АЛГЕБРА

ДЛЯ

СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ

СОСТАВИЛЪ

преподаватель Кронштадтской мужской и Александровской гимназій

Л. Я. Пясецкій.

Часть I.

Дѣйствія надъ цѣлыми одночленами и многочленами.

Цѣна безъ перепл. 25 к.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

ИЗДАНІЕ Бр. БАШМАКОВЫХЪ

1907

Типографія Спб. Т-ва Печ. и Изд. дѣла „Трудъ". Фонтанка, 86.

ВВЕДЕНІЕ.

§ 1. **Формулой рѣшенія задачи** называется такое выраженіе, изъ котораго видно, какія дѣйствія и въ какомъ порядкѣ надо выполнить надъ данными числами, чтобы получить искомое число.

Задача. Смѣшано 12 фунт. муки по 8 коп. за фунтъ съ 15 фунт. муки по 9 коп. за фунтъ. Почемъ слѣдуетъ продавать каждый фунтъ смѣси, чтобы отъ продажи всей смѣси получить прибыли 39 коп.?

1) Сколько стоятъ 12 фунт. по 8 коп.?

$$8 \times 12.$$

2) Сколько стоятъ 15 фунт. по 9 коп.?

$$9 \times 15.$$

3) Сколько стоитъ вся смѣсь?

$$8 \times 12 + 9 \times 15.$$

4) За сколько слѣдуетъ продать всю смѣсь, чтобы получить 39 коп. прибыли?

$$8 \times 12 + 9 \times 15 + 39.$$

5) Сколько фунтовъ смѣси?

$$12 + 15.$$

6) Почемъ слѣдуетъ продавать каждый фунтъ смѣси?

$$\frac{8 \times 12 + 9 \times 15 + 39}{12 + 15}.$$

Если обозначимъ искомое число черезъ x, то будемъ имѣть:

$$x = \frac{8 \times 12 + 9 \times 15 + 39}{12 + 15} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Это равенство и есть формула рѣшенія задачи.

§ 2. **Однородными задачами** называются такія задачи, для рѣшенія которыхъ необходимо сдѣлать одни и тѣ же дѣйствія и въ одинаковомъ порядкѣ, только надъ другими числами.

Напр., съ предыдущею однородна слѣдующая задача: Смѣшано 4 фунт. табаку по 1,6 руб. за фунтъ съ 6 фунт. табаку по 3 рубля за фунтъ. Почемъ слѣдуетъ продавать каждый фунтъ смѣшаннаго табаку, чтобы получить отъ всей смѣси 3,6 руб. прибыли?

Обозначивъ искомое число черезъ y и поступая по предъидущему, мы найдемъ слѣдующую формулу:

$$y = \frac{1{,}6 \times 4 + 3 \times 6 + 3{,}6}{4 + 6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

§ 3. **Числовою величиною формулы** называется то число, которое получимъ по выполненіи всѣхъ указанныхъ въ ней дѣйствій.

Числовая величина x въ формулѣ (1) равна 10 коп.; числовая величина y во (2) формулѣ равна 2,8 рубля.

§ 4. Очевидно, что, рѣшивъ какую-либо задачу въ видѣ формулы, мы этою формулою можемъ воспользоваться для рѣшенія всѣхъ другихъ однородныхъ задачъ; для этого надо числа данной формулы замѣнить соотвѣтствующими числами рѣшаемой задачи и затѣмъ найти числовую величину.

Найти формулу, при помощи которой рѣшаются всѣ однородныя задачи, значитъ **обобщить задачу.**

Обобщеніе задачъ составляетъ одну изъ цѣлей алгебры.

Чтобы показать, что однородныя задачи рѣшаются при помощи одних и тѣхъ же дѣйствій и въ одинаковомъ порядкѣ, но что данныя числа могутъ быть какими угодно, эти послѣднія условились обозначать буквами латинскаго алфавита: a, b, c, d... x, y, z... и т. д., причемъ первыми буквами алфавита (a, b, c, d...) условились обозначать **данныя (извѣстныя) величины**, а послѣдними (x, y, z...) **искомыя (неизвѣстныя) величины.**

Буквы, замѣняющія собою числа, называются общими числами или алгебраическими количествами.

§ 5. Дѣйствія надъ количествами обозначаются знаками этихъ дѣйствій. Сложеніе количества a съ количествомъ b обозначается

$$a + b;$$

вычитаніе количества b изъ количества a обозначается

$$a - b;$$

умноженіе количества a и b обозначается

$$a \times b, \text{ или } a \cdot b;$$

дѣленіе количества a на количество b обозначается

$$a : b, \text{ или } \frac{a}{b} \cdot$$

Предидущая задача въ обобщенномъ видѣ можетъ быть выражена такъ:

Смѣшано a фунтовъ нѣкотораго товара, цѣною по m копѣекъ за фунтъ, съ b фунтами другого сорта по n коп. за фунтъ. Почемъ слѣдуетъ продавать каждый фунтъ смѣси, чтобы отъ всей продажи получить p коп. прибыли?

Разсуждая при рѣшеніи этой задачи подобно предъидущему, когда вмѣсто алгебраическихъ данныхъ мы брали числовыя или ариѳметическія данныя, найдемъ формулу ея рѣшенія:

$$x = \frac{ma + nb + p}{a + b}.$$

§ 6. Формула, составленная изъ алгебраическихъ количествъ (буквъ), **называется общею или алгебраическою формулой;** если же она составлена изъ однихъ ариѳметическихъ чиселъ, какъ формулы (1) и (2), то называется **частною** или **ариѳметическою формулой.**

§ 7. При прочитываніи формулъ руководствуются слѣдующимъ правиломъ: **формула носитъ названіе результата послѣдняго дѣйствія, указаннаго въ ней.**

Такъ формула $a + b$ называется **суммою количествъ** a и b; $a - b$ называется **разностью количествъ** a и b; ab называется **произведеніемъ количества** a и b; $\frac{a}{b}$ или $a : b$ называется **частнымъ отъ дѣленія количества** a **на количество** b.

Примѣчаніе. Чтобы сократить произношеніе формулъ, слово „количество“ опускаютъ. Напр. формулу $\frac{a - b}{m}$ называютъ: частное отъ дѣленія разности a и b на m.

Подобнымъ же образомъ прочитываются и сложныя формулы. Напр.

$$\frac{ab - c}{a + b}$$

читается такъ: частное отъ дѣленія разности между произведеніемъ a и b и количествомъ c на сумму a и b.

§ 8. **Скобками** называются знаки, между которыми помѣщаются формулы различныхъ дѣйствій. Напр.

$$(a + b); \ \left[a - (b + c)\right]; \ \left\{\left[ab - c \ (a - b)\right] \ m + a\right\}.$$

Скобки ( ) называются малыми, [ ] прямыми, { } большими.

Скобки служатъ для того, чтобы показать, что новое дѣйствіе слѣдуетъ выполнить надъ результатомъ тѣхъ дѣйствій, которыя заключены въ скобкахъ.

Напр. въ формулѣ $(a - b)m$ малыя скобки показываютъ, что сначала надо найти разность между a и b, а потомъ на эту разность умножитъ m; поэтому эта формула читается такъ: произведеніе m на разность a и b.

Въ формулѣ $\left[a - (b + c)\right]m$ первое дѣйствіе есть нахожденіе суммы b и c, что обозначено малыми скобками, затѣмъ эту сумму должно вычесть изъ a и только послѣ этого полученную разность умножить на m. Читается эта формула такъ: произведеніе m на разность между a и суммою b и c.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ скобки пропускаютъ, такъ какъ и безъ нихъ порядокъ дѣйствій совершенно ясенъ.

Напр. вмѣсто $(a + b) - c$ можно написать $a + b - c$, такъ какъ обѣ формулы указываютъ одинъ и тотъ же порядокъ дѣйствій. Точно также формула $(am) - c$ равносильна формулѣ $am - c$.

Однако опусканіе скобокъ не всегда допускается, такъ какъ это совершенно измѣняетъ порядокъ дѣйствій и можетъ привести къ невѣрному результату

Напр. въ формулахъ: $a(m - c)$ и $am - c$ порядокъ дѣйствій неодинаковъ: въ первой надо сначала сдѣлать вычитаніе $(m - c)$, а потомъ a умножить на полученную разность; во второй сначала надо a умножить на m и потомъ изъ полученнаго произведенія вычесть c.

Такимъ образомъ при помощи скобокъ порядокъ дѣйствій обозначается совершенно ясно и точно.

Правила употребленія скобокъ.

1) Знакъ дѣйствія, связывающій данныя количества, ставится между этими количествами.

2) Если ни впереди знака дѣйствія, ни позади него нѣтъ скобки, то дѣйствіе относится только къ тѣмъ двумъ количествамъ, между которыми находится знакъ дѣйствія.

3) Если передъ знакомъ дѣйствія, или позади его поставлена скобка, то дѣйствіе относится къ тому выраженію, которое заключено въ скобкахъ.

§ 9. Степенью называется произведеніе равныхъ сомножителей.

Напр. $2 . 2 . 2$; $3 . 3 . 3 . 3$; aa; $bbbbb$ и т. п. Степень обозначаютъ сокращенно: для этого повторяющійся множитель пишутъ одинъ разъ, а *надъ нимъ* справа пишутъ число, которое показываетъ, сколько разъ онъ повторяется множителемъ.

Поэтому $2 . 2 . 2 = 2^3$

и читается: два въ третьей степени, или третья степень двухъ;

$$3 . 3 . 3 . 3 = 3^4$$

и читается: три въ четвертой степени, или четвертая степень трехъ;

$aa = a^2$ читается a во второй степени или вторая степень a;
$bbbbb = b^5$ читается b въ пятой степени или пятая степень b.

Примѣчаніе. Вторую степень называютъ **квадратомъ**, третью степень **кубомъ**. Напр. выраженіе a^2 читается a въ квадратѣ, или квадратъ a; c^3 читается c въ кубѣ, или кубъ c.

Основаніемъ или корнемъ степени называется повторяющійся множитель.

Показателемъ степени называется число, которое пишется надъ основаніемъ и показываетъ, сколько разъ основаніе повторяется сомножителемъ.

Такъ въ выраженіи b^5 основаніе b, показатель степени 5.

Единицу показателемъ степени не пишутъ, такъ какъ a^1 равно a.

§ **10.** Изъ опредѣленія степени слѣдуетъ: **возвысить какое-нибудь количество въ степень значитъ повторить его сомножителемъ столько разъ, сколько единицъ въ показателѣ степени.**

$$\text{Напр. } 2^5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 32.$$

$$3^4 = 3 . 3 . 3 . 3 = 81.$$

$$m^6 = mmmmmm.$$

$$(a + b)^3 = (a + b)\ (a + b)\ (a + b).$$

$$\left(\frac{a}{m}\right) = \frac{a}{m} \cdot \frac{a}{m} \cdot \frac{a}{m} \cdot \frac{a}{m} \cdot$$

§ **11.** Если извѣстны степень и ея показатель, то **можно найти** основаніе или корень ея.

Извлеченіемъ корня называется дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается корень или основаніе степени по даннымъ степени и показателю степени.

Извлеченіе корня обозначается знакомъ $\sqrt{\ }$ (первая буква латинскаго слова radix, означающаго: корень); показатель данной степени пишется при знакѣ корня и называется **показателемъ корня**, а сама степень пишется справа отъ знака корня и называется въ этомъ случаѣ **подкореннымъ количествомъ.**

Напр. дано, что 6-ая степень нѣкотораго числа (основанія) равна 64. Найти основаніе или корень ея. Для рѣшенія этой задачи надо извлечь (найти) корень 6-ой степени изъ числа 64, что обозначается такъ: $\sqrt[6]{64}$. Очевидно, что искомымъ корнемъ будетъ число 2, такъ какъ число 2 въ 6-ой степени равно 64.

Подобнымъ же образомъ соображаемъ, что $\sqrt[3]{27}=3$, потому что число 3 въ 3-ей степени равно 27; $\sqrt[4]{10000}=10$, потому что 10 въ 4-ой степени равняется 10000.

Примѣчаніе. Корень второй степени или квадратный принято писать безъ показателя корня, а именно: вмѣсто $\sqrt[2]{4}$ пишутъ $\sqrt{4}$.

Изъ предъидущаго выводимъ:

Извлечь корень изъ какого-нибудь количества значитъ найти такое количество, которое, будучи возвышено въ степень показателя корня, равнялось бы подкоренному количеству.

§ **12. Одночленомъ называется такое выраженіе, въ**

которомъ послѣднее дѣйствіе не есть сложеніе и вычитаніе.

Напр. ab; $2ac$; $\frac{3m}{5n}$; $4ab^2$; $\frac{mx^3}{3a^2}$; $\sqrt[3]{ab}$...

$(a+b)c$; $[(a-b)c+dk]d$ —

§ 13. **Многочленомъ называется такое выраженіе, которое составлено изъ нѣсколькихъ одночленовъ, соединенныхъ между собою знаками сложенія и вычитанія.**

Напр. $2a+b^2c$; $a^2+2ab+b^2$; $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$\frac{ab}{c}-\frac{2m}{b^2}+c^3$ и т. п.

§ 14. Одночленъ называется цѣлымъ, если въ немъ нѣтъ **алгебраическаго дѣлителя.**

Напр. $3am^2$; $4b\sqrt{c}$; $\frac{3}{5}a$; $\frac{4}{7}cx^2$.

Одночленъ называется дробнымъ, если въ немъ есть **алгебраическій дѣлитель.**

Многочленъ называется цѣлымъ, если всѣ его одночлены цѣлы, и дробнымъ, если хоть одинъ изъ его членовъ не цѣлый.

§ 15. **Коэффиціентомъ или предстоящимъ называется ариѳметическій множитель въ одночленѣ.**

Напр. въ одночленахъ $2a$; $3a^2b$; $\frac{2}{5}m^3$; $\frac{4m^2x^3}{bc}$ множители 2, 3, $\frac{2}{5}$, 4 суть коэффиціенты.

Коэффиціентъ может быть цѣлымъ и дробнымъ; онъ ставится всегда впереди одночлена. Коэффиціентъ единицу не пишутъ, такъ какъ $1a$ равна a.

§ **16**. Очевидно, что

$$a + a + a = 3a,$$

$$ab + ab + ab + ab = 4ab,$$

$$\frac{m}{5} + \frac{m}{5} + \frac{m}{5} = \frac{3}{5}m.$$

Отсюда заключаемъ, что **коэффиціентъ служитъ для изображенія въ упрощенномъ видѣ суммы равныхъ слагаемыхъ.**

§ **17**. Очевидно, что

$$5m = m + m + m + m + m,$$

$$4a^2c = a^2c + a^2c + a^2c + a^2c,$$

$$\frac{3}{7}a^3bc^2 = \frac{a^3bc^2}{7} + \frac{a^3bc^2}{7} + \frac{a^3bc^2}{7},$$

$$\frac{2a}{5m} = \frac{a}{5m} + \frac{a}{5m}.$$

Отсюда заключаемъ:

1) **цѣлый коэффиціентъ показываетъ, сколько разъ надо повторить слагаемымъ тотъ алгебраическій одночленъ, передъ которымъ онъ поставленъ;**

2) **дробный коэффиціентъ показываетъ, сколько разъ надо повторить слагаемымъ извѣстную часть алгебраическаго одночлена, причемъ знаменатель показываетъ, какую именно часть надо повторить, а числитель — сколько разъ надо повторить.**

Примѣчаніе. Иногда коэффиціентами называютъ и буквенные множители, если они поставлены впереди другихъ буквенныхъ выраженій, которымъ придается особенная важность, въ значеніи произвольныхъ чиселъ.

Напр. въ одночленахъ ax и $3ny^2$ буквы a и $3n$ называютъ иногда коэффиціентами.

§ **18.** Для обозначенія неравныхъ количествъ ставится знакъ неравенства, представляющій собою уголъ: то количество, къ которому уголъ обращенъ вершиною (остріемъ) есть меньшее количество.

Напр. если a больше b, то пишутъ

$$a > b.$$

Если c меньше d, то пишутъ

$$c < d.$$

Выраженіе $a >< b$ значитъ: a больше или меньше b.

Выраженіе $a \leqq b$ значитъ: a меньше или равно b, или a не больше b.

Выраженіе $a \geqq b$ значитъ: a больше или равно b, или a не меньше b.

§ **19. Аксіомою называется очевидная истина, т. е. истина не требующая доказательства.**

Напр. 1) Всякое количество равно самому себѣ:

$$a = a;\ ab = ab;\ \frac{a}{b} = \frac{a}{b}\ \text{и т. п.}$$

2) Всякое количество больше своей части, но равно суммѣ всѣхъ своихъ частей.

3) Если къ равнымъ количествамъ прибавимъ по-ровну, то получимъ равныя суммы. Если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$.

4) Если къ равнымъ количествамъ прибавимъ неравныя, то получимъ суммы неравныя, а именно, та изъ суммъ будетъ больше, въ которой заключается большее изъ неравныхъ количествъ.

Такъ, если $a = b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

5) Если отъ равныхъ количествъ отнимемъ по-ровну, то получимъ равные остатки. Такъ если $a = b$ и $c = d$, то $a - c = b - d$.

6) Если отъ равныхъ количествъ отнимемъ неравныя, то получимъ неравныя разности, а именно, та изъ разностей больше, у которой вычитаемое меньше. Такъ, если $a = b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$.

Существуютъ такія же аксіомы, касающіяся умноженія и дѣленія равныхъ и неравныхъ количествъ:

7) Если равныя количества умножимъ или раздѣлимъ на равныя числа, то получимъ равныя количества; напр. если $a = b$, то и $a \cdot c = b \cdot c$, а также $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

8) Если равныя количества помножимъ на неравныя, то получимъ неравныя произведенія, и то изъ нихъ будетъ больше, которое будетъ помножено на большее количество; напр. если $a = b$ и $c > d$, то $ac > bd$.

9) Если равныя количества раздѣлимъ на неравныя, то получимъ неравныя частныя, и то изъ нихъ будетъ меньше, которое получится отъ дѣленія на большее; такъ если $a = b$ и $c > d$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

10) Двѣ величины, равныя порознь третьей, равны между собою.

Такъ, если $a = b$ и $c = b$, то $a = c$.

§ **20**. **Теоремою называется истина, въ справедливости которой мы убѣждаемся только послѣ нѣкотораго разсужденія.**

Разсужденіе, при помощи котораго мы убѣждаемся въ справедливости теоремы, называется **доказательствомъ.**

Въ теоремѣ слѣдуетъ различать двѣ части: **условіе** и **заключеніе** или **выводъ.**

Условіемъ въ теоремѣ называются всѣ данныя положенія въ ней.

Заключеніемъ называется то положеніе, которое надо доказать.

Напр. въ **теоремѣ:** Если сумма цифръ числа дѣлится безъ остатка на 3, то и самое число дѣлится безъ остатка на 3 — **условіе:** если сумма цифръ числа дѣлится безъ остатка на 3; **заключеніе:** самое число дѣлится безъ остатка на 3.

ГЛАВА 1-ая.

Положительныя и отрицательныя количества.

§ **21.** Существуютъ величины, которыя называются **противоположными.**

Напр. прибыль и убытокъ, капиталъ и долгъ, ускореніе и замедленіе, повышеніе температуры и пониженіе ея, движеніе впередъ и движеніе назадъ и т. п.

Противоположныя величины могутъ быть взяты въ количествахъ равныхъ и неравныхъ. Напр. 5 руб. прибыли и 5 руб. убытка; 4 рубля прибыли и 7 рублей убытка и т. п.

§ **22. Два количества называются равными и про-**

тивоположными, если при соединеніи взаимно уничтожаются, или, иначе, если сумма ихъ равняется нулю.

Напр. равными и противоположными количествами будутъ 3 рубля капитала и 3 рубля долга, такъ какъ 3-мя рублями капитала можно покрыть 3 рубля долга и не останется ни капитала, ни долга; другими словами, 3 рубля капитала, соединенныя съ 3 рублями долга, взаимно уничтожаются и ихъ совокупность или сумма равна нулю.

10 руб. прибыли и 10 руб. убытка—количества равныя и противоположныя.

Въ самомъ дѣлѣ, если купецъ, продавая, напр., кусокъ сукна, получилъ при продажѣ одной части 10 рублей прибыли, а при продажѣ оставшейся части того же куска 10 руб. убытка, то отъ продажи всего куска этого сукна онъ, очевидно, не получилъ ни прибыли, ни убытка; другими словами, 10 руб. прибыли и 10 руб. убытка, будучи соединены, уничтожаютъ другъ друга, т. е. сумма ихъ равна нулю.

Если какой-нибудь предметъ, напр. паровозъ, подвинется на 8 саженъ впередъ, а потомъ на 8 саженъ назадъ, то, очевидно, онъ остановится на томъ же мѣстѣ, съ котораго началъ движеніе; въ результатѣ оба движенія, впередъ на 8 саж. и назадъ на 8 саж., взаимно уничтожились.

Точно также количествами равными и противоположными можно считать повышеніе температуры на 2 градуса и пониженіе на 2 градуса, поднятіе воды на 4 фута и спаденіе ея на 4 фута и т. п.

§ **23. Два количества называются противоположными, если при соединеніи одно изъ нихъ уничтожаетъ только часть другого.**

Напр. 5 руб. капитала и 8 руб. долга — количества противоположныя, потому что 5 руб. капитала при соединеніи съ 8 руб. долга покрываютъ (уничтожаютъ) только 5 руб. долга, и въ результатѣ получается 3 руб. долга; равнымъ образомъ отъ соединенія 7 руб. капитала съ 3 руб. долга получается въ результатѣ 4 руб. капитала. Въ первомъ случаѣ 5 руб. капитала уничтожили только часть долга, во второмъ случаѣ 3 руб. долга уничтожили только часть капитала.

На томъ же основаніи считаемъ противоположными количествами слѣд.:

10 руб. прибыли и 6 руб. убытка;

повышеніе температуры на 8 градусовъ и пониженіе на 13 градусовъ;

движеніе впередъ на 15 футовъ и движеніе назадъ на 8 футовъ;

ускореніе (въ часахъ) на 2 секунды и отставаніе на 3 секунды и т. п.

§ 24. **Въ алгебрѣ условились одно изъ противоположныхъ количествъ называть положительнымъ, а другое отрицательнымъ.**

Которое изъ двухъ противоположныхъ количествъ принять положительнымъ и которое отрицательнымъ остается вполнѣ произвольнымъ, но разъ одно изъ нихъ названо **положительнымъ**, то это значеніе должно за нимъ сохраняться во все время рѣшенія даннаго вопроса, а за противоположнымъ все время должно сохраняться значеніе **отрицательное.**

Напр. если при рѣшеніи какого-нибудь вопроса капиталъ условились считать положительнымъ количествомъ, тогда долгъ слѣдуетъ считать количествомъ отрицательнымъ, или наоборотъ, если долгъ считать положительнымъ количествомъ, то капиталъ придется считать отрицательнымъ.

Введя термины **„положительный“** и **„отрицательный“**, алгебра прилагаетъ къ противоположнымъ количествамъ наименованіе одного изъ нихъ, а именно того, которое условились называть положительнымъ. Напр. если капиталъ принятъ количествомъ положительнымъ, тогда вмѣсто наименованія **„долгъ“** говорятъ **„отрицательный капиталъ“**. Равнымъ образомъ вмѣсто наименованія **„убытокъ“** говорятъ **„отрицательная прибыль“** если прибыль принимаютъ за положительное количество. Если **„замедленіе“** положительное количество, то **„ускореніе“** будетъ **„отрицательнымъ замедленіемъ“**.

Если повышеніе температуры есть **„положительное измѣненіе“** температуры, то пониженіе температуры будетъ **„отрицательнымъ измѣненіемъ“** ея.

§ **25**. Если къ какому-нибудь числу прибавить нѣсколько единицъ, напр. 6 единицъ, а потомъ вычесть столько-же, то есть 6 единицъ, то получится то же самое число, потому что 6 прибавленныхъ единицъ уничтожаются 6-ю отнятыми единицами. Значитъ **единицы, прибавляемыя** къ какому-нибудь числу, **и единицы, отнимаемыя** отъ того же числа, можно также считать количествами противоположными. Но прибавляемое число называется слагаемымъ, а отнимаемое вычитаемымъ, значитъ предыдущій выводъ можно выразить такъ: слагаемое и вычитаемое суть количества противоположныя, такъ какъ при соединеніи одно уничтожаетъ другое или вполнѣ, если они численно равны, т. е. имѣютъ по равному числу единицъ, или одно уничтожаетъ часть другого, если число единицъ въ обоихъ неодинаково.

§ **26**. Въ алгебрѣ условились:
положительныя количества разсматривать, какъ слагаемыя, а отрицательныя количества, какъ вычитаемыя.

Такъ какъ передъ слагаемымъ ставится всегда знакъ плюсъ (+), а передъ вычитаемымъ знакъ минусъ (—), то условились:
передъ положительнымъ количествомъ ставить знакъ +, а передъ отрицательнымъ знакъ —.

На этомъ основаніи 5 руб. капитала, считая капиталъ положительнымъ количествомъ, обозначаютъ черезъ + 5 руб., а 7 руб. долга обозначаютъ черезъ — 7 руб.

Если 4 минуты ускоренія обозначить черезъ + 4 мин., то 4 минуты замедленія обозначаются черезъ — 4 мин. Если рядъ чиселъ:

+ 8 руб. — 5 руб. — 6 руб. + 10 руб.

означаютъ различныя количества прибыли,

то + 8 руб. означаетъ 8 руб. прибыли,
— 5 руб. „ 5 руб. отрицательной прибыли (убытка),
— 6 руб. „ 6 руб. отрицательной прибыли (убытка),
+ 10 руб. „ 10 руб. прибыли.

§ **27**. Такъ какъ **знакъ** + ставится передъ **положительнымъ** количествомъ, то его **называютъ положительнымъ знакомъ**, а **знакъ** —, какъ знакъ **отрицательнаго** количества, **отрицательнымъ знакомъ.**

§ **28**. Ради краткости, иногда у положительнаго количества знака + не пишутъ, но въ такихъ случаяхъ онъ всегда подразумѣвается.

Такъ вмѣсто $+5$ можно писать и говорить просто 5; вмѣсто $+m$ говорить и писать m.

Отрицательный же знакъ никогда не пропускается.

§ **29**. Не для всякаго количества существуетъ противоположное.

Тѣ количества, которыя не имѣютъ для себя противоположныхъ, въ алгебрѣ условились считать положительными, а потому въ алгебрѣ каждое количество непремѣнно или положительно, или отрицательно и имѣеть свой знакъ (положительный, или отрицательный); слѣдовательно —

Необходимая принадлежность алгебраическаго количества есть его знакъ.

§ **30**. Такъ какъ всякое количество составлено изъ единицъ, или частей единицы, то положительное количество составлено изъ положительныхъ единицъ, или частей единицы, а отрицательное количество составлено изъ отрицательныхъ единицъ, или частей единицы.

Абсолютною величиною количества называютъ число единицъ, или частей единицы, образующихъ алгебраическое количество, независимо отъ его знака.

Такъ у $+7$ абсолютная величина 7; у $-m$ абсолютная величина m; у $+6\frac{1}{2}$ и у $-6\frac{1}{2}$ абсолютная величина одна и та же, а именно $6\frac{1}{2}$.

§ **31**. Для того, чтобы знаки алгебраическихъ количествъ не смѣшивать со знаками сложенія и вычитанія, часто количество вмѣстѣ съ ихъ знаками пишутъ въ скобкахъ, и тогда знаки дѣйствій пишутъ передъ скобками. Напр. (-7); $(+2)$; $(+8)-(+3)$; $(-6)+(-2)$ и т. п.

ГЛАВА 2-ая.

Четыре дѣйствія надъ алгебраическими количествами.

§ **32**. Такъ какъ въ алгебрѣ разсматриваются числа положительныя и отрицательныя, то должны быть выведены правила для совокупныхъ дѣйствій надъ тѣми и другими.

Эти правила выводятся непосредственно изъ опредѣленій дѣйствій.

СЛОЖЕНІЕ.

§ **33**. Опредѣленіе. **Сложеніемъ называется дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ нѣскольнихъ данныхъ чиселъ составляется новое число такъ, чтобы въ него послѣдовательно входили всѣ единицы и всѣ доли единицы всѣхъ данныхъ чиселъ.**

При сложеніи алгебраическихъ количествъ могутъ встрѣтиться 3 случая:

1) всѣ слагаемыя имѣютъ одинаковые знаки;

2) слагаемыхъ два, и они имѣютъ разные знаки;

3) слагаемыхъ болѣе, чѣмъ два, и они имѣютъ разные знаки.

§ **34**. 1-й случай. Требуется вычислить сумму:

$$(+7)+(+4)+(+6)+(+1).$$

По опредѣленію сложенія, въ суммѣ должны заключаться всѣ единицы и доли всѣхъ слагаемыхъ, а въ данномъ случаѣ всѣ слагаемыя одного знака и потому взаимно другъ друга не уничтожаютъ, слѣдовательно въ сумму войдутъ и

7, и 4, и 6, и 1, т. е. $7+4+6+1$, что составитъ 18 единицъ; очевидно, что эти 18 единицъ должны имѣть положительный знакъ, такъ какъ отдѣльныя единицы этой суммы всѣ положительныя.

$$\text{Итакъ } (+7)+(+4)+(+6)+(+1)=+(7+ +4+6+1)=+18.$$

Требуется вычислить сумму:

$$(-5)+(-8)+(-11)+\left(-\frac{2}{3}\right).$$

Въ суммѣ должны заключаться всѣ единицы и доли единицы всѣхъ слагаемыхъ, а въ данномъ случаѣ всѣ слагаемыя одного знака (отрицательнаго) и поэтому при соединенiи другъ друга не уничтожаютъ, слѣдовательно въ сумму войдутъ и 5, и 8, и 11, и $\frac{2}{3}$, т. е. $5+8+11+\frac{2}{3}$, что составитъ $24\frac{2}{3}$ единицъ; очевидно, эти $24\frac{2}{3}$ единицъ должны имѣть отрицательный знакъ, такъ какъ отдѣльныя единицы и доли слагаемыхъ этой суммы всѣ отрицательны. Итакъ,

$$(-5)+(-8)+(-11)+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\left(5+8+ +11+\frac{2}{3}\right)=-24\frac{2}{3}.$$

Отсюда правило:

Чтобы сложить нѣсколько алгебраическихъ количествъ одного знака, надо сложить ихъ абсолютныя величины и передъ суммою поставить ихъ общiй знакъ.

§ **25**. 2-й случай. а) Требуется вычислить сумму:

$$(+7)+(-4).$$

Въ суммѣ должны заключаться всѣ единицы и доли единицы слагаемыхъ, но въ этомъ случаѣ слагаемыя имѣютъ разные знаки и потому, какъ противоположныя количества, при соединеніи одно изъ нихъ уничтожаетъ часть другого, а именно, -4 уничтожаетъ только $+4$ и отъ

$7) + (-4)$ остается въ результатѣ $(+3)$. Итакъ,

$$(+7) + (-4) = +3.$$

б) Требуется вычислить сумму:

$$(+6) + (-8).$$

Соединяя единицы обоихъ слагаемыхъ, мы замѣчаемъ, что $+6$ уничтожаютъ изъ -8 только -6, и въ результатѣ отъ соединенія обоихъ слагаемыхъ получается (-2), т. е.

$$(+6) + (-8) = -2.$$

Изъ разобранныхъ примѣровъ мы видимъ, что если даны два слагаемыхъ и они имѣютъ разные знаки, то въ результатѣ ихъ соединенія получается количество одинаковаго знака съ абсолютно-бо́льшимъ количествомъ, а абсолютная величина результата, очевидно, равняется абсолютно-бо́льшему числу безъ абсолютно-меньшаго. Отсюда правило:

Чтобы сложить два количества съ разными знаками, надо изъ абсолютно-бо́льшей величины вычесть абсолютно-меньшую величину и передъ полученною разностью поставить знакъ абсолютно-бо́льшей величины.

Примѣчаніе. Очевидно, что сумма двухъ абсолютно-равныхъ количествъ, но съ противоположными знаками, равна нулю: $(+3) + (-3) = 0$.

§ **36.** 3-й случай. Требуется вычислить сумму:

$$(+9)+(-5)+(-6)+(+3)+(-7).$$

Такъ какъ сумма получается та же, въ какомъ бы порядкѣ ни дѣлали сложенія, то данную сумму можно преобразовать такъ:

$(+9)+(+3)+(-5)+(-6)+(-7)$, т. е. сначала найти сумму положительныхъ слагаемыхъ, потомъ сумму отрицательныхъ слагаемыхъ и затѣмъ уже сложить эти двѣ суммы:

$$(+9)+(+3)=+12;$$
$$(-5)+(-6)+(-7)=-18;$$
$$(+12)+(-18)=-6.$$

Отсюда правило:

Чтобы сложить нѣсколько алгебраическихъ количествъ съ разными знаками, надо найти сумму положительныхъ слагаемыхъ, потомъ сумму отрицательныхъ слагаемыхъ и затѣмъ сложить эти двѣ суммы.

Сумму многихъ слагаемыхъ можно находить также, соединяя сначала первыя два слагаемыхъ, затѣмъ найти сумму этихъ слагаемыхъ и третьяго слагаемаго, потомъ сумму полученной суммы и четвертаго слагаемаго и т. д. до послѣдняго слагаемаго включительно.

Вычислимъ этимъ пріемомъ прежній примѣръ.

$$(+9)+(-5)+(-6)+(+3)+(-7).$$

Говоримъ:

$$(+9)+(-5)=(+4);$$

$$(+4)+(-6)=(-2);$$
$$(-2)+(+3)=(+1);$$
$$(+1)+(-7)=-6.$$

ВЫЧИТАНІЕ.

§ **37**. Опредѣленіе. **Вычитаніемъ называется дѣйствіе, посредствомъ котораго по данной суммѣ двухъ количествъ и одному изъ слагаемыхъ находятъ второе слагаемое.**

Докажемъ сначала, что,

вычесть алгебраическое количество все равно, что прибавить къ уменьшаемому противоположное количество.

Требуется доказать, что:

$$1)\ a-(+b)=a+(-b),$$
$$2)\ a-(-b)=a+(+b).$$

1) Пусть искомая разность будетъ x, т. е.

$$a-(+b)=x.$$

Изъ опредѣленія вычитаія слѣдуетъ, что уменьшаемое есть сумма вычитаемаго и разности, т. е.

$$a=(+b)+x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{a})$$

На основаніи аксіомы: если къ равнымъ количествамъ прибавимъ по-ровну, то получимъ равныя суммы, прибавивъ къ обоимъ частямъ управленія (а) по $(-b)$, получимъ:

$$a+(-b)=(+b)+x+(-b)$$

Но въ суммѣ $(+b)+x+(-b)$ два слагаемыхъ, $(+b)$ и $(-b)$, какъ количества равныя и противоположныя, взаимо уничтожаются, а потому

$$a+(-b)=x,$$

а это равенство показываетъ, что искомая разность x будетъ найдена, если къ уменьшаемому a прибавимъ $(-b)$, т. е. вычитаемое съ противоположнымъ знакомъ. Это и требовалось доказать.

2) Равенство

$$a-(-b)=a+(+b)$$

доказывается подобно предыдущему.

§ **38**. Правило. **Чтобы вычесть алгебраическое количество, надо къ уменьшаемому прибавить количество, противоположное вычитаемому, и выполнить сложеніе.**

Напр. $8-(-3)=8+(+3)=+11.$

$$(-4)-(+6)=(-4)+(-6)=-10.$$

$$(-5)-(-7)=(-5)+(+7)=+2.$$

УМНОЖЕНІЕ.

§ **39**. Опредѣленіе. **Умножить одно количество на другое значитъ составить произведеніе изъ множимаго такъ, какъ множитель составленъ изъ положительной единицы.**

Множитель можетъ быть и положительнымъ количествомъ, и отрицательнымъ.

1) Если множитель положителенъ, напр. $(+5)$, то онъ составленъ изъ положительной единицы такъ: **положительная единица повторена слагаемымъ 5 разъ**, т. е.

$$+5=(+1)+(+1)+(+1)+(+1)+(+1).$$

Очевидно, что всякое положительное число можетъ быть составлено изъ положительной единицы подобнымъ же образомъ.

Напр. $+3 = (+1) + (+1) + (+1)$.

$$+\frac{4}{5} = \left(+\frac{1}{5}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right)$$

$$+2\frac{3}{7} = (+1) + (+1) + \left(+\frac{1}{7}\right) + \left(+\frac{1}{7}\right) + \\ + \left(+\frac{1}{7}\right).$$

2) Если множитель отрицателенъ, напр. (-4), то изъ положительной единицы его можно составить такъ:
у положительной единицы перемѣнить знакъ на противоположный и такимъ образомъ измѣненную единицу повторить слагаемымъ 4 раза, т. е.

$$-4 = (-1) + (-1) + (-)1 + (-1).$$

Очевидно, что всякое отрицательное число можетъ быть составлено подобнымъ же образомъ.

Напр. $-6 = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1)$.

$$-\frac{3}{4} = \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right).$$

$$-3\frac{2}{5} = (-1) + (-1) + (-1) + \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)$$

§ 40. При умноженіи алгебраическихъ количествъ могутъ быть слѣдующіе случаи:

1) положительное количество умножить на положительное количество:

$$(+5) . (+3)$$

2) положительное количествъ умножить на отрицательное количество:

$$(+6) . (-4).$$

3) отрицательное количество умножить на положительное количество:

$$(-7) \cdot (+2)$$

4) отрицательное количество умножить на отрицательное количество:

$$(-2) \cdot (-5).$$

§ 41. 1-й случай. Надо $(+5) \cdot (+3)$.

Произведеніе должно быть составлено изъ множимаго такъ, какъ множитель составленъ изъ положительной единицы.

Въ данномъ случаѣ для составленія множителя $(+3)$ надо, не мѣняя у положительной единицы ея знака, повторить только ее слагаемымъ 3 раза.

$$+3 = (+1) + (+1) + (+1).$$

Слѣдовательно для составленія произведенія надо, не мѣняя знака у множимаго, повторить только его слагаемымъ три раза, т. е.

$$(+5) \cdot (+3) = (+5) + (+5) + (+5).$$

Но сумма $(+5) + (+5) + (+5)$, по правилу сложенія алгебраическихъ количествъ, равна $+15$, слѣдовательно $(+5) \cdot (+3) = +15$.

§ 42. 2-й случай. Надо $(+6) \cdot (-4)$.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ для составленія множителя (-4) надо у положительной единицы перемѣнить знакъ на противоположный и уже измѣненную единицу повторить лагаемымъ четыре раза:

$$-4 = (-1) + (-1) + (-1) + (-1),$$

то для составленія произведенія надо у множимаго знакъ измѣнить на противоположный и уже измѣненное множимое повторить слагаемымъ четыре раза, т. е.

$$(+6).(-4)=(-6)+(-6)+(-6)+(-6)=$$
$$=-24.$$

§ **43.** 3-й случай. Надо $(-7).(+2)$.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ для составленія множителя $(+2)$ надо, не измѣняя знака у положительной единицы, повторить только ее слагаемымъ два раза:

$$+2=(+1)+(+1),$$

то для составленія требуемаго произведенія надо, не измѣняя знака у множимаго, повторить его только слагаемымъ два раза, т. е.

$$(-7).(+2)=(-7)+(-7)=-14.$$

§ **44.** 4-й случай. Надо $(-2).(-5)$.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ для составленія множителя надо у положительной единицы знакъ измѣнить на противоположный и тогда уже повторить ее слагаемымъ пять разъ:

$$-5=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1),$$

то для составленія произведенія надо у множимаго перемѣнить знакъ на противоположный и тогда уже измѣненное множимое повторить слагаемымъ пять разъ, т. е.

$$(-2).(-5)=(+2)+(+2)+(+2)+(+2)+$$
$$+(+2)=+10.$$

§ 45. И такъ, $(+5).(+3) = +15,$

$$(+6).(-4) = -24,$$

$$(-7).(+2) = -14,$$

и $(-2).(-5) = +10$

Изъ этихъ формулъ видно:

1) произведеніе имѣетъ знакъ $+$, если оба сомножителя одинаковаго знака,

2) произведеніе имѣетъ знакъ $-$, если сомножители имѣютъ разные знаки,

3) абсолютная величина произведенія во всѣхъ случаяхъ равна произведенію абсолютныхъ величинъ обоихъ сомножителей. Отсюда правило:

Чтобы перемножить два алгебраическихъ количества, надо перемножить ихъ абсолютныя величины и взять это произведеніе со знакомъ $+$, если у сомножителей одинаковые знаки, и взять его со знакомъ $-$, если у сомножителей разные знаки.

§ 46. Если надо перемножить болѣе чѣмъ два сомножителей, то знакъ и абсолютная величина произведенія могутъ быть найдены перемноженіемъ сначала первыхъ двухъ сомножителей, потомъ перемноженіемъ полученнаго произведенія и 3-го сомножителя, затѣмъ перемноженіемъ полученнаго произведенія и 4-го сомножителя и т. д., или же по слѣдующему правилу:

Чтобы найти произведеніе болѣе чѣмъ двухъ множителей, надо перемножить абсолютныя величины всѣхъ сомножителей и взять это произведеніе со знакомъ $+$, если всѣ сомножители положительны, или отрицатель-

ныхъ сомножителей четное число, и взять это произведеніе со знакомъ —, если отрицательныхъ сомножителей нечетное число.

Напр. $(+3).(+2).(+5) = +30.$

$$(-3).(+2).(-5) = +30.$$

$$(-3).(-2).(-5).(+4) = -120.$$

$$(-5).(+2).(+3).(+4) = -120.$$

$$(+a).(-b).(-b).(-c) = -ab^2c.$$

ДѢЛЕНІЕ.

§ 47. Опредѣленіе. **Раздѣлить одно количество на другое значитъ по данному произведенію и одному изъ сомножителей найти другой сомножитель.**

При дѣленіи алгебраическихъ количествъ могутъ быть четыре случая:

1) положительное количество раздѣлить на положительное количество:

$$(+a):(+b).$$

2) положительное количество раздѣлить на отрицательное количество:

$$(+a):(-b).$$

3) отрицательное количествъ раздѣлить на положительное количество:

$$(-a):(+b)$$

и 4) отрицательное количество раздѣлить на отрицательное количество:

$$(-a).(-b).$$

§ 48. 1-й случай. $(+a):(+b)$.

Если искомое частное назовемъ черезъ x

$$+a):(+b) = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

то на основаніи опредѣленія дѣйствія дѣленія заключаемъ, что частное, будучи умножено на дѣлителя, должно равняться дѣлимому, т. е.

$$x \cdot (+b) = +a.$$

Произведеніе двухъ сомножителей можетъ быть положительнымъ только тогда, когда оба сомножителя одного знака, и такъ какъ данный сомножитель $(+b)$ имѣетъ знакъ $+$, слѣдовательно и сомножитель x долженъ имѣть знакъ $+$.

Абсолютная величина x, только будучи умножена на абсолютную величину b, равняется абсолютной величинѣ a, слѣдовательно само по себѣ x, до умноженія на b, менѣе, чѣмъ a, въ b разъ, т. е. абсолютная величина x равна $\frac{a}{b}$. Итакъ, искомое частное x должно имѣть знакъ $+$ и абсолютную величину $\frac{a}{b}$, т. е. $x = +\frac{a}{b}$, слѣдовательно

$$(+a) : (+b) = +\frac{a}{b}.$$

При помощи подобныхъ же разсужденій найдемъ, что

$$(+a) : (-b) = -\frac{a}{b}$$

$$(-a) : (+b) = -\frac{a}{b}$$

$$(-a) : (-b) = +\frac{a}{b}$$

Если къ этимъ формуламъ присоединимъ и первую

$$(+a) : (+b) = +\frac{a}{b},$$

то, разсматривая всѣ четыре формулы, увидимъ, что 1) частное имѣетъ знакъ $+$, когда дѣлимое и дѣлитель имѣютъ одинаковые знаки; 2) частное имѣетъ знакъ $-$, когда у дѣлимаго и дѣлителя разные знаки и 3) абсолютная величина частнаго во всѣхъ сучаяхъ равна абсолютной величинѣ дѣлимаго, раздѣленной на абсолютную величину дѣлителя. Отсюда правило:

Чтобы раздѣлить одно количество на другое, надо абсолютную величину дѣлимаго раздѣлить на абсолютную величину дѣлителя и взять это частное число со знакомъ $+$, если у дѣлимаго и дѣлителя одинаковые знаки, и взять его со знакомъ $-$, если у дѣлимаго и у дѣлителя разные знаки.

Напр. $(-15):(+3)=-5$

$$24:(-3)=-8$$

$$-12:(-5)=+2{,}4.$$

Примѣры вычисленій.

§ 49. 1) $$\frac{[(+5)+(-10)+(-7))]:[(-4).(-2)]}{[(-8)-(-7)]\times[(+16):(-4)]}=$$
$$=-\frac{3}{8}.$$

Рѣшеніе. $(+5)+(-10)+(-7)=(+5)+$
$$+(-17)=-12;$$
$$(-4).(-2)=+8;(-12):(+8)=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2};$$
$$(-8)-(-7)=(-8)+(+7)=-1;$$
$$(+16):(-4)=-4;(-1)\times(-4)=+4.$$
$$\left(-\frac{3}{2}\right):(+4)=-\frac{3}{8}.$$

2) $$\frac{[(-10):(-5)+(+12)\times(-3)-(-4)\times(-2)]:(-3}{\{[(-8)-(-6)+(-4)]:(-2)-[(-3).(+5)]\}(-1^5/_9)}.$$

Рѣшеніе. $(-10):(-5)=+2;(+12).(-3)=$
$$=-36;(-4).(-2)=+8;$$

$$(+2)+(-36)-(+8)=(+2)+(-36)+$$
$$+(-8)=-42;$$
$$(-42):(-3)=+14.$$
$$(-8)-(-6)+(-4)=(-8)+(+6)+(-4)+$$
$$+(-4)=-6;$$
$$(-6):(-2)=+3;\ (-3).(+5)=-15;$$
$$(+3)-(-15)=(+3)+(+15)=+18;$$
$$(+18).\left(-1\tfrac{5}{9}\right)=-\frac{18.14}{9}=-28;$$
$$(+14):(-28)=-\tfrac{1}{2}.$$

§ **50**. Введеніемъ отрицательныхъ количествъ алгебра, между прочимъ, даетъ ясный смыслъ вычитанію большаго числа изъ однороднаго меньшаго, что въ ариѳметикѣ не имѣтъ смысла и не допускается.

Напр. 5 — 7 представляетъ вычитаніе въ ариѳметикѣ невозможное, въ алгебрѣ же числа 5 и 7 разсматриваются, какъ положительныя (такъ какъ передъ ними нѣтъ знака, знакъ же между ними есть знакъ вычитанія) и вычитаніе выполняется такъ:

$$5-7=(+5)-(+7)=(+5)+(-7)=-2.$$

Алгебраическій смыслъ этого дѣйствія слѣдующій: если при вычитаніи двухъ одинаковыхъ количествъ вычитаемое болѣе уменьшаемаго, то разность есть количество противоположное даннымъ.

§ **51**. Положительный знакъ можно опускать (§ 28) и выполнить дѣйствіе надъ абсолютными величинами. Напр.

1) $a+(+b)=a+b$

2) $a-(+b)=a-b,$

т. е. 1) прибавить положительное количество значитъ прибавить его абсолютную величину;

2) отнять положительное количество значитъ отнять его абсолютную величину.

Такъ какъ по § 38

$$a-(+b)=a+(-b),$$

то справедливо и обратное заключенiе, а именно

$$a+(-b)=a-(+b).$$

Опуствивъ же знакъ $+$ у положительнаго количества $(+b)$, получимъ:

$$a+(-b)=a-b.$$

т. е. 3) прибавить отрицательное количество значитъ вычесть его абсолютную величину.

Такъ какъ по § 38

$$a-(-b)=a+(+b),$$

то, опуствивъ знакъ $+$ у количества $(+b)$, получимъ:

$$a-(-b)=a+b,$$

т. е. 4) отнять отрицательное количество значитъ прибавить его абсолютную величину.

§ **52.** Разсматривая вышеприведенные четыре случая:

$$a+(+b)=a+b$$
$$a-(+b)=a-b$$
$$a+(-b)=a-b$$
$$a-(-b)=a+b$$

выводимъ правило: **Знакъ дѣйствія (сложенія или вычитанія) и знакъ количества, стоящіе рядомъ, можно замѣнить однимъ знакомъ, а именно знакомъ $+$** (плюсъ), **когда оба знака одинаковы, и знакомъ $-$** (минусъ), **когда знаки разные.**

§ **53.** Справедливо, конечно, и обратное преобразованіе, т. е. одинъ знакъ передъ количествомъ можно замѣнить двумя, а именно:

Знакъ $+$ (плюсъ) **можно замѣнить двумя одинаковыми знаками, а знакъ $-$** (минусъ) **двумя разными.**

$$a + b = a + (+b) = a - (-b).$$
$$a - b = a + (-b) = a - (+b).$$

§ **54.** Изъ предыдущаго легко понять, что, если передъ количествомъ стоитъ только одинъ знакъ, то его можно считать и знакомъ дѣйствія, и знакомъ количества.

1) Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, напр.,

$$+a.$$

Считая этотъ $+$ знакомъ дѣйствія, мы имѣемъ право подразумѣвать при абсолютной величинѣ a знакъ количества $+$, такъ какъ $+a = +(+a)$;
считая же этотъ знакъ $+$ знакомъ количества, мы имѣемъ право подразумѣвать знакъ дѣйствія $+$, потому что

$$+a = +(+a).$$

2) Возьмемъ теперь

$$-a.$$

Считая этотъ минусъ ($-$) знакомъ дѣйствія, мы имѣемъ право подразумѣвать при абсолютной величинѣ a знакъ количества $+$, такъ какъ

$$-a = -(+a);$$

считая же этотъ $-$ знакомъ количества, мы имѣемъ право подразумѣвать знакъ дѣйствія $+$, такъ какъ

$$-a = +(-a).$$

Отсюда слѣдуетъ:

1) каждый многочленъ можно считать **суммою**, несмотря на то, что нѣкоторые его члены имѣютъ передъ собою знакъ вычитанія. Въ самомъ дѣлѣ, эти отрицательные знаки можно разсматривать, какъ знаки количествъ, и впереди ихъ подразумѣвать знаки *плюсъ*, какъ знаки дѣйствій, соединяющіе одночлены въ одинъ многочленъ. Напр.

$$3a^2b - 5ab^2 - 4b^3 = 3a^2b + (-5ab^2) + (-4b^3).$$

На этомъ основаніи каждый многочленъ, независимо отъ знаковъ при его членахъ, называется **алгебраическою суммою.**

Очевидно, алгебраическая сумма отличается отъ ариѳметической суммы тѣмъ, что въ первой нѣкоторыя слагаемыя могутъ быть отрицательными, между тѣмъ какъ во второй всѣ слагаемыя всегда положительны.

2) Знаки сложенія и вычитанія, соединяющіе одночлены въ многочленъ, можно разсматривать, какъ знаки количествъ, и на этомъ основаніи считать тѣ члены, передъ которыми знакъ $+$, положительными, а тѣ, передъ которыми знакъ $-$, отрицательными. Такъ въ многочленѣ

$$-3x + 2x^2 - 7x^3 + 4x^4 - 8x^5$$

члены: $3x$, $7x^3$, $8x^5$ отрицательны,
а члены: $2x^2$ и $4x^4$ положительны.

ГЛАВА 3-я.

Приведеніе многочлена.

§ **55**. Опредѣленіе. **Подобными членами называются такіе, которые равны или отличаются только коэффиціентами.**

Напр. $5a^2b, -3a^2b, +8a^2b$ подобны.

Примѣчаніе. Подобны также и одночлены $4x^3y$ и $-2yx^3$, потому что буквенныя выраженія ихъ равны и различают я эти члены только коэффиціентами.

§ **56.** Опредѣленіе. **Приведеніемъ многочлена называется соединеніе подобныхъ членовъ его въ одинъ членъ.**

§ **57. Примѣры.** На основаніи § 34

1) $3am + 4am + 2am = 9am.$
2) $-4ax^3 - 7ax^3 - 5ax^3 - 2ax^3 = -18ax^3.$
3) $-6c^2 + 2xy - 5c^2 - 10c^2 + 8xy = -21c^2 + 10xy.$

Если подобные члены имѣютъ одинаковые знаки, то надо сложить абсолюныя величины ихъ коэффиціентовъ, передъ этою суммою поставить ихъ общій знакъ и приписать общее буквенное выраженіе.

§ **58. Примѣры.** На основаніи § 35

1) $17a^3c - 8a^3c = (+17a^3c) + (-8a^3c) = +9a^3c.$

2) $-9a^2y^5z+4a^2y^5z=(-9a^2y^5z)+(+4a^2y^5z)=$
$=-5a^2y^5z.$

3) $4a^5d-7a^3d^2+5a^3d^2=4a^5d-2a^3d^2.$

Если два подобныхъ члена имѣютъ разные знани, то надо изъ абсолютно-большаго коэффиціента вычесть абсолютно-меньшій коэффиціентъ передъ этою разностью поставить знакъ абсолютно-большаго коэффиціента и приписать буквенное выраженіе.

§ **59.** **Примѣры.** На основаніи § 36

1) $-8a^2+5a^2+9a^2-4a^2-7a^2=-19a^2+$
$+14a^2=-5a^2.$

2) $4m^3a-10m^3a-3m^3a-7m^3a+16m^3a=$
$=20m^3a-20m^3a=0.$

Если въ многочленѣ болѣе, чѣмъ два подобныхъ члена съ разными знаками, то надо сначала найти сумму всѣхъ положительныхъ членовъ, потомъ сумму всѣхъ отрицательныхъ членовъ и наконецъ сумму этихъ двухъ суммъ.

Сложеніе одночленовъ.

§ **60.** Требуется сложить одночлены:

$$5ab^3,\quad -3a^2b^2,\quad 7a^2b^2,\quad -4ab^3,\quad 8ab^3.$$

Соединивъ эти одночлены знакомъ дѣйствія сложенія, получимъ:

$$(+5ab^3)+(-3a^2b^2)+(+7a^2b^2)+(-4ab^3)+$$
$$+(+8ab^3).$$

Замѣнивъ, на основаніи § 52, два знака однимъ, получимъ:

$$5ab^3 - 3a^2b^2 + 7a^2b^2 - 4ab^3 + 8ab^3 = 9ab^3 + 4a^2b^2.$$

Чтобы сложить одночлены, надо писать ихъ одинъ за другимъ, сохраняя передъ каждымъ его знакъ, и въ полученномъ многочленѣ сдѣлать, если можно, приведеніе.

Вычитаніе одночленовъ.

§ **61**. Требуется изъ одночлена $6a^3x^3$ вычесть слѣдующіе одночлены:

$$3a^2x, -2a^3x^3, -4a^2x, -8a^3x^3, \quad 5a^2x.$$

Обозначивъ знаками требуемое вычитаніе:

$$6a^3x^3 - (+3a^2x) - (-2a^3x^3) - (-4a^2x) -$$
$$-(-8a^3x^3) - (+5a^2x).$$

Замѣнивъ, на основаніи § 52, два знака однимъ, получимъ:

$$6a^3x^3 - 3a^2x + 2a^3x^3 + 4a^2x + 8a^3x^3 - 5a^2x =$$
$$= 16a^3x^3 - 4a^2x.$$

Чтобы вычесть одночлены, надо къ уменьшаемому приписать каждый вычитаемый одночленъ съ противоположнымъ знакомъ, и въ полученномъ многочленѣ сдѣлать, если можно, приведеніе.

Сложеніе многочленовъ.

§ **62**. **Чтобы прибавить многочленъ; надо къ первому слагаемому приписать всѣ члены прибавляемаго**

многочлена съ ихъ знаками, и въ полученномъ многочленѣ сдѣлать, если можно, приведеніе.

Требуется доказать, что

$$M+(a-b+c)=M+a-b+c.$$

Мы знаемъ, что сумма не измѣниться, если къ одному слагаемому прибавить, а отъ другого слагаемаго отнять одно и то же число. На этомъ основаніи, къ первому слагаемому прибавимъ a, а отъ другого отнимемъ a, тогда получимъ:

$$M+(a-b+c)=(M+a)+(a-b+c-a).$$

Такъ какъ въ многочленѣ $(a-b+c-a)$, по правилу приведенія, a и $-a$ сокращаются, то

$$(M+a)+(a-b+c-a)=(M+a)+(-b+c).$$

Эта новая сумма также не измѣнится, если отъ перваго слагаемаго отнимемъ b, а ко второму прибавимъ b, а потому

$$(M+a)+(-b+c)=(M+a-b)+(-b+c+ \\ +b).$$

Во второмъ слагаемомъ многочленъ сокращаются $-b$ и $+b$, слѣд.

$$(M+a-b)+(-b+c+b)=(M+a-b)+(+c).$$

Прибавивъ наконецъ одночленъ $+c$ по правилу сложенія одночленовъ, получимъ:

$$(M+a-b)+(+c)=M+a-b+c.$$

Итакъ $M+(a-b+c)=M+a-b+c$, что и требовалось доказать.

[Первое слагаемое M можетъ быть и одночленомъ и многочленомъ].

Напр. 1) $(4x^3 - 5x^2 + 7x) + (-3x^3 + 3x^2 + 4x - 8) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 3x^3 + 3x^2 + 4x - 8 = x^3 - 2x^2 + 11x - 8.$

2) $(7ab^2 + 4a^2b - 10a^3) + (ab^2 - 4a^2b + 10a^3) = 7ab^2 + 4a^2b - 10a^3 + ab^2 - 4a^2b + 10a^3 = 8ab^2.$

Вычитаніе многочленовъ.

§ **63**. **Чтобы вычесть многочленъ, надо къ уменьшаемому приписать всѣ члены вычитаемаго съ противоположными знаками, и въ полученномъ многочленѣ сдѣлать, если можно, приведеніе.**

Требуется доказать, что

$$M - (a - b + c) = M - a + b - c.$$

Мы знаемъ, что разность не измѣнится, если и къ уменьшаемому и къ вычитаемому прибавить по-ровну, или отъ обоихъ отнять по-ровну. Поэтому, отнявъ отъ уменьшаемаго и вычитаемаго по a, будемъ имѣть:

$$M - (a - b + c) = (M - a) - (a - b + c - a).$$

Въ вычитаемомъ многочленѣ члены a и $-a$ сокращаются, а потому

$$(M - a) - (a - b + c - a) = (M - a) - (-b + c).$$

Теперь прибавимъ къ уменьшаемому и вычитаемому по b, тогда будемъ имѣть:

$$(M - a) - (-b + c) = (M - a + b) - (-b + c + b)$$

Въ вычитаемомъ многочленѣ сокращаются члены $-b$ и $+b$, а потому

$$(M-a+b)-(-b+c+b)=(M-a+b)-(+c).$$

Вычтя, наконецъ, одночленъ $(+c)$ по правилу вычитанія одночленовъ, получимъ:

$$(M-a+b)-(+c)=M-a+b-c.$$

$$\text{Итакъ } M-(a-b+c)=M-a+b-c.$$

[Уменьшаемое M можетъ быть и одночленомъ и многочленомъ].

Напр. 1) $(4m^5x-6m^4x)-(m^5x+2m^4x^2-7m^3x^3)=$

$$=4m^5x-6m^4x^2-m^5x-2m^4x^2+7m^3x^3=$$

$$=3m^5x-8m^4x^2+7m^3x^3.$$

2) $(10xy^3+8x^2y^2-5x^3y-3x^4)-(4xy^3-3x^2y^2-$

$$-5x^3y+x^4)=10xy^3+8x^2y^2-5x^3y-3x^4-4xy^3+$$

$$+3x^2y^2+5x^3y-x^4=6xy^3+11x^2y^2-4x^4.$$

§ **64.** При сложеніи и вычитаніи многочленовъ отдѣльные ихъ члены соединяются въ одинъ многочленъ, причемъ скобки, въ которыя многочлены были включены, опускаются, слѣдовательно:

1) прибавленіе многочлена равносильно уничтоженію (раскрытію) скобокъ, передъ которыми стоитъ знакъ плюсъ;

2) вычитаніе многочлена равносильно уничтоженію (раскрытію) скобокъ, передъ которыми стоитъ знакъ минусъ. Отсюда:

§ 65. Чтобы многочленъ, или нѣсколько изъ его членовъ заключить въ скобки, передъ которыми поставленъ знакъ плюсъ (+), надо всѣ члены внутри скобокъ брать съ тѣми же знаками, какіе у нихъ были до заключенія въ скобки.

Чтобы многочленъ, или нѣсколько изъ его членовъ заключить въ скобки, передъ которыми поставленъ знакъ минусъ (—), надо всѣ члены внутри скобокъ брать со знаками противоположными тѣмъ, какіе у нихъ были до заключенія въ скобки.

Напр. $a+b-c-d=(a+b)+(-c-d)$,

$$a+b-c-d=a-(-b+c)-d,$$

$$a+b-c-d=-(-a-b+c+d),$$

$$a+b-c-d=(a+b-c)-d.$$

§ **66**. При раскрытіи скобокъ въ выраженіяхъ, заключающихъ скобки внутри другихъ скобокъ, пользуются двумя пріемами:

1) раскрываютъ послѣдовательно скобки за скобками, начиная съ внутреннихъ (малыхъ) скобокъ;

2) раскрываютъ послѣдовательно скобки за скобками, начиная съ наружныхъ скобокъ.

Напр.

1) $$-\left\{2a^3+4a^2b+\left[-5a^2b-(10a^3+6a^2b-2ab^2)\right]\right\}=$$

$$=-\left\{2a^3+4a^2b+\left[-5a^2b-10a^3-6a^2b+2ab^2\right]\right\}=$$

$$=-\left\{2a^3+4a^2b-5a^2b-10a^3-6a^2b+2ab^2\right\}=$$

$$=-2a^3-4a^2b+5a^2b+10a^3+6a^2b-2ab^2=$$

$$=8a^3+7a^2b-2ab^2.$$

$$2)\ 3x - \{2y + [-x + 3y - (4x - y)] - 5x\} =$$
$$= 3x - 2y - [-x + 3y - (4x - y)] + 5x =$$
$$= 3x - 2y + x - 3y + (4x - y) + 5x =$$
$$= 3x - 2y + x - 3y + 4x - y + 5x = 13x - 6y.$$

§ 67. Для большаго удобства приведенія подобныхъ членовъ въ суммѣ и разности многочленовъ условились подобные члены писать одинъ подъ другимъ и, проведя подъ ними черту, писать подъ нею результатъ приведенія полученной суммы или разности.

$$1)\ (3a^4 - 5a^3b - 4a^2b^2) + (4a^3b + 7a^2b^2 - 8ab^3) +$$
$$+ (10a^4 - 6a^3b - 4ab^3 + 5b^4).$$

$$\begin{array}{rrrrr}
3a^4 & -\ 5a^2b & -\ 4a^2b^2 & & \\
 & +\ 4a^3b & +\ 7a^2b^2 & -\ 8ab^3 & \\
+\ 10a^4 & -\ 6a^3b & & -\ 4ab^3 & +\ 5b^4 \\
\hline
13a^4 & -\ 7a^3b & +\ 3a^2b^2 & -\ 12ab^3 & +\ 5b^4.
\end{array}$$

$$2)\ (6x^5y + 3x^4y^2 - 10x^3y^3) - (2x^5y - 10x^3y^3 - 2x^2y^4)$$

$$\begin{array}{rrrr}
6x^5y & +\ 3x^4y^2 & -\ 10x^3y^3 & \\
-\ 2x^5y & & +\ 10x^3y^3 & +\ 2x^2y^4 \\
\hline
4x^5y & +\ 3x^4y^2 & & +\ 2x^2y^4
\end{array}$$

$$3)\ (5am^3 - 2a^2m^2 - 6a^3m + 3a^4) + (2a^2m^2 - 3a^3m +$$
$$+ 4a^4) - (8am^3 - 7a^2m^2 - 5a^3m - 2a^4).$$

$$\begin{array}{rrrr}
5am^3 & -\ 2a^2m^2 & -\ 6a^3m & +\ 3a^4 \\
 & +\ 2a^2m^2 & -\ 3a^3m & +\ 4a^4 \\
-\ 8am^3 & +\ 7a^2m^2 & +\ 5a^3m & +\ 2a^4 \\
\hline
-\ 3am^3 & +\ 7a^2m^2 & -\ 4a^3m & +\ 9a^4
\end{array}$$

Умноженіе одночленовъ.

§ **68**. Правило о знакѣ произведенія выведено уже раньше (см. § 45).

§ **69**. **При умноженіи степеней одного и того же основанія показатели ихъ складываются.**

Требуется доказать, что

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Доказательство: $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \, . \; . \; . \; . \; .$ m разъ

$^n = a \cdot a \cdot a \cdot \, . \; . \; . \; . \; .$ n разъ

Если равныя величины умножимъ на равныя, то и произведенія получимъ равныя:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \,.\;.\;.\;.}_{m \text{ разъ}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \,.\;.\;.\;.}_{n \text{ разъ}}$$

Правая часть этого равенства представляетъ произведеніе равныхъ множителей или степень, а потому можетъ быть изображена сокращенно при помощи показателя степени $(m+n)$, такъ какъ множитель a въ этой степени повторяется $(m+n)$ разъ, т. е.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Что и требовалось доказать.

Напр. $a^3 \cdot a^4 = a^7$; $b^5 \cdot b = b^6$; $x^n \cdot x^3 = x^{n+3}$;

$$y^{2n} \cdot y^n = y^{3n};\; c^{2n+1} \cdot c^{n+5} = c^{3n+6};$$

$$a^{m+2p-3} \cdot a^{p-2m-4} = a^{m+2p-3+p-2m-4} =$$

$$= a^{3p-m-7}.$$

§ **70. Слѣдствіе.** Степень, показатель которой есть сумма, можно представить въ видѣ произведенія нѣсколькихъ степеней одного основанія. Напр.

$$a^{m+1} = a^m \cdot a$$

$$b^{2n+3} = b^{2n} \cdot b^3$$

$$c^{4n+p+2} = c^{4n} \cdot c^p \cdot c^2$$

На томъ же основаніи $a^5 = a^3 . a^2 = a^4 . a$ и тому под.

§ **71. Чтобы умножить одночленъ на одночленъ, надо перемножить ихъ коэффиціенты, соблюдая при этомъ правило знака, показатели одинаковыхъ буквъ сложить, а различные буквенные множители написать безъ измѣненія.**

Требуется $-3a^2b^5cx$ умножить на $4a^3bx^2y$.

Поставивъ рядомъ множители того и другого одночлена, мы, очевидно, составимъ изъ нихъ искомое произведеніе, причемъ знакъ произведенія будетъ отрицательнымъ, такъ какъ перемножаемые одночлены имѣютъ разные знаки.

$$-3a^2b^5cx \cdot 4a^3bx^2y = -3 \cdot 4a^2a^3b^5bcxx^2y =$$
$$= -12a^5b^6cx^3y.$$

§ **72.** При перемноженіи болѣе, чѣмъ двухъ, одночленовъ поступаютъ по этому же правилу, при чемъ знакъ произведенія пишутъ по правилу § 46.

Слѣдствіе 1. Если въ произведеніи нѣсколькихъ сомножителей измѣнимъ на противоположный знакъ у одного изъ сомножителей, то измѣнится и знакъ всего произведенія.

Слѣдствіе 2. Если въ произведеніи нѣсколькихъ сомножителей измѣнимъ на противоположные знаки у двухъ, или учетнаго числа, его сомножителей, то у произведенія знакъ не измѣнится.

Умноженіе многочленовъ.

§ **73**. Слѣдуетъ разсматривать три случая:

1) умноженіе многочлена на одночленъ,

2) „ одочлена на многочленъ и

3) „ многочлена на многочленъ.

§ **74**. **Чтобы умножить многочленъ на одночленъ, надо каждый членъ многочлена умножить на одночленъ.**

Требуется доказать, что равенство $(a-b+c)\ m=$ $=am-bm+cm$ справедливо при всякомъ численномъ значеніи m.

Случай 1-й. m равно цѣлому и положительному числу.

Искомое произведеніе должно быть составлено изъ множимаго, повтореннаго слагаемымъ m разъ такъ, какъ множитель составленъ изъ m единицъ. Слѣд.

$$(a-b+c)\cdot m=(a-b+c)+(a-b+c)+$$
$$+(a-b+c)+\ldots(a-b+c)\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ (m\ \text{разъ}).$$

Раскрывъ скобки, будемъ имѣть:

$$(a-b+c)\cdot m=a-b+c+a-b+c+$$
$$+a-b+c+\ldots a-b+c\ \ .\ \ .\ \ .\ (m\ \text{разъ}).$$

Очевидно, въ правой части этого равенства члены a, $-b$, $+c$ повторяются каждый по m разъ, слѣдовательно

$$(a-b+c)\cdot m=\underbrace{a+a+\ldots.}_{m \text{ разъ}}\underbrace{-b-b-b\ldots.}_{m \text{ разъ}}+$$
$$+\underbrace{c+c+c\ldots.}_{m \text{ разъ}}$$

Но такъ какъ сумму равныхъ слагаемыхъ можно упростить при помощи коэффиціента (§ 16), то

$$(a-b+c)\cdot m=ma-mb+mc\,.$$

2-й случай. m равно дроби вида $\frac{1}{n}$, гдѣ n цѣлое и положительное число. Доказываемое равенство принимаетъ видъ $(a-b+c)\cdot\frac{1}{n}=a\cdot\frac{1}{n}-b\cdot\frac{1}{n}+c\cdot\frac{1}{n}$.

Умноживъ правую часть равенства на цѣлое число n, получимъ многочленъ $a-b+c$:

$$\left(a\cdot\frac{1}{n}-b\cdot\frac{1}{n}+c\cdot\frac{1}{n}\right)n=\left(a\cdot\frac{n}{n}-b\cdot\frac{n}{n}+\right.$$
$$\left.+c\cdot\frac{n}{n}\right)=a-b+c.$$

Слѣдовательно многочленъ $\left(a\cdot\frac{1}{n}-b\cdot\frac{1}{n}+c\cdot\frac{1}{n}\right)$ есть $\frac{1}{n}$ часть многочлена $(a-b+c)$, а потому

$$(a-b+c)\cdot\frac{1}{n}=a\cdot\frac{1}{n}-b\cdot\frac{1}{n}+c\cdot\frac{1}{n}\,.$$

3-й случай. m равно положительной дроби вида $\frac{p}{q}$

Требуется доказать, что

$$(a-b+c)\cdot\frac{p}{q}=a\cdot\frac{p}{q}-b\cdot\frac{p}{q}+c\cdot\frac{p}{q}\,.$$

Представляя $\frac{p}{q}$ въ видѣ произведенія $p\cdot\frac{1}{q}$ и примѣняя послѣдовательно выведенныя правила умноженія на p и на $\frac{1}{q}$, находимъ, что

$$(a-b+c)\cdot\frac{p}{q}=(a-b+c)\cdot p\cdot\frac{1}{q}=$$

$$=(ap-bp+cp)\cdot\frac{1}{q}=a\cdot\frac{p}{q}-b\cdot\frac{p}{q}+c\cdot\frac{p}{q}\,.$$

4-й случай. m равно отрицательному числу.

Требуется доказать, что

$$(a-b+c)\cdot(\quad r)=a\,.(-r)-b\,.(-r)+c\,.(-r)$$

Умножить на $(-r)$ значитъ множимое, взятое съ обратнымъ знакомъ, умножить на r; слѣдовательно

$$(a-b+c)\cdot(-r)=[-(a-b+c)\cdot\ ]\,.\,r=$$

$$=(-a+b-c)\cdot r=$$

$$=-ar+br-cr=a\cdot(-r)-b\cdot(-r)+c(-r),$$

такъ какъ $-ar=a\cdot(-r)$, $+br=-(-br)=$

$$=-b\cdot(-r)\text{ и }-cr=c\cdot(-r).$$

Примѣры:

1) $(3a^2x+5ax^2-4x^3)\cdot 2a^2x^2=6a^4x^3+10a^3x^4-8a^2x^5.$

2) $(4{,}5m^3y^2-3{,}2m^5yz)\cdot -1{,}2my^3z^2=$

$$=-5{,}4m^4y^5z^2+3{,}84m^6y^4z^3\,.$$

§ 75. Чтобы умножить одночленъ на многочленъ, надо одночленъ умножить на каждый членъ многочлена.

Требуется доказать, что

$$m \cdot (a - b + c) = ma - mb + mc.$$

Доказательство. Такъ какъ величина произведенія не мѣняется отъ перестановки множимаго на мѣсто множителя,

то $$m \cdot (a - b + c) = (a - b + c) \cdot m,$$

но $(a - b + c) \cdot m = ma - mb + mc$, слѣдовательно

$$m (a - b + c) = ma - mb + mc.$$

Напр. $$\frac{3}{5} ax^3z \cdot (10a^2x + 2a^3z - 5x^2z^2) = 6a^3x^4z + \\ + \frac{6}{5} a^4x^3z^2 - 3ax^5z^3.$$

§ 76. Чтобы умножить многочленъ на многочленъ, надо каждый членъ перваго многочлена умножить на каждый членъ второго многочлена.

Требуется доказать, что

$$(a - b + c) \cdot (m - n - p) = am - bm + cm - an + bn - \\ - cn - ap + bp - cp.$$

Для доказательства обозначимъ первый многочленъ $(a - b + c)$ буквою K, тогда будемъ имѣть:

$$(a - b + c) \cdot (m - n - p) = K \cdot (m - n - p) = \\ = Km - Kn - Kp.$$

Расположимъ множимое и множитель по нисходящимъ степенямъ буквы x и напишемъ одно подъ другимъ:

$$
\begin{array}{llllll}
5ax^3 & -\,4a^2x^2 & -\,3a^3x & +\,a^4 & & \\
 & 2a^2x^2 & -\,4a^3x & +\,3a^4 & & \\
\hline
10a^3x^5 & -\,8a^4x^4 & -\,6a^5x^3 & +\,2a^6x^2 & & \\
 & -\,20a^4x^4 & +\,16a^5x^3 & +\,12a^6x^2 & -\,4a^7x & \\
 & & +\,15a^5x^3 & -\,12a^6x^2 & -\,9a^7x & +\,3a^8 \\
\hline
10a^3x^5 & -\,28a^4x^4 & +\,25a^5x^3 & +\,2a^6x^2 & -\,13a^7x & +\,3a^8.
\end{array}
$$

§ **80.** Членъ произведенія $10a^3x^5$ называется **старшимъ членомъ произведенія** и получается, очевидно, отъ умноженія старшаго члена множимаго на старшій членъ множителя; членъ $3a^8$ называется **младшимъ членомъ произведенія** и получается отъ перемноженія младшихъ членовъ множимаго и множителя.

Показатель главной буквы въ старшемъ членѣ произведенія равенъ суммѣ наибольшихъ, а показатель той же буквы въ младшемъ членѣ равенъ суммѣ наименьшихъ показателей главной буквы въ перемноженныхъ многочленахъ. Показатели въ промежуточныхъ членахъ произведенія не могутъ равняться ни показателю старшаго члена, ни показателю младшаго члена, слѣдовательно эти послѣдніе два члена никогда не имѣютъ подобныхъ.

О числѣ членовъ произведенія двухъ многочленовъ.

§ **81.** Такъ какъ при умноженіи многочленовъ каждый членъ множимаго умножается на **каждый** членъ множителя, то **наибольшее число членовъ произведенія (до приведенія)**

равно числу членовъ множимаго, умноженному на число членовъ множителя.

§ 82. Такъ какъ только два члена произведенія, старшій и младшій, никогда не имѣютъ подобныхъ и не могутъ поэтому сократиться, между тѣмъ какъ прочіе члены произведенія могутъ при приведеніи сократиться, то **наименьшее число членовъ произведенія многочленовъ равно двумъ.**

Напр.

$$\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3 \\
x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 \\
\hline
x^6 - 2x^5y + 2x^4y^2 - x^3y^3 \\
\quad + 2x^5y - 4x^4y^2 + 4x^3y^3 - 2x^2y^4 \\
\qquad + 2x^4y^2 - 4x^3y^3 + 4x^2y^4 - 2xy^5 \\
\qquad\quad + x^3y^3 - 2x^2y^5 + 2xy^5 - y^6 \\
\hline
x^6 - y^6
\end{array}$$

Квадратъ и кубъ суммы и разности; разность квадратовъ.

§ 83. При помощи умноженія многочленовъ можно убѣдиться въ справедливости нѣкоторыхъ формулъ.

Квадратъ суммы двухъ членовъ равняется квадрату перваго члена, плюсъ удвоенное произведеніе перваго члена на второй, плюсъ квадратъ второго члена.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи § 10

$$(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=A^2+AB+AB+B^2=$$
$$=A^2+2AB+B^2.$$

Напр. 1) $(2a^2b + 3xy^3)^2 = 4a^4b^2 + 12a^2bxy^3 + 9x^2y^6$

2) $(7a^3x + 5ax^2)^2 = 49a^6x^2 + 70a^4x^3 + 25a^2x^4$.

Примѣчаніе. Чтобы написать квадратъ какого-нибудь члена, надо его умножить на самого себя, а для этого надо умножить на самого себя только коэффиціентъ, а показателя каждой буквы умножить на 2.

§ 84. **Квадратъ разности двухъ членовъ равняется квадрату перваго члена, минусъ удвоенное произведеніе перваго члена на второй, плюсъ квадратъ второго члена.**

$$(A - B)^2 = (A - B) \cdot (A - B) = A^2 - AB - AB + B^2 =$$
$$= A^2 - 2AB + B^2.$$

Напр. 1) $(4mc^5 - 6a^2b)^2 = 16m^2c^{10} - 48mc^5a^2b + 36a^4b^2$.

2) $\left(2a^4x^3 - \frac{3}{4}a^3x^2\right)^2 = 4a^8x^6 - 3a^7x^5 + \frac{9}{16}a^6x^4$.

§ 85. **Произведеніе суммы двухъ членовъ на разность тѣхъ же членовъ равняется разности квадратовъ этихъ членовъ.**

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2.$$

Напр. 1) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b) = 25a^2 - 9b^2$.

2) $(8a^3b + 7ab^5) \cdot (8a^3b - 7ab^5) = 64a^6b^2 - 49a^2b^{10}$.

§ 86. **Кубъ суммы двухъ членовъ равняется кубу перваго члена, плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй, плюсъ утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ второго, плюсъ кубъ второго члена.**

$$(A+B)^3=(A+B)\cdot(A+B)\cdot(A+B),$$

но $\quad (A+B)\cdot(A+B)=A^2+2AB+B^2,$

слѣдовательно

$$(A+B)^3=(A^2+2AB+B^2)\cdot(A+B)=A^3+2A^2B+$$
$$+AB^2+A^2B+2AB^2+B^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3.$$

Примѣчаніе. Чтобы написать кубъ какого-нибудь члена, надо его повторить сомножителемъ три раза, а для этого надо только коэффиціентъ повторить сомножителемъ три раза, а показатель каждой буквы умножить на 3.

Напр. 1) $(2a^2b+5ab^2)^3=(2a^2b)^3+3\cdot(2a^2b)^2\cdot 5ab^2+$
$$+3\cdot(2a^2b)\cdot(5ab^2)^2+(5ab^2)^3=8a^6b^3+3\cdot 4a^4b^2\cdot 5ab^2+$$
$$+3\cdot 2a^2b\cdot 25a^2b^4+125a^3b^6=8a^6b^3+60a^5b^4+$$
$$+150a^4b^5+125a^3b^6$$

2) $(4xy^4+2ax^2)^3=64x^3y^{12}+96ax^4y^8+$
$$+48a^2x^3y^4+8a^3x^6.$$

§ 87. **Кубъ разности двухъ членовъ равняется кубу перваго члена минусъ, утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй, плюсъ утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ второго, минусъ кубъ второго члена.**

$$(A-B)^3=(A-B)\cdot(A-B)\cdot(A-B)=$$
$$=(A^2-2AB+B^2)\cdot(A-B)=$$
$$=A^3-2A^2B+AB^2-A^2B+2AB^2-B^3=$$
$$=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3.$$

Напр. 1) $(3a^2-4m^5)^3=27a^6-108a^4m^5+144a^2m^{10}-$
$$-65m^{15}.$$

2) $(2a-1)^3=8a^3-12a^2+6a-1.$

Дѣленіе одночленовъ.

§ 88. Правило о знакѣ частнаго уже выведено раньше, въ § 48.

§ 89. **При дѣленіи степеней одного и того же основанія надо изъ показателя дѣлимаго вычесть показатель дѣлителя.**

Требуется доказать, что

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Такъ какъ дѣлимое есть произведеніе дѣлителя и частнаго, а въ дѣлимомъ никакихъ множителей, кромѣ a, нѣтъ, то значитъ и въ частномъ могутъ быть только множители a, т. е. частное должно представлять нѣкоторую степень основанія a. Въ самомъ дѣлѣ, всякій иной множитель, если бы былъ въ частномъ, то долженъ былъ бы быть и въ произведеніи дѣлителя и частнаго, т. е. въ дѣлимомъ, а въ дѣлимомъ, кромѣ множителей a, нѣтъ никакихъ другихъ.

На этомъ основаніи можемъ частное изобразить въ видѣ степени, основаніе которой a, показатель же неизвѣстенъ.

Итакъ,

$$a^m : a^n = a^x.$$

Но частное, умноженное на дѣлителя, должно равняться дѣлимому, т. е.

$$a^x \cdot a^n = a^m$$

или

$$a^{x+n} = a^m.$$

Если степени одного и того же основанія равны, то равные ихъ показатели, а потому

$$x + n = m.$$

Отнявъ отъ равныхъ количествъ поровну, получимъ равные остатки, значитъ

$$x + n - n = m - n$$

или

$$x = m - n.$$

Итакъ, показатель степени частнаго равенъ $m - n$, т. е.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Примѣчаніе. Иногда дѣленіе обозначаютъ въ видѣ дроби; такъ вмѣсто $a^m : a^n$ пишутъ $\frac{a^m}{a^n}$.

§ **90**. Соединивъ правило знака при дѣленіи количествъ съ правиломъ показателей при дѣленіи степеней, получаемъ правило дѣленія одночленовъ:

Чтобы раздѣлить одночленъ на одночленъ, надо, соблюдая правило знака, раздѣлить коэффиціентъ дѣлимаго на коэффиціентъ дѣлителя, изъ показателей буквъ дѣлимаго вычесть показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ дѣлимое, написать въ частномъ безъ измѣненія.

Напр. 1) $25a^4bc^5 : -5a^2c^4 = -5a^2bc.$

2) $-14a^8m^5y^2 : -10a^3m^2y = 1{,}4a^5m^3y.$

3) $-2m^4p^{2n-1}z^3 : 3mp^{n-1}z = -\frac{2}{3}m^3p^nz^2.$

Степень съ нулевымъ показателемъ.

§ **91**. Если при дѣленіи степеней одного основанія и съ равными показателями примѣнить общее правило, то въ частномъ получится степень съ нулевымъ показателемъ.

Въ самомъ дѣлѣ, $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$.

§ **92**. Степень съ нулевымъ показателемъ не имѣетъ прямого смысла степени, потому что выраженіе „повторить множителемъ нуль разъ" не имѣетъ смысла.

Степень съ нулевымъ показателемъ есть условное выраженіе и принимается равной единицѣ.

Тогда получатся равносильныя выраженія

$$a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1.$$

Примѣчаніе. Если при дѣленіи одночленовъ показатели какой-нибудь буквы въ дѣлимомъ и дѣлителѣ равны, то въ частномъ этой буквы не пишутъ, потому что получается степень съ нулевымъ показателемъ, а она равняется единицѣ; множитель единицу не принято писать.

Напр. $-6a^3b^2 : -2ab^2 = 3a^2$.

Степень съ отрицательнымъ показателемъ.

§ **93**. Если при дѣленіи степеней одного основанія показатель дѣлимаго менѣе, чѣмъ показатель дѣлителя, то, примѣняя общее правило, мы получимъ въ частномъ степень съ отрицательнымъ показателемъ.

Въ самомъ дѣлѣ, $a^3 — a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$.

§ 84. Степень съ отрицательнымъ показателемъ не имѣетъ прямого смысла степени, потому что выраженіе „повторить множителемъ отрицательное число разъ“ не имѣетъ смысла.

Степень съ отрицательнымъ показателемъ есть выраженіе условное и принимается равной дроби, числитель которой равенъ единицѣ, а знаменатель той же степени съ положительнымъ показателемъ.

Требуется доказать, что

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

При введеніи этого условія правило дѣленія степени сохраняетъ свое значеніе и въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлимаго меньше показателя дѣлителя. Въ самомъ дѣлѣ

$$a^m : a^{m+k} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^k} = \frac{1}{a^k} = a^{-k} = a^{m-(m+k)},$$

такъ какъ отрицательное число $(-k)$ можно разсматривать какъ разность двухъ чиселъ, изъ которыхъ вычитаемое на k единицъ болѣе уменьшаемаго, т. е.

$$-k = m - n, \text{ гдѣ } n = m + k,$$

а потому

$$a^{-k} = a^{m-n} = a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^k} =$$

$$= \frac{1}{a^k}.$$

§ **95.** **Дѣленіе одночленовъ на-цѣло невозможно:**

1) если въ дѣлителѣ есть хоть одна буква, которой нѣтъ въ дѣлимомъ;

2) если показатель какой-нибудь буквы дѣлимаго менѣе, чѣмъ показатель той же буквы дѣлителя.

Въ обоихъ случаяхъ частное изображаютъ въ видѣ дроби, которая и называется **алгебраическою одночленною дробью.**

Напр.

1) $3a : b = \frac{3a}{b}$.

2) $4a^2c : 2ad = \frac{4a^2c}{2ad} = \frac{2ac}{d}$.

3) $10a^5c^2 : -3a^2c^3 = -\frac{10a^5c^2}{3a^2c^3} = -\frac{10a^3}{3c}$.

Примѣчаніе. Если при дѣленіи одночленовъ коэффиціенты на-цѣло не дѣлятся, дѣленіе тѣмъ не менѣе считается выполненнымъ на-цѣло, если буквенныя выраженія дѣлятся на-цѣло; въ этомъ случаѣ частное называется **цѣлымъ одночленомъ съ дробнымъ коэффиціентомъ.**

Напр. $5a^3b^4c : 4ab = \frac{5}{4}a^2b^3c$.

Дѣленіе многочленовъ.

§ **96.** При дѣленіи многочленовъ слѣдуетъ различать три случая:

1) дѣленіе многочлена на одночленъ,

2) „ одночлена на многочленъ,

3) „ многочлена на многочленъ.

§ **97. Чтобы раздѣлить многочленъ на одночленъ, надо каждый членъ многочлена раздѣлить на данный одночленъ.**

Требуется доказать, что

$$(a - b + c) : m = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m}.$$

Изъ опредѣленія дѣленія (§ 47) слѣдуетъ, что каждый членъ дѣлимаго есть результатъ умноженія дѣлителя на соотвѣтствующій членъ частнаго; слѣдовательно въ частномъ будутъ три члена; назвавъ ихъ x, y и z, будемъ имѣть:

$$a = mx$$
$$-b = my$$
$$+c = mz.$$

По аксіомѣ: при дѣленіи равныхъ на равныя получаемъ частныя равныя, будемъ имѣть, по раздѣленіи на m,

$$\frac{a}{m} = x$$
$$-\frac{b}{m} = y$$
$$+\frac{c}{m} = z$$

Слѣдовательно $(a - b + c) : m = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m}.$

Напр. $(-15a^5x^3 + 20a^4x^4 - 30a^3x^5) : -10a^2x^2 =$
$= 1{,}5a^3x - 2a^2x^2 + 3ax^3.$

§ **98**. Дѣленіе одночлена на многочленъ на-цѣло невозможно, такъ какъ частное не можетъ быть ни цѣлымъ одночленомъ, ни цѣлымъ многочленомъ; поэтому дѣленіе одночлена на многочленъ изображается дробью, числителемъ которой будетъ одночленъ, а знаменателемъ многочленъ. Такая дробь называется **алгебраическою многочленною дробью.**

Напр. $3a^3b : (4a^2b^3 - 5a^3b^2) = \frac{3a^3b}{4a^2b^3 - 5a^3b^2}$.

§ 99. Такъ какъ въ произведенiи двухъ многочленовъ (§ 80) только старшiй и младшiй члены имѣютъ совершенно опредѣленное происхожденiе (а именно, старшiй членъ произведенiя есть произведенiе старшихъ членовъ множимаго и множителя, а младшiй членъ произведенiя есть произведенiе младшихъ членовъ множимаго и множителя), между тѣмъ какъ прочiе члены произведенiя могутъ быть результатами приведенiя нѣсколькихъ членовъ, то при дѣленiи многочленовъ ихъ располагаютъ по степенямъ главной буквы и прежде всего отыскиваютъ либо старшiй членъ частнаго, либо младшiй, дѣля для этого первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя. Когда такимъ образомъ найденъ первый членъ частнаго, то, умноживъ на него всѣ члены дѣлителя, находятъ часть членовъ произведенiя (дѣлимаго), которая въ умноженiи называлась первымъ частнымъ произведенiемъ.

Всѣ эти члены должны находиться въ составѣ дѣлимаго, а потому, вычтя ихъ изъ дѣлимаго, получаютъ остатокъ, въ которомъ должны находиться всѣ члены, получающiеся отъ умноженiя дѣлителя на остальные члены частнаго:

$$(22a^4b - 26a^2b^3 + 8a^5 + 8ab^4 - 5a^3b^2) : (5ab + 4a^2 - 2b^2) =$$

$$\begin{array}{l|l} = 8a^5 + 22a^4b - 5a^3b^2 - 26a^2b^3 + 8ab^4 & 4a^2 + 5ab - 2b^2 \\ \cline{2-2} \mp 8a^5 \mp 10a^4b \pm 4a^3b^2 & 2a^3 \\ \hline \qquad + 12a^4b - a^3b^2 - 26a^2b^3 + 8ab^4 & \end{array}$$

Расположивъ дѣлимое и дѣлитель по нисходящимъ степенямъ буквы a, раздѣлили старшій членъ дѣлимаго ($8a^5$) на старшій членъ дѣлителя ($4a^2$) и получили старшій членъ частнаго ($2a^3$); умноживъ затѣмъ всѣ члены дѣлителя на найденный первый членъ частнаго и подписавъ это произведеніе подъ подобными членами дѣлимаго, сдѣлали вычитаніе и получили остатокъ (его называютъ **первымъ остаткомъ**) —

$$+12a^4b - a^3b^2 - 26a^2b^3 + 8ab^4 .$$

Этотъ остатокъ представляетъ произведеніе дѣлителя на остальные члены частнаго, начиная со **второго**, и слѣдовательно старшій членъ этого остатка есть произведеніе старшаго члена дѣлителя на **второй** членъ частнаго, а потому для нахожденія второго члена частнаго надо старшій членъ перваго остатка раздѣлить на старшій членъ дѣлителя.

Въ нашемъ примѣрѣ второй членъ частнаго

$$= +12a^4b : 4a^2 = 3a^2b.$$

Умноживъ всѣ члены дѣлителя на найденный второй членъ частнаго, получаемъ тотъ многочленъ, который въ умноженіи назывался вторымъ частнымъ произведеніемъ; такъ какъ всѣ его члены должны находиться въ дѣлимомъ, то должны также находиться и въ первомъ остаткѣ, а потому, подписавъ эти члены подъ подобными членами перваго остатка, вычитаемъ ихъ и находимъ второй остатокъ:

$$\begin{array}{l|l}
8a^5 + 22a^4b - 5a^3b^2 - 26a^2b^3 + 8ab^4 & 4a^2 + 5ab - 2b^2 \\
\cline{2-2}
\underline{\mp 8a^5 \mp 10a^4b \pm 4a^3b^2} & 2a^3 + 3a^2b \\
\qquad + 12a^4b - a^3b^2 - 26a^2b^3 + 8ab^4 & \\
\qquad \underline{\mp 12a^4b \mp 15a^3b^2 \pm 6a^2b^3} & \\
\qquad\qquad - 16a^3b^2 - 20a^2b^3 + 8ab^4 . &
\end{array}$$

Второй остатокъ $(-16a^3b^2-20a^2b^3+8ab^4)$ есть произведеніе дѣлителя на остальные члены частнаго, начиная съ третьяго, а старшій членъ его $(-16a^3b^2)$ есть произведеніе старшаго члена дѣлителя на третій членъ частнаго, а слѣдовательно третій членъ частнаго находится дѣленіемъ старшаго члена второго остатка на старшій членъ дѣлителя, т. е. $-16a^3b^2:4a^2=-4ab^2$.

$$
\begin{array}{r|l}
8a^5+22a^4b-5a^3b^2-26a^2b^3+8ab^4 & 4a^2+5ab-2b^2 \\
\mp 8a^5\mp 10a^4b\pm 4a^3b^2 \qquad\qquad\qquad & \overline{2a^3+3a^2b-4ab^2} \\
\hline
+12a^4b-a^3b^2-26a^2b^3+8ab^4 & \\
\mp 12a^4b\mp 15a^3b^2\pm 6a^2b^3 \qquad & \\
\hline
-16a^3b^2-20a^2b^3+8ab^4 & \\
\pm 16a^3b^2\pm 20a^2b^3\mp 8ab^4 & \\
\hline
0 \qquad\qquad &
\end{array}
$$

Такъ какъ произведеніе третьяго члена частнаго на всѣ члены дѣлителя равняется второму остатку, то отъ вычитанія его получается въ остаткѣ нуль. Значитъ три найденныхъ члена и составляютъ искомое частное.

§ **100**. Изъ приведеннаго примѣра видно, что всѣ члены частнаго находятся дѣленіемъ первыхъ членовъ дѣлимаго и остатковъ каждый разъ на первый членъ дѣлителя, отсюда правило:

Чтобы раздѣлить многочленъ на многочленъ, надо, расположивъ дѣлимое и дѣлитель по степенямъ главной буквы, первый членъ дѣлимаго раздѣлить на первый членъ дѣлителя,—получимъ первый членъ частнаго;

найденый членъ частнаго умножить на всѣ члены дѣлителя, подписать произведеніе подъ дѣлимымъ и вычесть,—получимъ первый остатокъ; первый членъ перваго остатка раздѣлить на первый членъ дѣлителя,— получимъ второй членъ частнаго;
найденый членъ частнаго помножить на всѣ члены дѣлителя, подписать подъ первымъ остаткомъ и вычесть,— получимъ второй остатокъ;
первый членъ второго остатка опять раздѣлить на первый членъ дѣлителя,—найдемъ третій членъ частнаго и т. д.

Вообще для нахожденія n-го члена частнаго надо первый членъ $(n-1)$-го остатка раздѣлить на первый членъ дѣлителя.

§ **101**. Иногда при расположеніи многочленовъ дѣлимаго и дѣлителя по степенямъ главной буквы необходимо оставлять между членами дѣлимаго промежутки для такихъ членовъ, которые могутъ появится при дѣленіи, и подобныхъ которымъ нѣтъ въ дѣлимомъ. Напр.

$$(2a^3x^3 - a^2x^4 + a^6 + ax^5) : (x^2 + a^2 - ax) =$$

$$\begin{array}{lllll|l}
= a^6 & & & + 2a^3x^3 - a^2x^4 + ax^5 & & a^2 - ax + x^2 \\
\mp a^6 \pm a^5x \mp a^4x^2 & & & & & \overline{a^4 + a^3x + ax^3} \\
\hline
& + a^5x - a^4x^2 + 2a^3x^3 - a^2x^4 + ax^5 & & & & \\
& \mp a^5x \pm a^4x^2 \mp a^3x^3 & & & & \\
\hline
& & + a^3x^3 - a^2x^4 + ax^5 & & & \\
& & \mp a^3x^3 \pm a^2x^4 \mp ax^5 & & & \\
\hline
& & 0 & & &
\end{array}$$

§ **102**. Дѣленіе многочленовъ не всегда совершается на-цѣло; иногда получается остатокъ отъ дѣленія. Цѣлый многочленъ, полученный при дѣленіи съ остаткомъ, называется **неполнымъ частнымъ**.

$$\begin{array}{rr|l}
2a^6x^2 & -1 & a^3x+1 \\
\cline{3-3}
\mp 2a^6x^2 \mp 2a^3x & & 2a^3x-2 \\
\cline{1-2}
-2a^3x & -1 & \\
\pm 2a^3x & \pm 2 & \\
\cline{1-2}
 & +1 &
\end{array}$$

Остатокъ отъ дѣленія $+1$; неполное частное $2a^3x-2$

Признаки невозможности дѣленія многочленовъ на-цѣло.

§ **103**. Дѣленіе многочлена на-цѣло невозможно:

1) когда старшій членъ дѣлимаго не дѣлится на старшій членъ дѣлителя;

2) когда младшій членъ дѣлимаго не дѣлится на младшій членъ дѣлителя;

3) когда въ дѣлителѣ есть такая буква, какой не встрѣчается въ дѣлимомъ.

Когда эти три признака отсутствуютъ, то приступаютъ къ дѣленію многочленовъ.

Во время дѣленія многочленовъ невозможность дѣленія на-цѣло обнаруживается:

4) когда первый членъ какого-нибудь остатка не дѣлится на-цѣло на первый членъ дѣлителя.

§ **104**. **Теорема**. **Отъ дѣленія многочлена**

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Gx^2 + Kx + L$$

на разностный двучленъ ($x-a$) получается въ остаткѣ многочленъ, подобный дѣлимому, съ замѣной въ немъ главной буквы x вторымъ членомъ разностнаго дѣлителя.

Требуется доказать, что остатокъ отъ дѣленія

$$A^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots Gx^2 + Kx + L \text{ на } (x-a)$$
$$= Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + \ldots + Ga^2 + Ka + L.$$

Доказательство. Назовемъ частное отъ этого дѣленія черезъ Θ и остатокъ черезъ R, тогда, на основаніи зависимости между дѣлимымъ, дѣлителемъ, частнымъ и остаткомъ, будемъ имѣть:

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Kx + L = (x-a).\Theta + R.$$

Это равенство остается справедливымъ, какія бы ни подставляли въ него значенія на мѣсто буквы x; значитъ оно справедливо и тогда, когда на мѣсто x подставимъ a. Но тогда, т. е. при $x=a$, двучленъ $x-a$ обращается въ нуль, а слѣдовательно и все произведеніе $(x-a).\Theta$ обращается въ нуль, а потому при $x=a$ будемъ имѣть:

$$Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + \ldots + Ka + L = R,$$

но R есть остатокъ; слѣдовательно, теорема доказана.

Слѣдствіе. Если остатокъ отъ дѣленія равенъ нулю то дѣленіе совершается безъ остатка. Но остатокъ отъ дѣленія многочлена:

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Kx + L$$

на разностный двухчленъ $x-a$ равенъ

$$Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + \ldots + Ka + L.$$

Этотъ же многочленъ получается при замѣнѣ въ дѣлимомъ главной буквы x вторымъ членомъ дѣлителя, а потому **дѣленіе многочлена**

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + Kx + L$$

на двучленъ $x - a$ совершится безъ остатка, если при подстановкѣ въ дѣлимый многочленъ на мѣсто главной буквы x второго члена разностнаго дѣлителя получимъ многочленъ, равный нулю.

Напр.: 1) Опредѣлимъ на основаніи этого признака дѣлимости, будетъ ли многочленъ $2x^3 - 13x^2 + 22x - 35$ дѣлиться на-цѣло на двучленъ $x - 5$.

Для этого надо на мѣсто x въ дѣлимый многочленъ подставить число 5.

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 5^3 - 13 \cdot 5^2 + 22 \cdot 5 - 35 = \\ = {} & 2 \cdot 125 - 13 \cdot 25 + 22 \cdot 5 - 35 = \\ = {} & 250 - 325 + 110 - 35 = 360 - 360 = 0 \end{aligned}$$

Такъ какъ отъ подстановки получился многочленъ, равный нулю, то это дѣленіе совершается на-цѣло.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -13x^2 & +22x & -35 & x-5 \\ \cline{5-5} \mp 2x^3 & \mp 10x^2 & & & 2x^2 - 3x + 7 \\ \cline{1-2} & -3x^2 & +22x & -35 & \\ & \mp 3x^2 & \mp 15x & & \\ \cline{2-4} & & +7x & -35 & \\ & & \mp 7x & \pm 35 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

2) Дѣлится ли многочленъ

$4ab^5 + 11a^2b^4 + 5a^3b^3 - 4a^4b^2 - 4a^5b$ на $b + 2a$.

Чтобы подчинить этотъ примѣръ разсматриваемому признаку, надо дѣлитель $b + 2a$ преобразовать въ видъ разности, а именно:

$$b + 2a = b - (-2a),$$

т. е. второй членъ разностнаго дѣлителя надо считать равнымъ $(-2a)$.

Подставивъ въ дѣлимое на мѣсто b второй членъ разностнаго дѣлителя, т. е. $(-2a)$, получимъ многочленъ:

$$4a(-2a)^5 + 11a^2(-2a)^4 + 5a^3(-2a)^3 - 4a^4(-2a)^2 -$$
$$- 4a^5(-2a) = +128a^6 + 176a^6 - 40a^6 - 16a^6 +$$
$$+ 8a^6 = -184a^6 - 184a^6 = 0.$$

Дѣленіе совершится на-цѣло.

$$\begin{array}{l|l}
4ab^5 + 11a^2b^4 + 5a^3b^3 - 4a^4b^2 - 4a^5b & b + 2a \\
\hline
\mp 4ab^5 \mp 8a^2b^4 & 4ab^4 + 3a^2b^3 - a^3b - 2a^4b \\
\qquad + 3a^2b^4 + 5a^3b^3 & \\
\qquad \mp 3a^2b^4 \mp 6a^3b^3 & \\
\qquad\qquad - a^3b^3 - 4a^4b^2 & \\
\qquad\qquad \pm a^3b^3 \pm 2a^4b^2 & \\
\qquad\qquad\qquad - 2a^4b^2 - 4a^5b & \\
\qquad\qquad\qquad \pm 2a^4b^2 \pm 4a^5b & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Для ознакомленія.

АЛГЕБРА

ДЛЯ

СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ

СОСТАВИЛЪ

преподаватель Кронштадтской мужской и женской Александринской гимназій

Л. Я. Пясецкій.

Часть II.

Дроби и уравненія первой степени.

Цѣна безъ перепл. 25 к.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

ИЗДАНІЕ Бр. БАШМАКОВЫХЪ

1907

Типографія Спб. Т-ва Печ. и Изд. дѣла „Трудъ“. Фонтанка, 86.

Дроби.

§ **105**. **Алгебраическою дробью называется частное отъ дѣленія одночленовъ или многочленовъ, когда дѣленіе это на-цѣло невозможно.**

Алгебраическая дробь изображается подобно ариѳметической: дѣлимое называется **числителемъ дроби** и пишется надъ чертою, дѣлитель называется **знаменателемъ дроби** и пишется подъ чертою. Алгебраическія дроби раздѣляются на одночленныя и многочленныя.

Одночленною алгебраическою дробью называется такая, у которой и числитель и знаменатель — одночлены (см. § 95).

Напр.: $\frac{2ab}{m^2c}$; $\frac{ax^2}{2bc}$; $\frac{3m^3}{4ab^2c}$.

Многочленною алгебраическою дробью называется такая, у которой числитель, или знаменатель, или они оба многочлены (см. §§ 98 и 102).

Напр.: $\frac{2a-b}{3m^2c}$; $\frac{ax^3y}{3m^2-m+1}$; $\frac{a^2-b^2+c^2}{3a^2-2ab+b^2}$.

Примѣчаніе. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ бываетъ полезно принимать цѣлый одночленъ, а также и цѣлый многочленъ за дроби, у которыхъ знаменатель равенъ единицѣ.

Такъ: $3a = \frac{3a}{1}$; $a^2 - ab + b^2 = \frac{a^2-ba+b^2}{1}$.

§ **106. Величина дроби не измѣнится, если числитель и знаменатель дроби помножить на одно и то же количество, или раздѣлить на одно и то же количество.**

1) Пусть $\frac{a}{b} = q$, гдѣ q есть частное отъ дѣленія числителя на знаменатель; тогда, по свойству дѣленія,

$$a = bq.$$

На основаніи аксіомы: если равныя количества умножить на равныя, то и произведенія получатся равныя, помноживъ обѣ части равенства порознь на m, будемъ имѣть

$$am = bqm.$$

На основаніи аксіомы: если равныя количества раздѣлить на равныя, то и частныя получатся равныя, раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства порознь на bm, будемъ имѣть

$$\frac{am}{bm} = q.$$

Поставивъ въ этомъ уравненіи вмѣсто q равное ей количество $\frac{a}{b}$, будемъ имѣть

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

Что и требовалось доказать.

2) Пусть $\frac{a}{b} = q$; тогда $a = bq$.

На основаніи аксіомы: если равныя количества раздѣлить на равныя, то и частныя получатся равныя, отъ дѣленія обѣихъ частей послѣдняго равенства порознь на m, получимъ:

$$\frac{a}{m} = \frac{bq}{m} \text{ или } \frac{a}{m} = \frac{b}{m} \cdot q.$$

На основаніи той же аксіомы, раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства порознь на $\frac{b}{m}$, получимъ

$$\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=q \text{ или } \frac{a:m}{b:m}=q.$$

Поставивъ вмѣсто q равное ей количество $\frac{a}{b}$, получимъ

$$\frac{a:m}{b:m}=\frac{a}{b}.$$

Что и требовалось доказать.

§ **107.** На основаніи этого свойства, алгебраическія дроби могутъ быть сокращаемы и приводимы къ общему наименьшему знаменателю. Какъ сокращеніе дробей, такъ и приведеніе ихъ къ общему наименьшему знаменателю требуютъ умѣнія разлагать алгебраическія одночленныя и многочленныя количества на простые сомножители.

Разложеніе алгебраическихъ количествъ на простые сомножители.

§ **108.** **Чтобы разложить одночленъ на простые сомножители, достаточно разложить на первоначальные сомножители его коэффиціентъ,** такъ какъ буквенные сомножители одночлена очевидны.

Напр. 1) $24a^3bc^2=2.2.2.3a^3bc^2=2^3.3a^3bc^2.$

2) $700a^5x^2=2^2.5^2.7a^5x^2.$

§ **109.** Разложеніе многочленовъ на простые сомножители представляетъ, вообще говоря, задачу довольно трудную, часто неразрѣшимую, и трудность ея выполненія возрастаетъ съ увеличеніемъ числа членовъ въ многочленѣ. При разложеніи многочленовъ на простые множители необходимо руководиться слѣдующими пріемами:

§ **110**. *1-й пріемъ.* **Вынесеніе общаго множителя за скобки.**

Если всѣ члены даннаго многочлена дѣлятся безъ остатка на нѣкоторый одночленъ, то этотъ многочленъ можетъ быть замѣненъ произведеніемъ двухъ сомножителей: 1) общимъ дѣлителемъ всѣхъ его членовъ и 2) частнымъ, которое получается отъ дѣленія даннаго многочлена на общій дѣлитель, такъ какъ дѣлимое равняется дѣлителю, умноженному на частное. Напр., очевидно, что всѣ члены многочлена

$$4a^3b^2c - 12a^2b^4 - 20ab^5c^2$$

дѣлятся на-цѣло на одночленъ $4ab^2$, причемъ отъ дѣленія получаемъ частное

$a^2c - 3ab^2 - 5b^3c^2$, а потому

$$4a^3b^2c - 12a^2b^4 - 20ab^5c^2 = 4ab^2\ (a^2c - 3ab^2 - 5b^3c^2).$$

Подобнымъ же образомъ находимъ, что

1) $15a^2xy^3 + 6a^3x^2z - 12a^2x^3z^3 - 9a^3x^2y^2 =$
$= 3a^2x\ (5y^3 + 2axz - 4x^2z^3 - 3axy^2).$

2) $10a^{n-1}b^2 - 15a^{n-2}b^3 + 20a^{n-3}b =$
$= 5a^{n-3}b\ (2a^2b - 3ab^2 + 4).$

3) $6a^4b^3 - 12a^6b^3 = 6a^4b^3\ (1 - 2a^2).$

Приступая къ разложенію многочлена на простые сомножители, должно прежде всего, если только возможно, примѣнить этотъ пріемъ, такъ какъ другіе пріемы удобнѣе примѣняются къ такимъ многочленамъ, члены которыхъ не имѣютъ ни одного общаго сомножителя. Прочіе пріемы зависятъ отъ числа членовъ многочлена.

§ 111. Двучленъ называется равностепеннымъ, если оба его члена представляютъ одинаковыя степени различныхъ основаній.

Напр.: $a^2 - b^2$; $m^3 + n^3$; $a^4x^4 - b^4$.

Двучленъ $a^2 - b^2$ называется разностью квадратовъ, двучленъ $m^3 + n^3$ называется суммою кубовъ, двучленъ $a^4x^4 - b^4$ называется разностью четвертыхъ степеней.

§ **112**. Нѣкоторые двучлены подходятъ подъ различные виды равностепенныхъ двучленовъ.

Напр.:

$$1)\quad a^6 - b^6 = \begin{cases} (a^3)^2 - (b^3)^2 \ldots \text{ разность квадратовъ, или} \\ (a^2)^3 - (b^2)^3 \ldots \text{ разность кубовъ, или} \\ a^6 - b^6 \ldots \text{ разность шестыхъ степеней.} \end{cases}$$

$$2)\quad m^{30} + n^{30} = \begin{cases} (m^{15})^2 + (n^{15})^2 \ldots \text{ сумма квадратовъ, или} \\ (m^{10})^3 + (n^{10})^3 \ldots \text{ сумма кубовъ, или} \\ (m^5)^6 + (n^5)^6 \ldots \text{ сумма шестыхъ степеней, или} \\ (m^3)^{10} + (n^3)^{10} \ldots \text{ сумма десятыхъ степеней, или} \\ (m^2)^{15} + (n^2)^{15} \ldots \text{ сумма пятнадцатыхъ степеней, или} \\ m^{30} + n^{30} \ldots \text{ сумма тридцатыхъ степеней.} \end{cases}$$

§ **113**. **Всѣ равностепенные двучлены разлагаются на множители**; но разложеніе нѣкоторыхъ изъ нихъ основано на теоремахъ, излагаемыхъ въ послѣдующихъ статьяхъ курса алгебры, и потому разложеніе такихъ двучленовъ до времени оставляется. Къ двучленамъ, разложеніе которыхъ до времени оставляется, относятся: 1) сумма квадратовъ, 2) сумма тѣхъ высшихъ четныхъ степеней, которыя не могутъ быть разсматриваемы какъ суммы нечетныхъ степеней, напр. суммы 4-хъ степеней, 8-хъ степеней, 16-хъ степеней и т. д.

Разложеніе на множители равностепенныхъ двучленовъ.

§ **114**. а) **Разность квадратовъ равняется произведенію суммы на разность ихъ основаній** (согласно § 85). Формула разложенія:

$$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B).$$

Напр.: $4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y) \cdot (2x - 3y)$;

$$a^4 - 4 = (a^2 + 2) \cdot (a^2 - 2).$$

§ **115**. б) **Сумму квадратовъ** не разлагаютъ (см. § 113).

§ **116**. в) **Сумма кубовъ равняется произведенію двухъ сомножителей, изъ которыхъ одинъ есть сумма основаній данныхъ кубовъ, а другой равенъ трехчлену, состоящему изъ: квадрата перваго основанія минусъ произведеніе обоихъ основаній, плюсъ квадратъ второго основанія.**

Этотъ пріемъ разложенія основанъ на томъ, что **сумма кубовъ всегда дѣлится безъ остатка на сумму основаній.**

Въ самомъ дѣлѣ

$$
\begin{array}{l|l}
A^3 + B^3 & A + B \\
\hline
\mp A^3 \mp A^2B & A^2 - AB + B^2 \\
\quad - A^2B + B^3 & \\
\quad \pm A^2B \pm AB^2 & \\
\qquad\qquad AB^2 + B^3 & \\
\qquad\quad \mp AB^2 \mp B^3 & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Слѣдовательно: $A^3 + B^3 = (A + B) . (A^2 - AB + B^2)$.

Напр.: 1) $8x^3 + a^3y^3 = (2x + ay)\ (4x^2 - 2axy + a^2y^2)$.

2) $m^3 + 27 = (m + 3)\ (m^2 - 3m + 9)$.

§ **117.** г) **Разность кубовъ равняется произведенію двухъ сомножителей, изъ которыхъ первый есть разность основаній данныхъ кубовъ, а другой равенъ трехчлену, состоящему изъ: квадрата перваго основанія плюсъ произведеніе обоихъ основаній, плюсъ квадратъ второго основанія.**

Этотъ пріемъ разложенія основанъ на томъ, **что разность кубовъ всегда дѣлится безъ остатка на разность основаній.**

Въ самомъ дѣлѣ

$$
\begin{array}{l|l}
A^3 - B^3 & A - B \\
\hline
\mp A^3 \pm A^2B & A^2 + AB + B^2 \\
\quad A^2B - B^3 & \\
\quad \mp A^2B \pm AB^2 & \\
\qquad\qquad AB^2 - B^3 & \\
\qquad\quad \mp AB^2 \pm B^3 & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Слѣдовательно: $A^3 - B^3 = (A - B)\ (A^2 + AB + B^2)$.

Напр.: 1) $c^3 - 64d^3 = (c - 4d) . (c^2 + 4cd + 16d^2)$.

2) $343 - m^3 = (7 - m)\ (49 + 7m + m^2)$.

§ **118.** д) **Сумму 4-хъ степеней** не разлагаютъ (см. § 113).

§ **119.** е) **Разность четвертыхъ степеней разлагается на три двучленныхъ сомножителя: 1) сумма основаній, 2) разность основаній и 3) сумма квадратовъ обоихъ основаній.**

Въ самомъ дѣлѣ, разность *четвертыхъ* степеней можно разсматривать (см. § 112) какъ разность квадратовъ и примѣнять пріемъ а).

$$A^4 - B^4 = (A^2 - B^2)\ (A^2 + B^2).$$

Но сомножитель $A^2 - B^2$ въ свою очередь разлагается (пріемъ а) на $(A + B) . (A - B)$; слѣдовательно,

$$A^4 - B^4 = (A + B) . (A - B) . (A^2 + B^2).$$

Напр.: 1) $a^4 - 16 = (a + 2)\ (a - 2)\ (a^2 + 4)$.

2) $81m^4 - 1 = (3m + 1)(3m - 1)(9m^2 + 1)$.

§ **120.** Такъ какъ сумма пятыхъ степеней дѣлится безъ остатка на сумму ихъ основаній, а разность пятыхъ степеней дѣлится безъ остатка на разность ихъ основаній, въ чемъ не трудно убѣдиться непосредственнымъ дѣленіемъ, то разложеніе суммы и разности пятыхъ степеней дѣлается по формуламъ:

ж) $A^5+B^5=(A+B)(A^4-A^3B+A^2B^2-AB^3+B^4)$.

з) $A^5-B^5=(A-B)(A^4+A^3B+A^2B^2+AB^3+B^4)$.

Напр.: 1) $x^5+32=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$.

2) $243a^5-y^5=(3a-y)(81a^4+27a^3y+9a^2y^2+3ay^3+y^4)$.

§ **121**. Подобно *пятымъ* степенямъ разлагаются на два сомножителя (дѣлитель и частное) и другія высшія нечетныя степени—*седьмыя*, *одиннадцатыя*, *тринадцатыя* и т. д. по слѣдующимъ общимъ формуламъ:

и) $A^{2n+1}+B^{2n+1}=(A+B)(A^{2n}-A^{2n-1}B+$
$+A^{2n-2}B^2-A^{2n-3}B^3+\ldots+A^2B^{2n-2}-AB^{2n-1}+B^{2n})$

к) $A^{2n+1}-B^{2n+1}=(A-B)(A^{2n}+A^{2n-1}B+$
$+A^{2n-2}B^2+A^{2n-3}B^3+\ldots+A^2B^{2n-2}+AB^{2n-1}+B^{2n})$.

Напр.: $x^{11}-y^{11}=(x-y)(x^{10}+x^9y+x^8y^2+x^7y^3+$
$+x^6y^4+x^5y^5+x^4y^6+x^3y^7+x^2y^8+xy^9+y^{10})$.

§ **122**. Что касается высшихъ четныхъ степеней, какъ *шестыя*, *восьмыя*, *десятыя*......*2n-ыя*, то, если онѣ представляютъ разность, то ихъ предварительно разсматриваютъ какъ разность квадратовъ и разлагаютъ по формулѣ а), а затѣмъ каждый изъ полученныхъ множителей разлагаютъ, если можно, еще на другіе болѣе простые сомножители; если же они представляютъ сумму, то ихъ разлагаютъ по формулѣ суммы кубовъ или другихъ высшихъ нечетныхъ степеней, если, конечно, данныя степени можно разсматривать, какъ нечетныя (§ 112), въ противномъ случаѣ ихъ не разлагаютъ (§ 113).

Напр.: 1) $x^6 - a^6 = (x^3)^2 - (a^3)^2 = (x^3 + a^3)(x^3 - a^3) =$

$= (x+a) \cdot (x^2 - ax + a^2)(x - a)(x^2 + ax + a^2).$

2) $c^{10} + d^{10} = (c^2)^5 + (d^2)^5 = (c^2 + d^2)(c^8 - c^6d^2 + c^4d^4 -$

$- c^2d^6 + d^8).$

3) $c^8 + d^8$ не разлагаютъ (§ 113).

§ **123.** Если показатели степеней перваго и второго члена даннаго двучлена не равны, но преобразованіемъ можно привести этотъ двучленъ къ виду равностепеннаго, то разложеніе такого двучлена выполняютъ, примѣняя одну изъ предыдущихъ формулъ разложенія къ преобразованному виду.

Напр.:

1) $a^2 - b^4 = a^2 - (b^2)^2 = (a + b^2)(a - b^2).$

2) $x^6 - 8 = (x^2)^3 - 2^3 = (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4).$

3) $m^6 + z^9 = (m^2)^3 + (z^3)^3 = (m^2 + z^3)(m^4 - m^2z^3 + z^6).$

4) $a^{12} - x^6 = (a^6)^2 - (x^3)^2 = (a^6 + x^3)(a^6 - x^3) =$

$= (a^2 + x)(a^4 - a^2x + x^2)(a^2 - x)(a^4 + a^2x + x^2).$

§ **124.** Свойства дѣлимости безъ остатка и недѣлимости равностепенныхъ двучленовъ на сумму или разность ихъ основаній могутъ быть доказаны на основаніи признака дѣлимости безъ остатка многочленовъ (§ 104).

§ **125.** I. **Сумма четныхъ степеней не дѣлится ни на сумму, ни на разность ихъ основаній.**

$A^{2n} + B^{2n}$ не дѣлится на $A + B$. Желая примѣнить признакъ § 104, надо дѣлитель $A + B$ привести къ виду разности, т. е. $A + B = A - (-B)$ и за главную букву многочленовъ принять A. Если теперь на мѣсто главной буквы A подставимъ въ дѣлимое второй членъ разностнаго дѣлителя, т. е. $(-B)$, то получимъ $(-B)^{2n} + B^{2n} = B^{2n} + B^{2n} = 2B^{2n}$. Такъ какъ отъ этой подстановки не получили нуля, то дѣленіе на-цѣло невозможно: $A^{2n} + B^{2n}$ не дѣлится на $A - B$, потому что, подставивъ въ дѣлимое на мѣсто главной буквы A второй членъ разностнаго дѣлителя, т. е. B, получаемъ $B^{2n} + B^{2n} = 2B^{2n}$, а не нуль.

§ **126**. II. **Разность четныхъ степеней дѣлится и на сумму, и на разность ихъ основаній.**

$A^{2n} - B^{2n}$ дѣлится безъ остатка на $A + B$, потому что, подставивъ въ дѣлимое на мѣсто B второй членъ разностнаго дѣлителя, т. е. $(-B)$, получаемъ нуль:

$$(-B)^{2n} - B^{2n} = B^{2n} - B^{2n} = 0.$$

$A^{2n} - B^{2n}$ дѣлится безъ остатка на $A - B$, потому что отъ такой подстановки, какъ въ предыдущемъ случаѣ, получаемъ въ результатѣ нуль:

$$(B)^{2n} - B^{2n} = B^{2n} - B^{2n} = 0.$$

§ **127**. III. **Сумма нечетныхъ степеней дѣлится безъ остатка только на сумму ихъ основаній, а на разность основаній не дѣлится.**

$A^{2n+1} + B^{2n+1}$ дѣлится безъ остатка на $A + B$, потому что отъ подстановки вмѣсто A второго члена разностнаго дѣлителя $(-B)$ получаемъ въ результатѣ нуль:

$$(-B)^{2n+1} + B^{2n+1} = -B^{2n+1} + B^{2n+1} = 0.$$

$A^{2n+1} + B^{2n+1}$ не дѣлится на $A - B$, потому что отъ такой же подстановки въ результатѣ не получаемъ нуля:

$$(B)^{2n+1} + B^{2n+1} = B^{2n+1} + B^{2n+1} = 2B^{2n+1}.$$

§ **128**. IV. **Разность нечетныхъ степеней дѣлится безъ остатка только на разность ихъ основаній, на сумму же основаній не дѣлится.**

$A^{2n+1} - B^{2n+1}$ дѣлится безъ остатка на $A - B$, потому что

$$(B)^{2n+1} - B^{2n+1} = B^{2n+1} - B^{2n+1} = 0.$$

$A^{2n+1} - B^{2n+1}$ не дѣлится на $A + B$, потому что

$$(-B)^{2n+1} - B^{2n+1} = -B^{2n+1} - B^{2n+1} = -2B^{2n+1}.$$

Разложеніе трехчленовъ на множители.

§ **129**. **Если два члена даннаго трехчлена можно разсматривать какъ полные квадраты, а третій членъ представляетъ удвоенное произведеніе основаній обоихъ квадратовъ, то данный трехчленъ представляетъ квадратъ суммы или разности.**

Формулы разложенія

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2.$$

Этотъ пріемъ разложенія основанъ на теоремахъ §§ 83 и 84.

Напр.:

1) $4x^2+12xy+9y^2=(2x)^2+2(2x).(3y)+(3y)^2=$
$=(2x+3y)^2.$

2) $25a^4c^2-20a^2cb^3+4b^6=(5a^2c-2b^3)^2.$

Примѣчаніе. Если вышеупомянутый пріемъ къ трехчлену непримѣнимъ, то примѣняютъ такъ называемый **пріемъ группировки**, о которомъ будетъ сказано далѣе.

Разложеніе четырехчленовъ на множители.

§ **130**. **Если два изъ членовъ даннаго четырехчлена представляютъ полные кубы нѣкоторыхъ основаній, то, составивъ изъ этихъ основаній: утроенное произведеніе квадрата перваго основанія на второе и утроенное произведеніе перваго основанія на квадратъ второго, сравниваютъ эти два составленныя произведенія съ двумя оставшимися членами даннаго четырехчлена и, если они соотвѣтственно равны, то данный четырехчленъ разсматриваютъ какъ кубъ суммы или разности двухъ членовъ.**

Этотъ пріемъ разложенія основанъ на теоремахъ §§ 86 и 87.

Формулы разложенія:

$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^2=(A+B)^3$$

$$A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=(A-B)^3.$$

Напр.: $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3=(2a-3b)^3.$

Въ самомъ дѣлѣ, два изъ его членовъ $8a^3$ и $-27b^3$ представляютъ кубы $(2a)^3$ и $(-3b)^3$; составивъ

$$3(2a)^2\ (-3b) = -36a^2b \text{ и } 3(2a)\ (-3b)^2 = 54ab^2,$$

замѣчаемъ, что составленные члены соотвѣтственно равны остальнымъ двумъ членамъ даннаго четырехчлена.

§ **131.** Если къ многочленамъ, начиная съ трехчлена, нельзя примѣнить ни одного изъ предыдущихъ пріемовъ, то примѣняютъ къ нимъ **способъ группировки.** Способъ группировки заключается въ слѣдующемъ: многочленъ представляютъ въ видѣ нѣсколькихъ группъ, по нѣскольку членовъ въ каждой, при чемъ каждую группу заключаютъ въ отдѣльныя скобки, съ такимъ расчетомъ, что **къ каждой группѣ можно примѣнить одинъ изъ предыдущихъ пріемовъ;** замѣнивъ, затѣмъ, каждую группу соотвѣтствующимъ разложеніемъ на сомножители, примѣняютъ вновь къ этимъ группамъ подходящій пріемъ разложенія.

Напр.: 1) $x^5 - x^3 - x^2 + 1 = (x^5 - x^3) - (x^2 - 1) =$

$$= x^3(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^3 - 1) =$$

$$= (x + 1)(x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) =$$

$$= (x + 1)(x - 1)^2(x^2 + x + 1).$$

2) $a^2 + 2ab + b^2 - m^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - m^2 =$

$$= (a + b)^2 - m^2 = (a + b + m)(a + b - m).$$

3) $a^2 + 2ax + x^2 - ay - xy = (a^2 + 2ax + x^2) -$

$$-(ay + xy) = (a + x)^2 - y(a + x) = (a + x)(a + x - y).$$

4) $9 - c^2 + 9c^3 - c^5 = (9 + 9c^3) - (c^2 + c^5) =$

$9(1 + c^3) - c^2(1 + c^3) = (1 + c^3)(9 - c^2) =$

$= (1 + c)(1 - c + c^2)(3 + c)(3 - c).$

5) $a^2 + 2ab - 4ac - 4bc + 4c^2 = (a^2 - 4ac + 4c^2) +$

$+ (2ab - 4bc) = (a - 2c)^2 + 2b(a - 2c) =$

$= (a - 2c)[(a - 2c) + 2b] = (a - 2c)(a - 2c + 2b).$

§ **132**. Нѣкоторые трехчлены могутъ быть разложены способомъ группировки, если предварительно замѣнить одинъ изъ ихъ членовъ суммою или разностью двухъ подобныхъ членовъ.

Напр.:

1) $x^2 + 10x + 21 = x^2 + 7x + 3x + 21 =$

$= (x^2 + 7x) + (3x + 21) = x(x + 7) + 3(x + 7) =$

$= (x + 7)(x + 3).$

2) $x^2 - 2x - 15 = x^2 - (5x - 3x) - 15 =$

$= x^2 - 5x + 3x - 15 = (x^2 - 5x) + (3a - 15) =$

$= x(x - 5) + 3(x - 5) = (x - 5)(x + 3).$

3) $2a^2 - 5ab + 3b^2 = 2a^2 - 2ab - 3ab + 3b^2 =$

$= 2a(a - b) - 3b(a - b) = (a - b)(2a - 3b).$

4) $5a^2 - 3ab - 2b^2 = 5a^2 - 5ab + 2ab - 2b^2 =$

$= 5a(a - b) + 2b(a - b) = (a - b)(5a + 2b).$

§ **133**. Приведемъ нѣсколько болѣе сложныхъ примѣровъ разложенія многочленовъ на простѣйшіе сомножители.

1) $5m^4 + 10m^3 - 20m^2 - 40m = 5m(m^3 + 2m^2 -$
$- 4m - 8) = 5m\,[(m^3 + 2m^2) - (4m + 8)] =$
$= 5m\,[m^2(m+2) - 4(m + 2)] = 5m\,[(m + 2)(m^2 - 4)] =$
$= 5m\,(m + 2)\,(m + 2)\,(m - 2) = 5m\,(m + 2)^2(m - 2).$

2) $a^{2n} - a^{4n} - 2a^{7n} - a^{10n} = a^{2n}\,(1 - a^{2n} - 2a^{5n} - a^{8n}) =$
$= a^{2n}\,[1 - (a^{2n} + 2a^{5n} + a^{8n})] = a^{2n}\,[1 - (a^n + a^{4n})^2] =$
$= a^{2n}\,[(1 + a^n + a^{4n})\,(1 - a^n - a^{4n})] =$
$= a^{2n}\,(1 + a^n + a^{4n}]\,(1 - a^n - a^{4n}).$

3) $a^3x + a^2x - 4a^2x^2 - 2ax^2 + 4ax^3 = ax\,(a^2 + a -$
$- 4ax - 2x + 4x^2) = ax\,[(a^2 - 4ax + 4x^2) + (a - 2x)] =$
$= ax\,[(a - 2x)^2 + (a - 2x)] = ax\,(a - 2x)\,(a - 2x + 1).$

4) $x^3 + x^2y + xyz + z^2y - z^3 = (x^3 - z^3) + x_2y +$
$+ xyz + yz^2) = (x - z)\,(x^2 + xz + z^2) + y\,(x^2 + xz + z^2) =$
$= (x^2 + xz + z^2)\,(x - z + y).$

Общій наибольшій дѣлитель одночленовъ и многочленовъ.

§ **134. Общимъ дѣлителемъ нѣскольнихъ одночленовъ называется всякій одночленъ, на который данные одночлены дѣлятся безъ остатка.**

Напр.: $5a^3b$ есть общій дѣлитель для $20a^5b$ и $15a^3b^4$, потому что

$$20a^5b : 5a^3b = 4a^2$$

$$15a^3b^4 : 5a^3b = 3b^3.$$

Очевидно, что въ составъ общаго дѣлителя могутъ войти только общіе множители данныхъ одночленовъ. Поэтому для составленія общаго **наибольшаго** дѣлителя поступаютъ по слѣдующему правилу:

Чтобы найти общій наибольшій дѣлитель для одночленовъ, надо, разложивъ ихъ коэффиціенты на первоначальные множители, взять общіе числовые и буквенные множители въ низшихъ степеняхъ и ихъ перемножить.

Напр.:

$$1)\ \left|\begin{aligned} 12a^3b^3x^5 &= 2^2\cdot 3a^3b^3x^5 \\ 30a^2b^3xy^2 &= 2\cdot 3\cdot 5a^2b^3xy^2 \\ 90a^4b^4x^2z &= 2\cdot 3^2\cdot 5a^4b^4x^2z \end{aligned}\right.$$

Общій наибольшій дѣлитель $= 2\cdot 3a^2b^3x = 6a^2b^3x$.

$$2)\ \left\{\begin{aligned} 140a^4bx^{n-3} &= 2^2\cdot 5\cdot 7a^4bx^{n-3} \\ 83a^5b^2x^{n-3} &= 2^2\cdot 3\cdot 7a^5b^2x^{n-1} \\ 56a^3x^{n-1} &= 2^3\cdot 7a^3x^{n-1} \end{aligned}\right.$$

Общій наибольшій дѣлитель $= 2^2\cdot 7a^3x^{n-3} = 28a^3x^{n-3}$.

§ **135.** Предыдущее правило можно примѣнить и для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя многочленовъ, приведя послѣднія къ одночленному виду посредствомъ разложенія на простѣйшіе множители. Поэтому:

Чтобы найти общій наибольшій дѣлитель многочленовъ, надо разложить ихъ на простѣйшіе сомножители, взять общіе числовые и буквенные сомножители (одночленные и многочленные) въ низшихъ степеняхъ и ихъ перемножить.

Напр.:

$$1)\ \begin{cases} 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 2^2x^2(x-3). \\ 6x^5 - 162x^2 = 6x^2(x^3-27) = \\ \qquad = 2\cdot 3x^2(x-3)(x^2+3x+9). \end{cases}$$

Общій наибольшій дѣлитель $= 2x^2(x-3)$.

$$2)\ \begin{cases} 3x^3 - 6ax^2 = 3x^2(x-2a) \\ 3x^3 - 12ax^2 + 12a^2x = 3x(x^2 - 4ax + 4a^2) = \\ \qquad = 3a(x-2a)^2. \end{cases}$$

Общій наибольшій дѣлитель $= 3x(x-2a)$.

$$3)\ \begin{cases} a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3 \\ 5a^3x - 5ab^2x = 5ax(a^2-b^2) = 5ax(a+b)(a-b). \\ 2a^2x - 4abx + 2b^2x = 2x(a^2-2ab+b^2) = 2x(a-b)^2. \end{cases}$$

Общій наибольшій дѣлитель $= a - b$.

Сокращеніе дробей.

§ **136**. **Чтобы сократить дробь, надо числитель и знаменатель раздѣлить на ихъ общій наибольшій дѣлитель.**

Напр.:

$$1)\ \overbrace{\frac{ab^2}{abc}}^{ab} = \frac{b}{c}\,; \quad 2)\ \overbrace{\frac{18a^2b^2y}{24a^2b^2x}}^{6a^2b^2} = \frac{3b^2y}{4x}\,;$$

$$3)\ \frac{5ab+15b^2}{5a^2-45b^2} = \frac{5b(a-3b)}{5(a^2-9b^2)} = \overbrace{\frac{5b(a-3b)}{5(a+3b)(a-3b)}}^{3(a-3b)} =$$

$$= \frac{b}{a+3b}.$$

$$4)\ \frac{x^2+6x+5}{2x^2-2}=\frac{x^2+x+5x+5}{2\,(x^2-1)}=\frac{x(x+1)+5(x+1)}{2\,(x+1)\,(x-1)}=$$

$$=\frac{(x+1)\,(x+5)}{2\,(x+1)\,(x-1)}\overbrace{}^{x+1}=\frac{x+5}{2(x-1)}=\frac{x+5}{2x-2}\,.$$

Общее наименьшее краткое одночленовъ и многочленовъ.

§ **137**. **Общимъ кратнымъ нѣсколькихъ одночленовъ называется такой одночленъ, который дѣлится безъ остатка на всѣ данные одночлены.**

Напр.: $36a^7b^4$ есть кратное одночленовъ $4a^3b^4$ и $12a^4b$ потому что

$$36a^7b^4 : 4a^3b^4 = 9a^4$$

$$36a^7b^4 : 12a^4b = 3a^3b^3.$$

Очевидно, что въ составъ общаго кратнаго должны входить множители данныхъ одночленовъ. Поэтому для составленія общаго наименьшаго кратнаго должно поступать по такому правилу:

Чтобы найти общее наименьшее кратное одночленовъ, надо разложить ихъ коэффиціенты на первоначальные множители, выбрать всѣ различные множители (числовые и буквенные) въ высшихъ степеняхъ и ихъ перемножить.

Напр.:

$$\left.\begin{array}{r}1)\,2a^2b^2\\ 3ac^2\\ 5b^2c^3\end{array}\right\}\ \text{Общее наим. кратное}\ \begin{array}{l}=2\,.\,3\,.\,5a^2b^2c^3=\\ =30a^2b^2c^3\,.\end{array}$$

$$2)\left\{\begin{array}{l} 96a^5b^4 = 2^5 \,.\, 3a^5b^4 \\ 16ac^3 = 2^4ac^3 \\ 24a^2x = 2^3 \,.\, 3a^2x \\ 12c^2bx^2 = 2^2 \,.\, 3c^2bx^2 \end{array}\right.$$

Общее наим. кратное $= 2^5 \,.\, 3a^5b^4c^3x^2 = 96a^5b^4c^3x^2$.

§ **138**. **Чтобы найти общее наименьшее кратное многочленовъ, надо ихъ разложить на простѣйшiе множители, выбрать всѣ разные множители въ высшихъ степеняхъ и ихъ перемножить.**

Напр.:

$$1)\left\{\begin{array}{l} ax^2 - a^2x - 2a^3 = a(x^2 - ax - 2a) \\ 2a^2x - 4a^3 = 2a^2(x - 2a) \end{array}\right.$$

Общее наим. кратное $= 2a^2(x - 2a)(x^2 - ax - 2a)$.

$$2)\left\{\begin{array}{l} 2a^4 - 2x^4 = 2(a^4 - x^4) = 2(a+x)(a-x)(a^2+x^2) \\ 3a^2x^2 - 3x^4 = 3x^2(a^2 - x^2) = 3x^2(a+x)(a-x) \\ 4a^4 - 4a^3x - 4a^3(a-x) - 2^2a^3(a-x) \end{array}\right.$$

Общее наим. кратное $= 2^2 \,.\, 3x^2a^3(a+x)(a-x)(a^2+x^2) =$
$= 12a^3x^2(a+x)(a-x)(a^2+x^2)$.

Приведенiе дробей къ общему знаменателю.

§ **139**. **Чтобы привести дроби къ общему знаменателю, надо: 1) найти для всѣхъ знаменателей общее наименьшее кратное, 2) для каждаго знаменателя найти дополнительный множитель, на который надо умножить данный знаменатель для полученiя общаго наименьшаго**

кратнаго, и 3) на дополнительный множитель умножить числитель и знаменатель каждой соотвѣтствующей дроби.

Напр.:

1) $\frac{3a^2}{5x^3}$; $\frac{5y^2}{3b^2}$; $\frac{4b^3}{a^3}$.

Общій знаменатель $= 3 \, . \, 5a^3b^2x^3$;

дополнит. множители: а) $3a^3b^2$; б) $5a^3x^3$; в) $15b^2x^3$;

Помноживъ данныя дроби на дополнительные множители ихъ знаменателей, получимъ:

а) $\frac{3a^2 \, . \, 3a^3b^2}{5x^3 \, . \, 3a^3b^2} = \frac{9a^5b^2}{15a^3b^2x^3}$; б) $\frac{5y^2 \, . \, 5a^3x^3}{3b^2 \quad 5a^3x^3} = \frac{25a^3x^3y^2}{15a^3b^2x^3}$;

$$\frac{4b^3 \, . \, 15b^2x^3}{a^3 \, . \, 15b^2x^3} = \frac{60b^5x^3}{15b^2x^3a^3} \, .$$

2) $\frac{5y}{9a^3b^4}$; $\frac{d^3}{6a^4b^3}$; $\frac{3}{a^2b^2}$.

Общій знаменатель $= 18a^4b^4$;

дополнит. множители: а) $2a$; б) $3b$; в) $18a^2b^2$.

После помноженія данныхъ дробей на дополнительные множители знаменателей получатся дроби:

$$\frac{10ay}{18a^4b^4}; \quad \frac{3bd^3}{18a^4b^4}; \quad \frac{54a^2b^2}{18a^4b^4} \, .$$

3) $\frac{a}{a-b}$; $\frac{b^2}{a^2+ab}$; $\frac{a^3}{a^2b-b^3}$.

Разложимъ знаменатели на множители:

а) $a - b$;

б) $a^2 + ab = a(a+b)$;

в) $a^2b - b^3 = b(a^2 - b^2) = b(a+b)(a-b)$.

Общій знаменатель $= ab(a+b)(a-b)$;

дополнит. множители: а) $ab(a+b)$; б) $b(a-b)$; в) a.

Послѣ помноженія данныхъ дробей на дополнительные множители знаменателей получатся дроби:

а) $\frac{a^2b\,(a+b)}{ab\,(a+b)\,(a-b)}$; б) $\frac{b^3\,(a-b)}{ab\,(a+b)\,(a-b)}$; в) $\frac{a^4}{ab\,(a+b)\,(a-b)}$.

4) $\frac{1}{a^2+5a+6}$; $\frac{1}{a^3+4a^2+3a}$; $\frac{1}{a^2+3a}$.

Разложеніе знаменателей на множители:

а) $a^2+5a+6=a^2+2a+3a+6=$

$=a\,(a+2)+3\,(a+2)=(a+2)\,(a+3)$;

б) $a^3+4a^2+3a=a\,(a^2+4a+3)=a\,(a^2+3a+a+3)=$

$=a\,[a(a+3)+(a+3)]=a(a+3)\,(a+1)$;

в) $a^2+3a=a(a+3)$;

Общій знаменатель $= a\,(a+2)\,(a+3)\,(a+1)$;

дополнит. множители $=$ а) $a\,(a+1)=a^2+a$;

б) $a+2$; в) $(a+2)\,(a+1)=a^2+3a+2$.

Послѣ помноженія данныхъ дробей на дополнительные множители знаменателей получатся дроби:

$$\frac{a^2+a}{a\,(a+2)\,(a+3)\,(a+1)};\quad \frac{a+2}{a\,(a+2)\,(a+3)\,(a+1)};$$

$$\frac{a^2+3a+2}{a\,(a+2)\,(a+3)\,(a+1)}.$$

Четыре основныя дѣйствія съ дробями.

§ **140. Чтобы сложить дроби съ одинаковыми знаменателями, надо сложить ихъ числители и подписать общій знаменатель.**

Требуется доказать, что

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}.$$

Въ справедливости этого равенства легко убѣдиться, умноживъ обѣ части его на m.

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)\cdot m=\frac{a+b+c}{m}\cdot m,$$

но $\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)m=\frac{a}{m}\cdot m+\frac{b}{m}\cdot m+\frac{c}{m}\cdot m=$

$$=a+b+c;$$

$\frac{a+b+c}{m}\cdot m=a+b+c$, но только равныя количества послѣ умноженія на одно и то же количество даютъ произведенія равныя.

§ **141. Чтобы сложить дроби съ различными знаменателями, надо привести ихъ къ общему наименьшему знаменателю и, сложивъ тогда числители, подъ ихъ суммой подписать общій знаменатель.**

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+cb}{bd}.$$

§ **142. Чтобы сложить цѣлое выраженіе съ дробью, надо цѣлое выраженіе умножить на знаменатель дроби,**

къ этому произведенію прибавить числитель и подъ суммою подписать знаменатель дроби.

$$k + \frac{a}{b} = \frac{kb}{b} + \frac{a}{b} = \frac{kb + a}{b}.$$

§ **143.** **Чтобы вычесть дробь изъ дроби, когда знаменатели ихъ равны, надо изъ числителя первой дроби вычесть числитель второй и подъ разностью подписать общій знаменатель.**

Требуется доказать, что

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Доказательство см. въ § 140.

§ **144.** **Чтобы вычесть дробь изъ дроби, когда знаменатели ихъ различны, надо привести ихъ къ общему наименьшему знаменателю и, вычтя второй числитель изъ перваго, подъ разностью подписать общій знаменатель.**

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

§ **145.** **Если уменьшаемое или вычитаемое цѣлое выраженіе, то надо умножить его на знаменатель дроби и, выполнивъ соотвѣтствующее вычитаніе, подписать подъ разностью общій знаменатель.**

1) $m - \frac{a}{b} = \frac{mb}{b} - \frac{a}{b} = \frac{mb - a}{b};$

2) $\frac{a}{b} - m = \frac{a}{b} - \frac{mb}{b} = \frac{a - mb}{b}.$

§ **146. Чтобы умножить дробь на дробь, надо произведеніе числителей раздѣлить на произведеніе знаменателей.**

Требуется доказать, что

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Назовемъ частное отъ дѣленія a на b черезъ p, частное отъ дѣленія c на d черезъ q, тогда

$$\frac{a}{b} = p; \quad \frac{c}{d} = q.$$

Отсюда $a = bp$; $c = dq$.

На основаніи аксіомы: если равныя количества умножить на равныя, то и произведенія будутъ равныя, получимъ: $ac = bpdq$;

на основаніи же аксіомы: если равныя количества раздѣлить на равныя, то и частныя будутъ равныя, получимъ: $\frac{ac}{bd} = \frac{bpdq}{bd}$, или, послѣ сокращенія, $\frac{ac}{bd} = p \cdot q$; но $p = \frac{a}{b}$; $q = \frac{c}{d}$; слѣдовательно, подставивъ на мѣсто p и q ихъ значенія, получимъ: $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

Что и требовалось доказать.

§ **147.** Если одинъ изъ сомножителей цѣлое выраженіе, то, подразумѣвая подъ нимъ знаменатель единицу, выполняютъ умноженіе по предыдущему правилу (§ 146).

$m \cdot \frac{a}{b} = \frac{m}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ma}{b}$, т. е. **чтобы умножить цѣ-**

лое выраженіе на дробь, надо цѣлое выраженіе умножить на числитель и полученное произведеніе раздѣлить на знаменатель.

§ **148.** $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{1} = \frac{am}{b}$, **т. е. чтобы умножить дробь на цѣлое выраженіе, надо числитель дроби умножить на цѣлое выраженіе, и это произведеніе раздѣлить на знаменатель.**

Примѣчаніе. Умноженіе дроби на цѣлое выраженіе можетъ быть выполнено еще и дѣленіемъ знаменателя на цѣлое выраженіе.

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b} = \frac{am : m}{b : m} = \frac{a}{b : m} .$$

§ **149. Чтобы раздѣлить дробь на дробь, надо числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, а знаменатель первый умножить на числитель второй, и первое произведеніе раздѣлить на второе.**

Требуется доказать, что $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Пусть частное отъ дѣленія a на b равно p и частное отъ дѣленія c на d равно q. $\frac{a}{b} = p$; $\frac{c}{d} = q$; отсюда $a = bp$; $c = dq$.

На основаніи аксіомы: если равныя количества умножить на равныя, то и произведенія получатся равныя, умноживъ a на dq и bp на c, получимъ, что $adq = bpc$.

На основаніи аксіомы: если равныя количества раздѣлить на равныя, то и частныя получатся равныя, раздѣливъ обѣ части на bcq, получимъ:

$\frac{adq}{bcq} = \frac{bpc}{bcq}$ или $\frac{ad}{bc} = \frac{p}{q}$ или $\frac{ad}{bc} = p:q$. Подставивъ же на мѣсто p и q ихъ значенія, получимъ $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Что и требовалось доказать.

§ **150**. Если дѣлимое или дѣлитель цѣлое выраженіе, то, принявъ его за дробь со знаменателемъ единица, выполняютъ дѣленіе по предыдущему правилу (§ 149).

$m : \frac{a}{b} = \frac{m}{1} : \frac{a}{b} = \frac{mb}{a}$, т. е. **чтобы раздѣлить цѣлое выраженіе на дробь, надо цѣлое выраженіе умножить на знаменатель и это произведеніе раздѣлить на числитель.**

§ **151**. $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b} : \frac{m}{1} = \frac{a}{bm}$, т. е. **чтобы раздѣлить дробь на цѣлое выраженіе, надо числитель оставить безъ измѣненія, а знаменатель умножить на цѣлое выраженіе.**

Примѣчаніе. Дѣленіе дроби на цѣлое выраженіе можно выполнить также дѣленіемъ числителя на цѣлое выраженіе, при чемъ знаменатель остается безъ измѣненія. Дѣйствительно:

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm} = \frac{a:m}{bm:m} = \frac{a:m}{b}.$$

§ **152**. При умноженіи или дѣленіи многочленныхъ дробныхъ выраженій слѣдуетъ предварительно привести многочленныя выраженія къ виду дробей, а затѣмъ уже выполнить умноженіе или дѣленіе надъ полученными результатами.

Напр.:

$$1)\ \left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right):\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1\right).$$

Приводимъ дѣлимое въ видъ дроби:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1=\frac{x^2-ax+a^2}{a^2};$$

Дѣлаемъ то же самое съ дѣлителемъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1=\frac{x^2+ax+a^2}{a^2},$$

Такимъ образомъ:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right):\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1\right)=\frac{x^2-ax+a^2}{a^2}:\frac{x^2+ax+a^2}{a^2}=$$

$$=\frac{a^2\ (x^2-ax+a^2)}{a^2\ (x^2+ax+a^2)}=\frac{x^2-ax+a^2}{x^2+ax+a^2}.$$

$$2)\ \left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\left(2+\frac{2b}{a-b}\right).$$

Приводимъ множимое въ видъ дроби:

$$1-\frac{a-b}{a+b}=\frac{a+b-(a-b)}{a+b}=\frac{a+b-a+b}{a+b}=\frac{2b}{a+b};$$

Дѣлаемъ то же съ множителемъ:

$$2+\frac{2b}{a-b}=\frac{2\ (a-b)+2b}{a-b}=\frac{2a-2b+2b}{a-b}=\frac{2a}{a-b};$$

слѣдовательно:

$$\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)=\frac{2b}{a+b}\cdot\frac{2a}{a-b}=$$

$$=\frac{4ab}{(a+b)\ (a-b)}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

3) $\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{4x^2}{x^2-1}\right):-2\left(\frac{1}{x^3+x^2}-\right.$

$\left.-\frac{1-x}{x^2}-1\right)$;

Приводимъ дѣлимое въ видъ одной дроби:

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{4x^2}{x^2-1}=\frac{(1+x)^2}{1-x^2}-\frac{(1-x)^2}{1-x^2}+\frac{4x^2}{x^2-1}=$$

$$=\frac{(1+x)^2}{1-x^2}-\frac{(1-x)^2}{1-x^2}-\frac{4x^2}{1-x^2}=\frac{(1+x)^2-(1-x)^2-4x^2}{1-x^2}=$$

$$=\frac{1+2x+x^2-1+2x-x^2-4x^2}{1-x^2}=\frac{4x-4x^2}{1-x^2}=$$

$$=\frac{4x\,(1-x)}{(1+x)\,(1-x)}=\frac{4x}{1+x};$$

Дѣлаемъ то же съ дѣлителемъ (безъ множителя —2):

$$\frac{1}{x^3+x^2}-\frac{1-x}{x^2}-1=\frac{1}{x^2\,(x+1)}-\frac{(1-x)\,(x+1)}{x^2\,(x+1)}-$$

$$-\frac{x^2\,(x+1)}{x^2\,(x+1)}=\frac{1-(1-x)\,(1+x)-x^2\,(x+1)}{x^2\,(x+1)}=$$

$$=\frac{1-(1-x^2)-(x^3+x^2)}{x^2\,(x+1)}=\frac{1-1+x^2-x^3-x^2}{x^2\,(x+1)}=$$

$$=\frac{-x^3}{x^2\,(x+1)}=\frac{-x}{x+1};$$

весь дѣлитель (съ множителемъ —2) будетъ:

$$-2\cdot\frac{-x}{x+1}=\frac{2x}{x+1};$$

Такимъ образомъ:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{4x^2}{x^2-1}\right):-2\left(\frac{1}{x^3+x^2}-\frac{1-x}{x^2}-1\right)=$$

$$=\frac{4x}{1+x}:\frac{2x}{x+1}=\frac{4x\,(x+1)}{2x\,(1+x)}=2.$$

Уравненія первой степени.

§ **153**. Два равныхъ количества, связанныя знакомъ равенства (=), называются **равенствомъ.** Выраженія, стоящія по обѣ стороны знака равенства, называются частями равенства; часть, стоящая передъ знакомъ равенства называется первою частью, а стоящая за знакомъ равенства называется второю.

Равенства бываютъ двухъ родовъ: **тождества и уравненія.**

§ **154. Тождествомъ называется или равенство очевидное или такое буквенное равенство, которое оказывается справедливымъ при всевозможныхъ произвольныхъ значеніяхъ входящихъ въ него буквъ.**

Напр. $5 = 2 + 3$;

$$\frac{10-5}{2} = \frac{7+3}{4}\,;\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$1 - \frac{m}{n} = (n-m)\cdot\frac{1}{n}\,.$$

§ **155. Уравненіемъ называется такое буквенное равенство, которое справедливо только при нѣкоторыхъ значеніяхъ входящихъ въ него буквъ.**

Напр.: $3x - 2 = 10$ есть уравненіе, потому что это равенство справедливо только при $x=4$.

Равенство $ax + b = a + b$ тоже уравненіе, потому что оно справедливо только при $x=1$.

§ **156**. При помощи тождествъ является возможность выражать наглядно, въ видѣ формулъ, различныя правила и свойства алгебраическихъ выраженій. Уравненіями пользуются при рѣшеніи задачъ.

§ **157.** Нѣкоторыя буквы, входящія въ уравненія, называются **извѣстными количествами**, подобно ариѳметическимъ числамъ, и каждой такой буквѣ можно придавать произвольное ариѳметическое значеніе; другимъ же буквамъ нельзя придавать произвольнаго значенія, и ихъ называютъ **неизвѣстными количествами.** Для отличія извѣстныхъ количествъ отъ неизвѣстныхъ условились извѣстныя обозначать начальными буквами французскаго алфавита (a, b, c, d, ...), а неизвѣстныя—послѣдними (..... x, y, z).

Примѣчаніе. Наиболѣе употребительныя для обозначенія неизвѣстныхъ количествъ буквы x, y, z; если же неизвѣстныхъ количествъ болѣе, то къ нимъ присоединяютъ еще буквы—t, u, v, w, ...

Члены, заключающіе въ себѣ неизвѣстное количество, условились называть **неизвѣстными членами**, а члены, въ которыхъ неизвѣстнаго нѣтъ, **извѣстными членами.**

§ **158. Корнемъ или рѣшеніемъ уравненія называется значеніе неизвѣстнаго количества, которое, будучи вмѣсто него подставлено въ уравненіе, дѣлаетъ его несомнѣннымъ равенствомъ.**

Такъ какъ несомнѣнное равенство есть тождество, то говорятъ: **корнемъ или рѣшеніемъ уравненія называется то значеніе неизвѣстнаго, которое обращаетъ уравненіе въ тождество.**

Употребляется еще и слѣдующее опредѣленіе: **корнемъ или рѣшеніемъ уравненія называется то значеніе неизвѣстнаго, которое удовлетворяетъ уравненію.**

Уравненіе можетъ удовлетворяться однимъ, двумя и болѣе корнями.

Рѣшить уравненіе значитъ найти всѣ его корни.

§ **159**. Если въ уравненіи одно неизвѣстное количество, то оно называется **уравненіемъ съ однимъ неизвѣстнымъ**; если неизвѣстныхъ въ уравненіи два, то оно называется **уравненіемъ съ двумя неизвѣстными**; если неизвѣстныхъ три или болѣе, то **уравненіе** называется **со многими неизвѣстными.**

Напр.:

$3x - 1 = 2x + 5$ ..... уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ;
$2x - 3y = 1$ .... уравненіе съ двумя неизвѣстными.
$x + y - z + t = 4$ ..... уравненіе со многими неизвѣстными.

§ **160**. Если всѣ неизвѣстныя входятъ въ уравненіе только въ первыхъ степеняхъ и нѣтъ ни одного члена, въ который бы входило произведеніе неизвѣстныхъ, то уравненіе называется **уравненіемъ первой степени. Уравненіе** называется **квадратнымъ или второй степени**, если въ него, послѣ окончательныхъ упрощеній, входитъ неизвѣстное во второй степени или въ одинъ изъ членовъ входитъ произведеніе двухъ неизвѣстныхъ. По подобнымъ причинамъ называютъ уравненія **кубическими, четвертой степени** и т. д.

§ **161**. **Уравненія называются тождественными, если они удовлетворяются одними и тѣми же корнями.**

Напр.

$$2x + 3 = x + 8$$

и $$\frac{3x - 5}{2} = x$$

—эти уравненія тождественны, потому что оба удовлетворяются однимъ и тѣмъ же корнемъ 5.

Уравненія $(10 - 2x) \cdot 3 = x + 9$ и $4x = 20$ не тождественны, потому что первое удовлетворяется только однимъ корнемъ 3, а второе только однимъ корнемъ 5.

§ **162. Если къ обѣимъ частямъ уравненія прибавимъ по-ровну или отнимемъ по-ровну, то получимъ уравненіе тождественное съ даннымъ.**

Въ самомъ дѣлѣ, назвавъ черезъ A и B первую и вторую части уравненія, можемъ данное уравненіе обозначить такъ:

$$A = B \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Это уравненіе имѣетъ свои корни.

На основаніи извѣстной аксіомы, имѣемъ

$$A \pm m = B \pm m \quad . \qquad . \quad (2)$$

Это второе равенство есть также уравненіе, потому что оно справедливо не при всевозможныхъ произвольныхъ значеніяхъ входящихъ въ него буквъ, а только при условіи, что $A = B$, слѣдовательно уравненіе (2) удовлетворяется тѣми значеніями неизвѣстнаго, при которыхъ $A = B$, т. е. тѣми же значеніями, которыми удовлетворяется и уравненіе (1), а это значитъ, что оба уравненія тождественны.

§ **163. Члены уравненія можно переносить изъ одной части его въ другую, мѣняя при этомъ знакъ у перенесеннаго члена на обратный.**

Напр.:

$$3x - 7 = x + 5.$$

Чтобы перенести въ правую часть членъ (-7), прибавимъ къ обѣимъ частямъ уравненія по $+7$ (§ 162); тогда получимъ:

$$3x - 7 + 7 = x + 5 + 7 \text{ или}$$

$$3x = x + 5 + 7.$$

Такимъ образомъ цѣль достигнута.

§ 164. **Всякое уравненіе можно привести къ виду многочлена, равнаго нулю.**

Для этого, на основаніи § 163, необходимо всѣ члены одной части уравненія перенести въ другую съ обратными знаками. Напр.:

$$2x^2 - 4 = x + 6$$

Перенеся всѣ члены изъ правой части въ лѣвую съ обратными знаками (§ 163), получимъ:

$$2x^2 - 4 - x - 6 = 0.$$

§ **165**. **Если обѣ части уравненія умножимъ на одно и то же количество, не заключающее въ себѣ неизвѣстнаго, то получимъ уравненіе, тождественное съ даннымъ.**

Пусть данное уравненіе

$$A = B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

имѣетъ нѣкоторые корни. На основаніи извѣстной аксіомы, помноживъ обѣ части на m, будемъ имѣть равенство:

$$Am = Bm \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Это равенство есть уравненіе, такъ какъ оно справедливо не при всякихъ значеніяхъ входящихъ въ него буквъ, а только при тѣхъ значеніяхъ, при которыхъ $A = B$. Но значенія неизвѣстныхъ, при которыхъ $A=B$, суть корни уравненія (1), слѣдовательно уравненіе (2) удовлетворяется только тѣми корнями, которыми удовлетворяется и уравненіе (1), т. е. уравненія (1) и (2) тождественны.

Слѣдствіе I. У всѣхъ членовъ уравненій можно перемѣнить знаки на противоположные, такъ какъ это равносильно умноженію обѣихъ частей уравненія на -1.

Слѣдствіе II. Если уравненіе содержитъ дробные члены, то, приведя обѣ части уравненія къ общему наименьшему знаменателю, можно этотъ знаменатель отбросить, такъ какъ это будетъ соотвѣтствовать умноженію обѣихъ частей уравненія на одно и то же количество.

§ **166. Если обѣ части уравненія раздѣлить на одно и то же количество, не заключающее въ себѣ неизвѣстнаго, то получимъ уравненіе, тождественное съ даннымъ.**

Доказательство подобно приведенному въ § 165.

Примѣчаніе. Что касается тѣхъ случаевъ, когда множитель или дѣлитель заключаетъ въ себѣ неизвѣстное, то они будутъ разсмотрѣны въ отдѣлѣ дополнительныхъ статей.

Рѣшеніе уравненій 1-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

§ **167.** Рѣшеніе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ основано на послѣдовательныхъ преобразованіяхъ даннаго уравненія въ новыя уравненія, съ нимъ тождественныя, но болѣе простыя по виду. Покажемъ эти преобразованія на примѣрахъ.

I. $$\frac{10x+11}{6}-\frac{14x+13}{3}+\frac{2(4x+9)}{7}=\frac{7+6x}{4}.$$

Раскроемъ предварительно скобки въ числителѣ третьей дроби:

$$\frac{10x+11}{6}-\frac{14x+13}{3}+\frac{8x+18}{7}=\frac{7+6x}{4}.$$

Приведемъ всѣ члены къ общему наименьшему знаменателю и его отбросимъ (§ 165, слѣдствіе II). Общій знаменатель для 6, 3, 7 и 4 = 84, слѣдовательно

$$(10x+11).14-(14x+13).28+(8x+18).12=$$
$$=(7+6x).21;$$

$$140x+154-392x-364+96x+216=147+126x.$$

На основаніи § 164, получаемъ уравненіе, тождественное съ даннымъ, перенося всѣ неизвѣстные члены въ одну часть уравненія, а всѣ извѣстные въ другую:

$$140x-392x+96x-126x=147-154+364-216.$$

Сдѣлаемъ въ каждой части послѣдняго уравненія приведенія:

$$-282x=141$$

и, наконецъ, на основаніи § 166, раздѣливъ обѣ части уравненія на коэффиціентъ при неизвѣстномъ, получимъ

$$x=\frac{141}{-282} \text{ или } x=-\frac{1}{2}.$$

Уравненіе $x=-\frac{1}{2}$ указываетъ искомый корень даннаго уравненія, такъ какъ это уравненіе и данное тождественны.

Провѣримъ, дѣйствительно ли данное уравненіе удовлетворяется корнемъ $-\frac{1}{2}$.

Для этого поставимъ въ данное уравненіе на мѣсто x его значеніе $-\frac{1}{2}$.

$$\frac{-5+11}{6}-\frac{-7+13}{3}+\frac{2(-2+9)}{7}=\frac{7-3}{4},$$

$$\text{или } \frac{6}{6}-\frac{6}{3}+\frac{2.7}{7}=\frac{4}{4},$$

$$\text{или } 1-2+2=1, \text{ или } 1=1.$$

Такъ какъ отъ подстановки получилось тождество, то $-\frac{1}{2}$ есть корень даннаго уравненія.

II. $$\frac{ax}{b}+\frac{b-x}{2a}+\frac{a(x-b)}{3b}=a$$

Раскрываемъ скобки:

$$\frac{ax}{b}+\frac{b-x}{2a}+\frac{ax-ba}{3b}=a.$$

Освобождаемъ уравненіе отъ дробей:

$$ax.6a+(b-x)3b+(ax-ab)2a=a.6ab.$$

$$6a^2x+3b^2-3bx+2a^2x-2a^2b=6a^2b.$$

Перенесемъ неизвѣстные члены въ одну часть уравненія, а извѣстные въ другую:

$$6a^2x-3bx+2a^2x=6a^2b-3b^2+2a^2b.$$

Дѣлаемъ въ обѣихъ частяхъ приведеніе:

$$8a^2x-3bx=8a^2b-3b^2.$$

Такъ какъ неизвѣстные члены не подобны, то беремъ неизвѣстное за скобки, какъ ихъ общій множитель:

$$(8a^2 - 3b)x = 8a^2b - 3b^2.$$

Алгебраическій многочленъ, стоящій множителемъ при неизвѣстномъ, называется **коэффиціентомъ неизвѣстнаго.**

Дѣлимъ обѣ части послѣдняго уравненія на коэффиціентъ неизвѣстнаго:

$$x = \frac{8a^2b - 3b^2}{8a^2 - 3b} \text{ или}$$

$$x = \frac{b(8^2 - 3b)}{8a^2 - 3b} \text{ или } x = b.$$

Итакъ, корень даннаго уравненія есть b. Повѣримъ это.

$$\frac{ab}{b} + \frac{b - b}{2a} + \frac{a(b - b)}{3b} = a$$

$$a + 0 + 0 = a \text{ или } a = a.$$

Дѣйствительно, корень даннаго уравненія равенъ b, такъ какъ отъ подстановки его въ уравненіе на мѣсто неизвѣстнаго получилось тождество.

Изъ приведенныхъ примѣровъ выводимъ правило:

§ 168. Чтобы рѣшить уравненіе 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ, надо: 1) освободить уравненіе отъ скобокъ и дробей, 2) перенести всѣ неизвѣстные члены въ одну часть уравненія, а всѣ извѣстные въ другую, 3) въ обѣихъ частяхъ сдѣлать приведеніе, 4) взять неизвѣстное за скобки, если коэффиціенты при немъ буквенные, и 5) обѣ части уравненія раздѣлить на коэффиціентъ неизвѣстнаго.

Примѣры рѣшенія болѣе сложныхъ уравненій.

§ **169.** $\frac{x^2-6}{x^3+8}+\frac{4}{5x^2-10x+20}-\frac{1}{x+2}=0.$

Рѣшеніе. Необходимо освободить уравненіе отъ дробнаго вида. Для этого надо привести всѣ его члены къ общему знаменателю.

Разложимъ знаменатели на множители:

а) $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

б) $5x^2-10x+20=5(x^2-2x+4)$

в) $x+2$

Общій наименьшій знаменатель $=5(x+2)(x^2-2x+4)$;

Дополн. множители а) 5; б) $(x+2)$; в)(x^2-2x+4).

По приведеніи даннаго уравненія къ общему знаменателю и освобожденіи отъ этого знаменателя умноженіемъ на него обѣихъ частей уравненія: въ первой части уравненія знаменатель отпадетъ, а во второй (см. § 165, слѣдствіе II), получится 0, уравненіе приметъ видъ:

$$(x^2-6).5+4(x+2)-5(x^2-2x+4)=0$$

Сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$5x^2-30+4x+8-5x^2+10x-20=0.$$

Перенося извѣстныя въ правую часть, получаемъ:

$$5x^2+4x-5x^2+10x=30-8+20$$

или:

$$14x = 42\,;\ x = \frac{42}{14}\,;\ x = 3.$$

Повѣрка. $\frac{9-6}{27+8} + \frac{4}{45-30+20} - \frac{1}{3+2} = 0$

$$\frac{3}{35} + \frac{4}{35} - \frac{1}{5} = 0\,;\ \frac{3+4-7}{35} = 0;\ 0 = 0.$$

II. $$\frac{a}{nx-2n^2} + \frac{n}{ax+2an-a^2n} = \frac{4a+n^2}{x^2-anx+2an^2-4n^2}.$$

Поступаемъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ:

а) $nx - 2n^2 = n(x-2n)$;

б) $ax + 2an - a^2n = a(x+2n-an)$;

в) $x^2 - anx + 2an^2 - 4n^2 = (x^2 - 4n^2) - (anx - 2an^2) =$
$= (x+2n)(x-2n) - an(x-2n) = (x+2n-an)(x-2n)$.

Общій наименьшій знаменатель $= an(x-2n)(x+2n-an)$.

Доп. множители а) $a(x+2n-an)$; б) $n(x-2n)$; в) an.

Уравненіе безъ знаменателя:

$$a \cdot a(x+2n-an) + n \cdot n(x-2n) = (4a+n^2)\cdot an;$$
$$a^2x + 2a^2n - a^3n + n^2x - 2n^3 = 4a^2n + an^3;$$
$$a^2x + n^2x = 4a^2n + an^3 - 2a^2n + a^3n + 2n^3;$$
$$(a^2+n^2)x = 2a^2n + an^3 + a^3n + 2n^3.$$

$$x = \frac{2a^2n + an^3 + a^3n + 2n^3}{a^2+n^2}\,;$$

но $2a^2n + an^3 + a^3n + 2n^3 = n(2a^2 + an^2 + a^3 + 2n^2) =$
$= n[(2a^2 + 2n^2) + (an^2 + a^3)] = n[2(a^2+n^2) + a(n^2+a^2)] =$
$= n(a^2+n^2)(2+a)$,

а потому $x = \frac{n(a^2+n^2)(2+a)}{a^2+n^2} = n(2+a)$.

Повѣрка.

$$\frac{a}{n^2(2+a)-2n^2}+\frac{n}{an(2+a)+2an-a^2n}=$$

$$=\frac{4a+n^2}{n^2(2+a)^2-an^2(2+a)+2an^2-4n^2}.$$

Упростимъ сначала каждый знаменатель:

1) $n^2(2+a)-2n^2=2n^2+an^2-2n^2=an^2$.

2) $an(2+a)+2an-a^2n=2an+a^2n+2an-$

$$-a^2n=4an.$$

3) $n^2(2+a)^2-an^2(2+a)+2an^2-4n^2=$

$$=4n^2+4an^2+a^2n^2-2an^2-a^2n^2+2an^2-$$

$$-4n^2=4an^2.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{a}{an^2}+\frac{n}{4an}=\frac{4a+n^2}{4an^2},$$

или $$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4a}=\frac{4a+n^2}{4an^2}.$$

или $$\frac{4a+n^2}{4an^2}=\frac{4a+n^2}{4an^2}.$$

Составленіе уравненій.

§ **170.** **Составить уравненіе значитъ выразить въ видѣ равенства зависимость между искомыми числами и данными на основаніи условій задачи.**

Пріемъ, которымъ пользуются при составленіи уравненій, называется **способомъ повѣрки задачи** и заключается въ томъ, что, назвавъ неизвѣстныя числа задачи буквами x, y, z... и считая ихъ **какъ бы уже найденными**, производятъ, на основаніи условій задачи, повѣрку, которая и приводитъ къ формуламъ, связывающимъ искомыя числа съ данными, т. е. къ уравненіямъ.

§ **171. Примѣръ 1-й.** Какое число слѣдуетъ прибавить къ числителю и знаменателю дроби $\frac{2}{7}$, чтобы получить дробь $\frac{3}{4}$?

Составленіе уравненія. Предположимъ, что искомое число найдено, и оно равняется x; тогда, прибавивъ его къ числителю, получимъ $2+x$, а прибавивъ его къ знаменателю, получимъ $7+x$; вся же дробь $\frac{2}{7}$ послѣ этихъ измѣненій числителя и знаменателя приметъ видъ $\frac{2+x}{7+x}$, и такъ какъ, по условію задачи, она должна равняться дроби $\frac{3}{4}$, то, слѣдовательно,

$$\frac{2+x}{7+x}=\frac{3}{4}.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ искомое число.

Рѣшеніе уравненія: $\frac{2+x}{7+x}=\frac{3}{4}$;

$$8+4x=21+3x;$$

$$4x-3x=21-8;\quad x=13.$$

Повѣрка задачи. Прибавивъ 13 къ числителю 2, получимъ 15; прибавивъ 13 къ знаменателю 7, получимъ 20; новая дробь $\frac{15}{20}$, по сокращеніи на 5, равна $\frac{3}{4}$; слѣдовательно задача рѣшена вѣрно.

Примѣчаніе. При составленіи уравненій мы можемъ, не замѣчая ошибки, составить уравненіе, не соотвѣтствующее условіямъ задачи. Корень такого уравненія, удовлетворяя уравненію, не будетъ представлять рѣшенія данной задачи, такъ какъ не будетъ соотвѣтствовать ея условіямъ. По этой причинѣ, составивъ уравненіе для данной задачи и найдя его корень, слѣдуетъ **повѣрить не уравненіе, а задачу,** т. е. убѣдиться, что найденное при помощи уравненія число соотвѣтствуетъ всѣмъ условіямъ задачи.

Примѣръ 2-й. Старшему брату 36 лѣтъ, а младшему 28. Сколько лѣтъ тому назадъ младшій братъ былъ втрое моложе старшаго?

Составленіе уравненія. Предположимъ, что задача рѣшена, и что искомое число лѣтъ равно x. Старшему брату x лѣтъ тому назадъ было $36-x$ лѣтъ, а младшему $28-x$ лѣтъ; значитъ x лѣтъ тому назадъ старшій братъ былъ въ $\frac{36-x}{28-x}$ разъ старше младшаго, а такъ какъ это частное, согласно условію задачи, должно равняться 3, то получаемъ уравненіе

$$\frac{36-x}{28-x}=3\,.$$

Рѣшеніе уравненія. $\frac{36-x}{28-x}=3\,.$

$$36-x=3(28-x)$$

$$36-x=84-3x$$

$$3x-x=84-36$$

$$2x=48\,;\quad x=24\,.$$

Повѣрка задачи. 24 года тому назадъ старшему брату было 12 лѣтъ, а младшему 4 года; 12 болѣе 4 въ 3 раза; слѣдовательно число 24 представляетъ вѣрное рѣшеніе данной задачи.

Примѣръ 3-й. Въ обществѣ желали собрать нѣкоторую сумму денегъ въ пользу бѣднаго семейства. Если каждый изъ присутствующихъ пожертвуетъ по одному рублю, то будетъ собрано 3-мя рублями болѣе предполагаемой суммы; если же каждый внесетъ по $\frac{1}{2}$ рубля, то до предполагаемой суммы будетъ недоставать 11 рублей. Изъ сколькихъ лицъ состояло общество и какую сумму предполагалось собрать?

Составленіе уравненія. Предположимъ, общество состояло изъ x лицъ. Если каждый изъ нихъ внесетъ по одному рублю, то все общество соберетъ x рублей; но эта сумма болѣе предположенной къ сбору на 3 рубля, слѣдовательно сумма, которую хотѣли собрать, составляетъ $x - 3$ рубля.

При другомъ условіи, т. е. когда каждое лицо внесло бы по $\frac{1}{2}$ рубля, сборъ со всего общества составилъ бы x разъ по $\frac{1}{2}$ рубля, т. е. $\frac{1}{2}x$ рублей; но эта сумма менѣе той, которую предположено было собрать, на 11 рублей; слѣдовательно сумма, которую хотѣли собрать, составляетъ $\frac{1}{2}x + 11$ рублей. Такъ какъ при обоихъ расчетахъ предполагалось собрать одну и ту же сумму, то формулы, выражающія ее, должны быть между собой равны, т. е. $x - 3$ должно равняться $\frac{1}{2}x + 11$.

Такимъ образомъ получается уравненіе:

$$x - 3 = \frac{1}{2}x + 11.$$

Рѣшеніе уравненія: $x - 3 = \frac{1}{2}x + 11.$

$$x - 3 = \frac{x}{2} + 11$$

$$2x - 6 = x + 22$$

$$2x - x = 22 + 6\,; \quad x = 28.$$

Повѣрка задачи. Прежде всего опредѣлимъ, какую сумму предполагалось собрать. Если лицъ было 28 и каждый далъ бы по рублю, то всего собрали бы 28 рублей, а предположенная сумма менѣе этой на 3 рубля; слѣдовательно предположенная къ сбору сумма была $28 - 3 = 25$ р. Теперь опредѣлимъ, будутъ ли 25 руб. выражать предположенную сумму при второмъ условіи сбора. Собирая по $\frac{1}{2}$ рубля съ человѣка, общество могло бы всего собрать $\frac{1}{2} \cdot 28 = 14$ рублей; но тогда до предположенной суммы недоставало бы 11 рублей; слѣдовательно предположенная къ сбору сумма была $14 + 11 = 25$ рублей, что вполнѣ соотвѣтствуетъ и первому расчету. Итакъ въ обществѣ было 28 лицъ и предполагалось собрать 25 руб.

Примѣръ 4-й. Въ бассейнъ проведены 3 трубы. Черезъ первую бассейнъ наполняется въ 6 часовъ, черезъ вторую въ 8 час., а черезъ третью вся вода изъ наполненнаго бассейна можетъ быть выпущена въ 12 час. Во сколько времени наполнится бассейнъ водою, если всѣ три трубы будутъ открыты одновременно.

Составленіе уравненія. Предположимъ, что бассейнъ при всѣхъ открытыхъ трубахъ могъ наполниться въ x часовъ; слѣдовательно, при совмѣстномъ открытіи всѣхъ трубъ въ 1 часъ была бы наполнена только $\frac{1}{x}$ часть цѣлаго бассейна. Съ другой стороны, если бы была открыта одна первая труба, то бассейнъ могъ бы наполниться въ 6 часовъ. Значитъ въ каждый 1 часъ черезъ нее наполнилась бы $\frac{1}{6}$ часть бассейна; точно такъ же черезъ вторую трубу въ каждый часъ наполнялась бы $\frac{1}{8}$ часть бассейна, а черезъ третью трубу въ каждый часъ выливалась бы изъ бассейна $\frac{1}{12}$ часть его; слѣдовательно, когда открыты всѣ три трубы вмѣстѣ, то въ каждый часъ наполняется $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)$ часть бассейна. Такимъ образомъ часть бассейна, наполняемую при одновременномъ открытіи всѣхъ трубъ въ теченіе часа, мы выразили двумя формулами: $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}$; равенство этихъ формулъ и представляетъ уравненіе, корень котораго дастъ отвѣтъ на предложенный вопросъ задачи. Итакъ, получается уравненіе:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}.$$

Рѣшеніе уравненія.

$$24=4x+3x-2x;$$

$$24=5x;\ x=\frac{24}{5};\ x=4\frac{4}{5}.$$

Повѣрка задачи. Если всѣ трубы могутъ наполнить бассейнъ въ $4\frac{4}{5}$ часа, то въ 1 часъ онѣ наполнятъ $1:4\frac{4}{5}=\frac{5}{24}$ части бассейна, что вполнѣ соотвѣтствуетъ условіямъ задачи; такъ какъ первая труба въ часъ наполняетъ $\frac{1}{6}$, вторая $\frac{1}{8}$, а обѣ вмѣстѣ $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{4+3}{24}=\frac{7}{24}$

части бассейна, третья же выпускаетъ въ 1 часъ $\frac{1}{12}$ часть бассейна; слѣдовательно, по истеченіи 1 часа при одновременномъ открытіи всѣхъ трубъ останется наполненною

$$\frac{7}{24} - \frac{1}{12} = \frac{7-2}{24} = \frac{5}{24}.$$

Примѣчаніе. Такъ какъ при рѣшеніи задачи зависимость между данными и искомыми можно выражать различными способами, то и видъ уравненій, составленныхъ для рѣшенія одной и той же задачи, можетъ быть разнообразнымъ. Такъ, напр., при рѣшеніи примѣра 4-го можетъ быть составлено уравненіе такого вида: $\frac{x}{6} + \frac{x}{8} - \frac{x}{12} = 1$.

Единица въ правой части его выражаетъ емкость бассейна; эта же емкость выражена въ лѣвой части уравненія въ частяхъ ея.

§ 172. Системы уравненій.

Системою уравненій называется нѣсколько уравненій, рѣшаемыхъ въ совокупности. Тѣ неизвѣстныя, которыя обозначены въ системѣ однѣми и тѣми же буквами, имѣютъ однѣ и тѣ же значенія.

Система называется опредѣленною, если число уравненій равно числу неизвѣстныхъ.

Система называется неопредѣленною, если число уравненій менѣе числа неизвѣстныхъ.

Если число уравненій болѣе числа неизвѣстныхъ, то система будетъ:

1) **системою несовмѣстныхъ уравненій,** если будутъ уравненія, противорѣчащія одно другому.

Напр.:

$$\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y=15 \\ 2x+2y=17 \\ 3x-\ \ y=25 \end{array}\right| \text{ уравн. противорѣчащія.}$$

2) **системою неопредѣленною,** если нѣкоторыя уравненія представляютъ слѣдствія другихъ, такъ что число различныхъ уравненій (не представляющихъ слѣдствій одного изъ другого), менѣе числа неизвѣстныхъ.

Напр.:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x-3y=5+2z \\ 2\ (x+y+z)=3 \\ 3\ (x-z)-(y-x-z)=2\ (y-1)+7 \\ 3x-3+z=x-z-2y. \end{array}\right.$$

Въ этой совокупности 4 уравненій съ 3-мя неизвѣстными первое представляетъ слѣдствіе третьяго, а второе слѣдствіе четвертаго, такъ что различныхъ уравненій два, а неизвѣстныхъ три.

3) **Системою опредѣленною,** если различныхъ уравненій, не представляющихъ слѣдствій одно другого, столько же, сколько неизвѣстныхъ.

Опредѣленныя уравненія съ двумя неизвѣстными.

§ **173.** Общій видъ опредѣленной системы уравненій съ двумя неизвѣстными слѣдующій:

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{array}\right.$$

Прежде чѣмъ рѣшать систему уравненій, слѣдуетъ привести уравненія къ общему виду; для этого надо каждое уравненіе освободить отъ скобокъ и знаменателей, перенести неизвѣстные члены въ лѣвую часть уравненія, извѣстные въ правую и сдѣлать въ обѣихъ частяхъ приведеніе.

Примѣръ 1-й.

$$\frac{x}{2x-10}-\frac{5y}{6x-30}=\frac{1}{20-4x}.$$

	Общій знаменатель $=$	Дополнительные множители
$2x-10=2(x-5)$	$=12(x-5)$	6
$6x-30=6(x-5)$		2
$20-4x=-4(x-5)$		-3

$$6x-10y=-3.$$

Примѣръ 2-й.

$$\frac{2}{3}x+\frac{3(10y-1)}{4}=2\frac{1}{2}.$$

$$8x+9(10y-1)=30$$

$$8x+90y-9=30$$

$$8x+90y=30+9$$

$$8x+90y=39.$$

Примѣръ 3-й.

$$\frac{a-1}{ay-2y}-\frac{x+y}{2y}=\frac{1}{a}.$$

Общій знаменатель $=2ay(a-2)$;

Дополн. множители а) $2a$; б) $a(a-2)$; в) $2y(a-2)$.

$$2a(a-1)-(x+y)a(a-2)=2y(a-2)$$

$$2a^2 - 2a - (a^2x - 2ax + a^2y - 2ay) = 2ay - 4y;$$

$$2a^2 - 2a - a^2x + 2ax - a^2y + 2ay = 2ay - 4y;$$

$$-a^2x + 2ax - a^2y + 2ay - 2ay + 4y = -2a^2 + 2a;$$

$$(2a - a^2)x + (4 - a^2)y = 2a - 2a^2.$$

§ **174.** Для рѣшенія системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными существуетъ много различныхъ способовъ.

Всѣ эти способы основаны на одномъ общемъ принципѣ, который заключается въ томъ, чтобы два данныхъ уравненія какимъ-либо способомъ соединить въ одно новое уравненіе, заключающее только одно неизвѣстное. Этотъ принципъ называютъ **исключеніемъ одного неизвѣстнаго изъ системы уравненій.**

Способъ сложенія или вычитанія.

§ **175.** Способъ сложенія или вычитанія заключается въ томъ, что подыскиваютъ для каждаго уравненія такой соотвѣтствующій множитель, отъ умноженія на который всѣхъ членовъ уравненія коэффиціенты при одномъ и томъ же неизвѣстномъ въ обоихъ уравненіяхъ становятся абсолютно-равными, и послѣ этого уравненія складываютъ по частямъ, или по частямъ одно изъ другого вычитаютъ; складываютъ въ томъ случаѣ, когда абсолютно-равныя коэффиціенты имѣютъ противоположные знаки, вычитаютъ же, когда эти коэффиціенты имѣютъ одинаковые знаки. Составивъ такимъ образомъ одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, рѣшаютъ его и находятъ значеніе одного неизвѣстнаго. Затѣмъ найденное значеніе неизвѣстнаго подставляютъ на его мѣсто въ одно изъ уравненій, заключающихъ оба неизвѣстныхъ. Изъ полученнаго новаго уравненія находятъ значеніе другого неизвѣстнаго.

Значенія того и другого неизвѣстнаго называются **соотвѣтствующими** и вмѣстѣ составляютъ **одно рѣшеніе системы или одну пару рѣшеній.**

Примѣчаніе. Абсолютно-равное значеніе коэффиціентовъ при одномъ и томъ же неизвѣстномъ въ обоихъ уравненіяхъ есть наименьшее кратное коэффиціентовъ при одномъ и томъ же неизвѣстномъ въ данныхъ уравненіяхъ, приведенныхъ къ общему виду, а подыскиваемые множители для уравненій суть дополнительные множители этихъ коэффиціентовъ до ихъ наименьшаго кратнаго.

Примѣръ:

$$\left\{\begin{array}{l|l|l} 3x+10y=12 & \cdot 1 & 3x+10y=12 \\ 12x-5y=3 & \cdot 2 & 24x-10y=6 \end{array}\right.$$

Сложивъ по частямъ два послѣднихъ уравненія, получаемъ $3x+24x=12+6$

$$27x=18$$

$$x=\frac{2}{3}.$$

Поставивъ $\frac{2}{3}$ на мѣсто x въ уравненіе

$$3x+10y=12, \text{ получимъ:}$$

$$3\cdot\frac{2}{3}+10y=12;$$

$$2+10y=12;$$

$$10y=10\ ;\ y=1.$$

$x=\frac{2}{3}$ и $y=1$ составляютъ рѣшеніе данной системы.

Чтобы убѣдиться въ вѣрности рѣшенія, надо сдѣлать повѣрку обоихъ данныхъ уравненій.

Повѣрка:

1) $3 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot 1 = 12$; $2 + 10 = 12$.

2) $12 \cdot \frac{2}{3} - 5 \cdot 1 = 3$; $8 - 5 = 3$.

Способъ подстановки.

§ **176.** Этотъ способъ состоитъ въ томъ, что по одному изъ данныхъ уравненій опредѣляютъ одно изъ неизвѣстныхъ, выражая его черезъ другое неизвѣстное и извѣстные члены, и полученное выраженіе подставляютъ на мѣсто неизвѣстнаго въ другое данное уравненіе. Получается такимъ образомъ уравненіе съ одною неизвѣстною, которое и рѣшаютъ, находя значеніе неизвѣстнаго въ этомъ послѣднемъ уравненіи. Подставивъ затѣмъ найденное значеніе неизвѣстнаго въ любое изъ уравненій, заключающихъ оба неизвѣстныя, получаютъ уравненіе, изъ котораго опредѣляютъ значеніе второго неизвѣстнаго.

Примѣръ. $\begin{cases} 12x + 15y = 8 \\ 16x + 9y = 7 \end{cases}$ $x = \frac{8 - 15y}{12}$

$$16 \cdot \frac{8 - 15y}{12} + 9y = 7$$

$$\frac{32 - 60y}{3} + 9y = 7$$

$$32 - 60y + 27y = 21$$

$$-33y = -11 \; ; \; y = \frac{1}{3}.$$

Подставляя $\frac{1}{3}$ на мѣсто y въ уравненіе

$12x + 15y = 8$, получимъ:

$$12x + 15 \cdot \frac{1}{3} = 8$$
$$12x + 5 = 8$$
$$12x = 3\ ;\ x = \frac{1}{4}$$

Значенія $x = \frac{1}{4}$ и $y = \frac{1}{3}$ составляютъ пару рѣшеній.

Способъ сравненія.

§ **177**. Способъ сравненія, точнѣе: способъ сравненія величинъ одного и того же неизвѣстнаго, состоитъ въ томъ, что изъ обоихъ уравненій опредѣляютъ одну и ту же неизвѣстную и выраженія, ей равныя, связываютъ знакомъ равенства; это новое уравненіе, уже съ однимъ неизвѣстнымъ, рѣшаютъ и получаютъ значеніе неизвѣстнаго. Значеніе второго неизвѣстнаго находятъ такъ же, какъ въ предыдущихъ способахъ.

Примѣръ:

$$\left|\begin{array}{l} 8x + 5y = 83 \\ 8y - 5x = 26 \end{array}\right| \begin{array}{l} y = \dfrac{83 - 8x}{5} \\ y = \dfrac{26 + 5x}{8} \end{array}$$

$$\frac{83 - 8x}{5} = \frac{26 + 5x}{8}$$
$$664 - 64x = 130 + 25x$$
$$-64x - 25x = 130 - 664$$
$$-89x = -534\ ;\ x = 6.$$

Подставляя 6 на мѣсто x въ уравненіе

$8y - 5x = 26$, получаемъ:

$$8y - 30 = 26\ ;\ 8y = 56\ ;\ y = 7.$$

Значеніе $x = 6$ и $y = 7$ составляютъ пару рѣшеній.

Способъ неопредѣленнаго множителя.

§ **178.** Желая исключить одно изъ неизвѣстныхъ, умножаютъ какое-либо изъ данныхъ уравненій на нѣкоторое, количество m и складываютъ полученное такимъ образомъ уравненіе съ даннымъ уравненіемъ неизмѣненнымъ; въ уравненіи, полученномъ отъ сложенія, приравниваютъ нулю коэффиціентъ при томъ неизвѣстномъ, которое хотятъ исключить, и изъ этого равенства опредѣляютъ значеніе m, которое и подставляютъ на мѣсто m въ полученное отъ сложенія уравненіе; отъ этого получается уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

Напр.: $\left\{\begin{array}{l} 7x + 4y = 78 \\ 5x + 7y = 64 \end{array}\right| \cdot m \left|\begin{array}{l} 7mx + 4my = 78m \\ 5x + 7y = 64 \end{array}\right.$

$$(7m + 5)x + (4m + 7)y = 78m + 64 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Пусть $7m + 5 = 0$, т. е. $m = -\frac{5}{7}$, тогда уравненіе (1) приметъ видъ:

$(4m + 7)y = 78m + 64$, но $m = -\frac{5}{7}$; слѣдовательно

$$\left(-\frac{20}{7} + 7\right)y = -\frac{390}{7} + 64$$

$$\frac{29}{7}y = -\frac{390}{7} + 64$$

$$29y = -390 + 448$$

$$29y = 58; \quad y = 2.$$

Въ уравненіи (1) можно приравнять нулю коэффиціентъ при y, тогда исключимъ y и найдемъ x.

Способъ введенія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ.

§ **179**. Этотъ способъ особенно пригоденъ при рѣшеніи системы уравненій, въ которыхъ **неизвѣстныя входятъ только знаменателями.**

Напр.: $$\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{3y} = 2 \\ \dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{y} = 4\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Условимся $\frac{1}{x}$ замѣнить черезъ z и $\frac{1}{y}$ черезъ t, т. е.

$\frac{1}{x} = z$; $\frac{1}{y} = t$ . . . . (1)

тогда данныя уравненія примутъ видъ:

$$\begin{cases} 3z + \dfrac{2}{3}t = 2 \\ \dfrac{1}{2}z + 3t = 4\dfrac{2}{3} \end{cases} \left| \begin{array}{l} 9z + 2t = 6 \\ 3z + 18t = 28 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \cdot\ 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 9z + 2t = 6 \\ 9z + 54t = 84. \end{array} \right.$$

Вычитая первое уравненіе изъ второго, получимъ

$$52t = 78$$

$$t = \frac{3}{2}.$$

Подставивъ $\frac{3}{2}$ на мѣсто t въ уравненіе $3z + \frac{2}{3}t = 2$, получимъ:

$$3z + 1 = 2$$

$$3z = 1; \quad z = \frac{1}{3}.$$

Но по условію (1) $t = \frac{1}{y}$ и $z = \frac{1}{x}$, а потому

$$\frac{1}{y} = \frac{3}{2} \text{ и слѣдовательно } y = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \text{ и слѣдовательно } x = 3\,.$$

Примѣръ 2-й.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{10}{x} + \frac{21}{y} = 9 \\ \frac{xy}{x-y} = 7\frac{1}{2} \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \frac{10}{x} + \frac{21}{y} = 9 \\ 2xy = 15x - 15y \end{array}\right|$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{10}{x} + \frac{21}{y} = 9 \\ 2 = \frac{15}{y} - \frac{15}{x} \end{array}\right| \begin{array}{l} \frac{1}{x} = z \\ \frac{1}{y} = t \end{array} \left| \begin{array}{l} 10z + 21t = 9 \\ 15t - 15z = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot\ 3 \\ \cdot\ 2 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 30z + 63t = 27 \\ 30t - 30z = 4 \end{array}\right. \left| \;+\; \right| \; 93t = 31; \quad t = \frac{1}{3}\,.$$

$$10z + 21 \cdot \frac{1}{3} = 9; \; 10z + 7 = 9; \; 10z = 2; \; z = \frac{1}{5}$$

Слѣдовательно $\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$, откуда $x = 5$

$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}$, откуда $y = 3$.

Составленіе уравненій съ двумя неизвѣстными.

§ **180.** При составленіи уравненій съ двумя неизвѣстными пользуются тѣмъ же пріемомъ, какъ и при составленіи уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Примѣръ 1-й. Если искомое двузначное число раздѣлить на число, изображаемое тѣми же цифрами, какъ искомое, только расположенными въ обратномъ порядкѣ, то въ частномъ получится 1 и въ остаткѣ 9; если же искомое число раздѣлить на сумму единицъ его разрядовъ, то частное будетъ 5, а остатокъ 11.

Составленіе системы уравненій. Пусть цифра десятковъ искомаго числа (двузначнаго) равна x, а цифра единицъ его y, тогда искомое число будетъ $10x+y$, число же, изображаемое тѣми же цифрами, но въ обратномъ порядкѣ, будетъ $10y+x$, а потому по первому условію задачи, раздѣливъ $10x+y$ на $10y+x$, въ частномъ получимъ 1, а въ остаткѣ 9, но такъ какъ дѣлимое должно равняться произведенію частнаго и дѣлителя, сложенному съ остаткомъ, то составляемъ уравненіе:

$$10x+y=10y+x+9.$$

По второму условію задачи, если искомое число, т. е. $10x+y$, раздѣлить на сумму разрядныхъ чиселъ (цифръ), т. е. на $x+y$, то въ частномъ получится 5, а въ остаткѣ 11. На основаніи зависимости между дѣлимымъ, дѣлителемъ, частнымъ и остаткомъ составляемъ второе уравненіе, связывающее тѣ же два неизвѣстныхъ:

$$10x+y=5(x+y)+11.$$

Рѣшеніе системы: $\begin{cases} 10x+y=10y+x+9 \\ 10x+y=5(x+y)+11 \end{cases}$

$$\begin{array}{l|l|l|l} 10x+y-10y-x=9 & 9x-9y=9 & x-y=1 & \\ 10x+y-5x-5y=11 & 5x-4y=11 & 5x-4y=11 & x=y+1 \end{array}$$

$$5(1+y)-4y=11$$

$$5+5y-4y=11$$

$$y=6;\quad x=1+6=7.$$

Итакъ, искомое число заключаетъ 7 десятковъ и 6 единицъ и слѣдовательно равно 76.

Повѣрка задачи. Если 76 раздѣлить на 67, то въ частномъ получится 1 и въ остаткѣ 9, что и соотвѣтствуетъ первому условію задачи; если же 76 раздѣлить на сумму цифръ, т. е. на 13, то въ частномъ получится 5 и въ остаткѣ 11, что соотвѣтствуетъ второму условію задачи.

Слѣдовательно, задача рѣшена вѣрно.

Примѣръ 2-й. Для молотьбы хлѣба нанято нѣсколько рабочихъ. Если бы ихъ было 3-мя менѣе, то они проработали бы 2-мя днями дольше, а если бы наняли 4-мя рабочими болѣе, то работа была бы окончена 2-мя днями раньше. Сколько было рабочихъ и сколько дней они работали?

Составленіе системы уравненій. Предположимъ, что рабочихъ было x и они работали y дней. Если для выполненія всей работы x рабочимъ необходимо y дней, то одинъ рабочій могъ бы выполнить эту работу въ такое число дней, которое болѣе y въ x разъ, т. е. въ yx дней, а слѣдовательно одинъ рабочій въ 1 день могъ выполнить только такую часть работы, которая меньше всей работы въ yx разъ, т. е. $\frac{1}{yx}$. Итакъ дробь $\frac{1}{yx}$ выражаетъ ту часть работы, которую 1 рабочій выполняетъ въ 1 день. По первому условію задачи, т. е. если бы рабочихъ было не x, а $x - 3$, то они въ 1 день выполнили бы въ $x - 3$ раза большую часть, чѣмъ 1 рабочій, т. е. въ 1 день выполнили бы $\frac{x-3}{yx}$ часть всей работы, а такъ какъ $x - 3$ рабочимъ для выполненія нужно, согласно первому условію задачи, $y + 2$ дня, то увеличивъ часть $\frac{x-3}{yx}$ въ $y + 2$ раза, мы получимъ выраженіе цѣлой работы, т. е. 1, въ ея частяхъ, а потому составляемъ первое уравненіе:

$$\frac{(x-3)(y+2)}{yx} = 1.$$

Разсуждая подобнымъ образомъ, мы, на основаніи второго условія задачи, составимъ второе уравненіе:

$$\frac{(x+4)(y-2)}{yx}=1 .$$

Рѣшеніе системы уравненій:

$$\left\{\begin{array}{l|l} \dfrac{(x-3)(y+2)}{yx}=1 & xy-3y+2x-6=xy \\ \dfrac{(x+4)(y-2)}{yx}=1 & xy+4y-2x-8=xy \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-3y=6 \\ 4y-2x=8 \end{array}\right. \quad \Big| + \Big| \quad 4y-3y=6+8;\ y=14.$$

$$2x-3\cdot 14=6;\ 2x-42=6;\ 2x=48;\ x=24.$$

Слѣдовательно рабочихъ было 24, и они работали 14 дней.

Повѣрка задачи. Одинъ рабочій могъ бы окончить работу въ $14\times 24=336$ дней, слѣдовательно въ 1 день 1 рабочій могъ выполнить $\frac{1}{336}$ часть всей работы. По первому условію рабочихъ было $24-3=21$; значитъ въ 1 день они могли бы выполнить часть работы, равную $\frac{21^{3}}{336}=\frac{7^{7}}{112}=\frac{1}{16}$, а слѣдовательно всю работу могли бы выполнить въ 16 дней, что соотвѣтствуетъ первому условію. Точно такъ же доказывается соотвѣтствіе полученнаго рѣшенія и со вторымъ условіемъ задачи.

Опредѣленныя системы трехъ и болѣе уравненій.

§ **181**. При рѣшеніи опредѣленной системы со многими неизвѣстными необходимо руководиться слѣдующимъ общимъ принципомъ: исключая послѣдовательно изъ системы неизвѣстныя, слѣдуетъ замѣнять одну систему другою новою, съ меньшимъ числомъ уравненій и соотвѣтствующимъ числомъ неизвѣстныхъ, до тѣхъ поръ, пока не получится одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ; затѣмъ изъ послѣдняго уравненія опредѣлить значеніе находящагося въ немъ неизвѣстнаго и, подставивъ это значеніе въ одно изъ уравненій системы съ двумя неизвѣстными, опредѣлить значеніе второго неизвѣстнаго; затѣмъ значенія обоихъ найденныхъ неизвѣстныхъ подставить въ одно изъ уравненій системы съ тремя неизвѣстными и изъ полученнаго уравненія опредѣлить значеніе третьяго неизвѣстнаго и т. д., пока не будутъ найдены значенія всѣхъ неизвѣстныхъ.

Примѣръ 1-й.

$$\left|\begin{aligned} 3x - 4y + 5z &= 18 \\ 2x + 4y - 3z &= 26 \\ x - 6y + 8z &= 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} & \\ &. \ 3 \\ &. \ 2 \end{aligned}$$

Складывая 1-ое уравненіе со 2-мъ, получаемъ:

$$5x + 2z = 44.$$

Умножая 2-е уравненіе на 3, а 3-ье на 2, получаемъ:

$$\left\{\begin{aligned} 6x + 12y - 9z &= 78 \\ 2x - 12y + 16z &= 0 \end{aligned}\right.$$

Складывая эти уравненія, получаемъ:

$$8x + 7z = 78.$$

Такимъ образомъ получили систему съ 2 неизвѣстными:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+2z=44 \\ 8x+7z=78 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} .\ 7 \\ .\ 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} 35x+14z=308 \\ 16x+14z=156 \end{array}$$

Вычитая 2-ое уравненіе изъ 1-го, получаемъ:

$$19x=152$$
$$x=8.$$

Подставивъ 8 на мѣсто x въ уравненіе $5x+2z=44$, получимъ:

$$40+2z=44$$
$$2z=4;\ z=2.$$

Подставивъ значенія x и z въ уравненіе

$3x-4y+5z=18$, получимъ:

$$24-4y+10=18$$
$$-4y=-16;\ y=4.$$

Повѣрка системы.

1) $24-16+10=18;\ 18=18.$

2) $16+16-\ 6=26;\ 26=26.$

3) $\ 8-24+16=\ 0;\ \ 0=\ 0.$

Примѣръ 2-й.

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y=a \\ 2y+3z=b \\ x+3z=c \end{array}\right. \left|\ 2y=b-3z\ \right| \begin{array}{c} x+b-3z=a \\ + \\ x+3z=c \end{array}$$

$$2x + b = a + c$$

$$2x = a - b + c$$

$$x = \frac{a - b + c}{2}$$

Вычитая 1-ое изъ 2-го въ системѣ съ 2-мя неизвѣстными, получимъ:

$$6z - b = c - a$$

$$6z = b + c - a$$

$$z = \frac{b + c - a}{6}$$

Подставивъ значеніе x въ 1-ое уравненіе системы съ 3-мя неизвѣстными, получаемъ:

$$\frac{a - b + c}{2} + 2y = a; \quad 2y = a - \frac{a - b + c}{2};$$

$$2y = \frac{2a - a + b - c}{2}; \quad 2y = \frac{a + b - c}{2}; \quad y = \frac{a + b - c}{4}.$$

Повѣрка системы:

$$x = \frac{a - b + c}{2}$$

$$y = \frac{a + b - c}{4}$$

$$z = \frac{b + c - a}{6}$$

1) $\frac{a - b + c}{2} + \frac{a + b - c}{2} = a$

$$\frac{a - b + c + a + b - c}{2} = a; \quad \frac{2a}{2} = a; \quad a = a.$$

2) $\frac{a + b - c}{2} + \frac{b + c - a}{2} = b$

$$\frac{a + b - c + b + c - a}{2} = b; \quad \frac{2b}{2} = b; \; b = b.$$

3) $\frac{a-b+c}{2}+\frac{b+c-a}{2}=c$

$$\frac{a-b+c+b+c-a}{2}=c\,;\quad \frac{2c}{2}=c\,;\quad c=c.$$

Примѣръ 3-й.

$$\begin{cases} 10x-y+3z=5 \\ 4v-5x=6 \\ 2y+3z=1 \\ 3y+2v=4 \end{cases}$$

Замѣтивъ, что v входитъ только во 2-ое и 4-ое уравненія, исключимъ изъ нихъ неизвѣстное v;

$$\begin{array}{l|c|l} 4v-5x=6 & & 4v-5x=6 \\ 3y+2v=4 & .\,2 & 6y+4v=8 \\ \hline & & -5x-6y=6-8 \\ & & -5x-6y=-2 \\ & & 5x+6y=2 \end{array}$$

Присоединивъ къ полученному уравненію данныя уравненія, 1-ое и 3-ье, получимъ систему 3-хъ уравненій съ 3-мя неизвѣстными.

$$\left\{\begin{array}{r} 10x-y+3z=5 \\ 2y+3z=1 \\ 5x+6y=2 \end{array}\right| \; 3z=1-2y \; \left| \begin{array}{l} 10x-y+1-2y=5 \\ \\ 5x+6y=2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} 10x-3y=4 \\ 5x+6y=2 \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ .\,2 \end{array} \left| \begin{array}{r} 10x-3y=4 \\ 10x+12y=4 \end{array}\right| \; 15y=0\,;\; y=0.$$

$$5x = 2\,;\quad x = \frac{2}{5}\,.$$

$$3z = 1\,;\quad z = \frac{1}{3}\,.$$

$$2v = 4;\quad v = 2\,.$$

Повѣрка системы.

$$1)\ 4 - 0 + 1 = 5\,;\quad 5 = 5$$

$$2)\ 8 - 2 = 6\,;\quad 6 = 6$$

$$3)\ 0 + 1 = 1\,;\quad 1 = 1$$

$$3)\ 0 + 4 = 4\,;\quad 4 = 4.$$

Составленіе системы уравненій со многими неизвѣстными.

Примѣръ 1-й. Трое сѣли играть. До начала игры у перваго было денегъ вдвое болѣе, чѣмъ у остальныхъ двухъ, но послѣ того, какъ первый проигралъ второму 20 рублей и третьему 40 рублей, у всѣхъ оказалось поровну денегъ. Сколько имѣлъ каждый до начала игры?

Составленіе системы уравненій. Предположимъ, что до начала игры у перваго было x, у второго y, у третьяго z.

По первому условію задачи x вдвое болѣе, чѣмъ x и y вмѣстѣ; отсюда составляемъ первое уравненіе:

$$x = 2\ (y + z).$$

Когда первый проигралъ второму 20 руб. и третьему 40 рублей, всего же проигралъ $(20 + 40)$ рублей, у перваго осталось $x-(20+40)$рублей, у второго стало $y+20$ рублей и у третьяго стало $z + 40$ рублей. Эти числа, по второму условію, равны, а это даетъ намъ право составить 2 уравненія:

$$x - (20 + 40) = y + 20$$
$$y + 20 = z + 40.$$

Такимъ образомъ для рѣшенія задачи получили опредѣленную систему трехъ уравненій.

Рѣшеніе системы:

$$\begin{cases} x = 2\ (y + z) \\ x - (20 + 40) = y + 20 \\ y + 20 = z + 40 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned} x - 2y - 2z &= 0 \\ x - y &= 80 \\ y - z &= 20 \end{aligned}\right. \quad \left| \quad x = 80 + y \quad \right| \quad \begin{aligned} &80 + y - 2y - 2z = 0 \\ \\ &y - z = 20 \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned} -y - 2z &= -80 \\ y - z &= 20 \end{aligned}\right. \quad \left| \quad + \quad \right| -3z = -60\,; \quad z = 20.$$

$$y - 20 = 20\,; \qquad y = 40.$$
$$x - 40 = 80\,; \qquad x = 120.$$

Повѣрка задачи. Второй и третій имѣли вмѣстѣ до начала игры $40 + 20 = 60$ руб., первый же 120 руб., что и соотвѣтствуетъ первому условію задачи. Послѣ проигрыша первымъ второму 20 руб. и третьему 40 руб., всего же 60 руб., у перваго осталось $120 - 60 = 60$ рублей, у второго стало $40 + 20 = 60$ руб. и у третьяго $20 + 40 = 60$ руб., что вполнѣ соотвѣтствуетъ второму условію задачи.

Примѣръ 2-й. Серебряникъ имѣетъ три куска серебра различныхъ пробъ, а именно: 90-й, 80-й и 72-й. Если сплавить первый кусокъ со вторымъ, то получится серебро 84-ой пробы; если же сплавить первый съ третьимъ, то составится серебро 78-й пробы. Сколько вѣситъ каждый кусокъ, если всѣ три вмѣстѣ вѣсятъ 45 фунтовъ?

Составленіе системы уравненій. Предположимъ, что первый кусокъ вѣситъ x фунтовъ, второй y, третій z. Въ x фунтахъ 90-й пробы заключается $90x$ золотниковъ чистаго серебра, въ y фунтахъ 80-й пробы $80y$ золотниковъ чистаго серебра, въ z фунтахъ 72-й пробы $72z$ золотниковъ чистаго серебра.

По первому условію задачи, если сплавить первый кусокъ со вторымъ, вѣсъ его будетъ $x+y$, а число золотниковъ чистаго серебра въ немъ $90x+80y$; съ другой стороны при вѣсѣ слитка въ $x+y$ фунтовъ, онъ оказывается пробы 84-й, т. е. въ немъ чистаго серебра $84.(x+y)$ золотниковъ; а потому составляемъ уравненіе:

$$90x+80y=84(x+y).$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ, составимъ, на основаніи второго условія задачи, слѣдующее уравненіе:

$$90x+72z=78(x+z).$$

По третьему условію задачи, сумма вѣсовъ всѣхъ трехъ слитковъ равна 45 фунтамъ, что выражаемъ третьимъ уравненіемъ:

$$x+y+z=45.$$

Рѣшеніе системы:

$$\left\{\begin{array}{l} 90x+80y=84(x+y) \\ 90x+72z=78(x+z) \\ x+y+z=45 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 90x+80y-84x-84y=0 \\ 90x+72z-78x-78z=0 \\ x+y+z=45 \end{array}\right| \begin{array}{l} 6x-4y=0 \\ 12x-6z=0 \\ x+y+z=45 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-2y=0 \\ 2x-z=0 \\ x+y+z=45 \end{array}\right| z=2x \left| \begin{array}{l} 3x-2y=0 \\ \\ x+y+2x=45 \end{array}\right| \begin{array}{l} 3x-2y=0 \\ \\ 3x+y=45 \end{array}$$

Вычтемъ первое уравненіе изъ второго, получимъ:

$$y+2y=45\,;\ \ 3y=45\,;\ \ y=15.$$

Подставимъ значеніе y въ первое уравненіе:

$$3x-30=0;\ \ 3x=30\,;\ \ x=10.$$

Значеніе z опредѣлимъ изъ второго уравненія системы, подставивъ полученное значеніе x.

$$20-z=0\,;\ \ z=20.$$

Повѣрка задачи. Въ первомъ кускѣ 90-й пробы 10 фунтовъ, слѣдовательно 900 золотниковъ чистаго серебра; во второмъ кускѣ 80-й пробы 15 фунт., слѣдовательно $80 \times 15=1200$ зол. чистаго серебра; въ третьемъ кускѣ 72-й пробы 20 фунт., слѣдовательно $72 \times 20=1440$ зол. чистаго серебра. Въ первыхъ двухъ кускахъ вмѣстѣ $900+1200=2100$ зол. чистаго серебра, что при вѣсѣ $10+15=25$ фунт. представляетъ на 1 фунтъ сплава $2100:25=84$ зол., т. е. 84-ую пробу, а это соотвѣтствуетъ первому условію задачи. Въ первомъ и третьемъ кускахъ вмѣстѣ $900+1440=2340$ золотн. чистаго серебра, что при вѣсѣ сплава изъ нихъ, равнаго $10+20=30$

фунтамъ, даетъ на 1 фунтъ $2340:30=78$ золотн. чистаго серебра, т. е. представляетъ 78-ую пробу, что соотвѣтствуетъ второму условію задачи.

Сумма вѣсовъ всѣхъ трехъ кусковъ, равная $10+15+$ $+20=45$ фунтамъ, соотвѣтствуетъ третьему условію задачи.

Дѣйствія надъ количествами съ отрицательными показателями.

§ **183.** Происхожденіе и значеніе степени съ отрицательнымъ показателемъ изложено въ §§ 93 и 94.

Степень съ отрицательнымъ показателемъ можетъ быть перенесена изъ числителя дроби въ знаменатель и обратно съ измѣненіемъ знака у показателя степени.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{a^{-m}}{b^{-n}}=a^{-m}:b^{-n}=\frac{1}{a^m}:\frac{1}{b^n}=\frac{b^n}{a^m}.$$

Положительная степень можетъ быть перенесена изъ одного члена дроби въ другой съ перемѣною знака у показателя степени.

Такъ

$$\frac{a^m}{b^n}=a^m:b^n=\frac{1}{b^n}:\frac{1}{a^m}=b^{-n}:a^{-m}=\frac{b^{-n}}{a^{-m}}.$$

Всякая алгебраическая дробь можетъ быть изображена въ видѣ цѣлаго количества, если всѣ множители знаменателя перенести въ числитель съ обратными знаками у показателей.

Напр.:

$$\frac{4a^2b}{3c^3d^2}=4\cdot 3^{-1}a^2bc^{-3}d^{-2}.$$

§ **184.** Дѣйствія надъ одночленами и многочленами, заключающими цѣлыя отрицательныя степени, выполняются по тѣмъ же правиламъ, какъ и надъ одночленами и многочленами, заключающими цѣлыя положительныя степени, а именно: **сложеніе и вычитаніе** заключается въ соединеніи подобныхъ членовъ, **при умноженіи** показатели одинаковыхъ буквъ складываются, **при дѣленіи** показатели одинаковыхъ буквъ вычитаются, **при возведеніи въ степень** показатели перемножаются.

Доказательство:

$$1)\quad a^{-m}\cdot a^{-p}=\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^p}=\frac{1}{a^m . a^p}=\frac{1}{a^{m+p}}=a^{-(m+p)}=$$

$$=a^{-m-p}=a^{-m+(-p)}.$$

$$2)\quad a^{-m}:a^{-p}=\frac{1}{a^m}:\frac{1}{a^p}=\frac{a^p}{a^m}=a^{p-m}=a^{-m+p}=a^{-m-(-p)}.$$

$$3)\quad (a^m)^{-p}=\frac{1}{(a^m)^p}=\frac{1}{a^{mp}}=a^{-mp}.$$

Примѣры:

$$1)\ \frac{7c^{-3}}{3a^3}:\frac{35a^{-4}}{6c^2}=\frac{7\ .\ 6c^{-3+2}}{3\ .\ 35a^{3-4}}=\frac{2c^{-1}}{5a^{-1}}=\frac{2a}{5c};$$

$$2)\ \left(12a^{-3}b^2 - 6a^{-2}b^5 + \frac{2a^{-4}}{b^{-6}}\right) : -2^{-1}ab^{-3} =$$

$$= -\frac{12}{2}\,a^{-2}b^{-1} + \frac{6}{2}\,a^{-1}b^2 + \frac{2a^{-3}b^{-3}}{2b^{-6}} =$$

$$= -6a^{-2}b^{-1} + 3a^{-1}b^2 + a^{-3}b^3.$$

$$3)\ (2ax^{-2} - a^{-1}x^2)^2 = 4a^2x^{-4} - 4 + a^{-2}x^4.$$

Для ознакомленія.

АЛГЕБРА

ДЛЯ

СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ

СОСТАВИЛЪ

преподаватель Кронштадтской мужской и женской Александринской гимназій

Л. Я. Пясецкій.

Часть III.

Степени и корни.

Цѣна безъ перепл. 35 к.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

ИЗДАНІЕ Бр. БАШМАКОВЫХЪ

1907

Типографія Спб. Т-ва Печ. и Изд. дѣла „Трудъ". Фонтанка, 86.

Степени и корни.

§ **185. Степенью называется произведеніе равныхъ сомножителей (§ 9).**

Основаніемъ степени называется множитель, повторяющійся въ степени.

Показателемъ степени называется число, которое пишется надъ основаніемъ степени и показываетъ, сколько разъ оно повторяется сомножителемъ.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго вычисляется значеніе степени, называется возвышеніемъ или возведеніемъ въ степень.

Возвысить какое-нибудь количество въ степень, показатель которой число цѣлое и положительное, значитъ повторить его сомножителемъ столько разъ, сколько единицъ въ показателѣ степени.

§ **186.** При возведеніи въ степень, показатель которой число цѣлое и положительное, должно соблюдать слѣдующія правила:

Правила знака: 1) Положительное основаніе, возведенное въ любую (четную или нечетную) **степень, есть количество положительное,** потому что такая степень представляетъ произведеніе однихъ положительныхъ сомножителей (§ 46).

Напр.:

$$(+a)^3 = +a^3 = a^3.$$

$$(+a)^4 = +a^4 = a^4.$$

$$(+a)^n = +a^n = a^n.$$

2) **Отрицательное основаніе, возведенное въ четную степень, есть количество положительное,** потому что представляетъ произведеніе однихъ отрицательныхъ сомножителей, число которыхъ четное (§ 46).

Напр.:

$$(-a)^4 = +a^4 = a^4.$$

$$(-a)^{2n} = +a^{2n} = a^{2n}.$$

3) **Отрицательное основаніе, возведенное въ нечетную степень, есть количество отрицательное,** потому что представляетъ произведеніе однихъ отрицательныхъ сомножителей, число которыхъ нечетное (§ 46).

$$(-a)^3 = -a^3.$$

§ **187. Чтобы возвысить въ степень произведеніе, надо въ эту степень возвысить каждый сомножитель.**

Доказательство. Изъ опредѣленія слѣдуетъ:

$$(abcd)^n = \underbrace{abcd \cdot abcd \cdot abcd \ldots}_{n}$$

Такъ какъ отъ перестановки сомножителей произведеніе не измѣняется, то, переставивъ въ полученномъ произведеніи сомножители такъ, чтобы равные стояли рядомъ въ отдѣльныхъ группахъ, и замѣчая, что каждый изъ множителей, напр. a, заключается въ произведеніи n разъ, получимъ:

$$(abcd)^n = \underbrace{abcd \;.\; abcd \;.\; abcd \ldots\ldots}_{n} =$$

$$= \underbrace{aaa \ldots\ldots}_{n}\; \underbrace{bbb \ldots\ldots}_{n}\; \underbrace{cccc \ldots\ldots}_{n}\; \underbrace{dddd \ldots\ldots}_{n}$$

Упрощая же каждую группу равныхъ сомножителей посредствомъ показателя степени, будемъ имѣть:

$$(abcd)^n = \underbrace{abcd \;.\; abcd \;.\; abcd \ldots\ldots\ldots}_{n} =$$

$$= \underbrace{aaa \ldots}_{n}\; \underbrace{bbb \ldots}_{n}\; \underbrace{cccc \ldots}_{n}\; \underbrace{ddd \ldots}_{n} = a^n b^n c^n d^n .$$

§ 188. Чтобы дробь возвысить въ степень, надо въ эту степень возвысить какъ числитель, такъ и знаменатель.

Доказательство. На основаніи опредѣленія:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots\ldots}_{n}$$

Чтобы перемножить дроби, надо произведеніе числителей раздѣлить на произведеніе знаменателей (§ 141), а потому:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots\ldots}_{n} = \frac{\overbrace{aaa \ldots}^{n}}{\underbrace{bbb \ldots}_{n}} = \frac{a^n}{b^n} .$$

§ 189. Чтобы степень возвысить въ новую степень, надо перемножить показателей.

Доказательство. На основаніи опредѣленія:

$$(a^p)^n = \underbrace{a^p \;.\; a^p \;.\; a^p \ldots.}_{n}$$

При умноженіи степеней одного и того же основанія показатели ихъ складываются (§ 69):

$$(a^p)^n = \underbrace{a^p \;.\; a^p \ldots}_{n} = a^{\overbrace{p+p+p+\ldots}^{n}}$$

но сумма равныхъ слагаемыхъ упрощается при помощи произведенія, т. е.

$$\overbrace{p+p+p+\ldots.}^{n} = np = pn,$$

а потому

$$(a^p)^n = \underbrace{a^p \;.\; a^p \;.\; a^p \ldots.}_{n} = a^{\overbrace{p+p+p+\ldots}^{n}} = a^{pn}.$$

§ 190. Чтобы возвысить въ степень одночленъ, надо возвысить въ эту степень коэффиціентъ, соблюдая при этомъ правило знака, а показателя каждой буквы умножить на показатель степени.

Докажемъ, что

$$\left(\frac{-2a^2b^3c^p}{d^kf^m}\right)^5 = -\frac{32a^{10}b^{15}c^{5p}}{d^{5k}f^{5m}}.$$

Примѣняя §§ 186, 188, будемъ имѣть:

$$\left(-\frac{2a^2b^3c^p}{d^kf^m}\right)^5=-\frac{(2a^2b^3c^p)^5}{(d^kf^m)^5},$$

примѣняя §§ 187 и 189, будемъ имѣть:

$$\left(-\frac{2a^2b^3c^p}{d^kf^m}\right)^5=-\frac{(2a^2b^3c^p)^5}{(d^kf^m)^5}=-\frac{2^5a^{2.5}b^{3.5}c^{p.5}}{d^{k.5}f^{m.5}}=$$

$$=-\frac{32a^{10}b^{15}c^{5p}}{d^{5k}f^{5m}}.$$

Квадратъ многочлена.

§ **191**. При возведеніи многочленовъ въ степень трудность при выполненіи дѣйствія возрастаетъ какъ съ увеличеніемъ числа членовъ многочлена, такъ и съ увеличеніемъ показателя степени.

Существуетъ нѣсколько формулъ, которыя въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ даютъ возможность получить результатъ нѣсколько скорѣе, чѣмъ при непосредственномъ выполненіи возведенія въ степень посредствомъ умноженія. Къ такимъ формуламъ относятся: квадратъ двучлена (§§ 83 и 84), кубъ двучлена (§§ 86 и 87) и квадратъ многочлена.

§ **192**. Мы уже знаемъ, что

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

если къ двучлену $a+b$ прибавимъ третій членъ c, и сумму первыхъ двухъ членовъ будемъ разсматривать, какъ одинъ первый членъ, то по формулѣ квадрата двучлена получимъ:

$$[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2,$$

т. е. отъ прибавленія къ двучлену третьяго члена, необходимо къ квадрату двучлена прибавить удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на третій, $+$ квадратъ третьяго члена.

Если къ трехчлену $a+b+c$ прибавимъ четвертый членъ d, и сумму $a+b+c$ примемъ за одинъ первый членъ, то получимъ:

$$[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2,$$

т. е. отъ прибавленія къ трехчлену четвертаго члена, къ его квадрату надо прибавить удвоенное произведеніе суммы предшествующихъ трехъ членовъ на четвертый, $+$ квадратъ четвертаго члена. Поступая подобнымъ же образомъ далѣе, найдемъ, что, вообще, отъ прибавленія къ многочлену еще одного новаго члена, необходимо къ его квадрату прибавить удвоенное произведеніе суммы всѣхъ предшествующихъ членовъ на новый членъ, $+$ квадратъ новаго члена, т. е. возведеніе въ квадратъ многочлена выполняется по слѣдующей формулѣ:

$$[(a+b+c+\ldots)+p]^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+$$
$$+c^2+2(a+b+c)d+d^2+\ldots.+2(a+b+c+\ldots)p+p^2$$

которая выражается такъ:

Квадратъ многочлена равенъ квадрату перваго члена, $+$ удвоенное произведенiе перваго члена на второй, $+$ квадратъ второго члена, $+$ удвоенное произведенiе суммы первыхъ двухъ членовъ на третiй, $+$ квадратъ третьяго, $+$ удвоенное произведенiе суммы первыхъ трехъ на четвертый, $+$ квадратъ четвертаго, $+$ и т. д. $+$ удвоенное произведенiе суммы всѣхъ предшествующихъ членовъ на новый (прибавленный) членъ, $+$ квадратъ новаго (прибавленнаго) члена.

§ **193**. Въ формулѣ предыдущаго параграфа легко различить двѣ группы членовъ: одну составляютъ квадраты всѣхъ членовъ даннаго многочлена, другую — удвоенныя произведенiя всѣхъ членовъ, взятыхъ попарно. Такъ какъ нѣкоторые члены многочлена, возводимаго въ квадратъ, могутъ быть отрицательными, то при составленiи удвоенныхъ произведенiй такихъ членовъ слѣдуетъ соблюдать общее правило знака при умноженiи двухъ членовъ, т. е. удвоенное произведенiе двухъ членовъ должно брать со знакомъ плюсъ, если оба члена одного знака, и со знакомъ минусъ, если одинъ членъ положительный, а другой отрицательный. Квадраты всѣхъ членовъ, очевидно, положительны.

Напр.:

$$(a^4+3a^3b-2a^2b^2-5ab^3)^2=a^8+6a^7b+9a^6b^2-$$
$$-4a^6b^2-12a^5b^3+4a^4b^4-10a^5b^3-30a^4b^4+$$
$$+20a^3b^5+25a^2b^6=a^8+6a^7b+5a^6b^2-22a^5b^3-$$
$$-26a^4b^4+20a^3b^5+25a^2b^6.$$

Свойства квадрата многочлена, расположеннаго по степенямъ главной буквы.

§ **194.** a) Если многочленъ, возводимый въ квадратъ, расположенъ по степенямъ главной буквы, то и полученный отъ возведенія въ степень квадратъ его представляетъ также многочленъ, расположенный по степенямъ той же главной буквы.

$$(3ax^3 - 5a^2x^2 + 2a^3x - 4a^4)^2 =$$

$$\begin{aligned}
= 9a^2x^6 - 30a^3x^5 + 25a^4x^4&. \\
+ 12a^4x^4 - 20a^5x^3 + 4a^6x^2& \\
- 24a^5x^3 + 40a^6x^2 - 16a^7x + 16a^8& \\
\hline
= 9a^2x^6 - 30a^3x^5 + 37a^4x^4 - 44a^5x^3 + 44a^6x^2 - 16a^7x + 16a^8&
\end{aligned}$$

b) Разсматривая полученный квадратъ, мы видимъ, что два первыхъ члена и два послѣднихъ члена не имѣютъ себѣ подобныхъ, при чемъ первый, старшій въ отношеніи буквы x, $9a^2x^6$, представляетъ квадратъ перваго (старшаго въ отношеніи x) члена основанія, $3ax^3$; второй членъ квадрата, $-30a^3x^5$, представляетъ удвоенное произведеніе перваго члена основанія на второй; послѣдній членъ квадрата, $16a^8$, представляетъ квадратъ послѣдняго члена основанія, $-4a^4$; предпослѣдній членъ квадрата, $-16a^7x$, представляетъ удвоенное произведеніе двухъ послѣднихъ членовъ основанія.

c) Очевидно также, что послѣдній и предпослѣдній члены квадрата, $-16a^7x$ и $+16a^8$, младшіе въ отношеніи буквы x, являются старшими въ отношеніи буквы a, и если бы данный многочленъ былъ расположенъ по нисходящимъ степенямъ буквы a, то $+16a^8$ былъ бы первымъ (старшимъ) членомъ квадрата, а $-16a^7x$ вторымъ членомъ квадрата.

d) Если изъ квадрата нѣкотораго многочлена вычесть квадратъ суммы первыхъ двухъ членовъ основанія, т. е.

1) квадратъ перваго члена,

2) удвоенное произведеніе перваго члена на второй

и 3) квадратъ второго члена,

а въ разсматриваемомъ нами примѣрѣ:

$$9a^2x^6 - 30a^3x^5 + 25a^4x^4,$$

то первымъ членомъ остатка будетъ, очевидно,

$$+12a^4x^4,$$

т. е. удвоенное произведеніе перваго члена основанія на третій членъ.

e) Затѣмъ, если изъ перваго остатка

$$+12a^4x^4 - 44a^5x^3 + 44a^6x^2 - 16a^7x + 16a^8$$

вычесть три члена:

1) $12a^4x^4$, т. е. удвоенное произведеніе перваго члена на третій,

2) $-20a^5x^3$, т. е. удвоенное произведеніе второго члена на третій

и 3) $+4a^6x^2$, т. е. квадратъ третьяго члена,

то въ новомъ остаткѣ первымъ членомъ будетъ:

$$-24a^5x^3,$$

который представляетъ удвоенное произведеніе перваго члена на четвертый.

f) Если изъ многочлена, представляющаго квадратъ нѣкотораго основанія, вычесть квадратъ суммы n послѣдовательныхъ членовъ его основанія, начиная съ перваго, то первый членъ получаемаго остатка будетъ представлять удвоенное произведеніе перваго члена основанія на $n+1$ его членъ.

§ **195.** Такъ какъ

$$(a+b+c+\ldots)^4=(a+b+c+\ldots)^{2.2}=$$
$$=[(a+b+c+\ldots)^2]^2;$$
$$(a+b+c+\ldots)^8=\{[(a+b+c+\ldots)^2]^2\}^2 \text{ и т. д.,}$$

то возведеніе многочленовъ въ степени четвертую, восьмую, шестнадцатую и вообще въ степень 2^n приводится къ нѣсколькимъ послѣдовательнымъ возведеніямъ въ квадратъ.

Возведеніе двучленовъ въ шестую и двѣнадцатую степень можетъ быть выполнено по формуламъ:

$$(a\mp b)^6=[(a\mp b)^3]^2$$
$$(a\mp b)^{12}=\{[(a\mp b)^3]^2\}^2.$$

Возведеніе многочленовъ въ степени большихъ показателей выполняется, если въ томъ есть необходимость, посредствомъ повторенія даннаго многочлена сомножителемъ столько разъ, сколько единицъ въ показателѣ степени.

Корень. Извлеченіе корня.

§ **196.** **Корнемъ n-го показателя изъ даннаго количества называется такое количество, n-ая степень котораго равна данному количеству (§ 11).**

Напр.: число 2 есть корень третьей степени изъ 8, потому что $2^3=8$; корень четвертой степени изъ 625 есть 5, потому что $5^4=625$.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается корень изъ даннаго количества, называется **извлеченіемъ корня** и обозначается знакомъ $\sqrt{}$ (=латинская строчная буква r, первая буква слова radix—корень); показатель корня пишется надъ отверстіемъ угла, а данное количество, изъ котораго корень извлекается, пишется подъ горизонтальною чертою и называется **подкореннымъ количествомъ.**

Напр.: корень третьей степени изъ 27 обозначается такъ: $\sqrt[3]{27}$; корень второй степени называется **квадратнымъ** и обозначается безъ показателя: $\sqrt{4}$ есть коренъ квадратный изъ 4. Корень третьей степени называется **кубическимъ.**

§ 197. Извлечь корень изъ даннаго количества значитъ найти такое количество, которое, будучи возведено въ степень показателя корня, равнялось бы данному подкоренному количеству.

Очевидно, дѣйствіе извлеченія корня какого-либо показателя противоположно дѣйствію возведенія въ степень того же показателя, а потому, произведя оба эти дѣйствія одно за другимъ въ какомъ-либо порядкѣ надъ какимъ-либо количествомъ, получаемъ въ результатѣ то же самое количество:

$(\sqrt[n]{a})^n=a$, потому что, если n-ая степень числа равна a, то это число есть n-ый корень изъ a, т. е. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a}$.

§ **198.** Правила знака:

1) **Корень нечетнаго показателя изъ количества положительнаго есть количество положительное,** потому что только положительное количество, будучи возведено въ степень нечетную, даетъ количество положительное.

$$\sqrt[2n+1]{+1} = -1.$$

2) **Корень нечетнаго показателя изъ количества отрицательнаго есть количество отрицательное,** потому что только отрицательное количество, будучи возведено въ степень нечетную, даетъ количество отрицательное.

$$\sqrt[2n+1]{-1} = -1.$$

3) **Корень четнаго показателя изъ количества положительнаго имѣетъ два значенія, положительное и отрицательное, но абсолютно равныя,** такъ какъ и положительное, и отрицательное количества, абсолютно равныя, будучи возведены въ четную степень, даютъ одно и то же положительное количество:

$$\sqrt[2n]{+1} = \pm 1.$$

4) Корень четнаго показателя изъ количества отрицательнаго есть количество невозможное, такъ какъ ни положительное, ни отрицательное количество, возведенное въ четную степень, не можетъ равняться данному подкоренному количеству — отрицательному. Это количество условились называть **мнимымъ**, въ отличіе отъ количествъ, имѣющихъ опредѣленный знакъ (положительный или отрицательный),

которыя называютъ количествами **дѣйствительными** или **вещественными.**

Мнимымъ количествомъ называется корень четнаго показателя изъ отрицательнаго количества.

Напр.:

$$\sqrt{-4}\ ;\quad \sqrt[4]{-6}\ ;\quad \sqrt[6]{-2a}\,.$$

§ **199.** **Чтобы извлечь корень изъ произведенія, надо извлечь его отдѣльно изъ каждаго сомножителя.**

Требуется доказать, что

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\,.$$

Возьмемъ выраженіе

$$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}$$

и возведемъ его въ n-ую степень:

$$\left(\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\right)^n.$$

Такъ какъ при возведеніи произведенія въ степень, надо возводить въ эту степень каждый сомножитель (§ 187), то

$$\left(\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n.\left(\sqrt[n]{c}\right)^n,$$

но на основаніи § 197

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a\,;\quad \left(\sqrt[n]{b}\right)^n=b\,;\quad \left(\sqrt[n]{c}\right)^n=c\,,$$

а потому

$$\left(\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\right)^n = abc\,.$$

Послѣднее равенство показываетъ, что выраженіе

$$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}$$

есть корень n-ой степени изъ abc (§ 196), т. е.

$$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc},$$

а эта формула равносильна той, которую требовалось доказать.

Напр.:

$$\sqrt[3]{27\,.\,8} = \sqrt[3]{27}\,.\,\sqrt[3]{8} = 3\,.\,2 = 6.$$

§ **200**. **Чтобы извлечь корень изъ дроби, надо извлечь его отдѣльно изъ числителя и изъ знаменателя.**

Докажемъ, что

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,.$$

Возведя правую часть предполагаемаго равенства въ n-ую степень, получимъ:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}\,.$$

или, примѣняя § 197,

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{a}{b},$$

а это равенство, на основаніи § 196, даетъ право заключить, что

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Напр.:

$$\sqrt{\frac{16}{625}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{2}{5}.$$

§ 201. Чтобы извлечь корень изъ степени, надо показатель подкоренного количества раздѣлить на показатель корня.

Докажемъ, что

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Возведя правую часть предполагаемаго равенства въ n-ую степень, будемъ имѣть:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \ldots\ldots}_{n}$$

но на основаніи § 69

$$\underbrace{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \ldots\ldots}_{n} = a^{\overbrace{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots\ldots}^{n}}$$

а на основаніи § 16

$$a^{\overbrace{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots}^{n}} = a^{\frac{\overbrace{m+m+m\ \cdots}^{n}}{n}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m .$$

Соединяя послѣдовательныя равенства, будемъ имѣть:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = \underbrace{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdots}_{n} = a^{\overbrace{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots}^{n}} =$$

$$= a^{\frac{\overbrace{m+m+m+\cdots}^{n}}{n}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m .$$

Принимая во вниманіе въ этомъ рядѣ равныхъ количествъ только крайнія, имѣемъ право, на основаніи § 196, сказать, что $a^{\frac{m}{n}}$ есть корень n-ой степени изъ количества a^m, т. е. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Если m дѣлится на n на-цѣло, то корень изъ степени представляетъ степень, показатель которой есть цѣлое число; если же m не дѣлится на-цѣло на n, то получается выраженіе, которое называютъ **дробною степенью.**

Напр.:

$$\sqrt[5]{a^{20}} = a^4 ; \quad \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} ; \quad \sqrt[5]{a^8} = a^{\frac{8}{5}} .$$

§ **202.** Дробная степень прямого значенія степени не имѣетъ, такъ какъ повторить дробное число разъ сомножителемъ какое-либо количество нельзя; на основаніи же предыдущаго параграфа заключаемъ: **дробная степень**

представляетъ условное выраженіе корня, показатель котораго равенъ знаменателю дробнаго показателя, изъ степени того же основанія, показатель которой равенъ числителю дробнаго показателя.

§ **203.** Требуется извлечь

$$\sqrt[3]{-\frac{8a^9b^6c^{3m}}{d^{12}f^{15-6n}}}.$$

Примѣняя послѣдовательно правила, выраженныя въ 198, 200, 199 и 201, будемъ имѣть:

$$\sqrt[3]{-\frac{8a^9b^6c^{3m}}{d^{12}f^{15-6n}}}=-\frac{\sqrt[3]{8a^9b^6c^{3m}}}{\sqrt[3]{d^{12}f^{15-6n}}}=$$

$$=-\frac{\sqrt[3]{8}\,.\,\sqrt[3]{a^9}\,.\,\sqrt[3]{b^6}\,.\,\sqrt[3]{c^{3m}}}{\sqrt[3]{d^{12}}\,.\,\sqrt[3]{f^{15-6n}}}=-\frac{2\,.a^3b^2c^m}{d^4f^{5-2n}}.$$

Отсюда выводимъ правило:

Чтобы извлечь корень изъ одночлена, надо, соблюдая правило знака, извлечь его изъ коэффиціента, а показатель каждой буквы раздѣлить на показатель корня.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ чиселъ.

§ **204.** Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлыхъ однозначныхъ и двузначныхъ чиселъ представляетъ непосредственное **подыскиваніе** подходящихъ однозначныхъ чиселъ, въ свою очередь, основанное на знаніи таблицы квадратовъ первыхъ десяти цѣлыхъ чиселъ:

$$
\begin{array}{ll}
1^2 = 1 & 6^2 = 36 \\
2^2 = 4 & 7^2 = 49 \\
3^2 = 9 & 8^2 = 64 \\
4^2 = 16 & 9^2 = 81 \\
5^2 = 25 & 10^2 = 100.
\end{array}
$$

Напр.:

$$\sqrt{16} = \mp 4 ; \quad \sqrt{81} = \mp 9.$$

Зависимость между числомъ цифръ основанія (корня) и числомъ цифръ квадрата его.

§ **205.** Теорема. **Квадратъ многозначнаго числа заключаетъ въ себѣ цифръ или въ 2 раза болѣе, чѣмъ это число, или въ 2 раза болѣе безъ 1.**

Напр.: всякое однозначное число заключается между 1 и 10, а именно:

$$1 \leqslant \text{однозначное число} < 10.$$

Если неравныя числа умножимъ на неравныя, а именно: меньшее на меньшее, среднее на среднее и большее на большее, то очевидно, что произведеніе меньшихъ будетъ менѣе произведенія среднихъ, а это послѣднее меньше произведенія большихъ; умноживъ на этомъ основаніи неравныя числа вышеприведеннаго ряда каждое само на себя, получимъ:

$$1^2 \leqslant (\text{однозн. число})^2 < 10^2$$

$$\text{или } 1 \leqslant (\text{однозн. число})^2 < 100.$$

Полученное выраженіе показываетъ, что квадратъ однозначнаго числа заключается между числами 1 и 100, т. е. можетъ равняться лишь числамъ однозначнымъ и двузначнымъ, что и соотвѣтствуетъ вышеприведенной теоремѣ.

Всякое двузначное число заключается между 10 и 100, а именно:

$$10 \leqslant \text{двузначное число} < 100.$$

Разсуждая, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, будемъ имѣть:

$$10^2 \leqslant (\text{двузначное число})^2 < 100^2$$

$$\text{или } 100 \leqslant (\text{двузначное число})^2 < 10000.$$

Полученное выраженіе показываетъ, что квадратъ двузначнаго числа заключается между 100 и 10000, т. е. можетъ равняться лишь числамъ трехзначнымъ и четырехзначнымъ, что опять согласно съ теоремой.

§ **206**. Докажемъ, что теорема § 205 справедлива для всякаго n-значнаго числа.

Всякое n-значное число равно или болѣе наименьшаго изъ n-значныхъ чиселъ, которое изображается единицей съ $n-1$ нулями, т. е. $\underbrace{100\ldots.0}_{n-1} = 10^{n-1}$, съ другой стороны всякое n-значное число менѣе наименьшаго изъ $(n+1)$-значныхъ чиселъ, которое изображается единицею съ n нулями, т. е. $\underbrace{100\ldots.0}_{n} = 10^n$, а потому:

$$10^{n-1} \leqslant n\text{-значное число} < 10^n \text{ или}$$

$$(10^{n-1})^2 \leqslant (n\text{-значное число})^2 < (10^n)^2 \text{ или}$$

$$10^{2n-2} \leqslant (n\text{-значное число})^2 < 10^{2n} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Но 10^{2n-2} есть число, изображаемое 1 съ $2n-2$ нулями, т. е. такое, въ которомъ всего цифръ

$$1+2n-2=2n-1;$$

а 10^{2n} есть число, въ которомъ цифръ $1+2n$ или $2n+1$, а потому выраженіе (1) показываетъ, что квадратъ n-значнаго числа можетъ равняться лишь тѣмъ числамъ, въ которыхъ цифръ болѣе или равно $2n-1$, но менѣе, чѣмъ $2n+1$, т. е. квадратъ n-значнаго числа можетъ заключать въ себѣ цифръ или $2n-1$, или $2n$.

Что и требовалось доказать.

§ **207**. Обратная теорема. **Если n число цифръ квадрата, то въ корнѣ цифръ или $\frac{n}{2}$, если n число четное, или $\frac{n+1}{2}$, если n число нечетное.**

Пусть число цифръ корня будетъ x; тогда, на основаніи предыдущей теоремы, зависимость между n и x выразится такъ:

$$\begin{cases} \text{или } n=2x \\ \text{или } n=2x-1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \text{или } x=\frac{n}{2} \\ \text{или } x=\frac{n+1}{2}. \end{cases}$$

Это и требовалось доказать.

§ **208**. Двойственность отвѣта въ послѣдней теоремѣ логически необходима, такъ какъ x, т. е. число цифръ, должно быть числомъ цѣлымъ; это при n четномъ даетъ право пользоваться первою формулой отвѣта $x=\frac{n}{2}$, а при n нечетномъ второю формулой $x=\frac{n+1}{2}$.

Напримѣръ, если въ квадратѣ числа 7 цифръ, то, для опредѣленія числа цифръ въ корнѣ, надо къ 7 прибавить 1 и сумму 8 раздѣлить на два, т. е. въ корнѣ цифръ $\frac{7+1}{2}=4$; если въ квадратѣ 10 цифръ, то въ корнѣ цифръ $\frac{10}{2}=5$.

На этомъ основаніи на практикѣ данное число, т. е. квадратъ искомаго, раздѣляютъ **на грани** отъ правой руки къ лѣвой по 2 цифры въ каждой, при чемъ въ крайней лѣвой грани, которая называется первой, можетъ быть, очевидно, и одна цифра. Число граней въ квадратѣ числа равно числу цифръ въ корнѣ, т. е. въ искомомъ числѣ.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ двугран-наго числа.

§ **209**. Требуется извлечь квадратный корень изъ числа 2209.

Раздѣливъ число на грани, заключаемъ, что въ искомомъ корнѣ двѣ цифры, т. е. искомый корень состоитъ изъ нѣкотораго числа десятковъ и нѣкотораго числа единицъ. Назвавъ цифру десятковъ искомаго корня черезъ x, а цифру единицъ черезъ y, весь корень обозначимъ такъ:

$$10x+y,$$

а потому

$$\sqrt{\overline{22}\,\overline{09}}=10x+y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{I})$$

Значенія цифръ x и y находятся при помощи слѣдующихъ соображеній.

Изъ опредѣленія дѣйствія извлеченія корня (§ 197) слѣдуетъ, что

$$(10x+y)^2=2209 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{II})$$

или

$$100x^2+2.10xy+y^2=2209 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{III})$$

Первый членъ лѣвой части этого равенства, $100x^2$, представляетъ число, состоящее изъ нѣсколькихъ сотенъ, такъ какъ заключаетъ въ себѣ множитель 100, а потому можетъ заключаться только въ *22* сотняхъ правой части равенства; нельзя, конечно, утверждать, что $100x^2$ равно 22 сотнямъ, потому что и второй членъ лѣвой части равенства, $2.10xy$, можетъ заключать въ себѣ нѣсколько сотенъ. Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе однозначныхъ чиселъ, x и y, можетъ образовать двузначное число (число десятковъ съ единицами), а будучи умножено еще на 2 и на 10, можетъ, конечно, образовать трехзначное число, т. е. заключать въ себѣ сотни. Такимъ образомъ относительно числа $100x^2$ можно сказать, что оно не болѣе (равно или менѣе) 22 сотенъ, т. е.

$$100x^2 \leqslant 2200,$$

по сокращеніи на 100,

$$x^2 \leqslant 22$$

откуда

$$x \leqslant \sqrt{22}\,.$$

Это выраженіе даетъ указаніе на то, какое изъ однозначныхъ чиселъ можно принять равнымъ x, или, другими словами, какую изъ цифръ можно принять за цифру десятковъ искомаго корня. Въ самомъ дѣлѣ $\sqrt{22}$ есть число большее, чѣмъ 4, такъ какъ $4^2=16$, но меньшее, чѣмъ 5, такъ какъ $5^2=25$; но такъ какъ x означаетъ цифру, т. е. по существу число цѣлое, а не дробное, то выраженіе

$$x \leqslant \sqrt{22}$$

даетъ право за x принять число 4 или меньшее (цѣлое), т. е.

$$x \leqslant 4.$$

Но значеніе цифры x должно быть выбрано такъ, чтобы удовлетворялось требованіе:

$$\sqrt{2209} = 10x + y$$

или равносильное ему требованіе:

$$(10x + y)^2 = 2209.$$

Это же равенство ни при какомъ значеніи x меньшемъ, чѣмъ 4, не можетъ быть справедливымъ. Докажемъ это.

Допустимъ, что за x можно принять цифру 3, тогда при самомъ большомъ значеніи цифры единицъ y (а за y мы можемъ принять цифру не болѣе 9) мы получили бы для выраженія всего корня, т. е. $10x + y$, число не большее 39, а слѣдовательно меньшее, чѣмъ 40. Но 40 не удовлетворяетъ требованію, потому что $40^2 = 1600$, а не 2209, а тѣмъ болѣе числа меньшія 40. Итакъ, за цифру десятковъ не можетъ быть взято никакое число, меньшее 4.

На этомъ основаніи формула:

$$x \leqslant 4$$

должна быть замѣнена болѣе соотвѣтствующею формулою:

$$x = 4.$$

Число 4 представляетъ то именно число, квадратъ котораго, не будучи равенъ первой грани, а меньше ея, **ближайшимъ образомъ подходитъ** къ первой грани даннаго подкоренного числа.

Если бы квадратный корень изъ первой грани равнялся цѣлому числу, то оно представляло бы значенiе x.

Отсюда: **Чтобы найти цифру десятковъ квадратнаго корня изъ двуграннаго числа, надо найти число, квадратъ котораго или равнялся бы первой грани, или ближайшимъ образомъ подходилъ къ ней.**

Подставивъ въ равенство (III) на мѣсто x найденное числовое значенiе, т. е. 4, получимъ:

$$100 . 4^2 + 2 . 10 . 4y + y^2 = 2209$$

$$\text{или } 1600 + 2 . 10 . 4y + y^2 = 2209$$

$$\text{или } 2 . 10 . 4y + y^2 = 2209 - 1600$$

$$\text{или } 2 . 10 . 4y + y^2 = 609 \quad . \; . \qquad . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{IV}).$$

Число 609, получаемое въ остаткѣ отъ вычитанiя квадрата найденнаго числа десятковъ изъ подкоренного числа, называется **первымъ остаткомъ**. Очевидно также, что первый остатокъ получаемъ, вычитая квадратъ цифры десятковъ изъ первой грани и приписывая къ этому числу вторую грань.

Такъ какъ первый членъ лѣвой части равенства (IV), $2 . 10 . 4y$, заключаетъ въ себѣ множителя 10, то и самъ представляетъ нѣкоторое число десятковъ, а потому и заключаться можетъ только въ 60 десяткахъ правой части, но такъ какъ и второй членъ лѣвой части равенства (IV), т. е. y^2, также можетъ заключать въ себѣ десятки, то нельзя, конечно, утверждать, что членъ $2 . 10 . 4y$ равенъ

60 десяткамъ правой части, а можетъ быть или равенъ имъ, или меньше ихъ, т. е.

$$2 \,.\, 10 \,.\, 4y \leqslant 600,$$

$$\text{или } 2 \,.\, 4y \leqslant 60,$$

$$\text{откуда } y \leqslant \frac{60}{2 \,.\, 4}.$$

Такъ какъ y, обозначая цифру, не можетъ равняться дроби, то

$$y \leqslant 7$$

Это выраженіе указываетъ, что за y, т. е. за цифру единицъ искомаго корня, можно принять одно изъ чиселъ:

7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 и 0.

Въ этомъ случаѣ нельзя утверждать, подобно тому, какъ при опредѣленіи цифры десятковъ, что наибольшее изъ этихъ допускаемыхъ значеній, т. е. 7, непремѣнно удовлетворяетъ требованію, такъ какъ въ иныхъ случаяхъ такое заключеніе можетъ оказаться несправедливымъ, а поэтому значеніе для y выбирается способомъ послѣдовательной провѣрки пригодности того или другого значенія, начиная съ наибольшаго. Очевидно, что наибольшее изъ возможныхъ для y значеній, какъ въ данномъ примѣрѣ 7, получается въ частномъ отъ дѣленія числа 60, т. е. перваго остатка безъ послѣдней его цифры на удвоенную цифру десятковъ.

Отсюда:

Чтобы найти цифру единицъ квадратнаго корня изъ двуграннаго числа, надо въ первомъ остаткѣ отбросить послѣднюю цифру и это число раздѣлить на удвоенную цифру десятковъ.

Принимая за y цифру 7 и подставляя это значенie въ равенство (IV), получаемъ:

$$2 . 10 . 4 . 7 + 7^2 = 609$$

$$\text{или } 560 + 49 = 609.$$

Слѣдовательно, цифра 7 удовлетворяетъ требованiю. Изъ этого примѣра видно, что для повѣрки надо составлять сумму двухъ чиселъ: 1) удвоеннаго произведенiя числа найденныхъ десятковъ на предполагаемое число единицъ и 2) квадрата предполагаемаго числа единицъ.

Если эта сумма болѣе перваго остатка, то провѣряемая цифра не пригодна, и такимъ же образомъ провѣряютъ слѣдующую меньшую.

Двучленъ, при помощи котораго повѣряется пригодность значенiя y, а именно:

$$2 . 10xy + y^2,$$

можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$2 . 10xy + y^2 = (2 . 10x + y)y.$$

Въ нашемъ примѣрѣ:

$$2 . 10 . 4 . 7 + 7^2 = (2 . 4 . 10 + 7)7 = 87 . 7.$$

Отсюда заключаемъ, что:

Для повѣрки цифры единицъ искомаго корня достаточно (къ удвоенной цифрѣ десятковъ приписать предполагаемую цифру единицъ, и это число умножить на предполагаемую цифру единицъ.

§ **210**. Если соединимъ въ одно правило отдѣльныя правила нахожденія цифры десятковъ, цифры единицъ и повѣрки послѣдней, то это будетъ правиломъ нахожденія квадратнаго корня изъ двугранныхъ цѣлыхъ чиселъ:

Чтобы извлечь квадратный корень изъ двугранняго цѣлаго числа, подыскиваемъ такое число, квадратъ котораго или равнялся бы первой грани, или ближайшимъ образомъ подходилъ къ ней,—это число и будетъ цифрою десятковъ искомаго корня.

Взявъ квадратъ найденной цифры десятковъ, вычтя его изъ первой грани и къ полученному числу приписавъ вторую грань, получаемъ первый остатокъ.

Отбросивъ въ первомъ остаткѣ послѣднюю цифру, дѣлимъ оставшееся число на удвоенную цифру десятковъ; цѣлое число этого частнаго указываетъ на наибольшее изъ значеній, которыя могутъ оказаться цифрою единицъ искомаго корня. Чтобы узнать, не удовлетворяетъ ли требованію наибольшее изъ этихъ значеній, беремъ удвоенную цифру десятковъ, приписываемъ къ этому числу провѣряемую цифру единицъ, и это число умножаемъ на провѣряемую цифру единицъ; если полученное произведеніе болѣе перваго остатка, то провѣряемая цифра единицъ не пригодна и слѣдуетъ подобнымъ же образомъ провѣрить слѣдующую за ней меньшую цифру.

Напр.: $\sqrt{57\,76} = 76$

$$
\begin{array}{r|l}
 & -49 \\
\hline
146 & 876 \\
6 & 876 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Приведенный примѣръ показываетъ, какъ располагаютъ все дѣйствіе на практикѣ: найдя цифру десятковъ корня, 7, подписываютъ квадратъ ея, 49, подъ первой гранью 57 и вычитаютъ; къ остатку 8 сносятъ вторую гранъ, 76, получаютъ первый остатокъ 876; проведя слѣва отъ перваго остатка вертикальную черту, слѣва отъ нея пишутъ удвоенное число десятковъ, т. е. 14, и на него дѣлятъ число 87, т. е. первый остатокъ безъ послѣдней цифры; цѣлое число этого частнаго, 6, приписываютъ къ дѣлителю и полученное число 146 умножаютъ на 6; такъ какъ произведеніе равно первому остатку, то цифра 6 есть цифра единицъ искомаго корня, весь же корень равенъ 76.

§ **211.** Если произведеніе, которое оставляется для повѣрки пригодности цифры единицъ, окажется меньшимъ, чѣмъ первый остатокъ, то это значить, что для даннаго подкоренного числа найти точный корень нельзя, а полученное по этому правилу число есть лишь то цѣлое число, квадратъ котораго ближайшимъ образомъ подходитъ къ данному подкоренному числу (потому что слѣдующее цѣлое число, возведенное въ квадратъ, превыситъ подкоренное число). Въ этомъ случаѣ отъ извлеченія корня получается остатокъ.

Напр.: $\sqrt{35\,42}=59$

$$\begin{array}{r|r} & 25 \\ 109 & 1042 \\ 9 & 981 \\ \cline{2-2} & 61 \end{array}$$

Зависимость между подкореннымъ числомъ, найденнымъ корнемъ и остаткомъ отъ извлеченія корня можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ:

$$3542 = 59^2 + 61$$

Извлеченіе квадратнаго корня изъ многограннаго числа.

§ **212.** Требуется извлечь $\sqrt{12432676}$.

Раздѣливъ подкоренное число на грани, заключаемъ, что въ искомомъ корнѣ 4 цифры.

Разсматривая старшіе разряды корня, за исключеніемъ разряда единицъ, какъ нѣкоторое число **десятковъ,** и назвавъ это число десятковъ черезъ x, а число единицъ черезъ y, будемъ имѣть:

$$\sqrt{12\,43\,26\,76}. = 10x + y.$$

На основаніи разсужденій, подобныхъ приведеннымъ уже нами въ § 209, найдемъ, что для опредѣленія числа десятковъ x, надо искать такое число, квадратъ котораго или равнялся бы числу сотенъ подкоренного числа, или ближайшимъ образомъ къ нему подходилъ, т. е. для опредѣленія x надо извлечь квадратный корень изъ сотенъ даннаго подкоренного числа.

$$x \leqslant \sqrt{12\,43\,26}$$

Но число x заключаетъ въ себѣ три цифры, т. е. представляетъ трехзначное число, въ которое входятъ первыя три цифры подкоренного числа. Назвавъ два старшихъ разряда этого числа **десятками** его и обозначивъ черезъ z, найдемъ, что для опредѣленія z, т. е. числа десятковъ x, надо извлечь квадратный корень изъ числа сотенъ подкоренного числа 124326, т. е.

$$z \leqslant \sqrt{1243}.$$

Въ свою очередь число z есть двузначенное, представляющее первыя двѣ цифры подкоренного числа, и, если число его десятковъ назовемъ черезъ t, то для опредѣленія t надо будетъ извлечь квадратный корень изъ числа сотенъ подкоренного числа 1243, т. е.

$$t \leqslant \sqrt{12}.$$

Очевидно t представляетъ цифру высшаго разряда искомаго корня, т. е. первую цифру его, а число 12 первую грань подкоренного числа, слѣдовательно для опредѣленія первой цифры корня квадратнаго изъ многограннаго числа надо найти такое число, квадратъ котораго или равнялся бы первой грани, или ближайшимъ образомъ подходилъ бы къ ней.

$$\begin{array}{r} \sqrt{12} = 3 \\ -\,9 \\ \hline 3 \end{array}$$

Вторая цифра искомаго корня опредѣляется изъ $\sqrt{12\,43}$, для котораго первая цифра, т. е. число десятковъ этого корня, найдено. Поэтому къ остатку отъ извлеченія $\sqrt{12}$ сносится вторая грань 43, отбрасывается послѣдняя цифра 3 и остальное число дѣлится на удвоенное найденное число тысячъ $2 . 3 = 6$, т. е. $34 : 6 = 5$. Число 5 приписывается къ дѣлителю 6 и полученное число 65 помножается на найденное частное 5. Произведеніе подписывается подъ первымъ остаткомъ 343 и вычитается:

$$\sqrt{12\,43} = 35$$

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 65 & 343 \\ 5 & 325 \\ \hline & \;\;18 \end{array}$$

Третья цифра искомаго корня опредѣляется изъ

$$\sqrt{12\,43\,26}\;,$$

для котораго двѣ первыя цифры, т. е. число десятковъ этого корня, уже найдены.

Поэтому къ остатку отъ извлеченія $\sqrt{1243}$ сносится третья грань 26, въ полученномъ числѣ 1826, называемомъ вторымъ остаткомъ, отбрасывается послѣдняя цифра и остальное число 182 дѣлится на удвоенное найденное число десятковъ этого корня, т. е. на $2 \,.\, 35 = 70$; цѣлое число этого частнаго 2 приписывается къ дѣлителю 70 и полученное число 702 умножается на 2; произведеніе $702 \,.\, 2 = 1404$ подписываютъ подъ вторымъ остаткомъ 1826 и вычитаютъ:

$$\sqrt{12\,43\,26} = 352$$

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 65 & 343 \\ 5 & 325 \\ \hline 702 & 1826 \\ 2 & 1404 \\ \hline & \;\;422 \end{array}$$

Четвертая цифра искомаго корня опредѣляется изъ

$$\sqrt{12\,43\,26\,76}\,,$$

для котораго три первыя цифры, т. е. число десятковъ этого, корня уже найдены:

$$\sqrt{12\,43\,26\,76} = 352$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \;\;9 \\
\hline
65 & 343 \\
5 & 325 \\
\hline
702 & 1826 \\
2 & 1404 \\
\hline
 & \;\;422
\end{array}$$

поэтому къ остатку 422 сносится четвертая грань 76, въ полученномъ числѣ 42276, которое называется третьимъ остаткомъ, отбрасывается послѣдняя цифра 6, остальное же число 4227 дѣлится на удвоенное найденное число десятковъ этого корня, т. е. на $2\,.\,352 = 704$; цѣлое число этого частнаго 6 приписывается къ дѣлителю 704 и полученное число 7046 умножается на 6; произведеніе $7046\,.\,6 = 42276$ подписывается подъ третьимъ остаткомъ и вычитается:

$$\sqrt{12\,43\,26\,76} = 3526$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \;\;9 \\
\hline
65 & 343 \\
5 & 325 \\
\hline
702 & 1826 \\
2 & 1404 \\
\hline
7046 & 42276 \\
6 & 42276 \\
\hline
 & \;\;\;\;\;\;0
\end{array}$$

Подобнымъ же образомъ могутъ быть найдены 5-я, 6-я и слѣдующія цифры корня, если бы подкоренное число заключало въ себѣ 5, 6 и болѣе граней.

Чтобы извлечь квадратный корень изъ многозначнаго числа, надо, раздѣливъ подкоренное число на грани, по двѣ цифры въ каждой грани, найти число, квадратъ котораго или равнялся бы первой грани, или ближайшимъ образомъ къ ней подходилъ; это число будетъ первою цифрою корня.

Квадратъ первой цифры корня надо подписать подъ первою гранью и вычесть изъ нея; къ остатку снести вторую грань; это будетъ первый остатокъ.

Раздѣливъ первый остатокъ безъ послѣдней его цифры на удвоенную первую цифру корня, получимъ частное, цѣлое число котораго будетъ второю цифрою корня.

Приписавъ къ дѣлителю вторую цифру корня и умноживъ полученное число на вторую цифру корня, надо произведеніе подписать подъ первымъ остаткомъ и вычесть изъ него; къ остатку снести третью грань; это будетъ второй остатокъ.

Раздѣливъ второй остатокъ безъ послѣдней его цифры на удвоенную найденную часть корня, получимъ частное, цѣлое число котораго будетъ третьею цифрою корня.

Приписавъ опять къ дѣлителю третью цифру корня и умноживъ полученное число на нее, надо произведеніе подписать подъ вторымъ остаткомъ и вычесть изъ него и т. д., пока не снесемъ всѣхъ граней и не найдемъ всѣхъ цифръ искомаго корня.

Поступая по только что изложенному правилу, мы найдемъ или истинное значеніе корня, или такое цѣлое число, квадратъ котораго ближайшимъ образомъ подходитъ къ подкоренному числу.

Признакъ вѣрности выбранной цифры при извлеченіи квадратнаго корня.

Теорема. **Если цифра корня выбрана невѣрно, то остатокъ равенъ или болѣе удвоеннаго корня, увеличеннаго единицею.**

Пусть m будетъ числомъ, квадратъ котораго ближайшимъ образомъ подходитъ къ подкоренному числу A; тогда остатокъ отъ извлеченія корня будетъ $A - m^2$.

Положимъ, найденный корень менѣе или болѣе истиннаго на 1, т. е. истинная величина корня $\geqq m + 1$; въ такомъ случаѣ подкоренное число A должно быть болѣе или равно $(m + 1)^2$.

$$A \geqq (m + 1)^2$$

или

$$A \geqq m^2 + 2m + 1$$

откуда

$$A - m^2 \geqq 2m + 1.$$

Но $A - m^2$ представляетъ остатокъ отъ извлеченія корня, который при сдѣланномъ предположеніи, что корень m менѣе истиннаго корня, оказывается равнымъ или большимъ, чѣмъ $2m + 1$.

Это и требовалось доказать.

Обратная теорема. **Если остатокъ отъ извлеченія корня равенъ или болѣе удвоеннаго корня, увеличеннаго единицею, то найденный корень менѣе истиннаго.**

Положимъ приближенное значеніе корня изъ A равно m; тогда остатокъ отъ извлеченія корня будетъ равенъ $A - m^2$.

По условію теоремы

$$A - m^2 \geqq 2m + 1,$$

или

$$A \geqq m^2 + 2m + 1,$$

или

$$A \geqq (m + 1)^2.$$

Это выраженіе показываетъ, что при вышеуказанномъ условіи теоремы данное подкоренное число должно или быть болѣе квадрата числа $m + 1$, или равняться ему, слѣдовательно, во всякомъ случаѣ должно быть болѣе квадрата найденнаго корня m, т. е. найденный корень m менѣе истиннаго значенія корня.

На основаніи этихъ теоремъ заключаемъ, что:

Цифра корня выбрана вѣрно, если остатокъ отъ извлеченія равенъ нулю или менѣе удвоенной найденной части корня, увеличенной единицею.

Теорема. **Если найдено болѣе половины цифръ искомаго корня, то остальныя его цифры могутъ быть найдены дѣленіемъ остатка на удвоенную найденную часть корня.**

Пусть $\sqrt{A}$ равенъ числу, въ которомъ $2n + 1$ цифръ; изъ нихъ $n + 1$ цифръ уже найдены и представляютъ число a, а остальныя n цифръ еще не найдены и представляютъ число x. Тогда

$$\sqrt{A} = a + x$$

или

$$A = a^2 + 2ax + x^2$$

или

$$A - a^2 = 2ax + x^2$$

или

$$\frac{A - a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}$$

Докажемъ теперь, что

$$\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2}.$$

Въ числѣ x n цифръ; слѣдовательно x меньше самаго малаго изъ $(n+1)$-значныхъ чиселъ, т. е.

$$x < 10^n,$$

а

$$x^2 < 10^{2n}.$$

Въ числѣ a значащихъ цифръ (уже найденныхъ) $n+1$ и на концѣ n нулей, т. е. всего цифръ $2n+1$; слѣдовательно a во всякомъ случаѣ болѣе перваго изъ $(2n+1)$-значныхъ чиселъ, т. е

$$a > 10^n.$$

Очевидно, дробь $\frac{10^{2n}}{2.10^{2n}} = \frac{1}{2}$; если же на мѣсто ея числителя подставить число x^2 меньшее, чѣмъ 10^{2n}, то числитель уменьшится; если на мѣсто множителя 10^{2n}, находящагося въ знаменателѣ, возьмемъ a, число большее, чѣмъ 10^{2n}, то знаменатель увеличится; слѣдовательно, сдѣлавъ обѣ замѣны, мы значеніе дроби уменьшимъ, т. е.

$$\frac{x^2}{2a} < \frac{10^{2n}}{2.10^{2n}}.$$

или

$$\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2}.$$

Отбросивъ на этомъ основаніи въ выраженіи

$$\frac{A-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}$$

послѣдній дробный членъ, который меньше половины, получаемъ приближенное равенство:

$$\frac{A-a^2}{2a}=x.$$

Это равенство, конечно, несправедливо, но оно показываетъ, что, дѣля остатокъ отъ извлеченія корня, $A-a^2$, на удвоенную найденную часть корня, $2a$, и принимая цѣлое число этого частнаго за x, мы дѣлаемъ ошибку равную $\frac{x^2}{2a}$, т. е. ошибку меньшую, чѣмъ половина, а слѣдовательно и подавно меньшую 1; другими словами, цѣлое число корня при этомъ способѣ найдено вѣрно. Это и требовалось доказать.

Напр.: $\sqrt{19\,28\,80\,82\,\underbrace{91\,24}} = 4391\ |\underline{\underline{82}}|$

$$\begin{array}{r|r}
 & 16 \\
83 & 328 \\
3 & 249 \\
\hline
869 & 7980 \\
9 & 7821 \\
\hline
8781 & 15982 \\
1 & 8781 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\ 72019124 & 878200 \\
\underline{7025600} & \overline{82} \\
-\ 1763124 & \\
\underline{1756400} & \\
6724 &
\end{array}$$

Извлеченіе корня изъ дробныхъ чиселъ.

§ **213**. Если данная обыкновенная дробь представляетъ полный квадратъ, т. е. числитель и знаменатель ея полные квадраты нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ, то извлеченіе квадратнаго корня изъ такой дроби выполняется по правилу, изложенному въ § 200.

Напр.: $\sqrt{\frac{49}{144}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{144}} = \frac{7}{12}$.

Примѣчаніе. Корень квадратный изъ обыкновенной дроби, не представляющей полнаго квадрата, вычисляется приближенно (см. § 218).

§ **214. Въ квадратѣ десятичной дроби число десятичныхъ знаковъ всегда вдвое болѣе, чѣмъ въ данной дроби, т. е. четное.**

Доказательство. Такъ какъ возведеніе въ квадратъ равносильно умноженію основанія на самого себя, а при умноженіи десятичныхъ дробей въ произведеніи отдѣляется столько знаковъ, сколько десятичныхъ знаковъ заключается въ множимомъ и множителѣ вмѣстѣ, то въ данномъ случаѣ, при одинаковомъ числѣ десятичныхъ знаковъ въ множимомъ и множителѣ, въ произведеніи будетъ знаковъ вдвое болѣе, чѣмъ въ множимомъ, т. е. число ихъ будетъ четное. На этомъ основаніи каждые два десятичныхъ знака, заключающіеся въ квадратѣ десятичной дроби, соотвѣтствуютъ одному десятичному знаку въ корнѣ.

§ **215. Чтобы извлечь квадратный корень изъ десятичной дроби, представляющей полный квадратъ, надо**

извлечь его изъ подкоренного числа, принявъ его за цѣлое, и въ полученномъ корнѣ отдѣлить запятою вдвое меньшее число десятичныхъ знаковъ, чѣмъ въ подкоренномъ числѣ.

Въ самомъ дѣлѣ

$$\sqrt{2{,}5281} = \sqrt{\frac{25281}{10000}} = \frac{\sqrt{25281}}{\sqrt{10000}}.$$

Но $\sqrt{10000} = 100$, а потому:

$$\sqrt{2{,}5281} = \frac{\sqrt{25281}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{25281}}{100} =$$

$$= \frac{1}{100} \cdot \sqrt{2\,52\,81} = \frac{1}{100} \cdot 159 = 1{,}59.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
25 & 152 \\
5 & 125 \\
\hline
309 & 2781 \\
9 & 2781 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

На практикѣ всѣхъ преобразованій не пишутъ, а выполняютъ дѣйствіе такъ:

$$\sqrt{1{,}046529} = 1{,}023$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
2 & 04 \\
\hline
202 & 465 \\
2 & 404 \\
\hline
2043 & 6129 \\
3 & 6129 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Примѣчаніе. Квадратный корень изъ десятичной дроби, не представляющей полнаго квадрата, вычисляется приближенно (см. § 218).

Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочлена.

§ **216.** Если многочленъ, возводимый въ квадратъ, расположить по степенямъ главной буквы и, выполнивъ возведеніе въ степень, сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ, то полученный квадратъ будетъ также представлять многочленъ, расположенный по степенямъ той же главной буквы (см. § 194,а), при чемъ первый и послѣдній (старшій и младшій) члены его будутъ представлять квадраты перваго и послѣдняго членовъ того основанія, которое возводилось въ квадратъ (см. § 194, в); другими словами, они будутъ представлять квадраты перваго и послѣдняго членовъ квадратнаго корня изъ многочлена, представляющаго квадратъ. Это соображеніе даетъ возможность находить первый или послѣдній (см. § 194, с) члены квадратнаго корня изъ многочлена, представляющаго полный квадратъ и расположеннаго по степенямъ главной буквы. Такъ, для того, чтобы найти первый членъ корня, очевидно, надо извлечь квадратный корень изъ перваго члена подкоренного многочлена, расположеннаго по степенямъ главной буквы. Что касается остальныхъ членовъ корня, то они находятся по промежуточнымъ членамъ подкоренного многочлена на основаніи соотвѣтствующихъ соображеній. Такъ второй членъ подкоренного количества представляетъ удвоенное произведеніе перваго члена корня на второй, и какъ членъ, не составленный изъ подобныхъ, даетъ (см. § 194, в) возможность найти второй членъ корня дѣленіемъ второго члена подкоренного многочлена на удвоенный первый членъ корня. Найдя второй членъ корня и составивъ его квадратъ, можно изъ подкоренного многочлена вычесть слѣдующіе три члена:

1) квадратъ перваго члена корня,

2) удвоенное произведеніе перваго члена на второй,

и 3) квадратъ второго члена корня;

тогда въ полученномъ остаткѣ будутъ заключаться остальные члены квадрата искомаго корня, между которыми старшимъ по степени главной буквы будетъ членъ, равный удвоенному произведенію перваго члена корня на неизвѣстный третій членъ корня (см. § 194, д), а потому этотъ послѣдній, т. е. третій членъ корня, можетъ быть найденъ дѣленіемъ перваго (старшаго) члена остатка на удвоенный первый членъ корня.

$$\sqrt{64x^6-64x^5+48x^4-32x^3+12x^2-4x+1}=8x^3-4x^2$$

$$-64x^6\pm64x^5\mp16x^4$$

$$+32x^4-32x^3+12x^2-4x+1 \quad | \; 2.8x^3=16x^3$$

Раздѣливъ $+32x^4$ на $2.8x^3=16x^3$, найдемъ, что третій членъ корня равенъ:

$$+32x^4:16x^3=2x.$$

Найдя третій членъ корня, можно составить:

1) удвоенное произведеніе перваго члена на третій,

2) удвоенное произведеніе второго члена на третій

и 3) квадратъ третьяго члена:

$$2.8x^3.2x+2.(-4x^2).2x+(2x)^2=32x^4-16x^3+4x^2$$

Вычтя эти члены изъ остатка, получимъ новый остатокъ:

$$\sqrt{64x^6-64x^5+48x^4-32x^3+12^2-4x+1}=8x^3-4x^2+2x$$
$$-64x^6\pm64x^5\mp16x^4$$
$$\begin{array}{r|l} 32x^4-32x^3+12x^2-4x+1 & 2.8x^3=16x^3 \\ -32x^4\pm16x^3\mp4x^2 & \\ \hline -16x^3+8x^2-4x+1 & \end{array}$$

Старшій членъ остатка, $-16x^3$, представляетъ удвоенное произведеніе перваго члена корня на новый четвертый (см. § 194, е), а потому, раздѣливъ $-16x^3$ на удвоенный первый членъ, т. е. $16x^3$, получимъ четвертый членъ корня, равный -1. Составивъ затѣмъ:

1) удвоенное произведеніе 1-го члена на 4-ый
2) „ „ 2-го „ „ 4-ый
3) „ „ 3-го „ „ 4-ый

и 4) квадратъ четвертаго члена,
вычитаемъ ихъ изъ остатка:

$$\sqrt{64x^6-64x^5+48x^4-32x^3+12x^2-4x+1^3}=8x^3-4x^2+2x-1.$$
$$-64x^6\pm64x^5\mp16x^4$$
$$\begin{array}{r|l} 32x^4-32x^3+12x^2-4x+1 & 2.8x^3=16x^3 \\ -32x^4\pm16x^3\mp4x^2 & \\ \hline -16x^3+8x^2-4x+1 & \\ \pm16x^3\mp8x^2\pm4x\mp1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Такъ какъ новый остатокъ равенъ нулю, то многочленъ $8x^3-4x^2+2x-1$ представляетъ искомый корень.

Очевидно, если бы получился новый остатокъ, то первый членъ его, раздѣленный опять на удвоенный первый членъ корня, давалъ бы новый пятый членъ корня (см. § 194, f). Составивъ затѣмъ удвоенныя произведенія всѣхъ уже найденныхъ членовъ корня на новый, пятый, и квадратъ новаго, пятаго, и вычтя ихъ изъ остатка, получили бы новый остатокъ, или же нуль.

§ 217. Чтобы извлечь квадратный корень изъ многочлена, надо расположить его по степенямъ главной буквы и извлечь квадратный корень изъ перваго члена: это будетъ первый членъ искомаго корня. Затѣмъ надо второй членъ подкоренного многочлена раздѣлить на удвоенный первый членъ корня: частное отъ этого дѣленія будетъ вторымъ членомъ корня.

Составивъ затѣмъ квадратъ перваго члена корня, удвоенное произведеніе перваго члена корня на второй и квадратъ второго члена корня, сумму этихъ членовъ надо вычесть изъ подкоренного многочлена; получимъ остатокъ. Первый членъ этого остатка надо раздѣлить опять на удвоенный первый членъ корня,—частное будетъ третьимъ членомъ корня. Составивъ сумму удвоенныхъ произведеній первыхъ двухъ членовъ корня на третій и квадратъ третьяго члена корня, надо ихъ вычесть изъ остатка; получимъ новый остатокъ. Первый членъ этого остатка надо опять раздѣлить на удвоенный первый членъ корня,—частное будетъ четвертымъ членомъ корня и т. д.

Вообще для нахожденія слѣдующаго члена корня, когда нѣсколько членовъ уже найдено, надо первый членъ остатка раздѣлить на удвоенный первый членъ

корня и, составивъ затѣмъ сумму удвоенныхъ произведеній всѣхъ прежде найденныхъ членовъ на новый и квадратъ этого новаго, вычесть ихъ изъ остатка; отъ этого получается или новый остатокъ, или же нуль.

Въ послѣднемъ случаѣ извлеченіе корня выполнено, и найденный многочленъ представляетъ искомый корень.

Извлеченіе приближенныхъ квадратныхъ корней изъ чиселъ.

§ **218.** Теорема. **Если квадратный корень изъ цѣлаго числа не равенъ цѣлому числу, то не можетъ равняться также и никакой дроби.**

Доказательство. Положитъ $\sqrt{A}$, гдѣ A цѣлое число, не равенъ цѣлому числу. Докажемъ отъ противнаго. Допустимъ, что $\sqrt{A} = \frac{a}{b}$, гдѣ $\frac{a}{b}$ дробь несократимая, т. е. ея числитель и знаменатель числа взаимно-простыя, ибо въ противномъ случаѣ ее всегда можно сократить и замѣнить несократимою. Тогда, по опредѣленію извлеченія корня, будемъ имѣть:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = A$$

$$\text{или } \frac{a^2}{b^2} = A.$$

Но послѣднее равенство невѣрно, такъ какъ a и b суть числа взаимно-простыя, а слѣдовательно и квадраты ихъ также числа взаимно-простыя, а потому и частное отъ дѣленія квадратовъ ихъ, т. е. отъ дѣленія a^2 на b^2, не можетъ равняться цѣлому числу A. Если же послѣднее равенство невозможно, то значитъ и предположенное нами равенство, что $\sqrt{A}$ равняется несократимой дроби $\frac{a}{b}$, невозможно.

§ 219. Теорема. **Если у несократимой дроби ни числитель, ни знаменатель, или только одинъ изъ нихъ, не представляютъ полныхъ квадратовъ нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ, то корень квадратный изъ такой дроби не можетъ быть ни цѣлымъ числомъ, ни дробью.**

Пусть въ дроби $\frac{A}{B}$, гдѣ A и B суть числа цѣлыя, ни A, ни B, или же только A, или только B не представляютъ полныхъ квадратовъ нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ; докажемъ, что въ такомъ случаѣ и $\sqrt{\frac{A}{B}}$ не можетъ равняться ни цѣлому числу, ни дроби.

Доказательство: 1) $\sqrt{\frac{A}{B}}$ не можетъ равняться цѣлому числу потому, что квадратъ цѣлаго числа есть также цѣлое число и не можетъ поэтому равняться подкоренной дроби $\frac{A}{B}$.

2) Если допустить, что

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{a}{b},$$

$$\text{то } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{A}{B}, \text{ или } \frac{a^2}{b^2} = \frac{A}{B}.$$

Но такъ какъ $\frac{a^2}{b^2}$ и $\frac{A}{B}$ суть дроби несократимыя, то равенство ихъ возможно только тогда, когда одновременно

$$a^2 = A \text{ и } b^2 = B,$$

а это противорѣчитъ условію теоремы, слѣдовательно предположеніе, что $\sqrt{\frac{A}{B}}$ равняется дроби, несправедливо. Это и требовалось доказать.

Итакъ, если подкоренное число (цѣлое число или дробь) не представляетъ полнаго квадрата, то корень не можетъ быть ни цѣлымъ числомъ, ни дробью: это значитъ, что онъ не можетъ быть выраженъ точно опредѣленнымъ числомъ, а только **приближеннымъ.**

§ **220.** Если какое-нибудь количество не можетъ быть вычислено точно, а лишь приближенно, то въ математикѣ принято заранѣе указывать **степень приближенія** или **степень погрѣшности** (ошибки).

Опредѣленіе. Дробью (долею) приближенія называется та дробь, менѣе которой можетъ быть при вычисленіи допускаема ошибка.

Очевидно, **что чѣмъ дробь приближенія менѣе**, тѣмъ и ошибка при вычисленіи менѣе, а приблизительная точность, или, какъ обыкновенно говорятъ, **степень точности болѣе.**

Опредѣленіе. **Число называется приближеннымъ съ точностью до $\frac{1}{n}$, если разность между этимъ числомъ и истинною величиною менѣе $\frac{1}{n}$.**

Примѣчаніе. Дробь, или степень приближенія $\frac{1}{n}$ при $n = 1$ обращается въ 1: это означаетъ, что погрѣшность должна быть менѣе одной цѣлой единицы.

§ **221.** Изъ опредѣленія приближеннаго числа слѣдуетъ, во-первыхъ, что оно можетъ быть меньшимъ, чѣмъ истинная величина, или, во-вторыхъ, большимъ, чѣмъ истинная величина, но въ обоихъ случаяхъ разность между истинною величиною и каждою изъ приближенныхъ менѣе данной дроби приближенія.

Приближенное число, меньшее истинной величины, называется **приближеннымъ съ недостаткомъ.**

Приближенное число, большее истинной величины, называется **приближеннымъ съ избыткомъ.**

§ 222. Опредѣленіе. **Если при извлеченіи квадратнаго корня изъ цѣлаго числа или неправильной дроби, не представляющихъ полныхъ квадратовъ, взять только цѣлое число корня и число на единицу большее, то эти цѣлыя числа будутъ приближенными значеніями искомаго корня съ точностью до единицы, при чемъ первое будетъ приближеннымъ съ недостаткомъ, а второе приближеннымъ съ избыткомъ.**

Пусть A число, не равное полному квадрату, и пусть a цѣлое число, квадратъ котораго ближайшимъ образомъ подходитъ къ числу A, т. е. такъ, что

$$a^2 < A$$
$$\text{и } (a+1)^2 > A.$$

Соединивъ эти два неравенства въ одинъ рядъ, будемъ имѣть:

$$a^2 < A < (a+1)^2 \text{ или, по опредѣленію,}$$
$$a < \sqrt{A} < a+1$$

Это выраженіе показываетъ, что подъ истиннымъ значеніемъ $\sqrt{A}$ мы подразумѣваемъ число, заключающееся между цѣлыми числами a и $a+1$, но не равное ни одному изъ нихъ.

Примѣчаніе. Понятіе истиннаго значенія несоизмѣримаго корня разъясняется въ § 234.

Такъ какъ разность между числами a и $a+1$ равна 1, то, очевидно, разность между каждымъ изъ нихъ и $\sqrt{A}$, истинное значеніе котораго заключается между a и $a+1$, будетъ менѣе 1, т. е. какъ a, такъ и $a+1$ представляютъ приближенныя значенія $\sqrt{A}$ съ точностью до 1; при чемъ a, будучи менѣе $\sqrt{A}$, есть приближенное значеніе съ недостаткомъ, $a+1$ приближенное значеніе съ избыткомъ.

§ 223. Чтобы извлечь кватратный корень изъ цѣлаго числа или неправильной дроби съ точностью до единицы, надо найти цѣлое число, квадратъ котораго ближайшимъ образомъ подходилъ бы къ цѣлому числу подкоренного количества, и взять это число и число на единицу большее.

Напр.: 1) Найти корень квадратный изъ 356 съ точностью до 1.

$$\sqrt{356} = 18 \text{ или } 19$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
28 & 256 \\
8 & 224 \\
\hline
 & \;\;32
\end{array}$$

Повѣрка: $18^2 = 324$ | $324 < 356 < 361$

$19^2 = 361$ | $18^2 < 356 < 19^2$.

2) Найти квадратный корень изъ $4526\frac{32}{71}$ съ точностью до 1.

$$\sqrt{4526\frac{32}{71}} = 67 \text{ или } 68$$

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\quad 36} \\
\hline
127 & 926 \\
7 & 889 \\
\hline
 & \;\;37
\end{array}$$

Повѣрка: $\left\{\begin{array}{l} 67^2 = 4489 \\ 68^2 = 4624 \end{array}\right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} 4489 < 4526\frac{32}{71} < 4624 \\ 67^2 < 4526\frac{32}{71} < 68^2 \end{array}\right.$

§ 224. Чтобы извлечь квадратный корень изъ какого-нибудь числа (цѣлаго или дробнаго) съ точностью до $\frac{1}{n}$, надо подкоренное число умножить на n^2, изъ этого произведенія извлечь квадратный корень съ точностью до единицы и каждый изъ полученныхъ корней раздѣлить на n.

Доказательство. Пусть требуется извлечь квадратный корень съ точностью до $\frac{1}{n}$ изъ P, гдѣ подъ P будемъ подразумѣвать цѣлое число, или дробное.

Слѣдующія несомнѣнно вѣрныя преобразованія подтверждаютъ вѣрность и цѣлесообразность предложеннаго правила.

$$\sqrt{P} = \frac{n\sqrt{P}}{n} = \frac{\sqrt{n^2}\,.\,\sqrt{P}}{n} = \frac{\sqrt{n^2 P}}{n}.$$

Послѣднее преобразованіе справедливо на основаніи § 199.

Теперь предположимъ, что $\sqrt{n^2P}$ съ точностью до единицы равенъ p или $p+1$, т. е.

$$p^2 < n^2P < (p+1)^2 \text{ или } p < \sqrt{n^2P} < p+1.$$

Раздѣливъ послѣдовательно увеличивающіяся числа на одно и то же число n, получимъ, очевидно, въ томъ же порядкѣ увеличивающіяся частныя:

$$\frac{p}{n} < \frac{\sqrt{n^2 . P}}{n} < \frac{p+1}{n}$$

Но $\frac{\sqrt{n^2 . P}}{n} = \sqrt{P}$,

слѣдовательно $\frac{p}{n} < \sqrt{P} < \frac{p+1}{n}$.

Такъ какъ разность между $\frac{p}{n}$ и $\frac{p+1}{n}$ равняется $\frac{1}{n}$, то разность между каждымъ изъ этихъ чиселъ и $\sqrt{P}$, истинное значеніе котораго заключается между ними, будетъ, конечно, менѣе $\frac{1}{n}$, т. е. $\frac{p}{n}$ и $\frac{p+1}{n}$ суть два значенія $\sqrt{P}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$, а эти числа представляютъ частныя отъ дѣленія на знаменатель дроби приближенія приближенныхъ съ точностью до единицы значеній корня квадратнаго изъ произведенія подкоренного числа на квадратъ знаменателя дроби приближенія.

Напр.: 1) Найти $\sqrt{15}$ съ точностью до $\frac{1}{12}$.

$12^2 = 144;$

$$144 \cdot 15 = 2160; \quad \sqrt{2160} = 46 \text{ или } 47$$

$$\begin{array}{r|l} & 16 \\ \hline 86 & 560 \\ 6 & 516 \\ \hline & \;\;44 \end{array}$$

$$\sqrt{15} = \frac{46}{12} \text{ или } \frac{47}{12} = 3\frac{10}{12}$$

$$\text{или } 3\frac{11}{12} = 3\frac{5}{6} \text{ или } 3\frac{11}{12}.$$

2) Опредѣлить $\sqrt{107\frac{5}{6}}$ съ точностью до $\frac{1}{5}$.

$$5^2 = 25; \quad 107\frac{5}{6} \cdot 25 = 2695\frac{5}{6};$$

$$\sqrt{2695\frac{5}{6}} = 51 \text{ или } 52$$

$$\begin{array}{r|l} & 25 \\ \hline 101 & 195 \\ 1 & 101 \\ \hline & \;\;94 \end{array}$$

$$\sqrt{107\frac{5}{6}} = \frac{51}{5} \text{ или } \frac{52}{5}, \text{ т. е. } 10\frac{1}{5} \text{ или } 10\frac{2}{5}.$$

Повѣрка. $\left(\frac{51}{5}\right)^2 = \frac{2601}{25} = 104\frac{1}{25}$; $\left(\frac{52}{5}\right)^2 = 108\frac{4}{25}$

$$104\frac{1}{25} < 107\frac{5}{6} < 108\frac{4}{25}$$

$$\text{или } \left(10\frac{1}{5}\right)^2 < 107\frac{5}{6} < \left(10\frac{2}{5}\right)^2$$

§ **225.** Чаще всего за дроби приближенія принимаютъ десятичныя доли единицы: 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. Въ такомъ случаѣ подкоренное число приводятъ къ виду десятичной дроби съ числомъ десятичныхъ знаковъ вдвое большимъ, чѣмъ у дроби приближенія (остальные знаки отбрасываются), изъ числителя этой десятичной дроби извлекаютъ корень квадратный съ точностью до единицы и въ обоихъ приближенныхъ значеніяхъ отдѣляютъ запятою столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ въ дроби приближенія.

Напр.:

1) Требуется опредѣлить $\sqrt{2,374}$ съ точностью до 0,01.

$$\sqrt{2,3740} = 1,54 \text{ или } 1,55.$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 25 & 137 \\ 5 & 125 \\ \hline 304 & 1240 \\ 4 & 1216 \\ \hline & 24 \end{array}$$

2) Опредѣлить $\sqrt{13\frac{11}{30}}$ съ точностью до 0,01.

$$\sqrt{13\frac{11}{30}} = \sqrt{13,3666\ldots} = 3,65 \text{ или } 3,66$$

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 66 & 436 \\ 6 & 396 \\ \hline 725 & 4066 \\ 5 & 3625 \\ \hline & 441 \end{array}$$

3) Найти $\sqrt{45}$ съ точностью до 0,001.

$$\sqrt{45} = \sqrt{45,00\,00\,00} = 6,708 \text{ или } 6,709$$

```
        36
 127 | 900
   7 | 889
 134 |  1100
13408 | 110000
    8 | 107264
```

Несоизмѣримое число.

§ **226**. **Общею мѣрою двухъ однородныхъ данныхъ величинъ называется такая однородная съ данными величина, которая заключается цѣлое число разъ какъ въ одной данной величинѣ, такъ и въ другой.**

Напр.: Для линій, длины которыхъ 2 арш. 4 вершка и 1 арш. 10 вершк., общая мѣра есть линія, длина которой 2 вершка, такъ какъ въ 2 арш. 4 вершк. она заключается 18 разъ, а въ 1 арш. 10 вершк. заключается 13 разъ.

Для	1 пуда 4 фунт.	Общая мѣра = 11 фунт.	4 раза
	и 33 фунт.	заключается	3 „

§ **227**. Величины, имѣющія общую мѣру, называются **соизмѣримыми**.

Величины, не имѣющія общей мѣры, называются **несоизмѣримыми**.

Несоизмѣримыя величины существуютъ въ дѣйствительности; такъ въ курсахъ геометріи доказывается, что сторона квадрата и его діагональ линіи несоизмѣримыя; окружность и діаметръ его—линіи между собою несоизмѣримыя.

Отношеніе двухъ соизмѣримыхъ величинъ есть **соизмѣримое число.**

Отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ величинъ есть **несоизмѣримое число.**

§ 228. Теорема. **Если двѣ величины соизмѣримы, то отношеніе ихъ есть или число цѣлое или дробь.**

Доказательство. Если A и B соизмѣримыя однородныя величины и ихъ общая мѣра, равная m, заключается въ A цѣлое число a разъ, въ B цѣлое число b разъ, то

$$A = am \text{ и } B = bm.$$

Раздѣливъ по частямъ первое равенство на второе, получаемъ:

$$\frac{A}{B} = \frac{am}{bm}$$

или, по сокращеніи правой части равенства на m,

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}.$$

Такъ какъ a и b суть числа цѣлыя, то, во-первыхъ, $\frac{a}{b}$ есть число цѣлое, если a кратное b, и, во-вторыхъ, $\frac{a}{b}$ есть дробь, если a не кратно b.

§ 229. Обратная теорема. **Если отношеніе двухъ**

величинъ равно цѣлому числу или дроби, то эти величины соизмѣримы.

Доказательство. 1) Пусть $\frac{A}{B}=a$, гдѣ a цѣлое число; тогда

$$A=aB \text{ и } B=\frac{A}{a}.$$

Раздѣлимъ A на a равныхъ частей, и пусть каждая часть равняется m; тогда

$$A=am, \text{ или } \frac{A}{m}=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

а слѣдовательно,

$$B=\frac{am}{a}, \text{ или } B=m, \text{ или } \frac{B}{m}=1 \quad \ldots \text{(II)}$$

Такъ какъ число m заключается въ A цѣлое число a разъ (I), и въ B заключается также цѣлое число 1 разъ (II), то m есть общая мѣра величинъ A и B, т. е. A и B соизмѣримы.

2) Пусть $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$, гдѣ a и b, какъ члены дроби, суть числа цѣлыя, и дробь $\frac{a}{b}$ несократима, такъ какъ сократимую дробь мы можемъ всегда, сдѣлавъ всѣ сокращенія, замѣнить ей равною несократимой.

Раздѣлимъ A на a равныхъ частей, и пусть каждая такая часть равна m; раздѣлимъ также B на b равныхъ частей, и пусть каждая часть будетъ m'; тогда

$$A=am \text{ и } B=bm',$$

а отношеніе

$$\frac{A}{B}=\frac{am}{bm'}.$$

Но намъ дано, что

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},$$

слѣдовательно

$$\frac{am}{bm'}=\frac{a}{b}.$$

Послѣднее равенство возможно только тогда, когда $m=m'$, а это значитъ, что величины A и B имѣютъ общую мѣру, т. е. онѣ соизмѣримы.

§ **230**. Способомъ отъ противнаго не трудно доказать противоположныя теоремы: прямую и обратную.

Противоположная прямой теоремѣ:

Если двѣ величины несоизмѣримы, то ихъ отношеніе не можетъ быть ни цѣлымъ числомъ, ни дробью.

Противоположная обратной теоремѣ:

Если отношеніе двухъ величинъ не можетъ быть ни цѣлымъ числомъ, ни дробью, то эти величины несоизмѣримы.

Отсюда заключаемъ, что:

1) числа цѣлыя и дроби суть **числа соизмѣримыя**,

2) всякое число не цѣлое и не дробь есть **число несоизмѣримое или ирраціональное.**

§ **231**. Теорема. **Если корень m-го показателя изъ цѣлаго числа не равенъ цѣлому числу, то онъ число ирраціональное.**

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, этотъ корень, не будучи равенъ цѣлому числу, не можетъ равняться никакой дроби, ибо никакая несократимая дробь, будучи возведена въ m-ую степень, не можетъ равняться цѣлому числу. Если же этотъ корень не можетъ равняться ни цѣлому числу, ни дроби, то онъ есть число ирраціональное.

Напр.: $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{12}$ суть числа ирраціональныя.

§ 232. Теорема. **Корень m-го показателя изъ несократимой дроби есть число ирраціональное, если числитель и знаменатель этой дроби не представляютъ полной m-ой степени нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ.**

Доказательство. Во-первыхъ, этотъ корень не можетъ равняться цѣлому числу, потому что всякая степень цѣлаго числа равна цѣлому числу, а не дроби.

Во-вторыхъ, допустивъ, что $\sqrt[m]{\frac{A}{B}} = \frac{a}{b}$, гдѣ a и b числа цѣлыя и взаимно-простыя, мы должны допустить также, что

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{A}{B}, \quad \text{или} \quad \frac{a^m}{b^m} = \frac{A}{B}.$$

Но послѣднее равенство представляетъ равенство двухъ несократимыхъ дробей, а это возможно только тогда, когда ихъ числители равны между собой и знаменатели тоже равны между собою, т. е.

$$a^m = A \text{ и } b^m = B.$$

Такъ какъ этотъ выводъ противорѣчитъ условію теоремы, то предположеніе, что $\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$ можетъ быть равенъ дроби, несправедливо, и теорема доказана, потому что этотъ корень не можетъ равняться ни цѣлому числу, ни дроби.

Напр.:

$$\sqrt{\frac{2}{7}};\quad \sqrt{\frac{5}{9}};\quad \sqrt[3]{0,17};\quad \sqrt{0,016}.$$

§ 233. Изъ всего вышеизложеннаго заключаемъ, что: **Несоизмѣримое или ирраціональное число можетъ быть вычислено только по приближенію съ желаемою степенью точности.**

Истинное значеніе несоизмѣримаго корня.

§ 234. Если найдемъ для $\sqrt{5}$ пары приближенныхъ значеній (съ недостаткомъ и съ избыткомъ), степень точности которыхъ будетъ постепенно возрастать, и расположимъ ихъ въ двухъ рядахъ, то

дроби приближенія	до 1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$	$\frac{1}{1000000}$
приближ. значеніе съ недостаткомъ.	2	2,2	2,23	2,236	2,2360	2,23606	2,236067
приближенное значеніе съ избыткомъ.	3	2,3	2,24	2,237	2,2361	2,23607	2,236068

какъ это видно изъ таблицы, во-первыхъ, числа верхняго ряда постепенно возрастаютъ, а нижняго ряда постепенно убываютъ; во-вторыхъ, числа одинаковой точности, по мѣрѣ увеличенія самой точности, все болѣе и болѣе сближаются, какъ бы стремясь слиться въ одно опредѣленное число, которое можно назвать тѣмъ предѣломъ, къ которому стремятся приближенныя значенія несоизмѣримаго числа при безконечномъ возрастаніи степени точности. Это число (предѣлъ) и представляетъ, очевидно, истинное значеніе несоизмѣримаго числа, т. е.

Истинное значеніе несоизмѣримаго числа есть предѣлъ, къ которому стремятся приближенныя значенія его при безконечно увеличивающейся степени точности.

§ **235**. Разсматривая несоизмѣримыя числа, какъ предѣлы, слѣдуетъ и на различныя дѣйствія съ ними смотрѣть, какъ на нахожденіе предѣла, къ которому стремится результатъ даннаго дѣйствія, если вмѣсто несоизмѣримыхъ чиселъ брать приближенныя значенія ихъ все съ большею и большею степенью точности. Многія свойства соизмѣримыхъ чиселъ относятся также и къ несоизмѣримымъ.

Квадратное уравненіе.

§ **236**. **Уравненіе съ одной неизвѣстной называется квадратнымъ, если послѣ освобожденія отъ скобокъ и дробей и соединенія подобныхъ членовъ заключаетъ неизвѣстное во второй степени и не выше второй степени.**

Напр.:

$$3x^2 - 8y + 5 = 0.$$

§ **237**. Всякое квадратное уравненіе можетъ быть приведено **къ общему виду**

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

если послѣ раскрытія скобокъ и уничтоженія знаменателей, перенесемъ всѣ члены въ одну часть уравненія и соединимъ члены, содержащіе неизвѣстное во второй степени, въ одинъ членъ (ax^2), члены, содержащіе неизвѣстное въ первой степени въ другой членъ (bx) и всѣ извѣстные члены будемъ разсматривать, какъ одинъ членъ (c).

a, b и c называются **коэффиціентами уравненія общаго вида.**

Напр.:

$$\frac{2x\,(x+1)}{6x+3}-\frac{(a+2)\,(2-a)}{6a}=\frac{1}{4x+2};$$

$$\frac{2x^2+2x}{6x+3}-\frac{4-a^2}{6a}=\frac{1}{4x+2};$$

Частн. знамен.	Общій знамен.	Доп. множит.
$6x+3=3\,(2x+1)$		$2a$
$6a$	$6a\ (2x+1)$	$(2x+1)$
$4x+2=2\,(2x+1)$		$3a$

Освободимъ уравненіе отъ знаменателей:

$$(2x^2+2x)\,2a-(4-a^2)\ (2x+1)=3a.$$

Произведемъ показанныя дѣйствія:

$$4ax^2+4ax-(8x-2a^2x+4-a^2)=3a.$$

Раскроемъ скобки и перенесемъ всѣ члены уравненія въ лѣвую часть:

$$4ax^2+4ax-8x+2a^2x-4+a^2-3a=0.$$

Какъ уравненіе общаго вида, это послѣднее уравненіе приводится къ виду:

$$4ax^2+(2a^2+4a-8)\,x+(a^2-3a-4)=0.$$

§ **238**. Если всѣ члены квадратнаго уравненія общаго вида раздѣлить на коэффиціентъ при неизвѣстномъ второй степени, то уравненіе приведемъ къ **простѣйшему виду:**

$$x^2+px+q=0,$$

въ которомъ p замѣняетъ $\frac{b}{a}$, а q замѣняетъ $\frac{c}{a}$; p и q называются **коэффиціентами квадратнаго уравненія простѣйшаго вида.**

Напр.: Полученное въ § 237 уравненіе общаго вида:

$$4ax^2+(2a^2+4a-8)x+(a^2-3a-4)=0,$$

по раздѣленіи всѣхъ членовъ на $4a$ приводится къ простѣйшему виду:

$$x^2+\frac{2a^2+4a-8}{4a}x+\frac{a^2-3a-4}{4a}=0.$$

§ **239**. Когда уравненіе приводится къ общему виду, то можетъ случиться, что коэффиціентъ b или c окажется равнымъ нулю; тогда получаются неполныя квадратныя уравненія:

1) $ax^2+bx=0$ . . . . неполное безъ извѣстнаго члена.
2) $ax^2+c=0$ . . неполное безъ неизвѣстнаго въ первой степени.

Примѣчаніе. Неполныя квадратныя уравненія простѣйшаго вида, очевидно, суть:

$$1)\ x^2+px=0$$

$$2)\ x^2+q=0$$

Напр.: 1) $\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2} - 1$

$$x + a - (x - a) = 1 - (x^2 - a^2)$$

$$x + a - x + a = 1 - x^2 + a^2$$

$$x + a - x + a - 1 + x^2 - a^2 = 0$$

$$x - a^2 + 2a - 1 = 0$$

или

$$x^2 - (a^2 - 2a + 1) = 0.$$

2) $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} = \frac{a^2}{x^2-a^2} + 1$

$$x - a + x + a = a^2 + x^2 - a^2$$

$$x - a + x + a - a^2 - x^2 + a^2 = 0$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0.$$

Рѣшеніе квадратныхъ уравненій.

§ 240. Теорема. **Неполное квадратное уравненіе вида**

$$x^2 + px = 0$$

имѣетъ два корня: одинъ изъ нихъ равенъ 0, а другой равенъ коэффиціенту при неизвѣстномъ въ первой степени съ противоположнымъ знакомъ.

Докажемъ, что для уравненія $x^2 + px = 0$ корни:

$$x_{\mathrm{I}} = 0\,; \quad x_{\mathrm{II}} = -p.$$

Преобразовавъ данное уравненіе

$$x^2 + px = 0$$
$$x(x + p) = 0,$$

видимъ, что лѣвая часть уравненія обращается въ нуль, т. е. уравненіе обращается въ тождество, при двухъ условіяхъ:

1) когда множитель x равенъ 0 (тогда, конечно, $x+p$ не равно нулю) и 2) когда $x+p$ равно нулю, т. е. когда: 1) $x=0$
и 2) $x+p=0$; откуда $x=-p$. Первое изъ этихъ условій прямо называетъ корнемъ уравненія 0, а изъ второго заключаемъ, что x, т. е. корень уравненія, долженъ равняться $-p$. Это и требовалось доказать.

Напр.: $3x^2-18x=0$.

Такъ какъ предыдущая теорема относится къ уравненію **простѣйшаго вида**, то приведемъ данное уравненіе къ простѣйшему виду $x^2-6x=0$, и на основаніи § 240 имѣемъ: $x_{\mathrm{I}}=0$; $x_{\mathrm{II}}=6$.

§ **241.** Теорема. **Неполное квадратное уравненіе вида: $x^2+q=0$ имѣетъ два корня: одинъ изъ нихъ равняется положительному значенію корня квадратнаго изъ извѣстнаго члена, взятаго съ обратнымъ знакомъ, а другой отрицательному значенію того же корня.**

Докажемъ, что для уравненія $x^2+q=0$ корни:

$$x_{\mathrm{I}}=+\sqrt{-q}\,;$$

$$x_{\mathrm{II}}=-\sqrt{-q}\,.$$

Замѣнивъ q черезъ $-(-q)$, будемъ имѣть:

$$x^2-(-q)=0.$$

На основанiи § 197: $-q=\left(\sqrt{-q}\right)^2$, а потому

$$x^2-\left(\sqrt{-q}\right)^2=0.$$

Лѣвую часть этого уравненiя, какъ разность квадратовъ, замѣнимъ двумя множителями:

$$\left(x-\sqrt{-q}\right)\cdot\left(x+\sqrt{-q}\right)=0.$$

Очевидно, это уравненiе можетъ обратиться въ тождество при двухъ условiяхъ:

1) когда множитель $\left(x-\sqrt{-q}\right)=0$ и

2) когда множитель $\left(x+\sqrt{-q}\right)=0$. Первое условiе требуетъ, чтобы x, т. е. корень уравненiя, былъ равенъ $+\sqrt{-q}$, а второе, чтобы x былъ равенъ $-\sqrt{-q}$. Это и требовалось доказать.

Напр.:

$$2x^2-32=0$$

$$x^2-16=0$$

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{I}}&=+\sqrt{16}\\ x_{\mathrm{II}}&=-\sqrt{16}\end{aligned}\right| \text{ или } \begin{aligned} x_{\mathrm{I}}&=4\\ x_{\mathrm{II}}&=-4.\end{aligned}$$

§ 242. Теорема. **Полное квадратное уравненiе вида:**

$$x^2+px+q=0$$

имѣетъ два корня, которые равняются половинѣ коэффицiента при неизвѣстномъ первой степени съ обратнымъ

знакомъ $\pm$ ($+$ для одного корня, — для другого) корень квадратный изъ этой половины въ квадратѣ безъ извѣстнаго члена.

Докажемъ, что для уравненія $x^2+px+q=0$ корни:

$$x_{\mathrm{I}}=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

и

$$x_{\mathrm{II}}=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Замѣтивъ, что $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$, преобразуемъ данное уравненіе:

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=0$$

или

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0$$

или

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=0.$$

Разлагая лѣвую часть уравненія на множители, получимъ:

$$\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=0$$

Очевидно, лѣвая часть уравненія обратится въ нуль, т. е. уравненіе обратится въ тождество, при двухъ условіяхъ: когда

1) $$x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0$$

и

2) $$x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0.$$

Но первое условіе требуетъ, чтобы

$$x_{\mathrm{I}} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

а второе условіе требуетъ, чтобы

$$x_{\mathrm{II}} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Тѣ же значенія неизвѣстнаго, которыя обращаютъ уравненіе въ тождество, суть корни уравненія, слѣдовательно x_{I} и x_{II} корни даннаго уравненія. Это и требовалось доказать.

Напр.: $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Корни его: $x_{\mathrm{I}} = 4 + \sqrt{16 - 15}$, $x_{\mathrm{II}} = 4 - \sqrt{16 - 15}$ или $x_{\mathrm{I}} = 5$, $x_{\mathrm{II}} = 3$

Примѣчаніе. Очевидно, когда въ квадратномъ уравненіи простѣйшаго вида p есть число отрицательное, то $(-p)$ положительное и когда q отрицательно, то $(-q)$ положительное.

Условія дѣйствительности, мнимости и равенства корней квадратнаго уравненія.

§ **243**. **Корни полнаго квадратнаго уравненія**

$$x^2 + px + q = 0$$

дѣйствительны (вещественны) при двухъ условіяхъ: во-первыхъ, когда извѣстный членъ въ уравненіи q

отрицателенъ, независимо отъ того, будетъ ли коэффиціентъ p положителенъ, или отрицателенъ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулъ корней

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

видно, что они будутъ дѣйствительными, если подкоренная величина радикала $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ будетъ числомъ положительнымъ, а при q отрицательномъ разность $\frac{p^2}{4} - q$ обращается въ сумму положительныхъ чиселъ $\frac{p^2}{4} - (-q)$, что равняется $\frac{p^2}{4} + q$, а $\frac{p^2}{4}$, какъ квадратъ нѣкотораго числа, независимо отъ знака p, всегда число положительное. Во-вторыхъ, когда извѣстный членъ q положителенъ, но $\frac{p^2}{4} > q$.

Въ самомъ дѣлѣ, при q положительномъ подкоренная величина радикала $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ представляетъ разность положительныхъ чиселъ, которая при условіи $\frac{p^2}{4} > q$ равняется положительному числу.

§ 244. Корни полнаго квадратнаго уравненія

$$x^2 + px + q = 0$$

мнимы, когда извѣстный членъ q положителенъ, но $\frac{p^2}{4} < q$.

Изъ формулы корней видно, что корни будутъ мнимыми, когда подкоренная величина представляетъ число отрицательное, а при условіяхъ, что извѣстный членъ q положителенъ и $\frac{p^2}{4} < q$, подкоренная величина представляетъ разность положительныхъ чиселъ, въ которой уменьшаемое менѣе вычитаемаго, т. е. эта разность есть число отрицательное.

§ 245. Корни полнаго квадратнаго уравненія

$$x^2 + px + q = 0$$

равны и дѣйствительны, когда извѣстный членъ q положителенъ, но $\frac{p^2}{4} = q$.

Дѣйствительно, если q положительно и равно $\frac{p^2}{4}$, то подкоренная величина радикала обращается въ нуль и оба корня равняются одному и тому же числу, а именно — $\frac{p}{2}$.

§ 246. Корни неполнаго квадратнаго уравненія вида $x^2 + q = 0$ дѣйствительны, если извѣстный членъ q отрицателенъ, и мнимы, если онъ положителенъ.

Дѣйствительно, для уравненія этого вида корни суть: $x_{\text{I}} = + \sqrt{-q}$; $x_{\text{II}} = - \sqrt{-q}$, а они будутъ дѣйствительными, когда подкоренная величина $(-q)$ будетъ положительнымъ числомъ, а это возможно, когда q отрицательно; если же q положительно, то $(-q)$ отрицательно, а корень четнаго показателя изъ количества отрицательнаго есть величина мнимая.

§ 247. Корни неполнаго квадратнаго уравненія вида: $x^2 + px = 0$ всегда дѣйствительны, такъ какъ одинъ изъ нихъ всегда равенъ нулю, а другой $(-p)$.

Рѣшеніе уравненій вида $ax^2 + bx + c = 0$.

§ **248**. Такъ какъ квадратное уравненіе простѣйшаго вида $x^2 + px + q = 0$, полученое изъ уравненія общаго вида $ax^2 + bx + c = 0$ дѣленіемъ его членовъ на a, то $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$.

Подставивъ $\frac{a}{b}$ на мѣсто p и $\frac{c}{a}$ на мѣсто q въ формулу корней уравненія простѣйшаго вида $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ получимъ, очевидно, формулу корней уравненія общаго вида:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

$$\text{или } x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

$$\text{или } x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\text{или } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\text{т. е. } x_{\mathrm{I}} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x_{\mathrm{II}} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Этотъ же выводъ можно получить, преобразовывая уравненіе общаго вида:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)=0$$

откуда $x_{\text{I}}=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$

и $x_{\text{II}}=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$,

или $x_{\text{I}}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x_{\text{II}}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Напр.: $3x^2-2x-65=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\,.\,3\,.\,(-65)}}{6}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+780}}{6};$$

$$\sqrt{784}=28$$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 48 & 384 \\ 8 & 384 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$x = \frac{2 \pm 28}{6}$$

$$x_{\mathrm{I}} = \frac{2+28}{6} = 5\ ;$$

$$x_{\mathrm{II}} = \frac{2-28}{6} = \frac{-26}{6} = -4\frac{1}{3}\ .$$

Квадратное уравненіе имѣетъ два корня.

§ **249.** Такъ какъ всякое квадратное уравненіе можетъ быть приведено къ виду

$$x^2 + px + q = 0,$$

а это уравненіе имѣетъ два корня, то всякое квадратное уравненіе имѣетъ всегда два корня.

Эти корни (§§ 243, 244, 245, 246 и 247) могутъ быть

или 1) оба дѣйствительны и различны,

или 2) оба мнимы,

или 3) оба дѣйствительны и равны.

Свойства корней квадратнаго уравненія.

§ **250.** I. **Сумма корней квадратнаго уравненія равна коэффиціенту при неизвѣстномъ въ первой степени съ обратнымъ знакомъ.**

Написавъ формулы корней:

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{I}} &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ x_{\mathrm{II}} &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

сложимъ эти равенства по частямъ:

$$x_{\text{I}} + x_{\text{II}} = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -\frac{2p}{2} = -p.$$

II. **Произведеніе корней квадратнаго уравненія равняется извѣстному члену съ его знакомъ.**

Перемноживъ равенства (α) по частямъ, получимъ, примѣняя формулу произведенія суммы на разность:

$$x_{\text{I}} \,.\, x_{\text{II}} = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right),$$

$$x_{\text{I}} \,.\, x_{\text{II}} = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2,$$

$$x_{\text{I}} \,.\, x_{\text{II}} = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

$$x_{\text{I}} \,.\, x_{\text{II}} = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q,$$

$$x_{\text{I}} \,.\, x_{\text{II}} = q\,.$$

§ **251. Когда даны корни квадратнаго уравненія, то можно составить и самое уравненіе.**

Напр.: пусть $x_{\text{I}} = 7$, а $x_{\text{II}} = -2$; тогда, подставляя 7 на мѣсто x_{I} и (-2) на мѣсто x_{II} въ равенства

$$x_{\text{I}} + x_{\text{II}} = -p \text{ и } x_{\text{I}} \,.\, x_{\text{II}} = q,$$

получимъ:

1) $7 - 2 = -p$, откуда $p = -5$,

и 2) $7 \,.\, (-2) = q$, откуда $q = -14$,

а потому, подставляя (-5) на мѣсто p и (-14) на мѣсто q въ простѣйшій видъ квадратнаго уравненія, получимъ:

$$x^2 - 5x - 14 = 0,$$

которое и представляетъ искомое уравненіе.

Зависимость между знаками коэффиціентовъ квадратнаго уравненія и знаками дѣйствительныхъ корней его.

§ **252**. Когда корни квадратнаго уравненія дѣйствительны, то по знакамъ коэффиціентовъ уравненія p и q можно судить о знакахъ корней, а въ нѣкоторыхъ случаяхъ и объ ихъ абсолютныхъ величинахъ.

Относительно знаковъ при коэффиціентахъ квадратныя уравненія могутъ быть вида:

1. $x^2+px+q=0$, т. е. p и q положительныя.

2. $x^2-px+q=0$, т. е. p отрицательное, q положительное.

3. $x^2+px-q=0$, т. е. p положительное, q отрицательное.

4. $x^2-px-q=0$, т. е. p и q отрицательныя.

Разсмотримъ эти четыре случая

1. **p и q имѣютъ положительные знаки.**

Если q положительнаго знака, то произведеніе корней также положительно, а это значитъ, что сомножители, т. е. корни одного знака, но такъ какъ при этомъ p положительнаго знака, то сумма корней противоположнаго, т. е. отрицательнаго знака, а если сумма двухъ корней отрицательна и оба они одного знака, **то оба корня отрицательны.**

Разсужденіями, подобными только что приведеннымъ, можно доказать, что:

2. **Если p отрицательное, q положительное, то оба корня положительны.**

3. **p положительное, а q отрицательное.**

Если q отрицательно, то произведеніе корней также отрицательно, а это значитъ, что сомножители, т. е. **корни, разныхъ знаковъ**, но такъ какъ p положительно, то сумма корней отрицательна, если же сумма двухъ корней отрицательна, а корни разныхъ знаковъ, **то абсолютное значеніе отрицательнаго корня болѣе абсолютнаго значенія положительнаго корня.**

Подобнымъ же способомъ докажемъ, что:

4. **Если p и q имѣютъ отрицательные знаки, то корни разныхъ знаковъ и абсолютное значеніе положительнаго корня болѣе абсолютнаго значенія отрицательнаго корня.**

Трехчленное количество второй степени.

§ **253**. Трехчленъ ax^2+bx+c, въ которомъ x **есть перемѣнное число**, коэффиціенты же a, b и c **данныя числа**, называется трехчленнымъ количествомъ второй степени.

Трехчленное количество второй степени отличается отъ лѣвой части квадратнаго уравненія общаго вида $ax^2+bx+c=0$ тѣмъ, что въ трехчленѣ буквѣ x можно придавать различныя, совершенно произвольныя значенія, въ зависимости отъ которыхъ будетъ измѣняться и значеніе всего трехчлена, въ лѣвой же части квадратнаго уравненія общаго вида подъ x разумѣются только тѣ значенія, которыя обращаютъ лѣвую часть его въ нуль, т. е. только корни.

Напр. трехчленъ $3x^2-20x+25$:

при $x=0$ имѣетъ значеніе 25
„ $x=1$ „ „ 8

при $x=2$ имѣетъ значеніе -3
„ $x=5$ „ „ 0
„ $x=1\frac{2}{3}$ „ „ 0
„ $x=10$ „ „ 125

Продолжая давать буквѣ x новыя произвольныя значенія, будемъ получать всякій разъ и для трехчлена новое значеніе. Между произвольными значеніями x въ трехчленѣ

$$3x^2-20x+25$$

два значенія: $x=5$ и $x=\frac{5}{3}$ обращаютъ трехчленъ въ нуль.

Тѣ значенія перемѣннаго количества x, которыя обращаютъ трехчленъ ax^2+bx+c въ нуль, называются корнями трехчленнаго количества.

Очевидно, корни трехчлена ax^2+bx+c равны корнямъ уравненія $ax^2+bx+c=0$ или уравненія

$$x+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x=0\,.$$

§ **254**. Теорема. **Трехчленъ второй степени ax^2+bx+c разлагается на три множителя: одинъ изъ нихъ равенъ коэффиціенту a, два же другіе равны разностямъ между перемѣннымъ x и корнями даннаго трехчлена.**

Доказательство. Пусть корни трехчлена

$$ax^2+bx+c$$

равны m и n, тогда (§ 250, I и II)

$$m+n=-\frac{b}{a}$$

и

$$mn=\frac{c}{a}\,,$$

а слѣдовательно

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(m+n)x+mn=$$

$$=x^2-mx-nx+mn=x\ (x-m)-n\ (x-m)=$$

$$=(x-m)\ (x-n).$$

Умноживъ обѣ части равенства на a, получимъ:

$$ax^2+bx+c=a\ (x-m)\ (x-n).$$

Это и требовалось доказать.

Напр. 1) $9x^2-9x+2$ разложить на множители.

$$x^2-x+\frac{2}{9}=0\ ;$$

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{2}{9}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9-8}{36}}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{6}\ ;$$

$$x_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\ ;$$

$$x_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\ ;$$

Слѣдовательно

$$9x^2-9x+2=9\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(3x-2)\ (3x-1).$$

2) $x^2+2\sqrt{a}\ .\ x+a-b$ разложить на множители.

$$x^2+2\sqrt{a}\ .\ x+a-b=0;$$

$$x=-\sqrt{a}\pm\sqrt{a-a+b}=-\sqrt{a}\pm\sqrt{b};$$

$$x_{\mathrm{I}}=-\sqrt{a}+\sqrt{b}\ ;$$

$$x_{\mathrm{II}}=-\sqrt{a}-\sqrt{b}\ ;$$

Слѣдовательно

$$x^2+2\sqrt{a}\,.\,x+a-b=(x+\sqrt{a}-\sqrt{b})\ (x+\sqrt{a}+\sqrt{b}).$$

§ 255. Такъ какъ лѣвая часть квадратнаго уравненія $x^2+px+q=0$ представляетъ трехчленъ второй степени, разлагающійся на два множителя $(x-x_\mathrm{I})\ (x-x_\mathrm{II})$, гдѣ x_I и x_II суть корни этого трехчлена, то, **знная корни квадратнаго уравненія x_I и x_II, можно составить само уравненіе** перемноженіемъ разности $x-x_\mathrm{I}$ и разности $x-x_\mathrm{II}$ и приравненіемъ полученнаго произведенія нулю

Напр.: корни квадратнаго уравненія 3 и -6.

$$(x-3)\,.\,(x+6)=x^2-3x+6x-18=x^2+3x-18.$$

Слѣдовательно искомое квадратное уравненіе:

$$x^2+3x-18=0.$$

Свойства радикаловъ.

§ 256. **Одночленъ, въ которомъ находится знакъ корня, называется коренным, или ирраціональнымъ, или радикаломъ.**

Напр.: $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt{2a}$; $3a\sqrt[3]{a^2b}$; $\frac{2a}{3\sqrt{b}}$ и т. п.

Множители, не находящіеся подъ знакомъ корня, пишутся впереди радикала и называются коэффиціентомъ радикала.

Напр.: въ одночленѣ $4ab^2\sqrt[3]{x}$ коэффиціентъ радикала есть $4ab^2$.

Многочленъ, въ которомъ хоть одинъ членъ ирраціональный, называется ирраціональнымъ или кореннымъ многочленомъ.

Теорема. **Чтобы радикалъ возвысить въ степень, надо въ эту степень возвысить подкоренное количество.**

Доказательство. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,.\,.\,.}_{m} =$

$$= \sqrt[n]{\underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\,.\,.\,.}_{m}} = \sqrt[n]{a^m}\,.$$

Напр.:

$$\left(\sqrt[15]{2ab^2c^3}\right)^2 = \sqrt[15]{4a^2b^4c^6}\,.$$

Теорема. **Чтобы извлечь корень изъ корня, надо перемножить показатели корней.**

Доказательство. Пусть $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = x$; возвысивъ обѣ части равенства въ степень n, получимъ:

$$\sqrt[m]{a} = x^n;$$

возвысивъ снова обѣ части равенства въ степень m, получимъ:

$$a = x^{nm};$$

но если nm-ая степень x равна a, то x есть корень nm-ой степени изъ a, т. е.

$$x = \sqrt[nm]{a}\,.$$

§ **257.** Такъ умноженіе показателя корня равносильно извлеченію корня, а умноженіе показателя подкоренного количества равносильно возведенію въ степень, и такъ какъ извлеченіе корня и возведеніе въ степень того же показателя суть дѣйствія обратныя, другъ друга уничтожающія (§ 197), то **умноженіе показателя корня и показателя подкоренного количества на одно и то же число не измѣняетъ значенія радикала,** т. е.

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[nm]{a^{km}} .$$

Написавъ это равенство въ обратномъ порядкѣ, получимъ:

$$\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k} .$$

Это даетъ право сдѣлать обратное заключеніе:

Дѣленіе показателя корня и показателя подкоренного количества на одно и то же число не измѣняютъ значенія радикала.

На первомъ изъ этихъ свойствъ основано приведеніе радикаловъ къ общему показателю корня, а именно:

Чтобы привести радикалы къ общему показателю корня, надо найти наименьшее кратное для показателей корней и соотвѣтствующихъ дополнительныхъ множителей для каждаго радикала, а затѣмъ показатель корня и показатель подкоренного количества умножить на соотвѣтствующій дополнительный множитель.

Напр.:

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{a} &= \sqrt[12]{a^6} \\ \sqrt[6]{2a} &= \sqrt[12]{4a^2} \\ \sqrt[4]{a^3} &= \sqrt[12]{a^9} . \end{aligned}\right.$$

На второмъ свойствѣ основано сокращеніе радикала, а именно:

Чтобы сократить радикалъ, надо показатель корня и показатель подкоренного количества раздѣлить на общій ихъ дѣлитель.

Напр.:

1) $\sqrt[20]{a^8b^{10}} = \sqrt[10]{a^4b^5}$;

2) $\sqrt[6]{4a^4b^2} = \sqrt[3]{2a^2b}$;

3) $\sqrt[10]{4a^8 - 4a^7 + a^6} = \sqrt[10]{a^6\ (4a^2 - 4a + 1)} =$

$= \sqrt[10]{a^6\ (2a - 1)^2} = \sqrt[5]{a^3(2a - 1)} = \sqrt[5]{2a^4 - a^3}$.

Примѣчаніе. При возведеніи радикала въ степень можно показатель корня раздѣлить на показатель степени, въ которую возвышаютъ, если это дѣленіе совершается на-цѣло.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\left(\sqrt[6]{a^5}\right)^3 = \sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[\frac{6}{3}]{a^{\frac{15}{3}}} = \sqrt{a^5}.$$

При извлеченіи корня изъ радикала можно показатель подкоренного количества раздѣлить на показатель перваго корня, если это дѣленіе совершается на-цѣло.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\sqrt{\sqrt[11]{a^6}} = \sqrt[33]{a^6} = \sqrt[\frac{33}{3}]{a^{\frac{6}{3}}} = \sqrt[11]{a^2}.$$

§ **258.** Если подкоренное количество можно представить, какъ произведеніе двухъ такихъ множителей, что изъ одного изъ нихъ корень извлекается точно, то этотъ послѣдній множитель называется **раціональнымъ** и корень изъ него извлекаютъ и присоединяютъ къ коэффиціенту радикала.

Это преобразованіе радикала называется вынесеніемъ раціональнаго множителя изъ-подъ знака корня.

Напр.:

1) $\sqrt[3]{a^8}=\sqrt[3]{a^6 \cdot a^2}=a^2\sqrt[3]{a^2}$.

2) $2\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{8 \cdot 2}=4\sqrt[3]{2}$.

3) $2a\sqrt{18a^5b^2}=2a\sqrt{9a^4b^2 \cdot 2a}=6a^3b\sqrt{2a}$.

§ **259.** Иногда бываетъ полезно внести подъ знакъ корня нѣкоторые изъ раціональныхъ множителей, входящихъ въ его коэффиціентъ. **Это преобразованіе радикала называется внесеніемъ раціональнаго множителя подъ знакъ корня** и выполняется слѣдующимъ образомъ: тотъ множитель, который желаютъ внести подъ знакъ корня, возвышаютъ въ степень показателя корня и на эту степень умножаютъ подкоренное количество.

Напр.:

1) $2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3 \cdot 2^3}=\sqrt[3]{24}$.

2) $3a^2\sqrt[4]{ab^3}=3\sqrt[4]{ab^3 \cdot a^8}=3\sqrt[4]{a^9b^3}$.

3) $\frac{3}{a}\sqrt[5]{a^4}=\sqrt[5]{a^4\frac{243}{a^5}}=\sqrt[5]{\frac{243}{a}}$.

§ **260. Подобными радикалами называются такіе, у которыхъ показатели корней равны и подкоренныя количества равны.**

Напр.: $2a\sqrt[3]{a^2b}$; $a^2b\sqrt[3]{a^2b}$; $4m\sqrt[3]{a^2b}$—подобны.

Сложеніе и вычитаніе ирраціональныхъ одночленовъ заключается въ томъ, что одночлены соединяются въ одинъ многочленъ, въ которомъ дѣлается приведеніе подобныхъ членовъ.

Напр.:

$$4a\sqrt{b}+(-3b\sqrt{a})+(+b\sqrt{b})-(-2a\sqrt{a})-(+3a\sqrt{b})=$$

$$=4a\sqrt{b}-3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}=$$

$$=(4a+b-3a)\sqrt{b}+(2a-3b)\sqrt{a}=$$

$$=(a+b)\sqrt{b}+(2a-3b)\sqrt{a}\ .$$

Умноженіе радикаловъ выполняется по слѣдующимъ двумъ правиламъ:

1) Чтобы премножить радикалы съ одинаковыми показателями корня, надо перемножить ихъ подкоренныя величины и изъ произведенія извлечь корень общаго показателя (см. § 199).

Напр.:

$$\sqrt[n]{a}\ .\ \sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ .$$

2) Чтобы перемножить радикалы съ различными показателями корня, надо привести ихъ къ общему показателю корня и тогда перемножить по первому правилу.

Напр.:

$$\sqrt[n]{a}\ .\ \sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m}\ .\ \sqrt[nm]{b^n}=\sqrt[nm]{a^m b^n}\ .$$

Дѣленіе радикаловъ выполняется по слѣдующимъ правиламъ:

1) **Чтобы раздѣлить радикалъ на радикалъ, когда показатели корней у нихъ одинаковы, надо подкоренное количество дѣлимаго раздѣлить на подкоренное количество дѣлителя и изъ этого частнаго извлечь корень общаго показателя** (см. § 200).

Напр.:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,.$$

2) **Чтобы раздѣлить радикалъ на радикалъ, когда показатели корней у нихъ различны, надо привести ихъ къ общему показателю корня и тогда раздѣлить по первому правилу.**

Напр.:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} : \sqrt[nm]{b^n} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}\,.$$

Дѣйствія надъ ирраціональными многочленами слѣдуютъ тѣмъ же правиламъ, какъ и надъ раціональными многочленами, т. е. сложеніе по правилу § 62, вычитаніе—§ 63, умноженіе—§§ 74, 75 и 76, дѣленіе—§§ 97 и 100, возведеніе въ степень—§ 191, извлеченіе корня—§ 217.

Примѣчаніе. При выполненіи дѣйствій умноженія, дѣленія, возведенія въ степень и извлеченія корня надъ ирраціональными многочленами полезно бываетъ до выполненія дѣйствій сдѣлать приведеніе всѣхъ ирраціональныхъ многочленовъ къ общему показателю корня, такъ какъ это облегчаетъ расположеніе многочлена по степенямъ главной буквы и освобождаетъ отъ выполненія этого преобразованія во многихъ отдѣльныхъ случаяхъ.

Напр.:

$$1.\ \left(\tfrac{1}{2}\sqrt[4]{8}+\sqrt[3]{4}-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt[3]{4}-10\sqrt{2}\right)=?$$

Разсматривая подкоренныя количества какъ степени числа 2, приведемъ радикалы къ общему показателю корня и расположимъ по степенямъ:

$$\frac{1}{2}\sqrt[12]{2^9}+\sqrt[12]{2^8}-2\sqrt[12]{2^6}$$

$$\times\qquad 2\sqrt[12]{2^8}-10\sqrt[12]{2^6}$$

$$\sqrt[12]{2^{17}}+2\sqrt[12]{2^{16}}\qquad\qquad -4\sqrt[12]{2^{14}}$$

$$-5\sqrt[12]{2^{15}}-10\sqrt[12]{2^{14}}+20\sqrt[12]{2^{12}}$$

$$\sqrt[12]{2^{17}}+2\sqrt[12]{2^{16}}-5\sqrt[12]{2^{15}}-14\sqrt[12]{2^{14}}+20\sqrt[12]{2^{12}}=$$

$$=2\sqrt[12]{2^5}+4\sqrt[12]{2^4}-10\sqrt[12]{2^3}-28\sqrt[12]{2^2}+40=$$

$$=2\sqrt[12]{32}+4\sqrt[3]{2}-10\sqrt[4]{2}-28\sqrt[6]{2}+40\ .$$

$$2.\qquad \left(2x^2+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{x}+2x\sqrt[6]{x}\right):\left(\sqrt[3]{x^2}+2x\sqrt{x}\right)=$$

$$=\left(2\sqrt[6]{x^{12}}+\tfrac{1}{2}\sqrt[6]{x^2}+2\sqrt[6]{x^7}\right):\left(\sqrt[6]{x^4}+2\sqrt[6]{x^9}\right)\ .$$

$$\begin{array}{r|l}
2\sqrt[6]{x^{12}}+2\sqrt[6]{x^7}+\tfrac{1}{2}\sqrt[6]{x^2} & 2\sqrt[6]{x^9}+\sqrt[6]{x^4} \\ \cline{2-2}
\mp 2\sqrt[6]{x^{12}}\ \mp\sqrt[6]{x^7}\qquad\qquad & \sqrt[6]{x^3}+\tfrac{1}{2}\sqrt[6]{\dfrac{1}{x^2}} \\ \cline{1-1}
\sqrt[6]{x^7}+\tfrac{1}{2}\sqrt[6]{x^2} & \text{или:} \\
\mp\sqrt[6]{x^7}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt[6]{x^2} & \sqrt{x}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$3.\qquad \sqrt{x^3+20x^2+16x\sqrt{x}+16x\sqrt[4]{x^3}-4x^2\sqrt[4]{x^3}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt[4]{x^{12}}+20\sqrt[7]{x^8}+16\sqrt[4]{x^6}+16\sqrt[4]{x^7}-4\sqrt[4]{x^{11}}}$$

Расположивъ подкоренной многочленъ по степенямъ x, извлечемъ изъ него квадратный корень

$$\sqrt{\sqrt[4]{x^{12}}-4\sqrt[4]{x^{11}}+20\sqrt[4]{x^{8}}+16\sqrt[4]{x^{7}}+16\sqrt[4]{x^{6}}}=\sqrt[4]{x^{6}}-2\sqrt[4]{x^{5}}-2\sqrt[4]{x^{4}}-4\sqrt[4]{x^{3}}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{\sqrt[4]{x^{12}}\pm4\sqrt[4]{x^{11}}\mp4\sqrt[4]{x^{10}}}\\
\qquad -4\sqrt[4]{x^{10}}\qquad\qquad +20\sqrt[4]{x^{9}}\\
\qquad \underline{\pm4\sqrt[4]{x^{10}}\mp8\sqrt[4]{x^{9}}\pm4\sqrt[4]{x^{8}}}\\
\qquad\qquad -8\sqrt[4]{x^{9}}+16\sqrt[4]{x^{8}}+16\sqrt[4]{x^{7}}+16\sqrt[4]{x^{6}}\\
\qquad\qquad \underline{\pm8\sqrt[4]{x^{9}}\mp16\sqrt[4]{x^{8}}\mp16\sqrt[4]{x^{7}}\mp16\sqrt[4]{x^{6}}}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Упростимъ найденный корень:

$$\sqrt[4]{x^{6}}-2\sqrt[4]{x^{5}}-2\sqrt[4]{x^{4}}-4\sqrt[4]{x^{3}}=x\sqrt{x}-2x\sqrt[4]{x}-2x-4\sqrt[4]{x^{3}}\,.$$

Исключенiе ирраціональности изъ знаменателя.

§ 261. Если знаменатель дроби представляетъ ирраціональный одночленъ или ирраціональный многочленъ, то соотвѣтствующими преобразованіями дроби ея знаменатель можетъ быть приведенъ къ раціональному виду.

Общій пріемъ такихъ преобразованій заключается въ томъ, что подыскиваютъ для знаменателя такой дополнительный множитель, который дѣлаетъ его раціональнымъ выраженіемъ, и на этотъ-то множитель умножаютъ оба члена дроби.

Укажемъ примѣненіе этого пріема на нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

I. Знаменатель одночленъ.

а) Если радикалъ содержитъ **корень квадратный,** то дополнительный множитель = тому же квадратному корню, потому что произведеніе двухъ равныхъ квадратныхъ корней = подкоренному количеству одного изъ нихъ.

Напр.:

1) $$12 : 5\sqrt{3} = \frac{12}{5\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{5 \,.\, 3} = \frac{4}{5}\sqrt{3}\,.$$

2) $$(a-2) : \sqrt{a^2-4} = \frac{a-2}{\sqrt{a^2-4}} = \frac{(a-2)\sqrt{a^2-4}}{a^2-4} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-4}}{a+2}\,.$$

б) Если радикалъ содержитъ $\sqrt[n]{a^m}$, то дополнительный множитель равенъ $\sqrt[n]{a^{n-m}}$, потому что

$$\sqrt[n]{a^m} \,.\, \sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Напр.:

1) $$m : \sqrt[3]{x} = \frac{m}{\sqrt[3]{x}} = \frac{m\sqrt[3]{x^2}}{x}\,.$$

2) $$\frac{a}{\sqrt[7]{x^2}} = \frac{a\sqrt[7]{x^5}}{x}\,;$$

3) $$\frac{a}{\sqrt[5]{a^2b}} = \frac{a\sqrt[5]{a^3b^4}}{ab} = \frac{\sqrt[5]{a^3b^4}}{b}\,.$$

II. Знаменатель двучленъ.

а) Если ирраціональные члены содержатъ **корни квадратные**, то для двучлена, представляющаго сумму, дополнительный множитель равенъ разности этихъ же членовъ, и наоборотъ, потому что произведеніе суммы и разности однихъ и тѣхъ же количествъ равно разности квадратовъ этихъ количествъ.

Напр.:

$$\frac{11 - 4\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} = \frac{(11 - 4\sqrt{6})\,(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}{3 - 8} =$$

$$= \frac{11\sqrt{3} - 4\sqrt{18} + 22\sqrt{2} - 8\sqrt{12}}{-5} =$$

$$= \frac{11\sqrt{3} - 12\sqrt{2} + 22\sqrt{2} - 16\sqrt{3}}{-5} =$$

$$= \frac{-5\sqrt{3} + 10\sqrt{2}}{-5} = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}\,.$$

б) Если ирраціональные члены содержатъ **корни кубичесліе**, то, разсматривая данный двучленъ, какъ сумму или разность основаній, дополнительнымъ множителемъ для него принимаютъ трехчленъ, равный квадрату перваго основанія, $\mp$ произведеніе обоихъ основаній, $+$ квадратъ второго основанія.

Схема:

$$\frac{m}{p\sqrt[3]{a} \pm q\sqrt[3]{b^2}} = \frac{m.\left(p^2\sqrt[3]{a^2} \mp pq\sqrt[3]{ab^2} + q^2\sqrt[3]{b^4}\right)}{p^3a \pm q^3b^2}\,.$$

$$\frac{2\sqrt[3]{3}-2}{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{4}}=\frac{(2\sqrt[3]{3}-2)(\sqrt[3]{144}+\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{16})}{12-4}=$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{432}-2\sqrt[3]{144}+2\sqrt[3]{144}-2\sqrt[3]{48}+2\sqrt[3]{48}-2\sqrt[3]{16}}{8}=$$

$$=\frac{12\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2}}{8}=\sqrt[3]{2}\ .$$

в) Если ирраціональные члены содержатъ радикалы **одинаковыхъ высшихъ четныхъ степеней**, то дополнительный множитель равенъ сопряженному двучлену *). Отъ умноженія членовъ дроби на этотъ множитель показатели корней въ знаменателѣ понизятся на 2, и дальнѣйшее преобразованіе будетъ зависѣть отъ полученныхъ показателей корней.

Схема:

$$\frac{m}{\sqrt[2n]{a}\pm\sqrt[2n]{b}}=\frac{m(\sqrt[2n]{a}\mp\sqrt[2n]{b})}{\sqrt[2n-2]{a}-\sqrt[2n-2]{b}}\ .$$

г) Если ирраціональные члены содержатъ радикалы **одинаковыхъ высшихъ нечетныхъ степеней**, то преобразованіе дѣлается по слѣдующей схемѣ:

Схема:

$$\frac{m}{\sqrt[2n+1]{a}\pm\sqrt[2n+1]{b}}=\frac{m(\sqrt[2n+1]{a^{2n}}\mp\sqrt[2n+1]{a^{2n-1}b}+\sqrt[2n+1]{a^{2n-2}b^2}\mp}{a\pm b}$$

$$\frac{\ldots\mp\sqrt[2n+1]{ab^{2n-1}}+\sqrt[2n+1]{b^{2n}})}{a\pm b}\ .$$

---

*) Сопряженными двучленами называются двучлены, представляющіе одинъ сумму, другой разность однихъ и тѣхъ же членовъ: $(A+B)$ и $(A-B)$.

д) Если ирраціональные члены содержатъ радикалы **различныхъ показателей**, то предварительно приводятъ ихъ къ общему показателю корня и затѣмъ преобразовываютъ или по схемѣ *в*), или по схемѣ *г*).

III. Знаменатель многочленъ.

Предварительно всѣ радикалы приводятся къ общему показателю корня, затѣмъ раздѣляются на двѣ группы такъ, чтобы къ нимъ можно было примѣнить одинъ изъ пріемовъ, относящихся къ двучленамъ.

$$\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{2}}{\sqrt{13}-\sqrt{6}+\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{(2\sqrt{15}+\sqrt{2})(\sqrt{13}+\sqrt{6}-\sqrt{5})}{[\sqrt{13}-(\sqrt{6}-\sqrt{5})][\sqrt{13}+(\sqrt{6}-\sqrt{5})]}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3.5.13}+\sqrt{13.2}+6\sqrt{10}+2\sqrt{3}-10\sqrt{3}-\sqrt{10}}{13-(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3\,.\,5\,.\,13}+\sqrt{13\,.\,2}+5\sqrt{10}-8\sqrt{3}}{13-(6-2\sqrt{6\,.\,5}+5)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3\,.\,5\,.\,13}+\sqrt{13\,.\,2}+5\sqrt{10}-8\sqrt{3}}{2(\sqrt{30}+1)}=$$

$$=\frac{(2\sqrt{3.5.13}+\sqrt{2.13}+5\sqrt{2.5}-8\sqrt{3})(\sqrt{2.3.5}-1)}{2(30-1)}=$$

$$=\frac{30\sqrt{26}+2\sqrt{3.5.13}+50\sqrt{3}-24\sqrt{10}-2\sqrt{3.5.13}-\sqrt{26}-5\sqrt{10}+8\sqrt{3}}{58}=$$

$$=\frac{29\sqrt{26}+58\sqrt{3}-29\sqrt{10}}{58}=\sqrt{3}+\frac{1}{2}(\sqrt{26}-\sqrt{10}).$$

Дѣйствія надъ количествами съ дробными показателями.

§ 262. О происхожденіи и значеніи количествъ съ дробными показателями см. §§ 201 и 202, что же касается дѣйствій надъ ними, то они подчиняются тѣмъ же правиламъ, по какимъ эти дѣйствія выполняются надъ степенями цѣлыми и положительными.

Сложеніе и вычитаніе одночленовъ, содержащихъ дробные показатели, заключается въ соединеніи ихъ въ одинъ многочленъ и приведеніи въ немъ подобныхъ членовъ.

При умноженіи показатели одинаковыхъ буквъ складываются.

Доказательство.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

При дѣленіи показатели одинаковыхъ буквъ вычитаются.

Доказательство.

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{np}} =$$

$$\sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

При возведеніи въ степень показатели перемножаются.

Доказательство.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}.$$

При извлеченіи корня показатель подкоренного количества дѣлится на показатель корня.

Доказательство.

$$1)\ \sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[nq]{a^p} = a^{\frac{p}{qn}} = a^{\frac{p}{q}:n}$$

$$2)\ \sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}\cdot m}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a^{pm}}} = \sqrt[nq]{a^{pm}} =$$

$$= a^{\frac{pm}{qn}} = a^{\frac{p}{q}:\frac{n}{m}}.$$

Примѣры.

$$1)\ \left(x^{3,75}\cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(x^{3,75+0,25}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(x^4\right)^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{4.5}{2}} = x^{10}.$$

$$2)\ \sqrt[\frac{1}{2}]{a^{2\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}} : a^2x^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[\frac{1}{2}]{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{4}}} =$$

$$= a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt{x} = \sqrt[6]{a^8x^3} = a\sqrt[6]{a^2x^3}.$$

Дѣйствія надъ многочленами, заключающими въ себѣ степени съ дробными показателями, приводятъ къ выполненію дѣйствій надъ одночленами.

Квадратныя уравненія съ двумя неизвѣстными.

§ **268.** Общій видъ такой системы:

$$\begin{cases} a\,x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \end{cases} \quad \ldots \quad (1)$$

Когда одинъ или нѣсколько изъ коэффиціентовъ a, b, c, d, e, f, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 равны нулю, то уравненія представляютъ различные частные случаи.

Рѣшеніе системы (1) вообще трудно, но различные частные случаи рѣшаются легко элементарными пріемами.

Покажемъ, какъ рѣшаются нѣкоторые частные случаи.

$$1)\left\{\begin{array}{l} 5xy=1 \\ x-20y=0 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \\ x=20y \end{array}\right| \; 5\,(20y)\;y=1;\; 100y^2=1$$

$$y^2=\frac{1}{100}; \qquad \left| \; y_1=\frac{1}{10} \right.$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{100}}=\pm\frac{1}{10} \qquad \left| \; y_2=-\frac{1}{10}. \right.$$

$$x_1=20\,.\,\frac{1}{10}=2$$

$$x_2=20\,.\left(-\frac{1}{10}\right)=-2.$$

Повѣрки:

$$1)\left\{\begin{array}{l} 5\,.\,2\,.\,\frac{1}{10}=1 \\ 2-20\,.\,\frac{1}{10}=0 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} 1=1 \\ 2-2=0 \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{l} 5\,.\left(-2\right)\left(-\frac{1}{10}\right)=1 \\ -2-20\left(-\frac{1}{10}\right)=0 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} 1=1 \\ -2+2=0 \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=58{,}4 \\ x-3y=-10 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \\ x=3y-10 \end{array}\right| \; (3y-10)^2+y^2=58{,}4$$

$$9y^2-60y+100+y^2=58{,}4$$
$$10y^2-60y+100-58{,}4=0$$
$$10y^2-60y+41{,}6=0$$
$$y^2-6y+4{,}16=0$$

$$y = 3 \pm \sqrt{9 - 4{,}16}$$

$$y = 3 \pm \sqrt{4{,}84}$$

$$y = 3 \pm 2{,}2$$

$$\begin{array}{l|l} y_1 = 5{,}2 & x_1 = 3 \cdot 5{,}2 - 10 = 5{,}6 \\ y_2 = 0{,}8 & x_2 = 3 \cdot 0{,}8 - 10 = -7{,}6 \end{array}$$

Повѣрка:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{l|l} (5{,}6)^2 + (5{,}2)^2 = 58{,}4 & 58{,}4 = 58{,}4 \\ 5{,}6 - 3 \cdot 5{,}2 = -10 & -10 = -10 \end{array} \right.$$

$$\text{б)} \left\{ \begin{array}{l|l} (-7{,}6)^2 + (0{,}8)^2 = 58{,}4 & 58{,}4 = 58{,}4 \\ -7{,}6 - 3 \cdot 0{,}8 = -10 & -10 = -10 \end{array} \right.$$

$$\text{3)} \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + y^2 - 4x = 40 \\ 2x^2 + y^2 + 3x = 52. \end{array} \right.$$

Для рѣшенія этой системы лучше всего изъ перваго уравненія вычесть второе, потому что тогда неизвѣстная y исключается.

Имѣемъ:

$$x^2 - 7x = -12$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0;$$

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12}$$

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2};$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 3.$$

$$3 \cdot 4^2 + y_1^2 - 4 \cdot 4 = 40;$$

$$48 + y_1^2 - 16 = 40;$$

$$y_1^2 - 8 = 0;\; y_1 = \pm 2\sqrt{2}.$$

$$3 \cdot 3^2 + y_2^2 - 4 \cdot 3 = 40$$

$$27 + y_2^2 - 12 = 40;\; y_2^2 - 25 = 0;\; y_2 = \pm 5.$$

$$4) \begin{cases} x^2 - y^2 = 44 \\ xy - y^2 = 20 \end{cases}$$

Опредѣливъ изъ второго уравненія

$$x = \frac{20 + y^2}{y};$$

подставляемъ на мѣсто x въ первое уравненіе

$$\frac{20 + y^2}{y}$$

и получаемъ:

$$\left(\frac{20 + y^2}{y}\right)^2 - y^2 = 44.$$

Далѣе рѣшеніе извѣстно.

$$5) \begin{cases} x^2 + xy = 210 \\ y^2 + xy = 231 \end{cases}$$

Сложивъ уравненія, получимъ:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 441,$$

или $(x + y)^2 = 441$, или $x + y = \pm 21$.

Опредѣливъ изъ послѣдняго уравненія одну изъ неизвѣстныхъ, подставляемъ его значеніе въ одно изъ данныхъ уравненій, тогда получимъ уравненіе съ одною неизвѣстной, и дальнѣйшее рѣшеніе уже просто.

$$6)\left\{\begin{array}{l} x^2-2xy+y^2-x+y=6 \\ 2x^2+2y^2=5xy \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} (x-y)^2-(x-y)=6 \\ 2x^2+2y^2=5xy \end{array}\right.$$

Обозначивъ

$$x-y=z,$$

получимъ взамѣнъ перваго уравненія такое:

$$z^2-z-6=0.$$

Рѣшивъ его относительно z, будемъ имѣть:

$$x_1-y_1=z_1 \text{ и } x_2-y_2=z_2.$$

При помощи каждаго изъ этихъ уравненій и второго даннаго, уже легко исключить одну неизвѣстную и получить уравненіе съ одной неизвѣстной.

$$7)\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{2}{5} \\ x^2+y^2=104 \end{array}\right.$$

$$y-x=\frac{2}{5}xy \quad 2xy=5\ (y-x).$$

$$x^2+y^2-2xy=104-5\ (y-x)$$

$$(x-y)^2=104-5\ (y-x)$$

$$(x-y)^2=104+5\ (x-y)$$

$$(x-y)^2-5\ (x-y)-104=0.$$

Обозначимъ $x-y=z$,

тогда

$$z^2-5z-104=0$$

$$z=\frac{5}{2}\mp\sqrt{\frac{25}{4}+104}$$

$$z=\frac{5}{2}\pm\frac{21}{2} \quad \left|\begin{array}{l} z_1=13 \\ z_2=-8 \end{array}\right.$$

Слѣдовательно

$$x_1 - y_1 = 13$$

$$x_2 - y_2 = -8.$$

Такъ какъ при помощи этихъ уравненій уже не трудно исключить одну изъ неизвѣстныхъ и получить уравненіе съ одной неизвѣстной, то дальнѣйшее рѣшеніе уже просто.

$$8)\left\{\begin{array}{l} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 4x + 13y \end{array}\right. \quad \Bigg| \quad x^2 - y^2 = 9x - 9y$$

или $x^2 - y^2 = 9\ (x - y)$; $x^2 - y^2 - 9\ (x - y) = 0$

$$(x+y)\ (x-y) - 9(x-y) = 0;\ (x-y)\ (x+y-9) = 0,$$

откуда 1) $x - y = 0$

2) $x + y - 9 = 0$; $x + y = 9$; $x = 9 - y$.

$$(9 - y)^2 = 13\ (9 - y) + 4y$$

$$81 - 18y + y^2 = 117 - 13y + 4y$$

$$y^2 - 18y + 13y - 4y + 81 - 117 = 0$$

$$y^2 - 9y - 36 = 0;\ y = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} + 36}$$

$$y = \frac{9}{2} \pm \frac{15}{2} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} y_1 = 12 \\ y_2 = -3 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 12. \end{array}$$

Принимая во вниманіе уравненіе $x - y = 0$, имѣемъ еще пару корней: $x_3 = y_3 = 0$.

Принимая во вниманіе, что $x=y$, подставивъ x на мѣсто y въ первое уравненіе, получимъ:

$x^2=13x+4x$; $x^2=17x$; $x^2-17x=0$; $x(x-17)=0$, которое распадается на 2 уравненія: $x=0$ и $x-17=0$; а изъ послѣдняго $x_4=y_4=17$.

$$9)\left\{\begin{array}{l} xy=15\ (x+y) \\ x^2y^2=441\ (x^2+y^2) \end{array}\right. \quad \left|\ \begin{array}{l} 1=\ \ 15\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right) \\ 1=441\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right) \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{15} \\ \frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{441} \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{y}=t \\ \frac{1}{x}=v \end{array} \right| \begin{array}{l} t+v=\frac{1}{15} \\ t^2+v^2=\frac{1}{441} \end{array}$$

$$v=\frac{1}{15}-t$$

$$t^2+\frac{1}{225}-\frac{2}{15}t+t^2=\frac{1}{441}$$

$$2t^2-\frac{2}{15}t+\frac{1}{225}-\frac{1}{441}=0.$$

$$2t^2-\frac{2t}{15}+\frac{8}{3675}=0$$

$$t^2-\frac{t}{15}+\frac{4}{3675}=0$$

$$t=\frac{1}{30}\pm\sqrt{\frac{1}{900}-\frac{4}{3675}}; \quad t=\frac{1}{30}\pm\sqrt{\frac{3}{25\ 147\ .\ 9\ .\ 4}}$$

или $t=\frac{1}{30}\pm\sqrt{\frac{1}{25\ .\ 147\ .\ 3\ .\ 4}}$

$$t=\frac{1}{30}\pm\sqrt{\frac{1}{25\ \ 441\ .\ 4}}=\frac{1}{30}\pm\frac{1}{5\ .\ 2\ .\ 21}=\frac{1}{30}\pm\frac{1}{210}=$$

$$
=\frac{7\pm 1}{210}\;\left|\;\begin{array}{l} t_1=\frac{8}{210}=\frac{4}{105} \\[6pt] t_2=\frac{6}{210}=\frac{3}{105}=\frac{1}{35}\end{array}\;\right|\;\begin{array}{l}\frac{1}{y_1}=\frac{4}{105} \\[6pt] \frac{1}{y_2}=\frac{1}{35}\end{array}\;\left|\;\begin{array}{l} y_1=26\frac{1}{4} \\[6pt] y_2=35\end{array}\right.
$$

$$
v=\frac{1}{15}-t;\;\; v_1=\frac{1}{15}-\frac{4}{105}=\frac{7-4}{105}=\frac{3}{105}=\frac{1}{35}\;\left|\;\begin{array}{l}\frac{1}{x_1}=\frac{1}{35} \\[6pt] x_1=35.\end{array}\right.
$$

Подобно этому найдемъ, что . . . . . | $x_2=26\frac{1}{4}.$

Для ознакомленія.

АЛГЕБРА

ДЛЯ

СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ

СОСТАВИЛЪ

преподаватель Кронштадтской мужской и женской Александринской гимназій

Л. Я. Пясецкій.

Часть IV.

Рѣшеніе уравненій.—Мнимыя величины; комплексныя количества.—Извлеченіе кубическаго корня.—Ариѳметическая и геометрическая прогрессіи.—Логариѳмы.

Цѣна безъ перепл. 35 к.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

ИЗДАНІЕ Бр. БАШМАКОВЫХЪ.

1907.

Типографія Спб. Т-ва Печ. и Изд. дѣла „Трудъ“. Фонтанка, 86.

Рѣшеніе уравненій, заключающихъ неизвѣстное подъ знакомъ корня.

§ 263. I. Если въ уравненіи находится только одинъ членъ, заключающій радикалъ съ неизвѣстнымъ количествомъ подъ корнемъ, то, перенеся этотъ членъ въ одну часть уравненія, а всѣ прочіе члены въ другую, возвышаютъ обѣ части уравненія въ степень, равную показателю корня; тогда получаютъ уравненіе, не заключающее неизвѣстнаго подъ знакомъ корня.

Напр.:

1) $3{,}07 + \sqrt[3]{4 - 3x} = -1{,}93$

$$\sqrt[3]{4 - 3x} = -1{,}93 - 3{,}07.$$

$$\sqrt[3]{4 - 3x} = -5$$

$$4 - 3x = -125$$

$$-3x = -129$$

$$x = 43.$$

Провѣрка:

$$3{,}07 + \sqrt[3]{4 - 3 . 43} = -1{,}93;$$

$$3{,}07 + \sqrt[3]{4 - 129} = -1{,}93;$$

$$3{,}07 + \sqrt[3]{125} = -1{,}93;$$

$$3{,}07 - 5 = -1{,}93; \ -1{,}93 = -1{,}93.$$

2) $\sqrt[4]{3{,}1x-12}-1=2.$

$$\sqrt[4]{3{,}1x-12}=3$$

$$3{,}1x-12=81$$

$$3{,}1x=93$$

$$x=\frac{93}{3{,}1}=30.$$

Провѣрка:

$$\sqrt[4]{3{,}1\,.\,30-12}-1=2;$$

$$\sqrt[4]{93-12}-1=2\,;\ \sqrt[4]{81}-1=2\,;\ 3-1=2\,;\ 2-2.$$

II. Если уравненіе содержитъ нѣсколько квадратныхъ корней, подкоренныя величины которыхъ заключаютъ въ себѣ неизвѣстное, то распредѣленіемъ этихъ корней и возведеніемъ обѣихъ частей уравненія въ квадратъ стараются постепенно уменьшать число такихъ радикаловъ, пока неизвѣстное не выйдетъ изъ-подъ знаковъ корня.

1) $5\sqrt{4x-3}-3\sqrt{7+2x^2}=0$

$$5\sqrt{4x-3}=3\sqrt{7+2x^2}$$

$$25(4x-3)=9(7+2x^2)$$

$$100x-75=63+18x^2$$

$$100x-75-63-18x^2=0$$

$$18x^2-100x+138=0$$

$$x=\frac{100\pm\sqrt{10000-4\,.\,18\,.\,138}}{2\,.\,18}$$

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{64}}{36} = \frac{100 \pm 8}{36}$$

$$x_{\text{I}} = \frac{108}{36} = 3;$$

$$x_{\text{II}} = \frac{92}{36} = \frac{46}{18} = \frac{23}{9} = 2\frac{5}{9}.$$

Провѣрка: a) $x_{\text{I}} - 3.$

$$5\sqrt{4 \,.\, 3 - 3} - 3\sqrt{7 + 2 \,.\, 9} = 0;$$

$$5\sqrt{12 - 3} - 3\sqrt{7 + 18} = 0;$$

$$5\sqrt{9} - 3\sqrt{25} = 0;\ 5 \,.\, 3 - 3 \,.\, 5 = 0;\ 0 = 0.$$

b) $x_{\text{II}} = 2\frac{5}{9}$ уравненію не удовлетворяетъ.

2) $\sqrt{x + 5} = 1 + \sqrt{x};$

$$x + 5 = 1 + 2\sqrt{x} + x;$$

$$x + 5 - 1 - x = 2\sqrt{x};$$

$$4 = 2\sqrt{x};$$

$$2 = \sqrt{x};$$

$$4 = x.$$

Провѣрка:

$$\sqrt{4 + 5} = 1 + \sqrt{4};\ \sqrt{9} = 1 + 2;\ 3 = 3.$$

3) $\sqrt{x - 2} - \sqrt{6x - 11} + \sqrt{x + 3} = 0$

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{6x - 11}$$

$$x-2+2\sqrt{(x-2)(x+3)}+x+3=6x-11$$

$$2\sqrt{(x-2)(x+3)}=4x-12$$

$$\sqrt{(x-2)(x+3)}=2x-6$$

$$(x-2)\ (x+3)=4x^2-24x+36$$

$$x^2-2x+3x-6-4x^2+24x-36=0$$

$$-3x^2+25x-42=0$$

$$x^2-\frac{25x}{3}+14=0$$

$$x=\frac{25}{6}\pm\sqrt{\frac{625-504}{36}}$$

$$x=\frac{25\pm\sqrt{121}}{6}$$

$$x_{\rm I}=\frac{25+11}{6}=\frac{36}{6}=6\ ;$$

$$x_{\rm II}=\frac{25-11}{6}=\frac{14}{6}=2\frac{1}{3}\ .$$

Провѣрка: a) при $x_{\rm I}=6$

$$\sqrt{6-2}-\sqrt{36-11}+\sqrt{6+3}=0$$

$$\sqrt{4}-\sqrt{25}+\sqrt{9}=0\ ;\ 2-5+3=0\ ;\ 5-5=0.$$

b) $x_{\rm II}=2\frac{1}{3}$ уравненію не удовлетворяетъ.

4) $\sqrt{23+\sqrt{2x+\sqrt{5x^2-21x-68}}}=5$

$$23+\sqrt{2x+\sqrt{5x^2-21x-68}}=25$$

$$\sqrt{2x+\sqrt{5x^2-21x-68}}=2$$

$$2x+\sqrt{5x^2-21x-68}=4$$

$$\sqrt{5x^2-21x-68}=4-2x$$

$$5x^2-21x-68=16-16x+4x^2$$

$$x^2-5x-84=0$$

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25+336}{4}}$$

$$x=\frac{5\pm19}{2};$$

$$x_{\text{I}}=12;$$

$$x_{\text{II}}=-7.$$

Повѣрка: a) $x_{\text{I}}=12$ уравненію не удовлетворяетъ *).

b) при $x_{\text{II}}=-7$

$$\sqrt{23+\sqrt{-14+\sqrt{245+147-68}}}=0;$$

$$\sqrt{23+\sqrt{-14+\sqrt{24}}}=5;\sqrt{23+\sqrt{-14+18}}=5;$$

$$\sqrt{23+\sqrt{4}}=5;\ \sqrt{23+2}=5;\ \sqrt{25}=5;5=5.$$

---

*) $x_1=12$ удовлетворяло бы уравненію въ томъ случаѣ, если бы у выраженія $+\sqrt{5x^2-21x-68}$ вмѣсто плюсъ стоялъ минусъ; это объясняется тѣмъ, что при возведеніи въ квадратъ какъ отрицательнаго, такъ и положительнаго количества всегда получается положительное количество.

5) $x + \sqrt{a + x^2} - \frac{a^2 + a}{2\sqrt{a + x^2}} = 0$

$$2x\sqrt{a + x^2} + 2\,(a + x^2) - (a^2 + a) = 0$$

$$2x\sqrt{a + x^2} = -2a - 2x^2 + a^2 + a$$

$$2x\sqrt{a + x^2} = a^2 - a - 2x^2$$

$$4x^2\,(a + x^2) = a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a^2x^2 + 4ax^2 + 4x^4;$$

$$\underline{4ax^2} + \underline{4x^4} - a^4 + 2a^3 - a^2 + 4a^2x^2 - \underline{4ax^2} - \underline{4x^4} = 0$$

$$4a^2x^2 = a^4 - 2a^3 + a^2$$

$$4a^2x^2 = a^2\,(a^2 - 2a + 1)$$

$$x^2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{4};$$

$$x = \frac{\pm(a - 1)}{2}.$$

Провѣрна: a) $x_1 = \frac{a - 1}{2}$.

$$\frac{a-1}{2} + \sqrt{a + \frac{a^2 - 2a + 1}{4}} - \frac{a^2 + a}{2\sqrt{a + \frac{a^2 - 2a + 1}{4}}} = 0;$$

$$\frac{a-1}{2} + \sqrt{\frac{4a + a^2 - 2a + 1}{4}} - \frac{a^2 + a}{2\sqrt{\frac{4a + a^2 - 2a + 1}{4}}} = 0;$$

$$\frac{a-1}{2} + \sqrt{\frac{a^2 + 2a + 1}{4}} - \frac{a^2 + a}{2\sqrt{\frac{a^2 + 2a + 1}{4}}} = 0;$$

$$\frac{a-1}{2}+\frac{a+1}{2}-\frac{a(a+1)}{2\left(\frac{a+1}{2}\right)}=0;$$

$$\frac{a-1}{2}+\frac{a+1}{2}-\frac{2a}{2}=0$$

$$a-1+a+1-2a=0;$$

$$2a-2a=0\ ;\ 0=0.$$

b) $x_{II}=\frac{-(a-1)}{2}$ уравненію не удовлетворяетъ.

6) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$

$$\underline{8x}+\underline{4}-\underline{3}\sqrt[3]{16\,(2x+1)^2 \,.\, 4\,(2x-1)}+$$

$$+\underline{3}\sqrt[3]{4\,(2x+1)\;16\;(2x-1)^2}-\underline{8x}+\underline{4}=\underline{8}$$

$$\sqrt[3]{16\,(2x+1)^2\,.\,4\,(2x-1)}=\sqrt[3]{4\;(2x+1)\;16\,(2x-1)^2}$$

$$\underline{16\;.\;4}\;.\;(2x+1)^2\;.\;(2x-1)=\underline{4\;.\;16}\;.\;(2x+1)\,(2x-1)^2$$

$$(2x+1)^2\;(2x-1)-(2x+1)\;(2x-1)^2=0$$

$$(2x+1)\;(2x-1)\;\left[2x+1-(2x-1)\right]=0$$

$$2x+1=0 \qquad x_1=-\frac{1}{2}$$

$$2x-1=0 \qquad x_{II}=+\frac{1}{2}$$

$$(2x+1-2x+1)=0$$

Провѣрка: а) при $x_I=-\frac{1}{2}$

$$\sqrt[3]{-4+4}-\sqrt[3]{-4-4}=2:$$

$$\sqrt[3]{0}-\sqrt[3]{-8}=2;$$

$$-(-2)=2\ ;\ 2=2.$$

b) при $x_{II}=+\frac{1}{2}$

$$\sqrt[3]{4-4}-\sqrt[3]{4-4}=2$$

$$\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{0}=2\ ;\ 2=2.$$

Въ данномъ случаѣ оба корня удовлетворяютъ уравненію.

Примѣчаніе. Возводя обѣ части уравненія въ степень, мы получаемъ уравненія, не тождественныя съ даннымъ; вновь полученное уравненіе будетъ имѣть, кромѣ корней даннаго уравненія, еще корни новые.

Напр.: уравненіе $x=1$ имѣетъ одинъ корень $x=1$, а уравненіе $x^2=1^2$ будетъ имѣть уже два корня:

$$x=\pm\sqrt{1}=\pm 1.$$

Поэтому, рѣшивъ уравненіе, освобожденное отъ радикаловъ, надо всегда дѣлать повѣрку всѣхъ корней, подставляя каждый въ данное уравненіе. При такой повѣркѣ всѣ лишніе корни отпадаютъ.

Рѣшеніе трехчленныхъ уравненій.

§ 204. Уравненіе вида $ax^{2n}+bx^n+c=0$, т. е. состоящее изъ трехъ членовъ: одного извѣстнаго и двухъ, содержащихъ неизвѣстное, при чемъ степень неизвѣстнаго въ одномъ въ 2 раза болѣе, чѣмъ въ другомъ, называется **трехчленнымъ.**

Уравненія этого вида рѣшаются приведеніемъ даннаго уравненія къ квадратному, а именно: членъ, содержащій x^n, обозначаютъ черезъ новую неизвѣстную, напр. z, значитъ x^{2n} черезъ z^2, а тогда данное уравненіе принимаетъ видъ квадратнаго:

$$az^2+bz+c=0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, подставляютъ значенія z_1 и z^2 въ условное уравненіе

$$x^n=z,$$

и, получивъ отъ подстановки два уравненія:

$$x_1^n=z_1 \text{ и } x_2^n=z_2,$$

опредѣляютъ изъ нихъ значенія x_1 и x_2.

Примѣры:

1) $x^3+4x^{\frac{3}{2}}-32=0$

Условіе: $x^{\frac{3}{2}}=z;\ x^3=z^2$.

$$z^2+4z-32=0;\quad z=-2\pm\sqrt{4+32};$$

$$z=-2\pm 6;\quad z_1=4;\quad z_2=-8.$$

a) $x_1^{\frac{3}{2}}=4;\ x_1^3=16;\ x_1=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}$.

b) $x_2^{\frac{3}{2}}=-8;\ x_2^3=16;\ x_2=\sqrt[3]{64}=4$.

2) $x - 10x^{\frac{1}{2}} + 21 = 0.$

Условіе: $x^{\frac{1}{2}} = z;\ x = z^2.$

$z^2 - 10z + 21 = 0;\ z = 5 \pm \sqrt{25 - 21}\ ;\ z = 5 \pm 2$

$z_1 = 7;\ z_2 = 3.$

a) $x_1^{\frac{1}{2}} = 7\ ;\ \ x_1 = 49.$

b) $x_2^{\frac{1}{2}} = 3\ ;\ \ x_2 = 9.$

3) $(x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{4}} = 6$

Условіе: $(x+1)^{\frac{1}{4}} = z\ ;\ (x+1)^{\frac{1}{2}} = z^2;$

$z^2 + z - 6 = 0\ ;\ \ z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$

$z = = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}\ ;\ z = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2;\ \ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3.$

a) $(x_1 + 1)^{\frac{1}{4}} = 2\ ;\ x_1 + 1 = 16\ ;\ \ x_1 = 15.$

b) $(x_2 + 1)^{\frac{1}{4}} = -3\ ;\ x_2 + 1 = 81;\ \ x_2 = 80.$

Повѣрка:

$$a)\ (15+1)^{\frac{1}{2}} + (15+1)^{\frac{1}{4}} = 6$$

$$\sqrt{16} + \sqrt[4]{16} = 6;\ \ 4+2=6.$$

$$b)\ \sqrt{81} + \sqrt[4]{81} = 6;\ \ 9+3=6.$$

$x^2 = 80$ не удовлетворяетъ уравненію.

$$4)\ \frac{1}{5}\left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1}\right) + \frac{1}{7}\left(x^{-1} - 1,2\right) = 0$$

$$7x^{-\frac{1}{2}} - x^{-} + 5x^{-1} - 6 = 0$$

$$-2x^{-1} + 7x^{-\frac{1}{2}} - 6 = 0$$

$$2x^{-1} - 7x^{-\frac{1}{2}} + 6 = 0.$$

Условіе: $x^{-\frac{1}{2}} = z.$

$$2z^2 - 7z + 6 = 0;\ \ z = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4\ .\ 2\ .\ 6}}{2\ .\ 2}$$

$$z = \frac{7 \pm 1}{4};\ \ z_1 = 2;\ \ z_2 = \frac{3}{2}.$$

$$a)\ x_{\mathrm{I}}^{-\frac{1}{2}} = 2;\ \ \frac{1}{x_{\mathrm{I}}^{\frac{1}{2}}} = 2;\ \ x_{\mathrm{I}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};\ \ x_{\mathrm{I}} = \frac{1}{4}.$$

$$b)\ x_{\mathrm{II}}^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2};\ \ \frac{1}{x_{\mathrm{II}}^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2};\ \ x_{\mathrm{II}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3};\ \ x_{\mathrm{II}} = \frac{4}{9}.$$

Повѣрка:

$$a)\ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}^{-1}\right) + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}^{-1} - 1{,}2\right) = 0\ .$$

$$\frac{1}{5}\left(2 - 4\right) + \frac{1}{7}\left(4 - 1{,}2\right) = 0.$$

$$-\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 0.$$

$$b)\ \frac{1}{5}\left(\frac{4}{9}^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{9}^{-1}\right) + \frac{1}{7}\left(\frac{4}{9}^{-1} - 1{,}2\right) = 0.$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{4}\right) + \frac{1}{7}\left(\frac{9}{4} - 1{,}2\right) = 0.$$

$$-\frac{3}{20} + \frac{3}{20} = 0.$$

Оба корня удовлетворяютъ уравненію.

Биквадратное уравненіе.

§ **265. Биквадратнымъ уравненіемъ называется такое трехчленное уравненіе, которое содержитъ неизвѣстное въ степеняхъ четвертой и второй.**

Общій видъ биквадратнаго уравненія:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Обыкновенно рѣшаютъ биквадратное уравненіе, приведя его къ простѣйшему виду

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

по слѣдующей формулѣ:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}\,, \qquad \ldots (\alpha)$$

въ которой заключаются четыре корня, удовлетворяющіе этому уравненію:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}\,;$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}\,;$$

$$x_3 = +\sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

и $$x_4 = -\sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}\,.$$

Выведемъ формулу корней (α).

Обозначивъ $x^2 = z$, а слѣдовательно $x^4 = z^2$, будемъ имѣть

$$z^2 + pz + q = 0,$$

откуда $z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$

Подставляя въ условіе $x^2 = z$ найденное для z значеніе, получимъ:

$$x^2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,;$$

откуда $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$.

Напр.:

$$x^4 - 50x^2 + 504 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{25 \pm \sqrt{625 - 504}}$$

$$x = \pm\sqrt{25 \pm \sqrt{121}}\,;\; x = \pm\sqrt{25 \pm 11}$$

$$x_1 = +\sqrt{36} = 6\,;\; x_2 = -\sqrt{36} = -6\,;\; x_3 = +\sqrt{14}$$

и $x_4 = -\sqrt{14}$

Повѣрка:

$6^4 - 50 \,.\, 6^2 + 504 = 0;\; 1296 - 1800 + 504 = 0;\; 0 = 0.$

$(-6)^4 - 50(-6)^2 + 504 = 0; 1296 - 1800 + 504 = 0;$

$0 = 0.$

$(\sqrt{14})^4 - 50(\sqrt{14})^2 + 504 = 0;\; 196 - 700 + 504 = 0:$

$0 = 0.$

$(-\sqrt{14})^4 - 50(-\sqrt{14})^2 + 504 = 0; 196 - 700 + 504 = 0;$

$0 = 0.$

§ **266**. Изъ формулы корней биквадратнаго уравненія (a) видно, что:

1) если $\frac{p^2}{4} - q$ представляетъ число отрицательное, то всѣ корни мнимы;

2) если $\frac{p^2}{4} - q$ представляетъ число положительное и равное полному квадрату, k^2, то корни могутъ быть и дѣйствительными и мнимыми, въ зависимости отъ того, будутъ ли $-\frac{p^2}{2} + k$ и $-\frac{p}{2} - k$ числами положительными, или отрицательными;

3) если $\frac{p^2}{4} - q$ представляетъ число положительное, но неполный квадратъ, то формула корней принимаетъ слѣдующій видъ:

$$x = \pm\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

§ **267. Радикалъ вида $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, гдѣ A и B числа раціональныя, можетъ быть преобразованъ въ сумму или разность $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$, гдѣ m и n числа раціональныя, если $A^2 - B$ представляетъ полный квадратъ числа C.**

Доказательство. Допустимъ, что равенство

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$$

возможно и выведемъ условіе, при которомъ оно возможно.

Возведя обѣ части въ квадратъ, получимъ:

$$A + \sqrt{B} = m + 2\sqrt{mn} + n.$$

Числа A, m, n раціональны, числа же $\sqrt{B}$ и $2\sqrt{mn}$ ирраціональны. Полученное равенство будетъ, очевидно, справедливо въ томъ случаѣ, если раціональныя части въ обѣихъ частяхъ равенства будутъ равны между собой, а ирраціональныя между собой, т. е. когда

$$\left.\begin{array}{l} A = m + n \\ \sqrt{B} = 2\sqrt{mn} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(I)}$$

Принявъ эти условія за уравненія, въ которыхъ количества m и n неизвѣстны, найдемъ эти неизвѣстныя.

Возведя обѣ части второго уравненія въ квадратъ, получимъ слѣдующую систему уравненій:

$$\left\{\begin{array}{l} m+n=A \\ 4mn=B \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \\ n=A-m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha) \\ \hline 4m\ (A-m)=B; \\ 4mA-4m^2=B; \end{array}$$

$$4m^2-4Am+B=0;\ m^2-Am+\frac{B}{4}=0$$

$$m=\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-\frac{B}{4}}=\frac{A}{2}\pm\frac{\sqrt{A^2-B}}{2}=$$

$$=\frac{A\pm\sqrt{A^2-B}}{2}.$$

Подставивъ въ (α) на мѣсто m его значеніе, получимъ:

$$n=A-\frac{A\pm\sqrt{A^2-B}}{2}=\frac{2A-(A\pm\sqrt{A^2-B})}{2}=$$

$$=\frac{2A-A\pm\sqrt{A^2-B}}{2}=\frac{A\mp\sqrt{A^2-B}}{2}.$$

Значеніе m и n, какъ видно изъ полученнаго рѣшенія, суть сопряженные двучлены, если считать

$$\left.\begin{array}{r} m=\dfrac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}=\dfrac{A+C}{2} \\ \text{то}\quad n=\dfrac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}=\dfrac{A-C}{2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

и наоборотъ.

Чтобы числа m и n были раціональными, необходимо, чтобы радикалъ $\sqrt{A^2-B}$ былъ раціональнымъ, а для этого, очевидно, необходимо, чтобы A^2-B было полнымъ квадратомъ, C^2. На практикѣ системы уравненій (1) не рѣшаютъ, а вычисляютъ значенія m и n по формуламъ (β).

Напр.:

$$\sqrt{20-3\sqrt{31}}=\sqrt{20-\sqrt{279}}$$

$$C^2=A^2-B=20^2-279=400-279=121=11^2,\quad C=11;$$

значитъ

$$m=\frac{20+11}{2}=\frac{31}{2}\quad \text{и}\quad n=\frac{20-11}{2}=\frac{9}{2}.$$

Слѣдовательно

$$\sqrt{20-3\sqrt{31}}=\sqrt{\frac{31}{2}}-\sqrt{\frac{9}{2}}=\sqrt{\frac{31}{2}}-3\sqrt{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{62}{4}}-3\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{62}-3\sqrt{2}\right).$$

Уравненія симметричныя.

§ 208. Симметричнымъ уравненіемъ называется уравненіе четвертой степени вида:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,$$

т. е. въ расположенномъ по степенямъ неизвѣстнаго уравненіи коэффиціенты членовъ равно отстоящихъ отъ концовъ равны между собою.

Способъ рѣшенія. Раздѣливъ всѣ члены на x^2:

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0,$$

вынесемъ за скобки a изъ тѣхъ членовъ, гдѣ оно встрѣчается, и b изъ тѣхъ, гдѣ оно встрѣчается:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0 \quad . \quad . \quad . \text{(I)}$$

Обозначимъ $x+\frac{1}{x}$ черезъ z;

тогда

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2},$$

а потому

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$$

и уравненіе (I) приметъ видъ:

$$a\ (z^2-2)+bz+c=0.$$

Послѣднее квадратное уравненіе рѣшаемъ относительно z и значенія для z подставляемъ въ условіе $x+\frac{1}{x}=z$, изъ котораго и опредѣлимъ значеніе x.

Напр.:

$$30x^4-17x^3-228x^2+17x+30=0$$

$$30x^2-17x-228+\frac{17}{x}+\frac{30}{x^2}=0$$

$$30\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-17\left(x-\frac{1}{x}\right)-228=0$$

Условіе: $\underbrace{x-\frac{1}{x}=z}$;

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right);\ x^2+\frac{1}{x^2}=z^2+2$$

$$30\ (z^2+2)-17z-228=0$$

$$30z^2+60-17z-228=0$$

$$30z^2-17z-168=0$$

$$z=\frac{17\pm\sqrt{289+20160}}{60}$$

$$z=\frac{17\pm143}{60}\ ;\ z_1=\frac{160}{60}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}\ ;$$

$$z_2=-\frac{126}{60}=-\frac{63}{30}=-\frac{21}{10}=-2{,}1$$

в) $x-\frac{1}{x}=2\frac{2}{3}$; $3x^2-3=8x$; $3x^2-8x-3=0$;

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\frac{8\pm10}{6}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=3\\ x_2=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

b) $x-\frac{1}{x}=-\frac{21}{10}$; $10x^2-10=-21x$; $10x^2+21x-10=0$

$$x=\frac{-21\pm\sqrt{441+400}}{20}\ ;\ x=\frac{21\pm29}{20}\quad\left|\begin{array}{l}x_3=-2\frac{1}{2}\\ x_4=\frac{2}{5}\end{array}\right.$$

Уравненія, рѣшаемыя разложеніемъ на множители.

§ **269**. Перенеся всѣ члены уравненія въ одну его часть, разлагаютъ полученный многочленъ на множители и, приравнивая каждый множитель нулю, находятъ корни даннаго уравненія.

Напр.: 1) $5x^4 - 6x^3 + 6x - 5 = 0$

$$5\ (x^4 - 1) - 6x\ (x^2 - 1) = 0$$

$$5\ (x^2 + 1)\ (x^2 - 1) - 6x\ (x^2 - 1) = 0$$

$$(x^2 - 1)\ [5\ (x^2 + 1) - 6x] = 0$$

$$(x + 1)\ (x - 1)\ [5x^2 + 5 - 6x] = 0$$

a) $x + 1 = 0$	$x_1 = -1$
b) $x - 1 = 0$	$x_2 = +1$
c) $5x^2 - 6x + 5 = 0$	
$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{10}$	
$x = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{10}$	$x_3 = \frac{3 + 4i}{5}$
$x = \frac{6 \pm 8i}{10}$	$x_4 = \frac{3 - 4i}{5}$

2) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72 = 0$

$$x^4\ (x-2) - 13x^2(x-2) + 36(x-2) = 0$$

$$(x - 2)\ (x^4 - 13x^2 + 36) = 0$$

a) $x - 2 = 0$	$x_1 = 2$
b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	

$x = \pm \sqrt{\frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36}}$	$x_2 = +3$ $x_3 = -3$
$x = \pm \sqrt{\frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}}$	$x_4 = +2$ $x_5 = -2$

3) $3x^2 + 40x = x^3 - 40x^4 - 3x^5 + x^6$

$$x^6 - 3x^5 - 40x^4 + x^3 - 3x^2 - 40x = 0$$

$$x^3\,(x^3+1)-3x^2\,(x^3+1)-40x\,(x^3+1)=0$$

$$(x^3+1)\,(x^3-3x^2-40x)=0$$

$$(x^3+1)\;x\;(x^2+3x-40)=0$$

$$(x+1)\,(x^2-x+1)\;x\;(x^2-3x-40)=0$$

a) $x+1=0$	$x_1=-1$	
b) $x^2-x+1=0$	$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}$	$x_2=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ $x_3=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$
c) $x=0$	$x_4=0$	
d) $x^2-3x-40=0$	$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+40}$	$x_5=8$ $x_6=-5$

Уравненія двучленныя.

§ **270.** 1) $x^3-1=0;\;(x-1)\,(x^2+x+1)=0$

a) $x-1=0$	$x_1=1$
b) $x^2+x+1=0$	$x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$
$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}$	$x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

2) $x^4+1=0;$

$$(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1,$$

а потому $\quad x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2$

и слѣдовательно

$$(x^2+1)^2-2x^2=0;\;(x^2+1)^2-(\sqrt{2}\,.\,x)^2=0$$

$$(x^2+1+\sqrt{2}\,.\,x)\;(x^2+1-\sqrt{2}\,.\,x)=0$$

$$\left(x^2+1+\sqrt{2}\,.\,x\right)\left(x^2+1-\sqrt{2}\,.\,x\right)=0$$

a) $x^2+\sqrt{2}\,.\,x+1=0$ | $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\frac{2}{4}-1}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$

b) $x^2-\sqrt{2}\,.\,x+1=0$ | $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\frac{2}{4}-1}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$ *)

$$x_1=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2}\,;\quad x_2=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{-2}}{2}$$

Повѣрка. $\frac{-\left(\sqrt{-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{-2}+\sqrt{2}\right)}{4}=$

$$=\frac{-(-2-2)}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

3) $x^8-6561=0$

$x^8-3^8=0\,;\;(x^4+3^4)\,(x^4-3^4)=0\,;$

$(x^2-3^2)\,(x^2+3^2)\,(x^4+81)=0 \qquad +3^2=-\left(3\sqrt{-1}\right)^2$

$(x+3)\,(x-3)\left(x+3\sqrt{-1}\right)\left(x-3\sqrt{-1}\right)(x^4+81)=0$

a) $(x^4+81)=0$. Пусть $x=y\sqrt[4]{81}=3y$

$$(3y)^4+81=0\,;\;81y^4+81=0\,;\;y^4+1=0$$

---

*) Повѣрку квадратнаго уравненія въ случаѣ мнимыхъ корней дѣлаютъ на основаніи § 250, I и II.

$y_1 = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}$	$x_1 = \frac{3}{2}\left(-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}\right)$
$y_2 = \frac{\sqrt{2} \mp \sqrt{-2}}{2}$	$x_2 = \frac{3}{2}\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}\right)$

b) $x + 3 = 0$	$x_5 = -3$
c) $x - 3 = 0$	$x_6 = +3$
d) $x + 3\sqrt{-1} = 0$	$x_7 = -3\sqrt{-1}$
e) $x - 3\sqrt{-1} = 0$	$x_8 = +3\sqrt{-1}$

Мнимыя величины.

§ **271. Мнимою величиною называется корень четнаго показателя изъ отрицательнаго количества** (см. § 198,4).

Напр.: $\sqrt{-3}\,;\ \sqrt[4]{-5}$.

Относительно мнимыхъ количествъ въ алгебрѣ приняты 2 условія:

1) считать $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$,

2) Всѣ дѣйствія надъ мнимыми количествами выполнять по тѣмъ же правиламъ, какъ и надъ количествами вещественными (дѣйствительными).

Мнимое количество всегда можно изобразить въ видѣ $m\sqrt[2n]{-1}$, гдѣ m число цѣлое, или дробное, раціональное или ирраціональное.

Напр.: 1) $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$

2) $\sqrt[4]{-0{,}0625}=\sqrt[4]{0{,}0625\,.\,(-1)}=0{,}5\sqrt[4]{-1}$

3) $\sqrt[6]{-5}=\sqrt[6]{5\,.\,(-1)}=\sqrt[6]{5}\,.\,\sqrt[6]{-1}$.

Такъ какъ $\sqrt{-1}$ принято обозначать буквою i (знакъ мнимости), то $\sqrt[2n]{-1}=\sqrt[n]{\sqrt{-1}}=\sqrt[n]{i}$ и общій видъ мнимаго количества будетъ $m\sqrt[n]{i}$, гдѣ m число цѣлое, или дробь, раціональное, или ирраціональное.

§ 272. Возвышая i, т. е. $\sqrt{-1}$, въ степени различныхъ цѣлыхъ показателей, будемъ получать въ результатѣ одно изъ слѣдующихъ 4 выраженій : i, -1, $-i$, $+1$.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$i^1=i$$

$$i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$$

$$i^3=\left(\sqrt{-1}\right)^2.\ \sqrt{-1}=-\sqrt{-1}=-i$$

$$i^4=\left(\sqrt{-1}\right)^2.\left(\sqrt{-1}\right)^2=(-1)(-1)=+1.$$

Дѣля всякое число большее четырехъ на 4, получимъ въ частномъ нѣкоторое цѣлое число и въ остаткѣ 0,1,2,3, т. е. такое число можетъ имѣть видъ: $4n$, $4n+1$, $4n+2$ и $4n+3$, но $i^{4n}=(i^4)^n=(+1)^n=+1$

$$i^{4n+1}=i^{4n}\,.\,i=+1\,.\,i=i$$

$$i^{4n+2}=i^{4n}\,.\,i^2=+1\,.\,i^2=(+1)(-1)=-1$$

$$i^{4n+3}=i^{4n}\,.\,i^3=+1\,.\,i^3=(+1)(-1)=-i$$

§ **273. Выраженіе $a+bi$, или $a-bi$, состоящее изъ вещественнаго числа a и мнимаго bi, называется комплексным количеством.**

Комплексное количество можетъ быть и вещественнымъ и мнимымъ, а именно: при $b=0$ оно вещественно и равняется a, при $a=0$, оно мнимо и равняется bi.

Комплексныя количества $a+bi$ и $a-bi$ называются сопряженными.

§ **274.** Примѣняя къ комплекснымъ количествамъ тѣ же правила, по которымъ выполняются дѣйствія надъ количествами вещественными, выведемъ нѣкоторыя существенныя свойства комплексныхъ количествъ.

1. **Если комплексное количество $a+bi=0$, то $a=0$ и $b=0$.**

Доказательство. $a+bi=0$; $a=-bi$; $a^2=(-bi)^2$ $a^2=b^2(i)^2$; $a^2=-b^2$; откуда $a^2+b^2=0$, но сумма двухъ положительныхъ чиселъ можетъ равняться нулю только тогда, когда каждое изъ нихъ равно нулю, т. е.

$$a=0 \text{ и } b=0$$

Очевидно также, если $a=0$ и $b=0$, то и $a+bi=0$.

2. **Если $a+bi=a_1+b_1i$, то $a=a_1$ и $b=b_1$.**

Доказательство. $a+bi=a_1+b_1i$

$$a-a_1+bi-b_1i=0$$

$$(a-a_1)+(b-b_1)i=0$$

На основаніи перваго свойства комплексовъ будемъ имѣть:

откуда $$a-a_1=0 \text{ и } b-b_1=0,$$

$$a=a_1 \text{ и } b=b_1.$$

Очевидно также, если $a=a_1$ и $b=b_1$, то $a+bi=$ $=a_1+b_1i$.

§ **275. Модулемъ комплекснаго количества называется ариѳметическое значеніе корня квадратнаго изъ суммы квадратовъ вещественной части и коэффиціента при мнимой,** т. е. $+\sqrt{a^2+b^2}$ есть модуль для слѣдующихъ мнимыхъ выраженій:

$$a+bi, \quad a-bi, \quad -a+bi, \quad -a-bi.$$

Слѣдствіе. Модуль вещественнаго числа равенъ его абсолютной величинѣ.

Модуль $(-7)=+\sqrt{(-7)^2}=+\sqrt{49}=7$.

§ **276. Выполняя дѣйствія надъ комплексными количествами, въ результатѣ получимъ комплексное же количество, которое въ иныхъ случаяхъ можетъ быть вещественнымъ, въ иныхъ мнимымъ количествомъ.**

Примѣры:

1) $5\sqrt{-1}+3\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}=(5+3+2)\sqrt{-1}=$

$$=10\sqrt{-1}$$

2) $\sqrt{-1}+\sqrt{-4}+2\sqrt{-9}-8\sqrt{-0{,}25}=$

$$=\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}+6\sqrt{-1}-4\sqrt{-1}=5\sqrt{-1}$$

3) $a^3\sqrt{-\frac{1}{a^4}}+2a\sqrt{-\frac{1}{4}}+a^2\sqrt{-\frac{1}{a^2}}-3\sqrt{-a^2}=$

$$=a\sqrt{-1}+a\sqrt{-1}+a\sqrt{-1}-3a\sqrt{-1}=0.$$

4) $\left(5+3\sqrt{-1}\right)+\left(4-2\sqrt{-1}\right)-\left(6+\sqrt{-1}\right)=$

$$=5+3\sqrt{-1}+4-2\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1}=$$

$$=(5+4-6)+(3-2-1)\sqrt{-1}=3.$$

5) $\left(\sqrt{-2}-\sqrt{-1}\right)\sqrt{-2}=-2-\sqrt{2}\,.$

6) $\dfrac{15-2\sqrt{-9}}{2\sqrt{-3}-5\sqrt{-3}}=\dfrac{15-6\sqrt{-1}}{-5\sqrt{3}+2\sqrt{-3}}=$

$$\frac{\left(15-6\sqrt{-1}\right)\left(-5\sqrt{3}-2\sqrt{-3}\right)}{25\,.\,3-4\,.\,(-3)}=$$

$$=\frac{-75\sqrt{3}+\underline{30\sqrt{-3}}-\underline{30\sqrt{-3}}+12\sqrt{3}}{75+12}=$$

$$=\frac{-63\sqrt{3}}{87}$$

7) $\sqrt{5-12\sqrt{-1}}=\sqrt{5-\sqrt{-144}}=\sqrt{9}-\sqrt{-4}=$

$$=3-2\sqrt{-1}\,.\text{ (См. § 267).}$$

§ **277.** **Введеніе комплексныхъ количествъ и производство надъ ними дѣйствій, какъ надъ вещественными количествами, даетъ возможность обобщать нѣкоторые вопросы, а также рѣшать многіе другіе вопросы, рѣшеніе которыхъ безъ помощи комплексныхъ количествъ представляло бы большія затрудненія.**

Напр.:

Теорема. **Если какое-либо число представляетъ сумму двухъ квадратовъ, то квадратъ этого числа также равенъ суммѣ двухъ квадратовъ.**

Пусть $N=a^2+b^2$.

Замѣтивъ, что

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2, \text{ будемъ имѣть:}$$

$$N^2=(a^2+b^2)^2=[(a+bi)(a-bi)]^2=(a+bi)^2.(a-bi)^2=$$

$$=(a^2+2abi-b^2)(a^2-2abi-b^2)=[(a^2-b^2)+2abi].$$

$$.[(a^2-b^2)-2abi]=(a^2-b^2)^2-(2abi)^2=(a^2-b^2)-4a^2b^2i^2=$$

$$(a^2-b^2)+4a^2b^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2.$$

Извлеченіе кубическаго корня изъ чиселъ.

§ **278.** Кубъ первыхъ 10 чиселъ:

$1^3=1$	$4^3=64$	$7^3=343$	$10^3=1000$.
$2^3=8$	$5^3=125$	$8^3=512$	
$3^3=27$	$6^3=216$	$9^3=729$	

При помощи этой таблицы можно находить кубическіе корни точные, или съ точностью до единицы изъ чиселъ меньшихъ, чѣмъ тысяча.

Напр.: $\sqrt[3]{512}=8$ (точно); $\sqrt[3]{300}=6$ или 7 (съ точностью до единицы).

§ **279.** Двузначное число заключается между слѣдующими числами:

$$10 \leqslant \text{двузначное число} < 100,$$

а кубъ двузначнаго числа между числами:

$$10^3 \leqslant (\text{двузначное число})^3 < 100^3$$

или

$$1000 \geqq (\text{двузначное число})^3 < 1000000,$$

откуда заключаемъ, что въ кубѣ двузначнаго числа могутъ быть или 4 цифры, или 5, или 6.

Вообще, подобно тому, какъ была доказана теорема о числѣ цифръ квадрата n-значнаго числа (§ 206), доказывается и слѣдующая теорема:

Кубъ n-значнаго числа можетъ заключать въ себѣ цифръ или $3n$, или $3n - 1$, или $3n - 2$.

§ **280.** Чтобы опредѣлить число цифръ корня, когда извѣстно число цифръ куба его, надо число цифръ куба раздѣлить на 3; если оно дѣлится на 3 безъ остатка, частное будетъ означать число цифръ корня; если же число цифръ куба при дѣленіи на три даетъ въ остаткѣ 1 или 2, то частное, увеличенное единицею, будетъ означать число цифръ корня. На практикѣ число цифръ корня опредѣляется числомъ граней, отдѣляемыхъ справа налѣво по 3 цифры въ каждой грани, при чемъ крайняя съ лѣвой стороны грань можетъ содержать и 3, и 2, и 1 цифру.

Напримѣръ, въ кубическомъ корнѣ изъ числа 15625 заключаются 2 цифры, такъ какъ въ числѣ 15625 двѣ грани (15 625).

Извлеченіе кубическаго корня изъ двухграннаго числа.

§ **281.** Пусть $\sqrt[3]{15\,625} = 10x + y$, тогда

$$15\,625 = (10x + y)^3$$

или

$$15\,625 = (10x)^3 + 3\,.\,(10x)^2 y + 3\,.\,10xy^2 + y^3$$

или

$$15\,625 = 1\,000x^3 + 3\,.\,100x^2 y + 3\,.\,10xy^2 + y^3\,.$$

Такъ какъ первый членъ правой части равенства представляетъ нѣкоторое число тысячъ, то и заключаться можетъ только въ тысячахъ лѣвой части; но такъ какъ и во второмъ членѣ правой части могутъ быть тысячи, то относительно $1\,000x^3$ можно сказать, что $1\,000x^3$ или равно 15 тысячамъ, или же менѣе ихъ, т. е.

$$1\,000x^3 \leqslant 15\,000$$

или

$$x^3 \leqslant 15$$

или

$$x \leqslant \sqrt[3]{15}$$

Но такъ какъ x означаетъ цифру, то можетъ быть только цѣлымъ однозначнымъ числомъ, слѣдовательно

$$x \leqslant 2\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\alpha)$$

Итакъ за x можно принять или 2, или 1.

Слѣдующее разсужденіе показываетъ, что изъ этихъ значеній за x слѣдуетъ брать наибольшее, въ данномъ случаѣ 2.

Въ самомъ дѣлѣ, принявъ за x, т. е. за цифру десятковъ искомаго корня, число меньшее, чѣмъ 2, а именно 1, мы получимъ завѣдомо малый корень, такъ какъ при самомъ большомъ числѣ единицъ (9) нашъ корень будетъ 19 или же менѣе, значитъ во всякомъ случаѣ менѣе 20, между тѣмъ какъ кубъ 20 равенъ только 8 000, числу меньшему, чѣмъ подкоренное число 15 625, а еще тѣмъ менѣе кубъ 19 или другого меньшаго числа будетъ подходить къ подкоренному числу.

Итакъ, принимать за x число меньшее чѣмъ 2 нельзя: значитъ надо принимать именно 2, т. е. наибольшее изъ значеній, допускаемыхъ формулой (α).

Но, какъ видно изъ предыдущаго, значеніе для x, равное 2, представляетъ число, кубъ котораго если не равенъ первой грани подкоренного числа (15), то ближайшимъ образомъ къ ней подходитъ.

И дѣйствительно, кубъ 3 равенъ 27 и уже болѣе первой грани (15). Отсюда:

Чтобы найти число десятковъ кубическаго корня изъ двуграннаго числа, надо найти такое число, кубъ котораго или равнялся бы первой грани, или ближайшимъ образомъ къ ней подходилъ.

Найдя кубъ числа десятковъ ($20^3 = 8\,000$) вычтемъ его изъ числа 15 625, получимъ первый остатокъ 7 625, который долженъ равняться $3.100x^2y + 3.10xy^2 + y^3$, т. е.

$$7\,625 = 3.100x^2y + 3.10xy^2 + y^3,$$

или: $7\,625 = 3.100.4.y + 3.10.2.y^2 + y^3$ . . . (2)

Первый членъ правой части этого равенства $3.100.4y$ представляетъ нѣкоторое число сотенъ и можетъ или равняться сотнямъ лѣвой части (числа 7 625), или быть меньше числа сотенъ лѣвой части, такъ какъ и въ остальныхъ двухъ членахъ правой части могутъ заключаться сотни, а потому

$$3.100.4y \leqslant 7\,600$$

или

$$3.4y \leqslant 76$$

или

$$y \leqslant \frac{76}{3.4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$y \leqslant 6\frac{1}{3}$$

Но y, какъ цифра, можетъ имѣть только значенія цѣлыя и однозначныя, а потому

$$y \leqslant 6.$$

Итакъ, за y можно принимать слѣдующія значенія: 6, 5, 4, 3, 2, 1 и 0.

Для окончательнаго выбора значенія y слѣдуетъ каждое изъ нихъ, начиная съ наибольшаго, подставлять въ равенство (2).

Изъ формулы (3) видно, что наибольшее значеніе y представляетъ частное отъ дѣленія перваго остатка безъ двухъ послѣднихъ цифръ (76) на утроенный квадратъ цифры десятковъ (3.4). Отсюда:

Чтобы найти цифру единицъ кубическаго корня изъ двузначнаго числа, надо въ первомъ остаткѣ отбросить двѣ послѣднія цифры и остальное число раздѣлить на утроенный квадратъ цифры десятковъ корня.

Повѣрку значенія цифры единицъ дѣлаютъ такъ: составляютъ утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы, + утроенное произведеніе квадрата десятковъ на квадратъ единицъ, + кубъ единицъ.

Такъ, въ нашемъ примѣрѣ составляемъ:

$$3.20^2.6+3.20.6^2+6^3=7\,200+2\,160+216=9\,576.$$

Такъ какъ 9 576 больше 7 625, то 6 нельзя принять за значеніе единицъ искомаго корня. Провѣряемъ такимъ же образомъ значеніе 5, а именно:

$$3.20^2.5+3.20.5^2+5^3=6\,000+1\,500+125=7\,625.$$

Принимая для y значеніе 5, мы вполнѣ удовлетворимъ равенство (2); слѣдовательно искомый корень равенъ 25.

§ 282. На практикѣ все дѣйствіе располагаютъ такъ:

$$\sqrt[3]{15\,\underbrace{625}} = 25$$

$$\begin{array}{r|r}
2^3 & 8\ \vdots \\
\hline
3:2^2=12 & 7\,625 \\
\hline
3.20^2.6 & 7\,200 \\
3.20.6^2 & 2\,160 \\
6^3 & 216 \\
\hline
 & 9\,576 \\
\hline
 & 7\,625 \\
\hline
3.20^2.5 & 6\,000 \\
3.20.5^2 & 1\,500 \\
5^3 & 125 \\
\hline
 & 7\,625 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$$76:12=6\tfrac{4}{12}$$

*)

*) Обведенныя въ примѣрахъ черненькими линейками дѣйствія на практикѣ обыкновенно перечеркиваются, какъ недѣйствительныя, такъ какъ значенія искомыхъ корней взяты не вѣрно.

Извлеченіе кубическаго корня изъ многограннаго числа.

§ **283**. Извлеченія кубическаго корня изъ многограннаго числа приводится къ извлеченію кубическаго корня изъ числа, составленнаго изъ первыхъ двухъ граней, подобно тому, какъ извлеченіе квадратнаго корня изъ многограннаго числа приводится къ извлеченію квадратнаго корня изъ первыхъ двухъ граней (см § 212).

Напр.: $\sqrt[3]{3\,869\,893} = 157$

1^3	1
$3 \cdot 1^2$	2 869
$3 \cdot 10^2 \cdot 9$	2 700
$3 \cdot 10 \cdot 9^2$	2 430
9^3	729
	5 859
	2 869
$3 \cdot 10^2 \cdot 8$	2 400
$3 \cdot 10 \cdot 8^2$	1 920
8^3	512
	4 832
	2 869
$3 \cdot 10^2 \cdot 7$	2 100
$3 \cdot 10 \cdot 7^2$	1 470
7^3	343
	3 913
	2 869
$3 \cdot 10^2 \cdot 6$	1 800
$3 \cdot 10 \cdot 6^2$	1 080
6^3	216
	3 096

$28 : 3 = 9\frac{1}{3}$

	2869
$3 \cdot 10^2 \cdot 5$	1500
$3 \cdot 10 \cdot 5^2$	750
5^3	125
	2375
$3 \cdot 15^2 = 675$	494893
$3 \cdot 15^2 \cdot 7$	472500
$3 \cdot 15 \cdot 7^2$	22050
7^3	343
	494893
	0

§ **284. Правило.** Чтобы извлечь кубическій корень изъ числа, надо, раздѣливъ его на грани по три цифры отъ правой руки къ лѣвой, извлечь кубическій корень изъ первой (слѣва) грани: это будетъ первая цифра корня; кубъ первой цифры корня подписать подъ первою гранью и вычесть, къ остатку снести вторую грань: это будетъ первый остатокъ; въ первомъ остаткѣ отбросить справа двѣ цифры, а оставшееся число раздѣлить на утроенный квадратъ первой цифры корня: цѣлое число частнаго будетъ наибольшимъ возможнымъ значеніемъ для второй цифры корня; для провѣрки второй цифры корня, надо составить сумму трехъ членовъ: утроенное произведеніе квадрата первой цифры корня на предполагаемую вторую, + утроенное произведеніе первой цифры корня на квадратъ второй, + кубъ второй цифры корня; если эта сумма равна или менѣе перваго остатка, то вторая цифра корня выбрана вѣрно; въ противномъ случаѣ слѣдуетъ такимъ же образомъ испытать цифру на единицу меньшую. Къ остатку отъ вычитанія вышеупомянутой суммы снести третью грань: это будетъ второй остатокъ. Во второмъ остаткѣ отбросить двѣ послѣднія цифры и оставшееся число раздѣлить на утроенный квадратъ найденной части корня (числа, состоящаго изъ первыхъ двухъ цифръ корня): это будетъ третья цифра корня, повѣрка которой совершается такъ же, какъ и повѣрка второй и т. д.

§ **285.** Извлеченіе кубическаго корня изъ чиселъ дробныхъ, извлеченіе его изъ чиселъ съ желаемою степенью точности, а также изъ алгебраическихъ многочленовъ выполняется по правиламъ, аналогичнымъ съ извлеченіемъ квадратнаго корня.

Ариөметическая прогрессія.

§ **286. Ариөметическою прогрессіею называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ разность между рядомъ стоящими членами, послѣдующимъ и предыдущимъ, постоянна.**

Отдѣльныя числа этого ряда называются **членами** и отдѣляются одно отъ другого точкою; передъ ариөметическою прогрессіей ставится знакъ $\div$.

Напр. $\div\ 3\cdot7\cdot11\cdot15\cdot19\cdot23\cdot27$.

§ **287. Постоянная разность между рядомъ стоящими членами, послѣдующимъ и предыдущимъ, называется разностью прогрессіи.**

Въ предыдущемъ примѣрѣ разность прогрессіи равна 4.

Если разность прогрессіи положительна, то прогрессія называется **возрастающею**, если же отрицательна, то **убывающею.**

$$\div\ 5\cdot4{,}5\cdot4\cdot3{,}5\cdot3\cdot2{,}5\cdot2\cdot1{,}5\cdot1\cdot0{,}5\cdot0\cdot-0{,}5\cdot-1\cdot-1{,}5$$

прогрессія убывающая, которой разность равна $-0{,}5$.

Рядъ натуральныхъ чиселъ:

$$\div\ 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\ldots$$

представляетъ ариөметическую возрастающую прогрессію, разность которой равна $+1$.

§ **288.** Условимся обозначать члены ариөметической прогрессіи такъ: a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_n, гдѣ значки

1, 2, 3, 4... n указываютъ мѣсто члена отъ начала прогрессіи.

Напр. a_1 — первый членъ, a_5 — пятый; черезъ a_n обозначаютъ какой угодно или, какъ говорятъ, общій членъ; иногда черезъ a_n обозначаютъ послѣдній членъ. Разность прогрессіи станемъ обозначать черезъ d (отъ латинскаго слова differentia — разность), число членовъ — черезъ n, сумму всѣхъ членовъ черезъ S_n, гдѣ значекъ n означаетъ число членовъ, входящихъ въ сумму.

§ **289**. Теорема 1. **Всякій членъ ариѳметической прогрессіи равняется первому ея члену, сложенному съ разностью прогрессіи, помноженною на число предшествующихъ членовъ.**

Требуется доказать, что: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Изъ опредѣленія ариѳметической прогрессіи слѣдуетъ, что $a_2 - a_1 = d$, откуда $a_2 = a_1 + d$

$a_3 - a = d$; откуда $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$.

$a_4 - a_3 = d$; откуда $a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$.

$a_5 - a_4 = d$; откуда $a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$.

Разсматривая окончательныя выраженія для a_2, a_3, a_4, a_5 мы замѣчаемъ, что эти выраженія вполнѣ подтверждаютъ теорему, и такъ какъ для выраженія слѣдующихъ членовъ $a_6, a_7, a_8...$ способомъ тѣхъ же преобразованій нельзя ожидать измѣненія закона, то по аналогіи заключаемъ, что

$$a_6 = a + 5d$$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

. . . . .

и вообще $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Напр.: для прогрессіи $\div 4 \,.\, 10 \,.\, 16 \;.$
разность прогрессіи $10 - 4 = 6$; $a_8 = 4 + 7 \cdot 6 = 46$

$$a_{15} = 4 + 14 . 6 = 88 \text{ и т. п.}$$

Слѣдствіе. На основаніи этого свойства можно ариѳметическую прогрессію обозначить:

$$\div a \cdot (a + d) \cdot (a + 2d) \cdot (a + 3d) \cdot (a + 4d) \ldots$$

§ **290.** Теорема 2. **Каждые три послѣдовательныхъ члена ариѳметической прогрессіи составляютъ непрерывную ариѳметическую пропорцію.**

Дана $\div a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \ldots$

Требуется доказать, что

$$a_n - a_{n+1} = a_{n+1} - a_{n+2}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ опредѣленія ариѳметической прогрессіи слѣдуетъ, что

$$a_{n+1} - a_n = d$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = d$$

слѣдовательно $\quad a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$

или $\quad a_n - a_{n+1} = a_{n+1} - a_{n+2}.$

§ **291**. Теорема 3. **Сумма членовъ ариѳметической прогрессіи, равно отстоящихъ отъ концовъ ея, равна суммѣ крайнихъ членовъ.**

Дано: въ прогрессіи $\div a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots a_k \ldots a_h \ldots a_{n-1} \,.\, a_n$, которой разность d,

a_k — членъ k-ый отъ начала,

a_h — членъ k-ый отъ конца.

Требуется доказать, что

$$a_k + a_h = a_1 + a_n .$$

Доказательство. По теоремѣ 1-ой (см. § 289)

$$a_k = a_1 + (k-1)d \quad . \quad . \qquad . \ (1)$$

А написавъ члены данной прогрессіи въ обратномъ порядкѣ, получимъ прогрессію:

$$\div\, a_n \cdot a_{n-1} \;.\;.\;.\; a_h \;.\;.\;.\; a_k \;.\;.\;.\; a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

для которой знаменателемъ, очевидно, будетъ $-d$, такъ какъ, если данная прогрессія возрастающая, то, написанная въ обратномъ порядкѣ, она будетъ убывающею и наоборотъ.

Въ послѣдней прогрессіи членъ a_h отъ начала ея k-ый, а потому, на основаніи теоремы 1-ой (см. § 289)

$$a_h = a_n + (k-1)(-d)$$

или

$$a_h = a_n - (k-1)d \quad . \quad . \qquad . \ (2).$$

Сложивъ по частямъ равенства (1) и (2), получимъ:

$$a_k + a_h = a_1 + (k-1)d + a_n - (k-1)d$$

или

$$a_k + a_h = a_1 + a_n .$$

§ **292**. Теорема 4. **Сумма членовъ ариѳметической прогрессіи равняется суммѣ крайнихъ ея членовъ, умноженной на половину числа всѣхъ ея членовъ.**

Дано: $\div a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$

разность которой d и сумма всѣхъ членовъ S_n. Требуется доказать, что

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}.$$

Доказательство. Очевидно, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

$$+ a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

или же $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$.

Сложивъ оба равенства по частямъ, получимъ

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$

$$+ (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Каждая пара членовъ, заключенныхъ въ скобки, есть пара членовъ, равно отстоящихъ отъ концовъ, а потому всѣ пары равны между собою и равны парѣ $(a_1 + a_n)$; всѣхъ же паръ столько, сколько членовъ въ прогрессіи, т. е. n; слѣдовательно

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

откуда $$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}.$$

Если въ этой формулѣ замѣнить a_n его значеніемъ, то получимъ:

$$S_n = [a_1 + (a_1 + (n-1)d)] \cdot \frac{n}{2}.$$

или $$S_n = [2a_1 + (n-1)d] \cdot \frac{n}{2}.$$

§ **293**. Въ задачахъ на ариѳметическія прогрессіи встрѣчается 5 различныхъ величинъ: a_1, a_n, d, n, S_n; формулъ же, выражающихъ зависимость между ними, только двѣ: формула общаго члена и формула суммы членовъ, а потому три изъ этихъ величинъ должны быть даны, тогда двѣ остальныя могутъ быть найдены изъ системы уравненій.

Задача 1. Найти сумму 30 членовъ ариѳметической прогрессіи, которой 10-й членъ$=24$, а 23-й$=-15$.

Дано: $a_{10}=24$; $a_{23}=-15$; найти S_{30}.

$$\begin{cases} a_{10}=a_1+9d; & a_1+9d=24 \\ a_{23}=a_1+22d; & a_1+22d=-15 \end{cases}$$

Вычитая 2-ое изъ 1-го, получимъ.

$$-13d=39;\quad d=-3$$

$$a_1+9(-3)=24;\quad a_1=24+27=51$$

$$S_{30}=(2\cdot51-29\cdot3)\frac{30}{2}=(102-87)\cdot15=$$

$$=15\cdot15=225.$$

Задача 2. Дано: $a_{10}=7$, $S_{40}=840$.

Найти разность прогрессіи d.

$$\left\{\begin{array}{r} 7=a_1+9d \\ 840=(2a_1+39d)\cdot20 \end{array}\right. \quad \Big|\quad a_1=7-9d$$

$$840=[2(7-9d)+39d]20$$

$$840=(14-18d+39d)\cdot20$$

$$840=(14+21d) \,.\, 20$$

$$840=280+420d;$$

$$d=\frac{840-280}{420}=\frac{560}{420}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}\,.$$

Задача 3. Дано: $a_{15}=150$; $a_{25}=125$; $S_n=0$.

Найти число членовъ n.

$$\left.\begin{aligned}150&=a_1+14d\\125&=a_1+24d\end{aligned}\right|\quad 25=-10d\,;\; d=-\frac{25}{10}=-\frac{5}{2}$$

$$a_1=150-14d=150+35=185$$

$$S_n=0\,;\;\left[2\,.\,185-(n-1)\frac{5}{2}\right]\frac{n}{2}=0$$

$$\left[370-\frac{5n}{2}+\frac{5}{2}\right]\frac{n}{2}=0\,;\;185_n-\frac{5n^2}{4}+\frac{5n}{4}=0$$

$$740n-5n^2+5n=0\,;\;745n-5n^2=0;$$

$$n^2-149n=0\,;\;n_1=0\,;\;n_2=149\,.\;n=149.$$

Задача 4. Въ ариѳметической прогрессіи $S_{10}=335$, а произведеніе среднихъ членовъ $=1110$. Найти a_1 и d.

Такъ какъ $S_{10}=(a_1+a_{10})\frac{10}{2}$, то

$$(a_1+a_{10})\,.\,5=335\,;\;a_1+a_{10}=67,$$

а произведеніе среднихъ членовъ, т. е. $a_5\,.\,a_6=1110$.

Но $a_1+a_{10}=a_5+a_6$ (теорема 3, § 291).

Слѣдовательно и $\left\{\begin{aligned}a_5+a_6&=67\\a_5\,.\,a_6&=1110\end{aligned}\right|\quad a_6=67-a_5$

$$a_5(67 - a_5) = 1110\ ;\ 67a_5 - a_5^2 = 1110$$

$$a_5^2 - 67a_5 = -1110.$$

$$a_5 = \frac{67}{2} \pm \sqrt{\frac{4489}{4} - 1110} = \frac{67}{2} \pm \frac{7}{2}.$$

$a'_5 = \frac{74}{2} = 37\ ;\ a''_5 = 30\ ;$ | $a'_6 = 67 - 37 = 30;$

$d'' = a''_6 - a''_5 = 37 - 30 = 7$ | $a''_6 = 67 - 30 = 37.$

$$d' = a'_6 - a'_5 = 30 - 37 = -7$$

$$a_5 = a_1 + 4d\ ;\ 30 = a_1 + 28\ ;\ a'_1 = 2 \text{ при } d = 7$$

$$37 = a_1 - 28\ ;\ a_1'' = 65 \text{ при } d = -7$$

Задача 5. Дана $\div (a+x)^2 \cdot (a^2+x^2) \cdot (a-x)^2 \ldots$

Найти сумму n членовъ ея, т. е. S_n.

Разность прогрессіи $d = (a^2 + x^2) - (a+x)^2 =$

$$= a^2 + x^2 - (a^2 + 2ax + x^2) = a^2 + x^2 - a^2 - 2ax - x^2 =$$

$$= -2ax$$

[**Повѣрка:** $(a - x)^2 - (a^2 + x^2) = a^2 - 2ax + x^2 - a^2 - x^2 =$

$$= -2ax].$$

$$a_n = (a+x)^2 + (n-1)(-2ax) = a^2 + 2ax + x^2 - 2anx +$$

$$+ 2ax = a^2 + 4ax - 2anx + x^2$$

$$S_n = \left[(a+x)^2 + (a^2 + 4ax - 2anx + x^2)\right]\frac{n}{2} =$$

$$= (a^2 + 2ax + x^2 + a^2 + 4ax - 2anx + x^2)\frac{n}{2} =$$

$$=(2a^2+6ax-2anx+2x^2)\frac{n}{2}=(a^2+3ax-anx+x^2)n=$$

$$=n\left[a^2+(3-n)ax+x^2\right].$$

§ **294. Задача 6.** Между числами a и b вставить m среднихъ ариѳметическихъ чиселъ, т. е. такихъ, которыя вмѣстѣ съ числами a и b составляли бы ариѳметическую прогрессію.

Очевидно, задача будетъ рѣшена, если будетъ найдена разность этой прогрессіи.

Назовемъ искомую разность черезъ x.

Такъ какъ между a и b должно быть помѣщено m чиселъ, то въ искомой нами прогрессіи членовъ будетъ $m+2$, и послѣднимъ членомъ этой прогрессіи будетъ число b, а потому, на основаніи теоремы 1, будемъ имѣть:

$$b=a+(m+1)x$$

откуда

$$x=\frac{b-a}{m+1},$$

т. е. **разность ариѳметической прогрессіи при вставкѣ m среднихъ ариѳметическихъ чиселъ между a и b равняется разности между послѣднимъ и первымъ числами, дѣленной на число вставленныхъ чиселъ, увеличенное единицею.**

Геометрическая прогрессія.

§ **295. Геометрическою прогрессіей называется рядъ чиселъ, въ которомъ отношеніе двухъ рядомъ стоящихъ чиселъ, послѣдующаго къ предшествующему, есть величина постоянная.**

Постоянное отношеніе послѣдующаго числа къ предшествующему называется **знаменателемъ геометрической прогрессіи.**

Числа, составляющія прогрессію, называются **членами** ея. Передъ геометрической прогрессіей ставится знакъ ея $\div\div$, а между отдѣльными членами знакъ : (двоеточіе — знакъ дѣленія).

Напр.:

$$\div\div 2:6:18:54:162$$

представляетъ геометрическую прогрессію, знаменатель которой равенъ 3.

Если абсолютное значеніе знаменателя больше 1, то прогрессія называется **возрастающею,** если оно меньше 1, то **убывающею.**

Если знаменатель число отрицательное, то геометрическая прогрессія называется **знакоперемѣнной,** такъ какъ отношеніе чиселъ можетъ быть отрицательнымъ только тогда, когда у этихъ чиселъ противоположные знаки.

Напр.:

$$\div\div 3:(-6):12:(-24).48:(-96)\ldots$$

представляетъ прогрессію знакоперемѣнную, знаменатель которой равенъ — 2.

Условимся обозначать члены геометрической прогрессіи такъ $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$, гдѣ знаки 1, 2, 3, . . n означаютъ мѣста членовъ отъ начала (слѣва) прогрессіи; знаменателя прогрессіи черезъ q, число всѣхъ членовъ черезъ n, сумму всѣхъ членовъ черезъ S_n.

§ **296**. Теорема 1. **Каждый членъ геометрической прогрессіи равенъ первому ея члену, умноженному на знаменатель прогрессіи въ степени числа предшествующихъ членовъ.**

Дана прогрессія: $\div\div a : a : a_3 : a_4 : \ldots \ldots a_{n-1} : a_n$, знаменатель которой q; требуется доказать, что

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Изъ опредѣленія геометрической прогрессіи слѣдуетъ, что:

$$
\begin{array}{lll}
a_2 : a_1 = q, & \text{откуда} & a_2 = a_1 \cdot q \\
a_3 : a_2 = q, & ,, & a_3 = a_2 q = a_1 qq = a_1 q^2 \\
a_4 : a_3 = q, & ,, & a_4 = a_3 q = a_1 q^2 q = a_1 q^3 \\
a_5 : a_4 = q, & ,, & a_5 = a_4 q = a_1 q^3 q = a_1 q^4
\end{array}
$$

Разсматривая окончательныя выраженія для a_2, a_3, a_4 a_5, мы видимъ, что они соотвѣтствуютъ теоремѣ; и такъ какъ для выраженія слѣдующихъ членовъ a_6, a_7, a_8, ... способомъ тѣхъ же преобразованій нельзя ожидать измѣненія закона, то по аналогіи заключаемъ, что:

$$a_6 = a_1 q^5$$

$$a_7 = a_1 q^6$$

. . . . .

и вообще $a_n = a_1 q^{n-1}$ . . . . (1)

Напр.: Если первый членъ геометрической прогрессіи $= 5$, знаменатель $= 2$, то

$$a_4 = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$$

$$a_7 = 5 \cdot 2^6 = 5 \cdot 64 = 320.$$

Слѣдствіе. На основаніи этой теоремы можно геометрическую прогрессію обозначить такъ:

$$\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : \ldots \ldots aq^{n-1}$$

§ **297.** Теорема 2. **Каждые три послѣдовательныхъ члена геометрической прогрессіи составляютъ непрерывную геометрическую пропорцію.**

Дано: $\div\div a_1 : a_2 : \ldots \ldots a_n : a_{n+1} : a_{n+2} \ldots$

Требуется доказать, $a_n : a_{n+1} = a_{n+1} : a_{n+2}$.

Изъ опредѣленія геометрической прогрессіи слѣдуетъ:

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} : a_n = q \\ a_{n+2} : a_{n+1} = q \end{array}\right\} a_{n+1} : a_n = a_{n+2} : a_{n+1}$$

$$a_n : a_{n+1} = a_{n+1} : a_{n+2}\,.$$

§ **298.** Теорема 3. **Сумма членовъ геометрической прогрессіи равняется разности между произведеніемъ послѣдняго члена на знаменатель прогрессіи и первымъ членомъ, дѣленной на разность между знаменателемъ прогрессіи и единицею.**

Дана $\div\div a_1 : a_2 : a_3 : \ldots \ldots a_{n-1} : a_n$, знаменатель которой равенъ q; требуется доказать, что

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}\,.$$

На основаніи опредѣленія геометрической прогрессіи имѣемъ:

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q$$

$$a_4 = a_3 q$$

$$\cdot\ \cdot\ \ \ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Сложимъ эти равенства по частямъ:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_1 q + a_2 q + \ \ldots\ + a_{n-1} q$$

или $a_2 + a_3 + \ \ldots\ a_n = (a_1 + a_2 + \ \ldots\ + a_{n-1}) q$

Но $a_2 + a_3 + \ \ldots\ + a_n = S_n - a_1$

и $a_1 + a_2 + \ \ldots\ + a_{n-1} = S_n - a_n$, а потому

$$S_n - a_1 = (S_n - a_n) q$$

Рѣшимъ это уравненіе, принявъ за неизвѣстное q, тогда будемъ имѣть:

$$S_n - a_1 = S_n q - a_n q$$

$$S_n - S_n q = a_1 - a_n q$$

$$S_n q - S_n = a_n q - a_1$$

$$S_n (q - 1) = a_n q - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \quad \ldots\ldots\ (2)$$

Примѣчаніе. Если прогрессія убывающая, т. е. q менѣе 1, то въ правой части послѣдняго равенства и числитель и знаменатель отрицательны, такъ $a_n q < a_1$ и $q < 1$; для избѣжанія отрицательныхъ чиселъ при вычисленіяхъ, умножаютъ числитель и знаменатель на (—1) и тогда для убывающей прогрессіи получается формула:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

§ **299**. Если въ формулѣ (2) замѣнимъ a_n равнымъ ему значеніемъ изъ формулы (1), то получимъ для вычисленій суммы членовъ геометрической прогрессіи новую формулу:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{(a_1 q^{n-1})q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} =$$

$$= \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

По этой формулѣ удобно вычислять сумму, если неизвѣстенъ послѣдній членъ прогрессіи a_n.

§ **300**. Въ формулахъ (1) и (2) пять различныхъ величинъ, и если три изъ нихъ извѣстны, то двѣ остальныя могутъ быть найдены изъ этихъ формулъ.

Задача 1. Сумма первыхъ трехъ членовъ $= 26$; сумма первыхъ двухъ въ 3 раза болѣе суммы 2-го и 3-го членовъ. Найти первый членъ и знаменатель прогрессіи.

$$\begin{cases} S_3 = 26 \\ S_2 = 3(a_2 + a_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 26 \\ a + aq = 3(aq + aq^2) \end{cases} \qquad \begin{aligned} a + aq &= 3aq + 3aq^2 \\ a - 2aq - 3aq^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} a+aq+aq^2=26 & a(1+q+q^2)=26 \\ a-2aq-3aq^2=0 & a(1-2q-3q^2)=0 \end{array}$$

Такъ какъ a не $=0$, то

$$1-2q-3q^2=0;\ 3q^2+2q-1=0$$

$$q^2+\frac{2}{3}q-\frac{1}{3}=0;\ q=-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}}=-\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3};\ q_1=\frac{1}{3};\ q_2=-1$$

$$a_{\mathrm{I}}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=26;\ \frac{13}{9}a_1=26;\ a_1=\frac{26\,.\,9}{13}=18$$

$$a_{\mathrm{II}}(1-1+1)=26;\ a_{\mathrm{II}}=26.$$

$$\div\div 18:6:2 \text{ и } \div\div 26:-26:26.$$

Задача 2. Первый членъ $=3$, знаменатель прогрессіи$=2$; $S_n=381$. Найти число членовъ.

$$S_n=381;\ S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1};\ 381=\frac{3(2^n-1)}{2-1}.$$

$$381=3(2^n-1);\ 2^n-1=\frac{381}{3};\ 2^n-1=127;$$

$$2^n=128;\ 2^n=2^7;\ n=7.$$

Задача 3. Найти четыре числа, изъ которыхъ первыя три составляютъ ариѳметическую прогрессію, а послѣднія три геометрическую прогрессію; сумма крайнихъ чиселъ $=11$, а сумма среднихъ $=10$.

Составленіе уравненій. Такъ какъ первые три члена составляютъ ариѳметическую прогрессію, то ихъ можно обозначить такъ:

$$a, \; a+d, \; a+2d.$$

Изъ этихъ чиселъ послѣднія два вмѣстѣ съ четвертымъ должны составить геометрическую прогрессію, а потому знаменатель ея долженъ быть равенъ $\frac{a+2d}{a+d}$, а слѣдовательно четвертое число выразится ($a_4 = a_3 q$) такъ:

$$(a+2d).\frac{a+2d}{a+d} \text{ или } \frac{(a+2d)^2}{a+d}.$$

Выразивъ всѣ четыре числа черезъ a и d, составимъ для ихъ опредѣленія два уравненія изъ послѣднихъ двухъ условій задачи, а именно:

$$\left\{\begin{aligned} a + \frac{(a+2d)^2}{a+d} &= 11 \\ (a+d)+(a+2d) &= 10 \end{aligned}\right|$$

$$\left\{\begin{aligned} &a^2+ad+a^2+4ad+4d^2 = 11a+11d \\ &2a+3d = 10 \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} &2a^2+5ad+4d^2-11a-11d=0 \\ &2a+3d=10 \end{aligned}\right| \; a = \frac{10-3d}{2}$$

$$2\left(\frac{10-3d}{2}\right)^2+5d\left(\frac{10-3d}{2}\right)+4d^2-11\left(\frac{10-3d}{2}\right)-11d=0$$

$$\frac{100-60d+9d^2}{2}+\frac{50d}{2}-\frac{15d^2}{2}+4d^2-\frac{110}{2}+\frac{33d}{2}-$$

$$-11d=0; \; 100-60d+9d^2+50d-15d^2+8d^2-$$

$$-110+33d-22d=0; \;\; 2d^2+d-10=0;$$

$$d^2+\frac{d}{2}-5=0;\quad d=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+5}=-\frac{1}{4}\pm\frac{9}{4};$$

$$d_{\mathrm{I}}=2;\quad d_{\mathrm{II}}=-2{,}5;\quad a_{\mathrm{I}}=\frac{10-6}{2}=2;\quad a_{\mathrm{II}}=\frac{10+7\frac{1}{2}}{2}=8{,}75$$

Искомыя числа будутъ:

1) 2; 4; 6; 9 и 2) 8,75; 6,25; 3,75; 2,25.

Другое рѣшеніе. Пусть искомыя числа будутъ: x, y, z, t; тогда, на основаніи условій задачи, будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$1)\ x-y=z;\qquad 2)\ \frac{y}{z}=\frac{z}{t};\qquad\qquad x=11-t;$$

$$3)\ x+t=11;\qquad 4)\ y+z=10$$

$$\begin{cases} 11-t-y=y-z \\ y+z=10 \\ yt=z^2 \end{cases}\qquad y=10-z$$

$$\begin{cases} 11-t-10+z=10-z-z \\ 10t-zt=z^2 \end{cases}\qquad \begin{array}{l} -t+3z=9 \\ z^2+zt-10t=0 \end{array}$$

$$t=3z-9$$

$$z^2+z(3z-9)-10(3z-9)=0$$

$$z^2+3z^2-9z-30z+90=0;\quad 4z^2-39z+90=0$$

$$z^2-\frac{39}{4}z+\frac{90}{4}=0;\quad z=\frac{39}{8}\pm\sqrt{\frac{1521}{64}-\frac{90}{4}};$$

$$z=\frac{39}{8}\pm\frac{9}{8};\quad z_{\mathrm{I}}=\frac{48}{8}=6;\quad z_{\mathrm{II}}=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}=3{,}75$$

$$z_1 = 6\,;\ t_1 = 9\,;\ y_1 = 4\,;\ x_1 = 2$$

$$z_2 = 3{,}75\,;\ t_2 = 2{,}25\,;\ y_2 = 6{,}25\,;\ x = 8{,}75.$$

§ **301. Задача 4. Между числами a и b вставить m среднихъ геометрическихъ чиселъ, т. е. такихъ, которыя вмѣстѣ съ числами a и b составили бы геометрическую прогрессію.**

Очевидно, a есть первое число искомой прогрессіи, b послѣднее, и если будетъ найденъ знаменатель, то можно будетъ написать и всю прогрессію. Назовемъ знаменатель x. Такъ какъ между числами a и b должно быть вставлено m чиселъ, то всѣхъ членовъ въ искомой прогрессіи будетъ, очевидно, $m+2$, и послѣдній членъ прогрессіи b по счету окажется $(m+2)$-ымъ, а потому, на основаніи теоремы 1 (см. § 296),

будемъ имѣть: $$b = ax^{m+1}$$

откуда $$x^{m+1} = \frac{b}{a}$$

и $$x = \sqrt[m+1]{\frac{a}{b}}$$

т. е. **знаменатель прогрессіи для вставки m среднихъ геометрическихъ между a и b равняется корню, показатель котораго единицею болѣе числа вставляемыхъ членовъ, изъ частнаго отъ дѣленія послѣдняго даннаго числа на первое.**

Напр.: между $\frac{1}{2}$ и 32768 вставить 15 членовъ, составляющихъ съ ними геометрическую прогрессію.

$$q = \sqrt[16]{32\,768 : \tfrac{1}{2}} = \sqrt[16]{65536} = \sqrt[16]{2^{16}} = \pm 2$$

65536	2
32768	2
16384	2
8192	2
4096	2
2048	2
1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Отвѣты: 1) $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024; 2048; 4096; 8192; 16384; 32768.

2) $\frac{1}{2}$; — 1; 2; — 4; 8; — 16; 32; — 64; 128; — 256; 512; — 1024; 2048; — 4096; 8192; — 16384; 32768.

Безконечная геометрическая прогрессія.

§ **302**. Геометрическая прогрессія называется безконечною, если число ея членовъ увеличивается непрерывно до безконечности; если при этомъ абсолютныя значенія членовъ возрастаютъ, то она называется **безконечно-возрастающею геометрическою прогрессіею**, если же абсолютныя значенія членовъ уменьшаются, то она называется **безконечно-убывающею геометрическою прогрессіей**.

§ **303**. Теорема 4. **Въ безконечно-возрастающей геометрической прогрессіи абсолютное значеніе членовъ** ея по мѣрѣ удаленія отъ начала возрастаетъ до безконечности, т. е. можно всегда найти настолько удаленный отъ начала прогрессіи членъ, что абсолютная величина его будетъ болѣе любого произвольно-большого числа.

Доказательство: Пусть A произвольно-большое число. Докажемъ, что n-ый отъ начала членъ при достаточно большомъ n можетъ быть больше произвольно-большого числа A.

Такъ какъ въ возрастающей геометрической прогрессіи знаменатель $q > 1$, то различныя цѣлыя положительныя степени q тоже будутъ числами большими, чѣмъ 1, а потому $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots + aq^{n-1}$ или

$$a(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}) > a\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{n}$$

Лѣвая часть этого неравенства есть сумма n членовъ геометрической прогрессіи, въ правой же части $(1 + 1 + + 1 + \ldots\ldots + 1) = n$, потому что число этихъ слагаемыхъ единицъ равно числу членовъ этой прогрессіи:

$$\frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} > a_1 n$$

или

$$a_n q - a_1 > a_1 nq - a_1 n$$

$$a_n q > a_1 nq - a_1 n + a_1$$

$$a_n > \frac{a_1 nq - a_1 n + a_1}{q}$$

Чтобы n-ый отъ начала членъ былъ больше произвольно-большого числа A, **необходимо**, чтобы

$$\frac{a_1 nq - a_1 n + a}{q} > A$$

Опредѣлимъ теперь, какимъ числомъ въ такомъ случаѣ должно быть n; для этого выведемъ значеніе n изъ послѣдняго неравенства:

$$\frac{a_1nq - a_1n + a_1}{q} > A$$

$$n(a_1q - a_1) + a_1 > Aq$$

$$n(a_1q - a_1) > Aq - a_1$$

$$n > \frac{Aq - a_1}{a_1q - a_1}.$$

Очевидно, что при какомъ угодно большомъ данномъ числѣ A всегда можно вычислить выраженіе $\frac{Aq-a_1}{a_1q-a_1}$ и принять за n цѣлое число, бо́льшее этого выраженія, а слѣдовательно всегда можно найти столь удаленный отъ начала членъ, который будетъ больше какого угодно большого числа. Отсюда ясно, что если число членовъ будетъ безконечно возрастать, т. е. если число n будетъ стремиться къ безконечности, то и абсолютное значеніе членовъ будетъ стремиться также къ безконечности.

§ **304**. Теорема 5. **Въ безконечно-убывающей геометрической прогрессіи абсолютное значеніе членовъ ея по мѣрѣ удаленія отъ начала безконечно уменьшается**, т. е. всегда можно найти настолько удаленный отъ начала прогрессіи членъ, что абсолютная величина его будетъ менѣе любого произвольно малаго числа.

Доказательство. Пусть $a_1 : a_2 : a_3 : \ldots a_n$ убывающая прогрессія, знаменатель которой q по абсолютному значенію менѣе 1, т. е. $q < 1$.

Тогда рядъ чиселъ

$$\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3} : \ldots \ldots \frac{1}{a_n}$$

будетъ представлять геометрическую прогрессію возрастающую, такъ какъ ея знаменателемъ будетъ $\frac{1}{q}$, а это число по абсолютному значенію больше 1.

Во второй прогрессіи n-ый членъ $\frac{1}{a_n}$ по предыдущей теоремѣ при n достаточно большомъ можетъ быть сдѣланъ больше какого угодно большого числа, а для этого a_n должно быть меньше какого угодно малаго числа, т. е. a_n безконечно малая величина.

Итакъ, при числѣ членовъ n безконечно увеличивающемся абсолютное значеніе членовъ прогрессіи безконечно уменьшается, стремясь къ предѣлу нуль, и, принимая $n=\infty$, мы должны считать n-ый членъ $a_n=0$.

§ **305**. Теорема 6. **Сумма членовъ безконечно-убывающей геометрической прогрессіи равняется первому члену ея, раздѣленному на разность между единицею и знаменателемъ прогрессіи.**

Доказательство. Сумма членовъ убывающей прогрессіи вычисляется по формулѣ

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}.$$

Если принять $n=\infty$, то по теоремѣ 5-ой (см. § 304) $a_n=0$, а слѣдовательно и $a_n q=0$ и формула принимаетъ видъ

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Дробь $\frac{a_1}{1-q}$ представляетъ предѣлъ, къ которому стремится сумма членовъ убывающей прогрессіи, когда число членовъ ея n увеличивается до безконечности.

Напр.: **Задача 5.** Найти сумму членовъ безконечно убывающей геометрической прогрессіи, въ которой $a_2 = -6$, $a_5 = \frac{3}{4}$.

$$\left\{\begin{array}{l} -6 = a_1 q \\ \frac{3}{4} = a_1 q^4 \end{array}\right.$$

Дѣля второе уравненіе на первое, получимъ:

$$q^3 = \frac{3}{4} : -6 = -\frac{3}{4 \cdot 6} = -\frac{1}{8}, \text{ откуда}$$

$$q = \sqrt{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}; \quad -6 = a_1\left(-\frac{1}{2}\right); \; -6 = -\frac{a_1}{2};$$

$$a_1 = 12.$$

Предѣлъ суммы $S\infty = \frac{12}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{12}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{12 \cdot 2}{3} = 8$.

Задача 6. Найти сумму безконечнаго ряда:

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + \frac{b^4}{a} + \ldots, \text{ при } a > b.$$

Дѣля второе слагаемое на первое, получаемъ:

$$a^2b : a^3 = \frac{b}{a};$$

дѣля третье слагаемое на второе, получаемъ:

$$ab^2 : a^2b = \frac{b}{a};$$

дѣля четвертое слагаемое на третье, получаемъ:

$$b^3 : ab^2 = \frac{b}{a} \text{ и т. д.}$$

Отсюда заключаемъ, что данный рядъ представляетъ сумму членовъ геометрической прогрессіи, знаменатель которой $q=\frac{b}{a}$.

При условіи $a>b$ заключаемъ, что $\frac{b}{a}<1$ и, слѣдовательно, прогрессія безконечно-убывающая.

Предѣлъ суммы $S\infty=\frac{a^3}{1-\frac{b}{a}}=\frac{a^3}{\left(\frac{a-b}{a}\right)}=\frac{a^4}{a-b}$.

Задача 7. Найти предѣлъ суммы безконечнаго ряда: $x-x^2+x^3-x^4+\ldots$, при $x<1$.

Такъ какъ

$$\begin{aligned} -x^2 : x &= -x \\ x^3 : -x^2 &= -x \\ -x^4 : x^3 &= -x, \end{aligned}$$

то заключаемъ, что данный рядъ есть геометрическая прогрессія, знаменатель которой $q=-x$; такъ какъ по условію $x<1$ (по абсолютному значенію), то

предѣлъ суммы $S\infty=\frac{x}{1-(-x)}=\frac{x}{1+x}$.

Повѣрку этой и другихъ, подобныхъ ей задачъ можно сдѣлать такъ:

$$\begin{array}{l|l} x & 1+x \\ \hline \underline{x \mp x^2} & x-x^2+x^3-x^4+\ldots \\ \quad -x^2 & \\ \quad \underline{\pm x^2 \pm x^3} & \\ \qquad\quad x^3 & \\ \qquad\quad \underline{-x^3 \mp x^4} & \\ \qquad\quad -x^4 \ldots & \end{array}$$

Задача 8. Найти предѣлъ, къ которому стремится смѣшанная періодическая дробь 0,57777..., когда число періодовъ увеличивается до безконечности.

$$0{,}57777.. = 0{,}5 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + \ldots =$$

$$= 0{,}5 + \text{предѣлъ суммы } (0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + \ldots)$$

Такъ какъ $0{,}007 : 0{,}07 = \frac{7}{70} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$0{,}0007 : 0{,}007 = \frac{7}{70} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ и т. д., слѣдовательно $q = 0{,}1$

Предѣлъ сумин $S\infty = \frac{0{,}07}{1-0{,}1} = \frac{0{,}07}{0{,}9} = \frac{7}{90}$.

Дробь $0{,}5777\ldots = 0{,}5 + \frac{7}{90} = \frac{5}{10} + \frac{7}{90} = \frac{45+7}{90} =$

$= \frac{52}{90} = \frac{26}{45}$.

По извѣстному ариѳметическому правилу

$$0{,}5777\ldots = \frac{57-5}{90} = \frac{52}{90} = \frac{26}{45}.$$

Логариѳмы.

§ **306**. Составимъ таблицу степеней какого-нибудь произвольнаго положительнаго числа, напримѣръ числа 2.

$2^0 = 1$	$2^6 = 64$	$2^{12} = 4096$
$2^1 = 2$	$2^7 = 128$	$2^{13} = 8192$
$2^2 = 4$	$2^8 = 256$	$2^{14} = 16384$
$2^3 = 8$	$2^9 = 512$	$2^{15} = 32768$
$2^4 = 16$	$2^{10} = 1024$	$2^{16} = 65536$
$2^5 = 32$	$2^{11} = 2048$	$2^{17} = 131072$

$2^{18}=262144$	$2^{23}=8388608$	$2^{28}=268435456$
$2^{19}=524288$	$2^{24}=16777216$	$2^{29}=536870912$
$2^{20}=1048576$	$2^{25}=33554432$	$2^{30}=1073741824$
$2^{21}=2097152$	$2^{26}=67108864$	$2^{31}=2147483648$
$2^{22}=4194304$	$2^{27}=134217728$	$2^{32}=4294967296$

При помощи такой таблицы можно облегчить выполненіе дѣйствій надъ нѣкоторыми большими числами, а именно: умноженіе большихъ чиселъ можно привести къ сложенію, дѣленіе къ вычитанію, возведеніе въ степень къ умноженію и извлеченіе корня къ дѣленію.

Напр.: 1) Требуется 32768 умножить на 8192.

Замѣтивъ изъ таблицы, что

$$32768=2^{15} \text{ и } 8192=2^{13},$$

можемъ написать:

$$32768\times 8192=2^{15}\times 2^{13}=2^{15+13}=2^{28};$$

изъ таблицы же видимъ, что $2^{28}=268435456$;

слѣдовательно $32768\times 8192=268435456$.

Изъ этого примѣра видимъ, что единственное дѣйствіе, которое пришлось сдѣлать намъ самимъ, это было сложеніе показателей 15 и 13; все же остальное мы выписали изъ таблицы.

2) $536870912 : 262144=2^{29} : 2^{18}=2^{29-18}=2^{11}=$
$=2048.$

Изъ этого примѣра видно, что дѣленіе большихъ чиселъ мы замѣнили вычитаніемъ числа 18 изъ числа 29; все же остальное дала намъ таблица.

$$3)\ 8192^2 = (2^{13})^2 = 2^{26} = 67108864;$$

$$64^5 = (2^6)^5 = 2^{30} = 1073741824.$$

Возведеніе въ степень при большомъ показателѣ представляетъ дѣйствіе весьма длинное и утомительное; при помощи же таблицы степеней оно замѣняется нетруднымъ умноженіемъ сравнительно небольшихъ чиселъ; такъ въ первомъ примѣрѣ пришлось 13 умножить на 2, во второмъ 6 умножить на 5, все остальное мы взяли изъ таблицы.

$$4)\ \sqrt[6]{16777216} = \sqrt[6]{2^{24}} = 2^{24:6} = 2^4 = 16.$$

Вмѣсто извлеченія корня квадратнаго изъ 16777216, а затѣмъ извлеченія кубическаго корня изъ числа, полученнаго отъ перваго извлеченія, мы, при помощи таблицы степеней, должны были сдѣлать сами только дѣленіе числа 24 на 6, все остальное взято нами изъ таблицы.

Изъ приведенныхъ примѣровъ не трудно видѣть, что таблица эта пригодна только для нѣкоторыхъ чиселъ, встрѣчающихся въ ней, но не для всѣхъ чиселъ.

Такъ ее нельзя примѣнить для рѣшенія такого примѣра 37512 : 2465, такъ какъ ни того, ни другого числа нѣтъ въ таблицѣ. Число 37512 заключается между двумя числами таблицы:

$$32768 < 37512 < 65536$$

или

$$2^{15} < 37512 < 2^{16}.$$

Отсюда видно, что для замѣны числа 37512 степенью основанія 2 долженъ быть найденъ соотвѣтствующій этому числу показатель, большій, чѣмъ 15, но меньшій, чѣмъ 16, слѣдовательно дробный ($15 +$ дробь). Можно ли такой показатель найти? и для всякаго ли числа его можно найти? Да, его можно найти для всякаго положительнаго числа и при томъ или точно, или съ желаемою степенью точности (что будетъ доказано). Въ послѣднемъ случаѣ и результатъ дѣйствія, найденный при помощи таблицы степеней, не будетъ точнымъ, но онъ будетъ во всякомъ случаѣ приближеннымъ съ желаемою степенью точности. Если же всякое положительное число можно замѣнить степенью произвольно выбраннаго основанія, то, составивъ таблицу степеней этого основанія для натуральныхъ чиселъ, начиная съ единицы, можно будетъ при помощи такой таблицы облегчить выполненіе дѣйствій надъ многозначными числами, какъ это было показано въ началѣ § 306.

§ **307. Выраженіе a^x.** Вычисленіе a^x и дѣйствія надъ нимъ при раціональномъ значеніи показателя x производятся по правиламъ, указаннымъ въ предыдущихъ статьяхъ о степени съ положительнымъ и отрицательнымъ показателями, какъ цѣлыми, такъ и дробными. Положимъ, что теперь намъ задана степень съ ирраціональнымъ показателемъ $10^{\sqrt{2}}$.

Подставляя на мѣсто $\sqrt{2}$ его приближенныя значенія съ недостаткомъ и избыткомъ, мы получимъ два безконечныхъ ряда сходящихся чиселъ, одинъ убывающій, другой возрастающій.

Точность	1	0,1	0,01
Возрастающая	10^1	$10^{1,4}$	$10^{1,41}$
Убывающая	10^2	$10^{1,5}$	$10^{1,42}$
Разность	$10\,(10-1)$	$10^{1,4}\,(10^{0,1}-1)$	$10^{1,41}\,(10^{0,01}-1)$

Числа второго ряда называются **приближенными** значеніями степени $10^{\sqrt{2}}$ **съ недостаткомъ**, числа третьяго приближенными значеніями **съ избыткомъ**. Мѣрой точности служатъ разности, выписанныя въ послѣдней строчкѣ. Съ увеличеніемъ точности въ показателѣ, разность между соотвѣтствующими числами 2-го и 3-го ряда уменьшается и стремится къ нулю, такъ какъ выраженіе $10^{\underbrace{0{,}0000\,...\,1}_{n}} =$ $=10^{\frac{1}{10^n}}$ имѣетъ предѣломъ 1 при n безконечно большомъ. Изъ послѣдняго условія вытекаетъ, что числа второго и третьяго ряда, безконечно сближаясь, стремятся къ одному и тому же предѣлу, который считается истиннымъ значеніемъ несоизмѣримой степени и обозначается черезъ $10^{\sqrt{2}}$.

Такимъ образомъ, истинное значеніе несоизмѣримой степени заключается между двумя соизмѣримыми степенями, показатели которыхъ суть приближенныя значенія несоизмѣримаго показателя—одно съ недостаткомъ, а другое съ избыткомъ.

Если предѣлъ приближенныхъ значеній показателя, иначе говоря истинную величину его, обозначимъ черезъ x, то предѣлъ соизмѣримыхъ степеней, опредѣляющій истинную величину несоизмѣримой степени a, будетъ обозначаться черезъ a^x.

Пусть Z_n и $У_n$ приближенное значеніе x съ точностью до $\frac{1}{10^n}$, z_n съ недостаткомъ, а y_n съ избыткомъ.

Тогда, если предѣлъ $Z_n = x$, то предѣлъ $a^{Z_n} = a^x$

" " $У_n = x$ " " $a^{У_n} = a^x$ и обратно.

Послѣднія два положенія устанавливаются строго въ теоріи предѣловъ, которая приводитъ къ тѣмъ же правиламъ дѣйствій надъ степенями несоизмѣримыми, какія были установлены для степеней соизмѣримыхъ.

§ **308**. **Показатель степени, въ которую надо возвысить положительное основаніе, чтобы получить данное число, называется логариѳмомъ даннаго числа.**

Напр.: 5 есть логариѳмъ числа 32 при основаніи 2, потому что $2^5 = 32$; такъ какъ $3^{-4} = \frac{1}{81}$, то -4 есть логариѳмъ $\frac{1}{81}$ при основаніи 3.

Если число не представляетъ изъ себя соизмѣримой степени основанія, то всегда можно найти двѣ соизмѣримыхъ степени, между которыми оно будетъ содержаться. **Показатели этихъ степеней называются приближенными логариѳмами числа, съ точностью до $\frac{1}{n}$, если они составлены изъ n-тыхъ долей единицы и отличаются другъ отъ друга на $\frac{1}{n}$ долю единицы.**

Въ теоріи предѣловъ доказывается, что оба ряда приближенныхъ логариѳмовъ, вычисляемыхъ все съ увеличивающейся точностью, стремятся къ одному и тому же предѣлу, называемому истиннымъ значеніемъ логариѳма числа.

Этотъ истинный логариѳмъ содержится между приближенными, отдѣляя приближенныя съ недостаткомъ отъ приближенныхъ съ избыткомъ.

Логариѳмъ обозначается знаками: *Log*, *Lg*, *log*, *lg*, который пишется передъ числомъ, для котораго надо найти или взять логариѳмъ; иногда при знакѣ логариѳма пишется и основаніе его. Чтобы, напримѣръ, обозначить, что 3 есть логариѳмъ 125, при основаніи 5 пишутъ такъ:

$$3 = lg_5 125 \text{ или } lg_5 125 = 3.$$

$$lg_2 \frac{1}{4} = -2, \text{ потому что } 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

§ **309**. Въ равенствѣ $a^m = N$

m называется логариѳмомъ,

a „ основаніемъ логариѳма,

N „ числомъ.

Каждое изъ этихъ трехъ чиселъ можетъ быть опредѣлено, если даны два другія.

Задача 1. Найти число, логариѳмъ котораго при основаніи 4 равенъ 3, т. е. найти x, если $lg_4 x = 3$.

Изъ опредѣленія логариѳма слѣдуетъ, что

$$4^3 = x, \text{ откуда } x = 64.$$

Задача 2. Найти логариѳмъ числа 0,000001 при основаніи 10, т. е.

$$x = lg_{10} 0{,}000001.$$

Изъ опредѣленія логариѳма слѣдуетъ, что

$$10^x = 0{,}000001 \text{ или } 10^x = \frac{1}{1000000} \text{ или}$$

$$10^x = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}, \text{ откуда } x = -6.$$

Задача 3. Опредѣлить, при какомъ основаніи логариѳмовъ логариѳмъ 27 будетъ равенъ (—3), т. е.

$$lg_x 27 = -3.$$

Изъ опредѣленія логариѳма слѣдуетъ, что

$$x^{-3} = 27 \text{ или}$$

$$\frac{1}{x^3} = 27;\ \ 27x^3 = 1$$

$$x^3 = \frac{1}{27};\ \ x = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}.$$

§ 310. За основаніе логариѳмовъ можно взять любое положительное число, кромѣ 1 и 0.

Единица не можетъ быть принята за основаніе логариѳмовъ, потому что единица во всякой степени равна единицѣ; такъ же и нуль въ степени всегда нуль.

Такъ какъ знакъ выраженія, которое вычисляютъ, опредѣляется правилами знака при томъ или другомъ дѣйствіи, то вычисленія при помощи логариѳмовъ выполняютъ надъ абсолютными числами.

§ 311. Теорема. **Всякое положительное число имѣетъ свой логариѳмъ,** или точный, или вычисленный съ желаемою степенью точности при всякомъ положительномъ основаніи, какъ большемъ единицы, такъ и меньшемъ единицы.

Пусть b—произвольное положительное число, a—основаніе логариѳмовъ, число положительное.

Докажемъ, что, будетъ ли $a > 1$ или $a < 1$, для числа b всегда можно найти логариѳмъ.

Разсмотримъ первый случай, когда $a > 1$.

Назовемъ черезъ x искомый логариѳмъ числа b при основаніи a, т. е.

$$b = a^x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

или

$$x = lg_a b$$

и найдемъ x съ точностью до $\frac{1}{n}$ *).

Такъ какъ числа b и n данныя, то всегда можно вычислить b^n; точно также можно возвести основаніе a въ послѣдовательныя цѣлыя степени 1-ую, 2-ую, 3-ю, 4-ую, 5-ую, 6-ую, а также въ степени (— 1), (— 2), (— 3). . . Тогда можетъ иногда случиться, что какая-либо степень, напр. a^p, будетъ равняться b^n, если же этого не случится, то всегда можно найти такія двѣ послѣдовательныя степени, a^κ и $a^{\kappa+1}$, между которыми будетъ заключаться число b^n, т. е.

$$a^\kappa < b^n < a^{\kappa+1}$$

(Число a^κ меньше числа $a^{\kappa+1}$, потому что $a > 1$ и, будучи возводимо въ степень, будетъ образовывать числа тѣмъ большія, чѣмъ показатель степени больше).

Но по извлеченіи корня n-ой степени

$$a^{\frac{\kappa}{n}} < b < a^{\frac{\kappa+1}{n}}$$

Такимъ образомъ мы нашли 2 соизмѣримыя степени основанія a, между которыми содержится число b.

Показатели этихъ степеней $\frac{\kappa}{n}$ и $\frac{\kappa+1}{n}$ отличаются на

*) Обыкновенно n полагается равнымъ $\frac{1}{10^p}$.

$\frac{1}{n}$, а поэтому (см. § 308) числа $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$ представляютъ приближенныя значенія логариѳма b при основаніи a съ точностью до $\frac{1}{n}$.

Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда

$$a^p = b^n$$

или

$$a^p = a^{nx},$$

откуда $nx = p$, $x = \frac{p}{n}$ или $lg_a b = \frac{p}{n}$,

т. е. $\frac{p}{n}$ есть точный логариѳмъ числа b при основаніи a.

Подобнымъ же образомъ доказывается эта теорема и въ томъ случаѣ, когда основаніе логариѳмовъ $a < 1$, т. е. когда основаніе положительная правильная дробь.

И дѣйствительно, при возведеніи a въ послѣдовательныя цѣлыя степени можетъ иногда случиться, что какая-либо степень, напр. a^p, будетъ равна b^n, если же этого не случится, то всегда можно найти такія двѣ послѣдовательныя степени, напр. a^m и a^{m+1}, между которыми будетъ заключаться число b^n,

$$a^{m+1} < b^n < a^m$$

(число a^m больше числа a^{m+1}, потому что $a < 1$ и, будучи возводимо въ степень, будетъ образовывать числа тѣмъ меньшія, чѣмъ показатель степени больше).

Но по извлеченіи корня

$$a^{\frac{m+1}{n}} < b < a^{\frac{m}{n}}.$$

Отсюда заключаемъ, что числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ представляютъ приближенныя значенія логариѳма b при основаніи a съ точностью до $\frac{1}{n}$, первое приближенный логариѳмъ съ недостаткомъ, второй съ избыткомъ.

Равенство же $a^p = b^n$ или $a^p = a^{nx}$ даетъ для x значеніе $\frac{p}{n}$, т. е. $x = lg_a b = \frac{p}{n}$, гдѣ $\frac{p}{n}$ представляетъ точный логариѳмъ числа b. Изъ способа вычисленія приближенныхъ логариѳмовъ очевидно вытекаетъ, что при данной точности логариѳмомъ числа можетъ быть одно и только одно вполнѣ опредѣленное число.

Вычисляя по указанному способу приближенные логариѳмы, какъ для логариѳма съ недостаткомъ, такъ и логариѳма съ избыткомъ, мы получимъ вполнѣ **опредѣленныя** численныя значенія.

§ **312**. Покажемъ на частномъ примѣрѣ, какимъ образомъ можно для всякаго даннаго положительнаго числа вычислить его логариѳмъ съ желаемою степенью точности.

Примѣчаніе. Пріемъ, который будетъ показанъ, не представляетъ собой того способа, при помощи котораго составлены въ дѣйствительности логариѳмическія таблицы, но онъ очень удобенъ для частныхъ случаевъ вслѣдствіе своей наглядности.

Вычислимъ для примѣра логариѳмъ 2 при основаніи 10 съ точностью до $\frac{1}{20}$.

Назовемъ искомый логариѳмъ черезъ x, т. е.

$$lg_{10} 2 = x, \text{ откуда}$$

$$10^x = 2 \text{ и } 10^{20x} = 2^{20}.$$

Вычислимъ b^n; для даннаго случая 2^{20} изъ таблицы, помѣщенной въ началѣ § 306, найдемъ:

$$2^{20} = 1048576.$$

Возведя затѣмъ основаніе логариѳмовъ 10 въ степени, находимъ двѣ степени

$$10^6 = 1000000 \text{ и } 10^7 = 10000000,$$

между которыми заключается 2^{20}, т. е.

$$10^6 < 2^{20} < 10^7.$$

Извлекая корень 20 степени изъ $10^6 < 2^{20} < 10^7$

$$6^{\frac{6}{20}} < 2 < 10^{\frac{7}{20}}$$

$$\frac{6}{20} < lg_{10} 2 < \frac{7}{20}$$

Итакъ, логариѳмъ 2 при основаніи 10 съ точностью до $\frac{1}{20}$ равняется $\frac{6}{20}$ съ недостаткомъ и $\frac{7}{20}$ съ избыткомъ.

Логариѳмированіе.

§ **313**. Если выраженіе, которое надо вычислить, представляетъ одночленъ, то оно можетъ представлять:

1) произведеніе сомножителей,

2) частное отъ дѣленія,

3) степень числа,

4) корень изъ числа и

5) различныя совокупности предыдущихъ четырехъ выраженій.

Выразить логариѳмъ выраженія черезъ логариѳмы входящихъ въ него чиселъ значитъ прологариѳмировать это выраженіе. Такимъ образомъ логариѳмированіе есть дѣйствіе, имѣющее цѣлью по данному выраженію для числа составить выраженіе для логариѳма.

§ 314. Логариѳмированіе выраженій основано на слѣдующихъ теоремахъ:

Теорема 1. **Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ всѣхъ сомножителей.**

Требуется доказать, что

$$lg_a ABC \ldots N = lg_a A + lg_a B + lg_a C + \ldots + lg_a N .$$

Доказательство. Такъ какъ было уже доказано (см. § 311), что всякое положительное число имѣетъ свой логариѳмъ, то пусть x, y, z ..... и представляютъ соотвѣтственные логариѳмы чиселъ A, B, C ... N по основанію a, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} lg_a A = x \\ lg_a B = y \\ lg_a C = z \\ \ldots \\ \ldots \\ lg_a N = u \end{array}\right\} \ldots (1) \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{l} A = a^x \\ B = a^y \\ C = a^z \\ \ldots \\ \ldots \\ N = a^u \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Если второй рядъ равенствъ перемножимъ по частямъ, то получимъ:

$$ABC \ldots N = a^x \cdot a^y \cdot a^z \cdot \ldots a^u ,$$

$$ABC \ldots N = a^{x+y+z+\ldots+u} .$$

Такъ какъ a есть основаніе логариѳмовъ, то $x + y + z + \ldots + u$ есть логариѳмъ произведенія $ABC \ldots N$, т. е. $lg ABC \ldots N = x + y + z + \ldots + u$.

Подставивъ на мѣсто x, y, z . . . u соотвѣтствующія имъ значенія изъ перваго ряда получимъ:

$$lg_a ABC \ldots N = lg_a A + lg_a B + lg_a C + \ldots + lg_a N.$$

Теорема 2. **Логариѳмъ дроби (частнаго) равенъ логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя.**

Требуется доказать, что

$$lg_a \frac{A}{B} = lg_a A - lg_a B.$$

Доказательство. Пусть на основаніи теоремы, что „всякое положительное число имѣетъ свой логариѳмъ“ (§ 311)

$$\left.\begin{matrix} lg_a A = x \\ lg_a B = y \end{matrix}\right\} \ldots (1) \text{ или } \left.\begin{matrix} A = a^x \\ B = a^y \end{matrix}\right\} \ldots (2)$$

Раздѣливъ во (2) рядъ по частямъ первое равенство на второе, получимъ:

$$\frac{A}{B} = \frac{a^x}{a^y} \text{ или } \frac{A}{B} = a^{x-y}$$

Изъ послѣдняго равенства заключаемъ, что

$lg_a \dfrac{A}{B} = x - y$ и на основаніи ряда (1):

$$lg_a \frac{A}{B} = lg_a A - lg_a B.$$

Теорема 3. **Логариѳмъ степени равняется показателю степени, умноженному на логариѳмъ основанія данной степени.**

Требуется доказать, что $lg_a A^m = m lg_a A$.

Доказательство. Пусть на основанiи теоремы (см. § 311)

$$lg_a A = x \text{ или } A = a^x.$$

Если обѣ части послѣдняго равенства возвысимъ въ m-ую степень, то получимъ:

$$A^m = a^{mx}.$$

Это равенство показываетъ, что

$$lg_a A^m = mx \text{ или}$$

$$lg_a A^m = m \,.\, lg_a A$$

Теорема 4. **Логариѳмъ корня равняется единицѣ, дѣленной на показатель корня и умноженной на логариѳмъ подкоренного числа.**

Требуется доказать, что $\sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} lg_a A$.

Доказательство. Пусть на основанiи теоремы (см. § 311)

$$lg_a A = x \text{ или } A = a^x.$$

Если изъ обѣихъ частей послѣдняго равенства извлечемъ корень n-аго показателя, то получимъ:

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a^x} \text{ или } \sqrt[n]{A} = a^{\frac{x}{n}}.$$

Послѣднее равенство показываетъ, что

$$lg_a \sqrt[n]{A} = \frac{x}{n} \text{ или } lg_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\, lg_a A.$$

§ **315.** Покажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ примѣненіе этихъ теоремъ къ логариѳмированію сложныхъ одночленовъ.

Не будемъ при знакѣ логариѳма писать основаніе логариѳмовъ; подразумѣвается, что оно для всѣхъ чиселъ одинаково.

Примѣръ 1. $x = 2ab^2\sqrt[3]{c}$

$$lgx = lg2 + lga + lgb^2 + lg\sqrt[3]{c} =$$

$$= lg2 + lga + 2lgb + \frac{1}{3}\ lgc.$$

Примѣръ 2. $x = \dfrac{3a^3\sqrt[5]{b}}{4m^2}$.

$$lgx = lg3a^3\sqrt[5]{b} - lg4m^2 =$$

$$= lg3 + lga^3 + lg\sqrt[5]{b} - (lg4 + lgm^2) =$$

$$= lg3 + 3lga + \frac{1}{5}\ lgb - lg4 - 2lgm.$$

Примѣръ 3. $x = \dfrac{5a^2\sqrt[3]{bc^2}}{m^3n\sqrt{p}}$;

$$lgx = lg5a^2\sqrt[3]{bc^2} - lgm^3n\sqrt{p} =$$

$$= lg5 + lga^2 + \frac{1}{3}\ lgbc^2 - \left(lgm^3 + lgn + lg\sqrt{p}\right) =$$

$$= lg5 + 2lga + \frac{1}{3}\left(lgb + 2lgc\right) - \left(3lgm + lgn + \frac{1}{2}lgp\right) =$$

$$= lg5 + 2lga + \frac{1}{3}\ lgb + \frac{2}{3}\ lgc - 3lgm - lgn - \frac{1}{2}\ lgp.$$

Примѣръ 4. $x = \frac{a}{b^2}\sqrt[3]{\frac{cd}{m^2n}}$.

$$lgx = lg\frac{a}{b^2} + lg\sqrt[3]{\frac{cd}{m^2n}} = lga - 2lgb + \frac{1}{3}lg\frac{cd}{m^2n} =$$

$$= lga - 2lgb + \frac{1}{3}(lgcd - lgm^2n) =$$

$$= lga - 2lgb + \frac{1}{3}(lgc + lgd - lgm^2 - lgn) =$$

$$= lga - 2lgb + \frac{1}{3}lgc + \frac{1}{3}lgd - \frac{2}{3}lgm - \frac{1}{3}lgn.$$

Примѣръ 5. $x = \frac{3{,}5\sqrt[3]{25.0{,}17}}{12^2.43{,}735}$.

$$lgx = lg3{,}5 + \frac{1}{3}lg25 + \frac{1}{3}lg0{,}17 - 2lg12 - lg43{,}735.$$

Свойства логариѳмовъ.

§ **316**. I. **Логариѳмъ основанія $=1$.**

Доказательство. $a^1 = a$, слѣдовательно $lg_a a = 1$.

II. **Логариѳмъ нуля $= \mp\infty$, а именно,**

$-\infty$, когда основаніе $a > 1$ и

$+\infty$, когда основаніе $a < 1$.

Доказательство. 1) $a > 1$; $a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = 0$; $a^\infty = \infty$, такъ какъ число, большее 1, при увеличеніи показателя степени даетъ числа все увеличивающіяся; если же показатель, безконечно увеличиваясь, стремится къ своему предѣлу (безконечности), то и степень, увеличиваясь непрерывно, можетъ быть сдѣлана больше произвольно большого числа, т. е. стремится также къ безконечности.

Дробь же $\frac{1}{a^{\infty}}$, у которой числитель постоянное число, а знаменатель число безконечно-большое, представляетъ число безконечно-малое, предѣлъ котораго нуль.

Итакъ, $a^{-\infty}=0$, откуда $lg_{a>1}0=-\infty$.

2) $a<1$; $a^{+\infty}=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, a правильная дробь и при возведенiи въ степень даетъ числа тѣмъ меньшiя, чѣмъ показатель больше; если же показатель степени, безконечно увеличиваясь, будетъ стремиться къ своему предѣлу (безконечности), то степень, безконечно уменьшаясь, можетъ быть сдѣлана менѣе произвольно-малаго числа и стремится къ своему предѣлу—нуль.

Если же $a^{+\infty}=0$, то $lg_{a<1}0=+\infty$.

III. **Логариѳмъ единицы $=0$.**

Доказательство. $a^0=1$, слѣдовательно $lg_a1=0$.

IV. **Логариѳмъ безконечности при основанiи $a>1$ равенъ $+\infty$.**

Логариѳмъ безконечности при основанiи $a<1$ равенъ $-\infty$.

Доказательство. 1) При $a>1$, $a^{\infty}=\infty$, какъ это было уже выяснено раньше (см. § 316, II), слѣдовательно $lg_{a>1}\infty=\infty$.

2) При основанiи $a<1$

$$a^{-\infty}=\infty.$$

Дѣйствительно $a^{-\infty}=\frac{1}{a^{\infty}}$, но при $a<1$ $a^{\infty}=0$

(см. § 316, II), слѣдовательно $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$, т. е. $lg_{a<1}\,\infty = -\infty$.

V. **При основанiи логариѳмовъ большемъ 1 ($a > 1$) логариѳмы чиселъ большихъ, чѣмъ 1, будутъ числами положительными, логариѳмы правильныхъ дробей отрицательными.**

Въ рядѣ a^0, a^1, a^2, a^3, ... $a^{+\infty}$ . . . . . . (1) при $a > 1$ крайнiе члены $a^0 = 1$, $a^{+\infty} = \infty$, а члены промежуточные представляютъ числа большiя 1, и непрерывно возрастающiе до ∞, а потому, если a принять за основанiе логариѳмовъ, то показатели степеней этого ряда, т. е. 1, 2, 3, 4 . . . $+\infty$ будутъ логариѳмами чиселъ ряда (1), т. е. большихъ, чѣмъ 1.

Въ рядѣ a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} . . . $a^{-\infty}$ . . . . . . (2) при $a > 1$ крайнiе члены $a^0 = 1$ и $a^{-\infty} = 0$ (см. § 316, II), промежуточные же члены представляютъ числа меньшiя, чѣмъ 1, и непрерывно уменьшающiяся до 0, т. е. правильныя дроби; а потому, если принять a за основанiе логариѳмовъ, то показатели степеней ряда (2), т. е. -1, -2, -3 . . . $-\infty$ будутъ логариѳмами чиселъ ряда (2), т. е. логариѳмами правильныхъ дробей.

VI. **При основанiи логариѳмовъ меньшемъ, чѣмъ 1 ($a < 1$), логариѳмы чиселъ большихъ, чѣмъ 1, отрицательны, а логариѳмы правильныхъ дробей положительны.**

Доказательство подобно приведенному въ настоящемъ §, V.

§ **317**. Теорема. **Если числа составляютъ геометрическую прогрессiю, то соотвѣтствующiе имъ логариѳмы при одномъ и томъ же основанiи составляютъ ариѳметическую прогрессiю.**

Пусть P, Q, R, S . . . числа и p, q, r, s . . . ихъ логариѳмы при основаніи a, т. е.

$$P=a^p;\quad Q=a^q;\quad R=a^r;\quad S=a^s\ .$$

Дано, что $\frac{Q}{P}=\frac{R}{Q}=\frac{S}{R}=$ . . . . Требуется доказать, что $q-p=r-q=s-r=$ . . . .

Данный рядъ равныхъ отношеній:

$\frac{Q}{P}=\frac{R}{Q}=\frac{S}{R}=$ . . . . можно замѣнить такимъ:

$$\frac{a^q}{a^p}=\frac{a^r}{a^q}=\frac{a^s}{a^r}=\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

или $\quad a^{q-p}=a^{r-q}=a^{s-r}=\ .\ .\ .\ ,$

откуда $q-p=r-q=s-r-$

Это и требовалось доказать.

§ 318. Теорема. **Если три числа составляютъ непрерывную геометрическую пропорцію, то соотвѣтствующіе имъ логариѳмы по одному и тому же основанію составляютъ непрерывную ариѳметическую пропорцію.**

Сохранимъ обозначенія предыдущей теоремы.

Если числа P, Q, R составляютъ непрерывную геометрическую пропорцію, то значитъ

$$P:Q=Q:R \text{ или } a^p:a^q=a^q:a^r$$

откуда

$$p-q=q-r,$$

это равенство показываетъ, что числа p, q, r, т. е. логариѳмы чиселъ P, Q и R составляютъ непрерывную ариѳметическую пропорцію.

Система логариѳмовъ.

§ **319**. Логариѳмы цѣлыхъ натуральныхъ чиселъ, вычисленные съ желаемой степенью точности по одному и тому же основанію, составляютъ **систему логариѳмовъ.**

Наиболѣе употребительна **система логариѳмовъ обыкновенныхъ** или Бригговыхъ—такъ называется система логариѳмовъ, за основаніе которыхъ принято число 10.

Система логариѳмовъ съ основаніемъ 2,718281828.... называется системою натуральныхъ или Неперовыхъ логариѳмовъ.

§ **320**. Въ системѣ обыкновенныхъ логариѳмовъ только логариѳмы чиселъ: 1, 10, 100, 1000 . . . 10^n точны, а именно:

$$\begin{array}{ll} lg1=0 & lg1000=3 \\ lg10=1 & \ldots \\ lg100=2 & lg10^n=n, \end{array}$$

логариѳмы же всѣхъ остальныхъ чиселъ представляютъ числа дробныя, вычисленныя съ нѣкоторою опредѣленною степенью точности.

Цѣлая часть (цѣлое число) логариѳма называется **характеристикой**, дробная **мантиссой.** Мантиссу принято выражать въ десятичныхъ доляхъ. Напр.: обыкновенный логариѳмъ числа 658 равенъ 2,81823; въ немъ характеристика$=2$, мантисса$=0,81823$.

§ **321**. Логариѳмы могутъ быть числами какъ положительными, такъ и отрицательными (см. § 316, V). Мантиссы логариѳмовъ принято брать положительными, поэтому, если какой-либо логариѳмъ отрицателенъ, то его преобразовываютъ **въ логариѳмъ съ положительною мантиссою,** а чтобы показать, что только характеристика отрицательна, мантисса же положительна, ставятъ знакъ минусъ не передъ логариѳмомъ, а надъ его характеристикой.

Напр.: $lg 0,06 = -1,22185 = \bar{2},77815$.

Чтобы отрицательный логариѳмъ преобразовать въ логариѳмъ съ положительной мантиссой, надо къ характеристикѣ прибавить положительную единицу и поставить надъ нею знакъ минусъ, а послѣдовательныя цифры мантиссы вычесть каждую изъ 9, кромѣ послѣдней, которую слѣдуетъ вычесть изъ 10.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$lg 0,06 = -1,22185 = (-1) + (-0,22185) =$$

сумма не измѣнится, если отъ одного слагаемаго отнимемъ единицу, а къ другому прибавимъ единицу, слѣдовательно

$$(-1) + (-0,22185) = (-1-1) + (+1-0,22185) =$$
$$= (-2) + (+0,77815);$$

чтобы эту сумму написать въ видѣ смѣшаннаго числа, нельзя написать минусъ впереди цѣлаго числа, такъ какъ его тогда необходимо относить ко всему смѣшанному числу, а между тѣмъ въ этомъ смѣшанномъ числѣ дробная часть положительна; вотъ поэтому-то знакъ минусъ ставятъ надъ характеристикой: $(-2) + (0,77815) = \bar{2},77815$.

Что касается цифръ мантиссы, то вычитаніе ихъ изъ 9 и послѣдней изъ 10 обясняется тѣмъ, что мантисса даннаго отрицательнаго логариѳма 0,22185 вычитается изъ положительной единицы, а при этомъ вычитаніи, по правилу вычитанія десятичной дроби изъ цѣлаго числа, приходится вычитать всѣ цифры, за исключеніемъ послѣдней, изъ 9, а послѣднюю изъ десяти:

$$\begin{array}{r} \dot{1},\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0}0 \\ -\;0,22185 \\ \hline 0,77815 \end{array}$$

Десятичная дробь, у которой цѣлое число отрицательное, условились прочитывать такъ: $\bar{2},77815$ **„два съ минусомъ**, 77815 сто-тысячныхъ".

Примѣчаніе. По этому правилу можно минусъ, какъ знакъ вычитанія, замѣнить знакомъ сложенія. Напр.:

$$5,71824-2,49137=5,71824+\bar{3},50863.$$

$$\begin{array}{r} 5,71824 \\ -\;2,49137 \\ \hline 3,22687 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5,71824 \\ +\;\bar{3},50863 \\ \hline 3,22687 \end{array}$$

Дѣйствія надъ смѣшанными числами, имѣющими знакъ минусъ надъ цѣлымъ числомъ.

§ **322.** Такъ какъ въ логариѳмическихъ вычисленіяхъ придется имѣть дѣло съ десятичными дробями, имѣющими цѣлое число отрицательнымъ, то необходимо заранѣе пріобрѣсти навыкъ въ различныхъ дѣйствіяхъ надъ ними.

1. Сложеніе.

$$
\begin{array}{r}
\bar{3},47824 \\
1,65273 \\
+\;0,58652 \\
\bar{2},07413 \\
\hline
\bar{3},79162
\end{array}
$$

Въ суммѣ получилось „три съ минусомъ“ по той причинѣ, что отъ сложенія десятыхъ долей получилось 17 десятыхъ, т. е. 7 десятыхъ и одна цѣлая единица положительная, которая съ положительною единицею второго слагаемаго составила двѣ положительныхъ единицы, но отрицательныхъ единицъ въ данныхъ слагаемыхъ 5 ($\bar{3}+\bar{2}=\bar{5}$); общая же сумма цѣлыхъ единицъ должна быть составлена изъ двухъ положительныхъ единицъ и пяти отрицательныхъ, что составляетъ три отрицательныхъ единицы:

$$\overset{+}{2} + \bar{5} = \bar{3}.$$

$$
\begin{array}{r}
4,71152 \\
+\bar{2},45683 \\
\bar{1},64051 \\
\hline
2,80886
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0,83105 \\
+\bar{4},27312 \\
1,52607 \\
\hline
\bar{2},63024
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\bar{5},47236 \\
+\bar{2},35891 \\
0,93125 \\
\hline
\bar{6},76252
\end{array}
$$

2. Вычитаніе

$$
\begin{array}{r}
\dot{3},5\dot{7}\dot{1}28 \\
-\;\bar{2},84235 \\
\hline
4,72993
\end{array}
$$

Вычитая 8 десятыхъ изъ 5 десятыхъ, пришлось у цѣлаго числа (3) занять единицу, такъ что въ уменьшаемомъ осталось 2 положительныхъ единицы, а такъ какъ надо было вычесть 2 отрицательныхъ единицы, что равносильно прибавить 2 положительныхъ единицы, то и получилось въ разности 4 положительныхъ единицы:

$$(+2)-(-2)=(+2)+(+2)=+4.$$

$$\begin{array}{r} 0,39715 \\ -\ \overline{2},68423 \\ \hline \overline{3},71292 \end{array}$$

Вычитая 6 десятыхъ изъ 3 десятыхъ, пришлось занять единицу у цѣлаго числа (нуль), но нуль безъ единицы есть отрицательная единица, слѣдовательно въ уменьшаемомъ одна отрицательная единица, изъ которой надо вычесть 2 положительныхъ единицы, что даетъ въ результатѣ 3 отрицательныхъ единицы:

$$\overline{1}-2=(-1)-(+2)=(-1)+(-2)=-3=\overline{3}.$$

$$\begin{array}{r} \overline{2},51427 \\ -\ 3,81313 \\ \hline \overline{6},70114 \end{array}$$

Вычитая 8 десятыхъ изъ 5 десятыхъ, пришлось занять единицу у цѣлаго числа $\overline{2}$; а $\overline{2}$, уменьшенное на единицу, будетъ равно $\overline{3}$; отъ 3 отрицательныхъ единицъ уменьшаемаго надо отнять 3 положительныя единицы вычитаемаго, что̀ даетъ въ остаткѣ 6 отрицательныхъ единицъ:

$$\overline{2}-3=\overline{3}-3=(-3)-(+3)=(-3)+(-3)=-6=\overline{6}.$$

3. Умноженіе.

Въ логариѳмическихъ упражненіяхъ встрѣчается случай умноженія смѣшаннаго числа съ отрицательнымъ цѣлымъ числомъ на нѣкоторое цѣлое число.

Напр.:

$$\begin{array}{r} \bar{3},17213 \\ \times 3 \\ \hline \bar{9},51639 \end{array}$$

Умножая 3 отрицательныхъ единицы множимаго на 3, получаемъ 9 отрицательныхъ единицъ.

$$\begin{array}{r} \bar{2},41286 \\ \times\ 5 \\ \hline \bar{8},06430 \end{array}$$

Умножая 4 десятыхъ на 5, получаемъ 20 десятыхъ, или 2 цѣлыхъ положительныхъ единицы, отъ умноженія же 2 отрицательныхъ единицъ множимаго на 5, получаемъ 10 отрицательныхъ единицъ и такимъ образомъ въ произведеніи должны заключаться 2 цѣлыхъ положительныхъ единицъ и 10 цѣлыхъ отрицательныхъ единицъ, а всего 8 цѣлыхъ отрицательныхъ единицъ.

Если множитель двузначное или многозначное число, то пріемъ умноженія слѣдующій:

$\bar{3},51372 \times 23 = \overline{58},81556$

$\bar{3} \times 23 = \overline{69}$;

$$\begin{array}{r} 0,51372 \\ \times 23 \\ \hline 154116 \\ 102744 \\ \hline 11,81556 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{69} \\ +11,81556 \\ \hline \overline{58},81556. \end{array}$$

Примѣчаніе. Если надо умножить на дробное число, то умножають сначала на числитель, и полученное произведеніе дѣлятъ на знаменатель.

4. Дѣленіе.

При дѣленіи смѣшаннаго числа, у котораго цѣлая часть отрицательна, на цѣлое число, прибавляютъ къ отрицательному цѣлому числу дѣлимаго столько отрицательныхъ единицъ, чтобы составилось ближайшее кратное число для дѣлителя, затѣмъ къ дробной части (мантиссѣ) прибавляютъ столько же положительныхъ единицъ, сколько было прибавлено отрицательныхъ; затѣмъ обѣ суммы дѣлятъ на даннаго дѣлителя отдѣльно и частныя соединяютъ въ смѣшанное число. Напр.: $\bar{3},67365 : 5 = \bar{1},53473$.

$$\bar{3},67365 : 5 = (-3 + 0,67365) : 5 =$$

$$= (-5 + 2,67365) : 5 = -1 + 0,53473 = \bar{1},53473,$$

На практикѣ все преобразованіе выполняютъ такъ:

$$\begin{array}{l|l} \bar{7},\overset{3}{\smile}35412 & 5 \\ \cline{2-2} \overline{33} & \bar{2},67082\underline{4} \\ \overline{35} & \\ \overline{41} & \\ \overline{12} & \\ \overline{20} & \end{array}$$

При этомъ разсуждаютъ: ближайшее кратное 5-ти есть 10, слѣдовательно къ $\overline{7}$ надо прибавить $\overline{3}$, въ частномъ получимъ $\overline{2}$; написавъ на мѣсто нуля мантиссы 3 положительныхъ единицы (такъ какъ 3 отрицательныхъ единицы прибавили къ цѣлой части), сносимъ къ нимъ 3 десятыхъ доли, получаемъ 33 десятыхъ, а въ частномъ 6 десятыхъ; къ остатку 3 сносимъ 5 сотыхъ, въ частномъ получаемъ 7 сотыхъ и т. д. Если по снесеніи послѣдняго знака получится отъ дѣленія остатокъ, то, приписавъ къ нему нуль, опредѣляютъ слѣдующій десятичный знакъ съ цѣлью выяснить, оставить ли послѣдній десятичный знакъ (пятый) безъ измѣненія, или увеличить его единицею. **Если шестой десятичный знакъ менѣе 5, то его отбрасываютъ, не измѣняя пятаго десятичнаго знака; если же шестой знакъ 5 или болѣе, то, отбрасывая его, увеличиваютъ пятый десятичный знакъ единицею.**

Такимъ образомъ изъ двухъ приближенныхъ значеній частнаго берутъ болѣе близкое къ истинному значенію частнаго. Въ нашемъ примѣрѣ шестой десятичный 4, а потому, зачеркивая его, пятый десятичный не измѣнили

$$\overline{1},53274 : 8 = \overline{1},94159.$$

$$\begin{array}{l|l}
\overset{7}{\overline{1}},\ 53274 & 8 \\ \cline{2-2}
\quad 75 & \overline{1},94159\underline{2} \\
\quad\ \ 33 & \\
\quad\quad 12 & \\
\quad\quad\ \ 47 & \\
\quad\quad\quad 74 & \\
\quad\quad\quad\ \ 20 &
\end{array}$$

$$\overline{6},36296 : 3 = \overline{2},12099.$$

$$\begin{array}{l|l} \overline{6},\ 36296 & 3 \\ \hline 3 & \overline{2},12098\underline{6} \\ 6 & \\ 29 & \\ 26 & \\ 20 & \end{array}$$

Сложные примѣры.

$$3 \,.\, \overline{2},56233 - \frac{1}{4} \cdot \overline{3},28315 + \frac{2}{5} \cdot \overline{1},40317 -$$

$$- 6 \,.\, 2,37014 = x.$$

$$\overline{2},56233 \times 3 = \overline{5},68699$$

$$\overset{1}{\overline{3},}\ 28315 : 4 = \overline{1},3207\underline{\overset{9}{87}}$$

$$\begin{array}{l} 12 \\ 8 \\ 31 \\ 35 \\ 30 \end{array}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \overline{1},40317 = \frac{1}{5} \cdot \overset{3}{\overline{2},}\ 80634 = \overline{1},7612\underline{\overset{7}{68}}$$

$$\begin{array}{l} 38 \\ 30 \\ 6 \\ 13 \\ 34 \\ 40 \end{array}$$

$$2,37014\ .\ 6=14,22084$$

$$x=\bar{5},68699-\bar{1},32079+\bar{1},76127-14,22084=$$

$$=\bar{5},44826-13,54163=\overline{19},90663.$$

$$\begin{array}{r} \bar{5},68699 \\ +\ \bar{1},76127 \\ \hline \bar{5},44826 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{1},32079 \\ +\ 14,22084 \\ \hline 13,54163 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{5},44826 \\ -\ 13,54163 \\ \hline \overline{19},90663 \end{array}$$

§ **323**. Для ускоренія вычисленій принято дѣйствія вычитанія замѣнить дѣйствіями сложенія; тогда всѣ члены многочлена однимъ дѣйствіемъ соединяются въ сумму.

Чтобы вычитаніе числа замѣнить прибавленіемъ соотвѣтствующаго ему другого числа, надо къ характеристикѣ даннаго числа прибавить положительную единицу и у характеристики измѣнить знакъ ея на обратный, а цифры мантиссы, кромѣ послѣдней, вычесть изъ 9, посѣднюю же цифру вычесть изъ 10.

1) $-\bar{3},58234=+2,41766$, потому, что

$$-\bar{3},58234=-(-3+0,58234)=$$

$$=-[(-3+1)+(0,58234)-1)]=-$$

$$-[(-2)+(-0,41766)]=$$

$$=-(-2,41766)=+2,41766.$$

$$-\bar{3},58234=-(-3+0,58234)=$$

$$=+3-0,58234=+2,41766$$

2) $-4,72318 = +\bar{5},27682$, потому что

$$-4,72318 = -(4 + 0,72318) =$$

$$= -[(4+1)+(0,72318-1)] = -[5+(-0,27682)] =$$

$$= -(5 - 0,27682) = -5 + 0,27682 =$$

$$= \bar{5} + 0,27682 = \bar{5},27682.$$

3) $4,37224 + 0,37825 - 2,40526 - \bar{1},63712 -$

$$- 0,17354 = 4,37224 + 0,37825 + \bar{3},59474 +$$

$$+ 0,36288 + \bar{1},82646 = 2,53457$$

$$\begin{array}{r} 4,37224 \\ 0,37825 \\ + \quad \bar{3},59474 \\ 0,36288 \\ \bar{1},82646 \\ \hline 2,53457 \end{array}$$

Таблицы обыкновенныхъ логариѳмовъ.

§ **324**. Опишемъ устройство таблицъ логариѳмовъ обыкновенныхъ, т. е. вычисленныхъ по основанію 10 съ нѣкоторою постоянною для всѣхъ чиселъ степенью точности. Чаще другихъ пользуются таблицами обыкновенныхъ логариѳмовъ пятизначныхъ. Мантиссы такихъ логариѳмовъ вычислены съ точностью до стотысячной доли единицы и помѣщены въ таблицахъ рядомъ съ числами; характеристики въ таблицахъ не показаны по той причинѣ, что въ системѣ обыкновенныхъ логариөмовъ онѣ могутъ быть опредѣлены легко на основаніи теоремъ.

§ **325.** Теорема 1. **Логариөмъ цѣлаго числа, представляемаго единицею съ n нулями, равняется цѣлому числу n** (т. е. числу нулей).

Требуется доказать, что $lg_{10}10^n = n$.

Въ самомъ дѣлѣ $lg10\underbrace{0\ldots\ldots0}_{n} = lg_{10}10^n = nlg10 = n$.

Примѣчаніе. Надо замѣтить, что логариөмы чиселъ, представляемыхъ единицею съ нѣсколькими нулями, состоятъ изъ одной только характеристики.

Теорема 2. **Характеристика логариөма цѣлаго числа равна столькимъ положительнымъ единицамъ, сколько цифръ въ цѣломъ числѣ безъ единицы.**

Пусть b цѣлое число, составленное изъ n цифръ; требуется доказать, что

характеристика $lg_{10}b = n - 1$.

Всякое n-значное число заключается между 10^{n-1} и 10^n, а потому

$$10^{n-1} < b < 10^n$$

Если числа постепенно возрастаютъ, то и логариөмы ихъ при положительномъ основаніи большемъ 1 также возрастаютъ, слѣдовательно

$$lg_{10}10^{n-1} < lg_{10}b < lg_{10}10^n \text{ или}$$

$$n - 1 < lg_{10}b < n$$

Если же $lg_{10}b$ больше цѣлаго числа $(n-1)$ и меньше цѣлаго числа n, то онъ равенъ $(n-1)$ цѣлыхъ съ нѣкоторою правильною дробью (мантиссой), т. е.

Характеристика $lg_{10}b=n-1$. Это и требовалось доказать.

Теорема 3. **Отъ увеличенія числа въ 10^n разъ въ логариѳмѣ этого числа увеличивается только характеристика на n единицъ, а мантисса остается та же самая.**

Пусть $lg_{10}b=k+m$, гдѣ k характеристика, m мантисса.

На основаніи § 314.

$$lg_{10}b\,.\,10^n=lg_{10}b+nlg_{10}10=k+m+n.$$

k и n числа цѣлыя, m дробь (мантисса); слѣдовательно $lg_{10}b\,.\,10^n=(k+n)+m$.

Теорема 4. **Отъ уменьшенія числа въ 10^n разъ въ логариѳмѣ этого числа уменьшается только характеристика на n единицъ, а мантисса остается та же.**

Пусть $lgb=k+m$, гдѣ k характеристика, m мантисса.

На основаніи § 314.

$$lg_{10}\frac{b}{10^n}=lg_{10}b-lg_{10}10^n=k+m-n$$

k и n числа цѣлыя (характеристика), m дробь (мантисса). т. е.

$$lg_{10}\frac{b}{10^n}=(k-n)+m.$$ Это и требовать доказать.

§ **326.** Изъ таблицъ обыкновенныхъ логариѳмовъ имѣемъ:

$$lg 356745 = 5{,}55235.$$

Примѣняя теорему 4 (§ 325), будемъ имѣть:

$$lg(356745 : 10) = lg 35674{,}5 = 4{,}55235$$
$$lg(356745 : 10^2) = lg 3567{,}45 = 3{,}55235$$
$$lg(356745 : 10^3) = lg 356{,}745 = 2{,}55235$$
$$lg(356745 : 10^4) = lg 35{,}6745 = 1{,}55235$$
$$lg(356745 : 10^5) = lg 3{,}56745 = 0{,}55235$$

Изъ этой таблички видно, что, во-первыхъ, мантисса логариѳма десятичнаго числа та же самая, какая у цѣлаго числа, которое получится, если отбросимъ запятую, и, во-вторыхъ, характеристика логариѳма десятичнаго числа соотвѣтствуетъ числу цифръ цѣлой части его безъ единицы; отсюда правило: **Характеристика логариѳма десятичнаго числа равна столькимъ положительнымъ единицамъ, сколько цифръ въ цѣлой части числа безъ единицы.**

§ **327.** Изъ таблицъ обыкновенныхъ логариѳмовъ имѣемъ:

$$lg_{10} 2{,}56 = 0{,}40824.$$

Примѣняя теорему 4 (см. § 325), будемъ имѣть:

$$lg(2{,}56 : 10) = lg 0{,}256 = \bar{1}{,}40824$$
$$lg(2{,}56 : 10^2) = lg 0{,}0256 = \bar{2}{,}40824$$
$$lg(2{,}56 : 10^3) = lg 0{,}00256 = \bar{3}{,}40824$$
$$lg(2{,}56 : 10^4) = lg 0{,}000256 = \bar{4}{,}40824$$
$$lg(2{,}56 : 10_6) = lg 0{,}0000256 = \bar{5}{,}40824.$$

Изъ этой таблички видно, что, во-первыхъ, мантисса правильной десятичной дроби та же самая, какая у числителя этой дроби, и, во-вторыхъ, характеристика правильной десятичной дроби состоитъ изъ отрицательныхъ единицъ, число которыхъ соотвѣтствуетъ числу нулей, предшествующихъ числителю, считая и нуль цѣлыхъ; отсюда правило: **Характеристика логариѳма правильной десятичной дроби равна столькимъ отрицательнымъ единицамъ, сколько нулей предшествуетъ числителю, считая и нуль цѣлыхъ.**

Нахожденіе логариѳма даннаго числа.

§ **328.** Зная, какъ опредѣлить характеристику всякаго числа, покажемъ теперь, какъ найти мантиссу въ таблицахъ. Наши объясненія относятся къ пятизначнымъ таблицамъ Пржевальскаго, составленнымъ для цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 10000. Опуская XXX страницъ введенія, въ которыхъ изложена теорія логариѳмовъ и способъ пользованія таблицами, переходимъ къ первой страницѣ самыхъ таблицъ.

На этой страницѣ помѣщены столбцы чиселъ отъ 1 до 100 и рядомъ съ ними ихъ мантиссы; числа помѣщены въ столбцахъ подъ заголовками N, а мантиссы—подъ заголовками *Log*.

Тукъ $lg\ 5 = 0,69897$

$lg 31 = 1.49136$

$lg 87 = 1,93952.$

§ **329.** Для опредѣленія мантиссы трехзначнаго числа ищемъ на страницахъ второй и слѣдующихъ въ столбцахъ подъ заголовкомъ N данное трехзначное число и рядомъ съ нимъ подъ заголовкомъ 0 находимъ пять или три цифры мантиссы; три цифры мантиссы представляютъ **послѣднія три цифры**, при чемъ первыя двѣ подразумѣваются и таковы же, какъ первыя двѣ цифры въ первой сверху полной пятизначной мантиссѣ.

Напр.: $lg102=2{,}00860$

$lg513=2{,}71012$

$lg963=2{,}98363.$

§ **330**. Для опредѣленія мантиссы четырехзначнаго числа, напр. 5257, ищутъ въ первомъ столбцѣ, подъ заголовкомъ N число, состоящое изъ первыхъ трехъ цифръ даннаго числа (525) и первыя двѣ цифры мантиссы (72), стоящей въ столбцѣ подъ цифрою 0, будутъ также первыми двумя цифрами мантиссы даннаго четырехзначнаго числа (5257), а остальныя три цифры мантиссы даннаго числа (074) берутъ съ мѣста пересѣченія горизонтальной строки, (гдѣ помѣщаются первыя три цифры даннаго числа), съ вертикальнымъ столбцомъ, надъ которымъ стоитъ въ заголовкѣ цифра, соотвѣтствующая четвертой цифрѣ даннаго числа.

Поэтому $lg5257=3{,}72074$

$lg7564=3{,}87875$

$lg1066=3{,}02776$

Если въ таблицахъ три послѣднихъ цифры имѣютъ передъ собою точку (·099), то вторую изъ первыхъ двухъ цифръ мантиссы слѣдуетъ увеличить единицею.

Напр.: $lg 1517 = 3,18.099 = 3,19099$

$lg 3984 = 3,60032$

$lg 7419 = 3,87035.$

§ **331**. Опредѣленіе мантиссы числа болѣе, чѣмъ четырехзначнаго, дѣлается при помощи такъ называемыхъ **табличныхъ разностей** (partes proportionales), помѣщенныхъ въ видѣ табличекъ въ послѣднемъ столбцѣ страницы подъ заглавіемъ *p. p.* Изъ таблицъ находимъ, что

N	lg
6835	3,83474
6834	3,83467

Вычитая соотвѣтственныя числа, находимъ двѣ разности:

$$6835 - 6834 = 1$$

$$3,83474 - 3,83467 = 0,00007.$$

Первая разность 1 представляетъ **разность между числами**, вторая 0,00007 есть **разность между ихъ логариѳмами**.

Допускаютъ, что эти разности пропорціональны; т. е. если число увеличивается **на одну разность чиселъ** (т. е. на 1), то логариѳмъ его увеличивается **на одну разность между логариѳмами** (т. е. на 0,00007), если число увеличивается **на извѣстную долю разности между числами**, то его логариѳмъ увеличивается **на такую же долю разности между логариѳмами** и т. д.

Напр.:

$$\begin{array}{lcl} N & & log. \\ 6834 + 0{,}5\,.\,1 & \text{——} & 3{,}83467 + 0{,}5\,.\,0{,}00007 \\ 6834 + 0{,}36.1 & \text{——} & 3{,}83467 + 0{,}36.0{,}00007. \end{array}$$

Эту пропорціональность можно показать еще и такъ:

если число увеличивается на 1, то ментисса увел. на 0,00007
„ „ „ „ 0,36 „ „ „ „ x

$$x : 7 = 0{,}36 : 1; \quad \text{откуда } x = 0{,}36 \times 7 .$$

Въ дѣйствительности такой пропорціональности не существуетъ, но допуская ее, мы дѣлаемъ при нахожденіи мантиссы логариѳма столь малую ошибку, что ею можно пренебречь даже въ случаяхъ, требующихъ очень большой точности.

§ **332.** Итакъ, допуская вышеупомянутую пропорціональность, мы найдемъ, что если $lg6834 = 3{,}83467$ и разность между логариѳмомъ даннаго числа и логариѳмомъ числа на 1 большаго равна 0,00007, то

$$lg6834{,}36 = 3{,}83467 + 0{,}36\,.\,0{,}00007$$

$$0{,}36\,.\,0{,}00007 = 0{,}00002\underline{52} = 0{,}00003 \text{ (§ 322. Дѣл.);}$$

слѣдовательно $lg6834{,}36 = 3{,}83467 + 0{,}00003 = 3{,}83470.$

$$lg6834{,}758 = 3{,}83467 + 0{,}758\,.\,0{,}00007 = 3{,}83467 +$$
$$+ 0{,}00005\underline{306} = 3{,}83472 .$$

Хотя при помощи вышеприведенныхъ разсужденій мы находимъ мантиссу для десятичнаго числа, въ цѣлой части котораго заключаются 4 цифры, но, принимая во вниманіе, что мантисса логариѳма десятичнаго числа не измѣняется при перенесеніи запятой въ числѣ (см. § 325), заключаемъ, что

$$lg 6834758 = 6,83472$$

$$lg 6,834758 = 0,83472$$

$$lg 0,06834758 = \bar{2},83472 .$$

§ **333.** Разность между логариѳмами четырехзначныхъ чиселъ, отличающихся одно отъ другого на 1, или такъ называемая **табличная разность** (*р. р.*) на практикѣ опредѣляется вычитаніемъ трехъ послѣднихъ цифръ мантиссы, соотвѣтствующихъ 4-ой цифрѣ числа, изъ слѣдующихъ за ними трехъ цифръ.

Напр.: Отыскивая мантиссу логариѳма для числа 517746, находимъ въ столбцѣ подъ заглавіемъ 7 и въ горизонтальной строкѣ числа 517 три цифры (408); вычитая это число (408) изъ слѣдующаго за нимъ (416), получаемъ табличную разность 0,00008 или 8 сто-тысячныхъ. Умноживъ 8 сто-тысячныхъ на число, составленное изъ 5-ой, 6-ой, и т. д. цифръ даннаго числа, находимъ произведеніе (въ нашемъ примѣрѣ $8 \times 0,46 = 3,68$ сто-тысячныхъ); отдѣливъ въ немъ запятою справа столько цифръ, на сколько умножали табличную разность, получаемъ 3 сто-тысячныхъ, точнѣе же 4 сто-тысячныхъ (потому что первая отбрасываемая цифра 6 болѣе 4); эти 4 сто-тысячныхъ и слѣдуетъ прибавить къ мантиссѣ логариѳма числа, состоящаго изъ первыхъ 4-хъ цифръ даннаго числа (не считая нулей, которые могутъ предшествовать значущимъ цифрамъ).

$lg 5177 = 3{,}71408;$

$lg 517746 = 5{,}71408 + 0{,}00004 = 5{,}71412.$

§ **334**. На практикѣ нахожденіе логариѳма выполняется слѣдующимъ пріемомъ:

$lg 23{,}07345 = 1{,}36312$, и на поляхъ:

$$\begin{array}{r} 305 \\ 5.7 \\ +\quad 0.76 \\ 0.095 \\ \hline 311.555 \\ \hline 312 \end{array}$$

Объясненіе: Первыя двѣ цифры мантиссы 36, слѣдующія три, соотвѣтствующія 4-ой цифрѣ даннаго числа, 305;

Табличная разность (*р.р.*) 305 изъ 324 равно 19 сто-тысячныхъ.

19 на 0,3 (пятая цифра) = 5,7 сто-тысячныхъ
19 „ 0,04 (6-ая „) = 0,76 „ „
19 „ 0,005 (7-ая „) = 0,095 „ „
Сумма (305+5,7+0,76+0,095) = 311,555;

такъ какъ первая отбрасываемая цифра 5, то за сумму берется 312, которая и приписывается къ двумъ уже написаннымъ цифрамъ мантиссы.

Примѣчаніе: Измѣненіе мантиссы въ зависимости отъ 7-ой значащей цифры числа столь мало (такъ какъ выражается въ доляхъ 10 мильон.), что считается вполнѣ достаточнымъ по табличной разности взять измѣненія только для 5-ой и 6-ой значащихъ цифръ даннаго числа.

Нахожденіе числа по данному логариѳму его.

§ **335.** Дано, что $lgx = 1{,}57380$. Найти x.

До времени, не обращая вниманія на характеристику (1), подыскиваемъ въ таблицахъ, въ столбцѣ подъ цифрою 0, первыя двѣ цифры мантиссы (57); находимъ ихъ на 11-ой страницѣ. Разсматривая числа въ этой строкѣ и въ слѣдующихъ, которымъ также соотвѣтствуютъ первыя двѣ цифры (57), отыскиваемъ число, равное тремъ послѣднимъ цифрамъ даннаго логариѳма (380); при этомъ, во-первыхъ, можетъ случиться, что такое число (380) найдемъ и, во-вторыхъ, можетъ случиться, что такого числа (380) не найдемъ. Въ первомъ случаѣ, идя по горизонтальному направленію отъ числа (380), въ первомъ столбцѣ, подъ буквою N, находимъ три первыя значащія цифры искомаго числа (374), а въ вертикальномъ столбцѣ числа (380), идя отъ него вверхъ, находимъ 4-ую цифру искомаго числа (8); слѣдовательно значащія цифры искомаго числа 3748. Послѣ того какъ по мантиссѣ найдены значащія цифры, обращаютъ вниманіе на характеристику даннаго логариѳма, и на основаніи теоремъ о характеристикахъ отдѣляютъ цѣлую часть числа отъ его долей; въ данномъ случаѣ характеристика 1, слѣдовательно въ цѣлой части искомаго числа должны быть двѣ цифры (см. § 325), а потому окончательно пишемъ:

$$lgx = 1{,}57380 = lg37{,}48$$

и слѣдовательно

$$x = 37{,}48.$$

Очевидно, что $lgx = \bar{2},57380 = lg0,03748$

и слѣдовательно $x = 0,03748.$

$$lgx = 6,57380 = lg3748000$$

и слѣдовательно $x = 374800.$

§ **336**. Разсмотримъ второй случай, т. е. когда между трехзначными числами въ таблицахъ не находимъ числа, соотвѣтствующаго тремъ послѣднимѣ цифрамъ даннаго логариѳма.

Напр.: $lgx = 3,48212$

Найдя на страницѣ 8-й въ столбцѣ подъ цифрою 0 первыя двѣ цифры данной мантиссы (48), отыскиваемъ, идя отъ этого числа вправо по горизонтальной строкѣ и слѣдующимъ строкамъ, которымъ соотвѣтствуютъ тѣ же двѣ первыя цифры (48), число 212; но не найдя его, беремъ **ближайшее меньшее** (202) и, идя отъ него по горизонтальной строкѣ влѣво, находимъ первыя три значащія цифры (303) въ столбцѣ N, а идя отъ числа 202 по вертикальному направленію вверхъ, находимъ 4-ую цифру 4.

$lgx = 3,48212$

48202 3034

Такъ какъ мантисса 48202 менѣе данной мантиссы 48212 на 10 сто-тысячныхъ, то заключаемъ, что данной мантиссѣ соотвѣтствуетъ число большее 3034. Изъ таблицъ видимъ, что число на единицу большее 3034, т. е. число 3035, имѣетъ мантиссу 48216 (послѣднія три цифры 216 стоятъ въ таблицахъ рядомъ съ 202) и разность между мантиссами этихъ чиселъ (3034 и 3035) равна 14 сто-тысячнымъ (*p. p.*). Далѣе разсуждаемъ такъ:

Если разность между логариѳмами чиселъ равна 14 сто-тысячнымъ, то одно число болѣе другого на 1, если же разность между логариѳмами равна только 10 сто-тысячнымъ, то на сколько одно число болѣе другого, т. е. имѣемъ пропорцію:

14 сто-тысячн.——1
10 „ „ ——x

$$x:1=10:14$$

откуда $x=\frac{10}{14}=0{,}71$.

Итакъ, если $3{,}48202=lg3034$, то увеличеніе логариѳма на 10 сто-тысячныхъ соотвѣтствуетъ увеличенію числа на 0,71, и слѣдовательно $3{,}48212=lg3034{,}71$.

§ **337**. На практикѣ поступаютъ такъ:

$$lgx=3{,}48212=lg3034{,}71$$
$$-40202\ .\ .\ .\ .\ 3034$$

$$\begin{array}{lr|l} (14) & 10 & 14 \\ & 100 & 0{,}71 \\ & 20 & \\ & 60 & \end{array}$$

Откуда $x=3034{,}71$.

Весьма часто пользуются такимъ пріемомъ:

$$
\begin{array}{llr}
lgx=3{,}75781=lg5725{,}42 & & \\
\quad -75778 \ldots\ldots 5725 & & \\
(7) \quad 3 & & \\
\quad 2{,}8 \ldots & \ldots & 0{,}4 \\
\quad 0{,}2 & & \\
\quad 0{,}14 \ldots & \ldots & 0{,}02
\end{array}
$$

Откуда $x=5725{,}42$.

§ **338**. Хотя нахожденіе 5-ой, 6-ой и т. д. значащихъ цифръ искомаго числа было показано для логариѳмовъ, имѣющихъ характеристику 3, но, какъ намъ уже извѣстно, мантисса логариѳма какого-либо десятичнаго числа не зависитъ отъ мѣста запятой въ этомъ числѣ, а зависитъ лишь отъ числа, представляемаго значащими цифрами, то

$$lgx=1{,}75781=lg57{,}2542$$

$$lgx=\bar{3}{,}75781=lg0{,}00572542$$

$$
\begin{array}{l}
lgx=\bar{1}{,}43723=lg0{,}273673 \\
\quad -43712 \ldots 2736 \\
(15) \quad 11 \mid 15 \\
\quad\quad 110 \mid 0{,}73 \\
\quad\quad\ 50 \\
\quad\quad\ 50
\end{array}
$$

Откуда $x=0{,}273673$.

Примѣчаніе. При помощи табличной разности достаточно опредѣлить двѣ цифры (5-ую и 6-ую значащія цифры), такъ какъ слѣдующія будутъ уже невѣрными.

Примѣры вычисленій при помощи логариѳмовъ.

§ 339. Примѣръ 1.

$$x = \frac{31{,}071 \cdot 21{,}372 \cdot 7{,}259}{0{,}515 \cdot 0{,}719 \cdot 0{,}021}.$$

$lgx = lg31{,}071 + lg21{,}372 + lg7{,}259 - lg0{,}515 - lg0{,}719 - lg0{,}021 = 1{,}49235 + 1{,}32984 + 0{,}86088 - \bar{1}{,}71181 - \bar{1}{,}85673 - \bar{2}{,}32222 = 1{,}49235 + 1{,}32984 + 0{,}86088 + 0{,}28819 + 0{,}14327 + 1{,}67778 = \underline{5{,}79231}.$

Въ сторонѣ вычисляютъ:

1)
$$\begin{array}{r} 234 \\ +\ 1{,}4 \\ \hline 235{,}4 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 980 \\ +\ 4{,}2 \\ \hline 984{,}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 1{,}49235 \\ & 1{,}32984 \\ + & 0{,}86088 \\ & 0{,}28819 \\ & 0{,}14327 \\ & 1{,}67778 \\ \hline & 5{,}79231 \end{array}$$

$lgx = 5{,}79231 = lg619886$

$$\begin{array}{lll} -79225 \;.\;.\; 6198 & & \\ \hline (7) \quad 6 & \big| & 7 \\ \quad\quad 60 & \big| & 0{,}857 \\ \quad\quad 56 & & \\ \hline \quad\quad\; 40 & & \\ \quad\quad\;\; 50 & & \end{array}$$

Слѣдовательно $x = 619886$.

Примѣръ 2. $x = \sqrt[5]{\frac{1,375 \cdot 0,375^4}{0,0075^3}}$

$$lgx = \frac{1}{5}(lg1,375 + 4lg0,375 - 3lg0,0075) = \frac{1}{5}(0,13830 +$$
$$+ 4 \cdot \bar{1},57403 - 3 \cdot \bar{3},87506) = \frac{1}{5}(0,13830 + \bar{2},29612 -$$
$$- \bar{7},62518) = \frac{1}{5}(0,13830 + \bar{2},29612 + 6,37482) =$$
$$= \frac{1}{5} \cdot 4,80924 = \underline{0,96185}.$$

Въ сторонѣ вычисляютъ:

$$\begin{array}{r} 0,13830 \\ + \bar{2},29612 \\ 6,37482 \\ \hline 4,80924 \end{array}$$

$$lgx = 0,96185 = lg9,159.$$

Слѣдовательно $x = 9,159$.

Примѣръ 3. $x = 0,75^4 \sqrt[3]{0,75^2}$

$$lgx = 4lg0,75 + \frac{2}{3}lg0,75 = \frac{14}{3}lg0,75 = \frac{14}{3} \cdot \bar{1},87506 =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \bar{2},25084 = \bar{1},41695$$

$$lgx = \bar{1},41695 = lg0,261188$$

$$\begin{array}{rl} -41681 \ldots & 2611 \\ \hline (16) \quad 14 & | \; 16 \\ 140 & | \; 0,875 \\ 128 & \\ \hline 120 & \\ 112 & \\ \hline 80 & \end{array}$$

Въ сторонѣ вычисляютъ:

$$\begin{array}{rr} \bar{1} + & 0,87506 \\ & \times 14 \\ \hline \overline{14} & 350024 \\ & 87506 \\ \hline \overline{14} + & 12,25084 \\ \hline & \bar{2},25084 \end{array}$$

Слѣдовательно $x = 0,261188$.

Примѣръ 4. $x = \dfrac{1,56^3 \cdot 0,00364^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{7}}}{4,6578^2 \cdot \sqrt{0,0467}}$

$$lgx = 3lg1,56 + 2lg0,00364 + \frac{1}{3}lg3 - \frac{1}{3}lg7 - 2lg4,6578 - \frac{1}{2}lg0,0467 = 3 \,.\, 0,19312 + 2 \,.\, \bar{3},56110 + \frac{1}{3} \,.\, 0,47712 - \frac{1}{3} \cdot 0,84510 - 2 \cdot 0,66818 - \frac{1}{2} \cdot \bar{2},66932 = 057936 + \bar{5},12220 + 0,15904 - 0,28170 - 1,33636 - \bar{1},33466 = \bar{6},90788.$$

Въ сторонѣ вычисляютъ:

$$\begin{array}{r} 811 \\ 7,2 \\ \hline 818,2 \\ 0,57976 \\ \bar{5},12220 \\ +\;0,15904 \\ \bar{1},71830 \\ \bar{2},66364 \\ 0,66534 \\ \hline \bar{6},90788 \end{array}$$

$$lgx = \bar{6},90788 = lg0,0000080888$$

$$\begin{array}{lll} -90784 & \ldots\ldots & 80888 \\ \hline (5) & 4 & 5 \\ & \overline{40} & \overline{0,8} \end{array}$$

Слѣдовательно $x = 0,0000080888$.

Имѣются въ продажѣ книги Л. Я. ПЯСЕЦКАГО:

АЛГЕБРА для среднихъ учебныхъ заведеній.

Часть 1. Дѣйствія надъ цѣлыми одночленами и многочленами. Цѣна 25 к.

Часть 2. Дроби и уравненія первой степени. Цѣна 25 коп.

Часть 3. Степени и корни. Цѣна 35 коп.

Часть 4. Цѣна 35 к.

Часть 5. Цѣна 50 коп.

УЧЕБНИКЪ АРИѲМЕТИКИ

для среднихъ учебныхъ заведеній. Изданія вторыя.

часть 1-я. Цѣлыя числа. Цѣна 25 к.

„ 2-я. Дроби. Цѣна 25 к.

„ 3-я. Отношенія и пропорціи. Рѣшеніе задачъ на такъ называемыя правила: тройное, простое и сложное, процентовъ, учета векселей, пропорціональнаго дѣленія, смѣшенія 1-го и 2-го рода и цѣпное способомъ приведенія къ единицѣ и способомъ пропорцій. Цѣна 25 к.

„ 4-я. Дополнительныя статьи. Цѣна 25 к.

Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. опредѣлено: допустить всѣ четыре части „Учебника“—въ качествѣ руководства для среднихъ учебныхъ заведеній Министерства.

Св. Синодомъ книга допущена въ качествѣ учебнаго пособія для мужскихъ и женскихъ училищъ.

Методическія указанія къ „Учебнику ариѳметики“. Ц. 30 к.

Для ознакомленія.

АЛГЕБРА

ДЛЯ

СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ

СОСТАВИЛЪ

преподаватель Кронштадтской мужской и женской Александринской гимназій

Л. Я. Пясецкій.

Часть V.

Цѣна безъ перепл. 50 к.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

ИЗДАНІЕ Бр. БАШМАКОВЫХЪ.

1907.

Типографія Спб. Т-ва Печ. и Изд. дѣла „Трудъ“. Фонтанка, 86.

Рѣшеніе показательныхъ уравненій.

§ **340.** **Показательнымъ уравненіемъ называется такое, въ которое неизвѣстное входитъ показателемъ степени.**

Напр.: $0,75^x = 51,5$.

Показательныя уравненія рѣшаются различными пріемами, въ зависимости отъ вида уравненія; но основная идея большинства пріемовъ—привести уравненіе къ виду двухъ равныхъ одночленовъ и логариѳмированія обѣихъ частей этого уравненія.

Напр.:

1) $0,75^x = 51,5$

$$x \lg 0,75 = \lg 51,5$$

$$x = \frac{\lg 51,5}{\lg 0,75} = \frac{1,71181}{\bar{1},87506} =$$

$$= \frac{1,71181}{-0,12494} = -\frac{1,71181}{0,12494} = -\mathbf{13,701.}$$

2) $3^{2x} = 2^{6x-7} \cdot 9^{x-2} \cdot 7^{1-x}$.

$$2x \lg 3 = (6x - 7) \lg 2 + (x - 2) \lg 9 + (1 - x) \lg 7$$

$$2x\lg 3 = 6x\lg 2 - 7\lg 2 + x\lg 9 - 2\lg 9 + \lg 7 - x\lg 7$$

$$2x\lg 3 - 6x\lg 2 - x\lg 9 + x\lg 7 = \lg 7 - 7\lg 2 - 2\lg 9$$

$$x(2\lg 3 - 6\lg 2 - \cancel{\lg 9} + \lg 7) = \lg 7 - 7\lg 2 - 2\lg 9$$

$$x = \frac{\lg 7 - 7\lg 2 - 2\lg 9}{2\lg 3 - 6\lg 2 - \lg 9 + \lg 7}$$

$$x = \frac{0{,}84510 - 7\cdot 0{,}30103 - 2\cdot 0{,}95424}{2\cdot 0{,}47712 - 6\cdot 0{,}30103 - 0{,}95424 + 0{,}84510}$$

$$x = \frac{0{,}84510 - 2{,}10721 - 1{,}90848}{0{,}95424 - 1{,}80618 - 0{,}95424 + 0{,}84510}$$

$$x = \frac{\bar{4}{,}82941}{\bar{1}{,}03892} = \frac{-3{,}17059}{-0{,}96108} = \frac{3{,}17059}{0{,}96108}$$

$$x = \frac{3{,}17059}{0{,}96108}$$

$$\lg x = \lg 3{,}17059 - \lg 0{,}96108 =$$

$$= 0{,}50114 - \bar{1}{,}98276 = 0{,}51838$$

$$\lg x = 0{,}51838 = \lg 3{,}299$$

$$x = \mathbf{3{,}299}$$

3) $3^{9x-2} - 3^{9x+2} - 7^{2x-1} + 7^{2x+1} = 0.$

$$\frac{3^{9x}}{3^2} - 3^2\cdot 3^{9x} - \frac{7^{2x}}{7} + 7\cdot 7^{2x} = 0$$

$$7\cdot 3^{9x} - 567\cdot 3^{9x} = 9\cdot 7^{2x} - 441\cdot 7^{2x}$$

$$3^{3x}(7-567)=7^{2x}(9-441)$$

$$-560\cdot 3^{3x}=-432\cdot 7^{2x}$$

$$\frac{7^{2x}}{3^{3x}}=\frac{560}{432}=\frac{35}{27}$$

$$2x\lg 7-3x\lg 3=\lg 35-\lg 27$$

$$x=\frac{\lg 35-\lg 27}{2\lg 7-3\lg 3}=\frac{\lg 35-\lg 27}{\lg 49-\lg 27}=$$

$$=\frac{1,54407-1,43136}{1,69020-1,43136}=\frac{0,11271}{0,25884}=\mathbf{0,435\ldots}$$

4) $28^{2x}-9\cdot 28^{x}=607600.$

Пусть $28^{2x}=y$; **тогда** $28^{2x}=y^2$ **и**

$$y^2-9y=607600$$

$$y=4,5\pm\sqrt{20,25+607600}$$

$$y=4.5\pm\sqrt{607620,25}=4.5\pm 779,5$$

$$y_{\text{I}}=784;\quad y_{\text{II}}=-775.$$

$$y_{\text{I}}=28^{x_{\text{I}}}=784;\quad x_{\text{I}}\lg 28=\lg 784;$$

$$x_{\text{I}}=\frac{\lg 784}{\lg 28}=\frac{2,89432}{1,44716}=\mathbf{2}.\quad x_{\text{I}}=\mathbf{2}.$$

$y_{\text{II}}=28^{x_{\text{II}}}=-775.$ **Такъ какъ всякая степень положительнаго основанія равняется положительному числу, то для** x_{II} **нѣтъ значенія, удовлетворяющаго уравненію.**

5) $2^{x-1}-4^{x-1}=0{,}0099.$

$$2^{x-1}-(2^2)^{x-1}=0{,}0099.$$

$$2^{x-1}-2^{2(x-1)}=0{,}0099.$$

$$\frac{2^x}{2}-\frac{2^{2x}}{4}=0{,}0099;$$

$$2\cdot 2^x-2^{2x}=0{,}0396; \qquad 2^x=y$$

$$2y-y^2=0{,}0396$$

Дальнѣйшее рѣшеніе подобно 4).

§ 341. Если показательное уравненіе приводится къ виду равенства двухъ одночленовъ и при этомъ каждый изъ нихъ можетъ быть изображенъ **въ видѣ степеней одного и того же основанія**, то такое уравненіе можно рѣшить безъ помощи логариѳмическихъ таблицъ.

1) $\sqrt[x+2]{5^{2-x}}=\frac{1}{25}.$

$$5^{\frac{2-3x}{x+2}}=\frac{1}{5^2}; \quad 5^{\frac{2-3x}{x+2}}=5^{-2}$$

Если степени и ихъ основанія равны, то и показатели степеней также равны:

$$\frac{2-3x}{x+2}=-2; \;\; 2-3x=-2x-4; \;\; -3x+2x=-6;$$

$$-x=-6; \;\; x=6.$$

2) $7^{x-1}-5^{1-x}=0.$

$$7^{x-1}=5^{1-x};\ 7^{x-1}=\frac{1}{5^{x-1}};\ 7^{x-1}\cdot 5^{x-1}=1;$$

$$(7\cdot 5)^{x-1}=1;\ 35^{x-1}=1;\ 35^{x-1}=35^0;$$

$$x-1=0;\ x=\mathbf{1}.$$

3) $\left|\begin{array}{l} 3^x-2^{2y}=77 \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^y=7 \end{array}\right|\ 2^y=3^{\frac{x}{2}}-7$ или $2^{2y}=(3^{\frac{x}{2}}-7)^2$

$$3^x-(3^{\frac{x}{2}}-7)^2=77;\ 3^x-(3^x-14\cdot 3^{\frac{x}{2}}+49)=77$$

$$3^x-3^x+14\cdot 3^{\frac{x}{2}}-49=77;\ 14\cdot 3^{\frac{x}{2}}-49=77$$

$$14\cdot 3^{\frac{x}{2}}=126;\ 3^{\frac{x}{2}}=9;\ 3^{\frac{x}{2}}=3^2;\ \frac{x}{2}=2;$$

$$x=\mathbf{4}.$$

$$3^2-2^y=7;\ 2^y=3^2-7;\ 2^y=2;\ y=1.$$

Логариѳмическія уравненія.

§ **842. Логариѳмическимъ уравненіемъ называется такое, въ которое входитъ логариѳмъ неизвѣстнаго.**

1) $92^{\lg x}=778688.$

Разложивъ 778688 на простые множители, получаемъ:

$$778688=2^6\cdot 23^3=4^3\cdot 23^3=92^3.$$

$$92^{\lg x}=92^3;\ \lg x=3;\ x=\mathbf{1000}.$$

2) $x^{\lg x}=4{,}885399.$

Логариѳмируя данное уравненіе, получимъ:

$$\lg x\cdot\lg x=\lg 4{,}885399;\ \ (\lg x)^2=0{,}68890$$

$$\lg x=\pm\sqrt{0{,}6889}=\pm 0{,}83.$$

$$\lg x_{\text{I}}=0{,}83000=\lg 6{,}76\ldots\ldots\ ;\ x_{\text{I}}=\mathbf{6{,}76}\ldots$$
$$82995\ .\ \ .\ 6760$$

$$\lg x_{\text{II}}=-0{,}83=\bar{1}{,}17000=\lg 0{,}1479\ldots;\ x_{\text{II}}=\mathbf{0{,}1479}\ldots$$
$$16997\ .\ \ .\ .\ 1479$$

§ **343**. **Иногда логариѳмическія уравненія могутъ быть рѣшены безъ логариѳмическихъ таблицъ.**

1) $x^{\lg x}=100x$

$$\lg x\cdot\lg x=\lg 100+\lg x;\ \ (\lg x)^2=2+\lg x;$$

Если $\lg x=y$, то $y^2-y=2;\ y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}\,;$

$y=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$ | $y_{\text{I}}=\mathbf{2}$, $\lg x_{\text{I}}=2;\ x_{\text{I}}=\mathbf{100}$ | $y_{\text{II}}=\mathbf{-1}$, $\lg x_{\text{II}}=-1;\ x_{\text{II}}=\mathbf{0{,}1}$.

2) $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right)=\lg\frac{1}{2}-\lg x$

$\lg\left(\frac{1}{2}+x\right)=\lg\left(\frac{1}{2}:x\right)$. . . . . . (см. § 314, **теорема** 2)

$$\frac{1}{2}+x=\frac{1}{2}:x;\ \ \frac{1}{2}+x=\frac{1}{2x}$$

$$x+2x^2=1;\ x^2+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2};\ x=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}};$$

$$x=-\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4};\ x_{\text{I}}=\frac{1}{2};\ x_{\text{II}}=-1.$$

x_{II} уравненію не удовлетворяетъ, такъ какъ $\frac{1}{2}+x_{\text{II}}$ при $x_{\text{II}}=-1$ представляетъ число отрицательное, а отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ.

Сложные проценты.

§ 344. Если капиталъ отданъ въ оборотъ на нѣсколько лѣтъ съ условіемъ, чтобы по прошествіи каждаго года (или другого условленнаго періода времени) проценты, наросшіе за этотъ годъ, были присоединены къ капиталу, и затѣмъ за слѣдующій годъ (періодъ времени) проценты насчитывались не только на первоначальный капиталъ, но и на присоединенные къ нему проценты, то такое насчитываніе процентовъ называется **сложными процентами.**

Основная задача. **Капиталъ a руб. отданъ по p сложныхъ процентовъ. Опредѣлить, въ какую сумму обратится этотъ капиталъ черезъ t лѣтъ при условіи, что проценты должны прибавляться къ капиталу по прошествіи каждаго года.**

Рѣшеніе этой задачи приводитъ къ формулѣ, связывающей всѣ числа данной задачи и позволяющей при помощи логариѳмированія опредѣлять одинъ изъ элементовъ (чиселъ) задачи, когда остальные элементы даны.

Выводъ формулы. Такъ какъ на каждые 100 руб. въ годъ наростаетъ p рублей прибыли (процентныхъ денегъ).

то на каждый рубль въ годъ наростаетъ прибыли $\frac{p}{100}$ рублей; обозначимъ для краткости $\frac{p}{100}$ буквою r и будемъ называть это число **годовымъ нарощеніемъ одного рубля.**

Такъ какъ каждый рубль первоначальнаго капитала черезъ 1 годъ превращается въ $1+r$ рублей, то весь первоначальный капиталъ a превратится черезъ годъ въ $a\cdot(1+r)$ руб.—это нарощенный капиталъ, образовавшійся изъ первоначальнаго капитала и наросшихъ на него за 1 годъ процентовъ. Нарощенный капиталъ перваго года оборота, по условію задачи, является основнымъ или первоначальнымъ капиталомъ во время оборота второго года, и, если каждый рубль черезъ 1 годъ превращается съ наросшими на него процентами въ $1+r$ руб., то весь основной капиталъ второго года оборота превращается къ концу второго года въ $(1+r)\,.\,a(1+r)=a(1+r)^2$. Итакъ нарощенный капиталъ къ концу второго года или основной на время оборота третьяго года будетъ $a(1+r)^2$ руб.

Разсуждая подобно предыдущему, найдемъ, что:
къ концу третьяго года образуется капиталъ

$$(1+r)\,.\,a(1+r)^2=a(1+r)^3$$

„ 4-го „ $(1+r)\,.\,a(1+r)^3=a(1+r)^4$

„ 5-го „ $(1+r)\,.\,a(1+r)^4=a(1+r)^5$

. . . .

. . . .

„ $(t-1)$-го „ $(1+r)\,.\,a(1+r)^{t-2}=a(1+r)^{t-1}$

„ t-го „ $(1+r)\,.\,a(1+r)^{t-1}=a(1+r)^t$.

Итакъ, къ концу послѣдняго года, t-го, образуется наращенный капиталъ $a\ (1+r)^t$. Обозначивъ этотъ искомый капиталъ черезъ A, получимъ формулу:

$$A = a\ (1+r)^t \quad . \qquad . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

§ **345**. Въ этой формулѣ, называемой **формулою сложныхъ процентовъ**, связаны въ видѣ уравненія четыре величины (элементы) задачи

$$A;\ a;\ t;\ r = \frac{p}{100}\,.$$

Когда три изъ этихъ величинъ даны, то четвертая опредѣляется изъ уравненія (1), которое рѣшается логариѳмированіемъ:

$$\lg A = \lg a + t\,.\,\lg(1+r).$$

Отсюда выводятся формулы для вычисленія каждаго элемента:

для a . . . . . . $\lg a = \lg A - t\,.\,\lg(1+r)$;

„ t . . . . $t = \frac{\lg A - \lg a}{\lg(1+r)}$;

„ $(1+r)$ . . . $\lg(1+r) = \frac{\lg A - \lg a}{t}$.

Выраженіе $1+r$ при данномъ значеніи p есть число; напр.: $p = 5\%$ . . . $1+r = 1+0{,}05 = 1{,}05$;

$p = 4{,}25\%$ . . $1+r = 1+0{,}0425 = 1{,}0425$;

$p = 3\frac{1}{2}\%$ . . . $1+r = 1+0{,}035 = 1{,}035$.

Если же p является неизвѣстнымъ, то по формулѣ $\lg(1+r) = \frac{\lg A - \lg a}{t}$ вычисляется логариѳмъ $1+r$, затѣмъ по $\lg(1+r)$ находится число $1+r$; затѣмъ изъ этого числа вычитается 1 и остатокъ умножается на 100; цѣлое число съ долями десятыми и сотыми принимается равнымъ p.

1) $A=x$; $a=200$ руб.; $p=5\%$; $t=6$ лѣтъ.

$$\lg x=\lg 200+6.\lg 1{,}05=2{,}30103+6.0{,}02119=$$

$$=2{,}30103+0{,}12714=2{,}42817;$$

$\lg x=2{,}42817=\lg 268{,}024$; $x=$ **268** руб. **2** коп.

$$\begin{array}{r|l} -\,42813\ .\ . & 2680 \\ \hline 4 & \frac{17}{0{,}235} \end{array}$$

2) $a=x$; $A=1585$ руб. 64 к.; $p=6{,}5\%$; $t=20$ л.

$$\lg x=\lg 1585{,}64-20.\lg 1{,}065=3{,}20020-20\cdot 0{,}02735=$$

$$=3{,}20020-0{,}54700=2{,}65320;$$

$\lg x=2{,}65320=\lg 450{,}98$; $x=$ **450** руб. **98** коп.

$$\begin{array}{r|l} -\,65312\ .\ . & 4509 \\ \hline 8 & \frac{10}{0{,}8} \end{array}$$

3) $t=x$; $A=17161{,}5$ руб.; $a=8000$ руб.; $p=5{,}5\%$.

$$t=x=\frac{\lg 17161{,}5-\lg 8000}{\lg 1{,}055}=$$

$$=\frac{4{,}23456-3{,}90309}{0{,}02325}=\frac{0{,}33147}{0{,}02325};$$

$$\begin{array}{r|l} 33147 & 2325 \\ \hline 2325 & 14{,}25 \\ \hline 9897 & \\ 9300 & \\ \hline 5970 & \\ 4650 & \\ \hline 13200 & \\ 11625 & \\ \hline \end{array}$$

$t = x = \mathbf{14{,}25}$ **года** $= \mathbf{14}$ **лѣтъ** $\mathbf{3}$ **мѣс.**

4) $p = x$; $A = 1842$ руб.; $a = 875$ руб.; $t = 12$ л.

$$\lg(1 + r) = \frac{\lg 1842 - \lg 875}{12} = \frac{3{,}26529 - 2{,}94201}{12} =$$

$$\lg(1 + r) = 0{,}32328 : 12 = 0{,}02694 = \lg 1{,}064$$

$$02694 \quad .\ 1064$$

$$1 + r = 1{,}064;\ r = 0{,}064;\ x = p = 100r = \mathbf{6{,}4}\%.$$

Срочные взносы (вклады).

§ **346.** Основная задача. **Если въ началѣ каждаго года вносить по b рублей въ банкъ, платящій p сложныхъ процентовъ, то какую сумму по истеченіи t лѣтъ банкъ долженъ будетъ выплатить вкладчику?**

Постоянная сумма b рублей, вносимая въ началѣ каждаго года, называется **срочнымъ взносомъ (вкладомъ).**

Назвавъ искомый окончательный капиталъ, образовавшійся изъ ежегодныхъ взносовъ и наросшихъ на нихъ процентовъ, черезъ B, выведемъ зависимость между B и данными величинами b, t и $r = \frac{p}{100}$.

Какъ и въ задачахъ на сложные проценты, будемъ обозначать $\frac{p}{100}$, т. е. годовое нарощеніе на 1 рубль, черезъ r.

Первый взносъ, внесенный въ банкъ въ началѣ перваго года, будетъ находиться въ оборотахъ банка въ теченіе всѣхъ условленныхъ t лѣтъ, а потому за одинъ этотъ взносъ банкъ долженъ будетъ выплатить вкладчику по истеченіи t лѣтъ $b(1+r)^t$ рублей, такъ какъ каждый взносъ b, очевидно, представляетъ первоначальный капиталъ, положенный въ банкъ по p сложныхъ процентовъ на извѣстное число лѣтъ.

По той же причинѣ за второй взносъ b, сдѣланный въ началѣ второго года, и находящійся въ оборотахъ банка въ теченіе $t-1$ лѣтъ, банкъ долженъ выплатить вкладчику . . . . $b(1+r)^{t-1}$ руб.
за взносъ въ началѣ 3-го года . . . . $b(1+r)^{t-2}$ „
„ „ „ „ 4 „ . . . . $b(1+r)^{t-3}$ „
. . . .
. . . .
„ „ „ „ $t-1$ „ . . . . $b(1+r)^2$ „
„ „ „ „ t „ . . . . $b(1+r)$ „

Слѣдовательно, весь капиталъ B, который банкъ по истеченіи t лѣтъ долженъ уплатить вкладчику, долженъ равняться суммѣ выраженій: $b(1+r)^t$, $b(1+r)^{t-1}$, $b(1+r)^{t-2}$, ... $b(1+r)^3$, $b(1+r)^2$ и $b(1+r)$,

т. е. $$B=b(1+r)^t+b(1+r)^{t-1}+b(1+r)^{t-2}+\ldots\ldots+b(1+r)^2+b(1+r).$$

Правая часть этого равенства представляетъ сумму членовъ геометрической прогрессіи, въ которой первый членъ $=b(1+r)$ [если считать члены справа налѣво], знаменатель прогрессіи $=1+r$ и число членовъ$=t$ (такъ какъ слагаемыхъ въ этой суммѣ столько, сколько было сдѣлано взносовъ, а взносы производились въ началѣ каждаго изъ t лѣтъ).

Примѣняя формулу суммы членовъ геометрической прогрессіи $S=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, получимъ:

$$B=\frac{b(1+r)[(1+r)^t-1]}{(1+r)-1}$$

или

$$B=\frac{b(1+r)[(1+r)^t-1)]}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Эта формула (2) называется **формулою срочныхъ взносовъ, производимыхъ въ началѣ года.**

§ **347**. Если взносы дѣлать **въ концѣ каждаго года**, или, говоря точнѣе, внести t вкладовъ, при чемъ первый, внесенный въ концѣ перваго года, будетъ въ оборотахъ банка не t лѣтъ, а $t+1$, послѣдній же вкладъ, внесенный въ концѣ послѣдняго t-го года, совсѣмъ не будетъ въ оборотахъ банка и, слѣдовательно, будетъ возращенъ банкомъ безъ процентныхъ денегъ, то формула окончательнаго капитала, который банкъ долженъ будетъ возвратить вкладчику, выразится, очевидно, такъ:

$$B_1=b(1+r)^{t-1}+b(1+r)^{t-2}+\ldots\ldots+b(1+r)^2+b(1+r)+b.$$

или, упростивъ подобно формулѣ (2), получимъ:

$$B_1=\frac{b[(1+r)^t-1]}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Эта формула называется **формулою ежегодныхъ взносовъ, производимыхъ въ концѣ года.**

Какъ во (2), такъ и въ (3) формулахъ связаны уравненіемъ четыре величины:

$$B \text{ (или } B_1\text{)}, \; b, \; t \text{ и } r = \frac{p}{100}.$$

Такъ какъ формулы (2) и (3) содержатъ въ себѣ разность $[(1+r)^t - 1]$, то логариѳмированіе ихъ требуетъ **предварительнаго вычисленія этой разности**, поэтому, во-первыхъ, $(1+r)$ не можетъ являться неизвѣстнымъ при рѣшеніи уравненій (2) и (3), другими словами, въ задачахъ на взносы такса сложныхъ процентовъ всегда дается; во-вторыхъ, вычисленіе выполняется такъ: логариѳмированіемъ выраженія $(1+r)^t = y$ опредѣляется число y; затѣмъ изъ y вычитается единица,

$$y - 1 = m$$

и уравненія (2) и (3) принимаютъ логариѳмированный видъ:

$$B = \frac{b(1+r)m}{r} \text{ и } B_1 = \frac{bm}{r}.$$

Примѣръ 1. Какую постоянную сумму должно въ началѣ каждаго года отдавать въ ростъ по 5% сложныхъ, чтобы къ концу 10-го года составился капиталъ въ 60000 руб.?

Такъ какъ вклады дѣлались въ началѣ каждаго года, то слѣдуетъ примѣнить при вычисленіи формулу (2), въ которой:

$$b = x; \; B = 60000 \text{ руб.}, \; p = 5\%, \; t = 10 \text{ лѣтъ}$$

$$y = (1+r)^t; \; y = 1{,}05^{10}$$

$$\lg y = 10.\lg 1{,}05 = 10\cdot 0{,}02119 = 0{,}21190 = \lg 1{,}62893$$

$$\begin{array}{r|l} -\,21165\ \ldots & 1628 \\ \hline 25 & 27 \\ 243 & \overline{0{,}92\underline{5}} \\ \hline 270 & \\ 54 & \\ \hline 160 & \end{array}$$

$$y = 1{,}62893$$
$$y - 1 = 0{,}62893 = m$$

$$B = \frac{b-(1+r)m}{r};\quad 60000 = \frac{x\cdot 1{,}05\cdot 0{,}62893}{0{,}05}.$$

откуда $x = \dfrac{60000\cdot 0{,}05}{1{,}05\cdot 0{,}62893}$

$$\lg x = 4{,}77815 + \bar{2}{,}69897 - 0{,}02119 - \bar{1}{,}79860 =$$
$$= 3{,}65733 = \lg 4542{,}89$$

$$\begin{array}{r|l} -\,65725\ \ldots & \\ \hline 8 & 9 \\ & \overline{0{,}88\ldots} \end{array}$$

$b = x = \mathbf{4542}$ р. **89** к.

Примѣръ 2. Нѣкто, отдавая въ началѣ каждаго года въ банкъ 1000 руб. по $3\frac{1}{2}\%$, по прошествіи нѣсколькихъ лѣтъ составилъ себѣ капиталъ въ 18295,6 руб. Во сколько лѣтъ составился этотъ капиталъ?

$$t = x;\ B = 18295{,}6 \text{ руб.};\ b = 1000 \text{ р.};\ p = 3{,}5\%.$$

Изъ формулы $B = \dfrac{b(1+r)[(1+r)^t - 1]}{r}$ надо опредѣдѣлить сначала $[(1+r)^t - 1]$.

$$Br = b(1+r)[(1+r)^t - 1];\quad (1+r)^t - 1 = \frac{Br}{b(1+r)}$$

Пусть $(1+r)^t = y$; $y - 1 = \dfrac{Br}{b(1+r)}$.

$$\lg(y-1) = \lg B + \lg r - \lg b - \lg(1+r) =$$

$$= 4{,}26234 + \bar{2}{,}54407 - 3 - 0{,}01494 =$$

$$= \bar{1}{,}79147 = \lg 0{,}618686$$

$$\begin{array}{r|l} -\ 79141 \ \ldots & 6186 \\ \hline 6 & 7 \\ \hline 40 & 0{,}85\underline{7} \\ \hline 50 & \end{array}$$

$$y - 1 = 0{,}618686;\quad y = 1{,}618686.$$

Но $y = 1{,}035^t$; слѣдовательно $1{,}035^t = 1{,}618686$.

$$t \cdot \lg 1{,}035 = \lg 1{,}618686;\quad t = \frac{0{,}20916}{0{,}01494} = 14 \text{ лѣтъ}.$$

Срочныя уплаты (учетъ).

§ **848**. Основная задача. **Нѣкто сдѣлалъ долгъ въ C рублей по p сложныхъ процентовъ. Какую постоянную сумму долженъ онъ уплачивать въ концѣ каждаго года, чтобы въ t лѣтъ погасить долгъ вмѣстѣ съ процентами?**

Постоянная сумма, которую надо уплачивать въ концѣ каждаго года для погашенія долга, называется **срочною уплатою**.

Назовемъ искомую срочную уплату черезъ c.

Долгъ въ C руб. въ теченіе t лѣтъ превратится вмѣстѣ съ процентами въ сумму, равную $C(1+r)^t$; эту сумму и надо погасить ежегодными уплатами по c рублей.

Мы уже знаемъ (см. § 347), что если вноситъ въ банкъ въ концѣ каждаго года одну и ту же сумму, то черезъ t лѣтъ эти взносы вмѣстѣ съ наросшими на нихъ процентами составятъ сумму, которая высчитывается по формулѣ (3), а для даннаго случая, когда ежегодный взносъ равенъ c, будетъ равна выраженію $\frac{c}{r}[(1+r)^t-1]$; c должно быть выбрано такъ, чтобы долгъ съ процентами былъ равенъ суммѣ, образовавшейся изъ ежегодныхъ уплатъ, т. е.

$$C(1+r)^t=\frac{c}{r}\left[(1+r)^t-1\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Эта формула (4) называется **формулою срочныхъ уплатъ.**

Изъ формулы (4) имѣемъ:

$$C(1+r)^t \cdot r=c\{(1+r)^t-1\}, \text{ отвуда}$$

срочная уплата $c=\dfrac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$ . . . . (5)

Вычисливъ предварительно при помощи логариѳмовъ выраженіе $(1+r)^t=y$, и вычтя изъ y единицу, получимъ число m, а формула (5) приметъ логариѳмическій видъ:

$$c=\frac{Cry}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Примѣры:

1) Опредѣлить ежегодную срочную уплату, вносимую въ концѣ каждаго года, для погашенія въ 18 лѣтъ 13000 рублей, взятыхъ въ долгъ по $4\frac{1}{2}\%$.

$$c=x;\ C=13000 \text{ руб.};\ t=18 \text{ л.};\ p=4{,}5\%$$

$$y=1{,}045^{18};$$

$$\lg y=18\cdot 0{,}01912=0{,}34416=\lg 2{,}2088$$

$$\begin{array}{r|l} -\ 34400\ .\ . & 2208 \\ \hline 16 & \underline{20} \\ & 0{,}8 \end{array}$$

$$y=2{,}2088$$

$$y-1=1{,}2088=m;\quad x=\frac{13000.0{,}045.y}{m}$$

$$\lg x=\lg 13000+\lg 0{,}045+\lg y-\lg m=$$

$$=4{,}11394+\bar{2}{,}65321+0{,}34416-0{,}08236=$$

$$=3{,}02895=\lg 1068{,}93$$

$$\begin{array}{r|l} -\ 02857\ . & .1068 \\ \hline 38 & \underline{41} \\ \underline{369} & 0{,}92\underline{6} \\ 110 & \\ \underline{82} & \\ 280 & \end{array}$$

$$x=c=\mathbf{1068} \text{ р. } \mathbf{93} \text{ к.}$$

2) Нѣкто для погашенія шестипроцентнаго долга уплачиваетъ въ концѣ каждаго года по 300 рублей. Сколько лѣтъ онъ долженъ еще вносить эту сумму, если долга осталось 14752 рубля?

$$t=x;\ C=14752 \text{ руб.};\ c=3000 \text{ руб.};\ p=6\%.$$

$$C(1+r)^t=\frac{c}{r}\{(1+r)^t-1\};\ Cr(1+r)^t=c(1+r)^t-c;$$

$$Cr(1+r)^t-c(1+r)^t=-c;\ c(1+r)^t-Cr(1+r)^t=c;$$

$$(1+r)^t[c-Cr]=c$$

и наконецъ: $$(1+r)^t=\frac{c}{c-Cr} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Формула (7) служитъ для вычисленія t.

$$1{,}06^x=\frac{3000}{3000-14752\cdot 0{,}06}$$

$$14752.0{,}06=885{,}12;\ 3000-885{,}12=2114{,}88$$

$$1{,}06^x=\ 000:2114{,}88$$

$$x\lg 1{,}06=\lg 3000-\lg 2114{,}88$$

$$x=\frac{\lg 3000-\lg 2114{,}88}{\lg 1{,}06}=\frac{3{,}47712-3{,}32528}{0{,}02531}=6.$$

$t=x=$ **6 лѣтъ.**

О неравенствахъ.

§ **349**. Опредѣленія. 1) **Неравенствомъ называется выраженіе, въ которомъ два неравныхъ количества связаны знакомъ неравенства.**

Напр.: $5>3$; $7-5<3$; $c+d<k-m$.

2) **Неравенства называются неравенствами одинаковаго смысла, если у нихъ одинаковые знаки неравенства.**

Напр.: $a > b$ и $c > d$; $m < n$ и $p < q$.

Неравенства называются неравенствами противоположнаго смысла, если у нихъ различные знаки неравенствъ.

Напр.: $a > b$ и $c < d$; $m < n$ и $p > q$.

§ **350.** Если возьмемъ какое-нибудь опредѣленное число, напр. 6, и станемъ изъ него послѣдовательно вычитать числа:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

то получимъ рядъ соотвѣтствующихъ остатковъ:

$$5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0, -1, -2, -3, -4, -5 \; . \; . \qquad (2)$$

Остатки: 5, 4, 3, 2, 1 и 0 получены ариѳметическимъ пріемомъ, остатки же $-1, -2, -3, -4, -5$ . . . получены пріемомъ алгебраическимъ, на основаніи § 50 ч. I.:

Напр.: $6-7=(+6)-(+7)=(+6)+(-7)=-1,$

$$6-8=(+6)-(+8)=(+6)+(-8)=-2$$

. . . .

. . . .

Рядъ остатковъ (2), какъ видно, составленъ изъ чиселъ положительныхъ и отрицательныхъ, отдѣленныхъ одинъ отъ другого нулемъ.

Такъ какъ положительныя и отрицательныя количества представляютъ числовыя значенія величинъ противоположныхъ, то, вообще говоря, они не могутъ быть сравниваемы; но чтобы обобщить значеніе ариѳметическаго сложенія и вычитанія, а также въ виду еще нѣкоторыхъ иныхъ полезныхъ обобщенiй, сравненiе положительныхъ и отрицательныхъ количествъ считается необходимымъ, а потому:

условились считать всякое положительное число большимъ всякаго отрицательнаго числа.

Напр.: $+5 > -5$; $+3 > -8$; $4 > -7$ и т. п.

§ **351**. Это условiе даетъ право:

во-первыхъ, разсматривать рядъ чиселъ:

$$\ldots 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4 \ldots$$

какъ рядъ чиселъ, непрерывно уменьшающихся на единицу;

во-вторыхъ, всякое положительное число считать большимъ, чѣмъ 0;

въ-третьихъ, всякое отрицательное число считать меньшимъ, чѣмъ 0;

въ-четвертыхъ, изъ положителъныхъ чиселъ считать большимъ то, которое имѣетъ большую абсолютную величину;

въ-пятыхъ, изъ отрицательныхъ чиселъ считать большимъ то, которое имѣетъ меньшую абсолютную величину.

§ **352**. На основанiи предыдущаго § выраженiе

$$a > 0$$

означаетъ, что a есть положительное количество; выраженiе

$$a < 0$$

означаетъ, что a есть отрицательное количество.

§ **353.** Въ ариѳметикѣ, гдѣ дѣйствія выполняются надъ абсолютными числами, существуетъ выводъ: „отъ прибавленія къ данному числу другого числа получается число большее, чѣмъ данное“.

Несомнѣнно, что этотъ выводъ можно обобщить: „всякое число, какъ положительное, такъ и отрицательное, увеличивается, когда къ нему прибавляютъ число положительное.

$$(+5)+(+2)=+7, \text{ но } +7>+5,$$
$$(-5)+(+2)=-3, \text{ но } -3>-5.$$

Подобнымъ же образомъ выводъ ариѳметическій: „при вычитаніи изъ даннаго числа другого числа получается въ результатѣ число меньшее, чѣмъ данное“—можно обобщить такъ:
„всякое число, какъ положительное, такъ и отрицательное, уменьшается, когда изъ него вычитаютъ число положительное“.

$$(+4)-(+2)=(+4)+(-2)=+2, \text{ но } +2<+4,$$
$$(-4)-(+2)=(-4)+(-2)=-6, \text{ но } -6<-4.$$

§ **354.** Теорема I. **Всякая разность, въ которой уменьшаемое больше вычитаемаго, есть величина положительная.**

Дано: $a>b$; требуется доказать: $a-b>0$.

Пусть a и b какія угодно числа, положительныя или отрицательныя; всегда, однако, можно принять, что

$$a=m-p,\ b=m-q,$$

гдѣ m, p и q— числа положительныя, но p и q связаны условіемъ, что

$$q > p;$$

тогда разность $a - b = m - p - (m - q) =$

$$= m - p - m + q = q - p.$$

Но по условію $q > p$, слѣдовательно разность $q - p > 0$, такъ какъ разность положительныхъ чиселъ, большаго безъ меньшаго, есть число положительное, т. е. большее нуля; если же $q - p > 0$, то и $a - b > 0$. Это и требовалось доказать.

Теорема 2. **Всякая разность, въ которой уменьшаемое менѣе вычитаемаго, есть величина отрицательная.**

Дано: $a < b$; требуется доказать $a - b < 0$.

Пусть a и b какія угодно числа, положительныя или отрицательныя; всегда, однако, можно принять, что

$$a = m - p;\ b = m - q,$$

гдѣ m, p и q числа положительныя, но p и q связаны условіемъ, что

$$q < p,$$

тогда разность $a - b = m - p - (m - q) = q - p$; по по условію $q < p$, и такъ какъ оба положительны, то разность $q - p$ представляетъ отрицательное число, т. е. $q - p < 0$; если же $q - p < 0$, то и $a - b < 0$.

Теорема 3. **Если разность двухъ чиселъ есть величина положительная, то уменьшаемое болѣе вычитаемаго.**

Дано: $a - b > 0$; требуется доказать $a > b$.

Несомнѣнно, что a не можетъ быть равнымъ b, такъ такъ тогда ихъ разность должна бы равняться нулю, между тѣмъ какъ по условію она должна быть больше нуля; равнымъ образомъ a не можетъ быть меньше, чѣмъ b, потому что тогда, на основаніи теоремы 2-й, $a - b$ должно бы быть меньше нуля, что также противорѣчитъ условію теоремы; слѣдовательно, если a не можетъ быть ни равно b, ни быть меньшимъ, чѣмъ b, то $a > b$. Это и требовалось доказать.

Теорема 4. **Если разность двухъ чиселъ есть величина отрицательная, то уменьшаемое менѣе вычитаемаго.**

Дано: $a - b < 0$; требуется доказать $a < b$.

Доказательство подобно предыдущему.

Слѣдствіе 1-ое. Неравенство $a > b$ равносильно неравенству $a - b > 0$ и равенству $a - b = k$, гдѣ k есть положительное число.

Слѣдствіе 2-ое. Неравенство $c < d$ равносильно неравенству $c - d < 0$ или равенству $c - d = r$, гдѣ r есть отрицательное число.

Свойства неравенствъ.

§ **355.** Теорема 1. **Если къ обѣимъ частямъ неравенства прибавимъ по-ровну, или отъ обѣихъ частей неравенства отнимемъ по-ровну, то получимъ неравенство одинаковаго съ даннымъ смысла.**

Дано: $a > b$; требуется доказать, что $a \pm m > b \pm m$.

Неравенство $a > b$ равносильно равенству $a - b = k$, гдѣ $k > 0$.

Разность двухъ количествъ не измѣнится, если и къ уменьшаемому и къ вычитаемому прибавимъ одно и то же количество m, а также если отъ уменьшаемаго и вычитаемаго отнимемъ одно и то же количество; слѣдовательно

$$(a \pm m) - (b \pm m) = k.$$

но $k > 0$, слѣдовательно $(\pm m) - (b \pm m) > 0$ и, на основаніи § 354 теоремы 3-ей, $a \pm m > b \pm m$.

Теорема 2. **Если обѣ части неравенства умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же положительное количество, то получимъ неравенство одинаковаго съ даннымъ смысла.**

Дано: 1) $a > b$ и $m > 0$; требуется доказать $am > bm$.

2) $a > b$ и $m > 0$; „ „ $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

Неравенство $a > b$ равносильно равенству $a - b = k$, гдѣ $k > 0$.

Равенство не нарушится, если обѣ части его умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число m.

$$am - bm = km \text{ и } \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{k}{m}.$$

Но $k > 0$ и $m > 0$; слѣдовательно $km > 0$ и $\frac{k}{m} > 0$, а потому $am - bm > 0$ или $am > bm$ и $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} > 0$ или $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

Теорема 3. **Если обѣ части неравенства умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же отрицательное число, то получимъ неравенство противоположнаго смысла съ даннымъ.**

Дано

1) $a<b$ и $m<0$; требуется доказать, что $am>bm$.

2) $a<b$ и $m<0$; „ „ „ $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$.

Неравенство $a<b$ равносильно равенству $a-b=r$, гдѣ $r<0$.

Если обѣ части равенства умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, то равенство не нарушится:

$$am-bm=rm \text{ и } \frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{r}{m}.$$

Но $r<0$ и $m<0$; слѣдовательно $rm>0$ и $\frac{r}{m}>0$,

а потому $am-bm>0$ или $am>bm$ и $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}>0$ или $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$.

§ **356.** Въ буквенныхъ неравенствахъ, подобно уравненіямъ, однѣ буквы имѣютъ значеніе неизвѣстныхъ количествъ и обозначаются x, y, z, t и т. п. (послѣдними буквами латинскаго алфавита), другія имѣютъ значеніе количествъ извѣстныхъ (данныхъ) и обозначаются буквами $a, b, c, d\dots$ (начальными буквами латинскаго алфавита).

Неравенство, подобно уравненію, оказывается вѣрнымъ не при всякомъ произвольномъ значеніи неизвѣстнаго, а только при нѣкоторыхъ значеніяхъ.

Опредѣленіе. **Рѣшить неравенство значитъ опредѣлить, больше или меньше какого числа можно брать значенія для неизвѣстнаго, чтобы неравенство оставалось справедливымъ.**

Неравенство, указывающее, больше или меньше какого числа должно быть неизвѣстное, условились называть **предѣльнымъ неравенствомъ.**

§ **357.** Пользуясь свойствами неравенствъ, можно (какъ дѣлается и въ равенствахъ):

1) переносить въ неравенствахъ члены изъ одной части неравенства въ другую, мѣняя при этомъ знакъ у переносимаго члена на обратный.

Напр.: $3x + 5 > 7 - x$; $3y + x > 7 - 5$.

2) привести всѣ члены неравенства къ общему знаменателю и знаменатель отбросить.

Напр.:
$$\frac{2x}{3} + \frac{1}{2} < \frac{3}{4} - 5x$$
$$\frac{8}{12}x + \frac{6}{12} < \frac{9}{12} - \frac{60}{12}x$$
$$8x + 6 < 9 - 60x.$$

Вообще неравенство можно преобразовывать, какъ и уравненія, съ тою лишь разницей, что при умноженіи или дѣленіи обѣихъ частей неравенства на одно и то же **отрицательное число**, слѣдуетъ также перемѣнять и знакъ неравенства на противоположный.

Отсюда: чтобы рѣшить неравенство первой степени съ одною неизвѣстною, надо:

1) раскрыть скобки и освободить неравенство отъ дробей,

2) перенести всѣ члены неизвѣстные въ одну часть неравенства, а извѣстные въ другую,

3) сдѣлать въ обѣихъ частяхъ приведеніе подобныхъ членовъ,

4) Обѣ части неравенства раздѣлить на коэффиціентъ при неизвѣстномъ.

Примѣръ 1. $2(x - 0{,}4) < 3\frac{1}{2}x + 1{,}7$

$$2x - 0{,}8 < \frac{7x}{2} + 1{,}7$$

Общій знаменатель $= 10$.

$$20x - 8 < 35x + 17$$

$$20x - 35x < 17 + 8$$

$$-15x < 25$$

$$x > -\frac{25}{15} \text{ или } x > -1\frac{2}{3}.$$

Примѣръ 2. $\frac{11a - x}{4a + b} > \frac{a - x}{b - a}$

$$(11a - x)(b - a) > (a - x)(4a + b)$$

$$11ab - bx - 11a^2 + ax > 4a^2 - 4ax + ab - bx$$

$$-bx + ax + 4ax + bx > 4a^2 + ab - 11ab + 11a^2$$

$$5ax > 15a^2 - 10ab$$

$$x > \frac{15a^2 - 10ab}{5a} \text{ или } x > 3a - 2b.$$

§ **358**. Обыкновенно при рѣшеніи неравенствъ значенія для неизвѣстнаго ограничиваютъ условіемъ, чтобы они были цѣлыми числами.

Напр.: Если искомое цѣлое число раздѣлить на 8, и полученное частное умножить на 5, то произведеніе будетъ менѣе учетверенной разности между искомымъ числомъ и 6.

Назвавъ искомое число черезъ x и раздѣливъ его на

8, получаемъ $\frac{x}{8}$; умноживъ частное на 5, получаемъ $\frac{5x}{8}$; разность между искомымъ числомъ и 6, равная $x-6$, будучи учетверена, даетъ число $4(x-6)$. Изъ условія задачи слѣдуетъ, что

$$\frac{5x}{8} < 4(x-6)$$

$$\frac{5x}{8} < 4x-24$$

$$5x < 32x-192$$

$$5x-32x < -192$$

$$-27x < -192$$

$$x > \frac{-192}{-27} \text{ или } x > 7\frac{1}{9}.$$

Но такъ какъ x можетъ быть только цѣлымъ числомъ, то вопросу задачи удовлетворяютъ только цѣлыя числа, начиная съ 8 и большія, т. е. $x=8, 9, 10 \ldots$

§ **359**. Два или нѣсколько неравенствъ, заключающихъ одну и ту же неизвѣстную, составляютъ **совокупность неравенствъ.**

Рѣшеніе совокупностей неравенствъ приводитъ къ нѣкоторымъ предѣльнымъ неравенствамъ или одного смысла, или противоположнаго смысла. Отъ этого, рѣшая совокупность неравенствъ при томъ условіи, чтобы неизвѣстное было только цѣлымъ числомъ, мы получаемъ такія предѣльныя неравенства, которыя для неизвѣстнаго даютъ:

1) неограниченное число рѣшеній

2) ограниченное „ „

3) не даютъ ни одного рѣшенія (въ этомъ случаѣ говорятъ, что предѣльныя неравенства противорѣчатъ другъ другу).

Напр.: Предѣльныя неравенства:

1) $\begin{cases} x > 5 \\ x > 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 7 \\ x < 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 15 \\ x < -7 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -7 \\ x > -3 \end{cases}$

даютъ для x неограниченное число цѣлыхъ рѣшеній.

2) $\begin{cases} x > 20 \\ x < 25 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3 \\ x > -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -12 \\ x < -8 \end{cases}$

даютъ ограниченное число цѣлыхъ рѣшеній.

3) $\begin{cases} x > 15 \\ x < 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -3 \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -7 \\ x < -10 \end{cases}$

не даютъ ни одного рѣшенія.

§ **360.** Рѣшимъ нѣсколько совокупностей неравенствъ при условіи, чтобы x было цѣлое число.

I. $\begin{cases} 6x-3 > x+12 \\ x+4 < 10-2x \end{cases} \left| \begin{matrix} 6x-x > 12+3 \\ x+2x < 10-4 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 5x > 15 \\ 3x < 6 \end{matrix} \left| \begin{matrix} x > 3 \\ x < 2 \end{matrix} \right.$

для x нѣтъ рѣшеній.

II. $\begin{cases} \frac{4}{5}x-12 < -10 \\ 9-\frac{2}{3}x < 14 \end{cases} \left| \begin{matrix} 4x-60 < -50 \\ 27-2x < 42 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 4x < -50+60 \\ -2x < 42-27 \end{matrix}$

$\left| \begin{matrix} 4x < 10 \\ -2x < 15 \end{matrix} \right| \begin{matrix} x < 2\frac{1}{2} \\ x > -7\frac{1}{2} \end{matrix} \Bigg\| x = 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7.$

III. $\left\{\begin{array}{l} 1\frac{3}{5}x>x+1\frac{1}{2} \\ 12x-11>2x+49 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 16x>10x+15 \\ 12x-2x>49+11 \end{array}\right| \begin{array}{l} 16x-10x>15 \\ 10x>60 \end{array}\right|$

$\left|\begin{array}{l} 6x>15 \\ 10x>60 \end{array}\right| \begin{array}{l} x>2\frac{1}{2} \\ x>6 \end{array} \Bigg| \quad x=7,\ 8,\ 9\ .\ .\ .\ .$ до $+\infty$.

Сложеніе и вычитаніе неравенствъ.

§ **361**. **Если сложить по частямъ нѣсколько неравенствъ одинаковаго смысла, то получится неравенство того же смысла.**

Дано: $a>b$; $c>d$; $m>n$; требуется доказать

$$a+c+m>b+d+n.$$

$\left.\begin{array}{l} a>b \\ c>d \\ m>n \end{array}\right|$ равносильны $\left.\begin{array}{l} a-b=k \\ c-d=k' \\ m-n=k'' \end{array}\right\}$ гдѣ k, k' и k'' числа положительныя

По извѣстной аксіомѣ имѣемъ:

$$(a-b)+(c-d)+(m-n)=k+k'+k''$$

или

$$a-b+c-d+m-n=k+k'+k''$$

или

$$(a+c+m)-(b+d+n)=k+k'+k''.$$

Но k, k' и k''—положительны, слѣдовательно $k+k'+k''>0$, а потому $a+c+m>b+d+n$.

Слѣдствіе. Неравенства противоположнаго смысла складывать нельзя, такъ какъ нѣтъ основанія для правильнаго заключенія о результатѣ.

§ **362. Если изъ какого-нибудь неравенства вычесть по частямъ неравенство противоположнаго смысла, то получается неравенство одинаковаго смысла съ первымъ неравенствомъ.**

Дано: $a<b$ и $c>d$; требуется доказать $a-c<b-d$.

$$\left.\begin{array}{l} a<b \\ c>d \end{array}\right| \text{ равносильны } \begin{array}{l} a-b=r \\ c-d=k \end{array} \left| \text{ гдѣ } \begin{array}{l} r<0 \\ k>0 \end{array}\right.$$

По извѣстной аксіомѣ имѣемъ:

$$(a-b)-(c-d)=r-k,$$

или

$$a-b-c+d=r-k,$$

или

$$(a-c)-(b-d)=r-k.$$

Но разность $r-k<0$, потому что отнять положительное число значитъ уменьшить, а число меньшее, чѣмъ отрицательное, можетъ быть только отрицательнымъ, а потому

$$(a-c)-(b-d)<0$$

слѣдовательно $a-c<b-d$.

Слѣдствіе. Вычитать одно изъ другого неравенства одного смысла нельзя, такъ какъ нѣтъ основанія для правильнаго заключенія о результатѣ.

§ **363**. Иногда требуется **доказать справедливость неравенства.**

Въ такомъ случаѣ или преобразовываютъ данное неравенство до тѣхъ поръ, пока не получится несомнѣнно справедливое неравенство, или, взявъ несомнѣнно справедливое неравенство, преобразовываютъ его до тѣхъ поръ, пока не получится требуемое неравенство.

Напр.: Доказать, что среднее ариѳметическое двухъ чиселъ больше средняго геометрическаго тѣхъ же чиселъ.

Требуется доказать, что $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Преобразуемъ испытываемое неравенство:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Если это неравенство справедливо, то справедливо будетъ и неравенство, полученное отъ возвышенія частей неравенства въ квадратъ, т. е. слѣдующее:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{ab}\right)^2$$

или $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}.$

или:
$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} > ab$$

или:
$$a^{\text{'}} + 2ab + b^2 > 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4ab > 0; \; a^2 - 2ab + b > 0$$

$$(a - b)^2 > 0$$

Какой бы знакъ ни имѣла разность чиселъ a и b, квадратъ этой разности будетъ всегда числомъ положительнымъ, т. е. послѣднее неравенство несомнѣнное, а потому заключаемъ, что справедливо и то, отъ преобразованія котораго оно явилось.

Неопредѣленное уравненіе.

§ **304. Если въ одномъ уравненіи заключаются два или болѣе неизвѣстныхъ, то оно называется неопредѣленнымъ.** (См. § 172, ч. II).

Напр. $3x+5y=29$; $2x-y+3z=105$.

Не ограничивая значеній неизвѣстныхъ никакими условіями, мы всегда можемъ для даннаго уравненія подобрать такія группы значеній, которыя будутъ служить корнями для него. Напр. для уравненія съ двумя неизвѣстными беремъ для одного изъ неизвѣстныхъ совершенно произвольное значеніе и, подставивъ его въ уравненіе, найдемъ соотвѣтствующее значеніе для другого неизвѣстнаго;—это составитъ одну пару рѣшеній. Такъ для уравненія $3x+5y=29$ пусть $x=3$; тогда $9+5y=29$; $5y=20$ и $y=4$;

$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ . . . . одна пара рѣшеній.

Очевидно, такихъ паръ рѣшеній можно найти сколько угодно.

§ **305.** Обыкновенно рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія ограничиваютъ числами цѣлыми и положительными.

Теорема 1. **Если коэффиціенты при неизвѣстныхъ имѣютъ общаго множителя, котораго извѣстный членъ не имѣетъ, то неопредѣленное уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній.**

Пусть въ уравненіи $ax+by=c$

коэффиціенты a и b имѣютъ общаго множителя m, на который c не дѣлится на-цѣло, тогда

$$a=ma'$$

$$b=mb',$$

гдѣ a' и b' числа цѣлыя, и уравненіе принимаетъ видъ

$$ma'x+mb'y=c$$

или
$$a'x+b'y=\frac{c}{m}\cdot$$

Но послѣднее равенство ни при какихъ цѣлыхъ значеніяхъ x и y не будетъ справедливымъ, такъ какъ лѣвая его часть при всякихъ цѣлыхъ значеніяхъ для x и y будетъ представлять всегда число цѣлое, а правая часть есть число дробное.

Слѣдствіе. Если коэффиціенты при неизвѣстныхъ въ неопредѣленномъ уравненіи кратны, то уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній.

Примѣчаніе. Если въ неопредѣленномъ уравненіи коэффиціенты при неизвѣстныхъ имѣютъ общаго множителя, который дѣлитъ также безъ остатка и извѣстный членъ c, то на этотъ общій множитель слѣдуетъ сократить данное уравненіе.

Теорема 2. **Если въ неопредѣленномъ уравненіи коэффиціенты при неизвѣстныхъ суть числа взаимно-простыя, то это уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ одну пару цѣлыхъ рѣшеній.**

Положимъ, намъ дано окончательно сокращенное уравненіе $ax\pm by=c$, гдѣ a и b суть цѣлыя, положительныя и взаимно-простыя числа. Рѣшивъ это уравненіе относительно y

$$y = \pm \frac{c - ax}{b}$$

и подставивъ въ полученную формулу на мѣсто x послѣдовательно цѣлыя числа 0, 1, 2 . . . $(b - 1)$, мы получимъ такой рядъ b значеній для y:

$$y_0 = \frac{c - a \cdot 0}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} \; . \; . \; . \; . \; . \; (0)$$

$$y_1 = \frac{c - a \cdot 1}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

. . . .

$$y_n = \frac{c - a \cdot n}{b} = q_n + \frac{r_n}{b} \; . \; . \; . \; . \; . \; (n)$$

. . . . .

$$y_m = \frac{c - a \cdot m}{b} = q_m + \frac{r_m}{b} \; . \; . \; . \; (m)$$

. . . .

$$y_{(b-1)} = \frac{c - a \cdot (b - 1)}{b} = q_{(b-1)} + \frac{r_{(b-1)}}{b} \; . . \; (b-1)$$

Числа праваго столбца представляютъ результатъ исключенія цѣлаго числа изъ дробей предшествующаго столбца, при чемъ q_0, q_1 . . . . $q_{(b-1)}$ обозначаютъ цѣлыя частныя отъ дѣленія числителей на знаменателя, а r_0, r, . . . r_{b-1} остатки, которые всѣ, конечно, меньше b.

Если въ какомъ-нибудь изъ значеній y дробная часть окажется отрицательной, то, отнявъ положительную единицу отъ цѣлой части и прибавивъ къ дробной, мы всегда можемъ представить это значеніе y въ видѣ суммы цѣлаго числа $+$ нѣкоторая положительная правильная дробь.

Напр.: $y = -\frac{7}{3} = -2 - \frac{1}{3} = (-2-1) + 1 - \frac{1}{3} =$

$$= -3 + \frac{2}{3}$$

или: $y = -\frac{1}{3} = 0 - \frac{1}{3} = (0-1) + 1 - \frac{1}{3} =$

$$= -1 + \frac{2}{3}$$

Благодаря послѣднему обстоятельству, не нарушая общности теоремы, мы можемъ считать всѣ правильныя дроби $\frac{r_0}{b}, \frac{r_1}{b}, \frac{r_2}{b} \dots \frac{r_{(b-1)}}{b}$ положительными. Докажемъ, что числители ихъ всѣ различны. Допустимъ обратное: положимъ, числитель r_n равенъ числителю r_m. Тогда, вычитая почленно изъ равенства (n) другое (m), придемъ къ такому невозможному равенству:

$$\frac{c-an}{b} - \frac{c-am}{b} = q_n + \frac{r_n}{b} - q_m - \frac{r_m}{b}$$

$$\frac{c-an-c+am}{b} = q_n - q_m + \frac{(r_n - r_m)}{b}$$

$\frac{am-an}{b} = q_n - q_m + \frac{0}{b}$ (ибо $r_n = r_m$, по допущенію)

$$\frac{a(m-n)}{b} = q_n - q_m$$

Число a не можетъ дѣлиться на b, такъ какъ это числа взаимно-простыя, по условію теоремы; затѣмъ, разъ $m < b$ и $n < b$, то и разность ихъ $(m-n) < b$, а слѣдовательно $(m-n)$ не раздѣлится на b. Такимъ образомъ лѣвая часть только что выведеннаго равенства должна оставаться дробью и равняться разности цѣлыхъ чиселъ q_n и q_m, что невозможно; значитъ числители $r_0, r, r_n, \ldots r_m \ldots\ldots r_{b-1}$ всѣ различны и среди нихъ нѣтъ ни одной пары одинаковыхъ. Но изъ b различныхъ положительныхъ чиселъ меньшихъ чѣмъ b, очевидно, одно должно равняться 0, слѣдовательно который-нибудь изъ числителей $r_0, r_1, r_2, \ldots\ldots r_n \ldots\ldots r_{b-1}$ долженъ равняться 0.

Положимъ $r_n=0$; тогда при x равномъ n мы получимъ для y значеніе равное q_n:

$$y=\frac{c-an}{b}=q_n+\frac{r_n}{b}=q_n+\frac{0}{b}=q_n,$$ гдѣ q_n цѣлое число.

Такимъ образомъ существуетъ пара цѣлыхъ чиселъ n и q_n, которыя удовлетворяютъ данному неопредѣленному уравненію. Это и требовалось доказать.

§ **366**. Покажемъ пріемъ рѣшенія неопредѣленнаго уравненія въ цѣлыхъ числахъ. Изъ уравненія

$$3x+5y=29 \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

опредѣлимъ то изъ неизвѣстныхъ, коэффиціентъ котораго меньше, черезъ другое неизвѣстное и извѣстный членъ:

$$x=\frac{29-5y}{3}.$$

Такъ какъ дробь $\frac{29-5y}{3}$ неправильная, то отдѣлимъ въ ней цѣлую часть отъ правильной дроби; для этого дѣлимъ числитель $29-5y$ на 3, получаемъ цѣлое частное $9-y$ и остатокъ $2-2y$; слѣдовательно

$$x=\frac{29-5y}{3}=9-y+\frac{2-2y}{3}.$$

Чтобы имѣть для x и y значенія цѣлыя, необходимо и достаточно выбрать для y такія цѣлыя значенія, чтобы $2-2y$ дѣлилось на-цѣло на 3, тогда и x будетъ цѣлымъ; но очевидно, что для выполненія этого условія нельзя неизвѣстному y давать значенія произвольныя, а лишь такія, при которыхъ выраженіе $\frac{2-2y}{3}$ равнялось бы цѣлому числу. Пусть это цѣлое число будетъ t; тогда,

во-первыхъ, для x получится выраженіе

$$x=9-y+t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

и, во-вторыхъ, для y условіе выбора его такимъ, чтобы:

$$\frac{2-2y}{3}=t$$

или $$2-2y=3t \qquad (\beta)$$

или $$2y=2-3t$$

и $$y=\frac{2-3t}{2}.$$

Такъ какъ дробь $\frac{2-3t}{2}$ неправильная, то исключимъ изъ нея цѣлую часть, получимъ

$$y=1-t-\frac{t}{2}.$$

Снова разсуждаемъ такъ: чтобы y было числомъ цѣлымъ, число t не можетъ быть совершенно произвольнымъ; оно, въ свою очередь, должно быть выбрано такъ, чтобы $\frac{t}{2}$ было также цѣлымъ; назовемъ новое цѣлое число черезъ t'; тогда, во-первыхъ, для y получимъ:

$$y = 1 - t - t' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и, во-вторыхъ, для t условіе выбора его такимъ, чтобы $\frac{t}{2} = t'$, или

$$t = 2t' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Такъ какъ при всякомъ цѣломъ t' выраженіе $2t'$ будетъ всегда цѣлымъ, то слѣдовательно и t, равное $2t'$, будетъ всегда цѣлымъ; если же t' и t будутъ цѣлыми, то и y будетъ цѣлымъ, такъ какъ равняется цѣлому многочлену $1 - t - t'$ (см. формулу 2); если же t', t и y суть цѣлыя числа, то и x будетъ цѣлымъ числомъ, такъ какъ равняется цѣлому многочлену $9 - y + t$ (см. формулу 1).

Итакъ, чтобы x и y были числами цѣлыми, совершенно произвольнымъ цѣлымъ числомъ можно брать только лишь t'; а потому выразимъ x и y черезъ совершенно произвольное цѣлое число t'. Для этого въ формулѣ (2) подставимъ на мѣсто t его значеніе изъ формулы (3); получимъ:

$$y = 1 - t - t' = 1 - (2t') - t' = 1 - 3t'.$$

Подставивъ въ формулѣ (1) на мѣсто y и t ихъ значенія черезъ произвольное цѣлое t', получимъ:

$$x = 9 - y + t = 9 - (1 - 3t') + (2t') =$$

$$= 9 - 1 + 3t' + 2t' = 8 + 5t'.$$

Формулы:
$$\begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = 1 - 3t' \end{cases}, \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

называются **формулами цѣлыхъ рѣшеній неопредѣленнаго уравненія.**

Давая t' различныя произвольныя цѣлыя значенія, получимъ пары рѣшеній для x и y.

Обыкновенно эти рѣшенія пишутъ въ видѣ таблицы:

t'	....	-2	-1	0	1	2	....	10	....
x	....	-2	3	8	13	18	....	58	....
y	....	7	4	1	-2	-5	....	-29	....

Примѣчаніе. Разсматривая формулы цѣлыхъ рѣшеній x и y (4), видимъ, что значенія ихъ представляютъ ряды ариѳметическихъ прогрессій.

Рѣшеніе уравненія (α) $3x + 29y$ мы свели къ рѣшенію уравненія (β) $2 - 2y = 3t$, а рѣшеніе послѣдняго къ рѣшенію $t = 2t'$.

Одинъ коэффиціентъ второго уравненія 3 равенъ меньшему коэффиціенту перваго уравненія, а другой 2 остатку отъ дѣленія бо́льшаго коэффиціента перваго уравненія на меньшій. Точно также одинъ коэффиціентъ третьяго уравненія 2 равенъ меньшему коэффиціенту второго уравненія, а другой остатку отъ дѣленія бо́льшаго коэффиціента второго уравненія на меньшій.

Однимъ словомъ, примѣняя нашъ способъ рѣшенія къ уравненію $ax + by = c$, при $a > b$, мы пришли бы къ послѣдовательному рѣшенію уравненій съ коэффиціентами

1) a и b,
2) b и r_1 (остатокъ отъ дѣленія a на b),
3) r_1 и r_2 („ „ „ b „ r_1),
4) r_2 и r_3 („ „ „ r_1 „ r_2),
5) r_3 и r_4 („ „ „ r_2 „ r_3) и т. д.

Остатки r_1, r_2, r_3 .... суть какъ разъ тѣ, которые получаются при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя a и b по способу послѣдовательнаго дѣленія изъ таблицы:

Частное		q	q_1	q_2	
Дѣлимое	a	b	r_1	r_2	r_3
Частное произв. .	$-bq$	$-r_1q_1$	$-r_2q_2$		
Остатокъ	r_1	r_2	r_3		

Такъ какъ a и b числа взаимно-простыя, то ихъ общій наибольшій дѣлитель равенъ 1; слѣдовательно, послѣдній изъ остатковъ таблицы, который и служитъ общимъ дѣлителемъ, долженъ равняться 1. Если $r_4=1$, то вопросъ сводится къ рѣшенію уравненія (5). Разъ одинъ изъ коэффиціентовъ этого уравненія равенъ 1, то оно рѣшается непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, если имѣемъ уравненіе $x+3y=5$, то сразу находимъ формулу цѣлыхъ значеній для x:

$$x=5-3y.$$

Такимъ образомъ при a и b взаимно-простыхъ мы, поступая по указанному правилу, всегда въ состояніи найти формулы цѣлыхъ значеній неопредѣленнаго уравненія:

$$ax+by=c.$$

§ 368. Если отгадкою, или какимъ-нибудь инымъ способомъ *), найдена пара цѣлыхъ рѣшеній для x и y, то формулы цѣлыхъ рѣшеній x и y могутъ быть составлены, помимо общаго пріема, изложеннаго въ предыдущемъ параграфѣ, на основаніи слѣдующей теоремы—

Теорема 3. **Если извѣстна пара рѣшеній неопредѣленнаго уравненія $ax+by=c$, то всѣ цѣлыя рѣшенія для x и y заключаются въ слѣдующихъ формулахъ:**

$$\left\{\begin{array}{l} x=m\pm bt \\ y=n\mp at \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

гдѣ m и n представляютъ числа первой пары цѣлыхъ рѣшеній, t — произвольное цѣлое число.

Эти формулы читаются такъ:

x равняется своему первому значенію $(m)+$ произвольное цѣлое число t, умноженное на коэффиціентъ при y **съ тѣмъ же** (какъ въ уравненіи), **или съ обратнымъ знакомъ**; y равняется своему первому значенію $(n)+$ произвольное цѣлое число t, умноженное на коэффиціентъ при x **съ обратнымъ** (чѣмъ въ уравненіи), **или съ тѣмъ же знакомъ**, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} x=m+t(\pm b) \\ y=n+t(\mp a) \end{array}\right\}, \text{ откуда } \begin{array}{l} x=m\pm bt \\ y=n\mp at. \end{array}$$

Доказательство. Если m и n удовлетворяютъ уравненію, то подставивъ ихъ на мѣсто x и y въ уравненіе и подписавъ подъ нимъ, получимъ:

$$ax+by=c$$
$$am+bn=c$$

---

*) Способъ нахожденія пары цѣлыхъ рѣшеній будетъ указанъ далѣе, въ § 421.

Вычтя по частямъ второе равенство изъ перваго, получимъ:

$$ax - am + by - bn = 0$$

$$ax = am - b(y - n)$$

$$x = m - \frac{b(y - n)}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Такъ какъ b не дѣлится на-цѣло на a (теорема 1), то, чтобы x было числомъ цѣлымъ, необходимо и достаточно, чтобы $y - n$ при дѣленіи на a равнялось каждый разъ цѣлому t, т. е. чтобы

$$\frac{y - n}{a} = t$$

или:

$$y - n = at$$

и а тогда

$$\left.\begin{aligned} y &= n + at \\ x &= m - bt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Если въ формулѣ (α) вынесемъ за скобки минусъ въ множителѣ $(y - n)$, то получимъ:

$$x = m + \frac{b(n - y)}{a} \quad \ldots\ldots (\beta)$$

Чтобы x было цѣлымъ числомъ, надо y выбирать такъ, чтобы $n - y$ при дѣленіи на a равнялось каждый разъ цѣлому числу t, т. е. чтобы

$$\frac{n - y}{a} = t$$

или:

$$n - y = at$$

или: $y = n - at$

но тогда $x = m + bt$

$$\left.\begin{aligned} y &= n - at \\ x &= m + bt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Соединивъ формуы (6) и (7), получимъ (5)

$$\left.\begin{aligned} x&=m\pm bt \\ y&=n\mp at \end{aligned}\right\}$$

Примѣръ 1. Уравненіе $4x+7y=41$
удовлетворяются парою: $x=5$, $y=3$,

а потому $\left\{\begin{aligned} x&=5+7t \\ y&=3-4t \end{aligned}\right.$ или $\left\{\begin{aligned} x&=5-7t \\ y&=3+4t \end{aligned}\right.$

Примѣръ 2. Уравненіе $11x-8y=87$
удовлетворяется парою: $x=5$, $y=-2$,

а потому $\left\{\begin{aligned} x&=5-8t \\ y&=-2-11t \end{aligned}\right.$ или $\left\{\begin{aligned} x&=5+8t \\ y&=-2+11t. \end{aligned}\right.$

§ **369**. Весьма часто рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія ограничиваютъ не только условіемъ, чтобы значенія x и y были цѣлыми и положительными.

Въ такомъ случаѣ, найдя формулы цѣлыхъ рѣшеній для x и y, опредѣляютъ, при какихъ цѣлыхъ значеніяхъ t значенія x и y будутъ положительными.

Разсуждаютъ такъ: чтобы x и y были положительными числами, t не можетъ быть произвольнымъ, а должно быть выбрано такъ, чтобы выраженіе для x и y черезъ произвольное цѣлое число t были числами положительными, или бо́льшими нуля, т. е. чтобы

$$m\pm bt>0$$

$$n\mp at>0.$$

Предѣльныя неравенства для t укажутъ, при какихъ значеніяхъ **цѣлыхъ для** t, значенія для x и y будутъ **не только цѣлыми, но и положительными.**

Примѣръ 1. $5x + 18y = 71$

$$x = \frac{71-18y}{5} = 14 - 3y + \left(\frac{1-3y}{5}\right)^{=t} = \underline{14 - 3y} \, \underline{+ t}.$$

$$\frac{1-3y}{5} = t;\ 1 - 3y = 5t;\ 3y = 1 - 5t;$$

$$y = \frac{1-5t}{3} = -t + \left(\frac{1-2t}{3}\right)^{=t'} = \underline{-t + t''}$$

$$\frac{1-2t}{3} = t';\ 1 - 2t = 3t';\ 2t = 1 - 3t';$$

$$t = \frac{1-3t'}{2} = -t' + \left(\frac{1-t'}{2}\right)^{=t''} = \underline{-t' + t''}$$

$$\frac{1-t'}{2} = t'';\ +1 - t' = 2t'';\ t' = \underline{1 - 2t''}$$

Совершенно произвольнымъ цѣлымъ числомъ можно брать t'', а потому выразимъ x и y черезъ t''.

$$t' = 1 - 2t''$$

$$t = -t' + t'' = -(1 - 2t'') + t'' = -1 + 2t'' + t'' = \underline{-1 + 3t''}.$$

$$y = -t + t' = -(-1 + 3t'') + (1 + 2t'') =$$

$$= 1 - 3t'' + 1 - 2t'' = \underline{2 - 5t''}$$

$$x = 14 - 3y + t = 14 - 3(2 - 5t'') + (-1 + 3t') =$$

$$= 14 - 6 + 15t'' - 1 + 3t'' = \underline{+7 + 18t''}$$

Итакъ $\begin{cases} x = 7 + 18t'' \\ y = 2 - 5t''. \end{cases}$

Чтобы $x > 0$ и $y > 0$,

надо, чтобы $\left\{\begin{array}{l|l|l|l} 7+18t'' > 0 & 18t'' > -7 & t'' > -\frac{7}{18} & \\ 2-5t'' > 0 & -5t'' > -2 & t'' < \frac{2}{5} & t''=0 \end{array}\right.$

Предѣльныя неравенства даютъ для t'' только одно цѣлое значенiе 0, при которомъ

$$x=7;\ y=2. \text{ Повѣрка: } 35+36=71.$$

§ **370.** Нахожденiе формулъ цѣлыхъ рѣшенiй можно ускорить, если въ дробныхъ выраженiяхъ, приравнимаемыхъ произвольнымъ цѣлымъ числамъ t, t', t''.... выносить за скобки изъ числителя общiй множитель, а также дѣлать и другiя преобразованiя, **уменьшающiя коэффицiентъ при буквѣ.**

Примѣръ 1. $13x-29y=136$

$$x=\frac{136+29}{13}=10+2y+\frac{6+3y}{13}.$$

Выносимъ въ числителѣ $(6x+3y)$ общiй множитель 3 за скобку *), тогда $x=10+2y+\frac{3(2+y)}{13}$

Для того чтобы x было числомъ цѣлымъ при y цѣломъ

---

*) Общiй множитель, выносимый за скобку, будетъ всегда взаимно-простымъ съ знаменателемъ. Иначе оказалось бы, что меньшiй коэффицiентъ, служащiй знаменателемъ, и остатокъ отъ дѣленiя на него бо́льшаго коэффицiента имѣютъ общаго дѣлителя; но въ такомъ случаѣ на этого дѣлителя долженъ былъ бы раздѣлиться, по извѣстной теоремѣ, и бо́льшiй коэффицiентъ, чего быть не можетъ, ибо коэффицiенты предполагаются взаимно-простыми.

необходимо и достаточно, чтобы $\frac{2+y}{13}$ было цѣлымъ числомъ, потому что 3 и 13 числа взаимно простыя.

$$x=10+2y+3t,$$

принимая $\frac{2+y}{13}=t$; тогда $2+y=13t$ и $y=13t-2$.

$$x=10+2(13t-2)+3t=10+26t-4+3t=6+29t.$$

$$\left.\begin{array}{l|l|l}x=6+29t>0 & 29t>-6 & t>-\frac{6}{29}\\ y=13t-2>0 & 13t>2 & t>\frac{2}{13}\end{array}\right\| \quad t=1,\ 2,\ 3\ldots.\ \text{до}+\infty$$

t	1	2	3	. . . . . .
x	35	64	93	. . . .
y	11	24	37	. . . .

Примѣръ 2. $11x+19y=908$.

$$x=\frac{908-19y}{11}=82-2y+\frac{6+3y}{11}$$

Замѣтивъ, что если при дѣленіи $(-19y)$ на 11 въ частномъ возьмемъ $(-y)$, то въ остаткѣ получимъ $(-8y)$, а если въ частномъ возьмемъ $(-2y)$, то въ остаткѣ получимъ $(+3y)$, выбираемъ второй способъ, а потому

$$x=\frac{908-19y}{11}=82-2y+\frac{6+3y}{11}=82-2y+3\left(\frac{2+y}{11}\right)^{=t}=$$

$$=\underline{82-2y+3t}$$

$$\frac{2+y}{11}=t;\ \ 2+y=11t;\ \ y=\underline{11t-2.}$$

$$x = 82 - 2(11t - 2) + 3t = 82 - 22t + 4 + 3t;$$

$$\begin{array}{l|c|l|l|}
x = 86 - 19t > 0 & -19t > -86 & t < \frac{86}{19} & t < 4\frac{10}{19} \\
y = 11t - 2 > 0 & 11t > 2 & t > \frac{2}{11} & t > \frac{2}{11}
\end{array}$$

$$t = 1,\ 2,\ 3 \text{ и } 4.$$

t	1	2	3	4
x	67	48	29	10
y	9	20	31	42

Повѣрка уравненія:

1) $11 \cdot 67 + 19 \cdot 9 = 737 + 171 = 908.$
2) $11 \cdot 48 + 19 \cdot 20 = 528 + 380 = 908.$
3) $11 \cdot 29 + 19 \cdot 31 = 319 + 589 = 908.$
4) $11 \cdot 10 + 19 \cdot 42 = 110 + 798 = 908.$

§ **371.** Теорема 4. **Если коэффиціенты при неизвѣстныхъ въ неопредѣленномъ уравненіи, не имѣя общаго множителя, имѣютъ знаки одинаковые, то уравненіе имѣетъ ограниченное число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній (въ частномъ случаѣ ни одного), если же имѣютъ знаки разные, то уравненіе имѣетъ неограниченное число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній.**

Доказательство. Для уравненія

$$ax + by = c$$

формулы цѣлыхъ рѣшеній: $\begin{cases} x = m + bt \\ y = n - at \end{cases}$ или $\begin{cases} x = m - bt \\ y = n + at. \end{cases}$

Та и другая группы формулъ даютъ для t предѣльныя неравенства противоположнаго смысла, а именно:

$$\begin{cases} t > -\frac{m}{b} \\ t < \frac{n}{a} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} t < \frac{m}{b} \\ t > -\frac{n}{a}, \end{cases}$$

а такія неравенства, ограничивая t съ двухъ сторонъ, позволяютъ взять **для** t **ограниченное число цѣлыхъ значеній,** отъ чего **для** x **и** y получается также **ограниченное число рѣшеній цѣлыхъ и положительныхъ.**

Для уравненія

$$ax - by = c$$

формулы цѣлыхъ рѣшеній: $\begin{cases} x = m + bt \\ y = n + at \end{cases}$ или $\begin{cases} x = m - bt \\ y = n - at. \end{cases}$

Та и другая группы формулъ даютъ для t предѣльныя неравенства одного смысла, а именно:

$$\begin{cases} t > -\frac{m}{b} \\ t > -\frac{n}{a} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} t < \frac{m}{b} \\ t < \frac{n}{a}, \end{cases}$$

а такія неравенства, ограничивая t только съ одной стороны, позволяютъ брать **для** t неограниченное число **цѣлыхъ значеній,** отъ чего **для** x **и** y получается также **неограниченное число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній.**

Рѣшеніе системы неопредѣленныхъ уравненій.

§ **372.** $\begin{cases} 4x - 3y + 5z = 54 \\ 5x + 4y - 3z = 46 \end{cases} \Bigg| \ldots x = \frac{54 + 3y - 5z}{4}$

$$5\left(\frac{54 + 3y - 5z}{4}\right) + 4y - 3z = 46;$$

$$270 + 15y - 25z + 16y - 12z = 184; \quad 31y - 37z = -86.$$

$$y = \frac{-86+37z}{31} = -2+z+6\left(\frac{z-4}{31}\right)^{=t} = \underline{-2+z+6t}$$

$$\frac{z-4}{31}=t;\ z-4=31t;\ \underline{z=4+31t}.$$

$$y=-2+z+6t=-2+4+31t+6t=\underline{2+37t}.$$

$$x=\frac{54+3y-5z}{4}=\frac{54+3(2+37t)-5(4+31t)}{4}=$$

$$=\frac{54+6+111t-20-155t}{4}=\frac{40-44t}{4}=\underline{10-11t}.$$

Итакъ:

$$\left.\begin{array}{l} x=10-11t>0 \\ y=\ \ 2+37t>0 \\ z=\ \ 4+31t>0 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} t<\frac{10}{11} \\ t>-\frac{2}{37} \\ t>-\frac{4}{31} \end{array}\right\| \ t=0.$$

$$t=0;\ x=10;\ y=2;\ z=4.$$

Повѣрка уравненій: 1) $40-6+20=54;\ 54=54.$

2) $50+8-12=46;\ 46=46.$

Изслѣдованіе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

§ **373.** При составленіи уравненія изъ условій задачи можетъ получиться или уравненіе съ числовыми (ариѳметическими) коэффиціентами, если данная задача представляла частный случай, или уравненіе съ буквенными (алгебраическими) коэффиціентами, если задача представляла случай общій, т. е. данныя величины задачи были выражены общими или алгебраическими числами.

Въ первомъ случаѣ рѣшеніемъ или корнемъ уравненія является ариѳметическое (опредѣленное) число, во второмъ случаѣ рѣшеніемъ является буквенное выраженіе, которое можетъ имѣть различныя частныя значенія при различныхъ соотношеніяхъ входящихъ въ него буквъ.

Опредѣленіе. **Изслѣдовать буквенное уравненіе и вопросъ, для котораго оно было составлено, значитъ опредѣлить, при какихъ соотношеніяхъ входящихъ въ него буквенныхъ количествъ уравненіе удовлетворяется и вопросъ возможенъ, при какихъ соотношеніяхъ—уравненіе не удовлетворяется и вопросъ невозможенъ, а также выяснить, не представляютъ ли уравненіе и вопросъ какихъ-либо особенностей.**

§ **374**. Общій видъ уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ

$$ax + b = a_1x + b_1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Найдемъ его корень или рѣшеніе:

$$ax - a_1x = b_1 - b$$

$$(a - a_1)x = b_1 - b$$

$$x = \frac{b_1 - b}{a - a_1} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Очевидно, при различныхъ соотношеніяхъ буквъ b_1, b, a и a_1 значенія x будутъ различны.

Значенія x, или рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ могутъ быть: 1) положительными, 2) отрицательными, 3) нулевыми, 4) безконечными и 5) неопредѣленными.

Разсмотримъ, при какихъ условіяхъ бываютъ эти рѣшенія и какія у нихъ свойства.

I. Рѣшеніе положительное.

§ **375. Условія.** Рѣшеніе положительное или $x > 0$ бываетъ при двухъ условіяхъ:

когда 1) $b_1 > b$ и $a > a_1$

2) $b_1 < b$ и $a < a_1$.

Въ самомъ дѣлѣ, при этихъ условіяхъ числитель и знаменатель выраженія (2) одного знака, а потому вся дробь, т. е. значеніе x положительно.

Свойства. Рѣшеніе положительное всегда **удовлетворяетъ уравненію**, такъ какъ всегда обращаетъ его въ тождество.

Въ отношеніи же вопроса, т. е. задачи, для которой уравненіе составлено, положительное рѣшеніе вообще **показываетъ возможность его.**

Исключеніе составляютъ тѣ случаи, когда при составленіи уравненія не брали въ расчетъ тѣхъ условій, которымъ неизвѣстное по своему существу должно подчиняться, а потому и въ условіяхъ задачи не упоминались.

Напр.: **Задача 1.** Опредѣлить такое двузначное число, сумма цифръ котораго равна 17, а цифра единицъ на 3 менѣе утроенной цифры десятковъ.

Пусть цифра единицъ будетъ x; тогда, по первому условію задачи, цифру десятковъ надо считать равною $17 - x$; а по второму условію составляемъ уравненіе

$$x = 3(17 - x) - 3.$$

Рѣшимъ это уравненіе:

$$x = 51 - 3x - 3$$

$$x + 3x = 51 - 3$$

$$4x = 48$$

$$x = \underline{12}.$$

Но x означаетъ цифру единицъ, которая не можетъ быть болѣе 9, слѣдовательно $x = 12$ показываетъ невозможность задачи, такъ какъ при составленіи условій ея было упущено существенное условіе, что цифра не можетъ быть болѣе 9.

Если подставить 12 на мѣсто x въ уравненіе, то оно обратится въ тождество:

$$12 = 3(17 - 12) - 3;\ 12 = 3 \cdot 5 - 3;\ 12 = 12.$$

Очевидно также, что положительное рѣшеніе, будучи дробнымъ числомъ, также покажетъ невозможность вопроса, если искомая величина по существу можетъ выражаться только числомъ цѣлымъ.

II. Отрицательное рѣшеніе.

§ **376. Условія.** Рѣшеніе отрицательное или $x < 0$ бываетъ при двухъ условіяхъ:

когда 1) $b_1 > b$ и $a < a_1$

2) $b_1 < b$ и $a > a_1$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ обоихъ случаяхъ у числителя и знаменателя выраженія (2) разные знаки, слѣдовательно дробь, или значеніе x, отрицательна.

Свойства. Отрицательное рѣшеніе всегда **удовлетворяетъ уравненію**, такъ какъ всегда обращаетъ его въ тождество.

Въ отношеніи вопроса (задачи) отрицательное рѣшеніе показываетъ вообще **невозможность его.**

Исключеніе (т. е. возможность вопроса) представляютъ тѣ случаи, когда для неизвѣстнаго существуетъ противоположная величина. Въ этихъ случаяхъ отрицательное рѣшеніе **даетъ какъ бы косвенный отвѣтъ на** вопросъ задачи, показывая съ одной стороны, что на вопросъ задачи можетъ отвѣчать нѣкоторое значеніе величины противоположной, а съ другой стороны, что, если при данныхъ условіяхъ неизвѣстное было бы замѣнено величиною противоположною, то на вопросъ задачи отвѣтъ былъ бы прямой, т. е. выраженный положительнымъ числомъ.

Задача. Продано 15 фунтовъ муки двухъ сортовъ за 1 р. 70 к. Сколько фунтовъ каждаго сорта муки было продано, если высшій сортъ продавали по 10 коп., а низшій по 6 коп.?

Пусть низшаго сорта было продано x фунтовъ, тогда высшаго сорта $15-x$ фунтовъ; весь высшій сортъ проданъ за $10(15-x)$ коп., весь низшій сортъ за $6x$ коп., все же продано за $10(15-x)+6x$ коп., что̀, по условію задачи, должно равняться 170 коп. Отсюда уравненіе:

$$10(15-x)+6x=170.$$

Рѣшеніе.

$$150-10x+6x=170$$

$$-10x+6x=170-150$$

$$-4x=20$$

$$x=-5.$$

Но x, означая количество проданной муки, не можетъ быть числомъ отрицательнымъ, слѣдовательно отрицательное рѣшеніе показываетъ, что при данныхъ условіяхъ вопросъ невозможенъ.

Подстановка —5 на мѣсто x въ уравненіе показываетъ, что отрицательное рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію:

$$10[15-(-5)]+6.(-5)=170;\ \ 10.20-30=170.$$

Задача. Брату 20 лѣтъ, сестрѣ 10. Черезъ сколько лѣтъ братъ будетъ старше сестры въ 3 раза.

Допустимъ, что братъ будетъ старше сестры черезъ x лѣтъ; тогда брату будетъ $20+x$ лѣтъ, а сестрѣ $10+x$ лѣтъ. x должно быть такимъ, чтобы лѣта брата $(20+x)$ равнялись утроенному числу лѣтъ сестры, т. е. $3(10+x)$; слѣдовательно уравненіе будетъ:

$$20+x=3(10+x).$$

Рѣшеніе.

$$20+x=30+3x$$
$$x-3x=30-20$$
$$-2x=10$$
$$x=-\underline{5}.$$

Итакъ, на вопросъ: черезъ сколько лѣтъ.....? получили въ отвѣтъ: черезъ (—5) лѣтъ.

Очевидно, отрицательное рѣшеніе въ данномъ случаѣ не обнаруживаетъ полной невозможности вопроса, такъ какъ время можно считать положительнымъ, если оно въ отношеніи настоящаго момента является будущимъ, и считать его отрицательнымъ, если оно является въ отношеніи настоящаго момента прошедшимъ. Поэтому на вопросъ: черезъ сколько лѣтъ совершится событіе?—отвѣтъ: черезъ (—5) лѣтъ равносиленъ: „событіе не произойдетъ въ будущемъ, а оно уже совершилось 5 лѣтъ тому назадъ“. На этомъ основаніи отвѣтъ: „5 лѣтъ тому назадъ братъ былъ старше сестры въ 3 раза“ принимается за косвенный отвѣтъ на вопросъ задачи.

Если бы въ задачѣ былъ вопросъ: „сколько лѣтъ тому назадъ братъ былъ старше сестры въ 3 раза?“—то уравненіе для рѣшенія его было бы, очевидно, такое:

$$20-x=3(10-x),$$

которое имѣетъ своимъ рѣшеніемъ $x=5$, а это послѣднее даетъ уже прямой отвѣтъ на вопросъ, а именно: братъ былъ старше сестры въ 3 раза 5 лѣтъ тому назадъ.

III. Нулевое рѣшеніе.

§ **377. Условія.** Нулево рѣшеніе или $x=0$ бываетъ при двухъ условіяхъ:

когда 1) $b_1=b$ и $a>a_1$

2) $b_1=b$ и $a<a_1$

Въ самомъ дѣлѣ въ обоихъ случаяхъ числитель выраженія (2) равенъ нулю, а знаменатель не нуль, слѣдовательно все выраженіе или значеніе x равно также нулю.

Хотя понятіе „нуль“ заключаетъ въ себѣ отрицаніе какого бы то ни было количества величины, но въ математикѣ, въ виду обобщенія вопросовъ, условно допускаютъ, что и нуль выражаетъ количество величины, и въ этомъ условномъ значеніи $x=0$ называютъ **нулевымъ рѣшеніемъ уравненія**.

Свойства. Нулевое рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію, такъ какъ обращаетъ его въ тождество.

Въ отношеніи вопроса нулевое рѣшеніе обнаруживаетъ **его невозможность.**

Задача. За 7 фунтовъ масла заплачено 1 р. $85\frac{1}{2}$ коп. Сколько фунтовъ, цѣною 40 коп. за фунтъ, надо прибавить, чтобы, продавая смѣсь по 30 коп. за ф., получить отъ продажи всей смѣси $24^1/_2$ к. прибыли?

Положимъ, что 40-копеечнаго масла надо прибавить x фунтовъ; тогда всей смѣси будетъ $7+x$ фунтовъ и, продавая ее по 30 коп. за ф., получимъ за всю смѣсь $30(7+x)$. Въ этой суммѣ должны заключаться и 1 р. $85^1/_2$ к. за 7 фун. масла и $40x$ коп. за прибавленное масло и кромѣ того прибыль $24^1/_2$ коп. Отсюда уравненіе:

$$30(7+x)=185,5+40x+24,5.$$

Рѣшеніе:

$$210+30x=185,5+40x+24,5$$

$$30x-40x=185,5+24,5-210$$

$$-10x=0$$

$$x=\underline{0}.$$

Это рѣшеніе показываетъ, что при данныхъ условіяхъ задачи прибавлять 40-копеечнаго масла не нужно; прибыль $24^1/_2$ коп. будетъ получена, если продать по 30 коп. 7 фунтовъ первоначально бывшаго масла.

Уравненіе при $x=0$ обращается въ тождество:

$$30(7+0)=185,5+40.0+24,5$$

$$210=210.$$

IV. Безконечное рѣшеніе.

§ 378. Если у дроби $\frac{a}{b}$ числитель остается неизмѣннымъ, а знаменатель измѣняется, постепенно уменьшаясь, то, очевидно, что значеніе всей дроби будетъ постепенно увеличиваться; если, уменьшая знаменатель, можно сдѣлать его какъ угодно малымъ числомъ, то значеніе дроби при этомъ можно сдѣлать какъ угодно большимъ числомъ.

Величину, мѣняющую по условію рѣшаемаго вопроса свое значеніе, называютъ **перемѣнною**, въ отличіе отъ **постоянной**, которая во все время рѣшенія вопроса своего значенія не измѣняетъ. Такъ въ разсматриваемомъ вопросѣ, о значеніи дроби $\frac{a}{b}$, мы дѣлаемъ условіе, что a—постоянная величина, b—перемѣнная, непрерывно уменьшающаяся.

Безконечно-малою величиною называется такая перемѣнная, значеніе которой при измѣненіи дѣлается и остается меньше любого какъ угодно малаго числа.

Безконечно-большою величиною называется такая перемѣнная, значеніе которой дѣлается и остается больше любого какъ угодно большого числа.

Существуютъ такія перемѣнныя величины, непрерывно уменьшающіяся и непрерывно увеличивающіяся, которыя стремятся къ какому-то, для каждой особому, **постоянному значенію**, никогда, однако, не достигая этого постояннаго значенія; но тѣмъ не менѣе каждая изъ нихъ можетъ подойти къ своему постоянному значенію какъ угодно близко, или, выражаясь точнѣе, разность между перемѣнною величиною и постоянною, къ которой первая стремится, можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою.

Предѣломъ перемѣнной величины называютъ ту постоянную величину, къ которой перемѣнная при своихъ измѣненіяхъ стремится такъ, что разность между ними можетъ быть сдѣлана безконечно-малою.

Предѣломъ безконечно - уменьшающейся величины, или, какъ ее называютъ, безконечно - малой величины, служитъ, очевидно, нуль.

Безконечно-большую величину называютъ безконечностью и ее условились изображать знакомъ $\pm\infty$.

Двойной знакъ при безконечности объясняется тѣмъ, что измѣненія значенія величины происходятъ только надъ абсолютною величиною, а по знаку эта измѣняющаяся величина можетъ быть и положительною и отрицательною; если безконечно - увеличивающаяся величина оставалась при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ положительною, то и предѣломъ ея считаютъ $+\infty$, если же она оставалась отрицательною, то предѣломъ ея считаютъ $-\infty$.

§ **379.** Если перемѣнная величина, измѣняя свое значеніе, увеличивается или уменьшается не безконечно, но стремится къ нѣкоторой постоянной величинѣ, то эта постоянная будетъ служить ей предѣломъ, если только разность между ними можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою (безконечно-малою).

Напр.: Если въ кругѣ даннаго радіуса (величина постоянная) хорда по условію задачи непрерывно приближается къ центру, то длина ея, очевидно, увеличивается и предѣломъ ея въ этомъ случаѣ будетъ діаметръ (величина постоянная); если же хорда будетъ удаляться отъ центра, то предѣломъ ея будетъ нуль, т. е. при этомъ условіи она представляетъ величину безконечно-малую (Въ геометріи это доказывается).

Надо замѣтить, что одного стремленія перемѣнной величины къ постоянной еще недостаточно, чтобы постоянную величину считать предѣломъ перемѣнной; необходимо еще, чтобы при этомъ стремленіи разность между ними можно было сдѣлать какъ угодно малою.

Напр.: Періодическая дробь 0,888.... по мѣрѣ того, какъ будемъ брать большее и большее число періодовъ, будетъ все приближаться къ 1, а именно числа—

0,8; 0,88; 0,888; 0,8888; и т. д.

все приближаются къ 1, но тѣмъ не менѣе 1 не есть предѣлъ періодической дроби 0,88...., потому что какъ бы много періодовъ мы ни взяли, все же разница между 1 и взятымъ числомъ будетъ болѣе $\frac{1}{9}$; предѣломъ же для періодической дроби 0,888...., какъ извѣстно изъ ариѳметики, будетъ число $\frac{8}{9}$.

§ **380.** Итакъ, если числитель дробнаго выраженія есть величина постоянная, а знаменатель безконечно-уменьшающаяся величина, стремящаяся къ своему предѣлу нуль, то все дробное выраженіе представляетъ величину безконечно-увеличивающуюся, обозначаемую черезъ $\pm\infty$. На этомъ основаніи, если значеніе неизвѣстнаго въ уравненіи принимаетъ видъ $\pm\frac{m}{0}$, то рѣшеніе

$$x=\pm\frac{m}{0}$$

называютъ **безконечнымъ рѣшеніемъ**, потому что

$$\pm\frac{m}{0}=\pm\infty.$$

Слѣдствіе. Такъ какъ $\frac{m}{0} = \infty$, то $\frac{m}{\infty} = 0$.

Условія. Безконечное рѣшеніе, или $x = \pm \infty$ бываетъ при двухъ условіяхъ:

когда 1) $b_1 > b$ и $a = a_1$
2) $b_1 < b$ и $a = a_1$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ обоихъ случаяхъ рѣшеніе уравненія принимаетъ видъ $\frac{m}{0}$.

Свойства. Безконечное рѣшеніе не обращаетъ уравненія въ тождество.

Подставивъ въ данное уравненіе $ax + b = a_1x + b_1$ на мѣсто x его значеніе $\pm \infty$, получимъ:

$$\pm \infty + b = \pm \infty + b_1.$$

Считать такое равенство тождествомъ нѣтъ никакого основанія.

Надо замѣтить, что сокращеніе уравненія на членъ, равный $\pm \infty$, не допускается, такъ какъ недостаточно обосновано.

Но, разсматривая безконечность, какъ величину, условились считать, что безконечное рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію условно, въ томъ смыслѣ, что, принимая въ уравненіи за x все бо́льшія и бо́льшія числа, мы дѣлаемъ разницу между лѣвою и правою частями его все меньшею и меньшею, и, принимая за x безконечность, дѣлаемъ разность между обѣими частями уравненія безконечно-малою.

И дѣйствительно, если всѣ члены даннаго уравненія $ax + b = a_1x + b_1$ раздѣлимъ на x, то получимъ уравненіе:

$$a + \frac{b}{x} = a_1 + \frac{b_1}{x},$$

у котораго лѣвая и правая части разнятся тѣмъ менѣе, чѣмъ большее значеніе беремъ для x; а при $x = \infty$ разность между частями уравненія дѣлается безконечно-малою.

Въ отношеніи вопроса безконечное рѣшеніе показываетъ его невозможность.

Задача. Кусокъ матеріи проданъ по a руб. аршинъ; но если бы въ немъ было на 5 аршинъ менѣе и каждый аршинъ продавали по b рублей, то отъ проданной матеріи получили бы 2 рубля прибыли. Сколько аршинъ было въ кускѣ?

Предположимъ, что въ кускѣ было x аршинъ; слѣдовательно весь кусокъ стоилъ ax рублей.

Если бы въ кускѣ было на 5 аршинъ менѣе, т. е. $x-5$ арш., а продавали бы каждый аршинъ по b руб., то получили бы $b(x-5)$ руб., и эта сумма была бы на 2 рубля болѣе первоначальной стоимости всего куска.

Отсюда: $b(x-5) - ax = 2$ руб.

Рѣшеніе.

$$bx - 5b - ax = 2$$

$$bx - ax = 2 + 5b$$

$$(b-a)x = 2 + 5b$$

$$x = \frac{2+5b}{b-a}.$$

Изслѣдуемъ это рѣшеніе при условіи, что

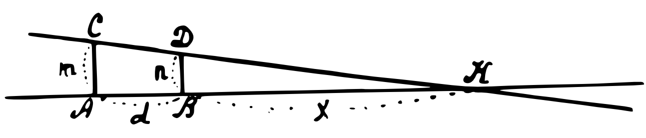
$$a = b.$$

Числа a и b могутъ быть только положительными, такъ какъ обозначаютъ цѣны, а потому числитель $2+5b$ есть число положительное; знаменатель же $a-b$ представляетъ число, значеніе котораго зависитъ отъ значеній a и b; но при условіи, что $a=b$, знаменатель $a-b$ обращается въ нуль, а вся дробь получаетъ значеніе $+\infty$.

Но $+\infty$, какъ отвѣтъ на вопросъ, сколько было аршинъ въ кускѣ, показываетъ невозможность задачи. И дѣйствительно, условіе $a=b$ означаетъ, что цѣны первоначальная и запродажная равны, а при такомъ условіи можно ли получить прибыль, да еще при продажѣ не цѣлаго куска? — Очевидно, невозможно.

§ **381**. Необходимо замѣтить, что въ нѣкоторыхъ вопросахъ, и въ особенности въ геометрическихъ, безконечное рѣшеніе, показывая невозможность вопроса, поставленнаго въ задачѣ, даетъ, тѣмъ не менѣе, косвенный отвѣтъ, указывая на нѣкоторыя особенности задачи.

Напр.: Изъ точекъ A и B безконечной прямой AB возставлены два перпендикуляра къ этой прямой $AC=m$ и $BD=n$. Черезъ точки C и D проведена безконечная прямая CD. Опредѣлить, на какомъ разстояніи за точкою B прямая CD пересечетъ прямую AB, если разстояніе отъ A до B равно d?



Пусть точка пересѣченія прямыхъ AB и CD будетъ K и пусть искомое разстояніе $BK=x$; тогда $AK=d+x$. Такъ какъ AC и BD перпендикулярны къ AB, то AC параллельна BD и треугольники ACK и BDK подобны, какъ прямоугольные и имѣющіе общій острый уголъ K; у подобныхъ треугольниковъ сходственныя стороны пропорціональны, а потому имѣемъ:

$$AK : BK = AC : BD \text{ или } (d+x) : x = m : n.$$

Рѣшеніе.

$$mx = (d+x)n$$

$$mx = dn + nx$$

$$mx - nx = dn$$

$$(m-n)x = dn$$

$$x = \frac{dn}{m-n}.$$

Изслѣдуемъ это рѣшеніе при условіи, что

$$m = n.$$

Числа d, m и n для данной задачи должно считать положительными, а потому числитель dn есть число положительное, знаменатель же $m-n$, при условіи $m=n$, равняется нулю, а потому $x = +\infty$.

Въ данномъ случаѣ рѣшеніе, $x = +\infty$, отвѣчая на вопросъ задачи, даетъ косвенный отвѣтъ: пересѣченія прямыхъ AB и CD не можетъ произойти, такъ какъ при условіи $m=n$ прямыя AB и CD параллельны.

Если бы вопросъ задачи былъ выраженъ въ болѣе общей формѣ, а именно: „Какое взаимное положеніе на плоскости занимаютъ прямыя AB и CD?“, то рѣшеніе $x = +\infty$ давало бы прямое указаніе на параллельность прямыхъ AB и CD.

V. Рѣшеніе неопредѣленное.

§ **382**. **Условія.** Неопредѣленное рѣшеніе или $x=\frac{0}{0}$ бываетъ въ томъ случаѣ:

$$\text{когда } b_1=b \text{ и } a=a_1$$

При этомъ условіи числитель и знаменатель обращаются въ нуль и неизвѣстное принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$.

Свойства. При условіи $b_1=b$ и $a=a_1$ уравненіе (1) обращается въ тождество, и, слѣдовательно, всякое произвольное число его удовлетворяетъ, а равнымъ образомъ всякое произвольное число можетъ служить отвѣтомъ на вопросъ задачи. По этой причинѣ рѣшеніе вида $x=\frac{0}{0}$, какъ указывающее на безчисленное множество рѣшеній и уравненій и вопроса, называется **рѣшеніемъ неопредѣленнымъ.**

§ **383**. Надо замѣтить, что дробь при нѣкоторыхъ условіяхъ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$ (неопредѣленности) только оттого, что въ числитель и знаменатель ея входитъ общій множитель, обращающійся при вышеупомянутыхъ условіяхъ въ нуль, а потому дающій дроби видъ $\frac{0}{0}$.

Этотъ множитель равенъ разности между замѣняемою буквою и тѣмъ ея значеніемъ, которое обращаетъ дробь въ неопредѣленность. И въ самомъ дѣлѣ, во-первыхъ, эта разность равна нулю, потому что, если какой-нибудь многочленъ равенъ нулю при $x=3$, то разность $x-3=0$; во-вторыхъ, если такая разность входитъ въ составъ множителей числителя и знаменателя, то, независимо отъ ихъ прочихъ множителей, обращаетъ въ нуль оба члена дроби.

Весьма часто послѣ сокращенія дроби на такой множитель, она при тѣхъ же самыхъ условіяхъ получаетъ вполнѣ опредѣленное значеніе.

То опредѣленное значеніе, которое дробь получаетъ послѣ сокращенія ея членовъ на общій множитель, равный при данныхъ условіяхъ нулю, называется **истиннымъ значеніемъ** дроби при данныхъ условіяхъ.

Примѣръ 1. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{6x^2+5x+1}{3x^3+x^2+3x+1} \text{ при } x=-\frac{1}{3}.$$

Подставляя $\left(-\frac{1}{3}\right)$ на мѣсто x, получаемъ:

$$\frac{{}^2/_3-{}^5/_3+1}{-{}^1/_9+{}^1/_9-1+1}=\frac{0}{0}.$$

Если же разложимъ числитель и знаменатель на простѣйшіе сомножители, то получимъ:

$$\frac{6x^2+5x+1}{3x^3+x^2+3x+1}=\frac{6x^2+3x+2x+1}{x^2(3x+1)+(3x+1)}=$$

$$=\frac{3x(2x+1)+(2x+1)}{(3x+1)(x^2+1)}=\frac{(2x+1)(3x+1)}{(3x+1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{2x+1}{x^2+1}\text{, эта же дробь при } x=-\frac{1}{3} \text{ даетъ}$$

$$\frac{-{}^2/_3+1}{{}^1/_9+1}=\frac{{}^1/_3}{1\,{}^1/_9}=\frac{3}{10}.$$

Итакъ, истинное значеніе данной дроби при $x = -\frac{1}{3}$ есть $^3/_{10}$.

Примѣръ 2. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{x+1}{x^2+2x+1} \text{ при } x = -1$$

$$1)\ \frac{-1+1}{1-2+1} = \frac{0}{0};\quad 2)\ \frac{x+1}{x^2+2x+1} = \frac{x+1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x+1},$$

а эта дробь при $x = -1$ равняется $\frac{1}{0} = \infty$.

§ 884. Если разложеніе числителя или знаменателя на простѣйшіе сомножители представляетъ трудности, то удаленіе общаго множителя, дѣлающаго значеніе дроби неопредѣленнымъ, можетъ быть выполнено дѣленіемъ на него числителя и знаменателя дроби отдѣльно.

Примѣръ 3. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{n^3-213n^2+632n-420}{6n^3-43n^2+87n-50} \text{ при } n = 2.$$

$$1)\ \frac{8-852+1264-420}{48-172+174-50} = \frac{1272-1272}{222-222} = \frac{0}{0}.$$

2) Двучленъ, на который слѣдуетъ сократить данную дробь до подстановки числа 2 на мѣсто n, есть $(n-2)$. Раздѣлимъ на $n-2$ числитель и знаменатель:

$$\begin{array}{r|l}
n^3 - 213n^2 + 632n - 420 & n - 2 \\ \cline{2-2}
-n^3 \pm 2n^2 \qquad\qquad\qquad & n^2 - 211n + 210 \\ \cline{1-1}
-211n^2 + 632n - 420 & \\
\pm 211n^2 \mp 422n \qquad & \\ \cline{1-1}
210n - 420 & \\
-210n \pm 420 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
6n^3 - 43n^2 + 87n - 50 & n - 2 \\ \cline{2-2}
-6n^3 \pm 12n^2 \qquad\qquad\qquad & 6n^2 - 31n + 25 \\ \cline{1-1}
-31n^2 + 87n - 50 & \\
\pm 31n^2 \mp 62n \qquad & \\ \cline{1-1}
25n - 50 & \\
-25n \pm 50 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad &
\end{array}$$

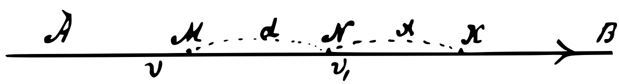
Слѣдовательно, данная дробь по сокращеніи на $n-2$ будетъ равна $\frac{n^2-211n+210}{6n^2-31n+25}$. Подставивъ теперь 2 на мѣсто n получимъ:

$$\frac{4-422+210}{24-62+25}=\frac{-208}{-13}=16.$$

§ **385.** Разобравъ условія различнаго рода рѣшеній и ихъ свойства въ отношеніи уравненія и вопроса, покажемъ теперь, какъ примѣняются они къ изслѣдованію отдѣльныхъ задачъ.

Задача о курьерахъ.

§ **386**. По направленію отъ A къ B ѣдутъ два курьера. Въ нѣкоторый моментъ первый былъ въ точкѣ M, h часовъ спустя второй курьеръ былъ въ точкѣ N, отстоящей отъ точки M на d верстъ по направленію движенія. Опредѣлить, на какомъ разстояніи за точкою N по направленію движенія произойдетъ встрѣча курьеровъ, если первый проѣзжаетъ въ часъ по v верстъ, а второй по v_1 верстъ?



Чертежъ показываетъ направленіе движенія, мѣста курьеровъ и ихъ скорости.

Составленіе уравненія. Предположимъ, что встрѣча произойдетъ въ точкѣ K, на разстояніи x верстъ за точкою N; тогда первый курьеръ отъ точки M до встрѣчи, въ точкѣ K, долженъ былъ проѣхать $d+x$ верстъ, а дѣлая каждый часъ по v верстъ, онъ проѣхалъ этотъ путь въ $\frac{d+x}{v}$ часовъ; второй курьеръ отъ точки N до встрѣчи въ K проѣхалъ x верстъ, а дѣлая каждый часъ по v_1 верстъ, проѣхалъ этотъ путь въ $\frac{x}{v_1}$ часовъ. Но курьеры проѣзжали первый черезъ точку M, второй черезъ точку N не одновременно, а именно: второй черезъ точку N проѣхалъ h часами позже, чѣмъ первый черезъ точку M, а это значитъ, что второй на свой путь отъ N до K употребилъ времени на h часовъ меньше, чѣмъ первый на путь отъ M до K, а потому $\frac{x}{v_1}$ часовъ менѣе $\frac{d+x}{v}$ часовъ на h часовъ. Отсюда уравненіе:

$$\frac{d+x}{v}-\frac{x}{v_1}=h.$$

Рѣшеніе. $$dv_1+v_1x-vx=vv_1h$$

$$v_1x-vx=vv_1h-dv_1$$

$$(v_1-v)x=v_1(vh-d)$$

$$x=\frac{v_1(vh-d)}{v_1-v}.$$

§ **387**. **Изслѣдованіе.** Значенія количествъ d, h, v и v_1 слѣдуетъ считать положительными согласно съ условіями задачи, а потому значеніе x зависитъ отъ отношеній этихъ величинъ другъ къ другу.

I. Рѣшеніе положительное, т. е. $x>0$ будетъ тогда, когда

во-первыхъ $vh>d$ и $v_1>v$,

во-вторыхъ $vh<d$ и $v_1<v$.

Положительное рѣшеніе, какъ уже было доказано въ общемъ изслѣдованіи, удовлетворяетъ уравненію и показываетъ возможность вопроса.

Докажемъ, что при указанныхъ выше условіяхъ встрѣча курьеровъ возможна и произойдетъ вправо (по чертежу) отъ точки N, въ нѣкоторой точкѣ K. Разсмотримъ первое условіе: 1) $vh>d$ и $v_1>v$.

Зная скорости курьеровъ, не трудно будетъ судить о возможности или невозможности ихъ встрѣчи, если намъ будутъ извѣстны ихъ мѣста на пути **въ одинъ и тотъ же моментъ**, а потому опредѣлимъ предварительно, гдѣ находился первый курьеръ въ тотъ моментъ, когда второй былъ въ точкѣ N.

Согласно условію задачи, онъ въ это время былъ правѣе (по чертежу) точки M на столько верстъ, сколько онъ можетъ проѣхать въ h часовъ, т. е. правѣе M на vh верстъ.

Но при условіи $vh > d$ мы должны заключить, что въ то время, когда второй былъ въ точкѣ N, первый былъ правѣе N, т. е. впереди второго, а при условіи, что $v_1 > v$, необходимо заключить, что второй, имѣя бо́льшую скорость, догонитъ перваго, и эта встрѣча произойдетъ, очевидно, правѣе N, въ нѣкоторой точкѣ K.

Второе условіе положительнаго рѣшенія

$$vh < d \text{ и } v_1 < v$$

разсматривается подобно первому.

II. Отрицательное рѣшеніе или $x < 0$ будетъ тогда, когда

во-первыхъ $vh > d$ и $v_1 < v$,

во-вторыхъ $vh < d$ и $v_1 > v$.

Отрицательное рѣшеніе, какъ намъ извѣстно, всегда удовлетворяетъ уравненію, но въ отношеніи вопроса показываетъ или невозможность его, или даетъ косвенный отвѣтъ, если искомая величина допускаетъ противоположныя значенія. Въ нашей задачѣ искомое—это разстояніе отъ точки N; а разстояніе отъ какой-либо точки по прямой линіи можно считать и вправо, и влѣво; слѣдовательно искомая величина нашей задачи допускаетъ противоположныя значенія, и отрицательное рѣшеніе указываетъ намъ на то, что при данныхъ условіяхъ не можетъ быть встрѣчи правѣе точки N, а она была уже раньше, лѣвѣе точки N.

Докажемъ, что изъ условій задачи дѣйствительно вытекаетъ необходимость встрѣчи лѣвѣе точки N.

Разсмотримъ первое условіе

$$vh > d \text{ и } v_{1} < v.$$

Въ то время, когда второй былъ въ точкѣ N, первый былъ не въ точкѣ M, а правѣе ея на такомъ разстояніи, которое онъ можетъ проѣхать въ h часовъ, т. е. на разстояніи vh верстъ; но при условіи, что $vh > d$, мы должны считать его находящимся правѣе точки N. Итакъ, первый находится впереди второго и второй, имѣя скорость меньшую, чѣмъ у перваго ($v_{1} < v$) догнать перваго не можетъ, т. е. встрѣчи правѣе точки N не можетъ быть, и если она была, то только лѣвѣе точки N.

Второе условіе разсматривается какъ первое.

III. Нулевое рѣшеніе, или $x=0$ будетъ тогда, когда

во-первыхъ $vh=d$ и $v_{1} > v$

во-вторыхъ $vh=d$ и $v^{1} < v$.

Рѣшеніе $x=0$ въ отношеніи вопроса показываетъ, что встрѣчи за точкою N не будетъ; но встрѣчу курьеровъ на разстояніи нуль за точкою N можно понимать, какъ встрѣчу въ самой точкѣ N, что, дѣйствительно, не трудно вывести изъ условій нулевого рѣшенія.

Въ самомъ дѣлѣ, въ тотъ моментъ, когда второй былъ въ точкѣ N, первый, находясь правѣе точки M на разстояніи $vh = d$ верстъ, былъ также въ точкѣ N, т. е. встрѣча курьеровъ произошла въ точкѣ N и не могла быть ни правѣе, ни лѣвѣе точки N, такъ какъ скорости ихъ различны.

IV. Безконечное рѣшеніе, или $x = \pm\infty$ будетъ тогда, когда

$$\text{во-первыхъ } vh > d \text{ и } v_1 = v,$$
$$\text{во-вторыхъ } vh < d \text{ и } v_1 = v.$$

Рѣшеніе $x = \pm\infty$, служа отвѣтомъ на вопросъ, гдѣ произошла встрѣча курьеровъ, можетъ быть понятно только какъ указаніе невозможности встрѣчи.

И дѣйствительно, изъ условій, что

$$vh > d \text{ или } vh < d,$$

слѣдуетъ заключить, что въ тотъ моментъ, когда второй находится въ точкѣ N, первый находится или правѣе точки N (когда $vh > d$), или лѣвѣе точки N (когда $vh < d$), и затѣмъ, имѣя одинаковыя скорости ($v_1 = v$), они встрѣтиться не могутъ, такъ какъ все время пути будутъ находиться на одномъ и томъ разстояніи одинъ отъ другого.

V. Неопредѣленное рѣшеніе, или $x = \frac{0}{0}$, будетъ тогда, когда

$$vh = d \text{ и } v_1 = v.$$

Неопредѣленное рѣшеніе, какъ мы знаемъ, указываетъ на то, что всякое число удовлетворяетъ какъ уравненію, такъ и вопросу.

Для данной задачи это слѣдуетъ понимать, какъ возможность встрѣчи курьеровъ во всякомъ мѣстѣ ихъ пути.

Такое заключеніе, дѣйствительно, можно вывести изъ условій этого рѣшенія. Условіе $vh = d$ показываетъ, что въ то время, когда второй курьеръ былъ въ точкѣ N, первый былъ также въ точкѣ N, т. е. въ точкѣ N произошла встрѣча; но $v_1 = v$ указываетъ, что скорости ихъ одинаковы, и что поэтому они, выѣхавъ изъ точки N, будутъ все время ѣхать вмѣстѣ, не опережая одинъ другого; при этомъ также необходимо заключить, что и до точки N они ѣхали вмѣстѣ.

Изслѣдованіе системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

§ **388**. Общій видъ такой системы:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

Найдемъ рѣшенія:

$$\begin{array}{r} -\ \begin{array}{r} ab_1x + bb_1y = cb_1 \\ -a_1bx \mp bb_1y = -c_1b \end{array} \\ \hline ab_1x - a_1bx = cb_1 - c_1b \\ (ab_1 - a_1b)x = cb_1 - c_1b \\ x = \dfrac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ \begin{array}{r} aa_1x + a_1by = a_1c \\ -aa_1x \mp ab_1y = -ac_1 \end{array} \\ \hline a_1by - ab_1y = a_1c - ac_1 \\ (a_1b - ab_1)y = a_1c - ac_1 \\ y = \dfrac{a_1c - ac_1}{a_1b - ab_1} \end{array}$$

$$\text{или } y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Примѣчаніе. Формулы рѣшенія x и y могутъ быть составлены по слѣдующимъ схемамъ:

Общій знаменатель. . $\left.\begin{array}{ccc} a & & b \\ & >< & \\ a_1 & & b_1 \end{array}\right\} ab_1 - a_1b.$

Числитель x . . . . . $\begin{matrix} c \\ c_1 \end{matrix} >\!< \begin{matrix} b \\ b_1 \end{matrix} \Big\} cb_1 - c_1b.$

Числитель y . . . . . $\begin{matrix} a \\ a_1 \end{matrix} >\!< \begin{matrix} c \\ c_1 \end{matrix} \Big\} ac_1 - a_1c.$

Изслѣдованіе рѣшеній системы уравненій раздѣлимъ на 2 группы:

I группа.

Общій знаменатель не нуль, т. е.

$$ab_1 \gtrless a_1b.$$

Въ зависимости отъ различныхъ соотношеній между членами числителей, рѣшенія могутъ быть: 1) положительными, 2) отрицательными и 3) нулевыми, при этомъ въ различныхъ сочетаніяхъ, напр.: $x>0$, а $y>0$; $x>0$, а $y<0$; $x<0$, а $y=0$; $x=0$, а $y>0$ и т. п.

Свойства этихъ рѣшеній какъ въ отношеніи уравненій, такъ и въ отношеніи вопроса тѣ же, что и для уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

II группа.

§ 389. Общій знаменатель равенъ нулю, т. е.

$$ab_1 = a_1b.$$

Въ этомъ случаѣ рѣшенія могутъ быть только: 1) безконечными и 2) неопредѣленными.

Свойства этихъ рѣшеній слѣдующія:

Теорема 1. **Если одно изъ неизвѣстныхъ имѣетъ видъ ∞, то и другое имѣетъ видъ ∞.**

Дано: $ab_1 = a_1b$ и $cb_1 \gtrless c_1b$, т. е. $x = \pm\infty$.

Требуется доказать, что $y = \pm\infty$.

Возьмемъ данное условіе

$$cb_1 \gtrless c_1b$$

и подставимъ въ немъ на мѣсто b равносильное ему выраженіе изъ условія $ab_1 = a_1b$, т. е.

$$b_1 = \frac{a_1b}{a},$$

тогда получимъ $c \cdot \dfrac{a_1b}{a} \gtrless c_1b$, или

$$ca_1b \gtrless ac_1b,$$

или, сокращая на b, получимъ:

$$ca_1 \gtrless ac_1.$$

Но этотъ выводъ показываетъ, что числитель y не нуль, а такъ какъ знаменатель равенъ нулю, то $y = \pm\infty$.

При условіяхъ, дѣлающихъ $x = \pm\infty$ и $y = \pm\infty$, уравненія оказываются противорѣчащими или несовмѣстными.

Дѣйствительно, умноживъ первое уравненіе на a_1, второе на a, получимъ

$$\begin{cases} aa_1x + a_1by = a_1c, \\ aa_1x + ab_1y = ac_1. \end{cases}$$

Коэффиціенты при x тождественны, при y равны, по условію $ab_1=a_1b$; слѣдовательно необходимо заключить, что $ac_1=a_1c$, а это противорѣчитъ условію $ac_1 \gtrless a_1c$.

Теорема 2. **Если одно изъ неизвѣстныхъ имѣетъ видъ $\frac{0}{0}$, то и другое неизвѣстное равно $\frac{0}{0}$.**

Дано: $ab_1=a_1b$ и $ac_1=a_1c$, т. е. $y=\frac{0}{0}$.

Требуется доказать, что $cb_1=c_1b$, т. е. $x=\frac{0}{0}$.

Для доказательства найдемъ, чем равно a изъ перваго условія: $a_1b=ab_1$.

Находимъ, что $a=\frac{a_1b}{b_1}$. Подставивъ значеніе a во второе условіе $ac_1=a_1c$,

находимъ, что $\frac{a_1b}{b_1}\cdot c_1=a_1c$ или $a_1bc_1=a_1b_1c_1$ и по сокращеніи на a_1, получимъ:

$$bc_1=b_1c.$$

Это и требовалось доказать.

Условія, при которыхъ значенія неизвѣстныхъ неопредѣленны, дѣлаютъ систему уравненій также неопредѣленною, такъ какъ всѣ соотвѣтственные коэффиціенты въ обоихъ уравненіяхъ дѣлаются равными, т. е. уравненія съ двумя неизвѣстными сливаются въ одно уравненіе съ двумя неизвѣстными. Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ первое уравненіи на a_1, второе на a, получаемъ:

$$\begin{cases} aa_1x+a_1by=a_1c, \\ aa_1x+ab_1y=ac_1. \end{cases}$$

Коэффиціенты при x тождественны, при y равны по первому условію, извѣстные члены равны по второму условію; слѣдовательно систему двухъ уравненій можно замѣнить однимъ уравненіемъ $aa_1x + a_1by = a_1c$

или
$$ax + by = c.$$

Неопредѣленность значеній x и y въ системѣ уравненій нельзя считать полною (при которой значенія обоихъ неизвѣстныхъ совершенно произвольны и независимы одно отъ другого), — **это есть неопредѣленность, связанная условіемъ, что значенія неизвѣстныхъ должны удовлетворять одному изъ данныхъ уравненій,** напр. $ax + by = c$, т. е. вполнѣ произвольнымъ можетъ быть значеніе только одного неизвѣстнаго, соотвѣтствующее же значеніе другого неизвѣстнаго должно опредѣляться изъ уравненія $ax + by = c$ подстановкою въ него произвольнаго значенія, принятаго для перваго неизвѣстнаго.

§ **390**. **Задача.** Два переписчика въ h часовъ переписываютъ a листовъ. Если же одинъ изъ нихъ будетъ работать m часовъ, а другой n часовъ, то вмѣстѣ перепишутъ b листовъ. Сколько листовъ въ часъ переписываетъ каждый переписчикъ?

Составленіе уравненія. Положимъ, что первый переписываетъ въ часъ x листовъ, а второй y листовъ; тогда оба въ 1 часъ перепишутъ $x + y$ листовъ, а въ h часовъ $(x + y)h$ листовъ, а это выраженіе, по первому условію задачи, равняется a листамъ, слѣдовательно первое уравненіе:

$$(x + y)h = a.$$

Первый переписчикъ въ m часовъ перепишетъ mx листовъ, второй въ n часовъ ny листовъ, а вмѣстѣ $mx + ny$;

это выраженіе, по второму условію задачи, равно b листамъ; слѣдовательно второе уравненія:

$$mx + ny = b.$$

Система уравненій $\begin{cases} (x+y)h = a \\ mx + ny = b. \end{cases}$

Рѣшеніе системы по схемѣ:

$$\begin{cases} hx + hy = a \\ mx + ny = b. \end{cases}$$

Общій знаменатель $\begin{array}{c} h \\ m \end{array} >< \begin{array}{c} h \\ n \end{array} \Big| \; hn - hm$, или $h(n-m)$.

Числитель x . . $\begin{array}{c} a \\ b \end{array} >< \begin{array}{c} h \\ n \end{array} \Big| \; an - bh;$

Числитель y. . . $\begin{array}{c} h \\ m \end{array} >< \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \Big| \; bh - am$

$$x = \frac{an - bh}{h(n-m)}; \quad y = \frac{bh - am}{h(n-m)}.$$

Изслѣдованіе. Разберемъ случай, когда

$$n > m \text{ и } an \,\tilde{>}\, bh.$$

Тогда $x > 0$. Какимъ будетъ y?

Такъ какъ $m < n$, то, подставляя m въ данное условіе $an > bh$ на мѣсто n, получимъ два произведенія am и bh, относительныя величины которыхъ могутъ оказаться какъ равными: $am = bh$, такъ и неравными: $am \gtrless bh$, потому что при подстановкѣ въ большую часть неравенства на мѣсто его множителя другого множителя меньшаго $(m < n)$ мы не знаемъ, измѣнится ли неравенство и если измѣнится, то какъ измѣнится: въ неравенство противоположнаго смысла, или въ равенство.

На этомъ основаніи заключаемъ, что при $x > 0$ y можетъ имѣть значенія: 1) положительное, 2) отрицательное и 3) нулевое.

Разсмотримъ каждую комбинацію.

1) $n > m$, $an > bh$ и $am < bh$.

При этихъ условіяхъ $x > 0$ и $y > 0$, т. е. уравненія удовлетворяются и вопросъ возможенъ.

И дѣйствительно, преобразовавъ условія

$$an > bh \text{ и } am < bh$$

въ такія: $\frac{a}{h} \cdot n > b$ и $\frac{a}{h} \cdot m < b$,

имѣемъ полное основаніе считать вопросъ возможнымъ. $\frac{a}{h}$ представляетъ то число листовъ, которое оба переписчика переписываютъ въ 1 часъ, произведеніе $\frac{a}{h} \cdot n$ есть то число листовъ, которое переписываютъ оба въ n часовъ, и такъ какъ $n > m$, то выраженіе

$$\frac{a}{h} \cdot n > b$$

показываетъ, что оба переписчика въ n часовъ перепишутъ болѣе листовъ, чѣмъ b, т. е. чѣмъ то число, которое могутъ переписать вмѣстѣ одинъ въ n часовъ, другой въ m часовъ.

Равнымъ образомъ, выраженіе $\frac{a}{h} \cdot m < b$ показываетъ, что если бы второй переписчикъ писалъ не n, а m часовъ, т. е. меньше, чѣмъ дано во второмъ условіи задачи, то оба переписали бы меньше, чѣмъ b, что и должно быть въ дѣйствительности.

2) $n > m$. $an > bh$ и $am > bh$.

При этихъ условіяхъ $x > 0$ и $y < 0$, т. е. уравненія удовлетворяются, вопросъ же невозможенъ, такъ какъ искомая величина (число переписываемыхъ листовъ) не допускаетъ противоположныхъ значеній.

Преобразовавъ, какъ и раньше, второе и третье условія, будемъ имѣть:

$$\frac{a}{h} \cdot n > b \text{ и } \frac{a}{h} \cdot m > b.$$

При первомъ условіи, что $n > m$ второе условіе, какъ уже было разобрано въ предыдущей комбинаціи, согласуется съ дѣйствительностью, третье же условіе противорѣчитъ дѣйствительности, такъ какъ показываетъ, что, если бы второй писалъ не n часовъ, какъ дано во второмъ условіи задачи, а столько же, сколько и первый, т. е. m часовъ, то они вмѣстѣ переписали бы больше, чѣмъ b, а этотъ выводъ противорѣчитъ здравому смыслу.

3) $n > m$, $an > bh$ и $am = bh$.

При этихъ условіяхъ $x > 0$ и $y = 0$, т. е. уравненія удовлетворяются, вопросъ же вообще невозможенъ, такъ какъ участіе переписчика въ перепискѣ, когда онъ не переписываетъ ни одного листа, представляетъ вообще абсурдъ. Если же нуль принимать за величину, то вопросъ можно считать условно возможнымъ.

Если принять $y=0$, то данныя уравненія обращаются въ слѣдующія:

$$\begin{cases} hx=a \\ mx=b, \end{cases}$$

откуда $x=\frac{a}{h}=\frac{b}{m}$, или $am=bh$, что соотвѣтствуетъ третьему условію и не противорѣчитъ первому и второму дѣйствительно, если $am=bh$, то при $n>m$

$$an>bh.$$

§ **391**. Изъ второй группы рѣшеній, когда общій знаменатель равенъ нулю, т. е. $n-m=0$ или $n=m$, разсмотримъ случай, когда $an>bh$.

Тогда $x=\infty$, и такъ какъ при $n=m$ и $am>bh$, то $y=-\infty$.

Безконечное рѣшеніе показываетъ невозможность вопроса. Въ самомъ дѣлѣ, условія

$$an>bh \text{ и } am>bh,$$

или равносильныя имъ условія

$$\frac{a}{h}\cdot n>b \text{ и } \frac{a}{h}\cdot m>b$$

при $n=m$ показываютъ, что оба переписчика, занимаясь вмѣстѣ въ теченіе n (или m) часовъ, перепишутъ болѣе, чѣмъ b листовъ, что противорѣчитъ второму условію задачи.

Уравненія же при этихъ условіяхъ противорѣчивы.

Умноживъ первое на n, а второе на h, получимъ:

$$\begin{cases} nhx+nhy=na \\ mhx+nhy=bh. \end{cases}$$

Коэффиціенты при x равны, такъ какъ $n=m$, коэффиціенты при y тождественны, а извѣстные члены, по условію этого рѣшенія, неравны, слѣдовательно уравненія несовмѣстны.

Соединенія.

§ **392.** Опредѣленіе. **Соединеніями называются группы, составленныя изъ данныхъ предметовъ въ различномъ порядкѣ.**

Предметы, которые соединяются въ различныя группы, называются **элементами.**

Элементы соединеній обыкновенно обозначаются буквами, хотя могутъ быть обозначены и иными знаками. Напр., изъ элементовъ: a, b, c, d, e, f можно составить группы:

$$ab,\ ba,\ abc,\ abd,\ de.\ cef,\ abcf \text{ и т. п.}$$

Примѣчаніе. Очевидно, каждое соединеніе можно разсматривать какъ произведеніе элементовъ, входящихъ въ его составъ.

Соединенія бываютъ трехъ родовъ:

1) **перестановки** (permutations),
2) **размѣщенія** (arrangements) и
3) **сочетанія** (combinaisons).

I. Перестановки.

§ **393.** Опредѣленіе. **Перестановками называются такія соединенія, изъ которыхъ въ каждое входятъ всѣ данные элементы такъ, что отдѣльныя соединенія отличаются только мѣстами элементовъ.**

Напр. изъ элементовъ: a, b. c, d соединенія:

$$abcd,\ acbd,\ adbc,\ abdc \ldots.$$

называются перестановками изъ четырехъ элементовъ.

§ **394.** Число перестановокъ, которыя могутъ быть составлены изъ данныхъ элементовъ, обозначаютъ буквою P, внизу которой пишется число данныхъ элементовъ.

Напр.: P_2 — число перестановокъ изъ двухъ элементовъ; P_5 — число перестановокъ изъ пяти элементовъ.

Очевидно, изъ одного элемента a можно составить одну перестановку: a, слѣдовательно

$$P_1 = 1.$$

Чтобы образовать перестановки изъ двухъ элементовъ, a и b, надо взять первый элементъ (перестановку изъ одного элемента) и приставить къ нему второй элементъ первый разъ впереди его, второй разъ позади; такимъ образомъ получимъ:

$$ba,\ ab,$$

двѣ перестановки, которыя только и можно составить изъ двухъ элементовъ, т. е. **перестановокъ изъ двухъ элементовъ можно составить въ два раза болѣе, чѣмъ перестановокъ изъ одного элемента,** а потому:

$$P_2 = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot 1.$$

Чтобы составить перестановки изъ трехъ элементовъ:

$$a,\ b,\ c$$

надо брать каждую изъ предварительно составленныхъ перестановокъ изъ двухъ первыхъ данныхъ элементовъ и помѣщать въ ней третій элементъ c—

во-первыхъ, впереди, во-вторыхъ, между элементами и въ-третьихъ, позади ея; тогда получимъ:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{изъ перестановки } ba & \ldots & cba,\ bca,\ bac \\ \text{"} \qquad \text{"} \qquad ab & \ldots & cab,\ acb,\ abc \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Очевидно, группа (α) представляетъ **всѣ перестановки**, какія только можно составить изъ трехъ элементовъ.

Такъ какъ изъ каждой перестановки въ два элемента составляются 3 перестановки изъ трехъ элементовъ, то **число перестановокъ изъ трехъ элементовъ въ 3 раза болѣе числа перестановокъ изъ двухъ элементовъ**, т. е.

$$P_3 = 3 . P_2 = 3 . 2 . 1$$

Чтобы составить перестановки изъ четырехъ элементовъ

$$a,\ b,\ c,\ d$$

надо брать каждую изъ предварительно составленныхъ перестановокъ изъ трехъ первыхъ данныхъ элементовъ и помѣщать въ ней новый элементъ d—

во-первыхъ, впереди перваго элемента; во-вторыхъ, между первымъ и вторымъ элементами; въ-третьихъ, между вторымъ и третьимъ элементомъ и въ-четвертыхъ, позади третьяго элемента.

Такимъ образомъ изъ каждой перестановки въ 3 элемента образуется 4 перестановки въ 4 элемента, а потому **число перестановокъ изъ четырехъ элементовъ въ 4 раза болѣе числа перестановокъ изъ трехъ элементовъ**, т. е.

$$P_4 = 4 . P_3 = 4 . 3 . 2 . 1.$$

Поступая подобнымъ же образомъ, найдемъ, что **число перестановокъ изъ пяти элементовъ въ 5 разъ болѣе числа перестановокъ изъ четырехъ элементовъ,** т. е.

$$P_5 = 5 \,.\, P_4 = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1.$$

И вообще число перестановокъ изъ m элементовъ въ m разъ болѣе числа перестановокъ изъ $m—1$ элементовъ, т. е.

$$P_m = m \,.\, P_{m-1} = m \,.\, (m-1)(m-2)(m-3).....4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1$$

Число перестановокъ изъ m элементовъ равняется произведенію убывающаго ряда натуральныхъ чиселъ отъ m до 1.

Послѣдняя формула даетъ возможность опредѣлить число всѣхъ перестановокъ изъ даннаго числа элементовъ, не составляя самихъ перестановокъ.

§ **395**. Изъ всего вышеизложеннаго выводимъ:

Законъ составленія перестановокъ. Чтобы составить всѣ перестановки изъ m данныхъ элементовъ, надо составлять послѣдовательно всѣ перестановки изъ одного, изъ двухъ, трехъ... и т. д. Элементовъ, образуя каждую новую группу постановкой новаго элемента въ каждую перестановку предшествующей группы—

во-первыхъ, впереди перваго элемента,

во-вторыхъ, между первымъ и вторымъ элементами,

въ-третьихъ, „ вторымъ и третьимъ „ ,

въ-четвертыхъ, „ третьимъ и четвертымъ „ ,

. . . .

. . . .

и въ-m-хъ, позади послѣдняго элемента.

Задача. Опредѣлить, сколькими способами и какими именно можно посадить 4 учениковъ на одну скамейку.

1) Сколькими способами? $P_4 = 4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 24$.

2) Какими именно?

Обозначивъ учениковъ буквами a, b, c, d составимъ всѣ перестановки изъ четырехъ элементовъ:

1) a.

2) $ba \qquad ab$

3) $cba,\ bca,\ bac,\ cab,\ acb,\ abc$

$$4)\ \left.\begin{array}{llll} dcba, & cdba, & cbda, & cbad \\ dbca, & bdca, & bcda, & bcad \\ dbac, & bdac, & badc, & bacd \\ dcab, & cdab, & cadb, & cabd \\ dacb, & adcb, & acdb, & acbd \\ dabc, & adbc, & abdc, & abcd \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (1)$$

Группа (1) представляетъ отвѣтъ на второй вопросъ задачи.

II. Размѣщенія.

§ **398**. Опредѣленіе. **Если въ составъ каждаго соединенія входятъ не всѣ данные элементы** (n), а только нѣкоторое опредѣленное число ихъ (m), и при этомъ соединенія отличаются или элементами (однимъ или нѣсколькими), или при одинаковыхъ элементахъ только мѣстами ихъ, то соединенія называются размѣщеніями.

Напр. для элементовъ:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ k$$

группу соединеній:

$$\left\{\begin{array}{l} abc,\ abd,\ bdk,\ afg,\ ehk \\ def,\ edf,\ fde,\ dfe,\ efd,\ fed \text{ и т. п.} \end{array}\right.$$

слѣдуетъ назвать размѣщеніями изъ 9 элементовъ по 3 элемента въ каждомъ.

Число всѣхъ размѣщеній, какія только возможны, изъ n элементовъ по m обозначаютъ черезъ A_n^m — нижній значекъ указываетъ число всѣхъ данныхъ элементовъ (n), верхній указываетъ число элементовъ, входящихъ въ каждое размѣщеніе (m).

§ **397.** Изъ n данныхъ элементовъ можно составлять размѣщенія: по 1 элементу, по 2 элемента, по 3 элемента, и т. д.

1. Чтобы составить изъ n данныхъ элементовъ

$$\underbrace{a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots f,\ g,\ k}_{n}$$

всѣ размѣщенія по одному элементу въ каждомъ, достаточно выписать въ рядъ всѣ данные элементы; такимъ образомъ число всѣхъ размѣщеній изъ n данныхъ элементовъ по одному, очевидно, равно n, т. е.

$$A_n = n.$$

2. Чтобы составить всѣ размѣщенія изъ n элементовъ по 2 элемента въ каждомъ, поступаемъ такъ:

во-первыхъ, беремъ первый элементъ (a) и присоединяемъ къ нему почередно каждый изъ остальныхъ элементовъ:

$$ab,\ ac,\ ad,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ af,\ ag,\ ak;$$

въ этомъ ряду будетъ, очевидно, $n-1$ размѣщеній;

во-вторыхъ, беремъ второй элементъ (b) и присоединяемъ къ нему поочередно всѣ остальные элементы:

$$ba,\ bc,\ bd,\ .\ .\ .\ .\ .\ bf,\ bg,\ bk;$$

въ-третьихъ беремъ третій элементъ (c) и присоединяемъ къ нему поочередно всѣ остальные элементы;

$$ca,\ cb,\ cd,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ cf,\ cg,\ ck.$$

Такимъ же способомъ составимъ ряды размѣщеній, начинающихся элементами d, e, ... f, g, k; а всего получимъ:

$$n\left\{\begin{array}{lll} ab,\ ac,\ ad\ .\ .\ .\ .\ .\ af,\ ag,\ ak & & (n-1) \\ ba,\ bc,\ bd\ .\ .\ .\ .\ .\ bf,\ bg,\ bk & & ,, \\ ca,\ cb,\ cd\ .\ .\ .\ .\ .\ cf,\ cg,\ ck & & ,, \\ da,\ db,\ dc\ .\ .\ .\ .\ .\ df,\ dg,\ dk & & ,, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & & ,, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & & ,, \\ fa,\ fb,\ fc\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ fg,\ fk & & ,, \\ ga,\ gb,\ ge\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ gf,\ gk & & ,, \\ ka,\ kb,\ ke\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ kf,\ kg & & ,, \end{array}\right.$$

Очевидно, эта группа представляетъ всѣ размѣщенія, какія только можно составить изъ n элементовъ по 2.

Опредѣлимъ число всѣхъ размѣщеній въ этой группѣ. Строкъ въ этой группѣ n, потому что каждая строка представляетъ размѣщенія, начинающіяся однимъ изъ данныхъ элементовъ, каждый разъ новымъ, а всѣхъ элементовъ дано n.

Въ каждой же строкѣ $n-1$ размѣщеній, потому что послѣ выбора изъ даннаго ряда одного, каждый разъ новаго элемента, остается ихъ въ ряду $n-1$ и каждый присоединяется къ элементу, выбранному для строки.

Если же въ каждой строкѣ $n-1$ размѣщеній, а строкъ n, то всѣхъ размѣщеній въ группѣ будетъ n разъ по $n-1$, или $n(n-1)$; отсюда:

Число размѣщеній изъ n элементовъ по 2 равняется произведенію числа всѣхъ данныхъ элементовъ на число единицею меньшее, т. е.

$$A_n^2 = n(n-1).$$

3. Чтобы составить всѣ размѣщенія изъ n элементовъ по 3, составимъ сначала всѣ размѣщенія изъ n данныхъ элементовъ по 2, а затѣмъ передъ каждымъ изъ этихъ размѣщеній поставимъ впереди поочередно каждый изъ оставшихся элементовъ, кромѣ тѣхъ двухъ, которые входятъ въ размѣщеніе.

Напр.: Составимъ размѣщенія по 3 для четырехъ данныхъ элементовъ:

$$a,\ b,\ c,\ d.$$

Предварительно составимъ изъ данныхъ четырехъ элементовъ всѣ размѣщенія по 2:

$$\begin{array}{l} ab,\ ac,\ ad, \\ ba,\ bc,\ bd, \\ ca,\ cb,\ cd, \\ da,\ db,\ dc. \end{array}$$

А затѣмъ къ каждому изъ этихъ 12 размѣщеній присоединимъ впереди каждый изъ оставшихся элементовъ, напр. къ ab надо присоединить c, d; къ ac присоединимъ b, d; къ da присоединимъ b, c; тогда получимъ:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Изъ} & ab & \text{получимъ:} & cab,\ dab \\ \text{„} & ac & \text{„} & bac,\ dac \\ \text{„} & ad & \text{„} & cad,\ bad \\ \text{„} & ba & \text{„} & cba,\ dba \\ \text{„} & bc & \text{„} & abc,\ dbc \\ \text{„} & bd & \text{„} & abd,\ cbd \\ \text{„} & ca & \text{„} & bca,\ dca \\ \text{„} & cb & \text{„} & acb,\ dcb \\ \text{„} & cd & \text{„} & acd,\ bcd \\ \text{„} & da & \text{„} & bda,\ cda \\ \text{„} & db & \text{„} & adb,\ cdb \\ \text{„} & dc & \text{„} & adc,\ bdc \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Группа (1) представляетъ всѣ размѣщенія изъ 4 элементовъ по 3.

Число всѣхъ размѣщеній изъ n элементовъ по 3 можно опредѣлить такъ: число предварительно составленныхъ размѣщеній изъ n элементовъ по 2 равно, какъ уже извѣстно,

$$n(n-1),$$

а такъ какъ для образованія размѣщеній по 3 впереди каждаго изъ этихъ размѣщеній ставится по $n-2$ элемента (всѣ кромѣ двухъ, входящихъ въ размѣщеніе по 2), то изъ каждаго размѣщенія по 2 элемента образуется $n-2$ размѣщенія по 3 элемента, а потому число всѣхъ размѣщеній изъ n элементовъ по 3 будетъ въ $n-2$ раза болѣе, чѣмъ A_n^2, т. е.

$$A_n^3 = A_n^2 \cdot (n-2) = n(n-1)(n-2)$$

4. Подобнымъ же образомъ получимъ, что

$$A_n^4 = A_n^3 \cdot (n-3) = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$A_n^5 = A_n^4 \cdot (n-4) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

. . . .

. . . .

$$A_n^m = A_n^{m-1} \cdot [n-(m-1)] = n(n-1)(n-2) \dots$$

$$\dots [n-(m-1)] \dots \quad (\alpha)$$

Происхожденіе послѣдняго множителя въ формулѣ (α) можно объяснить такъ: въ каждой изъ формулъ числа размѣщеній послѣдній множитель представляетъ, очевидно, разность между указателемъ числа всѣхъ данныхъ элементовъ (n) и числомъ на 1 меньшимъ, чѣмъ указатель числа элементовъ, по-скольку составляются размѣщенія ($m-1$).

Если въ формулѣ числа размѣщеній (α) раскроемъ скобки въ послѣднемъ множителѣ, то получимъ окончательный видъ:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-m+1) \dots \quad (\beta)$$

Число размѣщеній изъ n элементовъ по m равняется произведенію убывающаго ряда натуральныхъ чиселъ отъ n до $(n-m+1)$ включительно.

Напр.: $A_8^4 = 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 = 1680.$

Примѣчаніе. Формулу (β) иногда выговариваютъ такъ: число размѣщеній изъ n элементовъ по m равняется произведенію убывающаго ряда натуральныхъ чиселъ, начинающихся числомъ n, при чемъ всѣхъ множителей въ произведеніи m.

Эта формулировка легко выводится изъ отдѣльныхъ формулъ числа размѣщеній.

III. Сочетанія.

§ **398**. **Опредѣленіе.** Если въ каждое соединеніе входятъ не всѣ данные элементы (n), а нѣкоторое опредѣленное число ихъ (m), и при этомъ одно соединеніе отъ другого отличается по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ, то такая группа соединеній называется сочетаніями.

Сочетанія изъ n элементовъ можно составлять по одному элементу въ каждомъ сочетаніи, по 2 элемента, по 3, по 4 и т. д.

Напр.: Изъ элементовъ:

$$a, b, c, d, e$$

такія соединенія какъ abc, abd, bcd, eda относятся къ группѣ сочетаній изъ 5 элементовъ по 3.

Число всѣхъ сочетаній, какія только возможно составить изъ n элементовъ по m элементовъ въ каждомъ, обозначаютъ черезъ C_n^m; нижній указатель (n) означаетъ число всѣхъ данныхъ элементовъ, верхній указатель (m) число элементовъ, входящихъ въ каждое сочетаніе.

§ **399**. **Составленіе сочетаній.** Изъ опредѣленія видно, что сочетанія, имѣя въ одномъ отношеніи сходство съ размѣщеніями (не всѣ данные элементы входятъ въ каждое сочетаніе), а съ другой стороны и отличіе отъ нихъ (каждое сочетаніе должно отличаться отъ другого по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ), могутъ быть составлены при помощи размѣщеній, а именно: составивъ изъ данныхъ элементовъ соотвѣтствующія размѣщенія, раздѣлимъ ихъ на группы такъ, чтобы въ каждой группѣ были размѣщенія изъ однихъ и тѣхъ же элементовъ, и возьмемъ отъ каждой группы по одному размѣщенію; тогда въ отобранной группѣ будутъ соединенія, отличающіяся другъ отъ друга по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ, т. е. отобранная группа будетъ представлять соотвѣтствующую группу сочетаній.

Напр.: Составимъ всѣ сочетанія по 2 изъ 5 элементовъ:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ f.$$

Сначала составимъ размѣщенія изъ этихъ 5 элементовъ по 2:

$$\begin{matrix} ab, & ac, & ad, & af, \\ ba, & bc, & bd, & bf, \\ ca, & cb, & cd, & cf, \\ da, & db, & dc, & df, \\ fa, & fb, & fc, & fd. \end{matrix}$$

Раздѣлимъ на группы, въ которыхъ размѣщенія составлены изъ однихъ и тѣхъ же элементовъ:

$$\begin{array}{l|l|l} ab,\ ba & bc,\ cb & cd,\ dc \\ ac,\ ca & bd,\ db & cf,\ fc \\ ad,\ da & bf,\ fb & fd,\ df \\ af,\ fa & & \end{array}$$

Взявъ теперь отъ каждой изъ этихъ 10 группъ по одному соединенію, получимъ всѣ сочетанія изъ 5 элементовъ по 2:

$$\begin{array}{cccc} ab, & ac, & ad, & af \\ & bc, & bd, & bf \\ & & cd, & cf \\ & & & df \end{array}$$

Мы расположили сочетанія въ такомъ порядкѣ для того, чтобы вывести пріемъ болѣе быстраго образованія сочетаній.

Изъ послѣдней таблички видно, что для образованія сочетаній по 2, слѣдуетъ:

во-первыхъ, **первый** элементъ соединить со всѣми за нимъ слѣдующими,

во-вторыхъ, **второй** элементъ соединить со всѣми слѣдующими за нимъ.

въ-третьихъ, **третій** элементъ соединить со всѣми слѣдующими за нимъ, и т. д.

Примѣчаніе. Очевидно, рядъ данныхъ n элементовъ можно разсматривать какъ сочетанія изъ n элементовъ по одному элементу въ каждомъ сочетаніи.

Свойство элементовъ въ сочетаніи.

§ 400. Въ каждомъ сочетаніи можно мѣнять мѣстами элементы.

Это свойство слѣдуетъ изъ того, что для образованія сочетаній мы можемъ брать любое изъ группы размѣщеній, отличающихся только мѣстами элементовъ.

На основаніи этого свойства сочетанія можно группировать такъ:

I группа — сочетанія, **начинающіяся** первымъ элементомъ.

Выдѣливъ первую группу, мы въ оставшихся сочетаніяхъ не должны встрѣчать перваго элемента, такъ какъ каждое сочетаніе, содержащее въ себѣ первый элементъ, можетъ имѣть его **въ своемъ началѣ** и слѣдовательно должно быть отнесено къ первой группѣ.

II группа—сочетанія, **начинающіяся** вторымъ элементомъ.

III группа—сочетанія, **начинающіяся** третьимъ элементомъ, и т. д.

Отсюда вытекаетъ способъ составленія сочетаній изъ n элементовъ по 3, по 4, по 5 и т. д.

§ **401**. Для составленія сочетаній изъ n элементовъ по 3, отдѣляемъ первый элементъ (a), изъ остальныхъ элементовъ составляемъ всевозможныя сочетанія по 2 (см. § 399) и приставляемъ къ каждому изъ нихъ первый элементъ (a)— это I группа. Затѣмъ, отдѣливъ второй элементъ (b), образуемъ изъ всѣхъ за нимъ слѣдующихъ элементовъ всевозможныя сочетанія по 2, и къ каждому изъ нихъ присоединимъ второй элементъ, — это II группа. Подобнымъ же образомъ составимъ и всѣ остальныя группы, при чемъ послѣдняя группа состоитъ изъ одного сочетанія, представляемаго послѣдними тремя элементами.

Напр.: Составимъ всѣ сочетанія изъ 6 элементовъ: a, b, c, d, f, g по 3 элемента въ каждомъ сочетаніи:

I	II	III	IV
abc, abd, abf, abg	bcd, bcf, bcg	cdf, cdg	dfg
acd, acf, acg	bdf, bdg	cfg	
adf, adg	bfg		
afg			

Подобнымъ же образомъ составляемъ сочетанія изъ n элементовъ по 4, по 5 и т. д.

§ **102. Число сочетаній.** Выводъ формулы числа сочетаній изъ n элементовъ по m элементовъ въ каждомъ сочетаніи вытекаетъ изъ слѣдующаго:

Если составимъ всѣ размѣщенія изъ n элементовъ по m и сгруппируемъ ихъ такъ, чтобы въ каждой группѣ находились размѣщенія, составленныя изъ однихъ и тѣхъ же элементовъ и различающіяся только мѣстами элементовъ, то, расположивъ эти группы строками, одна подъ другою, получимъ нѣсколько строкъ, положимъ x строкъ.

Въ каждой строкѣ размѣщенія составлены изъ однихъ и тѣхъ же m элементовъ, слѣдовательно, каждую строку можно разсматривать, какъ перестановки изъ однихъ и тѣхъ же m элементовъ, а потому число ихъ будетъ равно числу перестановокъ изъ m элементовъ, т. е. P_m. Всѣхъ же строкъ x, слѣдовательно всѣхъ соединеній во всѣхъ строкахъ будетъ $x \cdot P_m$; а такъ какъ всѣ эти соединенія представляютъ размѣщенія изъ n элементовъ по m, то получаемъ уравненіе:

$$x \cdot P_m = A_n^m$$

откуда

$$x = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

Взявъ изъ каждой строки по одному соединенію, мы образуемъ новую группу соединеній изъ n элементовъ по m, въ которой одно соединеніе будетъ отличаться отъ другого по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ, т. е. это будутъ сочетанія изъ n элементовъ по m. Очевидно, число x, обозначая число строкъ, равно числу сочетаній изъ n элементовъ по m, т. е.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

Число сочетаній изъ n элементовъ по m равняется числу размѣщеній изъ n элементовъ по m, раздѣленному на число перестановокъ изъ m элементовъ.

Подставивъ на мѣсто A_n^m и P_m ихъ числовыя значенія, получимъ:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{m\cdot(m-1)(m-2)\ldots.4\cdot3\cdot2\cdot1}.$$

Примѣчаніе. Число множителей числителя и знаменателя одинаково и равно m.

§ **403.** Если въ формулѣ

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-m+1)}{m(m-1)(m-2)\ldots.4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

умножимъ числителя и знаменателя на произведеніе чиселъ

$$(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\ \ldots\ldots\ 4\cdot3\cdot2\cdot1$$

то получимъ:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-m+1)\,.\,(n-m)(n-m-1)\ldots\ldots4\cdot3\cdot2\cdot1.}{m(m-1)(m-2)\ldots.4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot(n-m)(n-m-1)\ldots.4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

Числитель представляетъ произведеніе убывающаго ряда натуральныхъ чиселъ отъ n до 1, а потому $=P_n$. Въ знаменателѣ рядъ

$$m(m-1)(m-2)\ldots.4\cdot3\cdot2\cdot1=P_m;$$

рядъ $$(n-m(n-m-1)\ldots.4\cdot3\cdot2\cdot1=P_{n-m},$$

а потому $$C_n^m=\frac{P_n}{P_m\,.\,P_{n-m}}.$$

§ 404. Теорема. **Число сочетаній изъ n элементовъ по m равно числу сочетаній изъ n элементовъ по $n-m$.**

Требуется доказать, что $C_n^m=C_n^{n-m}$.

На основаніи предыдущаго § имѣемъ:

$$C_n^m=\frac{P_n}{P_m\,.\,P_{n-m}};$$

$$C_n^{n-m}=\frac{P_n}{P_{m-n}\,.\,P_{n-(n-m)}}=\frac{P_n}{P_{n-m}\,.\,P_m}$$

откуда слѣдуетъ, что $C_n^m=C_n^{n-m}$.

То же самое можно доказать слѣдующимъ разсужденіемъ: если изъ группы n различныхъ элементовъ отберемъ m какихъ-нибудь элементовъ и изъ нихъ составимъ сочетаніе, то оставшіеся элементы, числомъ $n-m$, составятъ одно сочетаніе по $n-m$ элементовъ, и вообще каждому сочетанію изъ m какихъ-нибудь новыхъ элементовъ будетъ соотвѣтствовать одно сочетаніе изъ оставшихся $n-m$ элементовъ. Отсюда и заключаемъ о правильности теоремы.

Произведенiе биномовъ, у которыхъ первые члены равны.

§ **405.** Биномы $(x+a)$; $(x+b)$; $(x+c)$ и т. п. называются биномами, у которыхъ первые члены равны.

Составимъ произведенiя изъ двухъ, трехъ, четырехъ и т. д. биномовъ, отличающихся только вторыми членами:

$$(x+a)(x+b)=x^2+\left.\begin{array}{r}a\\+b\end{array}\right|x+ab.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+\left.\begin{array}{r}a\\+b\\+c\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{r}ab\\+ac\\+bc\end{array}\right|x+abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+\left.\begin{array}{r}a\\+b\\+c\\+d\\ \\ \\ \end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{r}ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{r}abc\\+abd\\+acd\\+bcd\\ \\ \\ \end{array}\right|x+abcd.$$

Правыя части этихъ формулъ расположены по степенямъ главной буквы, за которую принятъ общiй членъ биномовъ (x); различныя соединенiя изъ вторыхъ членовъ биномовъ приняты за коэффицiенты при главной буквѣ.

Подобныя же формулы получили бы для 5, 6, 7 и болѣе биномовъ.

§ **406.** Разсматривая правыя части этихъ формулъ, мы замѣчаемъ въ нихъ слѣдующiе законы:

I. Относительно общаго члена биномовъ (x), который принятъ за главную букву:

a) въ старшемъ членѣ главная буква имѣетъ показателемъ число данныхъ биномовъ;

b) въ слѣдующихъ членахъ показатель на единицу понижается;

c) въ послѣднемъ членѣ (извѣстномъ) показатель равенъ 0 ($x^0=1$) и потому не пишется.

II. Относительно коэффиціентовъ при главной буквѣ:

a) коэффиціентъ старшаго члена равенъ 1;

b) коэффиціентъ второго члена равенъ суммѣ сочетаній изъ вторыхъ членовъ биномовъ **по одному**; коэффиціентъ третьяго члена равенъ суммѣ сочетаній изъ вторыхъ членовъ биномовъ **по два**; коэффиціентъ четвертаго члена равенъ суммѣ соченаній изъ вторыхъ членовъ биномовъ **по три**, и т. д., вообще—коэффиціентъ r-го члена равенъ суммѣ сочетаній изъ вторыхъ членовъ биномовъ **по** $r-1$;

c) коэффиціентъ послѣдняго члена (при подразумѣваемомъ x^0), или извѣстный членъ равенъ произведенію вторыхъ членовъ перемножаемыхъ биномовъ.

III. Число всѣхъ членовъ произведенія на единицу болѣе числа перемножаемыхъ биномовъ.

§ **407.** Принимая во вниманіе вышеприведенные законы, можно написать общую формулу произведенія n биномовъ, отличающихся вторыми членами:

$$\left.\begin{aligned}\underbrace{(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+k)}_{n\text{ биномовъ}}=x^n+\overset{1}{S_n}x^{n-1}+\overset{2}{S_n}x^{n-2}+\\+\overset{3}{S_n}x^{n-3}+\ldots\ldots+\overset{r-1}{S_n}x^{n-r+1}+\ldots\ldots\overset{n-1}{S_n}x+\overset{n}{S_n}.\end{aligned}\right\}(\alpha)$$

гдѣ $\overset{1}{S}_n$, $\overset{2}{S}_n$, $\overset{3}{S}_n \ldots \overset{r-1}{S}_n \ldots \overset{n-1}{S}_n$, $\overset{n}{S}_n$ представляютъ коэффиціенты 2-го, 3-го, 4-го, ...r-го.... n-го, $(n+1)$-го членовъ, или суммы сочетаній изъ n вторыхъ членовъ биномовъ по 1, по 2, по 3, ... по r, ... , по $(n-1)$ и по n въ каждомъ сочетаніи, т. е.:

$\overset{1}{S}_n = a+b+c+ \ldots +k$; число слагаем. $= \overset{1}{C}_n = n$.

$\overset{2}{S}_n = ab+ac+ad+ \ldots +hk$; „ „ $= \overset{2}{C}_n = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$.

$\overset{3}{S}_n = abc+abd+ \ldots +ghk$; „ „ $\overset{3}{C}_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

. . . .

$\overset{r-1}{S}_n = \underbrace{abc\ldots f}_{r-1} + \underbrace{abc\ldots g}_{r-1} + \ldots$ число слагаем. $\overset{r-1}{C}_n = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (r-1)}$.

. . . .

$\overset{n-1}{S}_n = \underbrace{abc\ldots i}_{n-1} + \underbrace{abc\ldots k}_{n-1} + \ldots$; число слаг. $= \overset{n-1}{C}_n = n$.

$\overset{n}{S}_n = \underbrace{abc\ldots fghik}_{n}$; „ „ $=1$.

Покажемъ примѣненіе формулы (α) къ рѣшенію задачи:

$$(x+2)(x+3)(x-1)(x-5)=x^4+\overset{1}{S_4}x^3+\overset{2}{S_4}x^2+\overset{3}{S_4}x+\overset{4}{S_4}=$$

$$=x^4-x^3-19x^2-11x+30.$$

$$\overset{1}{S_4}=+2+3+(-1)+(-5)=-1$$

$$\overset{2}{S_4}=(2\cdot 3)+(2\cdot -1)+(2\cdot -5)+(3\cdot -1)+(3\cdot -5)+$$

$$(-1\cdot -5)=6-2-10-3-15+5=-19$$

$$\overset{3}{S_4}=(2\cdot 3\cdot -1)+(2\cdot 3\cdot -5)+(2\cdot -1\cdot -5)+$$

$$+(3\cdot -1\cdot -5)=-6-30+10+15=-11$$

$$\overset{4}{S_4}=2\cdot 3\cdot -1\cdot -5=+30.$$

Биномъ Ньютона.

§ **408.** Если въ формулѣ призведенія биномовъ (α) (см. § 407) примемъ, что вторые члены биномовъ тоже равны, т. е. $a=b=c=d\ldots\ldots=k$, то лѣвая часть формулы (α) приметъ видъ:

$$\underbrace{(x+a)(x+b)(x+c)\ \ldots\ldots\ (x+k)}_{n \text{ биномовъ}}=(x+a)^n;$$

въ правой же части:

$$\overset{1}{S_n}=\underbrace{a+a+a+\ \ldots\ldots\ +a}_{\overset{1}{C_n}}=\overset{1}{C_n}a=na;$$

$$S_n^2 = \underbrace{a^2 + a^2 + \ldots\ldots + a^2}_{C_n^2} = C_n^2 a^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2;$$

$$S_n^3 = \underbrace{a^3 + a^3 + \ldots\ldots + a^3}_{C_n^3} = C_n^3 a^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3;$$

$$S_n^4 = \underbrace{a^4 + a^4 + \ldots\ldots + a^4}_{C_n^4} = C_n^4 a^4 =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4;$$

. . . .

$$S_n^{r-1} \underbrace{a^{r-1} + a^{r-1} \ldots\ldots + a^{r-1}}_{C_n^{r-1}} = C_n^{r-1} a^{r-1} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (r-1)} a^{r-1};$$

. . . .

$$S_n^{n-1} = \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots\ldots + a^{n-1}}_{C_n^{n-1}} = C_n^{n-1} a^{n-1} = n.a^{n-1};$$

$$S_n^n = \underbrace{aaa \ldots\ldots a}_{n} = a^n.$$

На основаніи этихъ преобразованій вся формула произведенія n биномовъ (α) при условіи, что $a = b = c = \ldots\ldots = k$, принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2x^{n-2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^3x^{n-3} + \ldots + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots(r-1)}a^{r-1}x^{n-r+1} + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}x^2 + na^{n-1}x + a^n\end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Эта формула называется **биномомъ Ньютона**.

По этой формулѣ:

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + \frac{7\cdot6}{1\cdot2}a^2x^5 + \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}a^3x^4 +$$

$$\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^4x^3 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}a^5x^2 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}a^6x +$$

$$+ a^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 +$$

$$+ 7a^6x + a^7.$$

Послѣдній многочленъ называется **рядомъ разложенія по биному Ньютона.**

§ **409**. Для того, чтобы написать какой-либо членъ разложенія по биному Ньютона, не выписывая всего ряда, достаточно подставить въ формулу **общаго члена,** или, какъ мы будемъ называть, **r-го члена,** на мѣсто буквы r число, указывающее на порядокъ члена отъ начала, на мѣсто a второй членъ даннаго бинома, на мѣсто x первый членъ даннаго бинома на мѣсто n показатель степени даннаго бинома. Напр.: Чтобы опредѣлить пятый членъ бинома $(z-2)^{10}$, надо:

на мѣсто r подставить 5,
" " a " (-2),
" " x " z,
" " n " 10,

$$r\text{-ый членъ} = \frac{n(n-1)(n-2\ldots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(r-1)}a^{r-1}x^{n-r+1}$$

$$\text{Пятый членъ бинома } (z-2)^{10} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(-2)^4z^6 =$$

$$= 210\,.\,16z^6 = 3360z^6.$$

§ **410.** Изъ формулы бинома Ньютона (β) видно, что рядъ разложенія по биному Ньютона подчиненъ слѣдующимъ законамъ:

I. a) Показатель главной буквы (x) въ первомъ членѣ разложенія равенъ показателю степени бинома; показатель a равенъ 0;

b) показатели главной буквы въ слѣдующихъ по порядку членахъ убываютъ на единицу, а показатели второго члена возрастаютъ на единицу;

c) показатель главной буквы въ послѣднемъ членѣ разложенія равенъ 0, а второй членъ имѣетъ показателемъ показатель степени бинома.

d) сумма показателей перваго и второго члена бинома въ каждомъ членѣ разложенія равна показателю степени бинома (n).

II. a) Коэффиціентъ перваго члена разложенія равенъ 1, второго члена $= C_n^1 = n$, третьяго члена $= C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$;

четвертаго члена $= C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ и вообще коэффиціентъ r-го члена $= C_n^{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (r-1)}$.

Эти коэффиціенты называются **биноміальными.**

III. Число членовъ разложенія $= n+1$, т. е. на единицу болѣе показателя степени бинома.

Свойства бинома Ньютона.

§ **411**. 1) Если въ биномѣ Ньютона замѣнимъ второй его членъ $(+a)$ отрицательнымъ членомъ $(-b)$, то получимъ формулу разложенія отрицательнаго бинома:

$$(\gamma) \ldots \left\{ \begin{aligned} &(x-b)^n = x^n - nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b^2 x^{n-2} - \\ &- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3 x^{n-3} + \ldots \ldots + \\ &+ (-1)^{r-1} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (r-1)} b^{r-1} x^{n-r+1} + \\ &+ \ldots + \ldots \pm nb^{n-1}x \mp b^n \end{aligned} \right.$$

2) **Коэффиціенты членовъ, равно-отстоящихъ отъ концовъ разложенія, равны.**

Въ самомъ дѣлѣ, коэффиціенты перваго и послѣдняго равны каждый единицѣ;

коэффиціентъ второго отъ начала и предпослѣдняго равны каждый n, а именно

второго отъ начала . . . $C_n^1 = n$,

второго отъ конца ... $C_n^{n-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)} = n$

Вообще коэффиціентъ r-го отъ начала . . . C_n^{r-1}.

Найдемъ коэффиціентъ члена r-го отъ конца.

Такъ какъ всѣхъ членовъ въ разложеніи $n+1$, и за r-ымъ отъ конца находится еще $r-1$ членовъ, то порядокъ его отъ начала опредѣлится, если изъ $n+1$ вычтемъ $r-1$. Итакъ, r-ый членъ отъ конца является отъ начала членомъ $(n+1)-(r-1) = n+1-r+1 = (n-r+2)$-ымъ

Слѣдовательно, коэффиціентъ его

$$C_n^{(n-r+2)-1} = C_n^{n-r\ \ 2-1} = C_n^{n-r+1}.$$

Но на основаніи теоремы (см. § 404)

$$C_n^{r-1} = C_n^{n-r+1}.$$

Это и требовалось доказать.

3) Коэффиціентъ r-го члена разложенія бинома:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ .\ .\ .\ (n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ \ .\ .\ .\ \ (r-1)}$$

Коэффиціентъ $(r+1)$-го члена:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ .\ .\ .\ (n-r+2)(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(r-1)\cdot r}$$

а потому, умноживъ коэффиціентъ r-го члена на дробь

$$\frac{n-r+1}{r},$$

получаемъ коэффиціентъ слѣдующаго $(r+1)$-го члена.

4) **Биноміальные коэффиціенты** отъ начала разложенія до середины идутъ увеличиваясь, а отъ середины до конца— уменьшаясь.

Измѣненіе коэффиціентовъ послѣдовательныхъ членовъ зависитъ отъ множителя

$$\frac{n-r+1}{r},$$

на который надо умножить коэффиціентъ r-го, чтобы получить коэффиціентъ $(r+1)$-го, а потому, если этотъ множитель болѣе единицы, то новый коэффиціентъ болѣе предъидущаго.

Пусть
$$\frac{n-r+1}{r}>1,$$

откуда
$$n-r+1>r$$
$$n-r+1-r>0$$
$$-2r>-n-1$$
$$r<\frac{n+1}{2}$$

т. е. пока r (номеръ члена по порядку отъ. начала) менѣе половины числа членовъ разложенія, коэффиціенты увеличиваются.

А такъ какъ (второе свойство) коэффиціенты членовъ, равно-отстоящихъ отъ концовъ разложенія, равны, то во второй половинѣ разложенія коэффиціенты идутъ уменьшаясь.

5) Если показатель степени бинома (n) четное число, то число членовъ разложенія ($n+1$) нечетное число и средній членъ въ такомъ разложеніи одинъ.

Если же показатель степени бинома нечетный, то среднихъ членовъ два, у которыхъ коэффиціенты равны.

Это свойства упрощаетъ разложеніе Ньютонова бинома въ рядъ.

6) **Сумма абсолютныхъ величинъ биноміальныхъ коэффиціентовъ равна 2^n.**

Если въ формулѣ (β) примемъ $x=1$ и $a=1$, то получимъ:

$$(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots..+n+1,$$

но $(1+1)^n=2^n$, слѣдовательно свойство доказано.

7) **Сумма абсолютныхъ величинъ биноміальныхъ коэффиціентовъ четнаго порядка равна суммѣ абсолютныхъ величинъ коэффиціентовъ нечетнаго порядка.**

Если въ формулѣ разложенія отрицательнаго бинома (γ) примемъ $x=1$ и $b=1$, то получимъ:

$$(1-1)^n=1-n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\pm n\mp 1$$

или

$$0=1-n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ .\ .\ .\ .\ \pm n\mp 1.$$

Перенеся всѣ отрицательные члены (четные) въ лѣвую часть равенства, получимъ:

$$n+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\ldots=1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+\ldots\ldots$$

Послѣднее равенство доказываетъ справедливость 7-го свойства.

Примѣры задачъ на примѣненіе бинома Ньютона.

§ 412. **Задача** 1. Разложить въ рядъ $(ax+2b)^5$.

$$(ax+2b)^5=(ax)^5+5\,.\,2b\,.\,(ax)^4+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(2b)^2(ax)^3+$$

$$+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(2b)^3(ax)^2+5\,.\,(2b)^4\,.\,(ax)+(2b)^5=$$

$$=a^5x^5+10a^4bx^4+40a^3b^2x^3+80a^2b^3x^2+80ab^4x+32b^5.$$

Задача 2. Разложить въ рядъ $\left(x-\frac{a}{x}\right)^6$.

$$\left(x-\frac{a}{x}\right)^6=(x-ax^{-1})^6=x^6-6ax^{-1}\,.\,x^5+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(ax^{-1})^2x^4-$$

$$-\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}(ax^{-1})^3x^3+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(ax^{-1})^4x^2-6(ax^{-1})^5x+(ax^{-1})^6=$$

$$=x^6-6ax^4+15a^2x^2-20a^3+\frac{15a^4}{x^2}-\frac{6a^5}{x^4}+\frac{a^6}{x^6}.$$

Задача 3. Чему равенъ коэффиціентъ при a^5b^2 въ разложеніи $(a+b)^7$?

Такъ какъ показатель второго члена даннаго бинома, т. е. члена $+b$, равенъ 2 въ 3-мъ членѣ разложенія, то при a^5b^2 долженъ стоять коэффіціентъ третьяго члена, т. е.

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \text{ равный въ данномъ случаѣ, } \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}=21.$$

Задача 4. Въ разложеніи бинома $(a+b)^{16}$ опредѣлить коэффиціентъ того члена, въ которомъ показатели у a и b одинаковы.

Такъ какъ сумма показателей у обоихъ членовъ бинома во всякомъ членѣ разложенія должна быть равна показателю бинома, въ данномъ примѣрѣ 16, то нужно, очевидно, опредѣлить коэффиціентъ того члена разложенія, у котораго показатель каждой буквы равенъ 8; такимъ членомъ разложенія можетъ быть 9-ый, а потому, пользуясь коэффиціентомъ r-го члена

$$\frac{n(n-1)(n-2)\;\cdots\;(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\;\cdots\;(r-1)},$$

находимъ
$$\frac{16\cdot 15\;\cdots\;(16-9+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\;\cdots\;8}=$$

$$=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=$$

$$=13\cdot 11\cdot 10\cdot 9=32670.$$

Задача. 5. Опредѣлить въ разложеніи по биному Ньютона $\left(\sqrt[3]{a^2}-\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)^{12}$ тотъ членъ, который послѣ его приведенія къ простѣйшему виду будетъ содержать $a^{-\frac{1}{2}}$.

$$\left(\sqrt[3]{a^2}-\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)^{12}=\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{3}{4}}\right)^{12}.$$

Изъ формулы общаго (r-го) члена:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ (n-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ \cdot\cdot\cdot\cdot\ (r-1)}a^{r-1}x^{n-r+1}$$

возьмемъ буквенное выраженіе:

$$a^{r-1}x^{n-r+1}\quad . \quad . \qquad . \ (1)$$

и для выполненія условія задачи подставимъ въ выраженіе (1) на мѣсто второго члена бинома (a) второй членъ даннаго бинома $a^{-\frac{3}{4}}$, вмѣсто перваго члена (x) первый членъ даннаго бинома $a^{\frac{2}{3}}$, на мѣсто n число 12, и приравняемъ это выраженіе $a^{-\frac{1}{2}}$.

$$\left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^{r-1}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{12-r+1}=a^{-\frac{1}{2}}$$

$$a^{-\frac{3}{4}r+\frac{3}{4}}\cdot a^{8-\frac{2r}{3}+\frac{2}{3}}=a^{-\frac{1}{2}}$$

Отвуда $-\frac{3}{4}r+\frac{3}{4}+8-\frac{2r}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}$;

$$-9r+9+96-8r+8=-6$$

$$-17r=-119$$

$$r=7.$$

Непрерывныя дроби.

§ 413. Опредѣленіе. **Непрерывною дробью называется выраженіе, состоящее изъ цѣлаго числа съ дробью, у которой числитель 1, а знаменатель цѣлое число съ дробью, при чемъ у этой дроби числитель опять 1, а знаменатель цѣлое число съ дробью и т. д.**

Напр.:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f}}}}} \quad \ldots \ldots (\alpha)$$

Отдѣльныя части непрерывной дроби, а именно a, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{f}$ называются **составляющими дробями или звеньями.**

Непрерывная дробь называется **конечною**, если у нея ограниченное число звеньевъ, и **безконечною**, если у нея безконечное число звеньевъ.

Цѣлыя числа, которыя представляютъ первое звено и знаменатели всѣхъ остальныхъ звеньевъ, называются **неполными частными непрерывной дроби.**

Часто непрерывную дробь даютъ не въ ея полномъ видѣ (α), а въ видѣ только ея неполныхъ частныхъ, а именно:

(2 ; 1 , 3 , 4) вмѣсто $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$

Наоборотъ: $3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}=(3 ; 1 , 2 , 2 , 4)$

Примѣчаніе. Первое звено, т. е. цѣлое число непрерывной дроби обозначается нулемъ, если непрерывная дробь правильная.

Напр. $(0\,;\,2\,,\,2\,,\,1\,,\,2)=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$

§ **414. Непрерывную дробь можно обратить въ обыкновенную,** если выполнить всѣ указанныя въ ней дѣйствія, начиная съ послѣдняго.

Напр.: $$x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$$

$$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\,;\ 1:\frac{7}{2}=\frac{2}{7}\,;\ 2+\frac{2}{7}=\frac{16}{7}\,;$$

$$1:\frac{7}{16}=\frac{7}{16}\,;\ 1+\frac{7}{16}=\frac{23}{16}\,;\ 1:\frac{23}{16}=\frac{16}{23}\,;\ 2+\frac{16}{23}=\frac{62}{23}$$

$$x=\frac{62}{23}.$$

§ **415. Обыкновенную дробь можно обратить въ непрерывную, если послѣдовательно преобразовывать числителя смѣшаннаго числа въ единицу.**

Напр.: $$\frac{62}{23}=2+\frac{16}{23}=2+\frac{16:16}{23:16}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{7}{61}}=$$

$$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{7:7}{16:7}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{7}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2:2}{7:2}}}=$$

$$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$$

Разсматривая эти преобразованія, видимъ, что первое звено равняется неполному частному отъ дѣленія числителя на знаменатель данной обыкновенной дроби; знаменатель второго звена есть неполное частное отъ дѣленія знаменателя данной дроби на остатокъ отъ предъидущаго дѣленія; знаменатель третьяго звена есть неполное частное отъ дѣленія перваго остатка на второй остатокъ; знаменатель четвертаго звена есть неполное частное отъ дѣленія второго остатка на третій остатокъ, и т. д. Отсюда вытекаетъ болѣе скорый и простой способъ обращенія обыкновенной дроби въ непрерывную, подобный тому, какимъ отыскиваютъ общій наибольшій дѣлитель послѣдовательнымъ дѣленіемъ.

Напр.: $$\frac{85}{59}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}$$

	1	2	3	1	2	2
85	59	26	7	5	2	1
59	52	21	5	4	2	
26	7	5	2	1	0	

§ **416.** Опредѣленіе. **Подходящими дробями, или дробями приближенія для данной непрерывной дроби**

называются тѣ числа, которыя получимъ, если будемъ брать отъ непрерывной дроби послѣдовательно и каждый разъ отъ начала одно звено, потомъ два звена, три звена и т. д. и обращать ихъ въ обыкновенныя дроби.

Напр.: Для непрерывной дроби

$$x=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$$

I. дробь приближенія $=\frac{4}{1}=4$

II. „ „ $=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

III. „ „ $=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}=4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$

IV. „ „ $=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}=\frac{48}{11}$

V. „ „ $=x=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{109}{25}$

Примѣчаніе. Если первое звено $=0$, то и первая дробь приближенія $=0$.

Законъ составленія подходящихъ дробей.

§ 417. **Числитель всякой подходящей дроби (за исключеніемъ двухъ первыхъ) равняется соотвѣтствую-**

щему неполному частному, умноженному на числителя предшествующей подходящей дроби, + числитель передъ-предшествующей подходящей дроби;
знаменатель же равенъ соотвѣтствующему неполному частному, умноженному на знаменатель предшествующей подходящей дроби, + знаменатель предъ-предшествующей подходящей дроби.

Условимся при дальнѣйшемъ изложеніи обозначать подходящія дроби такъ:

I	неполное	частное	a	черезъ	$\frac{A}{A_1}$	
II	"	"	b	"	$\frac{B}{B_1}$	
III	"	"	c	"	$\frac{C}{C_1}$	
IV	"	"	d	"	$\frac{D}{D_1}$	
	"	"	m	"	$\frac{M}{M_1}$	
	"	"	n	"	$\frac{N}{N_1}$	и т. д.

Слѣдовательно, по вышеизложенному закону

$$\frac{D}{D_1}=\frac{d.C+B}{d.C_1+B_1}.$$

I подходящая дробь $\frac{A}{A_1}=\frac{a}{1}$, т. е. $A=a$, $A_1=1$.

II подходящая дробь $\frac{B}{B_1}=a+\frac{1}{b}=\frac{ba+1}{b}$, т. е.

$$B=ba+1 \text{ и } B_1=b.$$

III „ „ $\frac{C}{C_1}=a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}=$

$$=a+\frac{1}{\left(\frac{cb+1}{c}\right)}=a+\frac{c}{cb+1}=\frac{acb+a+c}{cb+1}=$$

$$=\frac{c(ba+1)+a}{cb+1}=\frac{c\,.\,B+A}{c\,.\,B_1+A_1}.$$

Послѣднее выраженіе показываетъ, что третья подходящая дробь дѣйствительно можетъ быть составлена по вышеизложенному закону.

Подобными же преобразованіями можно было бы показать, что и всѣ слѣдующія подходящія дроби могутъ быть составлены по этому закону.

Справедливость этого закона для каждой подходящей дроби доказывается способомъ „**перехода отъ p къ $p+1$**“.

Теорема 1. **Допустивъ, что этотъ законъ вѣренъ для p-ой по порядку дроби приближенія, докажемъ, что онъ также вѣренъ и для слѣдующей $(p+1)$-ой дроби приближенія.**

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\ldots}}}}}}}.$$

т. е. допустивъ, что $\dfrac{P}{P_1}=\dfrac{p\,.\,N+M}{p\,.\,N_1+M_1}$,

доказжемъ, что: $$\frac{Q}{Q_1}=\frac{q\,.\,P+N}{q\,.\,P_1+N_1}.$$

p-тая дробь приближенія имѣетъ своимъ неполнымъ частнымъ p, q-тая имѣетъ q; очевидно, что если въ выраженіе p-той дроби на мѣсто p подставимъ $p+\dfrac{1}{q}$, то p-тую дробь приближенія обратимъ въ q-тую, а потому

$$\frac{Q}{Q_1}=\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)N+M}{\left(p+\frac{1}{q}\right)N_1+M_1}=\frac{pN+\frac{N}{q}+M}{pN_1+\frac{N_1}{q}+M_1}=$$

$$=\frac{qpN+N+qM}{qpN_1+N_1+qM_1}=\frac{q(pN+M)+N}{q(pN_1+M_1)+N_1}=$$

$$=\frac{q\,.\,P+N}{q\,.\,P_1+N_1}.$$

Это и требовалось доказать.

Мы уже видѣли, что для третьей подходящей дроби законъ вѣренъ; слѣдовательно на основаніи доказанной теоремы заключаемъ, что онъ вѣренъ и для четвертой; если же вѣренъ для четвертой, то, на основаніи той же теоремы, онъ вѣренъ и для пятой и т. д.—онъ оказывается вѣрнымъ для всякой подходящей дроби.

Слѣдствіе. Числитель всякой послѣдующей дроби приближенія болѣе числителя предшествующей; то же и относительно знаменателей, т. е.

$$A < B < C < D \ldots < M < N < P < Q \ldots$$
$$A_1 < B_1 < C_1 < D_1 \ldots < M_1 < N_1 < P_1 < Q_1 \ldots$$

§ **418**. Теорема 2. **Всякая подходящая дробь заключается между каждыми двумя послѣдовательными дробями приближенія; при этомъ она больше одной и меньше другой, но всегда ближе къ послѣдующей.**

Доказательство. Возьмемъ три послѣдовательныхъ дроби приближенія

$$\frac{M}{M_1}, \quad \frac{N}{N_1}, \quad \frac{P}{P_1}.$$

Зависимость между ними слѣдующая:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{p \,.\, N + M}{p \,.\, N_1 + M_1}.$$

Если въ выраженіе p-той дроби приближенія на мѣсто неполнаго частнаго p подставимъ выраженіе

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{s + \ldots + \cfrac{1}{r}}},$$

т. е. p, соединенное со всѣми звеньями до $\frac{1}{r}$, то, очевидно, получимъ значеніе нѣкоторой дроби приближенія (x), соотвѣтствующей неполному частному r. Обозначивъ выраженіе

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{s + \ldots + \cfrac{1}{r}}}$$

буквою y, будемъ имѣть значеніе этой дроби въ такомъ видѣ:

$$x = \frac{yN + M}{yN_1 + M_1}.$$

Отсюда $$xyN_1 + xM_1 = yN + M$$

или $$xyN_1 - yN = M - xM_1$$

(1) . . . . $$yN_1\left(x - \frac{N}{N_1}\right) = M_1\left(\frac{M}{M_1} - x\right)$$

Числа y, N_1 и M_1 положительны, а потому послѣднее равенство требуетъ, чтобы разности, заключенныя въ скобкахъ, были одинаковаго знака, т. е.

или 1) $x - \frac{N}{N_1} > 0$ и $\frac{M}{M_1} - x > 0$

или 2) $x - \frac{N}{N_1} < 0$ и $\frac{M}{M_1} - x < 0$.

Изъ первой группы неравенствъ имѣемъ:

$$x > \frac{N}{N_1} \quad \text{и} \quad x < \frac{M}{M_1};$$

изъ второй группы неравенствъ имѣемъ:

$$x < \frac{N}{N_1} \quad \text{и} \quad x > \frac{M}{M_1}.$$

Первая часть теоремы доказана.

Докажемъ вторую часть.

Въ равенствѣ (1) $y>1$, $N_1>M_1$ (см. § 417 слѣдствіе), значитъ

$$yN_1 > M_1,$$

но при этомъ условіи равенство (1) требуетъ, чтобы

$$\text{абсолют. величина}\left(x-\frac{N}{N_1}\right) < \text{абсолют. величины}\left(\frac{M}{M_1}-x\right)$$

т. е. x ближе къ послѣдующей, чѣмъ къ предыдущей дроби приближенія. Это и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1. **Конечная непрерывная дробь заключается между каждыми двумя послѣдовательными дробями приближенія, при этомъ она больше одной и меньше другой, но всегда ближе къ послѣдующей.** Сказанное станетъ понятно, если мы вспомнимъ, что послѣдняя подходящая дробь выражаетъ точно истинную величину конечной непрерывной дроби.

Слѣдствіе 2. **Непрерывная дробь больше каждой нечетной дроби приближенія и меньше каждой четной,** потому что она несомнѣнно больше перваго неполнаго частнаго, т. е. первой дроби приближенія, слѣдовательно меньше второй, а потому она больше третьей и меньше четвертой, и т. д.

Слѣдствіе 3. **По мѣрѣ увеличенія номера по порядку подходящая дробь все болѣе и болѣе приближается къ величинѣ всей непрерывной дроби,** чѣмъ и объясняется названіе этихъ дробей **подходящими,** или **дробями приближенія.**

Слѣдствіе 4. **Подходящія дроби нечетнаго порядка увеличиваются, а четнаго порядка—уменьшаются**

$$\mathrm{I} < \mathrm{III} < \mathrm{V}\ . \qquad .\ \mathrm{II} > \mathrm{IV} > \mathrm{VI}\ .$$

Законъ разности между послѣдовательными дробями приближенія.

§ **410. Разность двухъ послѣдовательныхъ дробей приближенія равняется ± 1, дѣленной на произведеніе ихъ знаменателей.**

Провѣримъ сначала этотъ законъ на трехъ первыхъ дробяхъ приближенія непосредственнымъ вычитаніемъ одной изъ нихъ изъ другой.

$$\frac{a}{1},\quad \frac{ba+1}{b},\quad \frac{c(ba+1)+a}{cb+1}$$

1) $$a-\frac{ba+1}{b}=\frac{ab-ba-1}{b}=-\frac{1}{b}$$

2) $$\frac{ba+1}{b}-\frac{c(ba+1)+a}{cb+1}=\frac{ab^2c+cb+ba+1}{b(cb+1)}-$$

$$-\frac{cb^2a+cb+ab}{b(cb+1)}=\frac{ab^2c+cb+ba+1-cb^2a-cb-ab}{b(cb+1)}=$$

$$=\frac{+1}{b(cb+1)}.$$

Сдѣланныя вычисленія показываютъ, что первыя три послѣдовательныхъ дроби приближенія закону подчинены. Чтобы доказать, что ему подчинены всѣ подходящія дроби, докажемъ такую теорему:

Теорема 3. **Если этому закону подчинена разность между подходящими дробями порядковъ (n—1)-го и**

n-го, то ему же подчинена и разность между дробями n-го и $(n+1)$-го порядка.

Пусть дроби $\frac{M}{M_1}$, $\frac{N}{N_1}$, $\frac{P}{P_1}$ представляютъ соотвѣтственно дроби приближенія порядковъ:

$$(n-1)\text{-го}, \qquad n\text{-го}, \qquad (n+1)\text{-го}.$$

Дано: $$\frac{M}{M_1}-\frac{N}{N_1}=\frac{MN_1-M_1N}{M_1N_1}=\frac{\pm 1}{M_1N_1}.$$

Требуется доказать: $$\frac{N}{N_1}-\frac{P}{P_1}=\mp\frac{1}{N_1P_1}.$$

Разность: $$\frac{N}{N_1}-\frac{P}{P_1}=\frac{N}{N_1}-\frac{pN+M}{pN_1+M_1}=$$

$$=\frac{pNN_1+M_1N}{N_1(pN_1+M_1)}-\frac{pNN_1+MN_1}{N_1(pN_1+M_1)}=$$

$$=\frac{pNN_1+M_1N-pNN_1-MN_1}{N_1(pN_1+M_1)}=\frac{M_1N-MN_1}{N_1(pN_1+M_1)}.$$

Но изъ условія теоремы имѣемъ, что

$$MN_1-M_1N=\pm 1$$

слѣдовательно $$M_1N-MN_1=\mp 1,$$

а потому разность $$\frac{N}{N_1}-\frac{P}{P_1}=\frac{\mp 1}{N_1(pN_1+M_1)}=\frac{\mp 1}{N_1P_1}$$

и значитъ теорема справедлива.

Но такъ какъ непосредственнымъ вычитаніемъ было доказано, что закону подчиняются разности между дробями приближенія 1-ою и 2-ою, 2-ою и 3-ею, то на основаніи теоремы 3-ей заключаемъ, что тому же закону подчиняются разности между дробями 3-ею и 4-ою, 4-ою и 5-ою и т. д., т. е. что закону этому подчиняются разности какихъ угодно двухъ послѣдовательныхъ дробей приближенія. Двойной знакъ при 1 зависитъ отъ того, производится ли вычитаніе четной по порядку дроби изъ нечетной, или наоборотъ; въ первомъ случаѣ получается минусъ, во второмъ плюсъ.

Примѣчаніе. Иногда этотъ законъ формулируютъ такъ: **числитель разности двухъ послѣдовательныхъ дробей приближенія равенъ $\pm$ 1.**

Теорема 4. **Каждая дробь приближенія несократима.**

Доказательство. Для всякой дроби приближенія $\frac{N}{N_1}$ и предшествующей $\frac{M}{M_1}$ справедливо равенство:

$$NM_1 - N_1M = \pm 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Допустимъ, что дробь $\frac{N}{N_1}$ сократима, т. е. числитель и знаменатель ея имѣютъ общаго множителя, напр. k

$$N = kN' \text{ и } N_1 = kN_1'.$$

Подставивъ въ равенство (α) на мѣсто N и N_1 равносильныя имъ числа, мы получимъ:

$$kN'M_1 - kN_1'M = \pm 1, \quad \text{или} \quad N'M_1 - N_1'M = \pm \frac{1}{k}.$$

Послѣднее равенство невозможно, такъ какъ лѣвая часть есть число цѣлое, а правая дробь. Слѣдовательно, предположеніе, что дробь приближенія сократима—неправильно, и теорема справедлива.

Степень точности дроби приближенія.

§ 420. Степень точности, съ которою дробь приближенія выражаетъ всю непрерывную дробь, можно формулировать различно.

Вотъ одна изъ этихъ формулъ:

Теорема 5. **Дробь приближенія отличается отъ всей непрерывной дроби менѣе, чѣмъ на единицу, дѣленную на квадратъ знаменателя дроби приближенія.**

Требуется доказать, что $x - \frac{N}{N_1} < \frac{1}{N_1^2}$.

Доказательство. $x - \frac{N}{N_1} = \frac{yN + M}{yN_1 + M_1} - \frac{N}{N_1} =$

$$= \frac{yNN_1 + MN_1 - yNN_1 - M_1N}{(yN_1 + M_1)N_1} = \frac{MN_1 - M_1N}{(yN_1 + M_1)N_1}.$$

Но $MN_1 - M_1N = \pm 1$, потому что представляетъ числитель разности послѣдовательныхъ дробей приближенія

$\frac{M}{M_1}$ и $\frac{N}{N_1}$, а потому $x - \frac{N}{N_1} = \frac{\pm 1}{(yN_1 + M_1)N_1}$.

Чтобы опредѣлить степень точности приближеннаго значенія какой-нибудь величины, достаточно опредѣлить разность между ними, независимо отъ знака этой разности.

Абсолютная величина $\left(x - \frac{N}{N_1}\right) = \frac{1}{yN_1^2 + M_1N_1}$.

Если въ знаменателѣ послѣдней дроби отбросимъ членъ M_1N_1, то значеніе знаменателя уменьшимъ, а значеніе всей дроби увеличимъ, и слѣдовательно

абсолютная величина $\left(x - \frac{N}{N_1}\right) < \frac{1}{yN_1^2}$.

Такъ какъ $y > 1$, то, отбросивъ его отъ знаменателя, мы тѣмъ самымъ знаменатель уменьшаемъ, а значеніе дроби увеличиваемъ, и потому a fortiori имѣемъ неравенство:

абсолютная величина $\left(x - \frac{N}{N_1}\right) < \frac{1}{N_1^2}$. Это и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Каждая послѣдующая дробь приближенія выражаетъ величину непрерывной дроби болѣе точно, чѣмъ предшествующая.

421. Задача. Указать между дробями приближенія ту, которая раньше другихъ выражаетъ непрерывную дробь съ точностью до $\frac{1}{n}$.

Пусть эта дробь будетъ $\frac{N}{N_1}$; тогда дробь $\frac{N}{N_1}$ должна быть такою, чтобы

абсолютная величина $\left(x - \frac{N}{N_1}\right) < \frac{1}{n}$;

но абсолютная величина $\left(x-\frac{N}{N_1}\right)<\frac{1}{N_1^2}$,

значитъ требованію будетъ удовлетворять та дробь, у которой $N_1^2=n$ или $N_1=\sqrt{n}$.

Очевидно, если знаменатель N_1 будетъ болѣе $\sqrt{n}$, то степень точности будетъ больше требуемой, а потому N_1 можетъ быть и $>\sqrt{n}$.

Отсюда: **Та дробь выражаетъ непрерывную дробь съ точностью до $\frac{1}{n}$, знаменатель которой равенъ или болѣе $\sqrt{n}$.**

Напр.: Для непрерывной дроби $\frac{534}{337}$ указать ту дробь приближенія, которая выражаетъ ее съ точностью до $\frac{1}{225}$.

$$x=\frac{534}{337}=(1;\,1,\,1,\,2,\,2,\,5,\,5)$$

	1	1	1	2	2	5	5
534	337	197	140	57	26	5	1
337	197	140	114	52	25	5	
197	140	57	26	5	1	0	

I дробь приближенія $=1$

II „ „ $=2$

III „ „ $=\frac{1\cdot2+1}{1\cdot1+1}=\frac{3}{2}$

IV „ „ $=\frac{2\cdot3+2}{2\cdot2+1}=\frac{8}{5}$

$$\text{V дробь приближенія} = \frac{2 \cdot 8 + 3}{2 \cdot 5 + 2} = \frac{19}{12}$$

$$\text{VI} \quad „ \qquad „ \qquad = \frac{5 \cdot 19 + 8}{5 \cdot 12 + 5} = \frac{103}{65}$$

$$\text{VII} \quad „ \qquad „ \qquad = x = \frac{5 \cdot 103 + 19}{5 \cdot 65 + 12} = \frac{534}{337}.$$

$$N_1 \geqslant \sqrt{225} \geqslant 15.$$

$$\begin{array}{r|l} & \;1 \\ \hline 25 & 125 \\ 5 & 125 \\ \hline & \;\;0 \end{array}$$

Слѣдовательно требованію удовлетворяетъ VI дробь приближенія $= \frac{103}{65}$.

Нахожденіе пары рѣшеніи неопредѣленнаго уравненія.

§ **422**. Неопредѣленное уравненіе $7x + 25y = 432$. Изъ коэффиціентовъ при x и y составимъ неправильную дробь $\frac{25}{7}$ и обративъ, ее въ непрерывную, найдемъ всѣ дроби приближенія.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 3 & 1 & 1 & 3 \\ \hline \frac{25}{4} & \frac{7}{3} & \frac{4}{1} & \frac{3}{0} & 1 \end{array} \; ; \; \frac{25}{7} = (3;\, 1,\, 1,\, 3).$$

I дробь приближенія $= 3$;

II „ „ $= 4$;

III „ „ $= \frac{1 \cdot 4 + 3}{1 \cdot 1 + 1} = \frac{7}{2}$;

IV „ „ $= \frac{25}{7}$.

Составимъ формулу числителя разности двухъ послѣднихъ подходящихъ дробей:

$$\frac{7}{2} - \frac{25}{7} = \frac{7 \cdot 7 - 25 \cdot 2}{2 \cdot 7} = \frac{-1}{2 \cdot 7},$$

слѣдовательно $7 \cdot 7 - 25 \cdot 2 = -1$.

Сдѣлаемъ правую часть этого равенства равною правой части даннаго неопредѣленнаго уравненія, т. е. умножимъ всѣ члены на (-432):

$$-7 \cdot 7 \cdot 432 + 25 \cdot 2 \cdot 432 = 432.$$

Сравнивая послѣднее равенство съ даннымъ уравненіемъ, видимъ, что уравненіе удовлетворяется слѣдующими цѣлыми значеніями

для $x = -7 \cdot 432 = -3024$

для $y = 2 \cdot 432 = 864$.

Числа -3024 и 864 представляютъ первую пару рѣшеній. Дальнѣйшее рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія см. §§ 368, 369 и 370.

Безконечныя непрерывныя дроби.

§ **423.** Положимъ, намъ дана безконечная непрерывная дробь

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5+\cfrac{1}{a_6}}}}}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Пусть $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_4}{Q_4}, \ldots \ldots \frac{P_n}{Q_n} \ldots$ ея подходящія дроби.

Располагая по порядку нечетныя подходящія дроби въ одинъ рядъ, а четныя въ другой, получимъ два неограниченныхъ ряда чиселъ:

$$\text{I.}\quad \frac{P_1}{Q_1};\ \frac{P_3}{Q_3};\ \frac{P_5}{Q_5}\ \ldots \ldots \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} \ldots \ldots$$

$$\text{II.}\quad \frac{P_2}{Q_2};\ \frac{P_4}{Q_4};\ \frac{P_6}{Q_6}\ \ldots \ldots \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \ldots \ldots$$

На основаніи теоремъ §§ 418 и 419 эти два ряда обладаютъ слѣдующими свойствами:

1) Числа перваго ряда возрастаютъ (4 слѣдствіе § 418). Числа второго ряда убываютъ.

2) Каждое изъ чиселъ перваго ряда меньше каждаго изъ чиселъ второго ряда (4 слѣдствіе § 418).

3) Разность между соотвѣтствующими числами того и другого ряда неограниченно убываетъ. Въ самомъ дѣлѣ $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}-\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}=\frac{1}{Q_{2n}Q_{2n-1}}$; гдѣ Q_{2n} и Q_{2n-1} по мѣрѣ увеличенія порядка подходящихъ дробей неограниченно возра-

стаютъ; слѣдовательно дроби $\frac{1}{Q_{2n}Q_{2n-1}}$ неограниченно убываютъ.

Указанныя свойства позволяютъ заключить, что числа I и II-го ряда стремятся къ одному и тому же общему предѣлу. Болѣе подробное разсмотрѣніе вопроса показываетъ, что такимъ предѣломъ можетъ служить только ирраціональное число. Истиннымъ значеніемъ безконечной непрерывной дроби и называется то ирраціональное число, которое служитъ общимъ предѣломъ для ряда четныхъ и нечетныхъ подходящихъ дробей. Очевидно, истинное значеніе дроби заключается между двумя рядомъ стоящими подходящими дробями; такъ что каждая нечетная подходящая дробь выражаетъ непрерывную съ недостаткомъ, а каждая четная выражаетъ ее съ избыткомъ, при чемъ мѣрой точности можетъ служить разность между этими дробями.

Можно доказать, что всякое ирраціональное число разлагается въ безконечную непрерывную дробь. Вычисляя для нея подходящія дроби, мы получимъ ея приближенныя значенія, а вмѣстѣ съ тѣмъ и приближенныя значенія ирраціональнаго числа, разложеннаго въ дробь.

§ 424. Покажемъ на примѣрѣ $\sqrt{20}$, какъ найти приближенныя значенія для него при помощи непрерывныхъ дробей. Очевидно, что $\sqrt{20}$ равенъ цѣлому числу 4 сложенному съ нѣкоторою дробью, которую назовемъ $\frac{1}{x}$, гдѣ подъ x слѣдуетъ разумѣть число, соотвѣтствующее равенству:

$$\sqrt{20}=4+\frac{1}{x}.$$

Опредѣлимъ, чему должно равняться число x:

$\frac{1}{x} = \sqrt{20} - 4$; слѣдовательно $x = \frac{1}{\sqrt{20} - 4} = \frac{\sqrt{20} + 4}{4}$.

Такъ какъ дробь $\frac{\sqrt{20} + 4}{4}$ равняется цѣлому числу 2 съ дробью, то, назвавъ эту дробь черезъ $\frac{1}{y}$, найдемъ, какому числу должно равняться y:

$$\frac{\sqrt{20} + 4}{4} = 2 + \frac{1}{y},$$

отсюда $\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{20} + 4}{4} - 2 = \frac{\sqrt{20} + 4 - 8}{4} = \frac{\sqrt{20} - 4}{4}$,

а слѣдовательно $y = \frac{4}{\sqrt{20} - 4} = \frac{4(\sqrt{20} + 4)}{4} = \sqrt{20} + 4$.

Но $\sqrt{20} + 4 = 8 + \frac{1}{z}$,

откуда

$\frac{1}{z} = \sqrt{20} + 4 - 8 = \sqrt{20} - 4$; и $z = \frac{1}{\sqrt{20} - 4}$ и т. д.

Итакъ $\sqrt{20} = 4 + \frac{1}{x} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{z}}} =$

$$= 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{z}}}}} \ldots .$$

Слѣдовательно $\sqrt{20}$ равенъ періодической непрерывной дроби:

$$(4;\ 2,\ 8,\ 2,\ 8,\ .\ .\ .\ .\ .)$$

Найдемъ дроби приближенія:

Неполное частное	4	2	8	2	8	. . . .
дроби приближенія	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{76}{17}$	$\frac{161}{36}$	$\frac{1364}{305}$	. .

Напр.: 4-ое приближеніе $= \frac{161}{35} = 4,47(2)$

$$\sqrt{20} = 4,4721$$

	16
84	400
4	336
887	6400
7	6209
8942	19100
2	17884
89441	121600

Изъ сравненія результатовъ видно, что 4-ое приближеніе $\frac{161}{36}$ выражаетъ $\sqrt{20}$ съ точностью до 0,001, т. е. даетъ вѣрными 3 десятичныхъ знака.