходящей черезъ сторону основанія, то плоскость дѣлитъ два пересѣкаемыя ею боковыя ребра въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

3132. Около каждой правильной пирамиды можно описать и можно вписать въ нее шаръ.

3133. Около правильной усѣченной пирамиды можно описать шаръ.

3134. Въ усѣченный конусъ можно вписать шаръ тогда, когда образующая его равна суммѣ радіусовъ обоихъ основаній.

3135. Въ каждой пирамидѣ сумма боковыхъ сторонъ больше, чѣмъ основаніе.

3136. Объемъ многогранника, въ который можно вписать шаръ, измѣряется произведеніемъ его поверхности на $^1/_3$ радіуса вписаннаго шара.

3137. Между всѣми пирамидами, имѣющими одну и ту же высоту и основаніемъ правильный многоугольникъ, найти такую, поверхность которой была бы наименьшая.

Отв. Пирамида должна быть прямая, т.-е. правильная.

3138. Между всѣми треугольными пирамидами, имѣющими одинаковую высоту, въ основаніи одинаковой формы равновеликіе треугольники и по одной боковой равновеликой грани, опредѣлить такую, сумма поверхностей двухъ остальныхъ граней которой была бы наименьшая.

Отв. Высоты искомыхъ граней должны быть равны, или эти боковыя грани должны быть одинаково наклонены къ плоскости основанія, или проекціи высотъ искомыхъ граней должны быть равны, или трехгранный уголъ, образуемый искомыми гранями съ плоскостью основанія, долженъ быть равносторонній.

3139. Изъ всѣхъ треугольныхъ пирамидъ, имѣющихъ равновеликое основаніе и равную высоту, найти такую, боковая поверхность которой была бы наименьшая.

3140. Между всѣми треугольными пирамидами съ равными высотами и равновеликими основаніями прямая съ равностороннимъ треугольникомъ въ основаніи пирамиды имѣетъ наименьшую поверхность.

3141. Между всѣми равновеликими тетраедрами правильный тетраедръ имѣетъ наименьшую поверхность.

3142. Между всѣми тетраедрами съ равными поверхностями правильный имѣетъ наибольшій объемъ.

3143. Если радіусъ вписаннаго въ основаніе правильнаго тетраедра круга—r, высота его—H и апоѳема—a, то тетраедръ имѣетъ наибольшій объемъ при данной поверхности тогда, когда 1) $H = 2r\sqrt{2}$ и 2) $a = 3r$.

3144. Опредѣлить, какая изъ всѣхъ правильныхъ n-гранныхъ пирамидъ, имѣющихъ одну и ту же поверхность, имѣетъ наибольшій объемъ (или при данномъ объемѣ имѣетъ наименьшую поверхность).

Отв. Та, апоѳема которой равна утроенной апоѳемѣ основанія.

3145. Когда прямой конусъ при данной поверхности имѣетъ наибольшій объемъ и при данномъ объемѣ имѣетъ наименьшую поверхность?

Отв. Когда образующая равна утроенному радіусу основанія.

3146. Найти условіе, при которомъ тетраедръ, основаніе котораго есть правильный треугольникъ, а сумма боковыхъ граней котораго есть данная величина, имѣетъ наибольшій объемъ.

Отв. Тетраедръ имѣетъ наибольшій объемъ тогда, когда высота его относится къ радіусу круга, вписаннаго въ основаніе, какъ діагональ квадрата къ сторонѣ его.

3147. Прямоугольный параллелепипедъ съ квадратнымъ основаніемъ при данной величинѣ діагональной плоскости, наклонной къ основанію, имѣетъ наибольшій объемъ тогда, когда другая діагональная плоскость, перпендикулярная къ основаніямъ—квадратъ.

3148. Построить такую n-стороннюю пирамиду, сумма боковыхъ граней которой есть данная величина, и объемъ которой былъ бы наибольшимъ.

Отв. Отношеніе высоты искомой пирамиды къ апоѳемѣ основанія должно равняться отношенію діагонали квадрата къ сторонѣ его.

3149. Найти, при какомъ условіи объемъ тѣла, образованнаго двумя равными четыреугольными пирамидами, совмѣщенными своими основаніями (октаедръ), при данной поверхности имѣетъ наибольшій объемъ.

Отв. Правильный октаедръ.

3150. Найти такой конусъ, который при данной боковой поверхности имѣлъ бы наибольшій объемъ и при данномъ объемѣ наименьшую боковую поверхность.

3151. Въ данный шаръ вписать конусъ наибольшаго объема.

Отв. Отношеніе высоты конуса къ радіусу основанія должно равняться отношенію діагонали квадрата къ сторонѣ его.

3152. Въ данный шаръ вписать конусъ, котораго боковая поверхность была бы наибольшая.

Отв. Отношеніе высоты конуса къ радіусу основанія должно быть $\sqrt{2}$.

3153. Въ данный шаръ вписать цилиндръ съ наибольшимъ объемомъ.

Отв. Высота цилиндра относится къ радіусу основанія, какъ сторона квадрата къ діагонали его.

3154. Между всѣми тѣлами, имѣющими одинаковую поверхность, шаръ имѣетъ наибольшій объемъ, и между всѣми тѣлами съ одинаковымъ объемомъ шаръ имѣетъ наименьшую поверхность.

3155. Если высота призматоида $= H$, верхнее основаніе его—b, нижнее—B; проекціи боковыхъ граней (треугольныхъ), имѣющихъ съ верхнимъ основаніемъ общее ребро, на нижнее основаніе—s и проекціи остальныхъ F, то 1) $b + s + F = B$ (при чемъ проекціи треугольниковъ считаются отрицательными, если лежатъ внѣ основанія призматоида); 2) объемъ призматоида $V = \frac{H}{3}(3b + 2s + F)$ или $= \frac{H}{3}(2b + B + s)$ (теорема Гуссерова).

3156. Если высота призматоида — H, нижнее основаніе его — B; площадь параллельнаго сѣченія, проведеннаго въ разстояніи $\frac{H}{3}$ отъ нижняго основанія,—M, то объемъ призматоида $V = \frac{H}{4}(B + 3M)$.

3157. Объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія кругового сегмента около діаметра, параллельнаго хордѣ сегмента, равенъ объему шара, діаметръ котораго равенъ хордѣ сегмента.

3158. Объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ кругового сегмента около діаметра круга, не пересѣкающаго хорду сегмента, относится къ объему шара, имѣющаго діаметромъ хорду сегмента, какъ высота полученнаго тѣла къ хордѣ сегмента.

3159. Если впишемъ въ усѣченный конусъ шаръ, касающійся обоихъ основаній и поверхности конуса, то пространство, лежащее между поверхностями конуса и шара, равно суммѣ двухъ конусовъ, имѣющихъ основаніями основанія усѣченнаго конуса и общею вершиною центръ круга прикосновенія.

3160. Если провести на основаніи шарового пояса два параллельныхъ между собою діаметра и соединить концы одного изъ нихъ съ однимъ и тѣмъ же концомъ другого прямыми s и s_1, то сферическая поверхность пояса можетъ быть выражена числомъ $\pi . ss_1$.

3161. Если треугольникъ вращается около средней линіи, то объемы тѣлъ, образованныхъ вращеніями двухъ малыхъ треугольниковъ, на которыя дѣлитъ средняя линія данный треугольникъ, равновелики.

3162. Объемы трехъ тѣлъ, образованныхъ вращеніемъ треугольника около среднихъ линій его, какъ около осей, обратно пропорціональны осямъ.

3163. Каждые два противоположные ребра правильнаго тетраедра перпендикулярны другъ другу. Линія, соединяющая середины перпендикулярныхъ между собою реберъ, представляетъ кратчайшее разстояніе между этими ребрами.

3164. Въ каждый правильный многогранникъ можно вписать шаръ, касающійся средины его реберъ. Центръ этого шара совпадаетъ съ центрами вписаннаго и описаннаго въ этотъ многогранникъ шара.

3165. Объемы двухъ многогранниковъ относятся между собою какъ діаметры шаровъ, касающихся реберъ его (теорема Достора).

3166. Вершины куба представляютъ двѣ группы по 4 въ каждой, которыя могутъ быть разсматриваемы какъ вершины тетраедра, при чемъ ребрами тетраедра служатъ діагонали граней куба.

3167. Вершины додекаедра представляютъ 5 группъ по 8 въ каждой, изъ которыхъ каждая группа вершинъ представляетъ вершины куба, при чемъ ребрами куба служатъ діагонали пятиугольниковъ, представляющихъ стороны многогранниковъ.

Додекаедръ можно разсматривать какъ кубъ, стороны котораго покрыты покатой крышей, двѣ крайнія стороны которой—трапеціи, имѣющія общую сторону, а двѣ другія—треугольники (не параллельно усѣченныя призмы). Каждая трапеція одной крыши съ треугольникомъ смежной крыши образуютъ пятиугольникъ, составляющій грань додекаедра.

3168. Между гранями октаедра существуетъ двѣ группы по 4 грани въ каждой, представляющія грани правильнаго тетраедра.

3169. Между гранями правильнаго икосаедра существуетъ 5 группъ по 8 въ каждой, которыя представляютъ грани октаедра.

3170. Средины 6-ти реберъ правильнаго тетраедра образуютъ вершины октаедра.

3171. Средины 12 реберъ куба или октаедра образуютъ вершины полуправильнаго многогранника съ равными многогранными углами и поверхность котораго состоитъ изъ 8-ми правильныхъ треугольниковъ и 6 квадратовъ.

3172. Въ данный конусъ вписать кубъ или октаедръ такъ, чтобы одна изъ граней многогранника совпадала съ основаніемъ, а вершины лежали на поверхности конуса.

3173. Въ данный четырехгранникъ вписать кубъ такъ, чтобы одна грань куба (четыре вершины) лежала на грани четырехгранника, двѣ другія вершины на другой грани, а остальныхъ двѣ вершины на остальныхъ граняхъ четырехгранника, по одной на каждой.

3174. Въ трегранномъ углѣ, образуемомъ тремя пересѣкающимися подъ прямымъ угломъ плоскостями и вершина котораго лежитъ въ центрѣ шара (октантъ), вписать кубъ такъ, чтобы одна изъ его граней лежала на одной грани угла, два ребра по одной на каждой изъ двухъ другихъ граней и двѣ вершины на поверхности шара.

3175. Въ данный октантъ шара вписать усѣченный конусъ, въ которомъ даны отношеніе площадей основаній и высота, такъ чтобы одно изъ основаній лежало на поверхности шара, а другое касалось граней угла.

3176. Въ данный шаръ помѣстить 8 равныхъ между собою шаровъ такъ, чтобы ихъ центры могли служить вершинами куба и чтобы каждый шаръ касался даннаго шара и трехъ другихъ вписанныхъ шаровъ.

3177. Въ данный шаръ вписать 4 шара, изъ которыхъ три были бы равны между собою, а радіусъ четвертаго находился бы въ данномъ отношеніи къ радіусу первыхъ трехъ шаровъ и притомъ такъ, чтобы каждый изъ вписанныхъ шаровъ касался поверхности даннаго и поверхности трехъ остальныхъ.

3178. Въ кубъ вписать два шара равныхъ, или радіусы которыхъ находились бы въ данномъ отношеніи, такъ чтобы центры шаровъ лежали на одной изъ діагоналей куба и касались бы другъ друга и каждый касался бы трехъ граней куба, сходящихся въ одной вершинѣ.

3179. Въ данный правильный октаедръ вписать кубъ такъ, чтобы каждая вершина лежала на одномъ изъ реберъ, сходящихся въ двухъ противоположныхъ вершинахъ.

Въ данный правильный октаедръ вписать правильный тетраедръ такъ, чтобы средняя линія тетраедра лежала на діагонали октаедра и чтобы вершины тетраедра лежали:

3180—на четырехъ граняхъ октаедра;

3181—на четырехъ ребрахъ его.

3182. Около даннаго додекаедра описать октаедръ, чтобы 8 граней октаедра проходили черезъ 8 вершинъ додекаедра.

3183. Даны двѣ прямыя OR и OS, пересѣкающіяся въ точкѣ O, и на прямой OR даны двѣ точки A и B. Найти:

1—геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, поверхности которыхъ проходятъ черезъ A и B и касаются прямой OS;

2—геометрическое мѣсто прямыхъ пересѣченія касательныхъ плоскостей одной въ A, а другой въ B къ каждому изъ этихъ шаровъ;

3—геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ плоскостей къ этимъ шарамъ, проходящимъ черезъ данную прямую, лежащую въ плоскости прямыхъ OS и OR;

4—геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ плоскостей къ тѣмъ же шарамъ, проходящимъ черезъ данную точку OR и OS.

Отв. 1. — Перпендикуляръ къ плоскости SOR въ центрѣ круга, проходящаго черезъ A и B прямой OR и касающагося прямой OS.

2. — Плоскость, перпендикулярная къ плоскости SOR и проходящая черезъ центръ Y того же круга и точку пересѣченія касательныхъ въ точкахъ A и B.

3.—Окружность круга, расположенная въ плоскости, перпендикулярной къ данной прямой.

4.—Поверхность шара, имѣющаго центръ въ точкѣ P радіуса $PY^2—R^2$.

3184. Доказать, что объемъ шарового слоя, плоскости основаній котораго расположены по одну сторону центра шара, равновеликъ разности между объемами цилиндра, имѣющаго ту же высоту и основаніемъ площадь большого круга шара, и усѣченнаго конуса, имѣющаго ту же высоту, а радіусами основаній разстоянія центра шара отъ плоскостей основаній пояса.

3185. Даны двѣ скрещивающіяся прямыя RR_1, SS_1 и плоскость M, параллельная имъ и равно отстоящая отъ нихъ; найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, касающихся данныхъ прямыхъ и центры которыхъ лежатъ на плоскости M.

Отв. Равнодѣлящія угловъ, образуемыхъ проекціями данныхъ прямыхъ на плоскость M.

3186. Найти геометрическое мѣсто вершинъ пирамидъ, имѣющихъ четыреугольное основаніе, сѣченіе которыхъ, параллельное плоскости, переходящей черезъ линіи пересѣченія противоположныхъ боковыхъ граней, дастъ прямоугольникъ.

Отв. Поверхность шара, діаметръ котораго равенъ линіи, соединяющей точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ основанія (внѣшней діагонали полнаго четыреугольника).

Примѣчаніе. Сѣченіе четыреугольной пирамиды плоскостью, параллельною плоскости, проходящей черезъ линіи пересѣченія противоположныхъ боковыхъ граней четыреугольника, дастъ параллелограммъ; этотъ параллелограммъ есть прямоугольникъ, если линіи пересѣченія противоположныхъ боковыхъ граней перпендикулярны между собою. Если въ основаніи лежитъ трапеція, то искомое геометрическое мѣсто будетъ плоскость, перпендикулярная къ основаніямъ трапеціи; если — параллелограммъ, то въ сѣченіи не получится прямоугольника и мѣста не будетъ; если—прямоугольникъ, то мѣстомъ служатъ точки, лежащія внѣ плоскости основанія.

ПРИЛОЖЕНІЕ АЛГЕБРЫ КЪ ГЕОМЕТРІИ.

I. Положительные и отрицательные отрѣзки.

§ 1. Прямую, какъ мы видѣли, можно разсматривать какъ слѣдъ перемѣщающейся точки. Такъ какъ движеніе точки возможно въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ, то отрѣзки прямыхъ можно различать другъ отъ друга не только числами, выражающими ихъ длину, но и тѣмъ направленіемъ движенія, которое имѣла точка при образованіи отрѣзка; это направленіе наз. *направленіемъ* отрѣзка.

Если *началомъ* отрѣзка назовемъ ту изъ двухъ точекъ, его ограничивающихъ, откуда началось движеніе точки, а *концомъ* отрѣзка—положеніе двигающейся точки въ концѣ движенія, то величина отрѣзка и его направленіе опредѣляется вполнѣ, если будутъ опредѣлены положеніе начала и конца отрѣзка и разстояніе между ними. Для этой цѣли отрѣзки обозначаются двумя буквами, поставленными при его концахъ въ опредѣленномъ порядкѣ: на первомъ мѣстѣ ставятъ букву, стоящую при началѣ отрѣзка, а на второмъ—при его концѣ. Такъ, обозначеніе AB указываетъ, что начало отрѣзка A и конецъ отрѣзка—B.

§ 2. Два отрѣзка называютъ послѣдовательными, если конецъ перваго совпадаетъ съ началомъ второго. Суммою двухъ послѣдовательныхъ отрѣзковъ наз. отрѣзокъ, начало котораго совпадаетъ съ началомъ 1-го отрѣзка, а конецъ—съ концомъ второго; такъ что $AB + BC = AC$. Если имѣемъ 2 послѣдовательныхъ отрѣзка AB и BA, то ихъ сумма, очевидно, равна нулю: $AB + BA = 0$; ибо сумма этихъ двухъ отрѣзковъ выражаетъ такой отрѣзокъ, начало и конецъ котораго совпадаютъ въ одну точку.

§ 3. Относительно отрѣзковъ, образуемыхъ 3-мя точками на прямой, легко доказать такую теорему Möbius'a. *Если на* *прямой имѣемъ три точки* A, B *и* C, *то каково бы ни было положеніе этихъ точекъ, всегда* $AB + BC + CA = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, три точки могутъ быть расположены въ такомъ порядкѣ:

A, B, C;	A, C, B;
B, C, A;	B, A, C;
C, A, B;	C, B, A;

Въ первомъ случаѣ: $AB + BC = AC$, или, прибавляя къ обѣимъ частямъ по CA и замѣтивъ, что $AC + CA = 0$, найдемъ: $AB + BC + CA = 0$; въ этомъ случаѣ точка C лежитъ направо отъ отрѣзка AB и внѣ его.

Во второмъ случаѣ: $BC + CA = BA$, или, прибавляя по AB къ обѣимъ частямъ, получимъ: $AB + BC + CA = 0$; въ этомъ случаѣ третья точка лежитъ между точками A и B.

Наконецъ, если точка C лежитъ влѣво отъ AB, то $CA + AB = CB$, или $CA + AB + BC = 0$. Остальные три случая расположенія буквъ не представляютъ особыхъ случаевъ расположенія отрѣзковъ и разнятся только наименованіемъ точекъ отъ разсмотрѣнныхъ случаевъ.

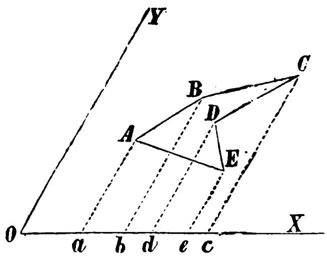
§ 4. Во многихъ вопросахъ отрѣзки прямой удобнѣе приводитъ къ одному началу, т.-е. замѣнить отрѣзки другими, равными имъ и имѣющими общее начало. Такая замѣна легко дѣлается помощью теоремы Möbius'а; такъ, если на прямой взятъ отрѣзокъ AB и гдѣ-нибудь на той же прямой взята точка O, которую желаютъ принять за начало отрѣзка, то $AB + BO + OA = 0$, или $AB + BO = AO$, или $AB = AO - BO = OB - OA$, т.-е. искомый отрѣзокъ замѣняется разностью двухъ другихъ. Разстояніе какой-нибудь точки отъ общаго начала наз. *абсциссой* точки, а потому мы можемъ сказать, *что всякій отрѣзокъ AB равенъ абсциссѣ конца отрѣзка безъ абсциссы его начала.*

§ 5. Какъ одно изъ приложеній теоремы Möbius'а докажемъ теорему о проекціяхъ.

Если имѣемъ двѣ пересѣкающіяся прямыя XO и YO и A—какая-нибудь точка въ плоскости тѣхъ же прямыхъ, то вообще проекціей точки A на прямую OX, называется пересѣченіе *a* прямой A*a*, параллельной OY, съ прямой OX. Прямая A*a* наз. *проектирующая* прямая, прямая OX—*ось* *проекцій.* Проекціей отрѣзка AB называется отрѣзокъ оси, лежащій между проекціями начала и конца отрѣзка AB.

Если имѣемъ замкнутую фигуру ABCDE, *то сумма проекцій ея на ось всегда равна* 0, т.-е. $ab + bc + cd + de + ea = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, отрѣзки, опредѣляемые тремя точками a, b и c, связаны такимъ соотношеніемъ: $ac = ab + bc$; прибавляя къ обѣимъ частямъ равенства по cd, получимъ: $ac + cd = ab + bc + cd$, или $ad = ab + bc + cd$; прибавляя къ обѣимъ частямъ равенства по de, найдемъ: $ad + de = ab + bc + cd + de$ или $ae = ab + bc + cd + de$, или, наконецъ, прибавляя по ea, найдемъ: $ab + bc + cd + de + ea = 0$.



Черт. 151.

§ 6. При выводѣ числовой зависимости между элементами фигуры величина отрѣзковъ обозначалась буквами; тѣми же буквами, сопровождаемыми знакомъ + или —, можно указать и направленіе тѣхъ же отрѣзковъ, называя одно изъ этихъ направленій *положительнымъ*, а прямо противоположное ему *отрицательнымъ*. Такъ, если представимъ прямую предъ собою и если отрѣзки, идущіе слѣва направо, условимся считать за положительные, то отрѣзки, идущіе справа налѣво, надо принять за отрицательные. Если всѣ отрѣзки прямой сведены къ одному началу, то когда отрѣзки, откладываемые направо отъ общаго начала, условимся считать за положительные, тогда отрѣзки, лежащіе налѣво отъ общаго начала, надо считать за отрицательные.

При такомъ условіи всѣ отрѣзки по величинѣ и по направленію могутъ быть выражены соотвѣтствующими положительными или отрицательными числами, и, наоборотъ, всякое положительное или отрицательное число можетъ быть выражено отрѣзкомъ соотвѣтственной длины и направленія.

II. Геометрическое значеніе простѣйшихъ алгебраическихъ формулъ.

§ 6. Вслѣдствіе полнаго соотвѣтствія между положительными и отрицательными количествами, разсматриваемыми въ алгебрѣ, и отрѣзками разно направленными, понятія объ алгебраической суммѣ и геометрической должны быть тожественны. Подъ словомъ сумма отрѣзковъ разумѣютъ результатъ вычитанія изъ суммы положительныхъ отрѣзковъ суммы отрицательныхъ, и геометрическая сумма отрѣзковъ можетъ быть равной положительному отрѣзку, отрицательному или нулю, смотря по тому, будетъ ли сумма положительныхъ отрѣзковъ больше, меньше или равна суммѣ отрицательныхъ отрѣзковъ. Точно также и разность отрѣзковъ можетъ быть выражена или разностью длины отрѣзковъ, или ихъ суммой.

1. Для того, чтобы геометрически выполнить дѣйствія, указанныя формулой $a-b+c-d+e-\ldots$, гдѣ подъ a, b, c, d, $e\ldots$ разумѣютъ только длины отрѣзковъ, поступаемъ такъ: на прямой, лежащей предъ нами, отъ точки, принятой за начало отрѣзковъ, въ одну сторону, напр., направо, откладываемъ одинъ за другимъ послѣдовательно всѣ положительные отрѣзки такъ, чтобъ конецъ предшествующаго служилъ началомъ слѣдующаго; тогда получаемъ отрѣзокъ, началомъ котораго служитъ общее начало, а концомъ— конецъ послѣдняго изъ отложенныхъ отрѣзковъ; затѣмъ отъ конца послѣдняго отрѣзка въ сторону противоположную, налѣво, откладываемъ послѣдовательно всѣ отрицательные отрѣзки — результатъ дѣйствія выражается разстояніемъ конца послѣдняго изъ отложенныхъ отрѣзковъ, отъ общаго начала, при чемъ, если конецъ отложеннаго отрѣзка лежитъ направо отъ общаго начала, то сумма отрѣзковъ положительна; если налѣво, то сумма отрицательная, и если совпадаетъ съ началомъ, то сумма равна нулю.

2. Алгебраическому выраженію $x=an$ соотвѣтствуетъ геометрическое умноженіе отрѣзка a на отвлеченное число n, цѣлое и дробное, что приводится къ послѣдовательному сложенію равныхъ отрѣзковъ; точно также формула $a:n$ соотвѣт-

ствуетъ геометрическому дѣленію отрѣзка a на n частей, или дѣленію отрѣзка qa на p частей, если $n = \frac{p}{q}$.

3. Выраженіе $x = a\sqrt{n}$, гдѣ n—отвлеченное число, выражаетъ отрѣзокъ средне-пропорціональный между отрѣзками a и na ($x : a = na : x$). Построеніе такого отрѣзка указано выше.

4. Выраженіе $x = \frac{ab}{c}$ означаетъ четвертый пропорціональный отрѣзокъ къ тремъ отрѣзкамъ a, b и c, опредѣляемый изъ пропорціи $x : a = b : c$; или же x выражаетъ сторону прямоугольника, другая сторона котораго есть c и площадь котораго $= ab$.

5. Выраженіе $x = \frac{a^2}{b}$ означаетъ четвертый пропорціональный отрѣзокъ къ двумъ отрѣзкамъ a и b, опредѣляемый изъ пропорціи $x : a = a : b$; или же выражаетъ одну изъ сторонъ прямоугольника, другая сторона котораго равна b, и площадь котораго равна a^2.

6. Выраженіе $x = \sqrt{ab}$ означаетъ отрѣзокъ, средне-пропорціональный отрѣзкамъ a и b, или же выражаетъ сторону квадрата, равновеликаго прямоугольнику со сторонами a и b.

7. Выраженіе $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ есть катетъ прямоугольнаго треугольника, гипотенуза котораго a и другой катетъ b.

8. $x = \sqrt{c^2 + b^2}$ выражаетъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника, катеты котораго суть c и b.

9. $x = a\sqrt{2}$ — діагональ квадрата, сторона котораго a.

10. $x = e\sqrt{\frac{1}{2}}$ — сторону квадрата, діагональ котораго есть e.

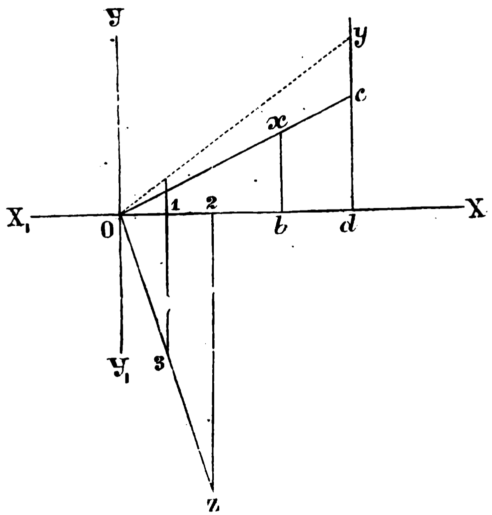
11. $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ — высоту равносторонняго треугольника, сторона котораго есть a.

12. $x = r\sqrt{3}$ — сторону равносторонняго треугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса r.

13. $x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ — сторону правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса r.

III. Построеніе болѣе сложныхъ алгебраическихъ выраженій.

§ 7. 1. Формула умноженія, какъ мы уже видѣли, есть $x = a . n$, гдѣ n цѣлое число; но n возможно замѣнить отношеніемъ отрѣзковъ b и c; такъ что $n = \frac{b}{c}$ и $x = a . \frac{b}{c}$ и умноженіе отрѣзка на отвлеченное число можетъ быть приведено къ отысканію четвертаго пропорціональнаго отрѣзка къ тремъ даннымъ b, c и d, при чемъ самые отрѣзки могутъ имѣть различные знаки, и въ зависимости отъ этихъ знаковъ будетъ находиться и знакъ произведенія. Для полученія такого произведенія удобно слѣдующее построеніе: берутъ двѣ перпендикулярныя между собою прямыя XX_1 и YY_1, пересѣкающіяся подъ прямымъ угломъ въ точкѣ O; эту послѣднюю точку примемъ за начало отрѣзковъ и условимся за положительные отрѣзки на горизонтальной прямой считать отрѣзки, расположенные направо отъ O, и за отрѣзки отрицательные — отрѣзки, расположенные налѣво отъ O по оси XX_1. Точно также вертикальные отрѣзки, лежащіе надъ осью XX_1, считать за положительные и вертикальные отрѣзки, лежащіе подъ осью XX_1, считать за отрицательные.

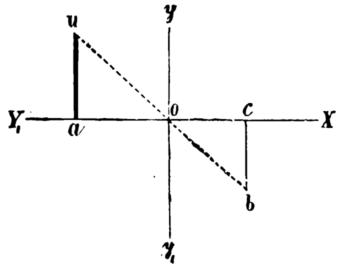


Черт. 152.

a) Построимъ произведеніе $y = b . \frac{c}{d}$, предполагая, что всѣ отрѣзки положительные; отъ O вправо откладываемъ по XX_1 отрѣзокъ $Od = d$, возставимъ къ нему въ точкѣ d перпендикуляръ $dc=c$ (черт. 152) и соединимъ c съ O; затѣмъ отъ O по оси же XX_1 откладываемъ отрѣзокъ Ob, равный b, изъ b возставляемъ перпендикуляръ bx и продолжаемъ его до встрѣчи съ Oc, тогда bx—искомая прямая ($bx : b = c : d$), которая направлена вверхъ отъ оси и должна считаться за положительный отрѣзокъ.

b) Построимъ $z=a_1\left(\frac{-b_1}{c_1}\right)$. Откладываемъ $o1=c_1$ и на перпендикулярѣ къ o1 въ точкѣ 1 откладываемъ отрѣзокъ 13, равный—b_1; проводимъ o3, откладываемъ отрѣзокъ o2, равный a_1, перпендикуляръ 2z въ точкѣ 2—до его пересѣченія съ прямой o3 и есть искомый. Произведеніе имѣетъ отрицательное направленіе (черт. 152).

c) Построить произведеніе $u=(-a)\left(\frac{-b}{c}\right)$; откладываемъ отрѣзокъ $Oc=c$ (черт. 153) направо отъ O; изъ c возставляемъ перпендикуляръ cb внизъ, равный b, проводимъ прямую Ob, отъ O влѣво на XX_1 откладываемъ отрѣзокъ Oa, равный—a, изъ точки a возставляемъ перпендикуляръ къ Oa, который и встрѣтитъ прямую Ob вверхъ отъ горизонтальной оси XX_1, искомый отрѣзокъ au — имѣетъ положительное направленіе. Этотъ пріемъ можетъ служить геометрическимъ толкованіемъ правила знаковъ при умноженіи алгебраическихъ количествъ.

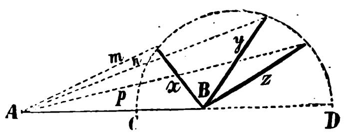


Черт. 153.

2. Если требуется построить рядъ произведеній такихъ, какъ $m\frac{b}{c}, n.\frac{b}{c}, o.\frac{b}{c}\ldots$, которыя имѣютъ одинаковыхъ множителей, то построеніе можетъ быть выполнено такъ: на прямой откладываемъ послѣдовательно отрѣзки m, n, o... p; изъ конца какого-нибудь (см. черт. 154) отрѣзка проводимъ прямую AD и откладываемъ на ней отрѣзки $AO=b$ и $OD=c$, изъ точки A проводимъ AB параллельно CD; тогда отрѣзки x, y, z, u... прямой AB, заключенные между лучами, про-

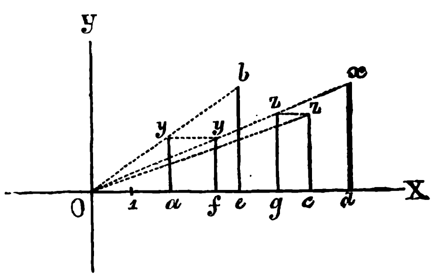
ходящими чрезъ концы отложенныхъ отрѣзковъ m, n, o, d... и точку O, суть искомые отрѣзки, ибо $x:m=b:c$; $y:n=b:c$ и т. д.

То же построеніе можетъ быть выполнено такъ: беремъ произвольную прямую AB (черт. 154) и дѣлимъ ее въ отношеніи $b:c$ внутреннимъ дѣленіемъ въ точкѣ C, и внѣшнимъ въ точкѣ D, въ томъ же отношеніи; чрезъ точки C и D проводимъ кругъ Аполлонія и, помѣщая данные отрѣзки между A и окружностью, соединяемъ концы ихъ съ точкою B, тогда искомыми отрѣзками будутъ отрѣзки, опредѣляемые точкою B и концами отложенныхъ отрѣзковъ m, n, p...

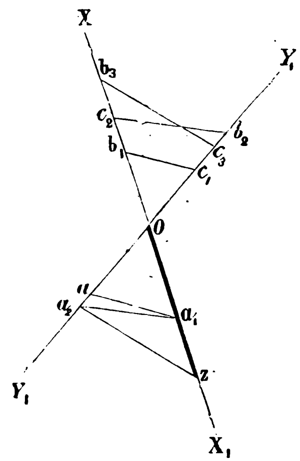


Черт. 154.

3. Построить $x=\frac{abcd}{efg}\cdot$ Пусть $y=\frac{ab}{e}$ или $\frac{y}{a}=\frac{b}{e}$; $z=\frac{yc}{f}$ или $\frac{z}{c}=\frac{y}{f}$; тогда $x=\frac{zd}{g}$ или $\frac{x}{d}=\frac{z}{g}\cdot$ Строимъ y (черт. 155). Откладываемъ $Oe=e$; $eb=b$; $Oa=a$ и $y=ay$. Строимъ z:



Черт. 155.



Черт. 156.

$Of=f$; $yf=y$; $Oc=c$ и $cz=z$. Наконецъ строимъ $x:Og=g$; $gz=z$; $Od=d$ и $xd=x$.

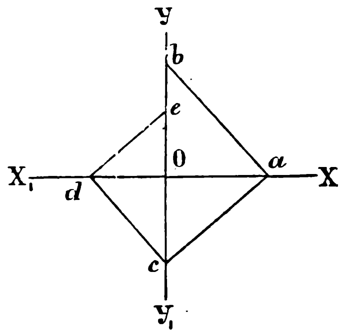
Укажемъ другой пріемъ построеній такихъ же выраженій (черт. 156); положимъ, что требуется построить $z=$

$=a\frac{b_1}{c_1}\cdot\frac{b_2}{c_2}\cdot\frac{b_3}{c_3}\ldots$ Беремъ двѣ пересѣкающіяся прямыя XX_1 и YY_1, на XO отъ точки O откладываемъ отрѣзки $Ob_1=b_1$, $Ob_3=b_3$ и $Oc_2=c_2$; на YO отрѣзокъ $Ob_2=b_2$ и $Oc_1=c_1$ и $Oc_3=c_3$; на OY_1 отрѣзокъ Oa, равный a. Затѣмъ проводимъ b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3 и изъ a проводимъ $aa_1 \parallel b_1c_1$, изъ a_1 отрѣзокъ $a_1a_2 \parallel b_2c_2$; изъ a_2—отрѣзокъ $a_2z \parallel b_3c_3$; тогда Oz_3—искомый отрѣзокъ z, ибо $Oa_1:Oa=Ob_1:Oc_1$; откуда $Oa_1=\frac{ab_1}{c_1}$; $\triangle Ob_2c_2 \backsim \triangle Oa_1a_2$ и $Oa_2:Oa_1=Ob_2:Oc_2$; откуда $Oa_2=Oa_1\,\frac{b_2}{c_2}=$ $=\frac{ab_1\cdot b_2}{c_1\cdot c_2}$; $\triangle Oa_2z \backsim \triangle Ob_3c_3$; $Oz:Oa_2=Ob_3:Oc_3$; $Oz=Oa_2\,\frac{b_3}{c_3}$, или $Oz=z=a.\,\frac{b_1}{c_1}\cdot\frac{b_2}{c_2}\cdot\frac{b_3}{c_3}$.

4. Если требуется построить выраженіе вида $\frac{a^n}{b^{n-1}}$, то прибѣгаютъ къ такимъ же пріемамъ, какіе указаны для предыдущаго случая, при чемъ возможно нѣкоторое сокращеніе въ числѣ построеній. Напримѣръ:

a) $u=\frac{a^8}{b^7}$; тогда дѣлаемъ такое преобразованіе, $\frac{a^8}{b^7}=$ $=\left(\frac{a^2}{b}\right)^4\cdot\frac{1}{b^3}$; если построеніемъ найдемъ, что $\frac{a^2}{b}=c$, то $u=\frac{c^4}{b^3}=$ $=\left(\frac{c^2}{b}\right)^2\cdot\frac{1}{b}$; если $\frac{c^2}{b}=d$, то $u=\frac{d^2}{b}$.

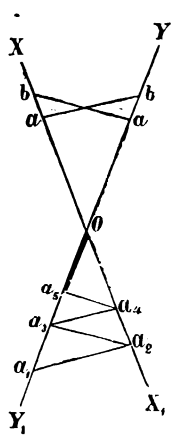
b) Построимъ $t=\frac{a^4}{b^3}$: беремъ двѣ перпендикулярныя прямыя XX_1 и YY_1 (черт. 157) и откладываемъ $Oa=a$ и $Ob=b$; затѣмъ возставляемъ перпендикуляръ ca къ ba; далѣе $cd \perp ac$, $de \perp cd$; тогда $Oe=x$, ибо $Oc=\frac{a^2}{b}$, $Od=\frac{Oc^2}{a}=\frac{a^3}{b^2}$ и $Oe=\frac{Od^2}{Oc}=\frac{a^6b}{b^4a^2}=\frac{a^4}{b^3}$.



Черт. 157.

5. Построить $\frac{a^5}{b^4}$; беремъ двѣ пересѣкающіяся прямыя

XX_1 и YY_1 (черт. 158); отъ точки ихъ пересѣченія откладываемъ на OX и на OY отрѣзки $Oa = a$ и $Ob = b$; соединяемъ a съ b; на OY откладываемъ $Oa_1 = a$, и изъ a_1 проводимъ $a_1a_2 \parallel ab$, изъ a_2 прямую $a_2a_3 \parallel ba$, изъ a_3 прямую $a_3a_4 \parallel ab$, изъ a_4—$a_4a_5 \parallel ba$; тогда Oa_5—искомый отрѣзокъ.

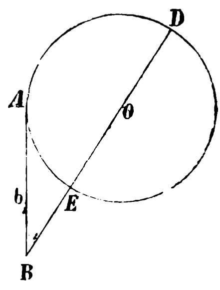


Черт. 158.

6. Укажемъ, наконецъ, способъ построенія корней квадратнаго уравненія.

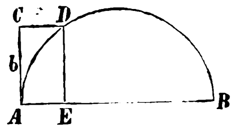
a) $x^2+ax=b^2$; преобразуемъ это равенство: $x(x+a)=b^2$ и $x:b=b:(x+a)$. Беремъ окружность, діаметръ которой равенъ a, проводимъ къ ней касательную $AB=b$ и чрезъ B и центръ окружности сѣкущую BD. Тогда $BE:b=b:BD$. Если направленіе BD примемъ за положительное, то отрѣзокъ BD есть сумма двухъ отрѣзковъ $BE+a$, и мы имѣемъ: $BE:b = b:(a+BE)$; сравнимъ ее съ данной, находимъ, что $x_1=BE$, и это корень положительный. Если примемъ направленіе BD — отрицательнымъ, то отрѣзокъ BE есть сумма двухъ отрѣзковъ $BD+a$, и тогда $(BD+a):b=b:BD$; откуда заключаемъ, что $x_2=BD$ — и это корень отрицательный; такъ какъ длина BD больше длины BE, то въ этомъ случаѣ отрицательный корень больше положительнаго.

b) $x^2-ax=b^2$: $x(x-a)=b^2$ и $x:b=b:x-a$; сдѣлавъ такое же построеніе, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, найдемъ: $BE:b=b:BD$; отрѣзокъ BE можетъ быть представленъ въ видѣ разности, если направленіе BD примемъ за положительное, и тогда $BD-a:b=b:BD$; $x_1=BD$—положительный корень. Если же примемъ направленіе BD за отрицательное, тогда BD можно представить въ видѣ разности $BE-a$, и мы имѣемъ: $BE-a:b=b:BE$; откуда $BE=x_2$ — отрицательный корень; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ положительный корень больше отрицательнаго.



Черт. 159.

c) $ax-x^2=b^2$; $x:b=b:a-x$. На a, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность; въ концѣ діаметра возставляемъ перпендикуляръ $AC = b$; изъ C проводимъ прямую, параллельную AB, которая пересѣчетъ окружность въ точкѣ D; изъ D опускаемъ перпендикуляръ DE; тогда $AE:b = b:EB$, отрѣзки AE и EB въ этомъ случаѣ не покрываютъ одинъ другого, и такъ какъ $AE + EB = AB$ (теор. Môbius'а), то, каково бы ни было направленіе отрѣзковъ, либо $AE = AB - EB$, либо $EB = AB - AE$, т.-е. $AE:b = b:a - AE$ и $AB - EB:b = b:EB$; откуда $x_1 = AE$ и $x_2 = EB$ — оба корня положительные, корни въ этомъ случаѣ возможны, когда $b < \frac{a}{2}$.

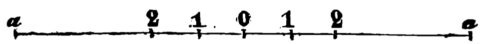


Черт. 160.

d) Уравненіе вида: $x^2 + ax = -b^2$ приводится къ только что разсмотрѣнному случаю слѣдующимъ преобразованіемъ: полагая $x = -y$, получимъ $y^2 - ay = -b^2$ или $ay - y^2 = b^2$; слѣдовательно, корни разсматриваемаго уравненія оба отрицательные.

§ 8. Разсмотрѣнныя нами алгебраическія выраженія суть выраженія перваго измѣренія; они выражаютъ собою длину прямыхъ отрѣзковъ. Произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ каждый выражаетъ длину отрѣзка, суть выраженія второго измѣренія и выражаютъ собою площадь: таковы выраженія ab, $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и др. Построеніе ихъ приводится къ построенію элементовъ, опредѣляющихъ площадь. Выраженіе вида $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2}{b^2}$ и др. суть выраженія 0-го измѣренія, и выражаютъ отвлеченное число.

Примѣчанія. 1. При построеніи многочленныхъ формулъ или одночленовъ, содержащихъ буквы, выражающія длины различныхъ отрѣзковъ, предполагаютъ, что всѣ длины измѣрены одной мѣрой. Чтобы построить линіи, длина которыхъ выражается числами 1, 2,3..... a, беремъ прямую (черт. 161), откладываемъ отъ произвольно выбранной точки ея 0 какой-нибудь отрѣзокъ 01,



Черг. 161.

который и примемъ за мѣру опредѣляемыхъ линій, и откладываемъ отъ точки 0 этотъ отрѣзокъ 2, 3.....a разъ, получимъ отрѣзки 02, 03....0a, длины которыхъ выражаются числами 2, 3....a; длина 01 выразится числомъ 1.

2. Сокращенія числа построеній формулы легко достигнуть соотвѣтствующими преобразованіями, при чемъ иногда можно пользоваться слѣдующими пріемами: если въ формулѣ встрѣчается множитель вида $\frac{a^2}{b^2}$, то, построивъ прямоугольный треугольникъ съ катетами, равными a и b, можно замѣнить отношеніе $\frac{a^2}{b^2}$ чрезъ отношеніе $\frac{p_a}{p_b}$ — проекцій катетовъ на гипотенузу.

IV. Рѣшеніе геометрическихъ задачъ при помощи уравненій.

§ 9. Во многихъ геометрическихъ задачахъ требуется знать величины одного или нѣсколькихъ отрѣзковъ, которые необходимы для опредѣленія какой-либо фигуры; въ этомъ случаѣ бываетъ удобно выразить зависимость между длиною искомыхъ отрѣзковъ и длиною данныхъ въ видѣ уравненій, рѣшеніе которыхъ и даетъ длину искомыхъ отрѣзковъ. Для составленія такого уравненія прежде всего предполагаютъ, что всѣ отрѣзки, какъ данные, такъ и искомые, измѣрены одной единицей, при чемъ та зависимость, которая можетъ существовать между этими отрѣзками, не зависитъ, очевидно, отъ выбора этой мѣры, ибо при неизмѣняемости угловъ фигуры перемѣна мѣры измѣнитъ только масштабъ, въ которомъ начерчена фигура, но не измѣнитъ отношенія между элементами. Алгебраически измѣненіе мѣры данныхъ и искомыхъ отрѣзковъ выразится тѣмъ, что буквы, выражающія ихъ длины, пріобрѣтутъ новаго множителя; въ силу помянутаго свойства фигуры зависимость между отрѣзками должна оставаться неизмѣнною, и потому и уравненіе должно не измѣниться при введеніи такихъ множителей. Такія уравненія наз. *однородными*. Слѣдовательно, уравненія, помощью которыхъ выражается зависимость между геометрическими элементами фигуры, должны быть однородны, и всѣ члены такихъ уравненій должны быть *одного измѣренія*.

Найдя корни уравненія, необходимо провѣрить ихъ, т.-е. узнать, удовлетворяютъ ли они всѣмъ условіямъ вопроса, или, какъ говорятъ, изслѣдовать рѣшеніе, при чемъ получаемые иногда отрицательныя рѣшенія могутъ считаться рѣшеніями, удовлетворяющими вопросу, если опредѣляемые отрѣзки могутъ быть отсчитываемы въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ; въ другихъ случаяхъ эти рѣшенія указываютъ на невозможность вопроса. Если вопросъ приводится къ рѣшенію уравненій второй степени или къ квадратному уравненію, то къ числу вопросовъ изслѣдованія присоединяется обыкновенно новый, состоящій въ опредѣленіи границъ, между которыми могутъ измѣняться искомые отрѣзки. Мнимыя рѣшенія при этомъ указываютъ на невозможность рѣшенія.

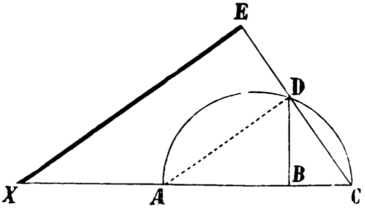
§ 10. Если при выборѣ общей мѣры отрѣзковъ опредѣляемой фигуры одинъ изъ данныхъ отрѣзковъ принятъ за единицу, то формула, выражающая длину опредѣляемаго отрѣзка, можетъ быть неоднородной, такъ какъ тѣ члены ея, которые содержатъ длину этого отрѣзка множителемъ, не будутъ одного измѣренія съ другими членами. Для построенія такихъ формулъ прежде всего слѣдуетъ возстановить однородность формулы, измѣряя всѣ отрѣзки новой мѣрой; алгебраически это измѣреніе выразится тѣмъ, что всѣ буквы, входящія въ формулу, раздѣлятся на одно и то же число, выражающее длину отрѣзка, принятаго за новую единицу мѣры. Такъ, если $x=\sqrt{a-b^3c+2}$, то, дѣля всѣ буквы на k, мы получимъ: $\frac{x}{k}=\sqrt{\frac{a}{k}-\frac{b^3}{k^3}\cdot\frac{c}{k}+2}$, или $x=$ $=\sqrt{ak-\frac{b^3c}{k}+2k^2}$.

Примѣры.

1. Построить квадратъ, равновеликій $\frac{p}{q}$ даннаго квадрата.

Назовемъ сторону даннаго квадрата чрезъ a и искомаго чрезъ x; тогда по условію $x^2=\frac{p}{q}a^2$; откуда $x=\pm\sqrt{\frac{pa}{q}\cdot a}$; знакъ передъ корнемъ годится только первый, такъ какъ ищется только величина стороны, а не ея направленіе.

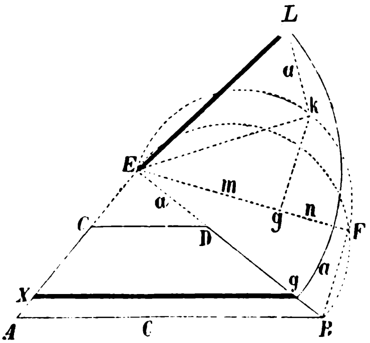
Сторона искомаго отрѣзка есть средняя пропорціональная между $\frac{pa}{q}$ и a. Построеніе, соотвѣтствующее содержанію задачи, можно сдѣлать такъ (черт. 162): откладываемъ послѣдовательно два отрѣзка $p=AB$ и $BC=q$; изъ точки B возставляемъ перпендикуляръ къ AC и на AC описываемъ полуокружность, соединяя точку D пересѣченія полуокружности и перпендикуляра съ C прямою CD, откладываемъ на послѣдней отъ точки C отрѣзокъ $CE=a$, изъ E возставляемъ перпендикуляръ Ex къ CE; тогда Ex есть сторона искомаго квадрата, ибо $\frac{Ex^2}{a^2}=\frac{AD^2}{DC^2}=\frac{p}{q}$ и $Ex^2=\frac{p}{q}a^2$.



Черт. 162.

2. Раздѣлить трапецію прямой, параллельной основанію, на 2 части, площади которыхъ относились бы между собою, какъ m:n.

Положимъ, что данная трапеція—ABCD, большее основаніе ея—$AB=c$. Продолжимъ стороны AC и BD до ихъ взаимнаго пересѣченія въ точкѣ E (черт. 163), сторона $EB=b$, $ED=a$, искомая линія $Eg=x$, тогда $\triangle ECD \backsim \triangle Exg$, а потому $\frac{\triangle Exg}{\triangle ECD}=\frac{x^2}{a^2}$, $\triangle AEB \backsim \triangle Exg$ и $\frac{\triangle AEB}{\triangle Exg}=\frac{b^2}{x^2}$; а потому $\frac{\triangle Exg-\triangle ECD}{\triangle Exg}=\frac{x^2-a^2}{x^2}$, или $\frac{xCDg}{\triangle Exg}=\frac{x^2-a^2}{x^2}$; $\frac{\triangle AEB-\triangle Exg}{\triangle Exg}=\frac{b^2-x^2}{x^2}$, или $\frac{xgBA}{\triangle Exg}=\frac{b^2-x^2}{x^2}$; откуда $\frac{xCDg}{xgBA}=\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}=\frac{m}{n}$,



Черт. 163.

$\frac{b^2-a^2}{x^2-a^2}=\frac{m+n}{m}$; для опредѣленія b^2-a^2, строимъ на EB, какъ на діаметрѣ, полуокружность и, откладывая отъ B хорду

$BF = a$, видимъ, что $EF = \sqrt{b^2 - a^2}$; тогда $\frac{FE^2}{x^2 - a^2} = \frac{m+n}{m}$; дѣлимъ EF въ точкѣ g въ отношеніи $m:n$, найдемъ, что $\frac{FE}{Eg} = \frac{m+n}{m}$; откуда заключаемъ, что $\frac{EF^2}{x^2-a^2} = \frac{EF}{Eg}$, или $EF = \frac{(x^2-a^2)}{Eg}$; слѣд., $\sqrt{x^2-a^2} : EF = Eg : \sqrt{x^2-a^2}$; находимъ отрѣзокъ средне-пропорціональный между EF и Eg, равный EK; тогда $EK^2 = x^2 - a^2$ и $x^2 = a^2 + EK^2$ и $x = EL$.

3. Построить прямоугольный треугольникъ, если даны разности d_1 и d_2 между гипотенузою и катетами треугольника.

Называя катеты чрезъ x и y, и гипотенузу чрезъ z, найдемъ $(z-d_1)^2 + (z-d_2)^2 = z^2$; $z = d_1 + d_2 \pm \sqrt{2d_1d_2}$; $x = d_2 \pm \sqrt{2d_1d_2}$; $y = d_1 \pm \sqrt{2d_1d_2}$. Формула легко строится. Такъ какъ каждая изъ сторонъ больше разности двухъ другихъ и $x > d_2$ и $y > d_1$, то знакъ корней для x и y долженъ быть взятъ $+$ и $x = d_2 + \sqrt{2d_1d_2}$ и $y = d_1 + \sqrt{2d_1d_2}$, а также и $z = d_1 + d_2 + \sqrt{2d_1d_2}$; отрицательные же знаки служатъ рѣшеніями какъ даннаго уравненія, такъ и уравненія $(d_1-z)^2 + (d_2-z)^2 = z^2$; а это послѣднее уравненіе соотвѣтствуетъ геометрической задачѣ, въ которой подъ d_1 и d_2 разумѣютъ суммы гипотенузы и одного изъ катетовъ. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ условіемъ возможности рѣшенія служитъ неравенство: $x - y < z$, или $d_1 - d_2 < d_1 + d_2 - \sqrt{2d_1d_2}$, или $\sqrt{2d_1d_2} < 2d_2$ и $d_1 < 2d_2$.

Примѣчанія. 1) Числа x, y и z будутъ числами раціональными, если $\sqrt{2d_1d_2}$ — число раціональное; полагая $d_1 = 1$ и $d_2 = 2p^2$, найдемъ $y = 1 + 2p$;

$$x = \frac{y^2 - 1}{2} \text{ и } z = x + 1$$

при $p = 1, \; 2, \; 3.....$
$y = 3, \; 5, \; 7.....$
$x = 4, \; 12, \; 24.....$
$z = 5, \; 13, \; 25.....$

т.-е. получимъ рядъ чиселъ, изъ которыхъ квадратъ большаго равенъ суммѣ квадратовъ другихъ чиселъ (пиѳагорейскія числа).

2) Полагая $d_1=2$ и $d_2=p^2$, $y=2(p+1)=2m$; $x=\left(\frac{y}{2}\right)^2-1$ и $z=x+2$; при $m=2$; $y=4$, $x=3$ и $z=5$; при $m=3$; $y=6$, $x=8$ и $z=10$ и т. д., т.-е. получимъ правило Платона для нахожденія тѣхъ же чиселъ.

3) Тѣ же числа могутъ быть получены по формуламъ $z=1+\alpha^2$; $x=2\alpha$ и $y=1-\alpha^2$ при $\alpha<1$.

Задачи на приложеніе алгебры къ геометріи.

3187. Построить прямоугольникъ, если извѣстна его одна сторона и если площадь его въ n разъ больше площади

a)—квадрата, сторона котораго $=a$;

b)—прямоугольника, стороны котораго суть b и c;

c)—треугольника, основаніе котораго d и высота h;

d)—трапеціи, параллельныя стороны которой суть b и B и высота h;

e)—квадрата, діагональ котораго d;

f)—прямоугольнаго треугольника, катеты котораго суть a и b;

g)—прямоугольнаго треугольника, гипотенуза котораго c и катетъ a;

h)—прямоугольнаго треугольника, проекціи катетовъ котораго на гипотенузу равны p_a и p_b;

k)—равносторонняго треугольника, сторона котораго a;

l)—равносторонняго треугольника, высота котораго h.

3188. Построить прямоугольникъ, сторона котораго a, и площадь котораго равна суммѣ или разности площадей плоскихъ фигуръ, указанныхъ въ предшествующей задачѣ.

3189. Построить прямоугольный треугольникъ, если извѣстны его площадь и

a)—катетъ a;

b)—гипотенуза c;

c)—высота, опущенная изъ вершины прямого угла на гипотенузу.

3190. Построить равнобедренный треугольникъ по площади его S и по

a)—основанію a;

b)—равной сторонѣ b;

c)—высотѣ h;

d)—перпендикуляру k, опущенному на одну изъ равныхъ сторонъ.

3191. Простроить ромбъ по площади его S и по

a)—діагонали;

b)—сторонѣ a.

3192. Построить параллелограммъ по площади его S и по

a)—двумъ сторонамъ a и b;

b)—сторонѣ a и высотѣ h, опущенной на другую сторону.

3193. Построить треугольникъ по его площади S и по сторонѣ a и высотѣ h, опущенной на другую сторону.

3194. Построить трапецію по площади ея S, 2-мъ параллельнымъ сторонамъ и одной непараллельной сторонѣ.

3195. Построить равностороннюю трапецію по площади ея S и по

a)—одной изъ параллельныхъ сторонъ a и высотѣ h;

b)—одной изъ непараллельныхъ сторонъ c и высотѣ h;

c)—периметру p и высотѣ h.

3196. Построить квадратъ по его площади въ m разъ большей одной изъ площадей, переименованныхъ въ задачѣ 3187.

3197. По данной площади S равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника построить его стороны.

3198. По разности катетовъ $a-b=d$ и гипотенузѣ c прямоугольнаго треугольника построить стороны его.

Построить прямоугольный треугольникъ по слѣдующимъ даннымъ:

3199. $b+c=s$ и a. Отв. $b=\frac{s}{2}-\frac{a^2}{2s}$.

3200. $c-b=d$ и a. Отв. $b=\frac{a^2}{2d}-\frac{d}{2}$.

3201. p_a (проекція катета a на гипотенузу c) и $a+h=s$.

3202. c; $b^2-a^2=t^2$. Отв. $a^2=\frac{c^2-t^2}{2}$; $b^2=\frac{c^2+t^2}{2}$.

3203. a; $b^2+c^2=s^2$. Отв. $c^2=\frac{s^2+a^2}{2}$.

3204. a, $h^2-p_a^2=t^2$.

3205. Площ. S и $a:b=m$. Отв. $a=\sqrt{2mS}$.

3206. c и $a:b=m$. Отв. $a=\sqrt{\frac{(mc)^2}{1+m^2}}$.

3207. $c:h=m$; S.

3208. $h:p_a=m$ и площадь i треугольника, образуемаго высотою h, проекціей p_a катета на гипотенузу и катетомъ a.

3209. $a:c=m$; S.

3210. $c:p_a=m$, S. Отв. $c^2=\frac{2Sm}{\sqrt{m-1}}$.

3211. c; $a+b=s$.

3212. c; $b-a=t$.

3213. $a+b=s$ и i (площ. прямоуг. треуг., образ. p_a, h и a).

3214. $b-a$ и i.

3215. c и $b=\sqrt{ac}$.

3216. a и $b=\sqrt{ac}$.

3217. c и $c=\sqrt{a(a+b)}$.

3218. c и $c=\sqrt{2b(a+b)}$.

3219. Площ. S и $a+b$ или $a-b$.

3220. S и периметръ P.

3221. a и p_b.

3222. $a:p_b=m$ и p_a, или b, или c, или h.

3223. $c:b=m$ и a.

3224. c и $a^2+h^2=s^2$.

3225. c и $a^2+p_a{}^2=s^2$.

3226. p_a и $a+c=s$.

3227. p_a и $c-a=t$.

3228. p_a и $c+h=s$.

3229. h и $b-a=t$.

3230. c и r радіусъ вписаннаго круга.

3231. Периметръ P и радіусъ вписаннаго круга.

3232. Построить квадратъ, площадь котораго равна площади равносторонняго треугольника со стороною a.

3233. Построить косоугольный треугольникъ, уголъ при вершинѣ A котораго равенъ 60^0 и если, кромѣ того, даны

a) a, $b+c=s$.

b) a, $b-c=t$.

c) c, $a-b=t$.

d) $b+c=s$ и площ. S.
e) $b-c=d$ и площ. S.
f) $a+c=s$ и площ. S.
3234. $\angle A=120^0$; a, $b+c=s$.
3235. $\angle A=30^0$, a; $b+c=s$.
3236. $\angle A=150^0$; a; $b+c=s$.
3237. $\angle A=150^0$.
3238. $\angle A=45^0$, a, $b+c=s$.
3239. $\angle A=45^0$, a, $b-c=t$.
3240. $\angle A=45^0$, c; $a+b=s$.
3241. $\angle A=45^0$, c; $a-b=t$.
3242. $\angle A=45^0$; $b-c=t$; S.

3243. Построить равнобедренный треугольникъ по высотѣ h и по высотѣ k, опущенной на равную сторону треугольника. Отв. $a=\frac{2hk}{\sqrt{4h^2-k^2}}$.

3244. Построить равнобедренный треугольникъ по разстоянію p точки пересѣченія высотъ отъ основанія треугольника и по проекціи u основанія на равную сторону треугольника. Отв. $a^2=\frac{2pu}{\sqrt{4p^2-u^2}}$.

3245. Построить равнобедренный треугольникъ по равной сторонѣ b и разстоянію q точки пересѣченія высотъ отъ вершины при основаніи треугольника. Отв. $a=\frac{2bq}{\sqrt{b^2+q^2}}$.

3246. Построить равнобедр. треугольникъ по отношенію $b:a=m$ стороны къ основанію треугольника и по разстоянію p точки пересѣченія высотъ отъ основанія треугольника. Отв. $a=2p\sqrt{4m^2-1}$.

3247. Построить равнобедренный треугольникъ по площади S и отношенію $m=b:a$ боковой стороны къ основанію треугольника. Отв. $a^2=4c\sqrt{\frac{c^2}{4m^2-1}}$.

3248. Построить равнобедренный треугольникъ по отношенію высотъ треугольника $h:k=m$ и площади его S.

3249. Пересѣчь стороны даннаго треугольника ABC прямою XY, параллельной основанію BC, такъ, чтобы отношеніе отрѣзковъ X и Y, лежащихъ между основаніемъ и сѣкущей, было равно m. Отв. $x = \frac{bc}{b + \frac{c}{m}}$; или $\frac{bc}{\frac{c}{m} - b}$;

или $\frac{bc}{b - \frac{c}{m}}$.

3250. Чрезъ точку P провести сѣкущую, пересѣкающую кругъ радіуса r такъ, чтобы въ точкахъ пересѣченія X и Y окружностью круга эта сѣкущая дѣлилась въ данномъ отношеніи=m. Отв. $PX = x_1 = \sqrt{mp(2r-p)}$, гдѣ p = кратчайшее разстояніе P отъ окружности (три случая); $x_2 = \sqrt{mp(2r+p)}$...

3251. Чрезъ точку P провести сѣкущую круга даннаго радіуса r такъ, чтобы хорда, отсѣкаемая окружностію отъ сѣкущей, имѣла данную длину a. Отв. $x_1(a-x_1)=p(2r-p)$; $x_2(a + x_2) = p(2r + p)$.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Планиметрія.

Отдѣлъ I.

Отдѣлъ II.

Стереометрія.