УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ТРУДОВОЙ ШКОЛЫ

Д. А. БЕМ, А. А. ВОЛКОВ, Р. Э. СТРУВЕ

АЛГЕБРА

ПОЛНЫЙ СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ И ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОМУ КУРСУ

Допущено Научно-Педагогической Секцией Государственного Ученого Совета

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД
1924

Государственное Издательство
типографии
Печатный
Двор
Ленинград
Гатчинская 26

Гиз. № 10010 Ленинградский Гублит № 7248. 36 л. Отпеч. 10000 экз.

Предисловие к третьему изданию.

Выпуская в свет одним томом третье издание «Полного сборника упражнений и задач по элементарному курсу алгебры», части I и II, составители считают необходимым указать те изменения, которым подвергся «Сборник».

Прежде всего,— исправлены промахи и недочеты, замеченные в предыдущем издании. Введен ряд новых задач, часть задач изменена, некоторые отделы дополнены, а некоторые сокращены.

Д. Бем, Р. Струве.

Апрель, 1924 г.

Из предисловия к первому изданию.

Предлагаемый сборник упражнений и задач по алгебре представляет переработку реформированного издания задачника Бардей: Bardey-Lietzmann «Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis Reformausgabe». Причины, заставившие составителей положить в основание своего труда сборник Литцмана, заключаются в достоинствах последнего и главным образом в соответствии его содержания задачам реформы преподавания математики,— реформы, являющейся предметом обширной литературы, изданной Международной Комиссией по преподаванию математики, и обсуждений на международных математических съездах.

Из сборника Литцмана заимствован главным образом материал для упражнений и задач; расположение материала сохранено в тех случаях, когда оно не противоречило взглядам составителей. Помимо использования указанного материала в сборник внесено, с одной стороны, большое количество задач (число задач и упражнений увеличено почти вдвое), с другой стороны, в него внесен ряд отделов, не затронутых у Литцмана; усилена методическая разработка материала и внесен «догматический» жирный шрифт. Некоторые отделы составлены вновь, как, например, отдел об отрицательных числах и отдел о приближенных вычислениях. Дополнения, внесенные в сборник, частью составлены вновь, частью заимствованы из иностранных источников, главным образом из New Algebra Barnard'a и Child'a. Кроме того, с разрешения А. П. Полякова, использованы задачи из учебника алгебры П. Н. Полякова.

Д. Бем, А. Волков, Р. Струве.

Москва, июль 1913 г.

Часть I.

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Употребление букв.

§ 1. Число и действия. Геометрическое представление чисел на прямой (ось).

1. Начертить прямую, выбрать на ней произвольную точку O (начало) и в определенном направлении (вправо) отложить на ней:

1) 1 *см*, 2 *см*, 3 *см*, 4 *см* и т. д.
2) 1 *дм*, 2 *дм*, 3 *дм*, 4 *дм* и т. д.

2. Назвать ряд натуральных чисел (числа, получаемые при счете, называются **натуральными** или **целыми** числами) и представить их точками на оси в масштабе: 1) единица = 1 *см*; 2) единица = 5 *мм*.

3. Какое число изображается точкой, расстояние которой от начала равно: 1) 6 *см*, 2) 10 *см*, 3) 15 *см*, 4) 2 *дм*, 5) 4 *дм*, 6) 1 *м*, 7) 8 *мм*, 8) 6 *мм*, 9) 15 *мм*, если принять масштаб:

1) единица = 1 *см*; 2) единица = 2 *мм*;
3) единица = 2 *см*, 4) единица = 1 *дм*.

4. Приняв масштаб: единица = 4 *см*, изобразить на прямой числа: 3; 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{40}$; 0,25; 0,4; 0,6; 0,75.

5. Что значит сложить два натуральных числа, например 2 и 3? Какой знак употребляется при сложении и как он называется? Как называются числа, данные для сложения? Как называется результат сложения?

6. Как записать, что требуется сложить 2 и 3? Как прочитать $5 + 7$?

7. Показать на числовой прямой (на оси), что

1) $3+5=8$; 2) $5+3=8$; 3) $2+7=9$; 4) $7+2=9$.

8. Произвести на оси сложение чисел:

1) 3, 5, 2; 2) 5, 3, 2; 3) 2, 7, 1; 4) 1, 7, 2.

В каком направлении перемещаемся мы при сложении? Всегда ли выполнимо сложение двух натуральных чисел?

9. Что значит вычесть 3 из 5? Какое действие называется вычитанием? Как изображается и как называется знак, употребляемый при вычитании? Как называется число, из которого вычитают? Как называется число, которое вычитают? Как называется результат вычитания? Как записать решение задачи: вычесть 3 из 5?

10. Показать на числовой прямой, что

1) $5-3=2$; 2) $5-2=3$; 3) $8-3=5$; 4) $8-5=3$.

11. Построить на оси разности:

1) $6-3$; 2) $6-4$; 3) $6-5$; 4) $6-6$; 5) $6-7$.

12. В каком направлении мы перемещаемся при вычитании? Есть ли на оси помеченные точки слева от O? Всегда ли выполнимо вычитание натуральных чисел? Указать, в каком случае вычитание выполнимо и в каком — нет.

13. Что значит умножить 4 на 5? Что называется умножением на целое число? Какой знак употребляется при умножении? Как называются числа, данные для умножения? Как называется результат умножения? Как записать решение задачи: 4 умножить на 5?

14. Показать на оси, что

1) $2\cdot 3=6$; 2) $3\cdot 2=6$; 3) $3\cdot 5=15$; 4) $5\cdot 3=15$.

15. Какое число получается при умножении натурального числа на натуральное? Всегда ли выполнимо умножение двух натуральных чисел?

16. Что значит разделить 20 на 4? Какое действие называется делением? Какой знак употребляется для обозначения деления? Как называются данные и искомое в делении? Как записать решение задачи: разделить 20 на 4?

17. Произвести на оси деление:

1) $6:2$; 2) $6:3$; 3) $10:5$; 4) $10:2$.

18. Всегда ли деление одного натурального числа на другое выполняется без остатка? Каким числом может быть выражен результат деления, когда оно не выполняется без остатка?

19. Как записать решение задачи:

1) $8:3$; 2) $3:5$?

20. Произвести на оси сложение (выбрав подходящий масштаб):

1) $1+\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$; 3) $0,6+0,3$; 4) $1,2+2\frac{3}{5}$.

21. Что значит сложить две одноименные дроби? Всегда ли выполнимо сложение двух дробей?

22. Произвести на оси вычитание:

1) $1-0,2$; 2) $1-\frac{4}{5}$; 3) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$; 4) $0,6-0,1$;
5) $0,6-0,3$; 6) $0,6-0,4$; 7) $0,6-0,5$; 8) $0,6-0,7$.

Всегда ли выполнимо вычитание двух дробей?

23. Произвести на оси умножение:

1) $\frac{3}{4}\cdot 2$; 2) $\frac{3}{4}\cdot 4$; 3) $0,4\cdot 3$; 4) $0,3\cdot 6$.

24. Произвести умножение:

1) $2\cdot\frac{3}{4}$; 2) $4\cdot\frac{3}{4}$; 3) $3\cdot 0,4$; 4) $6\cdot 0,3$;
5) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}$; 6) $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}$; 7) $1\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{3}$; 8) $2\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{2}$.

25. Что значит умножить число на $\frac{3}{5}$?

26. Произвести деление:

1) $\frac{15}{23}:3$; 2) $\frac{13}{15}:2$; 3) $\frac{3}{7}:\frac{4}{5}$;
4) $\frac{4}{5}:\frac{3}{7}$; 5) $1\frac{2}{3}:1\frac{1}{5}$; 6) $1\frac{1}{5}:1\frac{2}{3}$.

Всегда ли выполнимо деление на дробь?

27. Какая связь существует между сложением и вычитанием? В каком смысле вычитание называется действием, обратным сложению?

28. В чем состоит связь между делением и умножением? В каком смысле деление называется действием, обратным умножению?

29. В каком случае сложение может быть названо умножением?

30. Как называются числа, входящие в следующие соотношения:

1) $12+4=16$; 2) $16-4=12$; 3) $5\cdot 7=35$; 4) $35:7=5$?

Сложить два натуральных числа значит к единицам первого числа присчитать единицы второго.

Сложить две одноименные дроби значит к долям одной дроби присчитать доли другой дроби.

Вычесть из одного числа другое значит найти число, приложив которое ко второму, получим первое.

Умножить данное число на натуральное число значит взять данное число слагаемым столько раз, сколько единиц в натуральном множителе.

Умножить данное число на дробь значит разделить данное число на знаменатель дроби и результат умножить на числитель. Умножением на дробь называется *совокупность* двух действий: деления на знаменатель дроби и умножения на числитель.

Разделить одно число на другое значит найти число, умножив которое на второе из данных чисел, получим первое.

Сложение и умножение называются *прямыми* действиями, вычитание и деление — *обратными*. Сложение и вычитание называются действиями *первой ступени*, умножение и деление — действиями *второй ступени*.

§ 2. Значение скобок и их употребление.

31. Указать, в каком порядке должны быть произведены действия в следующих примерах, и вычислить:

1) $(3+5)+4$; 2) $3+(5+4)$; 3) $(8-3)+2$;
4) $8-(3+2)$; 5) $(8-4)-3$; 6) $8-(4-3)$;
7) $[(2+3)+4]+7$; 8) $[(8-2)+3]-5$.

Как записать эти примеры без скобок?

32. Опустить скобки в следующих примерах и объяснить, почему это не повлияет на результат:

1) $(2+7)+5$; 2) $(1000+100)+1$;
3) $(20-11)-3$; 4) $(1000-100)+1$;
5) $[(10+8)-1]+17$; 6) $[(2000+300)+20]+7$.

33. Указать в следующих примерах, где можно опустить скобки, где нельзя, и почему:

1) $(25-10)+8$; 2) $25-(10+8)$;
3) $(25+7-11)+8$; 4) $(25+7)-(11+8)$;
5) $[(36-14)-2]+6$; 6) $[36-(14-2)]+6$;
7) $36-[(14-2)+6]$; 8) $(36-14)-(2+6)$.

34. Указать, в каком порядке должны быть произведены действия в следующих примерах, и вычислить:

1) $(4\cdot 3)\cdot 5$; 2) $4\cdot(3\cdot 5)$; 3) $(8:4)\cdot 2$;
4) $8:(4\cdot 2)$; 5) $(48:8):2$; 6) $48:(8:2)$.

Как записать эти примеры без скобок, чтобы результат при этом не изменился?

35. Опустить скобки в следующих примерах и объяснить, почему результат от этого не изменится:

1) $(18 \cdot 5) \cdot 2$; 2) $(48 \cdot 6) : 12$; 3) $(45 : 3) : 5$; 4) $(48 \cdot 6) \cdot 12$.

36. Указать в следующих примерах, где можно опустить скобки, где нельзя, и почему:

1) $(60 : 4) \cdot 3$; 2) $60 : (4 \cdot 3)$; 3) $(144 \cdot 6) : 2$;
4) $144 \cdot (6 : 2)$; 5) $[(3 \cdot 5) \cdot 6] : 2$; 6) $(3 \cdot 5) \cdot (6 : 2)$.

37. Указать, в каком порядке должны быть произведены действия в следующих примерах, и вычислить:

1) $(12 \cdot 4) + (5 \cdot 3)$; 2) $(12 \cdot 4 + 5) \cdot 3$;
3) $12 \cdot (4 + 5) \cdot 3$; 4) $12 \cdot [4 + (5 \cdot 3)]$;
5) $(600 \cdot 120) - (15 \cdot 4)$; 6) $(600 \cdot 120 - 15) \cdot 4$;
7) $600 \cdot (120 - 15) \cdot 4$; 8) $600 \cdot [120 - (15 \cdot 4)]$.

38. Опустить скобки в следующих примерах и объяснить, почему результат от этого не изменится:

1) $(20 \cdot 3) + (2 \cdot 12)$; 2) $(20 \cdot 3) - (2 \cdot 13)$;
3) $(40 : 2) + (30 : 3) + (10 \cdot 2)$; 4) $(10 \cdot 3) + (7 \cdot 2) - (5 \cdot 3)$;
5) $3 + (20 : 5) - (2 \cdot 3)$; 6) $14 - (10 : 5) + (3 \cdot 4)$.

39. Указать в следующих примерах, где можно опустить скобки, где нельзя, и почему:

1) $(20 \cdot 3) + (2 \cdot 12)$; 2) $20 \cdot (3 + 2 \cdot 12)$; 3) $(20 \cdot 3 + 2) \cdot 12$;
4) $20 \cdot (3 + 2) \cdot 12$; 5) $(40 \cdot 30) - (2 \cdot 5)$; 6) $40 \cdot (30 - 2 \cdot 5)$;
7) $(40 \cdot 30 - 2) \cdot 5$; 8) $40 \cdot (30 - 2) \cdot 5$.

40. Указать, в каком порядке следует произвести действия, и вычислить:

1) $20 \cdot 3 - 5 \cdot 10 + 4 \cdot 7$; 2) $5 \cdot 7 \cdot 3 - 2 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4$;
3) $30:6 + 40:5 - 15:3$; 4) $60 - 40:5 + 3 \cdot 6$;
5) $360:3 - 3 \cdot 30 + 70$.

Если требуется произвести какое-либо действие над результатом или результатами других действий, то для указания порядка действий употребляются скобки.

Прежде всего производятся действия над числами, заключенными в скобки, а затем над полученными результатами производятся действия, обозначенные знаками, стоящими между скобками.

Если внутри скобок стоят еще скобки, то раньше производятся действия во *внутренних* скобках.

Если пропуск скобок не может вызвать недоразумений, то скобки опускаются.

Для уменьшения числа скобок принят следующий порядок выполнения действий в выражении, записанном без скобок:

1) действия одной и той же ступени производятся в том порядке, в котором они обозначены;

2) если приходится производить действия различных ступеней, то сперва производятся действия высшей ступени, а потом низшей;

3) всякое отступление от принятого порядка производства действий обозначается скобками.

§ 3. Употребление букв.

41. Начертить квадрат и вычислить его площадь, если сторона его, измеренная в сантиметрах, выражается числом:

1) 2; 2) 3; 3) 5.

42. Определить площадь квадрата, если сторона его, измеренная в верстах, равна:

1) 10; 2) 100; 3) 1000; 4) a; 5) b; 6) x.

43. Начертить прямоугольник и вычислить площадь, если стороны его, измеренные в *см*, выражаются соответственно числами:

1) 3 и 4; 2) 5 и 6.

44. Определить площадь прямоугольника, если стороны его, измеренные в дюймах, выражаются соответственно числами:

1) 5 и 10; 2) 10 и 100; 3) 25 и 40; 4) 3 и a; 5) a и 2; 6) b и 7; 7) a и b; 8) b и x; 9) x и y.

45. Определить объем куба, если ребро его, измеренное в дюймах, выражается числом:

1) 1; 2) 5; 3) 10; 4) a; 5) b; 6) x.

46. Определить объем прямоугольного бруса, если ребра его, измеренные в дюймах, выражаются соответственно числами:

1) 1, 2, 3; 2) 5, 7, 8; 3) 6, 3, 2; 4) 3, 2, a; 5) 3, a, 4; 6) b, 5, 7; 7) 2, a, b; 8) a, 3, b; 9) x, y, 8; 10) a, b, c; 11) p, q, r; 12) x, y, z.

47. Записать произведения чисел:

1) 3, 5; 2) 3, a; 3) a и b; 4) 4, 3, a; 5) 4, b, a; 6) c, b, a; 7) x, 3, y; 8) a, x, z; 9) a, a, a.

48. Прочитать всеми возможными способами ab, $5a$, xy, $9x$. Как можно написать эти выражения иначе?

49. Записать сумму чисел:

1) 3 и 5; 2) a и 5; 3) 3 и b;
4) a и b; 5) x и y; 6) $2a$ и $3b$.

50. Что получится, если сложить числа:

1) 3 и 5; 2) 3 и $5a$; 3) $3a$ и 5; 4) x и $2y$;
5) a и $2b$; 6) $4z$ и $7t$: 7) $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$; 8) $\frac{3}{4}x$ и $\frac{1}{4}$;
9) $\frac{3}{4}x$ и $\frac{1}{4}x$; 10) $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}y$; 11) $\frac{3}{4}x$ и $\frac{1}{4}y$; 12) a, b, c?

51. Прочитать:

1) $a+b$; 2) $3x+y$; 3) $5a+2y$.

52. Назвать натуральное число, следующее в числовом ряде за числом:

1) 5; 2) 100; 3) a; 4) $3x$;
5) $a+1$; 6) $2n$; 7) $2n+1$; 8) $10x$.

53. Написать натуральное число, занимающее в числовом ряде:

1) 2-ое место после числа 3; 2) 2-ое место после числа a;
3) 5-ое » » » x; 4) 6-ое » » » $10a$;
5) k-ое » » » l; 6) b-ое » » » $10a$.

54. Одному брату a лет; другой старше его на:

1) 3 года; 2) 10 лет; 3) b лет.

Сколько лет второму брату?

55. Вес товара нетто a *кг;* тара b *кг.* Чему равен вес брутто?

56. Стороны треугольника, измеренные в *см*, равны:

1) 5, 8, 10; 2) a, 6, 13; 3) a, b, c.

Чему равен **периметр** (сумма сторон) треугольника?

57. Написать разность чисел:

1) 5 и 2; 2) a и 3; 3) a и b.

Всегда ли можно вычесть число 3 из числа a?
» » » » число b из числа a?

58. Что получится, если вычесть:

1) x из y; 2) 5 из a; 3) a из $10b$;
4) a из 7; 5) $3a$ из $6b$; 6) $10x$ из $100y$;
7) 0,1 из a; 8) m из $1\frac{1}{4}$; 9) $0{,}1x$ из $0{,}1z$,

если числа, стоящие на первых местах, меньше чисел, стоящих в тех же примерах на вторых местах.

59. Прочитать:

1) $a-b$; 2) $a-5$; 3) $7-b$;
4) $2x-5$; 5) $10-2x$; 6) $6x-0{,}5y$.

В каком случае написанные выражения имеют смысл?

60. Какое натуральное число занимает в числовом ряду:

1) 3-ье место перед числом 8; 2) 3-ье место перед числом a;
3) 6-ое » » » x; 4) k-ое » » » l?

Всегда ли такое число существует?

61. Брату x лет; сестра на 3 года моложе. Сколько лет сестре?

Всегда ли эта задача имеет смысл?

62. Наращенный капитал 1200 р.; прибыль a рублей. Чему равен основной капитал?

63. В полдень термометр показывал $t°$; к полуночи он опустился на $k°$. Сколько показывал термометр в полночь?

64. Записать произведение чисел:

1) 3 и 6; 2) 5 и a; 3) a и b; 4) x и x.

Почему можно пропускать знак умножения между множителями, если один из них или оба обозначены буквами, и нельзя, если оба множителя записаны цифрами?

65. Записать частное, которое получится при делении:

1) 16 на 2; 2) 16 на 5; 3) a на b; 4) x на y.

66. Чему равно частное, если

	1)	2)	3)	4)	5)
делимое =	15	a	15	p	$6a$
делитель =	5	5	b	q	a

67. Прочитать:

1) $m:n$; 2) $3:a$; 3) $b:5$.

68. Найти натуральное число, которое

1) в 5 раз меньше числа 40; 2) в 3 раза меньше числа n;
3) » 5 » » » $10n$; 4) » k » » » l;
5) » m » » » $10m$.

Ответы каких из написанных задач имеют смысл всегда, каких иногда, и в каком именно случае?

69. На a копеек куплены сырые яйца, по 2 коп. штука. Сколько яиц куплено? Каким числом должно быть a, чтобы ответ имел смысл?

70. Роздано p яблок нескольким детям, при чем каждому дано q яблок. Скольким детям розданы яблоки? Каким числом должно быть p, чтобы ответ имел смысл?

71. 1) Записать сумму числа a и произведения чисел x и y;
2) записать разность числа a и произведения чисел b и c;
3) записать сумму числа m и частнаго от деления p на q;
4) записать сумму произведений a на x и b на y.

72. 1) Назвать натуральное число, занимающее в числовом ряду 5-ое место;
2) назвать число, занимающее в числовом ряду n-ое место;
3) назвать число, следующее за числом n;
4) назвать число, предшествующее числу n;
5) назвать число, стоящее на n-ом месте после n.

73. 1) Какое число на 5 больше числа p?
2) » » » 5 меньше » p?
3) » » » 9 больше » p?
4) » » » p больше » q?
5) » » » $3\frac{1}{2}$ больше » a?
6) » » » $5\frac{1}{2}$ меньше » b?

В каких из этих задач может и не существовать искомых чисел? При выполнении каких условий эти задачи имеют ответ?

74. 1) Насколько число 8 больше числа 3?
2) » » $a+5$ » » a?
3) » » $a+5$ » » 5?
4) » » a » » b?
5) » » $3a$ » » $2a$?
6) » » $a+b$ » » b?
7) » » $a+3b$ » » $1\frac{1}{2}b$?

В каком случае задача 4) не имеет решения?

75. 1) Какое число на 5 меньше 11?
2) » » » 7 » $x+7$?
3) » » » x » $x+7$?
4) » » » m » n?
5) » » » $2p$ » $3p$?

Какие из этих задач не всегда имеют решение?

76. 1) Указать число, которое в 2 раза больше числа 6;
2) » » » » 3 » » » a;
3) » » » » k » » » 5;
4) » » » » p » » » q;
5) » » » » a » » » a.

77. 1) Найти число, которое при делении на 2 дает в частном 15;
2) » » » » » » 3 » » » m;
3) » » » » » » x » » » 10;
4) » » » » » » a » » » x;

78. 1) Найти число, которое составляет 4-ую часть числа 48;
2) найти число, которое составляет 5-ую часть числа 7;
3) найти число, которое составляет 6-ую часть числа a;
4) найти число, которое составляет k-ую часть числа 10;
5) найти число, которое составляет q-ую часть числа p.

79. 1) Найти число, которое при умножении на 3 дает в произведении 15;
2) найти число, которое при умножении на 6 дает в произведении 11;
3) найти число, которое при умножении на 4 дает в произведении a;
4) найти число, которое при умножении на a дает в произведении 12;
5) найти число, которое при умножении на m дает в произведении p.

80. Как можно записать при помощи числа n всякое четное число, если под n разуметь любое натуральное число?

81. 1) Найти число, которое при делении на 5 дает в частном 3 и в остатке 4;
2) найти число, которое при делении на 2 дает в частном n и в остатке 1;
3) найти число, которое при делении на 3 дает в частном p и в остатке 2;
4) найти число, которое при делении на 10 дает в частном a и в остатке b;
5) найти число, которое при делении на q дает в частном a и в остатке r.

82. Написать общее выражение всякого нечетного числа, воспользовавшись числом n, под которым разумеется любое натуральное число.

83. 1) Сколько единиц содержит число, состоящее из b десятков?
2) сколько единиц содержит число, состоящее из c сотен?
3) сколько единиц содержит число, состоящее из d тысяч?
4) сколько единиц содержит число, состоящее из k миллионов?

84. Сколько всего единиц содержит число, состоящее:
1) из b десятков и a единиц?
2) из c сотен и b десятков?
3) из c сотен и a единиц?
4) из c сотен, b десятков и a единиц?

85. Пользуясь буквами a, b, c, d . . . для обозначения чисел разрядных единиц в каждом разряде:
1) написать общее выражение всякого двузначного числа, не оканчивающегося нулем;

2) написать общее выражение трехзначного числа, цифра десятков которого есть нуль;
3) написать общее выражение трехзначного числа, цифра единиц которого нуль;
4) написать общее выражение всякого трехзначного числа, ни одна цифра которого не есть нуль.

86. Написать число, содержащее x тысяч, y сотен, z десятков, t единиц.

Написать число, обозначенное теми же цифрами, но в обратном порядке.

87. Сколько метров в составном именованном числе m *км*, n *гм*, p *дкм*, q *м*?

88. Выразить в золотниках a фунтов b золотников?

89. Выразить в граммах составное именованное число: a тонн (тонна $=1000$ *кг*) b *кг*.

90. Выразить в сутках T юлианских годов и t суток.

В алгебре часто бывает выгодно обозначать числа буквами. Каждая буква стоит вместо некоторого числа. Если в одной и той же задаче одна и та же буква встречается два или несколько раз, то она стоит вместо одного и того же числа. Когда числа, входящие в задачу, обозначены буквами, то задача считается решенной, если обозначены те действия, которые следует произвести над данными числами, чтобы получить ответ.

Соединение чисел (записанных цифрами или обозначенных буквами) при помощи знаков действий—называется алгебраическим выражением.

Выражение, в которое не входят знаки сложения и вычитания, называется *одночленом*.

Выражение, представляющее соединение нескольких одночленов при помощи знаков сложения или вычитания, называется *многочленом*.

§ 4. Числовые значения буквенных выражений.

91. Какие значения принимает $a+4$ при $a=1, 2, 3, \ldots 10$? Отметить эти значения на числовой прямой.

92. Какие значения принимает $12-b$ при $b=1, 2, 3, \ldots 10$? Отметить эти значения на числовой прямой.

93. Какие значения принимает $n=3a$ при $a=1, 2, 3, 4, 5$? Отметить эти значения на числовой прямой.

94. Какие значения имеет $\frac{1}{4}b$ при 1) $b=1;\ 2;\ 3;\ 4;$

» » » » » 2) $b=\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5}$?

Построить эти значения на числовой прямой, выбрав подходящий масштаб (единица масштаба $=40$ *см*).

95. Какие значения принимает $10a$ при

1) $a = 1; 2; 3; 5; 7; 9$? 2) $a = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}4; 0{,}8$?

96. Какие значения принимает $0{,}1x$ при

1) $x = 1; 2; 3; 5; 7; 10; 20$? 2) $x = 0{,}1; 0{,}5; 0{,}8; 10{,}5$?

97. Какие значения принимает $0{,}01x$ при $x = 1000; 10; 1; 0{,}1; 0{,}001$?

98. Какие значения принимает $a + b$, если a и b получают значения от 1 до 5?

99. Построить $a + b$, если a и b даны в виде отрезков.

100. Какие значения принимает $a + 2b$, если $b = 100$ и a получает значения, кратные 10-ти; если $a = 100$, а b получает значения, кратные 10-ти?

101. Построить $a + 2b$, если a и b даны в виде отрезков.

102. Какие значения принимает: 1) $4n + 1$, 2) $4n - 1$, 3) $8n + 5$, если n получает последовательные целые значения.

103. Какие значения принимает $a - b$, если a получает ряд последовательных целых значений, начиная с 6, $ab = 4$? Построить полученные результаты на числовой прямой.

104. Построить $a - b$, если a и b (a больше b) даны в виде отрезков.

105. Какие значения принимает $2x + y$, 1) если $x = 1$, а y принимает значения 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 и т. д. до 1? 2) если $y = 10$, а x принимает значения: 0,2; 0,4; 0,5; 1?

106. Чему равно при $x = 5$:

1) $3x$;	2) $3x + 2$;	3) $3x + 2x$;	4) $2x + 1$;
5) $2x + 2$;	6) $2x + 3$;	7) $2 + x$;	8) $2 + 2x$;
9) $2 + 3x$;	10) $x - 1$;	11) $x - 2$;	12) $x - 3$;
13) $x - 4$;	14) $x - 5$;	15) $x - 6$;	16) $2x - 1$;
17) $2x - 3$;	18) $2x - 5$;	19) $2x - 7$;	20) $2x - 9$;
21) $2x - 11$;	22) $10 - x$;	23) $8 - x$;	24) $6 - x$;
25) $20 - 2x$;	26) $20 - 3x$;	27) $20 - 4x$;	28) $10x + 3$;
29) $10x + 5$;	30) $10x + 7$;	31) $10x - 3$;	32) $10x - 5$;
33) $10x - 7$?			

107. Чему равно при $x = 2$ и $y = 3$:

1) $3x + 3y$;	2) $2x + 3y$;	3) $2y + 3x$;
4) $3y - 3x$;	5) $3y - 2x$;	6) $3x - 2y$;
7) $x + y + 5$;	8) $x + y + 7$;	9) $x + y + 9$;
10) $10x + y$;	11) $10y + x$;	12) $10x + 10y$;
13) $100x + 10y + 5$;	14) $100x + 10y + 3$;	15) $100x + 10y + 1$;
16) $10x - y$;	17) $10x - 2y$;	18) $10x - 5y$;
19) $100x - 10y - 1$;	20) $100y - 10x - 1$;	21) $100y - 10 - x$;
22) $30x - 20y$;	23) $1{,}5x - y$;	24) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3}$?

108. Чему равно при $x = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{3}{8}$:

1) $2x + y$; 2) $2x - y$; 3) $2y - x$; 4) $100x - y$;
5) $10y - x$; 6) $100x - 10y$; 7) $x + \frac{1}{2}y$; 8) $x - \frac{1}{2}y$;
9) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$; 10) $\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}y$; 11) $\frac{1}{5}x - \frac{1}{6}y$; 12) $2x - \frac{1}{2}y$;
13) $1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}y$; 14) $1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{3}y$; 15) $2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{3}y$.

109. Чему равно при $x = 10$, $y = 0{,}2$:

1) $10x + 10y$; 2) $10x - 10y$; 3) $x - 10y$;
4) $2x + y$; 5) $2x - y$; 6) $0{,}2x - y$;
7) $0{,}02x - y$; 8) $0{,}5x + 2{,}5y$; 9) $0{,}5x - 2{,}5y$;
10) $10x + 100y$; 11) $10x - 100y$; 12) $0{,}1x - 5y$?

110. Построить $a + b - c$, если a, b и c даны в виде отрезков. Когда это построение возможно?

111. Вычислить значения:

$$x = a - b - c - d; \qquad y = a - b - c - d;$$
$$z = a + b - c - d; \qquad t = a + b + c - d,$$

если

	a	b	c	d
1)	1000	100	10	1
2)	40	15	5	2
3)	10	2	0,5	0,1
4)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$.

112. Какие числа получаются при подстановке в $10a$, вместо a, всех целых чисел от 1 до 9?

113. Какие числа получаются при подстановке в $10a + b$, вместо a и b, всех натуральных чисел от 1 до 9?

114. Какие числа могут быть записаны в виде:

$$100a + 10b + c?$$

115. Какие числа могут быть записаны в виде:

$$1000a + 100b + 10c + d?$$

116. Какие числа нужно подставить, вместо a, b, c и d, в формуле предыдущей задачи, чтобы получить: 1) 3825; 2) 4785; 3) 9215; 4) 5756; 5) 2357; 6) 7532; 7) 1987; 8) 7891?

117. Какие числа следует подставить вместо x, y, z в выражение

$$100x + 10y + z,$$

чтобы получить все трехзначные числа, которые можно записать цифрами 1, 2 и 3?

118. Какие значения принимает произведение $a.b$,

1) если a имеет постоянное значение 10, а b получает последовательные целые значения от 1 до 9?

* 2) Если b остается постоянно равным 5, а a получает последовательные целые значения от 1 до 9?

119. При каких значениях b деление $a:b$ выполняется без остатка, если $a = 20$?

120. Какие значения принимает частное $a:b$,

если 1) $b = 10$, а a принимает все целые значения от 1 до 20?
2) $a = 8$, » b » » » » » 1 » 16?

121. Чему равно при $x = 2$, $y = 3$:

1) xy; 2) yx; 3) $x + y$;
4) $2xy$; 5) $7yx$; 6) $xy + yx$;
7) $xy + x$; 8) $yx + x$; 9) $xy - 5yx$;
10) $xy - 5$; 11) $5xy - 5$; 12) $5xy - 5y$;
13) $10xy - 5yx$; 14) $10xy - 5y - 5x$; 15) $100xy - 10x - y$?

122. Чему равно при $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$:

1) abc; 2) bac; 3) bca;
4) $abc + ac$; 5) $abc + ab$; 6) $abc + bc$;
7) $3ab + 5bc$; 8) $3ac + 5ab$; 9) $10ac - 2bc$?

123. Чему равно при $x = 10$, $y = 5$:

1) $x : x$; 2) $y : x$; 3) $20x : 2y$;
4) $10y : 5x$; 5) $(3x + y) : y$; 6) $(x + 3y) : y$;
7) $(3x - y) : 5y$; 8) $(3y - x) : y$; 9) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y\right) : y$;
10) $(0{,}2xy - 0{,}1y) : y$; 11) $2y + 3x : 4$; 12) $3x + 2y : 5$?

124. Чему равно при $x = 2$, $y = 0{,}5$:

1) $4x + 3y$; 2) $4x - 3y$; 3) $4y - x$; 4) $0{,}1x - 0{,}1y$;
5) $0{,}1x - \frac{1}{5}y$; 6) $0{,}1x - 0{,}4y$; 7) $xy - 1$; 8) $2xy + x + y$;
9) $x : y - 2$?

Числовым значением выражения называется то число, которое получится, если буквы заменить данными числами (значениями этих букв) и произвести над ними действия, указанные знаками.

§ 5. Знак равенства. Тожества и уравнения.

125. Проверить следующие равенства:

1) $a + b = b + a$; 2) $ab = ba$;
3) $a - (b + c) = a - b - c$; 4) $a - (b - c) = a - b + c$;
5) $a + a + a = 3a$; 6) $a + a + b + b + a = 3a + 2b$;
7) $a + b - b + a = 2a$; 8) $a + b + c - a = b + c$;

при a	6	100	325	$\frac{5}{6}$	0,1
b	4	10	111	$\frac{3}{4}$	0,05
c	3	1	33	$\frac{2}{3}$	0,01

126. Дано равенство: $S = a + b$;

1) чему равно S, если $a = 5$, $b = 3$;
2) » » a, » $S = 6$, $b = 2$;
3) » » b, » $S = 5$, $a = 4$?

127. Дано равенство: $r = x - y$;

1) чему равно r, если $x = 8$, $y = 5$;
2) » » x, » $r = 1$, $y = 10$;
3) » » y, » $r = 0$, $x = 100$?

128. Дано равенство: $c = pv$;

1) чему равно c, если $p = 760$, $v = 100$;
2) » » p, » $c = 1500$, $v = 2$;
3) » » v, » $c = 1$, $p = 760$?

129. Дано равенство: $d = \frac{m}{v}$:

1) чему равно d, если $m = 16$; $v = 20$;
2) » » m, » $d = 9$, $v = 1000$;
3) » » v, » $d = 1$, $m = 1$?

130. Показать, что равенства (уравнения):

1) $4x = 20$ выполняются при $x = 5$;
2) $x + 7 = 11$ » » $x = 4$;
3) $x - 7 = 11$ » » $x = 18$;
4) $x : 10 = 10$ » » $x = 100$;
5) $x + y = 12$ » » $x = 5$, $y = 7$;
6) » » » $x = 3$, $y = 9$;
7) » » » $x = 1$, $y = 11$;
8) $2x + 3y = 30$ » » $x = 12$, $y = 2$;
9) » » » $x = 3$, $y = 8$;
10) » » » $x = 9$, $y = 4$.

131. Показать, что $x = 3$ есть корень следующих уравнений:

1) $x + 5 = 8$; 2) $x - 2 = 1$; 3) $9x = 27$; 4) $\frac{x}{3} = 1$.

132. Подставляя вместо x последовательно числа: 1, 2, 3, 4... и т. д., узнать, чему равно x, если

1) $3 + x = 7$; 2) $x + 5 = 13$; 3) $x - 4 = 5$;
4) $7 - x = 2$; 5) $4x = 16$; 6) $x \cdot 7 = 21$;
7) $10 : x = 2$; 8) $x : 10 = 2$; 9) $2x + 1 = 5$;
10) $2x - 1 = 5$; 11) $40x - 1 = 159$; 12) $33x + 1 = 100$.

133. Решить уравнения:

1) $x+7=15$; 2) $y+10=100$; 3) $x-9=20$;
4) $z-9=0$; 5) $15x=75$; 6) $50z=50$;
7) $x:8=6$; 8) $\frac{y}{3}=19$.

134. Какое действие определяется каждым из уравнений (неизвестное x):

1) $a+x=b$; 2) $x+a=b$?

Как выражается x через a и b?

135. Какое действие определяется каждым из уравнений (неизвестное x):

1) $a \cdot x=b$; 2) $x \cdot a=b$?

Как выражается x через a и b?

136. Выяснить, подставляя вместо букв произвольные числа, какие из следующих равенств представляют тожества и какие уравнения:

1) $a+1=n+a-n+1$; 2) $a+b-c=a-c+b$;
3) $a+1=7$; 4) $7+a=70$;
5) $x+xy+y=y+yx+x$; 5) $2ax=4a$.

Соединение двух выражений знаком равенства называется *равенством.*

Выражение, стоящее в равенстве слева от знака равенства, называется *левой* или *первой частью* равенства, справа — *правой* или *второй частью* равенства.

Если левая часть равенства оказывается равной правой части, какие бы числа мы ни подставляли вместо букв, то равенство называется *алгебраическим тожеством.*

Если левая часть равенства не равна правой части его при всяких значениях букв, то равенство называется *уравнением;* некоторые из букв в уравнении называют неизвестными; *решить уравнение* значит узнать, при каких значениях неизвестных левая часть уравнения равна правой; эти значения неизвестных называются *корнями уравнения.*

§ 6. Знаки неравенства. Неравенства.

137. Записать:

1) 20 больше 7; 2) 7 меньше 20;
3) a » b; 4) b » a.

138. Прочитать:

1) $1000>900+90+9$; $x>3$; $a+9>9$;
2) $5>5-3$; $x-3<x$; $a-9<9$.

139. Записать при помощи алгебраических знаков, что
1) сумма двух чисел a и b больше каждого из слагаемых;
1) разность двух чисел a и b меньше уменьшаемого.

140. Записать при помощи алгебраических знаков (всеми возможными способами) условие, при котором разность $a - b$ имеет смысл.

141. Записать, что сумма двух чисел a и b больше их разности.

142. Проверить, что если

$$a > b, \text{ то и } a + m > b + m,$$
$$a - m > b - m.$$

при

a	15	1,64	$\frac{1}{2}$	100
b	10	0,64	$\frac{1}{3}$	10
m	6	0,5	$\frac{1}{6}$	1.

143. Проверить, что если

$$a < b, \text{ то и } a + m < b + m,$$
$$a - m < b - m,$$

при

	a	b	m
1)	4	6	3
2)	1,33	1,66	0,66.

144. Подставляя, вместо x, 1, 2, 3 и т. д., узнать, при каких значениях x:

1) $x + 1 > 2$; 2) $x + 1 < 5$; 3) $x + 5 > 7$;
4) $x + 5 < 7$; 5) $7 - x > 2$; 6) $9 - x > 5$;
7) $x - 2 < 3$; 8) $x + 5 < 8$?

145. При каких целых значениях x выполняются неравенства:

1) $x + 5 > 8$; 2) $x - 5 > 8$; 3) $x + 5 < 8$; 4) $x - 5 < 8$;
5) $5 + x > 6$; 6) $5 - x < 6$; 7) $5 + x < 6$; 8) $5 - x > 6$?

146. Указать, больше (или меньше) какого числа должно быть x, чтобы имело место неравенство:

1) $a + x > b$; 2) $a + x < b$; 3) $x + a > b$; 4) $x + a < b$;
5) $x - a > b$; 6) $x - a < b$; 7) $a - x > b$; 8) $a - x < b$?

7. Коэффициент. Приведение.

147. Написать возможно короче следующие выражения:

1) $a + a$; 2) $b + b + b$;
3) $x + x + x + x + x$; 4) $ax + ax + ax$;

5) $abc + abc + abc$; 6) $pq + pq + pq + pq + pq + pq$;
7) $am + am + am + am$; 8) $xyz + xyz + xyz + xyz$;
9) $abcd + abcd + abcd$; 10) $mpqs + mpqs + mpqs + mpqs$.

148. Записать без коэффициента:

1) $3a$; 2) $5x$; 3) $7z$; 4) $6ab$; 5) $4abc$;
6) $9axy$; 7) $3pqr$; 8) $11a$; 9) $15abc$.

149. Показать (записывая слагаемые без коэффициентов), что:

1) $2a + 3a = 5a$; 1) $6x + 3x = 9x$;
3) $a + 2a + 3a = 6a$; 4) $3y + 4y + 5y = 12y$;
5) $4ab + 3ab + 6ab = 13ab$; 6) $xy + 3xy + 5\,xy = 9xy$;
7) $abc + 4abc + 7abc = 12abc$; 8) $pq + 6pq + 11pq = 18pq$.

150. Написать возможно короче следующие выражения:

1) $\frac{a}{12} + \frac{a}{12} + \frac{a}{12} + \frac{a}{12} + \frac{a}{12}$;

2) $\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x$; 3) $\frac{xy}{7} + \frac{xy}{7} + \frac{xy}{7} + \frac{xy}{7}$;

4) $\frac{1}{9}abc + \frac{1}{9}abc + \frac{1}{9}abc + \frac{1}{9}abc$;

5) $\frac{a + a + a + a}{b + b + b}$; 6) $\frac{p + p + p}{q + q + q + q + q}$;

7) $a + a + a + \frac{1}{5}\,a + \frac{1}{5}a$;

8) $xy + xy + \frac{xy}{6} + \frac{xy}{6} + \frac{xy}{6} + \frac{xy}{6} + \frac{xy}{6}$;

9) $a + a + b + b + b$.

Коэффициентом называется сомножитель, записанный цифрами.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Четыре основные действия.

§ 8. Сложение и вычитание одночленов.

$a + b = b + a$ (переместительный закон).

151. Проверить равенство:

$$a + b = b + a,$$

	1	2	3	4	5	6
при $a = 3$	5	$1\frac{1}{2}$	0,5	1,4	$1\frac{1}{2}$
$b = 1$	6	$\frac{1}{2}$	0,2	0,6	0,4.

152. Показать на оси, что

1) $3 + 5 = 5 + 3$; 2) $a + b = b + a$;
3) $a + b + c = a + c + b = c + b + a$,

если a, b и c даны в виде отрезков.

153. Вычислить наиболее коротким путем:

1) $7 + 65$; 2) $9 + 386$; 3) $2 + 927$;
4) $17 + 385$; 5) $795 + 873 + 5$; 6) $8 + 583 + 92$;
7) $863 + 471 + 29$; 8) $9 + 673 + 117$.

154. Написать возможно короче выражения:

1) $2a + 5b + 7a$; 2) $5x + 2y + 11x$;
3) $7a + b + 3a + b$; 4) $a + 7b + b + 2a$;
5) $6a + x + a + 3x$; 6) $a + 2b + 3b + 5a$;
7) $2x + y + 3x + y + 4x$;
8) $a + 2b + 2a + 4b + 3a + 6b$;
9) $a + 2x + 5a + 2x + 9a$;
10) $9x + y + 7x + 4y + 5x + 7y$;
11) $3\frac{2}{7} + 5{,}32 + 4\frac{3}{14} + 6{,}18$;
12) $9\frac{5}{11} + 6\frac{1}{3} + 4\frac{1}{22} + 3\frac{1}{6} + 5{,}5$;
13) $9{,}01 + 5\frac{7}{9} + 6{,}99 + 6\frac{1}{18}$;
14) $8\frac{3}{11} + 0{,}66 + 5\frac{7}{33} + 2{,}34$.

155. Вычислить наиболее коротким путем:

1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$;
2) $30 + 31 + 32 + 33 + 34 + \ldots + 40$;
3) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 100$;
4) $101 + 102 + 103 + 104 + \ldots + 1000$;
5) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$;
6) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + \ldots + 50$;
7) $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$;
8) $5a + b + 7c + 3b + a + 8c + 3a + 9b$;
9) $8x + 7y + 9z + y + 7x + z + 5y + 6z + x$;
10) $8\frac{1}{2} + 9\frac{3}{4} + 3\frac{5}{6} + 7\frac{1}{2} + 4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{4} + 5$;
11) $7\frac{1}{5} + 8\frac{2}{7} + 3\frac{1}{6} + 7\frac{2}{5} + 4\frac{1}{3} + 3\frac{5}{7} + 2\frac{2}{5} + 5\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2}$;
12) $a + 2\frac{1}{3}b + 1\frac{3}{5}a + 3\frac{2}{3}b + 3\frac{1}{5}a + 5b + 4\frac{4}{5}a$;
13) $a + 3b + 1\frac{5}{7}a + 1\frac{1}{2}a + 5\frac{1}{2}b + 2\frac{1}{2}a + 6\frac{1}{2}b + 6\frac{2}{7}a$;
14) $3\frac{2}{9}x + 4\frac{3}{7}x + 5y + 6\frac{5}{9}x + 4y + 5\frac{4}{7}x + 16y + 1\frac{2}{9}$;
15) $7{,}5 + 2{,}75 + 0{,}5 + 12{,}25 + 625$;

16) $14,2 + 0,63 + 7,8 + 0,99 + 4,37 + 5 + 2,01$;
17) $0,05a + 1,4b + 1,1a + 0,25b + 6,6b + 0,95a +$
$+ 9,75b + 11,9a$;
18) $0,4ab + 0,6bc + 0,8ac + 1,6ab + 1,6bc + 1,6ac +$
$+ 0,4bc + 6,2ac$;
19) $\frac{3}{4}abc + 0,56bcd + 0,06abc + \frac{2}{3}bcd + 1\frac{3}{4}abc + \frac{1}{3}bcd +$
$+ 0,94abc + 0,44bcd$.

156. Показать на числовых примерах и на оси, что

1) $a + b - b = a$;
2) $a - b + b = a$;
3) $b + a - b = a$.

157. Вычислить наиболее коротким путем или привести к простейшему виду:

1) $753 - 58 + 58$; 2) $927 + 354 - 354$;
3) $9a - 17x + 17x$; 4) $6x - 3a + 3a$;
5) $4x + y - 2x - y$; 6) $5z + 2x - 2z - 2x$;
7) $6ax + 2by - 3ax - by$; 8) $abc + 4xyz - abc - xyz$.

158. Показать на числовых примерах и на оси, что

$$a + b - c = a - c + b; \qquad (1)$$
$$a - b - c = a - c - b. \qquad (2)$$

Подобрать значения a, b, c так, чтобы левая часть равенства (1) имела смысл, а правая — смысла не имела. Можно ли подобрать такие значения для a, b, c, чтобы в равенстве (2) одна часть равенства имела смысл, а другая — смысла не имела?

159. Проверить, что в выражениях

1) $a + b + c + d$; 2) $a - b + c + d$;
3) $a - b - c + d$; 4) $a - b - c - d$,

результат подстановки не будет меняться, в каком бы порядке мы ни записывали числа b, c, d, если перед каждым из этих чисел сохранять тот знак, который поставлен перед ним в соответствующем примере:

	a	b	c	d
1)	300	30	10	3
2)	1	0,1	0,01	0,001.

160. Упростить выражения:

1) $17a + 6b - 4a$; 2) $19a - 24b + a$;
3) $26 - 7x + 9$; 4) $18x - 5 + 23x$;
5) $1793 - 829 - 93$; 6) $2861 + 954 - 1861$;
7) $13\frac{5}{7} + 4\frac{1}{2} - 2\frac{5}{7}$; 8) $5\frac{3}{5} - 3,2 + 2\frac{3}{5}$;

9) $2{,}688 + 2{,}699 - 0{,}788$; 10) $4\frac{2}{3} + 0{,}6 - 2\frac{1}{6}$;
11) $45 - 3a - 15$; 12) $13x - 9y - 3x$;
13) $17406 + 498 - 5406$; 14) $36584 + 444 - 26584$;
15) $1{,}444 + 0{,}999 - 0{,}444 + 0{,}001$;
16) $3\frac{5}{7} - 0{,}648 + 2\frac{2}{7} + 2{,}648$;
17) $15x - 3y + 4x - y$; 18) $17x - 4y + 5x + 4y$;
19) $5a - 2y + 4a + 2y$; 20) $40m - 30n + 10m + 31n$;
21) $16x - 12y + 16y - 16x$;
22) $40x + 15y + 40x - 16y$;
23) $9a - 3b + 5a + 7b - 8a - b$;
24) $10a - 8b - 3b - 6a + 12b$;
25) $5a - 7x + 5x - 3a + 2x - a$;
26) $x - 3y + 5x - 4y + 8y - 6x$;
27) $a + b + a + 2b + a + 3b + a + 4b + a + 5b$;
28) $a - b + a - 2b + a - 4b + a - 8b + a - 16b$;
29) $40a = b - 2c + 39a + 3b - 6c + 38a + 5b - 10c$;
*30) $40a - b + 2c - 39a + 3b - 6c + 38a - 5b + 10c$;
31) $4a - 5b + 3c - 2b - c + a + 9b + 3a$;
32) $5a + 8b - 7c - 2a - 9b + 2c - 2a + 2b + 6c$;
33) $1{,}1m + 0{,}3n - 0{,}7x + 0{,}1m - 0{,}5n - 0{,}2x - 0{,}1m +$
$+ 0{,}5n + 0{,}9x$;
34) $10m + 1{,}1 - 5x - 1{,}2 - 4m - 3x + 0{,}1 + 9x - 5m$;
35) $0{,}9a - 1{,}7b + 3{,}2c + 8a + 1{,}7b - 5c - 3b - 9c$;
36) $1{,}3x - 50y + 8z + 0{,}5x + 0{,}9y - 11z - 0{,}03x - 6y + z$;
37) $27m - 3{,}1n + 9x - 3{,}1m - 3x + 2{,}1n + 5m + 0{,}9n - 7{,}2x$;
38) $2{,}8a + 2{,}9p + 10{,}9 - 4{,}6p - 1{,}8a - 3{,}7 - p - 16$;
39) $5\frac{1}{4}a - 3\frac{1}{2}b + 6b - 3\frac{1}{2}a + 7c - 8\frac{1}{2}c$;
40) $7\frac{2}{3}a - 5b - 6\frac{1}{6}a + 7b + 3a - 5\frac{1}{2}b$;
41) $\frac{4}{5}a - \frac{7}{2}b + \frac{3}{7}a - \frac{2}{3}b - a$;
42) $\frac{7}{3}a - 2b + 3\frac{1}{2}b - \frac{7}{2}a + \frac{7}{6}a$;
43) $\frac{5}{4}x + \frac{7}{8}y - \frac{3}{4}y - \frac{3}{8}x - \frac{5}{12}y - \frac{5}{12}x$;
44) $3\frac{1}{2}a - 7b + 3\frac{1}{3}c - 4a + 3\frac{1}{3}b - 5c + 7a - 1\frac{1}{3}b$;
45) $7a + 3\frac{1}{2}b + 5c + 3\frac{1}{3}a - 1\frac{1}{4}b - 7\frac{1}{4}c - 5\frac{1}{3}a - 4\frac{1}{4}b$;
46) $7\frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c + 3\frac{1}{3}b - \frac{5}{6}b + \frac{1}{3}c - \frac{17}{2}a + \frac{15}{2}b + 2\frac{1}{6}c$;
47) $7{,}3a - 3{,}05b + 1{,}49b + 6{,}8c - 9{,}42c + 18{,}9a + 1{,}56b$;
48) $8{,}0007x - 3{,}89y - 6{,}843x + 3{,}007y + 2{,}1723x + 0{,}883y$;

49) $5{,}37t - 9{,}387n - 0{,}9p + 1{,}687n - 3{,}89t - 2{,}4p + 0{,}72t$;

50) $9\frac{1}{2}x - \frac{5}{8}y + 3\frac{3}{5}z - 2{,}9x + 0{,}295y + 5{,}4z$;

51) $9{,}8x - 3\frac{1}{6}x - 0{,}727y + \frac{3}{5}y - 6\frac{1}{12}x + 0{,}127y$.

161. В сумме $a + b = 100$

1) a принимает последовательные значения 1, 2, 3 и т. д. до 99. Какие значения получает при этом b?

2) b принимает последовательные значения 1, 2, 3 и т. д. до 99, какие значения принимает a?

162. $a + b = 35$; какие значения будет принимать сумма, если

1) одно слагаемое увеличивать на 1, 2, 3 и т. д. до 10, другое — оставить постоянным.

2) одно слагаемое уменьшить на 1, 2, 3 и т. д. до 10, другое — оставить постоянным.

163. В сумме $a + b = c$

1) одновременно увеличиваются оба слагаемых на 1, 2, 3 и т. д. до 10. Как изменяется сумма?

2) оба слагаемых одновременно уменьшаются на 1, 2, 3 и т. д. до 10. Как изменяется сумма?

3) одно слагаемое увеличивается на 1, 2, 3 и т. д. до 10, в то время как другое уменьшается на такое же число. Как изменяется сумма?

164. В разности $a - b = 20$

1) b получает последовательно значения 1, 2, 3 и т. д. до 30. Какие значения принимает при этом a?

2) Какие значения будет принимать b, если a давать последовательно значения 21, 22 и т. д. до 35?

165. $a - b = 26{,}5$; 1) какие значения будет принимать эта разность, если уменьшаемое увеличивать последовательно на 1, 2, 3 и т. д. до 10, а вычитаемое оставить постоянным; 2) если вычитаемое увеличивать на 1, 2, 3... до 10, а уменьшаемое оставить постоянным?

166. Как изменяется разность $a - b = c$, если:

1) уменьшаемое последовательно убывает на 1, 2, 3 и т. д. до 10, а вычитаемое остается постоянным?

2) если уменьшаемое остается постоянным, а вычитаемое увеличивается на 1, 2, 3 и т. д. до 10?

3) если уменьшаемое остается постоянным, а вычитаемое уменьшается на 1, 2, 3 и т. д. до 10?

167. В разности $a - b = c$ одновременно возрастают уменьшаемое и вычитаемое на 1, 2, 3 и т. д. до 10. Как изменяется разность?

168. В разности $a - b = c$ уменьшаемое и вычитаемое одновременно уменьшается на одно и то же произвольное число. Как изменяется разность?

169. В разности $a - b = c$ уменьшаемое увеличивается последовательно на 1, 2, 3 и т. д. до 10, а вычитаемое соответственно уменьшается на столько же единиц. Как изменяется разность?

170. Как изменяется разность, если вычитаемое увеличивается на 1, 2, 3 и т. д. до 10, а уменьшаемое уменьшается соответственно на то же число единиц?

Уравнения и задачи.

171. Найти значение неизвестного x в следующих уравнениях:

1) $x - 9 = 10$; 2) $8 + x = 11$: 3) $x - 9 = 1$;
4) $x + 5 = 8$; 5) $x - 7 = 3$; 6) $x - 53 = 37$;
7) $x - 17 = 23$; 8) $27 - x = 16$; 9) $x + 8 = 9{,}6$;
10) $2{,}8 = 5 - x$; 11) $x + 7{,}5 = 9{,}3$; 12) $3{,}7 = 7{,}3 - x$;
13) $16{,}5 - x = 8{,}7$; 14) $x - 5{,}7 - 2{,}8$; 15) $x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$;
16) $\frac{1}{2} = \frac{3}{5} = x$; 17) $\frac{1}{12} = \frac{3}{4} - x$; 18) $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{6}$;
19) $x - a = b$; 20) $x + a = b$; 21) $a = x - b$;
22) $b + x = a$; 23) $a = b - x$; 24) $a - x = b$.

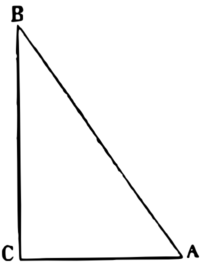
172. Обозначая искомое число через x, записать следующие задачи в виде уравнения и решить их.

1) Какое число следует прибавить к 25, чтобы получить 52?
2) К какому числу следует прибавить 16, чтобы получить 84?
3) Какое число следует вычесть из 847, чтобы получить 784?
4) Из какого числа следует вычесть 46, чтобы получить 64?
5) К какому числу следует прибавить 0,735, чтобы получить 1?
6) Из какого числа следует вычесть 7,667, чтобы получить 3,333?
7) На какое число следует увеличить b, чтобы получить a?
8) Какое число следует вычесть из $a + 1$, чтобы получить 2?
9) К какому числу следует приложить m, чтобы получить n?
10) Из какого числа следует вычесть a, чтобы получить b?

173. Составить задачи, приводящие к следующим уравнениям:

1) $x - 15 = 3$; 2) $x + 33 = 90$;
3) $47 + x = 100$; 4) $95 - x = 5$;
5) $300 = 2300 - x$; 6) $1000 = x - 50$.

174. Треугольник ABC (фиг. 1), в котором один угол прямой, называется **прямоугольным.**



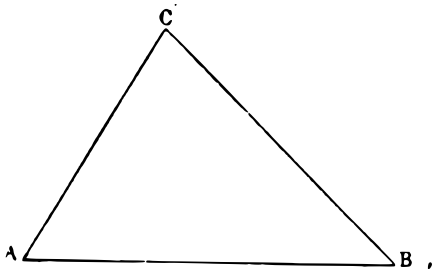
Фиг. 1.

1) Проверить при помощи транспортира, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

2) Число градусов в одном из острых углов—a, в другом—b. Выразить при помощи алгебраических знаков зависимость между острыми углами прямоугольного треугольника.

3) Один из острых углов прямоугольного треугольника принимает значения 1°, 3°, 5°, 7°...; какие значения получает другой угол?

175. 1) Проверить при помощи транспортира, что сумма углов треугольника *ABC* равна 180° (фиг. 2).



Фиг. 2.

2) Построить какой-нибудь треугольник и на нем сделать такую же проверку.

3) Число градусов в одном угле треугольника $= a$, в другом $= b$, в третьем $= c$. Выразить при помощи алгебраических знаков зависимость между углами треугольника.

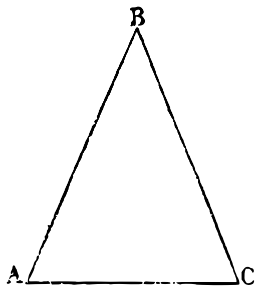
176. Периметром треугольника называется сумма его сторон. Одна сторона треугольника содержит *a см*, другая *b см*, третья *c см*, а периметр *p см*. Выразить при помощи алгебраических знаков зависимость между сторонами треугольника и его периметром.

177. Равнобедренным (фиг. 3) называется треугольник, у которого две стороны равны.

1) Проверить при помощи транспортира, что в равнобедренном треугольнике *ABC* углы *A* и *C*, лежащие против равных сторон, содержат одинаковое число градусов, и следовательно, равны друг другу.

2) Построить какой-нибудь равнобедренный треугольник и на нем сделать ту же проверку.

3) Выразить при помощи алгебраических знаков зависимость между углами равнобедренного треугольника, если каждый из углов **при основании** его (каждый из равных углов) содержит *a* градусов, а угол при вершине содержит *b* градусов.



Фиг. 3.

4) Выразить при помощи алгебраических знаков зависимость между периметром и сторонами равнобедренного треугольника, если **основание** его содержит *m дм*, каждая из **боковых** (равных между собою) сторон содержит *n дм*, а периметр *p дм*.

178. Для следующих задач сперва составить уравнение и, решив его, сделать проверку:

1) В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 40°; как велик другой угол?

2) Сумма двух внутренних углов треугольника равна 115°; как велик третий угол?

3) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°; сколько градусов в прямом угле?

4) Один из углов при основании равнобедренного треугольника равен 30°; как велик третий угол при вершине?

5) Один из углов при основании равнобедренного треугольника получает последовательно значение 31°, 32°, 33° и т. д. Какие значения получает при этом угол при вершине?

6) В равнобедренном треугольнике каждая из боковых сторон содержит 15 *см*, а периметр равен 40 *см*. Сколько сантиметров в основании?

7) Сколько градусов содержит каждый из острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника?

8) Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 30°. Сколько градусов содержит каждый из углов при основании?

9) Периметр равнобедренного треугольника содержит 10 *дм*, а основание 3 *дм*. Сколько *дм* в каждой из боковых сторон?

10) Наследство в 720 рублей следует поделить так, чтобы два старших сына получили поровну, а младший — 300 руб. Сколько получать оба старших сына вместе? Сколько получит каждый из них?

11) Веревку длиной в 10 *м* разрезали на 4 части так, что одна часть была равна 4 *м*, а остальные части были одинаковые. Определить размеры каждой из одинаковых частей.

12) В лазарете был сделан запас муки в 200 *кг*; по истечении недели осталось 144 *кг*. Сколько муки расходовали **средним числом** в один депь?

§ 9. Сложение и вычитание многочленов.

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$$

(Сочетательный или собирательный закон.)

179. Записать при помощи скобок следующие задачи и вычислить результаты:

1) прибавить к 0,5 сумму 1,7 и 1,2;
2) прибавить к 2,12 сумму 1,87 и 1,01;
3) уменьшить 17 на сумму 7 и 5;
4) уменьшить 21,6 на сумму 9 и 10,3;
5) сумму 12 и 112 увеличить на 16;

6) сумму чисел 8,3 и 2,7 увеличить на 4;
7) 17 уменьшить на разность 7 и 5;
8) 21,6 уменьшить на разность 10,3 и 9,6;
9) сумму 1,8 и 1,7 уменьшить на 2;
10) сумму 1,03 и 1,04 уменьшить на 1,99;
11) разность 2,8 и 1,4 увеличить на 2,2;
12) разность 1,12 и 0,7 увеличить на 1,11;
13) разность 35 и 17 уменьшить на 10;
14) разность 20,5 и 10,7 уменьшить на 5,7.

180. Проверить справедливость равенства

$$m + (a + b) = m + a + b$$

при следующих значениях букв:

	1	2	3	4	5
m	1	10	1,2	12,4	$2\frac{1}{4}$
a	2	100	14,4	3,7	$2\frac{1}{8}$
b	3	1000	172,8	1,24	$2\frac{1}{16}$

181. Указать порядок действий и вычислить наиболее простым путем следующие суммы:

1) $213 + (395 + 187)$; 2) $(41,7 + 2,8) + 1,5$;
3) $(7,12 + 6,3) - 1,12$; 4) $3\frac{3}{5} + \left(2\frac{1}{3} + 2\frac{2}{5}\right)$;
5) $4,64 + \left(2\frac{2}{7} + 5,36\right)$.

182. Вычислить сумму:

$$1)\ 289 + 111 = 289 + (11 + 100);$$

таким же образом:

2) $277 + 143$; 3) $856 + 274$; 4) $1396 + 254$.

183. Вычислить сумму:

$$1)\ 893 + 569 = 893 + (7 + 562);$$

таким же образом

2) $1985 + 816$; 3) $587 + 784$; 4) $776 + 985$.

184. Упростить выражения:

1) $7a + (3a + 2b)$; 2) $12a + (4 + 8a)$; 3) $5x + (x + y)$;
4) $(3p + 4q) + 5p$; 5) $3m + (2n + 7m)$; 6) $(17u + 21v) + v$;
7) $a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b)$;
8) $2x + (2x + y) + (2x + 2y) + (2x + 3y) + (2x + 4y) + (3x + 5y)$;
9) $x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) + (x + 10) + (x + 12)$;
10) $(1 + a) + (1 + 3a) + (1 + 5a) + (1 + 7a) + (1 + 9a) +$
$+ (1 + 11a) + (1 + 13a)$;

11) $(a+0{,}1)+(a+0{,}2)+(a+0{,}3)+(a+0{,}4)+(a+0{,}5)+$
$+(a+0{,}6)$;

12) $\left(2x+\frac{1}{13}\right)+\left(2x+\frac{3}{13}\right)+\left(2x+\frac{5}{13}\right)+\left(2x+\frac{7}{13}\right)+$
$+\left(2x+\frac{9}{13}\right)+\left(2x+\frac{11}{13}\right)$;

13) $\left(0{,}65+2\frac{5}{7}+3\frac{7}{9}\right)+\left(2{,}15+3\frac{5}{14}+2\frac{5}{9}\right)+\left(0{,}2+\frac{3}{7}+2\frac{5}{9}\right)$;

14) $\left(3{,}125+2\frac{1}{11}+2\frac{1}{3}\right)+\left(4{,}65+4\frac{2}{11}+5\frac{1}{6}\right)+\left(0{,}225+2\frac{2}{33}+2\frac{1}{2}\right)$.

185. Проверить справедливость равенства

$$m+(a-b)=m+a-b$$

при следующих значениях букв:

	1	2	3	4	5
m	1	10	2,7	50	$\frac{1}{2}$
a	5	1000	3,5	75	$\frac{1}{3}$
b	2	100	0,5	50	$\frac{1}{4}$

186. Как всего удобнее приложить в уме

1) к 56 число 29? 3) к 48 число 96?
2) к 44 число 18? 4) к 120 число 89?

187. Показать на оси для произвольных отрезков m, a и b при a, большем b, справедливость равенства

$$m+(a-b)=m+a-b.$$

188. Прочитать и вычислить:

1) $217+(32-17)$; 3) $(375-99)-75$;
2) $(432-54)+74$; 4) $364+(199-64)$.

189. Вычислить:

1) $256+95=256+(100-5)$;

таким же образом:

2) $325+88$; 3) $1217+197$; 4) $336+998$.

190. Вычислить:

1) $388+75=(400-12)+75$;

таким же образом:

2) $497+86$; 3) $985+123$; 4) $575+650$.

191. Упростить выражения:

1) $7a+(2a-3b)$; 2) $9x+(3x-5y)$; 3) $3x+(9y-5x)$;
4) $(3x-b)+5b$; 5) $(5x-7a)+4a$; 6) $(3x-3y)-5y$;

7) $15c + 48d + (2c - 31d)$;

8) $24a + 5b - 19c + (8a - 5b + 15c)$;

9) $(27k - 30l + 63m) + (17k + 13l - 43m)$;

10) $243x - 225y + 52z + (45x + 25y - 42z) + (712 + 200y - 10z)$;

11) $4{,}5p - 2{,}3q + 3{,}7r + (3{,}9q - 2{,}5p + 2{,}3r) + (0{,}1p - 0{,}9q - 6r)$;

12) $a + (a - b) + (a - 2b) + (a - 3b) + (a - 4b) + (a - 5b)$;

13) $3x + (3x - y) + (3x - 2y) + (3x - 3y) + (3x - 4y)$;

14) $(x - 1) + (2x - 1) + (3x - 1) + (4x - 1) + (5x - 1) + (6x - 1)$;

15) $1 + (1 - a) + (1 - 3a) + (1 - 5a) + (1 - 7a) + (1 - 9a)$;

16) $0{,}1 + (0{,}1 - 0{,}25x) + (0{,}1 - 0{,}5x) + (0{,}1 - 0{,}75x)$;

17) $\frac{2}{5}x + \left(\frac{3}{5}x - y\right) + \left(\frac{4}{5}x - 2y\right) + (x - 3y) + \left(1\frac{1}{5}x - 4y\right)$;

18) $\left(\frac{5}{6} - 0{,}1y\right) + \left(\frac{2}{3} - 0{,}2y\right) + \left(\frac{1}{2} - 0{,}3y\right) + \left(\frac{1}{3} - 0{,}4y\right) + \left(\frac{1}{6} - 0{,}5y\right)$.

192. Проверить справедливость равенства

$$m - (a + b) = m - a - b$$

при следующих значениях букв:

	1	2	3	4	5	6
m	3	2,7	2,63	1000	$\frac{2}{3}$	0,9
a	2	1,2	1,4	100	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
b	1	1,4	1	10	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

193. Как вычесть в уме из

1) 56 число 42?
2) 115 число 12?
3) 48 число 23?
4) 99 число 19?

194. Показать па отрезках, что если $m > (a + b)$, то

$$m - (a + b) = m - a - b.$$

195. Показать поверкой, что

$$m - (a + b) = m - a - b.$$

196. Пользуясь значениями букв из задачи 191, показать, что

$$m - a + b \neq m - (a + b).$$

197. Прочитать и вычислить:

1) $436 - (189 + 11)$; 2) $(436 - 189) + 11$; 3) $(436 - 189) - 11$.

198. Вычислить:

1) $383 - 189 = 383 - (183 + 6)$;

таким же образом:

2) $236 - 139$; 3) $573 - 385$; 4) $517 - 418$.

199. Упростить выражения:

1) $7a-(2a+3b)$; 2) $9x-(3x+5y)$;
3) $121a-(45b+27a)$; 4) $115x-(13y+91x)$;
5) $187-(4a+37)$; 6) $110-(10+x)$;
7) $12{,}65-\left(5\frac{3}{7}+1{,}65\right)$; 8) $13\frac{7}{8}-\left(2{,}64+2\frac{7}{9}\right)$;
9) $9{,}99-(1{,}5+0{,}49)$; 10) $9{,}49-(1{,}5+0{,}99)$;
11) $1000-(10+a)-\left(20+1\frac{1}{2}\right)-(30+2a)-\left(40+2\frac{1}{2}a\right)-(50+3a)$;
12) $111x-(y+3x)-(y+5x)-(y+7x)-(y+9x)-(y+11x)$.

200. Проверить справедливость равенства

$$m-(a-b)=m-a+b$$

при

	1	2	3	4	5
m	10	25	4	1,112	$\frac{1}{2}$
a	4	13	2	7,28	$\frac{1}{3}$
b	3	10	1	5,6	$\frac{1}{6}$

201. Как удобнее всего в уме вычесть из

1) 42 число 19? 3) 92 число 58?
2) 108 число 99? 4) 106 число 49?

202. Сделать поверку равенства $m-(a-b)=m-a+b$ путем сложения.

203. На значениях, данных в задаче 198, показать, что

$$m-a-b\neq m-(a-b).$$

204. Показать на отрезках при $m>a$, $a>b$, что

$$m-(a-b)=m-a+b;$$
$$m-(a-b)\neq m-a-b.$$

205. Прочитать и вычислить:

1) $438-(296-58)$; 2) $(438-296)-58$.

206. Вычислить:

1) $783-98=783-(100-2)$;

таким же образом: 2) $176-97$; 3) $653-98$; 4) $1246-199$.

207. Упростить выражения:

1) $5a-(3a-b)$; 2) $113a-(100a-3b)$;
3) $0{,}7x-(5-0{,}3x)$; 4) $16m-(3n-0{,}5m)$.

208. Раскрыть в следующих примерах скобки и сделать приведение, если это окажется возможным:

1) $7a - 9b + (a + b)$; 2) $15a - 7b - (7a - 5b)$;

3) $2\frac{1}{7}a + 3\frac{2}{5}b - \left(1\frac{9}{14}a - 2\frac{3}{5}b\right)$;

4) $6{,}6x - 2\frac{5}{7}y - \left(0{,}06x - 3\frac{5}{7}y\right)$;

5) $5a + (3a - 2b) + (a + 2b)$; 6) $(a + b - c) + (a - b + c)$;

7) $(a + b - c) - (a - b + c)$;

8) $(x - y + z) - (x - x - z)$;

9) $(x + y + z) - (z - x - y)$;

10) $(7a - 3b) - (5a + 3b) - (a - 5b)$;

11) $(8x - 5) + (3x - 7) - (9x - 11)$;

12) $43x - 19y - (15x - 34y) + (9x - 7y)$;

13) $103a - 15b - (25a - 14b) - (2a + 17b)$;

14) $48a - (24a - 2b) - (14b - 28a) + (24b - 18a)$;

15) $65x - (25x - 49y) + (12x - 4y) - (7x - 35y)$;

16) $17x - (3y + z) + (5z - x) - (2x - 8y)$;

17) $105c + 29d - (55d + 30c) - (61c - 9d)$;

18) $1{,}9a + 0{,}4b - (1{,}1a - 2{,}6b) - (0{,}8b - 1{,}5a)$;

19) $57a - (22b + 4c) - (17a - 10c) - (5a - 7b)$;

20) $100x - (10y - x) - (y - 5x) - (5y + 10x) - (50x - 50y)$;

21) $27a - (15b - 12c) - (12a - 9b) - (9c - 5a) - (c - 8b)$;

22) $14{,}55p - (2{,}05q - 3{,}05p) - (0{,}15q + 1{,}5p) - (0{,}5p - 2{,}5q)$;

23) $12 - (5x - 6) + (3x + 1) - (x + 10)$;

24) $(6a - 3b + 7c) - (a - b + c) + (2a + b - 6c)$;

25) $(3m - 7n - 5p) + (2m + 4n - 3p) - (4m - 3n - 6p)$;

26) $(6x + 5y - 3z) - (5x - 3y + 2z) - (x + 7y - 4z)$;

27) $67x - (32y + 4z - 8x) - (15x - 6y + 18z) - (x - 4y - 5z)$;

28) $m + [(a - b) - (b + d)]$; 29) $m + [(b + c) - (m + d)]$;

30) $m - [(a - b) - (c - m)]$; 31) $m - [(x - y) - (a - m)]$;

32) $(7a - 2b) - [(3a - c) - (2b - 3c)]$;

33) $(3x + 5y) - [(7x - 3y) - (5x - 7y)] + (x - y)$;

34) $(8m - l) + 5p - [(3q + 4p - l) + 7m - (2q - p)]$;

35) $8\frac{1}{2}n - \left[3\frac{1}{3}p - (p - 5{,}5n)\right] - \left[6\frac{1}{6}d + (2n - 0{,}5p)\right]$;

36) $\left[2\frac{1}{4}x - \left(3\frac{1}{4}y + t\right)\right] - \left[(0{,}75x - 0{,}5y) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - t\right)\right]$;

37) $7{,}01p - (2{,}5r - 1{,}74) - \left[\left(4\frac{1}{2}r - 0{,}79p\right) - 3{,}26\right] - 1\frac{1}{5}p$;

38) $145a - 169b - [47a - (39a - 41b) - (45b + 26a) - 33b]$;

39) $90x - (40x - 52y) - [20x - (14x + 37y) - 17y] - (5x - 25y)$;

40) $20r - (10s - r) - [113 - (2r + 9s) - (4r + 3s) - 5r]$;

41) $124r - (6s - 5r) - [7s - (6r + 5s) + (4r + 3s) - 9r]$.

209. Записать при помощи скобок и затем упростить сумму выражений:

1) $3x + 4y + 5z$ и $x + y + z$;
2) $7x - 5z + 3y$ и $5x - y - z$;
3) $10a + 10b - c$ и $90a - 10b + c$;
4) $35a + 4b - 105c$ и $15b - 35a + 12c$;
5) $a + (a + b)$ и $(a + 2b) + (a + 3b)$;
6) $a + (a - 2b)$ и $(a - 4b) + (a - 6b)$;
7) $(x + y) + 3y$ и $(x + y) - 3y$;
8) $(1x - 5) + 15$ и $5 - (2x - 15)$.

210. Записать при помощи скобок и затем упростить разность выражений:

1) $7x + 12y + 3z$ и $4x + 25y + 3z$;
2) $41x - 12y + z$ и $30x - 10y - 5z$;
3) $15a + 3b - c$ и $15a - b$;
4) $14a + (a + b)$ и $(6a - 2b) - (a - b)$;
5) $(z + u) + (z - u)$ и $(z + u) - (z - u)$.

211. Раскрывая скобки, показать справедливость следующих предложений и формул:

I. Сумма суммы и разности двух чисел дает удвоенное первое число. Проверить это на числах:

1) 385 и 239; 2) 7250 и 6937; 3) 117 и 201; 4) 48 и 222.

II. Разность между суммой и разностью двух чисел равна удвоенному второму числу. Проверить это на числах:

1) 783 и 465; 2) 97 и 83; 3) 532 и 37; 4) 100 и 10.

212. Найти в натуральном ряде число, которое стоит:

1) на a-том месте после $a + b$;
2) на a-том месте перед $a + b$;
3) на $a + b$-том месте после a;
4) $a + b$-том месте после $a - b$;
5) на $a - b$-том месте после b;
6) на $a - b$-том месте перед b.

213. Найти число которое:

1) на $x - 5$ больше 5-ти; 2) на $x - 5$ меньше 5-ти;
3) на $x + 13$ больше 100; 4) на $x - 13$ меньше 100.

Какие значения может иметь x в этих примерах?

214. Проверить формулы (раскрытием скобок и приведением):

1) $(a+n)+(b-n)=a+b$; 2) $(a-n)+(b+n)=a+b$;
3) $(a+n)-(n-b)=a+b$; 4) $(b+n)-(n-a)=a+b$.

215. Написать и проверить таким же способом аналогичные формулы для $a-b$.

216. Написать три последовательных целых числа, из которых $2n-1$ есть первое по порядку, и найти их сумму.

217. Написать четыре последовательных целых числа, из которых $x+1$—последнее по порядку, и найти их сумму.

218. Написать четыре последовательных числа, из которых $a-3$ — первое по порядку, и найти разность между суммой крайних и суммой средних.

219. Решить уравнения:

1) $24-(x+4)=18$; 2) $26-(x-4)=20$;
3) $55=25+(x-11)$; 4) $55=70-(x-5)$;
5) $3x-(2x-5)=15$; 6) $(4x-4)-(3x-3)=1$.

220. Найти углы треугольника, если второй угол больше первого на 5°, а третий больше первого на 10°.

221. Найти углы треугольника, если второй больше первого на 20°, а третий больше второго тоже на 20°.

222. Найти углы треугольника, если второй угол меньше первого на 7°, а третий меньше второго тоже на 7°.

223. Периметр равнобедренного треугольника=16 *дм*, а каждая из боковых сторон больше основания на 2 дюйма. Чему равно основание?

224. Четыре гири весят 40 *кг*; вторая гиря тяжелее первой на 2 *кг*, третья тяжелее второй на 6 *кг*, а четвертая тяжелее третьей на 18 *кг*. Определить вес каждой гири.

225. Четыре гири весят 40 *кг*; вторая легче первой на 18 *кг*, третья легче второй на 6 *кг*, а четвертая легче третьей на 2 *кг*. Определить вес каждой гири.

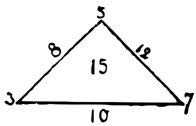
226. Составить задачи, которые приводятся к уравнениям:

1) $x+(x+1)+(x+2)=33$;
2) $(x-2)+x+(x+2)=180$; 3) $16-(x+1)=5$;
4) $16-(x-1)=5$; 5) $12-x=x-4$;
6) $x+\left(x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1\right)=100$.

227. 1) Указать, как законы сложения применяются при сложении многозначных чисел.

2) Указать, как законы сложения и вычитания применяются при вычитании многозначных чисел.

228. В одной масонской книге указывается следующее «таинственное» свойство треугольника: если при вершинах треугольника поставить произвольные числа, например 3, 5, 7, затем сложить эти числа попарно, и результаты (8, 12, 10) поставить на сторонах, соединяющих вершины, при которых стояли сложенные пары чисел, то, складывая число при каждой вершине с числом на противоположной стороне, мы получим один и тот же результат (15). Объяснить, чем обусловливается «таинственное» свойство треугольника.



Фиг. 4.

§ 10. Умножение и деление одночленов.

Умножение.

$a \cdot b = b \cdot a$ **(переместительный закон);**

$a \cdot (b \cdot c) = (ab) \cdot c = abc$ **(собирательный или сочетательный закон)**

229. Записать короче:

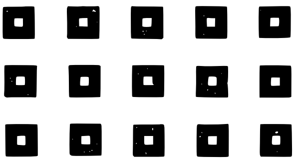
1) $7 + 7 + 7 + 7 + 7$; 2) $a + a + a + a + a + a + a$;
3) $(a + b) + (a + b) + (a + b) + (a + b)$;
4) $(x - 2y) + (x - 2y) + (x - 2y)$;
5) $\overbrace{x + x + x + \ldots + x}^{m \text{ раз}}$.

230. Представить произведение $a \cdot b$ площадью прямоугольника со сторонами a и b, если a и b имеют следующие значения (в сантиметрах):

1) 3 и 4; 2) 7 и 13; 3) 1 и 1; 4) 10 и 10;
5) 1 и $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; 7) 0,4 и 0,5; 8) 6 и $\frac{1}{8}$.

231. 1) Пользуясь значениями a и b, данными в предыдущей задаче, проверить равенство:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$


Фиг. 5.

2) Объяснить, как при помощи фиг. 5 можно проверить то же равенство при целых значениях a и b.

Какие значения имеют a и b для фиг. 5?

3) Составить такую же таблицу для $a = 7$, $b = 4$.

232. Проверить, что $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = c \cdot a \cdot b$ при

	1	2	3	4	5	6
a	2	1	12	2	$\frac{1}{4}$	0,4
b	3	10	9	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	0,30
c	4	100	7	4	$\frac{1}{3}$	0,5

233. Придумать наглядное пояснение (подобное данному в № 231) переместительного закона для произведения трех сомножителей a, b, c при целых значениях этих сомножителей.

234. Вычислить возможно более простым способом:

1) $8 \cdot 7 \cdot 25$; 2) $4 \cdot 47 \cdot 75$; 3) $37 \cdot 8 \cdot 3$;
4) $5 \cdot 125 \cdot 4 \cdot 8$; 5) $6 \cdot 37 \cdot 5$; 6) $125 \cdot 9 \cdot 8$;
7) $4 \cdot 13 \cdot 625$; 8) $125 \cdot 75 \cdot 16 \cdot 4$; 9) $7 \cdot 8 \cdot 15$;
10) $16 \cdot 19 \cdot 375$; 11) $5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$; 12) $625 \cdot 75 \cdot 8 \cdot 4$.

235. Показать на числовых значениях a, b, c задачи 232, что

$$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c = abc.$$

236. Вычислить:

$$1)\ 45 \cdot 36 = 45 \cdot 4 \cdot 9;$$

таким же образом

2) $95 \cdot 48$; 3) $125 \cdot 28$; 4) $825 \cdot 24$; 5) $375 \cdot 32$.

237. Упростить произведения:

1) $2a \cdot 5b$; 2) $4b \cdot 3{,}75$; 3) $15a \cdot 3b \cdot \frac{1}{5}c$; 4) $6x \cdot 7y$;
5) $6c \cdot 135$; 6) $2x \cdot 0{,}5y \cdot 3$; 7) $9m \cdot 7p$; 8) $5x \cdot 18y$;
9) $\frac{1}{2}u \cdot \frac{1}{3}v \cdot \frac{1}{4}w$; 10) $0{,}6x \cdot 50y \cdot 0{,}4z$; 11) $1{,}25ab \cdot 0{,}8cd \cdot 2xy$.

Деление.

$$(a : b) \cdot b = a; \qquad (a \cdot b) : b = a.$$

238. Выполнить следующие деления, производя каждый раз проверку:

1) $36abc : 9$; 2) $39am : 13$; 3) $44xy : 18$; 4) $7\frac{1}{2}ax : 3$;
5) $\frac{3}{4}b : 5$; 6) $\frac{1}{2}a : 2$; 7) $2\frac{4}{5}xy : 2$; 8) $8\frac{8}{9}yz : 4$;
9) $3\frac{6}{11}cz : 3$; 10) $2x : \frac{1}{2}$; 11) $3x : \frac{3}{2}x$; 12) $6b : \frac{2}{3}b$;
13) $8y : \frac{1}{5}y$; 14) $7c : 1\frac{2}{5}c$; 15) $5b : 1\frac{1}{4}b$;
16) $30ax : 5a$; 17) $50np : 2p$; 18) $105xyz : 3y$;

10) $3a : 2a$; 20) $3\frac{1}{5}b : 4b$; 21) $8\frac{1}{4}xy : 3x$;
22) $39abc : 13ac$; 23) $76abxy : 18aby$; 24) $84a \cdot a \cdot n \cdot x : 7ax$;
25) $1\frac{1}{2}ab : 2\frac{1}{4}a$; 26) $3\frac{1}{2}ax : 2\frac{1}{2}ax$; 27) $3\frac{3}{4}xy : 1\frac{2}{3}y$;
28) $8\frac{1}{3}ay : 1\frac{2}{3}a$; 29) $\frac{2}{3}ab : \frac{3}{2}b$; 30) $5nx : 15n$.

Умножение и деление.

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot (b : c) = (ab) : c \\ a : (bc) = (a : b) : c \\ a : (b : c) = (a : b) \cdot c. \end{array}\right\}$$
Сочетательный, или собирательный, закон для умножения и деления.

$$\left.\begin{array}{l} (a : b) \cdot ca = c : b \\ \lfloor (a : b) \cdot c \rfloor : d = ac : bd. \end{array}\right\}$$
Переместительный закон для умножения и деления.

239. Проверить справедливость выписанных законов при следующих значениях букв:

	1	2	3	4	5
a	21	7	15	$\frac{3}{5}$	0,66
b	3	6	2	$\frac{5}{3}$	0,3
c	5	3	5	$\frac{4}{3}$	25
d	2	1	3	$\frac{3}{4}$	0,05

240. Вычислить:

$$1)\ 18 \cdot 25 = 18 \cdot (100 : 4);$$

таким же образом

2) $326 \cdot 50$; 3) $512 \cdot 5$; 4) $13 \cdot 25$; 5) $15 \cdot 75$;
6) $24 \cdot 125$; 7) $32 \cdot 625$; 8) $16 \cdot 375$; 9) $48 \cdot 250$.

241. Вычислить:

$$1)\ 1700 \cdot 25 = 17 \cdot 100 : (100 : 4);$$

таким же образом

2) $1200 : 75$; 3) $1400 : 25$; 4) $6000 \cdot 125$; $36000 \cdot 625$.

242. Упростить выражения:

1) $\frac{2}{3}abx \cdot \frac{3}{4}cy : \frac{1}{2}by$; 2) $1\frac{1}{2}abn \cdot 2\frac{1}{3}xy : 1\frac{1}{6}bnx$;
3) $\frac{1}{2}abc \cdot \frac{3}{5}xy : 1\frac{1}{5}bcy$; 4) $3\frac{1}{2}axy \cdot 1\frac{1}{3}by : 2\frac{1}{3}ax$;
5) $(7{,}5amp : 2{,}25am) \cdot 30mq$; 6) $6{,}25pqr \cdot 0{,}8xy : 5px$.

243. В произведении $ab = 120$ один из сомножителей получает последовательно значения от 1 до 120. Какие значения должен при этом принимать другой сомножитель?

244. $ab = 120$. Какие значения будет принимать произведение, если один сомножитель останется постоянным, а другой будет:

1) умножаться на 2, 3 и т. д. до 10;
2) делиться на 2, 3 и т. д. до 10.

245. В произведении $ab = c$ оба сомножителя одновременно:

1) умножаются на 2, 3 и т. д. до 10;
2) делятся на 2, 3 и т. д. до 10.

Как изменяется произведение?

246. Как изменяется произведение, если один из сомножителей умножается на 2, 3 и т. д. до 10, а другой делится на то же число?

247. В частном $a : b = 12$ получает последовательно значения 1, 2 и т. д. до 12:

1) делимое; 2) делитель.

Какие значения принимает в первом случае делитель, во втором случае делимое?

248. $a : b = 15$. Какие значения принимает частное, если:

1) делимое умножается на 2, 3 и т. д. до 10, b постоянно?
2) делитель умножается на 2, 3... 10, а делимое постоянно?

249. В частном $a : b = c$ делитель умножается на 2, 3 и т. д. до 10. Как изменяется:

1) частное при постоянном a? 2) делимое при постоянном c?

250. Как изменится частное $a : b = c$, если:

1) делимое и делитель умножить на одно и то же число?
2) если делимое и делитель разделить на одно и то же число?
3) как будет изменяться частное, если a умножать на 2, 3 и т. д. до 10, а b одновременно с этим делить на то же число?
4) как будет изменяться частное, если a делить на 2, 3 и т. д. до 10, а b одновременно с этим умножать на то же число?

Уравнения.

251. Решить следующие уравнения:

1) $5x = 15$;	2) $x : 5 = 8$;	3) $3x = 24$;
4) $7 = x : 3$;	5) $28x = 7$;	6) $x : 0{,}25 = 8$;
7) $56x = 8$;	8) $9 = 0{,}3 : x$;	9) $8x = 3$;
10) $x : 0{,}8 = 86{,}25$;	11) $9x + 4 = 31$;	12) $x : 0{,}5 = 6$;

13) $8x + 1 = 17$; 14) $x : 16 = 0{,}375$; 15) $19 = 100 - 9x$;
16) $x : \frac{2}{3} = 6$; 17) $7x - 5 - 9$; 18) $7x + 5 = 9$;
19) $5x - 16 = 9$; 20) $5x + 16 = 20$; 21) $25 = 29 - 4x$;
22) $\frac{3}{4}x = 300$; 23) $5 - x : 7 = 84$; 24) $\frac{3}{5}x - 5 = 1$;
25) $x : 8 + 3 = 8$; 26) $1{,}25x + 6{,}25 = 7{,}5$.

252. Записать следующие задачи в виде уравнений и решить их.

1) Какое число следует умножить на 7, чтобы получить 101?

2) Какое число следует разделить на 27, чтобы получить 37?

3) На какое число следует умножить 30,03, чтобы получить 111,111?

4) На какое число следует разделить 70,07, чтобы получить 7,7?

5) На какое число следует умножить $\frac{3}{5}$, чтобы получить 1?

6) На какое число следует умножить $\frac{4}{5}$, чтобы получить $\frac{5}{4}$?

7) Чему равно делимое, если делитель $\frac{8}{17}$, а частное $\frac{17}{8}$?

253. Если какое-либо место на земной поверхности лежит западнее другого на 15° (разность долгот равна 15°), то часы в этом месте показывают 1 часом меньше.

1) Чему равна разность долгот Москвы и Ленинграда, если часы показывают в Ленинграде 11 час. 31 мин., когда в Москве полдень? Какой из этих городов лежит западнее и насколько?

2) Когда часы показывают в Ленинграде полдень, в Пекине 5 час. 48 мин. дня, а в Шанхае 6 час. 4[illegible] мин. дня. Насколько восточнее Пекина расположен Шанхай? Чему равна разность долгот Пекина и Ленинграда?

3) Когда пароход вышел из Ленинграда, хронометр был поставлен по ленинградскому времени. Какова долгота парохода относительно Ленинграда, если хронометр в полдень показывает 6 часов?

254. 1) Один из углов треугольника вдвое меньше другого и втрое меньше третьего. Определить углы.

2) Один из углов треугольника вдвое меньше другого и втрое больше третьего. Определить углы.

3) Один из углов треугольника вдвое больше другого и втрое меньше третьего. Определить углы.

255. 1) Четыре гири весят пуд. Определить вес каждой из них, если каждая из них в три раза тяжелее другой, более легкой. (Эти гири обладают тем свойством, что при помощи их можно взвесить любой груз, содержащий целое число фунтов от 1 до 40.)

2) Разделить 6.000 рублей между четырьмя братьями так, чтобы второй брат получил вдвое больше первого, третий — вдвое больше второго, четвертый — вдвое больше третьего.

3) 1.000 человек красноармейцев размещают в трех бараках; при этом известно, что во втором бараке можно поместить вдвое более, а в третьем — в пять раз более людей, чем в первом. На сколько человек рассчитан каждый барак?

4) Был продан товар трех сортов. Второго сорта в два раза более, чем первого, а третьего — в три раза больше, чем второго. Килограмм 1-го стоил 5 руб., 2-го — 3 рубля и 3-го — 1 рубль. Сколько килограммов каждого сорта было продано, если за все выручили 85 руб.

5) Странник при встрече с учениками спрашивает их: «Сколько вас в школе?» Один из них отвечает: «Удвой наше число, умножь его на 3 и раздели на 4. Прибавь еще меня, и тогда получишь всего 100». (Сколько учеников?) (Из сборника, относящ. к VIII веку нашей эры.)

256. 1) Первая задача на «задуманное число» в старейшей из книг по «увеселительной математике», «Problèmes plaisants et délectables» Клода-Гаспара Баше-де-Мезериака (1613), имеет следующее содержание (задача приведена для наиболее простого случая):

«Предложи задумать число (четное); заставь его утроить, затем взять половину полученного произведения; эту половину предложи опять утроить. Затем спроси, сколько девяток в полученном числе. Замени каждую девятку двойкой и тогда узнаешь задуманное число».

Составить формулу для решения задачи и показать правильность способа, указанного Баше.

2) Та же задача в несколько измененной форме встречается в сборнике «Erquickstunden» Швентера (1636):

«Предложи его (задуманное число) умножить на три, произведение разделить пополам, половину умножить на 6, и сказать тебе произведение; раздели его на 9, и частное окажется равным задуманному числу».

Составить формулу для задачи Швентера.

257. Составить задачи, приводящие к следующим уравнениям:

1) $8x = 56$; 2) $x : 4 = 16$; 3) $x : \frac{1}{3} = 2$;

4) $3 = 12 : x$; 5) $26 - 3x = 4$; 6) $0{,}5 = 8 : x$.

Упражнения.

258. Упростить выражения:

1) $(4ax + 3by) - (2xa + 3by) + (7xa - 4by)$;
2) $(5xz - 2xy + 3yz) - (4zy + 2yx - 3zy)$;
3) $(7abc - 5bcd) + (3bca + 5cbd) - 10cba$;
4) $(5pq + 3rs) - (2qp - 2sr) + (4sq + 2pr)$;
5) $(2{,}5ab - 4{,}05ac + 10bc) - (0{,}5ba + 5{,}95ac - 9cb)$;

6) $(4xyz - 2xy + 3yz + xz) - (3yzx + 2xy + 3zy + 7zx)$;
7) $(abcd + bcda - adcb + acbd + dbca - dcba)$;
8) $(abx - aby + abz) - (xab - yba) + (zba + ayb)$.

В произведениях принято писать сомножители в алфавитном порядке.

§ 11. Степени.

259. Записать в более короткой форме:

1) $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$; 2) $2\cdot2\cdot2\cdot2$; 3) $3\cdot3$;
4) $25\cdot25\cdot25$; 5) $7\cdot7.7\cdot7$; 6) $4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4$;
7) $a\cdot a\cdot a\cdot a$; 8) $bbbbbbbb$; 9) $xxxxxxxxx$;
40) $pppppppppppp$; 11) $qqqqq$; 12) $zzzzzzzzzzzzzzz$.

260. Записать без показателя:

1) 3^4; 2) 4^5; 3) a^3; 4) x^6; 5) 2^5; 6) 3^6; 7) b^7; 8) y^{12}.

261. Вычислить:

1) 2^5; 2) 3^3; 3) 4^3; 4) 5^4; 5) 7^3; 6) 2^8; 7) 3^4; 8) 4^2; 9) 6^3; 10) 10^6.

262. Указать порядок действий и, где возможно, опустить скобки:

1) $(a^2)\cdot(b^3)$; 2) $a\cdot(b^3)$; 3) $(ab)^3$;
4) $(x^5)\cdot(y^4)$; 5) $(x^2)\cdot(y^3)$; 6) $(x^2y)^7$;
7) $(2^3)\cdot(a^5)$; 8) $(2^2)\cdot(y^3)$; 9) $(2^2y)^3$.

263. Написать в более короткой форме:

1) $aabbb$; 2) $3\cdot3\cdot aaaxxxx$;
3) $2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3.ppp$; 4) $5\cdot5\cdot5\cdot xyyzzz$;
5) $2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot aaxxyy$;
6) $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot aaaaaxxzzz$.

264. Разложить на простые множители и записать разложение в наиболее короткой форме:

1) 1000; 2) 64; 3) 343; 4) 144;
5) 1728; 6) 256; 7) 625; 8) 729;
9) 4096; 10) 216; 11) 1000000; 12) 512.

265. Прочитать:

1) $4a^2b^3$; 2) $2^3\cdot3^2a^4b^5$; 3) $5^2ab^2x^7$;
4) ab^2; 5) a^2b; 6) $(ab)^2$.

266. Указать, в чем заключается различие между:

1) a^2b и ab^2; 2) ab^2 и $(ab)^2$;
3) a^2b и $(ab)^2$; 4) $2a^2$ и $(2a)^2$;
5) $5x^3$ и $(5x)^3$; 6) $x^2 + y^2$ и x^2y^2;

7) a^2+b^2 и $(a+b)^2$; 8) a^2-b^2 и $(a-b)^2$;
9) a^3+b^3 и $(a+b)^3$; 10) $5x^2y$ и $5xy^2$;
11) $5xy^2$ и $5(xy)^2$; 12) $5xy^2$ и $(5xy)^2$.

267. Записать:

1) квадрат числа a; 2) куб числа x;
3) сумму квадрата числа a и куба числа b;
4) сумму квадратов чисел a и b;
5) 2, умноженное на квадрат числа a;
6) 5, умноженное на куб числа x;
7) квадрат числа $2a$; 8) куб числа $5x$;
9) число a, умноженное на куб числа b;
10) куб произведения чисел a и b;
11) сумму квадратов чисел x и y;
12) квадрат суммы чисел x и y;
13) разность квадратов чисел a и b;
14) квадрат разности чисел a и b;
15) сумму квадрата удвоенного числа a и удвоенного квадрата a;
16) сумму кубов чисел a и b;
17) разность кубов чисел a и b;
18) куб суммы чисел a и b;
19) куб разности чисел x и y;
20) разность между квадратом утроенного x и утроенным квадратом x.

268. 1) Вычислить: 1) $3a$; 2) a^3, при $a=2$, 3, 4.
2) Вычислить: 1) $5x$; 2) x^5, при $x=2$, 3.
3) Какая разница между x^2 и $3x$?

269. Показать на примерах, что

$$nx \neq x^n.$$

270. Показать, что

1) $2^3 \neq 3^2$; 2) $2^5 \neq 5^3$; 3) $3^4 \neq 4^3$; 4) $5^3 \neq 3^5$.

271. Сделать подстановки и показать при этом, что

$$a^m \neq m^a$$

при

1) $a=2$; $m=6$; 2) $a=6$; $m=2$;
3) $a=4$; $m=3$; 4) $a=7$: $m=2$.

272. Сколько квадратных единиц в площади квадрата, сторона которого в сантиметрах выражается числом:

1) 3; 2) 5; 3) a; 4) x; 5) 4; 6) 7;
7) y; 8) b; 9) $2a$; 10) $3x$; 11) $x+y$; 12) $a+b$?

273. Сколько кубических единиц в объеме куба, ребро которого равно:

1) 2; 2) 5; 3) a; 4) x *см*;
5) 4; 6) 7; 7) y; 8) b *см*?

274. Показать подстановкой, что $x=2$, $y=3$ и $z=1$ удовлетворяют следующим равенствам:

1) $(y+2)x = yx + 2x$. 2) $xy + x^2 = x(y+x)$;
3) $x^2(y+1)+(y+1)=(x^2+1)(y+1)$;
4) $x^2+2+9(x+2)=(x+4)(x+5)$;
5) $2(1+3y^2)+7x=(1+3y)(2y+1)$;
6) $x^2=x(y+z)+yz=(x+y)(x+z)$;
7) $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2=(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2$;
8) $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2=(x+y+z)\cdot$
$\cdot(yz+zx+xy)+3xyz$;
9) $(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)(x+1)+1=$
$=3(x+2)^2$.

Какие из этих равенств являются уравнениями и какие тождествами?

275. Вычислить значение выражений:

1) $y=x^2+4x+3$ при $x=1$;
2) $y=x^3+4x-1$ » $x=1$;
3) $y=4x^2-5x+7$ » $x=2$;
4) $y=3x^2-x+19$ » $x=3$;
5) $y=x^3-x+16$ » $x=3$;
6) $y=4x^4-x^3+x$ » $x=5$;
7) $y=x^2+q-px$ » $p=5$, $q=6$, $x=2$;
8) $y=x^2+q-px$ » $p=5$, $q=6$, $x=3$;
9) $y=x^2+q-px$ » $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ x=3 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} q=15; \\ p=8; \end{array}$
10) $y=10x^2-x$ » $x=0{,}1$;
11) $y=1000x^3-x$ » $x=0{,}1$;
12) $y=4x^3-\frac{1}{2}x+1$ » $x=\frac{1}{2}$;
13) $y=5x^2+\frac{1}{5}x+1$ » $x=\frac{1}{5}$;
14) $y=ax^2+c-bx$ » $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{3}{4} \end{array}\right\}\ a=4,\ c=3,\ b=7$;
15) $y=ax^2+c-bx$ » $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{7}{8} \end{array}\right\}\ a=8,\ c=7,\ b=15$;

16) $y=x^3+2x^2+4x+8$ при $x=1$;
» $x=2$;
» $x=3$;
» $x=4$.

276. Упростить выражение:

1) $15c^2-17c-14c-13c^2+23c+7c^2$;
2) $15cd^2-8c^2d-5c^2d-13cd^2+17c^2d+9cd^2$;
3) $13\frac{3}{5}z^2y^3-4\frac{2}{7}z^2y-5\frac{4}{15}z^2y^3+3\frac{1}{2}z^2y+2\frac{11}{14}z^2y-3\frac{3}{10}z^2y^3$;
4) $8\frac{3}{4}z^3-5\frac{6}{11}z^3u-4\frac{13}{44}z^3u+4\frac{13}{44}z^3+12\frac{3}{4}z^3u-2\frac{6}{11}z^3$;
5) $14a^2b+3ab^2-5b^2+2b^2a-abb+2aab$;
6) $25x^3y^2-5x^2y^3+4yx^4-2y^3x^2-4x^4y+y^2x^3$;
7) $30axx+25aax-14xxa-25xaa+x^2a-a^2x$;
8) $13{,}5ax^5-0{,}04bx^4-3{,}5x^5a-0{,}96x^4b+2bxxxx$;
9) $3p^2+(7-3p)+(4p-6p^2-4)+(4p^2+3p-1)$;
10) $5x+(10a^2-3a^3)+(5a^3-16a)+(12a-7a^2+a^3)$;
11) $10x^2-14x-(5-6x^2)-(7+4x)+(3x^2+20x+19)$;
12) $7ax^3-4a^2x^2-(7ax^3-14a^2x^2+5a^3x)+$
$+(19x^4-28ax^3+5a^3x)$;
13) $16az^2+18by^2+19cx^2-(8az^2+4by^2-16cx^2)+$
$+(7a^3z-9by^2+16cx)$;
14) $(8-4x+9x^2-6x^3)-(8-5x+9x^2-11x^3)+$
$+(5-14x^2+29x^3)$;
15) $[14-16x^2-(8-16x^2)+(9-16x^2)]-[17-9x^2-$
$-(12-8x^2)+(4-6x^2)]$;
16) $(4ab^2c^3-3a^2bc^3+9ab^3c^2)-(2a^2bc^3+9a^3b^2c)+$
$+(8ab^3c^2-6ab^3c^2+4ab^2c^3-a^3b^2c)$.

277. Упростить выражения:

1) $a^3\cdot a^2$; 2) $x^4\cdot x^2$; 3) $a^2\cdot a$; 4) $x\cdot x^2\cdot x^3$;
5) $b\cdot b^3$; 6) $y\cdot y^3$; 7) $b\cdot b^2\cdot b^3$; 8) $y\cdot y^2\cdot y^3\cdot y^4$.

278. Проверить равенство:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

при

$m=2,\quad 5,\quad 7,\quad 3,\quad 2,$
$n=3,\quad 6,\quad 2,\quad 1,\quad 5.$

279. Показать на числовых примерах, что

$$a^m+a^n\neq a^{m+n},$$

при	1	2	3	4	5
a	3	5	4	1	1
m	2	5	3	2	1
h	3	6	2	3	1

280. Упростить выражения:

1) $ab\cdot ab^2$; 2) $xy\cdot x^2y$; 3) $x^2y\cdot x^3y^2$; 4) $2xy\cdot 4x^2y^3$;
5) $ab^3\cdot ab^4$; 6) $ab\cdot a^2b^3$; 7) $x^2y\cdot 4x^2y^3$; 8) $3aq^3\cdot 5a^2b$.

281. Упростить выражения:

1) $a^5 : a^2$; 2) $z^4 : z^4$; 3) $y^2 : y$; 4) $y^2 : y^2$;
5) $a^8 : b^3$; 6) $c^{10} : c$; 7) $d^{13} : d^3$; 8) $u^{20} : u^{10}$.

282. Подставляя вместо a, m и n произвольные целые числа, проверить равенство:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ при } m > n.$$

Проверить справедливость этого равенства умножением.

283. Показать, подставляя вместо a, m и n произвольные целые числа, что

$$a^m - a^n \neq a^{m-n}.$$

284. Упростить выражения:

1) $a^5b^5 : a^2b^2$; 2) $a^5c^3 : a^2c$; 3) $x^8y : x^5y$; 4) $x^7y : x^3$;
5) $p^6q^6 : p^6q^6$; 6) $pq^9 : q^8$; 7) $a^{12}b^6 : a^6b^3$; 8) $y^3z^4 : yz$;
9) $26x^4y : 2x^3y$; 10) $3{,}5a^{10}b^4 : 7a^5b^2$;
11) $109x^9z^2 : 50z^2x^7$; 12) $0{,}625x^3y^5 : 0{,}25xy^5$;
13) $3\frac{1}{5}a^8b^2 : \frac{4}{5}a^6b^2$; 14) $2{,}25ab^3c^5 : \frac{8}{2}abc^3$;
15) $2{,}64a^4b^7 : 1{,}32b^7a^4$; 16) $0{,}5x^{13}y^3 : 2{,}5yx^{12}$.

285. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $(a^2)^3$; 2) $(a^3)^3$; 3) $(x^4)^2$; 4) $(x^2)^4$;
5) $(2a^2)^2$; 6) $(3b^5)^2$; 7) $(4x^3)^4$; 8) $(5y^2)^3$;
9) $(3a^2)^3$; 10) $(2a^3)^3$; 11) $(5x^2)^4$; 12) $(2x^5)^4$;
13) $\left(\frac{1}{2}x^7\right)^4$; 14) $\left(\frac{3}{4}y^5\right)^3$; 15) $(0{,}5a)^2$; 16) $(1{,}2z^4)^2$.

286. Показать, подставляя вместо m и p произвольные целые числа, что

$$(a^m)^p = (a^p)^m = a^{mp}.$$

287. Вычислить:

1) $2a^2$ и $(2a)^2$ при $a=2,\ 3,\ 5$;
2) $3x^2$ и $(3x)^2$ » $x=1,\ 10,\ 100$.

288. Какая разница между:

1) $2x^2$ и $(2x)^2$; 3) ab^3 и $(ab)^3$;
2) $3a^3$ и $(3a)^3$; 4) $3ab^4$ и $(3ab)^4$?

289. Показать что $(ka)^p = k^p a^p$, задавая p любые целые значения.

290. Показать, подставляя вместо букв k и a произвольные числа, и вместо p — произвольные целые числа, что обыкновенно и $(ka)^p \neq ka^p$.

Лишь при каком значении k $(ka)^p = ka^p$?

291. Раскрыть скобки и упростить:

1) $(ab)^2$; 2) $(abc)^3$; 3) $(ab^2c^3)^4$; 4) $(x^2y^3z^4)^2$;
5) $(3abc)^4$; 6) $(2ab^2c^4)^3$; 7) $(3a^3b^2c)^5$; 8) $(4a^4z^2)^3$;
9) $\left(\frac{1}{2}x^3y^2\right)^3$; 10) $\left(\frac{2}{3}ab^2c^3\right)^4$; 11) $(0{,}1x^{10}y^{100})^3$; 12) $(0{,}01ab^8)^4$;
13) $(0{,}2x^3y^2)^5$; 14) $\left(\frac{2}{9}a^7b^8\right)^4$; 15) $\left(\frac{1}{12}x^{12}y\right)^3$; 16) $\left(\frac{1}{8}a^5b^4c\right)^4$.

292. Записать и, где возможно, упростить:

1) произведение куба числа a на квадрат того же числа;
2) сумму куба числа a с квадратом того же числа;
3) частное от деления куба a на a;
4) частное от деления десятой степени x на куб числа x;
5) удвоенный квадрат числа c;
6) квадрат удвоенного числа c;
7) разность между квадратом удвоенного числа a и удвоенным квадратом a;
8) разность между удвоенным кубом числа a и квадратом утроенного того же числа.

293. Показать, что

при $n > p$ 1) $(a^m \cdot a^p) \cdot (a^n : a^p) = a^m \cdot a^n$;
при $m > p$ 2) $(a^m : a^p) \cdot (a^n \cdot a^p) = a^m \cdot a^n$;

при $m > n$

$$(a^m \cdot a^p) : (a^n \cdot a^p) = a^m : a^n;$$

и при $m > n > p$

$$(a^m : a^p) : (a^n \cdot a^p) = a^m : a^n.$$

294. Как изменится квадрат числа, если число

увеличить в 1) 2, 2) 3, 3) 10, 4) k раз?
уменьшить в 1) 2, 2) 7, 3) 100, 4) p раз?

295. Как изменится куб числа, если число увеличить (или уменьшить)

в 1) 2, 2) 5, 3) 10, 4) 100, 5) k раз?

296. Упростить выражения:

1) $(3a^2b-5ab^2)+(6a^3+9ab^2)-(5a^2b-3b^3+2ab^2)$;
2) $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)-(x^3-x^2y+xy^2-y^3)+(x^2y-xy^2)$;
3) $(4a^5b^2-2a^2b^5)+(2a^4b^3+2a^2b^5)-(4a^5b^2-2a^4b^3-a^3b^4)$;
4) $(6ax^2+6ax^3-2ax^4)-(2ax^2+6ax^3+4ax^4)$;
5) $(a^4+b^4)-(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)+(2a^3b-a^2b^2+2ab^3)$.

297. 1) *Задача из папируса Ахмеса* (1700 г. до нашей эры). 7 человек имеют по 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя, а из каждого колоса вырастает 7 мер. Сколько мер ячменя сохранится благодаря этим кошкам?

2) На лестнице с 10-ю перекладинами сидят голуби: на первой 1, на второй 2, на 3-й 4 и т. д., на каждой перекладине вдвое больше, чем на предыдущей. Сколько голубей сидит на последней перекладине? Какой ширины должна быть лестница, если на 1 *м* ее перекладины умещается 9 голубей?

3) Из арифметики Магницкого (1703 г.): «Некто имяше великое свинечное ядро, в немже диаметр есть 18-ти цоль, из него же хощет делати пули, ихже всякая в диаметре своем имела в $^1/_2$ цоли и ведательно есть колико тех мелких из большаго ядра будет». (Цоль = дюйм.)

(Указание: отношение объемов шаров равно кубу отношения их диаметров).

Умножение равных сомножителей называется *возведением в степень.*

Произведение равных сомножителей называется *степенью.*

Число, которое возводится в степень, называется *основанием степени.*

Число, которое показывает, в какую степень возводится основание, называется *показателем степени.*

Выражение a^1 само по себе не имеет смысла, но принято под a^1 разуметь a, так как в этом случае

$$a^n \cdot a = a^{n+1} = a^n \cdot a^1.$$

Возведение в степень называется действием *третьей* ступени.

Когда в выражение входят знаки действий: сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень, то сохраняется порядок вычисления, указанный в § 2, т.-е. прежде всего производятся возведения в степени (действия высшей — третьей — ступени), затем умножения и деления (действия второй ступени) и, наконец, сложение и вычитание (действия первой ступени).

§ 12. Умножение и деление многочленов.

$$\left.\begin{aligned} &(a+b)\cdot m = m(a+b) = am+bm \\ &(a-b)\cdot m = m(a-b) = am-bm \\ &(a+b):m = a:m+b:m \\ &(a-b):m = a:m-b:m \end{aligned}\right\}\ \text{Распределительный закон.}$$

Умножение многочлена на одночлен.

298. Записать при помощи скобок и решить следующие задачи:
1) сумму 17 и 16 умножить на 3;
2) умножить сумму 151 и 149 на дробь $\frac{1}{3}$;
3) 8 умножить на разность 16 и 5;
4) найти число, которое в 20 раз больше разности 2 и 0,2;
5) найти число, которое составляет $\frac{7}{8}$ суммы 256 и 2,56.

299. Проверить справедливость равенства:

$(a+b)\,m = am+bm$ при следующих значениях букв:

a	5	10	$\frac{3}{4}$
b	3	5	$\frac{1}{2}$
m	7	4	$\frac{1}{3}$

300. Представить произведение $(a+b)m$ площадью прямоугольника и показать, что эта площадь равна сумме площадей, изображающих произведения am и bm, воспользовавшись для этого значениями букв, данными в задаче 299.

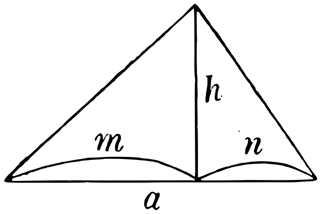
301. Проверить при значениях букв, данных в задаче 299, что

$$(a - b)\,m = am - bm.$$

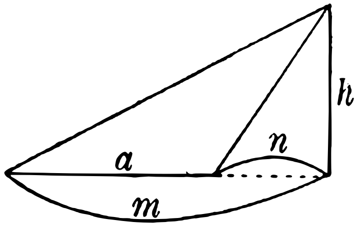
302. Представить произведение $(a - b)m$ площадью прямоугольника и показать, что эта площадь равна разности площадей, изображающих произведения am и bm, воспользовавшись при этом значениями задачи 299.

303. Если в прямоугольнике, стороны которого содержат a и h единиц длины, провести диагональ, то прямоугольник разобьется на два равных друг другу прямоугольных треугольника, и площадь каждого из них поэтому равна $\frac{1}{2}ah$ [половине произведения a (основания) на h (высоту)].

Показать, что и для всякого треугольника площадь вычисляется по той же формуле (разбивая треугольник на прямоугольные треугольники):



Фиг. 6.



Фиг. 7.

304. Пользуясь для a, b и m значениями задачи 299, показать справедливость следующих равенств:

1) $n - (a + b)m = n - (am + bm) = n - am - bm$;
2) $n - (a - b)m = n - (am - bm) = n - am + bm$.

305. Упростить следующие выражения:

1) $3(a + b) + 4(a - b)$; 2) $7(2a - 3b) + 3(2a + 7b)$;
3) $2(x - 2y) + 3(x - 3y)$; 4) $12(2m + 3n) - 6(4m - 7n)$;
5) $3(a + b) + 5(a - b) - (a + b) - (a - 7b)$;
6) $2(x - y) - 3(x + y) - 7(x - y) + 8(x + y)$;
7) $(a - b + c)\cdot 5$; 8) $(3a + 5b - 7c)\cdot 6$;
9) $7(2a - 3b + 8)$; 10) $8(a - 7b + 5c)$;
11) $(3a - 4b + 5c)\cdot 2x$; 12) $3(5n - 3p - 7q)\cdot y$;
13) $3(2a - 6b - 5c) - 2(a - 5b - 8c) - 4(a - 2b)$;
14) $5a(3a - 2b - 2c) + 2b(5a - 3b + 5c) + 10c(a - b)$.

306. Вычислить:

1) $\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)$; 2) $\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{2}(x-y)$;
3) $3ab(5a-9b)$; 4) $15x^2(4xy+3y^2)$;
5) $(3{,}4m-6{,}3n+12{,}7p-3{,}6q)\cdot 0{,}9mq$;
6) $(4{,}3x^2-5{,}4xy-2{,}4y^4+7{,}8x-2{,}3y)\cdot 5xy$;
7) $\left(2\frac{3}{4}x^5z-4\frac{2}{5}x^2z^2+3\frac{3}{10}xz+13\frac{3}{4}z\right)\cdot 3\frac{4}{11}xz$;
8) $3(3z-5u)+6(5u-z)-2(4u+z)$;
9) $3(2x-11y)+17x-4(5y-8x)+17y$;
10) $10x\cdot(5x^2-7y)-6x(5y+7x^2)$;
11) $5y(2z+3y)+3\cdot(5y^2+2yz)-4x(4z-3y)$;
12) $5a-7b)4a-(3a-8b(5b-(7b-2a)\cdot 6a+(5a-b)3b$;
13) $(5x+3y)\cdot 6z+3y\cdot(2x-7z)-5z(3x+5y)+7x(2y-3z)$
14) $1{,}3m(0{,}5m-0{,}3b)+4(0{,}4b^2-5mb)+0{,}3b(8b-3m)$;
15) $(2{,}5x^2-3{,}15x)0{,}6x-(2{,}2x+1{,}6)0{,}5x^2-2{,}9(2{,}7x^2-$ $-1{,}8x+3{,}2)$.

Умножение многочленов.

307. Записать (где необходимо, пользуясь скобками) и вычислить результаты:

1) произведение суммы 17 и 18 на сумму 18 и 19;
2) сумму 7 и 14, умноженную на разность 28 и 16;
3) произведение суммы и разности чисел 16 и 13;
4) произведение разности 36 и 13 на разность 26 и 13;
5) *a*) сумму квадратов, *b*) квадрат суммы, *c*) разность квадратов, *d*) квадрат разности чисел 25 и 15.

308. Показать, что

$$(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by$$

и сделать проверку при

	1	2	3	4	5
a	2	10	100	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
b	1	5	10	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x	4	20	9	4	$3\frac{2}{3}$
y	3	15	4	2	$2\frac{1}{2}$

309. Представить произведение $(a+b)(x+y)$ в виде площади, пользуясь значениями, указанными в (1, 2, 4) (предыдущей задачи).

310. Показать, что:

1) $(a+b)(x-y)=ax+bx-ay-by$;
2) $(a-b)(x+y)=ax+ay-bx-by$;
3) $(a-b)(x-y)=ax-ay-bx+by$.

Проверить эти равенства, пользуясь значениями букв № 308.

311. Произвести умножения:

1) $(a+b)(a+2b)$;
2) $(x+y)(x-2y)$;
3) $(x-9)(x+10)$;
4) $(z-1)(z-8)$;
5) $(2a+5b)(5a-2b)$;
6) $(7a-3x)(3a-7x)$;
7) $(8a^2-3ab)(8a-3b)$;
8) $(5x^2-1)(x^2+5)$;
9) $(3x-7y^3)(7x^3-3y)$;
10) $(6a-19x^2)(2a+3x^4)$.

312. Раскрыть скобки и упростить $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$; сравнить получающийся здесь результат с геометрическим представлением произведения при помощи квадрата.

313. Вычислить значение полученной формулы при

a	20	30
b	3	5

314. Пользуясь полученной формулой, вычислить:

1) 33^2;
2) 51^2;
3) 107^2;
4) 1010^2;
5) 34^2;
6) $(a+3)^2$;
7) $(7x+5)^2$;
8) $(3x+2y)$;
9) $(p+1)^2$;
10) $(10a+b)^2$;
11) $(1000a+b)^2$;
12) $(100a+10b)^2$.

315. Раскрыть скобки и упростить:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b);$$

сравнить получающийся здесь результат с геометрическим представлением произведения при помощи квадрата.

316. Вычислить значение полученной формулы при

a	30	20
b	1	2

317. Пользуясь выведенной формулой, вычислить:

1) 19^2; 2) 58^2; 3) 99^2; 4) 899^2; 5) 45^2;
6) $(x-8)^2$; 7) $(3a-5)^2$; 8) $(4x-6y)^2$; 9) $(m-1)^2$;
10) $(10a-b)^2$; 11) $(100a-b)^2$; 12) $(100a-10b)^2$.

318. Раскрыть скобки и упростить:

$$(a+b)(a-b).$$

Сравнить получающуюся формулу с геометрическим представлением произведения при помощи прямоугольника.

319. Раскрыть скобки и упростить:

$$(1+z)(z-1);$$

вычислить результат, полагая z равным последовательно:

1) 2, 2) 4, 3) 10, 4) 100, 5) 1000.

320. Пользуясь выведенной формулой, вычислить:

1) $18 \cdot 22$; 2) $102 \cdot 98$; 3) $53 \cdot 47$; 4) $1010 \cdot 990$;
5) $(n+1)\cdot(n-1)$; 6) $(x-9)\cdot(x+9)$;
7) $(3a-5)\cdot(3a+5)$; 8) $(2a+b)\cdot(2a-b)$;
9) $(7x+3y)\cdot(7x-3y)$; 10) $(4u-3v)\cdot(4u+3v)$;
11) 28^2-12^2; 12) 37^2-23^2; 13) 96^2-56^2;
14) 823^2-73^2; 15) 529^2-91^2; 16) 587^2-575^2.

321. Раскрыть скобки и упростить:

1) $(a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b)$;
2) $(a-b)^3=(a-b)^2\cdot(a-b)$.

322. Пользуясь выведенной формулой, вычислить:

1) 15^3; 2) 22^3; 3) 38^3; 4) 110^3; 5) 1001^3;
6) $(a+3)^3$; 7) $(2a-1)^3$; 8) $(4x-3y)^3$; 9) $(q-1)^3$.

Формулы сокращенного умножения.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

323. Вычислить:

1) $(7x-3)(5x-4)$; 2) $(3x-2)(x+3)$;
3) $(7a-5b)(6a+5b)$; 4) $(8x-7y)(7x+6y)$;
5) $(3{,}2a-5b)(5a-2{,}8b)$; 6) $(1{,}6x+0{,}3y)(5x+0{,}7y)$;
7) $(3{,}5x+0{,}2)(8{,}4x-0{,}3)$; 8) $(7{,}25+4x)(2{,}8-3{,}6x)$;
9) $(3y+2)(4{,}8y-1{,}5)$; 10) $(7a-0{,}3)(2{,}8a-5)$;
11) $(5a+2b)^2$; 12) $(4x-9y)^2$;
13) $(6x-7y)^2$; 14) $(7a-3)^2$;

15) $(5c-d)^2$; 16) $(9x+5)^2$;
17) $(0{,}2a+0{,}3b)^2$; 18) $(2a^3-7)^2$;
19) $(2{,}5r+4s)^2$; 20) $(0{,}3a-0{,}8b)^2$;
21) $(4x-9y)(5x+3y)$; 22) $(3a-5b)(7a-10b)$;
23) $(9a+4b)(4b-2a)$; 24) $(15x-4b)(4x+5b)$;
25) $(a+b+c)(d+e)$; 26) $(a-b+c)(d-e+f)$;
27а) $(a+b+c)(a+b-c)$; 28а) $(a+b-c)(a-b+c)$;
27б) $(a-b+c)(a-b-c)$; 28б) $(a-b-c)(a+b+c)$;
27в) $(x+y+z+v)(x+y-z-v)$; 28в) $(x-y+z-v)(x+y-z-v)$;
27г) $(x-y-z-v)(x+y-z+v)$; 28г) $(x-y+z+v)(x+y-z+v)$;
29) $(3a+b-x)^2$; 30) $(2a-3b+x)^2$;
31) $(3x-5y-2)^2$; 32) $(a^2-2ab+b^2)(a+b)$;
33) $(a^2+2ab+b^2)(a-b)$; 34) $(x^2+xy+y^2)(x-y)$;
35) $(x^2-xy+y^2)(x+y)$; 36) $(a+b)(a+b)(a+b)$;
37) $(a-b)(a-b)(a-b)$; 38) $(x+1)^3$;
39) $(1-y)^3$; 40) $(2a-b)^3$;
41) $(3x-4y)^3$; 42) $(x-1)(x-2)(x-3)$;
43) $(x-a)(x-b)(x-c)$; 44) $(2x-3)(3x+7)(6x-5)$;
45) $(3x+5)(7x+5)(2x-1)$;
46) $(3a+2b)(a-b)+(4a-5b)(2a+3b)$;
47) $(u+v)(2v-u)+(u-v)(v+2u)$;
48) $(2x+5y)(2x-5y)$;
49) $(0{,}5-2y)(0{,}5+2y)$; 50) $(5a-6b)(6b+5a)$;
51) $\left(1\frac{1}{2}r+2\frac{1}{2}s\right)\left(1\frac{1}{2}r-2\frac{1}{2}s\right)$;
52) $(4a-3b)(4a+3b)(16a^2-9b^2)$;
53) $(5x-y)(25x^2-y^2)(5x+y)$;
54) $\left(\frac{3}{4}c+\frac{1}{2}d\right)\left(\frac{9}{16}c^2-\frac{1}{4}d^2\right)\left(\frac{1}{2}d-\frac{3}{4}c\right)$;
55) $\left(3r^3+2\frac{1}{2}\right)\left(9r^6-6\frac{1}{4}\right)\left(3r^3-2\frac{1}{2}\right)$;
56) $(2x+3y)^3$; 57) $(a-5b)^3$;
58) $(4a-7b)^3$; 59) $(2ab+3c)^3$;
60) $(a^2b+3c^3)^3$; 61) $(5a^3b^2c-1)^3$;
62) $(0{,}2x+0{,}3y)^3$; 63) $\left(1\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^3$;
64) $\left(\frac{1}{2}ab-2a\right)^3$; 65) $(0{,}5a^2+4ab^3)^3$;
66) $(1+0{,}1a^5)^3$; 67) $(0{,}1x^4-10x)^3$;
68) $(5a+7b)^2-(5a-7b)^2+(7b+10a)(7b-10a)$;
69) $(2x-9y)^2+(3x+8y)^2-(4x-6y)(6y+4x)$;
70) $(0{,}2+5c)^2-(4c-0{,}5)^2-(0{,}3+c)(0{,}3-c)$;
71) $(20r-11s)(20r+11s)-(10r-9s)^2+(5s-2r)^2$;
72) $(15m-4n)(4m+15n)-(20m-n)(3m-5n)$;

73) $(21c + 5d)(2c - 3d) + (7d + 10c)(3c - 10d)$;
74) $(40x - 7y)(5x - 2y) - (x - 9y)(8x - y)$;
75) $(9p - 4q)(2p + 3q) - (5p - 6q)(6q - 5p)$;
76) $(2a + 5b)(2a - 5b) + (10a + 2b)(10a + 4b) -$
$- (3a - 4b)(8a - 5b)$;
77) $(7x - 3y)(5x + 4y) - (2x - 7y)(x - 5y) - (4x + 3y)(3x - 4y)$;
78) $(3{,}4c - 5y)(5c - 5y) - (3{,}5c + 4y)(4c - 5y) - (15c^2 - 10y^2)$;
79) $(4r - 5s)(4r + 5s) - (3s + 2r)(2r - 3s) + (6r - 7s)(6r - 5s)$;
80) $(6a - 7b + 10c)(6a + 8b - 10c) - (3a + 4b - 6c)(3a + 4b + 4c)$;
81) $(6a^2b + 5bc^3 - 4cd)(6a^2b - 5bc^3 + 4cd) -$
$- (4a^2b - 5bc^3 + 8cd)(9a^2b + 5bc^3 - 2cd)$;
82) $(0{,}8a - 0{,}7b)(0{,}5a + 0{,}4b) + (0{,}9a - 0{,}5b)(0{,}3a - 0{,}2b)$;
83) $(2{,}5x + 0{,}4y)(0{,}4x - 0{,}3y) - (0{,}2x + 0{,}6y)(0{,}2x - 0{,}6y)$.

324. 1) $(5x^3 - 2x^2 + x + 3)(4x - 1)$;
2) $(3x^2 - 4x + 5)(3x^2 + 2x + 4)$;
3) $(5x^3 - 1 + 2x - 3x^2)(x^2 - 2x)$;
4) $(4a^3 - 2a^2 + 1 - 3a)(1 + 2a)$;
5) $(7x^3 + 9ax^2 - 3a^2x + a^3)(5x - 2a)$;
6) $(9a^2 - 2ab + 3b^2)(3b^2 + 2ab + 9a^2)$;
7) $(x^3 + a^3 + ax^2 + a^2x)(a - x)$;
8) $(m^4 + p^4 - m^3p - mp^3 + m^2p^2)(p + m)$;
9) $(3x^3 - 2xa^2 + 0{,}5ax^2 + 0{,}1a^3)(10a - 0{,}1x)$;
10) $(7x^3 - 2xy^2 + 0{,}2x^2y + y^3)(x - 0{,}1y)$.

325. 1) $(2a^3 + 3a^2 + 2a + 1)(2a + 1)$; $2321 \cdot 21$;
2) $(3x^3 + 2x + 1)(3x + 1)$; $3021 \cdot 31$;
3) $(2x^3 + x^2 + 3)(2x + 3)$; $2103 \cdot 23$;
4) $(3x^3 + x^2 + 2x)(3x + 2)$; $3120 \cdot 32$.

Чем следует в последних четырех примерах заменить главную букву, чтобы результат умножения многочленов совпал с результатом умножения целых чисел в той же строке?

Указать, какие законы умножения применяются при умножении многозначных чисел.

326. 1) В произведении $a \cdot b = c$ множитель a увеличивается на 1, 2, 3 и т. д. до 5. Как изменяется произведение?

2) Как изменяется произведение $ab = c$, если множитель b уменьшается на 1, 2, 3 и т. д. до 5?

3) В произведении $a . b = c$ оба сомножителя увеличиваются на 1, 2, 3 и т. д. до 10; как изменяется произведение?

4) Оба сомножителя произведения $ab = c$ уменьшаются на 1, 2, 3 и т. д. до 10; как изменяется произведение?

5) Множитель a произведения $ab = c$ увеличивается на 1, 2, 3 и т. д. до 10, и одновременно с ним на столько же уменьшается множитель b. Как изменяется произведение?

327. 1) Насколько увеличится произведение 739·571, если каждый из множителей увеличить на 1?

2) Насколько увеличится произведение 639·471, если множитель 639 уменьшить на 1, а множитель 471 увеличить на 1?

3) Насколько уменьшится произведение 549·331, если каждый из сомножителей уменьшить на 1?

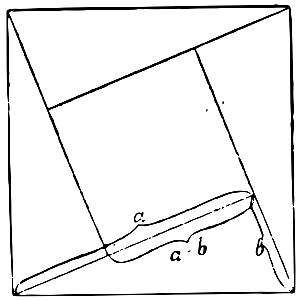
328. 1) Насколько увеличится площадь прямоугольника со сторонами 793 *м* и 137 *м*, если большую сторону увеличить на 5 *м*, а меньшую на 7 *м*?

2) Как изменится площадь квадрата со стороной = 49 *м*, если одну сторону увеличить на 1 *м*, а другую уменьшить на 1 *м*? Чему будет равна площадь полученного таким образом прямоугольника?

329. На странице книги в среднем помещается 38 строк. по 47 букв на каждой.

На сколько больше букв будет содержать каждая страница. если на каждой странице помещать одной строкой меньше. а в каждой строке на 2 буквы больше?

330. 1) У арабского математика Абул-Вафа (940—998) дан прилагаемый (фиг. 8) здесь чертеж (заимствованный у индусов). У индусов под чертежом обычно имелась подпись «смотри».



Фиг. 8.

«Усмотреть» из этого чертежа, на основании зависимости между площадями большого (наружного) и малого (внутреннего) квадрата и площадями одинаковых прямоугольных треугольников, зависимость между числами a, b, c, выражающими в каких-либо мерах длины сторон прямоугольного треугольника (теорема Пифагора).

2) Выяснить геометрический смысл этой теоремы, построив квадраты на гипотенузе (сторона, лежащая против прямого угла) и на катетах (стороны, образующие прямой угол).

331. Если построить прямоугольный треугольник, каждый из катетов которого равнялся бы аршину, то гипотенуза будет очень мало отличаться от метра. Сколько (приблизительно) квадратных аршин в квадратном метре?

332. Раскрыть скобку и упростить:

$$(a+b)^2,\ (a+b)^3 \text{ и т. д. до } (a+b)^7;$$

получающиеся коэффициенты расположить в таблицу (Паскаля), которая начинается так:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

333. Раскрыть скобки в выражениях: 1) $(a+b+c)^2$, 2) $(a+b+c+d)^2$ и упростить результаты.

334. Показать, что

$$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2.$$

Составить таблицу **пифагоровых** (т.-е. таких чисел, которые могут представлять значения сторон прямоугольных треугольников) чисел $x=a^2-b^2$, $y=2ab$, $z=a^2+b^2$, если a и b придавать последовательные значения от 1 до 5. Проверить и на полученных числовых значениях и на общей формуле, что числа, получаемые по этой формуле, действительно могут быть значениями сторон прямоугольного треугольника.

335. Показать, что:

1) $a^2+b^2+c^2+(a+b+c+2d)^2=(a+d)^2+(b+d)^2+$ $+(c+d)^2+(a+b+c+d)^2$;

2) $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(a+c)(b+c)$;

3) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz^2)=(bz-yc)^2+$ $+(cx-az)^2+(ay-xb)^2$.

336. Чтобы получить квадрат двузначного числа, оканчивающегося на 5, пользуются формулой:

$$(a+5)^2=a(a+10)+25;$$

формулировать словами данное правило, доказать его и, пользуясь им, вычислить:

$$65^2; \qquad 85^2; \qquad 35^2.$$

337. Подобно тому, как и в предыдущей задаче,

$$\left(a+\tfrac{1}{2}\right)^2=a(a+1)+\tfrac{1}{2}.$$

Формулировать словами данное правило, доказать его и, пользуясь им, вычислить:

$$\left(2\tfrac{1}{2}\right)^2; \ \left(10\tfrac{1}{2}\right)^2; \ \left(49\tfrac{1}{2}\right)^2.$$

338. Если требуется перемножить два двузначных числа, у которых цифры единиц одинаковые, а цифры десятков дополняют друг друга до 10, то можно пользоваться следующей формулой:

$$(10a + b) \cdot (10c + b) = (ac + b)\,100 + b^2.$$

Формулировать словами это правило, доказать его; вычислить по этой формуле:

$$32 \cdot 72; \qquad 43 \cdot 63; \qquad 91 \cdot 11.$$

339. Для перемножения двух двузначных чисел, отличающихся лишь последовательностью цифр, применима следующая формула:

$$(10a + b) \cdot (10b + a) = 101ab + 10(a^2 + b^2).$$

Формулировать правило; доказать его; вычислить, пользуясь этим правилом:

$$43 \cdot 34; \qquad 87 \cdot 78; \qquad 49 \cdot 94.$$

340. Если у двух двузначных сомножителей цифры десятков одинаковы, а цифры единиц дополняют друг друга до 10, то можно также составить формулу для быстрого перемножения этих чисел.

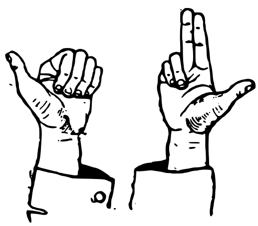
Так, например, можно вычислять $23 \cdot 27$ следующим способом:

$$23 \cdot 27 = 20 \cdot 30 + 3 \cdot 7.$$

Вывести общую формулу для этого приема; прочитать ее и вычислить по ней

$$31 \cdot 39; \qquad 44 \cdot 46; \qquad 55 \cdot 55.$$

341. В Персии у курдов, в Валахии, а, согласно некоторым указаниям, также среди населения Италии, Испании и Южной Франции распространен следующий способ заменять при вычислении на пальцах умножение чисел между 5 и 10 умножением чисел меньше пяти.



Фиг. 9.

Если требуется умножить 6 на 8, то следует на каждой руке поднять по столько пальцев, на сколько каждый множитель превышает 5; в данном случае, следовательно, на одной руке 1, а на другой 3; а остальные пальцы согнуть. Сумма поднятых пальцев (здесь, следовательно, $3 + 1 = 4$) даст десятки, а произведение согнутых (здесь, следовательно, $4 \cdot 2 = 8$) даст единицы.

Доказать справедливость этого приема для произвольных чисел a и b.

342. У Баше-де-Мезириака предлагается такой способ угадывания нескольких задуманных однозначных чисел. Пусть задуманы четыре числа. Первое число умножаем на 2, к результату прибавляем 5; что получается, умножаем на 5 и к результату прибавляем сумму второго числа и 10; полученный результат умножаем на 10 и прибавляем третье число; новый результат умножаем опять на 10 и прибавляем четвертое число. Если из этого последнего результата вычесть 3500, то цифры получаемой при этом разности и будут обозначать задуманные числа, и притом в том порядке, в каком они задуманы.

Почему это так?

Преобразование многочленов в произведения.

343. Следующие суммы и разности преобразовать в произведения:

1) $17a + 17b$; 2) $13x - 13y$; 3) $ab + ax$;
4) $nx - px$, 5) $1{,}8a - 2{,}4b$; 6) $20x + 30y$;
7) $6ax - 9bx$; 8) $4ab - 6bc$; 9) $12a^2 - 9ab$;
10) $8ax + 20x^2$; 11) $25ab - 5b^2$; 12) $18ap - 6p^2$;
13) $ab + b$; 14) $ax - x$; 15) $7x - 7$;
16) $5 - 5y$; 17) $aa - a$; 18) $xx + x$;
19) $5xy - 4y$; 20) $3a - 6ab$; 21) $a + a^2$;
22) $a^3 + a^2$; 23) $3x - 5x^2$; 24) $2y^3 - 4y^2$;
25) $ax - bx + cx$; 26) $2ay + 3by - cy$;
27) $6ax - 8aa + 10ab$; 28) $15ab - 25bb + 30bc$;
29) $35ac - 49bc + 21cc$; 30) $36ax - 54bx - 9x$;
31) $20a^2 - 35ab - 45ac$; 32) $51ay - 68xy + 85y^2$;
33) $aa - ab - ac + ad$; 34) $nx - px + xy - xz$;
35) $a(n + p) - b(n + p)$; 36) $(a - b)x - (a - b)y$;
37) $a(x - 1) + b(x - 1)$; 38) $3a(x - y) - 5b(x - y)$;
39) $2a(3b - 2) - x(3b - 2)$; 40) $5a(p - q) - 7b(p - q)$;
41) $(a + b)x - (a + b)$; 42) $a(x - y) - (x - y)$;
43) $a(x + y) + (x + y)$; 44) $a(a - b) - a + b$;
45) $(3a + b)x - 3a - b$; 46) $a(2x - 5y) - 2x + 5y$;
47) $ac + ad + bc + bd$; 48) $ax - ay + bx - by$;
49) $ax + ay - bx - by$; 50) $ax - 2a - bx + 2b$;
51) $ab + ay - xy - bx$; 52) $ax - 2b - a + 2bx$;
53) $ab + 3a - 2b - 6$; 54) $2ab - 10a + 3b - 15$;
55) $60ax - 4ay - 90bx + 6by$;
56) $100ac - 15ad - 20bc + 3bd$;
57) $40ax + 630by - 45ay - 560bx$;
58) $20ab + 24cd - 32ad - 15bc$;
59) $40ab + 20xy - 25bx - 32ay$;

60) $45ab + 63xy - 81ax - 35by$;
61) $35a^2 + 30xy - 42ax - 25ay$;
62) $9ab + 20x^2 - 12ax - 15bx$;
63) $ab - ax + b - x$; 64) $ax - a + bx - b$;
65) $ab + x - bx - a$; 66) $3ax + 2b - 2bx - 3a$;
67) $ax + 2 - 2x - a$; 68) $xy - x - y + 1$;
60) $ax + bx - cx - ay + by + cy$;
70) $ax - bx - ay + by + az - bz$;
71) $6ax - 4ay - 9bx + 6by + 15cx - 10cy$;
72) $8ax - 10bx - 20ay + 25by + 12az - 15bz$;
73) $(a - b)(3x - 2y) + (a - b)(4x + 7y)$;
74) $(a + b)(5x + 3y) - (a + b)(4x + 2y)$.

Подстановки.

344. Заменить в выражениях:

1) $x - 5$; 2) $x^2 - 6$; 3) $10 - x$;
4) $19 - 2x$; 5) $x^2 + 2x - 4$; 6) $x^2 - 3x + 2$.

x посредством:

1) $2y$; 2) $y - 3$; 3) $y + z$; 4) $y - z$.

345. В следующих выражениях положить: а) $x = a + b$; б) $y = a - b$.

1) $3x - xy + y$; 2) $3x - y(x + 1)$;
3) $2x(3 - y) - 2y$: 4) $\frac{1}{2}x(x - y) - \frac{1}{2}y(x + y)$.

346. Положить в:

1) $x^2 + 2x - 4$; $x = y - 1$;
2) $x^2 + 6x - 16$; $x = y - 3$;
3) $x^2 + x - 12$; $x = y - \frac{1}{2}$;
4) $x^2 + ax + b$; $x = y - \frac{1}{2}a$;
5) $x^3 + 3x^3 - 4$; $x = y - 1$.

Уравнения.

347. Решить следующие уравнения:

1) $7(x - 1) = 35$; 2) $9 = (18 - x) \cdot 0{,}5$;
3) $15 = 0{,}3.(27 + x)$; 4) $a(x + b) = 2ab$;
5) $3(x - 1) = 2(x + 1)$; 6) $5(5 - x) = 3(x - 3)$:
7) $(3x + 8)(x - 2) = (x + 4)(3x - 7)$;
8) $(27 - x)(6x - 5) = (2x + 11)(5 - 3x)$;

9) $(x-2)(x-3)=(x-1)(x-4)+2$;
10) $6-(x+2)(x-2)=10-(x-1)^2-5$;
11) $(x-6)^2+(x-4)^2+9=(6x-2)(11x-1)-(8x-3)^2$;
12) $(8-3x)^2+(5-4x)^2-6=(9-5x)^2+20x-4$.

Деление многочлена на одночлен.

348. На следующих значениях букв проверить, что

$$(a+b):m=a:m+b:m.$$

(Закон распределительный.)

	a	b	m
1)	17	3	4
2)	15	5	3
3)	110	10	40
4)	0,64	0,36	0,4

349. Пользуясь значениями букв, данными в предыдущей задаче, проверить справедливость равенства

$$(a-b):m=a:m-b:m.$$

350. Сделать проверку равенств

$$(a+b):m=a:m+b:m$$
$$\text{и } (a-b):m=a:m-b:m$$

умножением на m.

351. 1) $(5a+5b-5c):5$; 2) $(ax-bx+cx):x$;
3) $(8a-6b+10c):2$; 4) $(ax^2+bx-5x):x$;
5) $(6ax-9bx-15x):3x$; 6) $(8a^2-4ac+12a):4a$;
7) $(49an-21n^2-91np):7n$;
8) $(12a^2x-8abx+20axy):11\frac{1}{3}a$;
9) $(\frac{3}{4}axy-\frac{2}{5}bxy+\frac{7}{10}cxy):\frac{1}{20}xy$;
10) $(2\frac{1}{2}abx-3\frac{1}{3}bcy+3\frac{3}{4}bd):\frac{5}{4}b$;
11) $(56ax-63bx+42cx):7x$;
12) $(169ab-156ac+117ad-91ac):13a$;
13) $(95ax+133ax^2-76a^2x-209a^2x^2):19ax$;
14) $(187x^4y^2-121x^3y^3-88x^2y^4+231x^2y^5):11xy$;

15) $(92r^5s^5 - 115r^3s^4 - 161r^2s^6 + 69r^6s^8) : 23rs$;
16) $(75ab^2 - 105a^2b - 165a^2b^2 + 180ab - 135a^3b^2) : 15ab$;
17) $(0{,}68ab - 0{,}85ac - 0{,}51ad + 0{,}34ac - 1{,}02af) : 1{,}7a$;
18) $(0{,}1x^3 + 0{,}01x^2 + 0{,}001x) : 0{,}01x$;
19) $(10a^4 + a^3 + 0{,}1a^2 + 0{,}01a + 0{,}001) : 0{,}1$;
20) $(64a^6 + 3{,}2a^5 + 0{,}16a^4 + 0{,}008a^3 + 0{,}000a^2) : 0{,}02a$.

352. В «Erquickstunden» Швентера указан такой способ угадывания задуманного числа:

Предложи (задуманное) число удвоить, к результату прибавить любое четное число, что получится, разделить пополам, а затем умножить на 4, затем вычесть удвоенное прибавленное число и, наконец, сказать, что получилось. Раздели это число на четыре, и тогда получишь задуманное число. Показать, почему задуманное число может быть получено указанным способом.

353. Чтобы угадать задуманное число, пользуются следующим правилом:

Предлагают задумать число. Удваивают его. Прибавляют 4. Берут половину. Прибавляют к ней 7. Полученный результат умножают на 8. Затем вычитают 12. Делят на 4. Наконец отнимают 11 и говорят полученный результат. По названному числу можно тотчас же определить задуманное число. Как это сделать?

354. У Баше-де-Мезириака имеется такая задача на отгадывание результата, при чем отгадывающий не задает никаких вопросов (задача приведена в наиболее простой форме).

Предложи задумать число, умножить его на 2, затем прибавить какое тебе угодно число (его назови сам), что получится, разделить на 2, из результата вычесть задуманное число, и тогда назови половину того числа, которое ты раньше предложил прибавить. Это и будет то число, которое получил твой собеседник.

355. Один мальчик говорит другому: «Задумай какое хочешь целое число; прибавь к нему 9. Полученный результат умножь на 2. Теперь вычти 20. Полученную разность умножь на 5 и вычти из удесятеренного задуманного числа. Тогда ты получишь 10». Почему это известно мальчику?

356. 1) Если от искомого числа отнять 5, остаток умножить на 7, к тому, что получится, прибавить 2, то в результате получится 16. Найти это число.

2) Если к неизвестному числу прибавить 3, полученную сумму умножить на 2, из произведения вычесть 8, то получится столько же, сколько получилось бы, если от этого же неизвестного числа отнять 4, утроить разность и от произведения отнять 1. Найти это число.

3) Если отнять 7 от неизвестного числа, полученную разность умножить на 3 и к произведению прибавить 2, то получится столько же, сколько получилось бы, если это же неизвестное число умножить на 8, от произведения отнять 3 и остаток разделить на 7. Найти число.

4) Какое число следует прибавить к 820, чтобы полученная сумма оказалась в 10 раз больше суммы искомого числа и 37?

5) Какое число следует отнять от 1728, чтобы полученная разность была в 4 раза больше разности между 519 и искомым числом?

6) На сколько следует уменьшить каждый из сомножителей произведений 25·51 и 31·40, чтобы эти произведения оказались равными?

7) На сколько следует уменьшить каждый из сомножителей произведения 30·147 и увеличить каждый из сомножителей произведения 14·62, чтобы эти произведения оказались равными?

8) Куплено по одинаковому количеству березовых и осиновых дров; в продолжение месяца было сожжено 18 сажен березовых и 58 сажен осиновых дров. Сколько было куплено дров каждого сорта, если по прошествии месяца березовых дров осталось втрое более, нежели осиновых?

9) Сестра старше брата в 15 раз, а через 13 лет она будет только вдвое старше этого брата. Сколько лет каждому из них теперь?

10) Сыну 10 лет, а отец вчетверо старше его. Чрез сколько лет отец будет втрое старше сына?

11) Сколько воды нужно прилить к 40 ведрам вина 75 градусов (т.-е. к смеси, содержащей 75 частей спирта и 25 частей воды), чтобы получить смесь в 48 градусов?

12) Сколько золотников меди должно прибавить к 64 золотникам серебра 90 пробы, чтобы получилось серебро 72 пробы?

13) Для получения 150 бутылок вина ценою по 1 рублю за бутылку смешивают два сорта вина: бутылка первого сорта стоит 1 р. 35 к., а второго 60 к. Сколько бутылок нужно взять того и другого сорта?

14) Перевозкой транспорта заняты 24 подводы. Часть из них может нагрузить на каждую подводу по 320 *кг*, а другая по 480 *кг*. Сколько было подвод с нагрузкой по 480 *кг*, если всего они должны были перевезти 9120 *кг*?

15) В январе 1921 года из закрытого распределителя Московского Потребительского Общества было выдано 4 пуда хлеба по сериям А и Б. На серию А выдавали по $1^1/_2$ ф., а на Б — по 1 фунту. Сколько было карточек той и другой категории, если выдано хлеба по 140 карточкам?

357. В старинной китайской арифметике **Кин-Чанг**, составленной за 2600 лет до нашей эры и изданной за 1250 лет до нашей эры математиком **Цзин-Кин-Чау**, помещены следующие задачи:

1) В клетку посажены кролики и фазаны. У животных вместе 35 голов и 94 ноги. Сколько кроликов и сколько фазанов в клетке?

2) В середине квадратного пруда со стороной в 10 футов растет тростник, который выступает из воды на 1 фут. Если его притянуть к берегу, то он весь погрузится в воду. Как глубока вода? (Применение теоремы Пифагора.)

3) Бамбук, высотой в 10 футов, переломлен на некоторой высоте; конец его касается земли на расстоянии 3 футов от основания бамбука. На какой высоте от земли переломлен бамбук? (Теорема Пифагора.)

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Относительные числа.

§ 1. Нуль.

358. Чему равен $x = a - b$, 1) если $a = 5$, $b = 5$? 2) если $a = 0{,}7$, $b = 0{,}7$? 3) если $a = b$?

359. Проверить равенство $(a + b) - c = a + (b - c)$ при 1) $a = 5$, $b = 3$, $c = 3$; 2) $b = c$.

360. Проверить равенство $a - (b - c) = (a - b) + c$ при 1) $a = 8$, $b = 8$, $c = 3$; 2) $b = a$.

361. Показать проверкой (сложением), что

$$a - 0 = a.$$

362. Какое значение принимает

$$y = 100a + 10b + c$$

при $a = 5$, $b = 3$, $c = 0$; 2) $a = 4$, $b = 2$, $c = 0$.

363. Как короче записать левую часть равенства

$$\underbrace{0 + 0 + 0 + \ldots + 0}_{m \text{ раз}} = 0?$$

364. Проверить равенства:

$$(a - b)\,c = ac - bc;\quad c(a - b) = ca - cb;$$

при 1) $a = 3$, $b = 3$, $c = 5$; 2) $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{8}$, $c = 0{,}2$; 3) $b = a$.

365. Как короче записать равенства:

$$(a - a)\,c = 0;\ c(a - a) = 0.$$

366. 1) При каких значениях a и b имеет смысл умножение a на b?

2) При каких значениях a имеет смысл деление a на b?
3) При каком значении b не имеет смысла деление a на b?
4) При каких значениях b имеет смысл деление a на b?

367. Чему равно

$$u = 100x - 10y + z$$

при

	1	2	3	4	5	6
x	2	2	0	0	0	0
y	0	0	5	4	0	0
z	3	0	3	0	7	0

?

368. Какие целые значения следует дать a, b, c, d в выражении:

$y = 1000a - 100b + 10c + d$, чтобы
$y = 4870,\ 4807,\ 4087,\ 487;$
$y = 2001,\ 2010,\ 2100,\ 210,\ 201,\ 21.$

369. Какие значения нужно дать x, чтобы y обратилось в 0, если

1) $y = (x - 3)(x - 7);$ 2) $y = x(x - 13);$
3) $y = x(x - 1)(x - 2)(x - 3);$ 4) $y = 5x(2x - 6)(3x - 12);$
5) $y = (x - 1)^2;$ 6) $y = x^3;$ 7) $y = x^2(x - 1)^2(x - 3)^2.$

370. При каких значениях x не имеет смысла выражение:

1) $y = 5 : x;$ 2) $y = (x - 3) : (x - 2);$
3) $y = (4x + 9) : (x - 1);$ 4) $y = 1001 : (x - 11);$
5) $y = (4x - 8) : (x - 2);$ 6) $y = (10x - 30) : (x - 3).$

Нуль есть число, предшествующее 1 в ряде целых чисел. Если в числовом ряде от числа m произвести обратный счет m единиц, то получим 0.

Действия с нулем определяются следующими равенствами:

$$a + 0 = 0 + a = a;$$
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Произведение двух (или более) сомножителей равно нулю тогда, и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю. Деление какого-либо числа (отличного от нуля) на 0 не имеет смысла, так как всякое число при умножении на 0 дает в произведении 0.

§ 2. Введение отрицательных чисел.

371. Тверь находится на расстоянии 167 *км* от Москвы. Станция Лихославль той же дороги находится в 44 *км* от Твери. На каком расстоянии от Москвы лежит Лихославль? Сколько решений может иметь такая задача? Почему?

372. Термометр в полдень показывал 18°. К шести часам вечера температура изменилась на 4°. Какую температуру указывал термометр в 6 часов вечера? Сколько решений может иметь эта задача? Почему? Какими действиями находится то и другое решение?

373. Отметить, приняв за единицу один *см*, на оси числа:

$$\overset{+}{1},\ \overset{+}{2},\ \overset{+}{3},\ \overset{+}{4},\ \overset{+}{5}\ldots\ldots;\ 0,\ \overset{-}{1},\ \overset{-}{2},\ \overset{-}{3},\ \overset{-}{4},\ldots\ldots$$

Какое расположение примет при этом числовой ряд? Продолжается ли он теперь только вправо?

Указать на оси точки, соответствующие числам:

1) $\overset{+}{3}$ и $\overset{-}{3}$; 2) $\overset{+}{5}$ и $\overset{-}{1}$; 3) $\overset{+}{0,6}$ и $\overset{-}{0,2}$;

4) $\overset{+}{a}$ и $\overset{-}{a}$ (если a дано, как отрезок).

374. Указать точку, соответствующую числу, противоположному числу

1) $\overset{+}{3}$; 2) $\overset{-}{4}$; 3) $\overset{+}{0,5}$; 4) $\overset{-}{0,7}$.

375. Написать числа, противоположные числам:

1) $\overset{+}{4}$; 2) $\overset{-}{6}$; 3) $\overset{-}{2}$; 4) $\overset{+}{3}$; 5) $\overset{+}{0,8}$; 6) $\overset{-}{0,3}$.

376. Продолжить числовой ряд $\overset{+}{1},\ \overset{+}{2},\ \overset{+}{3},\ \overset{+}{4},\ \overset{+}{5}\ldots.$ влево от $\overset{+}{1}$. Назвать число, предшествующее:

1) $\overset{+}{3},\ \overset{+}{2},\ \overset{+}{1},\ 0,\ \overset{-}{1},\ \overset{-}{2}$ и т. д. 2) $\overset{+}{8},\ \overset{-}{8},\ \overset{+}{3},\ \overset{-}{3},\ \overset{+}{10},\ \overset{-}{10}$.

377. Какое число стоит в числовом ряде на пятом месте:

1) справа от $\overset{+}{2}$; 2) слева от $\overset{+}{2}$; 3) справа от 0;

4) слева от 0; 5) справа от $\overset{-}{3}$; 6) слева от $\overset{-}{3}$?

378. Какое число больше:

1) $\overset{+}{5}$ или $\overset{+}{8}$; 2) $\overset{+}{5}$ или 0; 3) $\overset{+}{5}$ или $\overset{-}{5}$; 4) $\overset{+}{5}$ или $\overset{-}{8}$;

5) 0 или $\overset{+}{3}$; 6) 0 или $\overset{-}{3}$; 7) 0 или $\overset{+}{7}$;

8) 0 » $\overset{-}{7}$; 9) $\overset{-}{2}$ » $\overset{-}{10}$; 10) $\overset{-}{4}$ » $\overset{-}{100000}$?

379. Сколько единиц содержит отрезок оси между:

1) $\overset{+}{5}$ и $\overset{+}{13}$; 2) $\overset{-}{5}$ и $\overset{+}{13}$; 3) $\overset{+}{5}$ и $\overset{-}{13}$; 4) $\overset{-}{5}$ и $\overset{-}{13}$?

380. Сколько единиц содержит отрезок оси между:

$\overset{+}{1}$ и $\overset{+}{7}$; $\overset{-}{1}$ и $\overset{+}{7}$; $\overset{+}{1}$ и $\overset{-}{7}$; $\overset{-}{1}$ и $\overset{-}{7}$?

381. На каком (по счету) месте и в каком направлении стоит:

1) $\overset{+}{7}$ от $\overset{+}{3}$; 2) $\overset{+}{7}$ от $\overset{-}{3}$; 3) $\overset{-}{7}$ от $\overset{+}{3}$; 4) $\overset{-}{7}$ от $\overset{-}{3}$?

382. 1) Термометр показывает в комнате $\overset{+}{15}{}^\circ$, а на улице $\overset{-}{4}{}^\circ$. На сколько градусов температура в комнате выше наружной?

2) Термометр показывал в 6 часов утра $\overset{-}{5}{}^\circ$, в 9 часов утра $\overset{-}{2}{}^\circ$, в полдень $\overset{+}{8}{}^\circ$, в 3 часа дня $\overset{+}{6}{}^\circ$, а в 6 часов вечера 0°. Найти абсолютную и относительную разницу температур для любых двух наблюдений.

3) а) Август правил Римским государством с 30 г. до нашей эры по 14 г. нашей эры. Сколько лет он правил? б) Он умер 75 лет; в котором году он родился? Скольких лет он начал править?

4) Москва находится под 55°45′ северной широты, а Капштадт под 33°56′ южной широты. Как велика разность между широтами обоих городов? Установить разность между широтами следующих городов: 1) между Архангельском (+ 64°33′) и Буэнос-Айресом (— 34°36′); 2) Парижем (+ 48°51′) и островом св. Елены (— 45°54′); 3) Ленинградом (+ 59°57′) и Сиднеем (— 33°52′).

5) Среднее арифметическое чисел 74, 81, 72, 79, 80 и 76 равно 77. На сколько разнятся отдельные числа от их среднего арифметического?

6) *A* имеет 585 руб. капитала и не имеет долгов, *B* имеет 395 руб. долга и не имеет капитала. Как велико имущество *A* и *B* вместе? На сколько имущество *A* больше имущества *B*?

7) *A* имеет 675 руб. капитала, *B* — 980 руб. долга. Как велико имущество *A* и *B* вместе? На сколько имущество *A* больше имущества *B*? Сколько долга имеют *A* и *B* вместе? На сколько у *B* больше долга, чем у *A*?

383. На линии Москва — Ленинград лежат станции:

Клин	на	расстоянии	90	*км*	от	Москвы
Тверь	»	»	167	»	»	»
Бологое	»	»	331	»	»	»
Чудово	»	»	533	»	»	»
Ленинград	»	»	724	»	»	»

На линии Москва — Курск лежат станции:

Серпухов	на	расстоянии	100	*км*	от Москвы
Тула	»	»	195	»	» »
Орел	»	»	383	»	» »
Курск	»	»	538	»	» »

Изобразив на чертеже линию (в масштабе 1 *мм* — 10 верст) Курск—Ленинград, указать на ней расстояние станций от Москвы, считая за положительное: 1) направление от Москвы к Ленинграду; 2) направление от Москвы к Курску; 3) пользуясь первым решением, узнать: а) расстояние между Тулой и Клином; б) узнать, на какую станцию приходит поезд, прошедший от Орла $\overset{+}{550}$ *км*; прошедший от станции Бологое $\overline{526}$ километров?

Ряд натуральных чисел может быть неограниченно продолжен вправо, так как к каждому целому числу можно прибавить единицу. Слева ряд натуральных чисел ограничен числом 1. Сложение двух чисел, принадлежащих к натуральному ряду, всегда выполнимо, так как при сложении двух чисел мы перемещаемся по этому ряду вправо. Вычитание одного натурального числа из другого не всегда выполнимо, так как при вычитании мы перемещаемся по ряду *влево*.

Чтобы вычитание оказывалось всегда выполнимым, необходимо продолжить ряд целых чисел влево. Число, предшествующее 1 (единице), обозначают знаком 0; число, предшествующее 0, знаком $\overline{1}$ (или (или — 1); число, предшествующее $\overline{1}$ — знаком $\overline{2}$ (или — 2) и т. д. Самые числа 1, 2, 3, в отличие от вновь введенных *отрицательных* (отмеченных знаком —), называют *положительными* и отмечают знаком +, например, $\overset{+}{2}$ (или + 2).

Знаки + и — *не суть* знаки сложения и вычитания. Всякое число, предшествующее в числовом ряду другому числу, считается меньшим этого числа, а число, следующее за данным числом, большим его.

Дробные отрицательные числа также имеют свое место в числовом ряду. Дробное отрицательное число располагается в числовом ряду тем левее, чем больше в нем содержится отрицательных единиц и долей отрицательной единицы (чем больше его *абсолютное* значение). *Система* чисел, в которую входят положительные и отрицательные числа, называется системой *относительных чисел*.

Благодаря введению отрицательных чисел, оказывается возможным обозначить числами не только точки, лежащие на оси вправо от начала, но и влево.

Относительные числа употребляются, когда для определения значения какой-либо величины нужно указать не только ее числовое значение, но и направление, которое эта величина имеет.

§ 3. Сложение и вычитание относительных чисел.

384. Решить при помощи числовой прямой задачу: термометр показывал в 6 часов утра $\overset{-}{7}{}^\circ$, к девяти часам утра температура повысилась на 6°; с 9 часов утра до полудня она повысилась еще на 5°, с полудня до 3 часов дня понизилась на 3° и с 3 часов дня до 6 часов вечера понизилась на 8°. Сколько градусов показывал термометр в 6 часов вечера? Как записать решение данной задачи?

385. Решить на числовой прямой задачу: линия железной дороги идет с севера на юг. Паровоз при маневрах проехал от станции 200 *м* к северу, затем 300 *м* к югу, затем 240 *м* к северу, затем 80 *м* к югу; далее, после некоторой остановки, еще 100 *м* к югу, и, наконец, 50 *м* к северу. 1) Указать конечное положение паровоза относительно станции. 2) Определить, сколько метров прошел паровоз при маневрах.

386. Построить на оси сумму:

1) $\overset{+}{7}+\overset{+}{2}$; 2) $\overset{+}{7}+\overset{-}{2}$; 3) $\overset{-}{7}+\overset{+}{2}$; 4) $\overset{-}{7}+\overset{-}{2}$.

Составить задачи, решения которых записаны в этой таблице.

387. Что значит приложить к числу:

1) $\overset{+}{5}$ число $\overset{+}{3}$; 2) $\overset{-}{5}$ число $\overset{-}{3}$; 3) $\overset{+}{5}$ число $\overset{-}{3}$; 4) $\overset{-}{5}$ число $\overset{+}{3}$?

388. Что значит **сложить два относительных числа?**

389. Найти и построить на оси сумму:

1) а) $\overset{+}{2}+\overset{+}{3}$; б) $\overset{+}{2}+\overset{-}{3}$; в) $\overset{-}{2}+\overset{+}{3}$; г) $\overset{-}{2}+\overset{-}{3}$;

2) а) $\overset{+}{5}+\overset{+}{2}$; б) $\overset{+}{5}+\overset{-}{2}$; в) $\overset{-}{5}+\overset{+}{2}$; г) $\overset{-}{5}+\overset{-}{2}$;

3) а) $\overset{+}{8}+\overset{+}{2}$; б) $\overset{-}{8}+\overset{-}{2}$; в) $\overset{+}{2}+\overset{+}{8}$; г) $\overset{-}{2}+\overset{-}{8}$;

4) а) $\overset{+}{8}+\overset{-}{2}$; б) $\overset{-}{8}+\overset{+}{2}$; в) $\overset{-}{2}+\overset{+}{8}$; г) $\overset{+}{2}+\overset{-}{8}$.

390. Проверить равенство:

$$a+b=b+a.$$

(переместительный закон)

при

	1	2	3	4	5
a	$\overset{+}{3}$	$\overset{-}{3}$	$\overset{+}{3}$	$\overset{-}{3}$	$\overset{+}{0{,}6}$
b	$\overset{+}{7}$	$\overset{-}{7}$	$\overset{-}{7}$	$\overset{+}{7}$	$\overset{-}{0{,}3}$

391. Найти суммы:

1) $\overset{+}{2}+\overset{+}{3}+\overset{+}{6}$; 2) $\overset{+}{2}+\overset{-}{3}+\overset{+}{6}$; 3) $\overset{+}{2}+\overset{+}{3}+\overset{-}{6}$;

4) $\overset{-}{2}+\overset{+}{3}+\overset{+}{6}$; 5) $\overset{+}{2}+\overset{-}{3}+\overset{-}{6}$; 6) $\overset{-}{2}+\overset{-}{3}+\overset{+}{6}$;

7) $\overset{-}{2}+\overset{+}{3}+\overset{-}{6}$; 8) $\overset{-}{2}+\overset{-}{3}+\overset{-}{6}$; 9) $\overset{+}{5}+\overset{+}{6}+\overset{+}{13}$;

10) $\overset{+}{5}+\overset{+}{6}+\overset{-}{13}$; 11) $\overset{+}{5}+\overset{-}{6}+\overset{+}{13}$; 12) $\overset{+}{5}+\overset{-}{6}+\overset{-}{13}$;

13) $\overset{-}{5}+\overset{+}{6}+\overset{+}{13}$; 14) $\overset{-}{5}+\overset{+}{6}+\overset{-}{13}$; 15) $\overset{-}{5}+\overset{-}{6}+\overset{+}{13}$;

16) $\overset{-}{5}+\overset{-}{6}+\overset{-}{13}$.

392. Проверить справедливость равенств:

$$a+b+c=a+c+b=b+c+a=b+a+c=c+a+b=$$
$$=c+b+a$$

при

	1	2	3	4	5	6
a	$\overset{+}{3}$	$\overset{+}{3}$	$\overset{+}{3}$	$\overset{-}{3}$	$\overset{+}{0,3}$	$\overset{-}{0,3}$
b	$\overset{+}{2}$	$\overset{+}{2}$	$\overset{-}{2}$	$\overset{+}{2}$	$\overset{-}{0,2}$	$\overset{-}{0,2}$
c	$\overset{+}{7}$	$\overset{-}{7}$	$\overset{+}{7}$	$\overset{+}{7}$	$\overset{-}{0,7}$	$\overset{-}{0,7}$

393. Указать, в каком порядке следует произвести действия, и вычислить:

1) $(\overset{+}{5}+\overset{+}{3})+\overset{+}{4}$; 2) $\overset{+}{5}+(\overset{+}{3}+\overset{+}{4})$; 3) $(\overset{+}{5}+\overset{+}{3})+\overset{-}{4}$;

4) $\overset{+}{5}+(\overset{+}{3}+\overset{-}{4})$; 5) $(\overset{+}{5}+\overset{-}{3})+\overset{+}{4}$; 6) $\overset{+}{5}+(\overset{-}{3}+\overset{+}{4})$;

7) $(\overset{-}{5}+\overset{+}{3})+\overset{+}{4}$; 8) $\overset{-}{5}+(\overset{+}{3}+\overset{+}{4})$; 9) $(\overset{+}{5}+\overset{-}{3})+\overset{-}{4}$;

10) $\overset{+}{5}+(\overset{-}{3}+\overset{-}{4})$; 11) $(\overset{-}{5}+\overset{-}{3})+\overset{+}{4}$; 12) $\overset{-}{5}+(\overset{-}{3}+\overset{-}{4})$;

13) $(\overset{-}{5}+\overset{-}{3})+\overset{-}{4}$; 14) $\overset{-}{5}+(\overset{-}{3}+\overset{-}{4})$.

394. Проверить, что:

$$a+(b+c)=(a+b)+c+a+b+c.$$

(собирательный закон)

при

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	$\overset{+}{3}$	$\overset{+}{3}$	$\overset{+}{3}$	$\overset{-}{3}$	$\overset{-}{3}$	$\overset{+}{3}$	$\overset{-}{3}$	$\overset{-}{3}$
b	$\overset{+}{10}$	$\overset{+}{10}$	$\overset{-}{10}$	$\overset{+}{10}$	$\overset{-}{10}$	$\overset{-}{10}$	$\overset{+}{10}$	$\overset{-}{10}$
c	$\overset{+}{5}$	$\overset{-}{5}$	$\overset{+}{5}$	$\overset{+}{5}$	$\overset{-}{5}$	$\overset{-}{5}$	$\overset{-}{5}$	$\overset{+}{5}$

395. Показать проверкой (сложением), что:

1) $\overset{+}{7}-\overset{+}{3}=\overset{+}{4}$; 2) $\overset{+}{7}-\overset{-}{3}=\overset{+}{10}$; 3) $\overset{-}{7}-\overset{-}{3}=\overset{-}{4}$;
4) $\overset{-}{7}-\overset{+}{3}=\overset{-}{10}$; 5) $\overset{+}{5}-\overset{+}{6}=\overset{-}{1}$; 6) $\overset{+}{5}-\overset{-}{6}=\overset{+}{11}$;
7) $\overset{-}{5}-\overset{-}{6}=\overset{+}{1}$; 8) $\overset{-}{5}-\overset{+}{6}=\overset{-}{11}$; 9) $\overset{+}{7}-\overset{+}{7}=0$;
10) $\overset{+}{7}-\overset{-}{7}=\overset{+}{14}$; 11) $\overset{-}{7}-\overset{-}{7}=0$; 12) $\overset{-}{7}-\overset{+}{7}=\overset{-}{14}$.

396. Вычислить:

1) $\overset{+}{3}-\overset{+}{7}$; 2) $\overset{+}{3}-\overset{-}{7}$; 3) $\overset{+}{3}-\overset{-}{7}$; 4) $\overset{+}{3}+\overset{+}{7}$;
5) $\overset{-}{3}-\overset{+}{7}$; 6) $\overset{-}{3}+\overset{-}{7}$; 7) $\overset{-}{3}-\overset{-}{7}$; 8) $\overset{-}{3}+\overset{+}{7}$;
9) $\overset{+}{10}-\overset{+}{2}$; 10) $\overset{+}{10}+\overset{-}{2}$; 11) $\overset{+}{10}-\overset{-}{2}$; 12) $\overset{+}{10}+\overset{+}{2}$;
13) $\overset{-}{10}-\overset{+}{2}$; 14) $\overset{-}{10}+\overset{-}{2}$; 15) $\overset{-}{10}-\overset{-}{2}$; 16) $\overset{-}{10}+\overset{+}{2}$;
17) $\overset{+}{0{,}9}-\overset{+}{0{,}9}$; 18) $\overset{+}{0{,}9}+\overset{-}{0{,}9}$; 19) $\overset{+}{0{,}9}-\overset{-}{0{,}9}$; 20) $\overset{+}{0{,}9}+\overset{+}{0{,}9}$;
21) $\overset{-}{0{,}9}-\overset{+}{0{,}9}$; 22) $\overset{-}{0{,}9}+\overset{-}{0{,}9}$; 23) $\overset{-}{0{,}9}-\overset{-}{0{,}9}$; 24) $\overset{-}{0{,}9}+\overset{+}{09}$.

397. Назвать число, противоположное:

$\overset{+}{2}$; $\overset{-}{6}$; $\overset{+}{9}$; $\overset{+}{7}$; $\overset{-}{11}$; $\overset{-}{12}$; 0.

398. Какое число следует приложить к числу a вместо того, чтобы вычесть из него число:

$\overset{+}{5}$; $\overset{+}{6}$; $\overset{-}{3}$; $\overset{-}{2}$; $\overset{+}{9}$; 0?

399. Каким действием и с каким числом может быть заменено вычитание числа:

$\overset{+}{5}$; $\overset{-}{7}$; 0; $\overset{-}{6}$; $\overset{-}{0{,}4}$; $\overset{+}{0{,}1}$?

400. Назвать число, обратное числу:

3; 6; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{9}{5}$.

Каким действием и с каким числом можно заменить деление на:

3; 8; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{12}{11}$?

401. Проверить справедливость равенств:

$$a+(b-c)=a+b-c$$
$$a-(b-c)=a-b+c$$
$$a-(b+c)=a-b-c$$

при

	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
a	$\overset{+}{7}$	$\overset{+}{7}$	$\overset{-}{7}$	$\overset{-}{7}$	$\overset{+}{7}$	$\overset{+}{7}$	$\overset{-}{7}$	$\overset{-}{7}$
b	$\overset{+}{3}$	$\overset{+}{3}$	$\overset{+}{3}$	$\overset{+}{3}$	$\overset{-}{3}$	$\overset{-}{3}$	$\overset{-}{3}$	$\overset{-}{3}$
c	$\overset{+}{5}$	$\overset{-}{5}$	$\overset{+}{5}$	$\overset{-}{5}$	$\overset{+}{5}$	$\overset{-}{5}$	$\overset{+}{5}$	$\overset{-}{5}$

402. Чему равна сумма чисел:

1) $\overset{+}{5}$ и $\overset{-}{5}$; 2) $\overset{-}{3}$ и $\overset{+}{3}$; 3) $\overset{+}{a}$ и $\overset{-}{a}$; 4) $\overset{-}{m}+\overset{+}{m}$?

403. Чему равна сумма двух противоположных чисел?

404. Написать число, противоположное данному числу x, и проверить результат сложением с данным числом, если

1) $x=\overset{+}{2}+\overset{+}{3}+\overset{-}{2}-\overset{+}{5}$; 2) $x=\overset{-}{2}+\overset{-}{3}+\overset{+}{2}-\overset{-}{5}$;

3) $x=\overset{+}{6}+\overset{+}{9}-\overset{-}{7}+\overset{-}{3}$; 4) $x=\overset{+}{13}-\overset{-}{7}+\overset{+}{4}-\overset{-}{2}$.

405. Раскрыть скобки и проверить сложением полученный результат в следующих примерах:

1) $(\overset{+}{3}+\overset{-}{2})-(\overset{+}{5}+\overset{-}{2})$; 2) $(\overset{+}{3}+\overset{+}{2})-(\overset{+}{5}+\overset{+}{2})$;

3) $(\overset{-}{3}+\overset{+}{2})-(\overset{-}{5}-\overset{-}{2})$; 4) $(\overset{-}{3}+\overset{-}{2})-(\overset{-}{5}-\overset{+}{2})$;

5) $(\overset{+}{3}-\overset{+}{2})-(\overset{+}{5}-\overset{-}{2})$; 6) $(\overset{+}{3}-\overset{-}{2})-(\overset{-}{5}-\overset{+}{2})$;

7) $(\overset{-}{3}-\overset{+}{2})-(\overset{-}{5}-\overset{-}{2})$; 8) $(\overset{-}{3}-\overset{-}{2})-(\overset{-}{5}-\overset{+}{2})$.

406. Проверить сложением справедливость равенств:

$$a-(b-c)=a-b+c$$
$$a-(b+c)=a-b-c.$$

Сложить два относительных числа значит: 1) если относительные числа имеют один и тот же знак, сложить их абсолютные значения и при полученном числе поставить знак, который имели слагаемые; 2) если относительные числа имеют разные знаки, вычесть из большого абсолютного значения меньшее и при полученной разности поставить знак числа, имевшего большее абсолютное значение.

Для сложения двух относительных чисел оказываются справедливыми законы сложения переместительный и собирательный.

Число увеличивается, если к нему приложить положительное число.

Число уменьшается, если к нему приложить отрицательное число.

Введение отрицательных чисел позволяет всякое *вычитание заменить сложением:* прикладыванием к уменьшаемому числа, противоположного вычитаемому, подобно тому как введение дробей позволяет всякое *деление заменить умножением* делимого на число, обратное делителю.

§ 4. Знак числа и знак действия.

407. Вычислить:

1) $\overset{+}{3}-\overset{+}{2}$; 2) $\overset{+}{3}+\overset{-}{2}$; 3) $\overset{-}{3}-\overset{-}{2}$; 4) $\overset{-}{3}+\overset{+}{2}$;

5) $\overset{+}{5}-\overset{+}{2}-\overset{+}{3}+\overset{+}{2}$; 6) $\overset{+}{5}+\overset{-}{2}+\overset{-}{3}+\overset{+}{2}$;

7) $\overset{-}{7}-\overset{+}{3}+\overset{-}{6}-\overset{+}{2}$; 8) $\overset{-}{7}+\overset{-}{3}+\overset{-}{6}+\overset{-}{2}$;

9) $\overset{+}{9}-\overset{+}{2}+\overset{+}{4}-\overset{+}{6}$; 10) $\overset{+}{9}+\overset{-}{2}+\overset{+}{4}+\overset{-}{6}$.

408. Проверить равенства:

1) $\overset{+}{7}-\overset{+}{3}=\overset{+}{7}+\overset{-}{3}$; 2) $\overset{-}{7}-\overset{+}{9}=\overset{-}{7}+\overset{-}{9}$;

3) $\overset{+}{7}-\overset{+}{2}+\overset{-}{3}=\overset{+}{7}+\overset{-}{2}-\overset{+}{3}=\overset{+}{7}+\overset{-}{2}+\overset{-}{3}$;

4) $\overset{-}{9}-\overset{+}{2}+\overset{+}{6}=\overset{-}{9}+\overset{-}{2}+\overset{+}{6}=\overset{+}{6}-\overset{+}{2}-\overset{+}{9}$;

5) $\overset{-}{15}-\overset{+}{3}+\overset{+}{6}=\overset{-}{15}+\overset{-}{3}+\overset{+}{6}=\overset{+}{6}-\overset{+}{15}-\overset{+}{3}$.

409. Проверить справедливость равенств:

1) $\overset{+}{5}-\overset{+}{7}+\overset{-}{2}=5-7-2$; 2) $\overset{+}{9}+\overset{-}{3}-\overset{+}{6}=9-3-6$;

3) $\overset{+}{15}+\overset{-}{8}-\overset{+}{8}=15-8-8$; 4) $\overset{+}{16}-\overset{+}{7}+\overset{-}{4}=16-7-4$.

410. Написать следующие выражения таким образом, чтобы при каждом числе стоял только один знак, и вычислить значения этих выражений:

1) $\overset{+}{5}+\overset{-}{6}-\overset{+}{8}$; 2) $\overset{+}{5}-\overset{+}{6}+\overset{-}{8}$; 3) $\overset{-}{9}+\overset{-}{4}-\overset{+}{8}$; 4) $\overset{-}{9}-\overset{+}{4}+\overset{-}{8}$;

5) $\overset{+}{16}-\overset{+}{9}+\overset{-}{6}+\overset{+}{4}$; 6) $\overset{+}{16}+\overset{-}{9}-\overset{+}{6}+\overset{+}{4}$; 7) $\overset{-}{9}-\overset{-}{7}+\overset{-}{6}-\overset{+}{5}$; 8) $\overset{-}{9}+\overset{+}{7}-\overset{+}{6}+\overset{-}{5}$;

9) $\overset{-}{17}-\overset{-}{9}+\overset{-}{11}-\overset{+}{8}$; 10) $\overset{+}{17}+\overset{+}{9}-\overset{+}{14}+8$;

11) $\overset{-}{27}+\overset{+}{40}-\overset{+}{7}+\overset{-}{8}$; 12) $\overset{-}{27}-\overset{-}{40}+\overset{-}{7}-\overset{+}{8}$.

411. Записать и вычислить:

1) сумму числа 5 и числа 4;
2) сумму числа 5 и числа, противоположного числу 4;
3) сумму числа, противоположного 5, и числа -4;

4) сумму числа, противоположного 5, и числа, противоположного — 4;
5) разность числа 5 и числа — 4;
6) разность числа 5 и числа, противоположного числу — 4;
7) разность числа, противоположного 5, и числа — 4;
8) разность числа, противоположного 5, и числа, противоположного — 4;
9) сумму числа — 8 и числа — 7;
10) сумму числа — 8 и числа, противоположного — 7;
11) сумму числа, противоположного — 8, и числа — 7;
12) сумму чисел, противоположных — 8 и — 7;
13) разность чисел — 9 и — 11;
14) разность числа — 9 и числа, противоположного — 11;
15) разность числа, противоположного — 9, и числа — 11;
16) разность чисел, противоположных — 9 и — 11.

412. Назвать число, противоположное:

1) a; 2) $-b$; 3) $3x$; 4) $-y$;
5) $a-b$; 6) $a+b$; 7) $3x-2y$; 8) $5z+6v$;
9) $a+b-c$; 10) $a-b+c$; 11) $b+c-a$; 12) $a+b+c$.

413. Чему равно $-a$, если:

1) $a=5$; 2) 11; 3) -7; 4) -13; 5) -9; 6) 0?

414. Чему равно b, если:

1) $-b=9$; 2) 13; 3) -5, 4) -11; 5) 14; 6) -8; 7) 0?

415. Какое число больше:

1) a или $-a$; 2) $3x$ или $-3x$;
3) $-xy$ или xy; 4) $a-b$ или $b-a$?

416. Чему равно:

$$x-y+z,$$

если

x	$+3$	-2	-5	$a+b$	$a^2+2ab+b^2$	a^3+b^3	a^4+b^4
y	$+5$	$+7$	-11	$a-b$	$a^2-2ab+b^2$	a^3-b^3	$a^4+2a^2b^2-b^4$
z	$+6$	-9	-13	$b-a$	a^2-b^2	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$a^4-2a^2b^2+b^4$

417. Чему равно $x-y-z$ при тех же значениях букв?
418. Чему равно $x-(y-z)$ при тех же значениях букв?
419. Чему равно $x-(y+z)$ при тех же значениях букв?

420. Прочитать всеми возможными способами выражения:

1) $a-b$; 2) $b-a$; 3) $3x-y$; 4) $y-3x$;
5) $a-(b+c)$; 6) $a-b-c$; 7) $(a-b)-c$;
8) $a-(b-c)$; 9) $a-b+c$; 10) $(a-b)+c$;

Числовое значение выражения не изменяется, если два знака, которые стоят один *перед* числом, а другой *над* числом: знак *действия* и знак *числа поменять местами.* Поэтому во всяком выражении можно (предварительно произведя вычитания всех отрицательных чисел, т.-е. заменив пару знаков — парой знаков +) пропустить все знаки + везде, где это не нарушает смысла выражения, а удержанные знаки писать *перед* числами, к которым они относятся. Всякий такой знак можно рассматривать и как знак числа, и как знак действия. Поэтому знак + называют *плюсом,* а знак — *минусом,* независимо от того, принимается ли этот знак за знак числа или за знак действия.

Обычно все знаки минус, стоящие перед числами, считаются за знаки *числа,* и выражение $-a$ принимается за обозначение числа, противоположного a. В виду этого все члены многочлена называют *слагаемыми,* а самый многочлен *суммой* (*алгебраической*).

§ 5. Упражнения.

421. В следующих примерах сложить выражения, стоящие друг над другом. Сложение производить, записывая данные выражения в строку и указывая, где нужно, посредством скобок последовательность действий.

1) $\begin{array}{r} n \\ +1 \\ \hline \end{array}$;	2) $\begin{array}{r} n \\ -1 \\ \hline \end{array}$;	3) $\begin{array}{r} n-1 \\ +1 \\ \hline \end{array}$;	4) $\begin{array}{r} +3 \\ n-2 \\ \hline \end{array}$;
5) $\begin{array}{r} a-4 \\ +5 \\ \hline \end{array}$;	6) $\begin{array}{l} a-b \\ 6 \\ \hline \end{array}$;	7) $\begin{array}{r} 5+a \\ -6 \\ \hline \end{array}$;	8) $\begin{array}{r} 1-a \\ -1 \\ \hline \end{array}$;
9) $\begin{array}{l} x+1 \\ 2 \\ \hline \end{array}$;	10) $\begin{array}{r} x+1 \\ -2 \\ \hline \end{array}$;	11) $\begin{array}{r} 4 \\ +x \\ \hline \end{array}$;	12) $\begin{array}{l} 7 \\ x-3 \\ \hline \end{array}$;
13) $\begin{array}{r} -5 \\ 4-a \\ \hline \end{array}$;	14) $\begin{array}{r} -7 \\ a-5 \\ \hline \end{array}$;	15) $\begin{array}{r} 7-a \\ -7 \\ \hline \end{array}$;	16) $\begin{array}{r} a+1 \\ -2 \\ \hline \end{array}$;
17) $\begin{array}{r} -3 \\ n+1 \\ \hline \end{array}$;	18) $\begin{array}{r} -5 \\ 5-n \\ \hline \end{array}$;	19) $\begin{array}{r} 5+n \\ -5 \\ \hline \end{array}$;	20) $\begin{array}{r} n-1 \\ +2 \\ \hline \end{array}$;
21) $\begin{array}{r} 1-m \\ +2 \\ \hline \end{array}$;	22) $\begin{array}{r} 3-m \\ -2 \\ \hline \end{array}$;	23) $\begin{array}{r} 7+2m \\ -2m \\ \hline \end{array}$;	24) $\begin{array}{r} 3m-5 \\ -m \\ \hline \end{array}$;
25) $\begin{array}{l} a-b \\ b \\ \hline \end{array}$;	26) $\begin{array}{r} a-b \\ -b \\ \hline \end{array}$;	27) $\begin{array}{l} m \\ m-n \\ \hline \end{array}$;	28) $\begin{array}{l} n \\ m-n \\ \hline \end{array}$;
29) $\begin{array}{l} x \\ y-x \\ \hline \end{array}$;	30) $\begin{array}{r} -x \\ x+y \\ \hline \end{array}$;	31) $\begin{array}{r} -x \\ x-y \\ \hline \end{array}$;	32) $\begin{array}{r} x-y \\ +y \\ \hline \end{array}$;

33) $\begin{array}{r} a - 3b \\ +4b \\ \hline \end{array}$; 34) $\begin{array}{r} -2a \\ a - 2b \\ \hline \end{array}$; 35) $\begin{array}{r} -5b \\ a + 4b \\ \hline \end{array}$; 36) $\begin{array}{r} 3a - 5b \\ +3b \\ \hline \end{array}$;

37) $\begin{array}{l} 5a \\ 1 - 4a \\ \hline \end{array}$; 38) $\begin{array}{r} 4a - 1 \\ +7a \\ \hline \end{array}$; 39) $\begin{array}{r} 3a + 1 \\ -4a \\ \hline \end{array}$; 40) $\begin{array}{l} 8a \\ 1 - 8a \\ \hline \end{array}$;

41) $\begin{array}{l} n - 1 \\ n + 1 \\ \hline \end{array}$; 42) $\begin{array}{l} n - 7 \\ n + 5 \\ \hline \end{array}$; 43) $\begin{array}{l} n - 1 \\ 3 - 2n \\ \hline \end{array}$; 44) $\begin{array}{l} n - 8 \\ 7 - n \\ \hline \end{array}$;

45) $\begin{array}{l} 5x - 3 \\ 1 + x \\ \hline \end{array}$; 46) $\begin{array}{l} a - 1 \\ 1 - a \\ \hline \end{array}$; 47) $\begin{array}{l} a + x \\ x - a \\ \hline \end{array}$; 48) $\begin{array}{l} a - x \\ x + a \\ \hline \end{array}$;

49) $\begin{array}{l} 7 - x \\ 2x - 10 \\ \hline \end{array}$; 50) $\begin{array}{l} a - 5 \\ 2 - 3a \\ \hline \end{array}$; 51) $\begin{array}{l} 7a - x \\ 2x - 5a \\ \hline \end{array}$; 52) $\begin{array}{l} 2a - 3b \\ 3b + a \\ \hline \end{array}$;

53) $\begin{array}{l} n - 3 \\ m + 5 \\ \hline \end{array}$; 54) $\begin{array}{l} n + 1 \\ a - 3 \\ \hline \end{array}$; 55) $\begin{array}{l} a - 1 \\ 3 - x \\ \hline \end{array}$; 56) $\begin{array}{r} 3a - n \\ n - b \\ \hline \end{array}$;

57) $\begin{array}{l} a + x \\ x - 1 \\ \hline \end{array}$; 58) $\begin{array}{l} a - b \\ 1 + a \\ \hline \end{array}$; 59) $\begin{array}{l} m - n \\ 3n - m \\ \hline \end{array}$; 60) $\begin{array}{l} m - n \\ n + 1 \\ \hline \end{array}$;

61) $\begin{array}{r} m - 2 \\ -n + 1 \\ \hline \end{array}$; 62) $\begin{array}{r} m - 3 \\ -3 - n \\ \hline \end{array}$; 63) $\begin{array}{r} m - 2n \\ -n - 2m \\ \hline \end{array}$; 64) $\begin{array}{r} 3x - 2y \\ -3y - 2x \\ \hline \end{array}$;

65) $\begin{array}{l} 7a - 3b + 2c - 3d \\ 5a - 4b - 5c + 7d \\ \hline \end{array}$; 66) $\begin{array}{l} a + b - c + d \\ a - b - c + 3d \\ \hline \end{array}$;

67) $\begin{array}{r} 8m - n + 7u + 3v \\ -9m + 4n - 7u - 5v \\ \hline \end{array}$;

68) $\begin{array}{r} 1\frac{3}{4}x - 3\frac{1}{5}y + 2\frac{1}{2}z + 1\frac{1}{2}v - 5\frac{1}{3}p \\ -2\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{3}y - 1\frac{5}{6}z + 1\frac{1}{2}v + 4\frac{1}{2}p \\ \hline \end{array}$;

69) $\begin{array}{l} \frac{3}{2}a - \frac{3}{4}b + \frac{2}{3}c - \frac{5}{6}d + \frac{4}{3}c + \frac{1}{2}g \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{6}c - \frac{1}{2}d - \frac{3}{4}c - \frac{1}{3}f \\ \hline \end{array}$;

70) $\begin{array}{r} 5a - 3b + 3c - d \\ -3a - b - 2c + 7d \\ +2a - 5b - 8c + d \\ -3a + 4b + 7c - 9d \\ \hline \end{array}$; 71) $\begin{array}{r} 7x - y + u - v \\ -5x - 4y + 8u - 4v \\ -2x + 5y + 3u + 7v \\ +x - 8y + 4u - 4v \\ \hline \end{array}$;

72) $\begin{array}{r} 1{,}34m - 7{,}6n - 9{,}37p + 1{,}38q \\ -9{,}4m - 8{,}7n - 81{,}7p - 0{,}89q \\ 9{,}76m + 9{,}3n + 4{,}33p + 7{,}02q \\ \hline \end{array}$;

422. В следующих примерах произвести вычитание, принимая число, стоящее в первой строке, за уменьшаемое, стоящее во второй — за вычитаемое. Вычитание производить, записывая данные выражения в строку и указывая, где нужно, посредством скобок последовательность действий:

1) $\frac{+12}{+7}$;	2) $\frac{-12}{-7}$;	3) $\frac{+12}{-7}$;	4) $\frac{-12}{+7}$;
5) $\frac{+6}{+11}$;	6) $\frac{+6}{-11}$;	7) $\frac{+6}{-11}$;	8) $\frac{-6}{+11}$;
9) $\frac{+8a}{+5a}$;	10) $\frac{+9x}{-3x}$;	11) $\frac{-11b}{-8b}$;	12) $\frac{-8m}{+m}$;
13) $\frac{+7a}{+11a}$;	14) $\frac{-5a}{+12a}$;	15) $\frac{-4a}{-9a}$;	16) $\frac{+3a}{-11a}$;
17) $\frac{+a}{+b}$;	18) $\frac{-a}{-b}$;	19) $\frac{+a}{-b}$;	20) $\frac{-a}{+b}$;
21) $\frac{+2y}{+3x}$;	22) $\frac{+5y}{-4x}$;	23) $\frac{-7y}{+3x}$;	24) $\frac{-3y}{+4x}$;
25) $\frac{n-1}{1}$;	26) $\frac{n+1}{1}$;	27) $\frac{5}{x+2}$;	28) $\frac{x+3}{7}$;
29) $\frac{x-7}{+5}$;	30) $\frac{x-2}{-2}$;	31) $\frac{3}{x-2}$;	32) $\frac{-1}{3-x}$;
33) $\frac{1-a}{-1}$;	34) $\frac{-1}{a-1}$;	35) $\frac{-1}{1-a}$;	36) $\frac{-1}{1+a}$;
37) $\frac{m-n}{n}$;	38) $\frac{m-n}{m}$;	39) $\frac{n}{m-n}$;	40) $\frac{m}{m-n}$;
41) $\frac{-x}{x-y}$;	42) $\frac{-y}{x-y}$;	43) $\frac{x-y}{-x}$;	44) $\frac{x+y}{-y}$;
45) $\frac{a-b}{2b}$;	46) $\frac{a+b}{2b}$;	47) $\frac{2a}{a+b}$;	48) $\frac{3b}{a+b}$;
49) $\frac{a-b}{2a}$;	50) $\frac{2a}{a-b}$;	51) $\frac{2b}{a-b}$;	52) $\frac{a-b}{+b}$;
53) $\frac{x-5y}{+3y}$;	54) $\frac{x-4y}{-3x}$;	55) $\frac{2x-y}{-2y}$;	56) $\frac{x+2y}{+3x}$;
57) $\frac{+5x}{x-y}$;	58) $\frac{7y}{3x+5y}$;	59) $\frac{4x}{2y-x}$;	60) $\frac{8x}{y+9x}$;
61) $\frac{-3x}{x-2y}$;	62) $\frac{-2y}{x-3y}$;	63) $\frac{-4y}{y-x}$;	64) $\frac{-5y}{2y-3x}$;
65) $\frac{7n}{1-5n}$;	66) $\frac{-3n}{4n-1}$;	67) $\frac{8n-1}{-2n}$;	68) $\frac{1-8n}{-5}$.

69) $\frac{x-1}{x+1}$; 70) $\frac{a-x}{x-a}$; 71) $\frac{x+y}{x-y}$; 72) $\frac{x+5}{x-7}$;

73) $\frac{a+3}{2-a}$; 74) $\frac{a-1}{3-2a}$; 75) $\frac{a+1}{5-a}$; 76) $\frac{n+1}{7-5n}$;

77) $\frac{n+1}{1-n}$; 78) $\frac{n-1}{1-n}$; 79) $\frac{n-1}{1+n}$; 80) $\frac{1-n}{n+1}$;

81) $\frac{5-x}{3-2x}$; 82) $\frac{8+x}{13-x}$; 83) $\frac{x+5}{5-2x}$; 84) $\frac{8+2x}{3x+7}$;

85) $\frac{m-1}{n-1}$; 86) $\frac{m-1}{n+1}$; 87) $\frac{m+1}{n-1}$; 88) $\frac{m+1}{1-n}$;

89) $\frac{n+x}{-x+1}$; 90) $\frac{n-x}{-1-x}$; 91) $\frac{a-x}{-a-1}$; 92) $\frac{x+y}{-y-a}$;

93) $\frac{n+2}{m-3}$; 94) $\frac{x-5}{5-y}$; 95) $\frac{2x-3y}{2y-3x}$; 96) $\frac{3a-b}{b+3a}$;

97) $\frac{7a-5b}{2b-a}$; 98) $\frac{7a+3b}{7b+3a}$; 99) $\frac{5a-b}{8a+b}$; 100) $\frac{3a-5b}{b+2a}$;

101) $\frac{9a-8b+7c-3d}{5a-6b-3c-2d}$; *102) $\frac{a-2b+3c-4d}{7a+3b-5c+8d}$;

103) $\frac{4x-3y+9u-8v}{5x+4y-3u-8v}$; 104) $\frac{m-3n+p+7}{m-4n-p+8}$.

423. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $(3ab-2ac)-(5ab-7ac)+(2ac-3ab)-(7ac-5ab)$;
2) $(4m-2p+3q)-(4p-2q+3m)+(4q-2m+3p)$;
3) $5x-3y-(3x+6y)+(7x-y)-(8x-15y)$;
4) $20a-(4b-5c)+(-17a+3b-c)-(2a-8b-16c)$;
5) $10y+(11z-9v)+(7y+9z-18v)-(3y+2z+5v)$;
6) $123x+53y-92z-(28x+3y-100z)-(75x+45y-7z)$;
7) $72a-(14b-4a)+(13b-4c)-(26c-15a)-(5a-39c)$;
8) $41x-(32x+6y)+(10x+10y+10z)-(-x-3y+4z)-(4z+x-2y)$;
9) $15s-12r+(5s+14r+7t)-(-3t-15r+10s)-10t-10r-(s+r+t)$;
10) $86a-42b-(-27c+23b-33b)-(-47a-49c+12b)-(32b-19c+7a)-(-4c+5a-75b)$;
11) $120x-[35x-(20x+13y)+3z]+[20y-(13z-20x]-[3x+4y-5z-(70z-33x)]$;
12) $5m^2-[35-(15m^2+3mp+q^2)]+[45+(10mp+7q^2)+20m^2]-[-32-(-m^2-mp+q^2)]$;
13) $43x-[-4y+(8z-16x)-(29x-15y)-(27z-26x-8y)]-[-46z-(24x-9y-13z)+(15x-7y)]$;

14) $(2{,}5a^3 - 5{,}2b^3) - [(3a^3 - 0{,}3a^2b + 0{,}09ab^2 + 2{,}8b^3) - (4a^3 + 2{,}7a^2b + 0{,}91ab^2 - 6{,}4b^3)]$;

15) $5xy^2 - (7x^3 - 4{,}7y^3) - [5x^3 - (2{,}2y^3 - 5x^2y - 4{,}2x^3) + (2{,}7y^3 - 7{,}2x^3)]$;

16) $4\frac{2}{5}m^2n^2 - \left(5{,}6m^4 - 7{,}4m^2n^2 + 2\frac{1}{3}n^4\right) - \left[2\frac{1}{8}m^2n^2 - 4{,}8n^4 - \left(5\frac{1}{8}n^4 + 2\frac{1}{3}m^2n^2 - 5{,}6m^4\right)\right]$;

424. Решить следующие уравнения:

1) $9 + x = 5$; 2) $13 = 9 - x$; 3) $18 = 7 - x$;
4) $x - 11 = -5$; 5) $9 - x = -5$; 6) $19{,}8 = 18{,}9 - x$;
7) $x + 7{,}5 = 5{,}7$; 8) $\frac{1}{6} - x = -\frac{1}{8}$; 9) $\frac{4}{5} + x = \frac{3}{4}$;
10) $\frac{2}{5} = \frac{3}{8} - x$; 11) $x - b = 0$; 12) $x + a = 0$;
13) $x - a = -a$; 14) $a - x = -a$.

425. 1) Найти число, которое на 12 больше числа, ему противоположного.

2) Найти число, которое на 100 меньше числа, ему противоположного.

3) Найти число, равное числу, ему противоположному.

4) Найти число, которое при сложении с удвоенным противоположным дает 7.

5) Найти число, которое больше утроенного противоположного на число a.

426. 1) В постоянной сумме $a + b = 10$, a получает значения от -10 до $+20$. Какие значения принимает b? Построить соответствующие значения a и b на оси.

2) В постоянной разности $a - b = 5$, a получает значения от -10 до $+20$. Какие значения принимает b? Построить соответствующие значения a и b на оси.

3) В постоянной разности $a - b = 5$, b получает значения от -10 до $+20$. Какие значения принимает a? Построить соответствующие значения a и b на оси.

§ 6. Умножение и деление относительных чисел.

427. Проверить равенство

$$(a - b)(x - y) = ax - bx - ay + by$$

при

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	4	4	4	4	4	4	4	6	6	1	6
b	2	3	4	3	6	6	4	3	3	5	9
x	5	5	5	5	5	5	6	5	3	2	7
y	4	4	4	5	2	5	8	3	5	8	9

428. Какой вид примет равенство

$$(a-b)(x-y)=ax-bx-ay+by,$$

если

1) $b=0$ и $y=0$; 2) $a=0$ и $y=0$; 3) $b=0$ и $x=0$ 4) $a=0$ и $x=0$?

429. Какой знак должно иметь произведение при **умножении на отрицательное** число, чтобы равенство $(a-b)(x-y)=$ $=ax-bx-ay+by$ оставалось справедливым и при $a<b$ и $x<y$ (в отдельности или одновременно) и при обращении одной или нескольких букв: a, b, x, y в нуль?

430. Что значит умножить число 15 на

1) 3; 2) $\frac{3}{4}$; 3) -3; 4) $-\frac{3}{4}$?

431. В чем состоит действие, называемое умножением на отрицательное число?

432. К чему сводится умножение числа на -1?

433. Вычислить:

1) $\overset{+}{5}\cdot\overset{+}{2}$; 2) $\overset{+}{2}\cdot\overset{+}{5}$; 3) $\overset{-}{3}\cdot\overset{+}{5}$; 4) $\overset{+}{5}\cdot\overset{-}{3}$;

5) $\overset{+}{7}\cdot\overset{-}{2}$; 6) $\overset{-}{2}\cdot\overset{+}{7}$; 7) $\overset{-}{4}\cdot\overset{-}{7}$; 8) $\overset{-}{7}\cdot\overset{-}{4}$.

434. Проверить равенство

$ab=ba$ (переместительный закон),

если:

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	$+7$	-7	$+7$	-7	$\overset{+}{9}$	$\overset{-}{9}$	$\overset{+}{9}$	$\overset{-}{9}$
b	$+2$	$+2$	-2	-2	$\overset{+}{2}$	$\overset{-}{2}$	$\overset{-}{9}$	$\overset{+}{2}$

435. Указать порядок действий и вычислить:

1) $(\overset{+}{5}\cdot\overset{+}{3})\cdot\overset{+}{2}$; 2) $\overset{+}{5}\cdot(\overset{+}{3}\cdot\overset{+}{2})$; 3) $(\overset{-}{5}\cdot\overset{+}{3})\cdot\overset{+}{2}$;

4) $(\overset{-}{5}\cdot\overset{+}{3})\cdot\overset{+}{2}$; 5) $(\overset{-}{5}\cdot\overset{+}{3})\cdot\overset{+}{2}$; 6) $\overset{-}{5}\cdot(\overset{+}{3}\cdot\overset{+}{2})$;

7) $(\overset{-}{5}\cdot\overset{-}{3})\cdot\overset{+}{2}$; 8) $\overset{-}{5}\cdot(\overset{-}{3}\cdot\overset{+}{2})$; 9) $(\overset{+}{5}\cdot\overset{+}{3})\cdot\overset{-}{2}$;

10) $(\overset{+}{5}\cdot\overset{+}{3})\cdot\overset{-}{2}$; 11) $(\overset{-}{5}\cdot\overset{+}{3})\cdot\overset{-}{2}$; 12) $\overset{-}{5}\cdot(\overset{+}{3}\cdot\overset{-}{2})$;

13) $(\overset{+}{5}\cdot\overset{-}{3})\cdot\overset{-}{2}$; 14) $\overset{+}{5}\cdot(\overset{-}{3}\cdot\overset{-}{2})$; 15) $(\overset{-}{5}\cdot\overset{-}{3})\cdot\overset{-}{2}$; 16) $\overset{-}{5}\cdot(\overset{-}{3}\cdot\overset{-}{2})$.

436. Проверить равенство

$$a(b\,.\,c) = (ab)\,.\,c \text{ (собирательный закон)}$$

при

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	$+6$	-6	-6	-6	0,6	$-0,6$	0,06	$-0,06$
b	$+4$	4	-4	-4	0,4	0,4	$-0,4$	-40
c	$+7$	7	7	-7	$-0,7$	$-0,7$	-7	$-0,7$

437. Написать без скобок:

1) $(-5)^2$; 2) $(-1)^2$; 3) $(-7)^2$; 4) $(-a)^2$;
5) $(x)^2$; 6) $(-x)^2$; 7) $(-3)^3$; 8) $(-1)^3$;
9) $(-4)^3$; 10) $(-b)^3$; 11) $(x)^3$; 12) $(-1)^3$.

438. Написать без скобок:

1) x^2 2) x^3 3) x^4
при а) $x=2$, б) $x=-2$, в) $x=3$, г) $x=-4$
4) a^2 5) a^3 6) a^4 7) a^5
при а) $a=4$, б) $a=-4$. в) $a=1$, г) $a=-1$
8) $(a-b)^2$ 9) $(b-a)^2$ 10) $(a-b)^3$ 11) $(b-a)^3$
при $a=5$, $b=3$.

439. Вычислить выражения:

1) $y=x^2-1$ при $x=1$, $x=-1$;
2) $y=x^2-x-2$ » $x=2$, $x=-1$;
3) $y=x^2-x-12$ » $x=4$, $x=-3$;
4) $y=x^2+5x+6$ » $x=-3$, $x=-2$;
5) $y=x^3+3x^2+2x$ » $x=0$, $x=-1$, $x=-2$;
6) $y=x^2+px+q$ » $p=-7$, $q=12$, $\begin{cases} x=3 \\ x=4; \end{cases}$
7) $y=x^2+px+q$ » $p=7$, $q=12$, $\begin{cases} x=-3 \\ x=-4; \end{cases}$
8) $y=x^2+px+q$ » $p=6$, $q=-27$ $\begin{cases} x=-9 \\ x=3; \end{cases}$
9) $y=x^2+px+q$ » $p=-6$, $q=-27$ $\begin{cases} x=9 \\ x=-3. \end{cases}$

440. Упростить выражения:

1) $(-x)(-y)(-z)$; 2) $x\cdot(-y)\cdot(-z)$; 3) $(-x)\cdot y\cdot(-z)$;
4) $(-5)(-a)(-a^2)$; 5) $(-5)\cdot a\cdot(-a^2)$; 6) $(-5)(-a)\cdot a^2$;
7) $(-2)^3\cdot(-3)^2$; 8) $(-2)^2\cdot(-3)^3$; 9) $(-2)^3(-3)^3$;
10) $(-1)^7$; 11) $(-1)^6$; 12) $(-1)^8$;
13) $1-(-1)^2$; 14) $1-(-1)^3$; 15) $1-(-1)^4$;

16) $2+(-2)^2$; 17) $2-(-2)^2$; 18) $-2+(-2)^2$;

19) $\bar{1}\cdot\bar{2}\cdot\bar{3}\cdot\bar{4}\cdot\bar{5}$; 20) $\bar{1}\cdot 2\cdot\bar{3}\cdot 4\cdot\bar{5}$; 21) $\bar{1}\cdot 2\cdot 3\cdot\bar{4}\cdot 5$.

441. Какая разница между

1) -1^2 и $(-1)^2$; 2) -5^2 и $(-5)^2$;
3) $-a^2$ и $(-a)^2$; 4) $-2a^2$, $(-2a)^2$ и $(-2)^2a$;
5) $-x$ и $(-x)^3$; 6) $-2x^3$ и $(-2x)^3$.

442. Найти значения выражений:

1) $2a^2b^2$; 2) a^3b^2c; 3) ab^2c^3;
4) ab^3c; 5) a^3bc^2; 6) ab^3c^2;
7) $-6a^2b^2c^2$; 8) $-6a^3b^3c^3$; 9) $-6a^3b^2c$;
10) $ab+bc+ac$; 11) $ab-bc+ac$; 12) $ab+bc-ac$;

при 1) $a=1$ $b=-2$ $c=3$;
» 2) $a=-1$ $b=-2$ $c=3$;
» 3) $a=-1$ $b=-2$ $c=-3$.

443. Проверить тожества:

1) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

3) $(b+c)(c+a)(a+b)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+$ $+2abc$.
4) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)=a^4-b^4$;

при $a=1$, $b=-1$, $c=-2$
» $a=-1$, $b=-1$, $c=2$.

444. На числовых примерах проверить, что

1) при неравных значениях a и b

$$a^2+b^2>2ab;$$

2) при неравных значениях x, y, z

$$x^2+y^2+z^2>yz+xz+xy.$$

445. Проверить умножением, что

1) $\overset{+}{14}:\overset{+}{2}=\overset{+}{7}$; 2) $\overset{-}{14}:\overset{-}{2}=\overset{+}{7}$; 3) $\overset{-}{14}:\overset{+}{2}=\overset{-}{7}$; 4) $\overset{+}{14}:\overset{-}{2}=\overset{-}{7}$.

446. Проверить равенства:

1) $(-a):b=-\frac{a}{b}$; 2) $a:(-b)=-\frac{a}{b}$; 3) $(-a):(-b)=\frac{a}{b}$;

a) при $a=15$, $b=3$; b) $a=40$, $b=20$.

447. Проверить умножением равенства:

1) $(-ac):c=-a$; 2) $ac:(-c)=-a$; 3) $(-ac):(-c)=a$

448. Вычислить значения:

1) $\frac{2a-d}{2a}$; 2) $\frac{c^3d^2}{a^4b^5}$; 3) $\frac{(abcd)^2}{d^3}$; 4) $\frac{a^3+b^3}{a+b}$;

5) $\frac{a^3-b^3}{a-b}$; 6) $\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^2-2ab+b^2}$; 7) $\frac{a^6-b^6}{a^3-b^3}$; 8) $\frac{a^5+1}{b+1}$;

при $a=-2$, $b=-1$, $c=-5$, $d=-4$.

449. Упростить выражения:

1) $(+ab):(+b)$;
2) $(-12):(-3)$;
3) $(+6ab):(-3b)$;
4) $\left(+3\frac{1}{3}\right):10$;
5) $(-ab):(-b)$;
6) $(-20):(+5)$;
7) $(-12xy):(-4y)$;
8) $\left(-2\frac{1}{2}\right):\left(-2\frac{1}{7}\right)$;
9) $(-xy):(+y)$;
10) $(+3):(-15)$;
11) $(-24np):(+4n)$;
12) $\left(+\frac{5}{12}\right):\left(-\frac{10}{3}\right)$;
13) $(+xy):(-y)$;
14) $(-8):(+12)$;
15) $\left(+\frac{3}{5}\right):(-6)$;
16) $\left(-\frac{7}{8}\right):\frac{5}{4}$;
17) $(+7a).(-9b):(-21a)$;
18) $(+am).(+bn):(-an)$;
19) $(-7x).(-6y):(+14y)$;
20) $(+10x^2)(-6y^2):(-4xy)$;
21) $(-8m).(+9n):(-12n)$;
22) $(-12abc).(-15xy):(20cy)$.

Умножением на положительное число называется умножение на его абсолютное значение.

Умножением на отрицательное число называется действие, состоящее из умножения множимого на абсолютное значение множителя и перемены знака на обратный у полученного произведения.

Поэтому произведение двух относительных чисел равно произведению их абсолютных значений и имеет при себе знак +, если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, и знак —, если знаки сомножителей различны.

Умножение данного числа на — 1 сводится, следовательно, лишь к перемене знака этого числа на обратный.

Умножение многочленов.

450. Проверить справедливость равенств:

$$(a+b-c)\cdot m = am + bm - cm,$$
$$m(a+b-c) = ma + mb - mc$$

(распределительный закон)

при

	a	b	c	m
1)	-5	-3	-2	-4
2)	x	$-y$	$-z$	$-p$
3)	x^2	$-xy$	$-y^2$	x^2.

451. Раскрыть скобки и, где возможно, упростить выражения:

1) $(5a-7b-3c)\cdot(-2abc)$;
2) $(-5ab+7ac-bc)\cdot(-2abc)$;
3) $(2a-3b)\cdot(3x-2y)$; 4) $(5a-7b)\cdot(-8y+2x)$;
5) $(5a-b)\cdot(-2a-3b)$; 6) $(-3a-5b)\cdot(7a-b)$;
7) $(a+2)(a-1)-(a+1)(a-2)$;
8) $(x+4)(x-2)-(x+2)(x-1)$;
9) $(a+2)(a-1)-(a+3)(a-2)$;
10) $(n+7)(n-5)-(n+9)(n-7)$;
11) $(5ab-15ac+bd-3cd)(5ab+15ac-bd-3cd)$;
12) $(9ac+3ad-2bd-6bc)(9ac-3ad-2bd+6bc)$;
13) $(3a^2-5ab+2b^2)(a^2-7ab)$;
14) $(x^2+5-2x)(x^2-3+x)$;
15) $(x^2-3x+7)(-3+5x+2x^2)$;
16) $(x^2-7xy+8y^2)(-x^2-2y^2+4xy)$;
17) $(3+2x^2-5x)(-8+7x^2+x)$;
18) $(x^4+a^4-ax^3-a^3x)(x^2-a^2)$;
19) $(a^5+a^4b-ab^4-b^5)(ab^2-a^2b)$;
20) $(x^3+6-7x)(x^2-5x-2)$;
21) $(5x^3-xy^2-7y^3)(-4xy+3y^2+x^2)$;
22) $(3x^3-4x+8)(-1+2x+x^2)$;
23) $(a+b)(a+b)(a+b)$; 24) $(a-b)(a-b)(a-b)$;
25) $(x+y)^3$; 26) $(x-y)^3$; 27) $(x+1)^3$; 28) $(x-1)^3$;
29) $(3a-2b)^3$; 30) $(2a-5b)^3$; 31) $(2a-3)^3$; 32) $(1+2a)^3$;
33) $(x-1)(x-2)(x+3)$; 34) $(x-1)(x+2)(x-3)$;
35) $(2x-1)(3x+5)(x+1)$; 36) $(3x+5)(2x-3)(x-1)$;
37) $(2x-1)(3x-2)(4x+3)(5x-4)$;

38) $(x^4+2x^3-8x-16)(x^2-2x+4)$;
39) $(2x-3)^2(3x-1)^2$;
40) $(2+4x+3x^3+6x^2)(1-x)^2$.

452. В примерах 7, 9, 23, 24, 31 заменить a через $-b$ и упростить полученные выражения.

453. В примерах 8, 25, 26, 27, 28, 33, 34, 35, 36, 37, 39 заменить x через $-x$ и упростить полученные выражения.

454. В примерах 11, 12, 13, 29, 30 заменить a через $-b$, а b через $-a$.

455. Найти коэффициент при x^6 в произведении:

$$(1-2x+4x^2-8x^3+16x^4)(1+2x+4x^2+8x^3+16x^4).$$

456. Найти коэффициент при x^3 в произведениях:

1) $(2-3x)^2(1+5x)^2$; 2) $(1+x)^2(1-x)^2$;
3) $(1+x+x^2)^3$; 4) $(1-x+x^2)^2$.

Законы действий.

Законы сложения:

1) Переместительный закон:

$$a+b=b+a;$$
$$a-b=-b+a.$$

2) Собирательный (сочетательный):

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c.$$
$$a+(b-c)=(a+b)-c=a+b-c.$$
$$a-(b+c)=(a-b)-c=a-b-c.$$
$$a-(b-c)=(a-b)+c=a-b+c.$$

Законы умножения:

1) Переместительный закон:

$$ab=ba.$$

2) Собирательный закон:

$$a(bc)=(ab)c=abc.$$

3) Распределительный закон:

$$(a+b-c)\,m=am+bm-cm.$$
$$m(a+b-c)=ma+mb-mc.$$

Деление многочленов.

457. 1) $(mx - my):(-m)$; 2) $(24ab - 21b^2 - 3b):(-3b)$;
3) $(-x^2 + 20xy - 6x^2y):(-4x)$;
4) $\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}xy\right):\left(-\frac{2}{3}x\right)$.

458. Упростить следующие выражения либо разложением делимого на множители, либо делением:

1) $(am - bm):(a - b)$; 2) $(mx - x):(m - 1)$;
3) $(15nx + 6ny + 21nz):(5x + 2y + 7z)$;
4) $(51a^5 - 36a^4 + 12a^3 - 21a^2 - 9):(17a^4 - 12a^3 + 4a^2 - 7a - 3)$;
5) $(0{,}6x^3y + 22{,}4x^2y^2 + 9{,}4x^2y):(0{,}3x + 11{,}2y + 4{,}7)$;
6) $\left(\frac{1}{2}d^3ef + \frac{23}{42}d^2ef + 1\frac{1}{35}d^2e^2f\right):\left(1\frac{3}{4}d^2e + 1\frac{11}{12}de + 3\frac{3}{5}de^2\right)$;
7) $(ac - ad + bc - bd):(c - d)$;
8) $(m^2 - mx - m + x):(m - 1)$;
9) $(6am - 9an - 4bm + 6bn):(3a - 2b)$;
10) $(6ac - 2ad + 4af - 9bc + 3bd - 6bf):(2a - 3b)$;
11) $(2ax - 6bx + 8cx - ay + 3by - 4cy):(2x - y)$;
12) $(a^2 + ab - 2b^2):(a - b)$; 13) $(3a^2 + ab - 2b^2):(3a - 2b)$;
14) $(9x^2 + 6xy - 8y^2):(3x - 2y)$;
15) $(x^2 - 8x + 7):(x - 7)$; 16) $(x^2 - 2x - 15):(x - 5)$;
17) $(x^2 + x - 20):(x - 4)$; 18) $(x^2 - y^2):(x - y)$;
19) $(a^2 - 25):(a + 5)$;
20) $\left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{73}{18}x - 2\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{3}\right)$;
21) $\left(\frac{7}{5}x^2 - \frac{5}{7}y^2\right):\left(7x - 5y\right)$;
22) $\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{2}b^2\right):\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b\right)$;
23) $(0{,}4x^2 + 1{,}47x - 8{,}5):(0{,}8x - 2{,}5)$;
24) $(2{,}21n^2 - 1{,}8np - 1{,}61p^2):(0{,}7p + 1{,}3n)$;
25) $\left(3{,}9x^2 - 4{,}1xy - 11\frac{2}{3}y^2\right):\left(1\frac{1}{2}x - 3{,}5y\right)$;
26) $\left(2a^2 - \frac{2}{15}ax - 11\frac{1}{5}x^2\right):(3{,}5x + 1{,}5a)$;
27) $(3a^3 - a^2b + 2b^3):(a + b)$;
28) $(6x^3 + x^2 - 29x + 21):(2x - 3)$;
29) $\left(2x^3 - 2x^2 - 6\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2}\right.:(2x - 3)$;
30) $(ac + bc + ad + bd):(a + b)$;
31) $(ac + bc - ad - bd):(a + b)$;
32) $(ax - bx + ay - by):(a - b)$;

33) $(xu - xv - yu + yv) : (x - y)$;
34) $(3x + ax + 3y + ay) : (x + y)$;
35) $(3x + 3y + ax + ay) : (a + 3)$;
36) $(3x - 3y + ax - ay) : (x - y)$;
37) $(3x + ax - 3y - ay) : (a + 3)$;
38) $(12px + 8py + 9qx + 6qy) : (4p + 3q)$;
39) $(36az - 21au + 60bz - 35bu) : (12z - 7u)$;
40) $(35mx - 28my - 20nx + 16ny) : (7m - 4n)$;
41) $(21tr + 28tu - 27rs - 36su) : (7t - 9s)$;
42) $(21tr - 27rs + 28tu - 36su) : (3r + 4u)$;
43) $(9x^3 + 15x^2y - 6xy^2 - 10y^3) : (3x + 5y)$;
44) $(9x^3 - 6xy^2 + 15x^2y - 10y^3) : (3x^2 - 2y^2)$;
45) $(2a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + 2b^3) : (2a^2 + 2b^2)$;
46) $(45x^5 + 21x^3z^2 + 60x^2z^3 + 28z^5) : (3x^3 + 4z^3)$;
47) $(180u^4 + 36u^3w + 165uw^7 + 33w^8) : (15u + 3w)$;
48) $(0{,}7ax + 0{,}3bx + 0{,}7ay + 0{,}3by) : (0{,}7a + 0{,}3b)$;
49) $(6p^3 + 0{,}15p^2q + 0{,}36pq^2 + 0{,}009q^3) : (0{,}5p^2 + 0{,}03q^2)$;
50) $(0{,}861x^5y^5 + 1{,}89x^3y^3z^2 - 6{,}027x^2y^2z^3 - 13{,}23z^5) :$
$: (1{,}23x^2y^2 + 2{,}7z^2)$;
51) $(0{,}861x^5y^5 - 1{,}89x^3y^3z^2 - 6{,}027x^2y^2z^3 + 13{,}23z^5) :$
$: (0{,}7x^3y^3 - 4{,}9z^3)$;
52) $\left(\frac{1}{15}ax - \frac{1}{21}bx + \frac{2}{15}ay - \frac{2}{21}by\right) : \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right)$;
53) $\left(\frac{5}{8}x^6 - \frac{17}{20}x^4z^3 + 1\frac{3}{7}x^2z^5 - 1\frac{33}{35}z^8\right) : \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{7}z^5\right)$;
54) $\left(\frac{2}{5}x^2z - \frac{8}{21}y^2z + \frac{21}{40}x^2t - \frac{1}{2}y^2t\right) : \left(\frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{7}y^2\right)$;
55) $\left(\frac{2}{5}x^2z + \frac{8}{21}y^2z + \frac{21}{40}x^2t + \frac{1}{2}y^2t\right) : \left(\frac{2}{8}z + \frac{7}{3}t\right)$;
56) $(35z^2 + 66uz + 27u^2) : (5z + 3u)$;
57) $(15a^2 - 22ac + 8c^2) : (3a - 2c)$;
58) $(6p^2 + pq - 12q^2) : (2p + 3q)$.
59) $(a^3 - b^3) : (a - b)$;
60) $(a^3 + b^3) : (a + b)$;
61) $(81a^4 - 16b^4) : (3a + 2b)$;
62) $(a^5 + b^5) : (a + b)$;
63) $(9a^2b^2 - 4a^2c^2 + 4abc^2 - b^2c^2) : (3ab - 2ac + bc)$;
64) $(a^2 - b^2 + 2bc - c^2) : (a + b - c)$;
65) $(3a^2 - 4ab + 8ac - 4b^2 + 8bc - 3c^2) : (a - 2b + 3c)$;
66) $(x^2 + 2xz - 4y^2 + 8yz - 3z^2) : (x - 2y + 3z)$;
67) $(3a^2b - 4a^2 + 8x^2 - 12bx^2) : (3ab - 2a + 6bx - 4x)$;
68) $(329bx - 208ax + 87ab - 153x^2 - 156b^2 + 153a^2) :$
$: (17a - 13b + 9x)$;
69) $(6x^2 - 21{,}38xy - 6xz + 18{,}5y^2 + 1{,}64yz - 36z^2) :$
$: (2{,}5x - 3{,}7y + 5z)$;

70) $(3a^3+6a^2b+9a^2c+2ab^2+4b^3+ac^2+2bc^2+6b^2c+3c^3)+$
$+(a+2b+3c)$;
71) $(6a^2-13ab+7ac+6b^2-17bc+5c^2):(3a-2b+5c)$;
72) $(8u^2+6uv+16ut+9vt+6t^2):(4u+3v+2t)$;
73) $(28x^3+6x^2y+30x^2z+56x^2+12xy+60xz+42x+9y+45z):$
$:(14x+3y+15z)$;
74) $(49a^2-42ab+9b^2-16c^2):(7a-3b+4c)$;
75) $(60x^2+77y^2+63z^2-149xy+163xz-148yz):$
$:(15x-11y+7z)$;
76) $(0{,}06a^2+0{,}02ab-0{,}64ac-47{,}6b^2+39{,}2bc-6c^2):$
$:(0{,}12a+3{,}4b-2c)$;
77) $(0{,}2t^2+5{,}4rs+0{,}2tr+2{,}3ts+3s^2-1{,}2r^2):$
$:(0{,}2t+0{,}3s+0{,}6r)$;
78) $(7{,}8x^3+21{,}119x^2y+16{,}922xy^2+3{,}955y^3):(3{,}25x^2+$
$+4{,}06xy+1{,}13y^2)$;
79) $(10{,}4z^2+12{,}6zt+1{,}6zu+18{,}9tu-21u^2):$
$:(5{,}2z+6{,}3t-7u)$;
80) $\left(x^2-\frac{7}{24}xy+\frac{17}{36}xz-\frac{15}{16}y^2+\frac{23}{12}yz-\frac{35}{36}z^2\right):$
$:\left(1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{4}y-1\frac{1}{6}z\right)$;
81) $\left(r^2-\frac{8}{5}rs+\frac{17}{28}tr-\frac{14}{5}st-2t^2\right):(4r+7t)$;
82) $\left(1\frac{3}{4}a^3+2\frac{109}{180}a^2b+1\frac{83}{105}ab^2+\frac{16}{21}b^3\right):\left(2\frac{1}{3}a^2+1\frac{2}{5}ab+1\frac{1}{7}b^2\right)$;
83) $(81x^5+111x^4-69x^3+9x^2-63x+102):(3x+6)$;
84) $(102-69x^3+9x^2-63x+111x^4+81x^5):(11x^2-19x+$
$+27x^4-17x^3+17)$;
85) $(12z^6+32z^4+51z^2+35):(2z^4+3z^2+5)$;
86) $(9x^5-15x^4y-8x^3y^2+13x^2y^3-21xy^4+6y^5):$
$:(3x^3+2x^2y+3y^3)$;
87) $(6y^5-21y^4x+13y^3x^2+8y^2x^3+15yx^4+9x^5):$
$:(2y^2-7xy+3x^2)$;
88) $(48z^3+174z^2+199z+72):(6z^2+15z+8)$;
89) $(-9u^4+12u^3-7u^2+5u-2):(3u^3-2u^2+u-1)$;
90) $(g^2hi-3gi^2-6gh^2+18hi):(gh-3i)$;
91) $(125x^3y^3-525x^2y^2z+105xyz^2+549z^3):(5xy-7z)$;
92) $(r^3s^3t^3+1331u^3):(r^2s^2t^2-11rstu+121u^2)$;
93) $(2p^2r-4pr+8p^3-10qp^2+5qr-r^2):(2p^2-r)$;
94) $(14x^6+54x^5-39x^4-7x+2):(2x^4+8x^3-5x^2-3x+1)$;
95) $(1{,}5z^7+0{,}51z^6-6{,}9z^5+3{,}6z^4+z^3+0{,}34z^2-4{,}6z+2{,}4):$
$:(0{,}5z^5+0{,}17z^2-2{,}3z+1{,}2)$;
96) $\left(2\frac{2}{5}x^4-3\frac{3}{5}x^3y+3\frac{1}{5}x^2y^2+3\frac{4}{5}xy^3-y^4\right):\left(2x^2+xy-\frac{1}{3}y^2\right)$;
97) $(z^5-y^5):(z-y)$.

459. Произвести деления:

1) $(a^4+4a^3+6a^2+4a+1):(a+1)$;
2) $(a^3+4a^2+7a+6):(a+2)$;
3) $(3a^3+4a^2+7a+2):(3a+1)$.

Какой вид примут получаемые при этом вычисления, если вместо a подставить 10?

460. Выяснить, какие из следующих делений выполняются без остатка:

1) $(a^2+b^2):(a+b)$;
2) $(a^3-b^3):(a+b)$;
3) $(a^2+9):(a-3)$;
4) $(a^3+b^3):(a-b)$;
5) $(a^2+b^2+c^2):(a+b+c)$;
6) $(a^4-b^4):(a+b)$;
7) $(a^4+b^4):(a+b)$;
8) $(x^6-y^6):(x^3+y^3)$;
9) $(x^6+y^6):(x^3+y^3)$;
10) $(u^6+u^3v^3+v^6):(u^2+uv+v^2)$;
11) $(9a^2+30ab^2+25b^4):(3a+5b^2)$;
12) $(a^4-b^4):(a^3-b^3)$.

Уравнения.

461. Решить следующие уравнения:

1) $-2x=5$;
2) $-3x=-6$;
3) $4x=-12$;
4) $36=-9x$;
5) $33x=-11$;
6) $7x=0$;
7) $7x=-4{,}2$;
8) $0{,}72=-5x$;
9) $0{,}3=-6x$;
10) $8\frac{3}{4}=-5x$;
11) $13x=-10\frac{1}{9}$;
12) $29x-97=-10$;
13) $8{,}5-14x=-1{,}3$;
14) $7x+19=14{,}8$;
15) $5{,}2=9-19x$;
16) $\frac{x}{8}=0$;
17) $19-3x=14-8x$;
18) $51x+35=15x-73$;
19) $51x-45+71-9x=x-145+39-47x$;
20) $25-x-97+39x=73x-26-81x+41+17x$;
21) $x=91-76x-35+27x+47+9x+33+7x$.

Задачи на исследование формул и составление уравнений.

462. Аэростат поднимается с поверхности земли со скоростью v метров в минуту, опускается — со скоростью v' метров в минуту. Определить положение аэростата относительно вершины парижской башни Эйфеля, если известна ее высота H метров, и если известно, что шар поднимался в течение t минут, а затем опускался в течение t' минут. Для вычислений:

	v	v'	H	t	t'
1)	1120	50	300	10	6
2)	120	50	300	10	16
3)	120	50	300	10	21
4)	120	50	300	10	30.

463. Кооператив купил 1320 *кг* чаю по 70 руб. за 16 *кг*, а продавал по 2 руб. за 2,5 *кг*. Сколько прибыли за *кг* получил он при продаже, если 64 *кг* пришлось выбросить, как испорченные, а развеска и упаковка остального чая обошлись в 40 рублей?

2) В бассейн проведены три трубы: первая подает в минуту 10 вед., вторая — 15 ведер. Сколько подает третья, если при совместном действии трех труб пустой бассейн наполняется в 50 минут, а емкость его равна 1000 ведер?

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Дроби.

§ 1. Понятие дроби.

464. Вычислить:

$$y = a : b \text{ при}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	16	-12	-18	$+14$	5	12	-11	7	-15
b	8	4	-6	-2	-7	5	4	-3	-6.

465. Упростить выражения:

1) $a^3b^2 : ab$; 2) $x^5y^5 : xy^2$; 3) $a^3b^2 : a^2b$;
4) $x^5y^5 : x^3y^2$; 5) $a^3b^2 : a^3b$; 6) $x^5y^5 : x^5y^2$;
7) $a^3b^2 : a^4b$; 8) $x^5y^5 : x^7y^2$.

466. Как можно записать результаты делений:

1) $a : b$; 2) $3a^2 : b^2$; 3) $4xy : 5abc$;
4) $12xyz : 13ab^2c^3$; 5) $7x^2y^2 : 5az^2$; 6) $15x^3 : 6a^2z^4$;
7) $3a^3x^2 : 5b^2y^3$; 8) $15 : 7ab^2c^3$.

467. Что называется алгебраической дробью?

468. При каком значении b выражение $\frac{a}{b}$ не имеет смысла?

469. Изобразить в подходящем масштабе на числовой прямой дроби:

1) $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}$;
2) $\frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{2}{7}, \frac{3}{1}, \frac{4}{11}$,

и, руководствуясь этим изображением, расположить их по величине.

470. Среднее арифметическое n величин a_1, $a_2 \ldots a_n$ (среднее значение) равно

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

1) Вычислить среднее арифметическое чисел от 1 до 10.

2) В течение недели измеряли температуру воздуха в полдень; показания термометра были: в воскресенье 16°, в понедельник 18°, во вторник 21°, в среду 25°, в четверг 17°, в пятницу 13° и в субботу 16°. Определить среднюю температуру полудня за неделю и отклонение от нее на каждый день.

3) При пяти измерениях некоторой длины были получены следующие числа: 1) 1,2564 *м*, 2) 1,2567 *м*, 3) 1,2565 *м*, 4) 1,2563 *м*, 5) 1,2565 *м*. Определить **наиболее вероятное** значение измеренной длины.

471. Число рублей процентных денег при простых процентах с капитала в k рублей, отданного по $p\%$ на n лет, определяются по формуле:

$$z = \frac{k \cdot p \cdot n}{100}.$$

Вычислить процентные деньги при

$$\begin{aligned} &1)\ k = 12000,\ p = 4,\ n = 1; \\ &2)\ k = 1250,\ p = 3,\ n = 2; \\ &3)\ k = 800,\ p = 4,\ n = 3. \end{aligned}$$

Выражение, в которое (после всех возможных упрощений) входит действие деления на какую-либо букву или на выражение, содержащее буквы, называется *дробным*.

Выражение, в котором *последнее* действие есть деление (на какую-нибудь букву), называется *алгебраической дробью.* Знак деления в этом случае изображается в виде горизонтальной черты, которая ставится *под делимым* и *над делителем.*

Так как деление на 0 не имеет смысла, то дробь не имеет смысла, когда ее знаменатель обращается в 0.

Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.

472. Проверить равенства:

$$(a + b - c) : m = a : m + b : m - c : m;$$

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} = \frac{a + b - c}{m}$$

при

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	15	16	—25	18	16	— 8	0,9	$\frac{2}{5}$
b	12	—24	60	29	17	13	—0,7	$\frac{3}{5}$
c	21	8	—30	5	6	5	—1,1	$\frac{7}{5}$
m	3	8	—5	3	4	4	0,5	$\frac{4}{5}$.

473. Что значит **сложить** две дроби с одинаковыми знаменателями?

474. Выполнить сложение:

1) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$; 3) $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$;

4) $\frac{b}{m}+\frac{a}{m}$; 5) $\frac{5}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$; 6) $\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)+\frac{3}{7}$;

7) $\frac{a}{m}+\left(\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)$; 8) $\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)+\frac{c}{m}$; 9) $\frac{13}{15}+\left(\frac{7}{15}-\frac{4}{15}\right)$;

10) $\left(\frac{13}{15}+\frac{7}{15}\right)-\frac{4}{15}$; 11) $\frac{a}{m}+\left(\frac{b}{m}-\frac{c}{m}\right)$; 12) $\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)-\frac{c}{m}$;

13) $\frac{a}{m}+\left(\frac{b}{m}-\frac{c}{m}\right)$; 14) $\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)+\frac{c}{m}$; 15) $\frac{a}{m}-\left(\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)$;

16) $\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{m}\right)-\frac{c}{m}$.

475. Проверить справедливость равенств:

при $a+b=b+a$.

$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$.

$a+(b-c)=(a+b)-c=a+b-c$.

$a-(b+c)=(a-b)-c=a-b-c$.

$a-(b-c)=(a-b)+c=a-b+c$.

при

	1	2	3	4	5	6
a	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{7}$	0,33	0,045	$\frac{x}{m}$	$\frac{p}{5}$
b	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	0,16	0,012	$\frac{y}{m}$	$\frac{q}{5}$
c	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{7}$	0,24	0,033	$\frac{z}{m}$	$\frac{r}{5}$.

476. Упростить выражения:

1) $\frac{a}{m}+\frac{a+b}{m}+\frac{a+2b}{m}+\frac{a+3b}{m}$;

2) $\frac{x}{y}+\frac{x+2}{y}+\frac{x+4}{y}+\frac{x+6}{y}+\frac{x+8}{y}$;

3) $\frac{z-1}{a}+\frac{z-4}{a}+\frac{z-7}{a}+\frac{z-10}{a}$;

4) $\frac{a+b+c}{2}+\frac{a+b-c}{2}+\frac{a-b+c}{2}+\frac{b+c-a}{2}$;

5) $\frac{a+b+c}{m}-\frac{a+b-c}{m}-\frac{b+c-a}{m}-\frac{a-b+c}{m}$;

6) $\frac{x+y}{a}+\frac{x-y}{a}-\frac{2x}{a}$.

Сложить две алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями значит составить дробь, числитель которой равен сумме числителей данных дробей, а знаменатель равен знаменателю этих дробей.

§ 2. Преобразование дробей.

477. Проверить равенство:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$$

при

	1	2	3	4	5	6	7
a	24	45	8	—18	—25	1,7	3
b	6	9	1	— 6	— 5	0,4	2
m	2	—4	6	— 5	— 3	0,2	$\frac{4}{3}$.

Сокращение дробей.

478. Сократить дроби:

1) $\frac{24}{8}$; 2) $\frac{-7}{49}$; 3) $\frac{42}{6}$; 4) $\frac{6}{-8}$; 5) $\frac{-8}{12}$;

6) $\frac{-18}{6}$; 7) $\frac{3a}{a}$; 8) $\frac{5b}{b}$; 9) $\frac{7c}{7}$; 10) $\frac{3ab}{a}$;

11) $\frac{a^2b}{b}$; 12) $\frac{2a^2b}{a^2}$; 13) $\frac{3a^2b}{ab}$; 14) $\frac{4a^2b}{2ab}$; 15) $\frac{5a^2b^2}{-10a^2b^2}$;

16) $\frac{-3ab^2}{2a^2b}$; 17) $\frac{3a^2bc}{3ab^2c^2}$; 18) $\frac{48ab^2c^2}{12abc}$;

19) $\frac{9a^2b}{15a^2b^2c^2}$; 20) $\frac{0{,}64a^3b}{0{,}32ab^3}$; 21) $\frac{2{,}5x^3y^2z}{0{,}5xy^2z^3}$.

479. Сократить следующие дроби, освободив знаменатели от знака — :

1) $\frac{xy}{-yx^2}$; 2) $\frac{x}{-x^2}$; 3) $\frac{x}{-x^3}$; 4) $\frac{3ab^2c^2}{-a^2bc}$; 5) $\frac{-3ab^2}{-6b}$

6) $\frac{-\frac{1}{2}a^2x^2y}{-\frac{1}{2}axy^2}$; 7) $\frac{0{,}64a^3b}{-6{,}4ab^3}$; 8) $\frac{9{,}6xy^5z}{-0{,}48x^2y^3z^2}$; 9) $\frac{2{,}5x^2z^3v^6}{-1\frac{1}{4}x^3z^2v^5}$.

Разложение на множители.

480. Разложить на простые множители.

1) 18;	2) 16;	3) 35;	4) 256;	5) 144;
6) 72;	7) 48;	8) 210;	9) 1024;	10) 8575;
11) 96;	12) 56;	13) 112;	14) 4096;	15) 1000;
16) 216;	17) 384;	18) 343;	19) 1728;	20) 1001.

481. Составить таблицу простых чисел (при помощи «Решета» Эратосфена, т.-е. вычеркиванием чисел: через одно после двух, через два после трех, и т. д.).

482. В следующих дробях разложить числители и знаменатели на простые множители и произвести сокращение:

1) $\frac{12}{16}$; 2) $\frac{16}{40}$; 3) $\frac{24}{80}$; 4) $\frac{112}{150}$; 5) $\frac{72}{180}$;
6) $\frac{30}{56}$; 7) $\frac{20}{18}$; 8) $\frac{90}{135}$; 9) $\frac{323}{437}$; 10) $\frac{144}{960}$.

483. Представить в виде произведения возможно большего числа сомножителей:

1) $40ab^2$; 2) $25ax^2$; 3) $20a^2$; 4) $18ab$;
5) $72aqx^2$; 6) $121a^2bxy$; 7) $24ab^2x^2y$; 8) $180p^2r^2$.

484. Разложить на множители:

$$am + bm = m(a + b).$$

1) $8a + 8b$; 2) $3x - 3$; 3) $ax - bx$;
4) $-7x - 7y$; 5) $ax - x$; 6) $12a - 18b$;
7) $ax + ay$; 8) $x^2 - x$; 9) $ab - b$;
10) $4ax - 2bx$; 11) $5x - 5y$; 12) $ax + a$;
13) $3a - 3b$; 14) $3b - 3a$; 15) $a^2 + a$;
16) $48xy - 36xy^2$; 17) $85ab - 170a$;
18) $65cd^2 + 52cd$; 19) $777p^7y^3 - 555p^2y^5$;
20) $mx - nx + px$; 21) $8abx - 6acy - 10az$;
22) $14anx - 21bny - 7n$; 23) $63xy - 84y^2 + 98yz$;
24) $ax - 2ay + 3az$; 25) $ax - bx + 7x$;
26) $15abx - 9b^2y + 12bt$; 27) $20ax - 35bx - 40x^2$;
28) $ax + bx + cx - dx$; 29) $15a^2y^4 + 9ay^2 + 27ay$;
30) $60x^7z^6 - 30x^5z^4 + 24x^4z^6$;
31) $52a^5b^6 - 65a^4b^7 + 78a^4b^5 - 39a^3b^8$;
32) $76a^2b^2 - 95a^3b^2 + 19a^3b^3 - 190a^5b^3$;
33) $0,77pq - 0,99pr + 0,33p$; 34) $4,8a^2x - 5,4bx$;
35) $0,3c^5d^3 + 0,7c^4d^4$; 36) $2,7a^5b^4 - 2,8a^5b^5$.

485. $am + bm + ap + bp = m(a+b) + p(a+b) =$
$= (a+b)(m+p).$

1) $a(x+y)+b(x+y)$;
2) $a(x+y)-b(x+y)$;
3) $a(x-y)-b(x-y)$;
4) $t(2x-3y)-5(2x-3y)$;
5) $2x(3p-q)-(3p-q)$;
6) $m(x+y)+x+y$;
7) $n(x+y)-x-y$;
8) $m(x-y)-x+y$;
9) $3c(a+b)+a+b$;
10) $5c(a+b)^2+a+b$;
11) $m(a-b)^2+a-b$;
12) $ax+ay+bx+by$;
13) $ac+ad-bc-bd$;
14) $ac-cx+a-x$;
15) $ax-a+x-1$;
16) $ab-bc-a+c$;
17) $ab-a-b+1$;
18) $2ax-3bx-2ay+3by$;
19) $3ax-5by-5ay-3bx$;
20) $40x^2-2p+5x-16px$;
21) $10n^2+21xy-14nx-15ny$;
22) $30ax-34bx-15a+17b$;
23) $56a^2-40ab+63ac-45bc$;
24) $90x^2-25ax-288bx+80ab$;
25) $91x^2-112mx+65nx-80mn$;
26) $ax-bx+cx+ay-by+cy$;
27) $2ax-5ay+a-2bx+5by-b$;
28) $6ac+10bc-9ad-15bd$;
29) $3az+3bx+9ax+bz$;
30) $120ax-150ay+80bx-100by$;
31) $ax+bx+cx+ay+by+cy+az+bz+cz$;
32) $adx-bcx-acx+bdx$;
33) $bac-dc^2-bcd+ac^2$;
34) $x+x^2-x^3-x^4$;
35) $x^3+x^2y-x^2z-xyz$;
36) $a^2b-ab^2-abc+b^2c$;
37) $4a^2b^3-2a^4b-4ab^4+2a^3b^2$;
38) $abx+bx+ax+x-ab-b-a-1$;
39) $abc-bc+ac-c-ab+b-a+1$;
40) $a^3-a^2b-a^2c+abc-a^2d+abd+acd-bcd$;
41) $acx+bcx+adx+bdx-acy-bcy-ady-bdy$;
42) $3x(x-y)+3y(y-x)$;
43) $6a(2a-b)+3b(b-2a)$;
44) $6x(a-b)+2x(b-a)+4(b-a)$;
45) $4a(a-b)+6b(b-a)-2a(b-a)$;
46) $(4a-5b)(3m-2p)+(a+4b)(3m-2p)$;
47) $(7a-3x)(5c-2d)-(6a-2x)(5c-2d)$;
48) $(3x-y)(2a+p)-(3x-y)(a-q)$;
49) $(x-y)(3a+4b)-(4a-5b)(x-y)+(y-x)(8b-2a)$;
50) $3(2a+7b)(2m-3p)+5(3a-4b)(3p-2m)$;
51) $7(a-2b)(2x-3y)-5(a-2b)(3x-4y)$.

486. I. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$;
II. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
III. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
IV. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
V. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$.

1) $a^2 + 2ab + b^2$;
2) $x^2 - 2xy + y^2$;
3) $a^2 - 6a + 9$;
4) $x^2 + 2x + 1$;
5) $x^2 - 4x + 4$;
6) $x^3 + 4x^2 + 4x$;
7) $64a^2b^2 + 48abc + 9c^2$;
8) $49x^2 - 14x + 1$;
9) $121x^4 + 44x^2 + 4$;
10) $25{,}6k^2 - 9{,}6ks + 0{,}9s^2$;
11) $m^2 - n^2$;
12) $a^2 - b^2$;
13) $9a^2b^2 - y^2$;
14) $36x^2 - 25y^2$;
15) $1 - x^2$;
16) $a^2 - 1$;
17) $64x^2 - 1$;
18) $121 - 9a^4$;
19) $100x^2 - 25y^2$;
20) $169a^2 - 49b^2$;
21) $9a^2b^2 - 16c^2$;
22) $81a^4 - 64b^4$;
23) $121a^4b^2 - 9$;
24) $36a^8 - 144$;
25) $25x^2 - 1$;
26) $1 - 16x^4$;
27) $0{,}25a^2 - b^2$;
28) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$;
29) $1{,}44a^2b^2 - 0{,}64$;
30) $0{,}81b^4 - 1{,}21a^2c^2$;
31) $0{,}0016x^6 - 0{,}01y^2$;
32) $0{,}0001 - 0{,}0256a^2b^2$;
33) $77^2 - 13^2$;
34) $125^2 - 25^2$;
35) $189^2 - 111^2$;
36) $612^2 - 388^2$;
37) $2{,}3^2 - 1{,}7^2$;
38) $3{,}54^2 - 2{,}46^2$;
39) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$;
40) $\left(25\frac{1}{3}\right)^2 - \left(24\frac{2}{3}\right)^2$;
41) $(a + b)^2 - (a - b)^2$;
42) $(a + b)^2 + (a - b)^2$;
43) $(a + b)^2 - 4ab$;
44) $(a - b)^2 + 4ab$;
45) $(a + b + c)^2 - (2b + c)(2a + c)$;
46) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$;
47) $m^2 - n^2 - p^2 - 2np$;
48) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$;
49) $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^2 - xy + y^2)^2$;
50) $(x^2 + xy - y^2)^2 - (x^2 - xy - y^2)^2$;
51) $a^3 + b^3$; 52) $a^3 - b^3$; 53) $x^3 + 1$; 54) $x^3 - 1$;
55) $64a^3 + 125b^3$;
56) $27x^3 - 8y^3$;
57) $a^4 - b^4$;
58) $a^6 - b^6$;
59) $a^6 + b^6$;
60) $a^8 - b^8$;
61) $27x^3 - 1$;
62) $343a^3 + b^3$;
63) $729 + x^3y^3$;
64) $512z^3 - 64b^3$;
65) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;
66) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
67) $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3$;
68) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$;
69) $a^3b^3 - 3a^2b^2 + 3ab - 1$;
70) $125k^3 + 75k^2 + 15k + 1$.

487. I. $x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab =$
$= (x + a)(x + b).$
NB $ax \cdot bx = x^2 \cdot ab.$

II. $abx^2 + (am + bn)x + mn = abx^2 + amx + bnx +$
$+ mn = (ax + n)(bx + m).$
NB $amx \cdot bnx = abx^2 \cdot mn.$

III. $a^2x^2 + 2amx + m^2 - n^2 = (ax + m)^2 - n^2 =$
$= (ax + m + n)(ax + m - n).$

1) $x^2 + 5x + 6$; 2) $x^2 + 3x + 2$; 3) $a^2 - a - 6$;
4) $x^4 + x^2 - 2$; 5) $a^2 + 12b + 35$; 6) $c^2 + 9c + 18$;
7) $a^2 - ab - 2b^2$; 8) $3 + 2x - x^2$; 9) $y^3 - 7y^2 - 8y$;
10) $x^3 + 2x^2 - 15x$; 11) $b^3 - b^2 - 2b$; 12) $a^2 - 16a + 60$;
13) $3a^2 - 10ab + 3b^2$; 14) $m^2 + 8m - 20$; 15) $6x^2 + 5xy - 6y^2$;
16) $a^2 + 7ab + 12b^2$; 17) $30x^2 - 11xy + y^2$;
18) $p^2 - 8pq + 7q^2$; 19) $10r^2 - 11rs + s^2$;
20) $a^2 + 15ab + 26b^2$; 21) $x^2 - 14xy + 33y^2$;
22) $c^2 + cd - 30d^2$; 23) $a^2 + 2ab - 120b^2$;
24) $v^2 + 2vw - 15w^2$; 25) $a^2 - a - 56$;
26) $a^2b^2 - 110abc + 1000c^2$; 27) $x^4 + 16x^2y + 63y^2$;
28) $10a^2 + 13ab - 3b^2$; 29) $12a^2 - 7ab - 10b^2$;
30) $12x^2 + 17xy + 6y^2$; 31) $21p^2 - 13pq - 20q^2$;
32) $90c^2 - 19cd + d^2$; 33) $60x^2 - 80xy - 15y^2$.

488. 1) $a^2 - b^2 - a + b$; 2) $x^2 - y^2 - 2x^2y - 2xy^2$;
3) $a^4 - b^4 + 2a^3b - 2ab^3$; 4) $x^4 + 2ax^3 - a^4 - 2a^3x$;
5) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$; 6) $x^3 - xy^2 - x^2y + y^3$;
7) $a^4 - a^3x - a^2x^2 + ax^3$; 8) $a^5 - a^4b - ab^4 + b^5$;
9) $m^6 - m^4n^2 - m^2n^4 + n^6$; 10) $a^2 + 2ab + b^2 - 3a^2b - 3ab^2$;
11) $x^6 - 1$; 12) $x^4 - x^2 - 2$;
13) $(x^2 + 3x + 1)^2 - 1$; 14) $m^2 - n^2 + m + n$;
15) $a^5 - a^3 + a^2 - 1$; 16) $a^6 - a^4 - a^2 + 1$;
17) $a^2 - b^2 + a^3 - b^3$; 18) $a^5 + b^5 + ab(a^3 + b^3)$;
19) $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 + c^2x^2 + c^2y^2$;
20) $(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ax + by + cz)^2$;
21) $a^2(a + b)^2 + b(a + b)^3 + ab(a + b)^2$;
22) $(1 + xy)^2 - (x + y)^2$; 23) $x^3 - 3x + 2$;
24) $x^4 + x^2y^2 + y^4$; 25) $a^3 + 3a^2 - 4$;
26) $a^8 + a^4 + 1$; 27) $a^3b^3c^3 + c^3x^3y^3$;
28) $a^4b^4c^4 - a^4x^4y^4$;
29) $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(ad - bc)$;
30) $4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2$;
31) $4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2$;
32) $4c^2d^2 - [c^2 + d^2 - (a - b)^2]^2$;
33) $4(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$;

34) $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$;
35) Показать, что $(-a-b)^2=(a+b)^2$;
36) » » $(a-b)^2=(b-a)^2$;
37) » » $(a-b)^3=-(b-a)^3$;
38) $(8a-6b)^2-(6b-4c)^2$;
39) $(a-2b+3c)^2-(a-2b-3c)^2$;
40) $(3a+b-2c)^2-(a-2b+3c)^2$;
41) $(a+b+c)^2-4(b-c)^2$; 42) $x^2(x+3)-4(x+3)$;
43) $a^2-2ab+2bc-c^2$; 44) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$;
45) $1-3x-3xy-y^2$; 46) $(x+y)^4-(x-y)^4$;
47) $(x+y)^4-(x^2-y^2)^2$; 48) $(bx-ay)^2-(ax-by)^2$;
49) $(2x-yz)^2-(zx-2y)^2$; 50) x^4-5x^2-36;
51) x^4-25x^2+144; 52) $prx^2+(ps+qr)x+qs$;
53) $px^2+(pq-1)x-q$; 54) $90xy-25x^2-81y^2$;
55) $4x^4+20x^2+25$; 56) $9x^2+55xy-136y^2$;
57) $18x^2-85xy+98y^2$; 58) $x^2-(a+1)x-2(a+3)$;
59) $x^2+(a+b+c)x+(a+b)c$; 60) $5x^2-10x-315$;
61) $x^2-x-182$; 62) $60xy-9x^2-100y^2$;
63) $15(x-y)(x+y)-16xy$; 64) $x(x+1)(x-1)-6x-6$;
65) $(x^2-1)(x+2)+(x^2+2x)(x+1)$;
66) $x^3+y^3+xy(x+y)$; 67) $x^3+5x^2y+5xy^2+y^3$;
68) x^4-x^3+x-1; 69) $x^5-x^3-x^2+1$;
70) $4x^4+81$; 71) x^4-98x^2+1;
72) $4x^4+8x^2y^2+9y^4$; 73) $4x^4-21x^2y^2+25y^4$.

Общее наинизшее кратное и общий наивысший делитель.

489. Найти общее наинизшее кратное и общий наивысший делитель:

1) 96 и 144; 1a) 180 и 300; 2) 56 и — 210;
3) $ax+ay$ и $ax-ay$; 4) $ax-ay$ и $by-bx$;
5) $(a-b)^2$ и $(b-a)^2$; 6) x^2-1 и $1-x^3$;
7) $2(x^2-y^2)$ и $3(x^3-y^3)$;
8) $x^3-2x^2y+xy^2$ и $y^3-2xy^2+x^2y$;
9) $(a-b)(b-c)(c-a)$ и $(b-a)(c-b)(a-c)$;
10) $(x-1)(y-2)(z-3)$ и $(3-z)(2-x)(1-x)$;
11) $2x^2-x-6$ и $3x^2-7x+2$;
12) x^3-x^2-2x и $2x^2-x-6$;
13) $6-5x+x^2$ и x^2-6x+8;
14) x^2+x-2 и $2-3x+x^2$;
15) $a^2+2ab+b^2-c^2$ и $a^2+2ac-b^2+c^2$;
16) $1-x^2$ и x^4-1;
17) $3x^2+3x-6$ и $8-12x+4x^2$;
18) $x^2-(y+z)^2$ и $y^2-(z+x)^2$;

19) $2x^2 - 12x + 10$ и $5x - 11x^2 + 2x^3$;
20) $9x + 15x^2 + 6x^3$ и $9x^3 - 9x^2 - 18x$.

490. Найти общее наинизшее кратное выражений:

1) $x^3 - 1,\ 1 - x,\ x + 1,\ 1 + x + x^2$;
2) $x^3 + 1,\ 1 - x^3,\ x^6 - 1,\ 1 - x,\ -x - 1$;
3) $(a - b)(b - c),\ (c - b)(b - d),\ (d - b)(b - a)$;
4) $(1 - x)(y - 1),\ (1 - y)(z - 1),\ (1 - z)(x - 1)$;
5) $6a - 6b,\ 7b - 7a;\ 14b + 14a$;
6) $a^3 - 3a^2 + 2a,\ 3a - 4a^2 + a^3,\ 5a^3 - a^4 - 6a^2$.

Сокращение дробей.

491. Сократить дроби:

1) $\frac{abc}{abd}$; 2) $\frac{abc}{ab}$; 3) $\frac{a^2bc^3}{abc^2}$;

4) $\frac{a^3b^4c^5}{a^2b^5c}$; 5) $\frac{4a^7b}{8a^6b^8}$; 6) $\frac{27ab^2c^8}{9ab^2c^9}$;

7) $\frac{121p^2q^4r}{99p^6q^2r}$; 8) $\frac{24x^5y^7}{36x^8y^4}$; 9) $\frac{625m^9n^7}{125mn}$;

10) $\frac{1000vw^5u^2}{125w^3uv}$; 11) $\frac{5a^8bc^7}{35bc^3d^4}$; 12) $\frac{147a^4p^8x^6}{189a^4bcx^8}$;

13) $\frac{x^2 - xy}{y^2 - xy}$; 14) $\frac{5a - 5b}{9b - 9a}$; 15) $\frac{a^2 - ab}{a^2 + ab}$;

16) $\frac{ap + bp}{ap - bp}$; 17) $\frac{ap + bp}{bp + ap}$; 18) $\frac{ap - bp}{bp - ap}$;

19) $\frac{3a - 3}{4a - 4}$; 20) $\frac{5a^2 - 5a}{5a^2 + 5a}$; 21) $\frac{ab - b}{ab + b}$;

22) $\frac{2a^2x - 3ax^2}{3a^2x - 2ax^2}$; 23) $\frac{5a^2b - 4ab^2}{5a^2b + 4ab^2}$; 24) $\frac{3x^2c - 3xc^2}{3x^2b - 3xb^2}$;

25) $\frac{x - 1}{7 - 7x}$; 26) $\frac{mx - m}{n - nx}$; 27) $\frac{3a - 6b}{8b - 4a}$;

28) $\frac{a - a^2}{a - 1}$; 29) $\frac{a^2 - 1}{a + 1}$; 30) $\frac{a + a^2}{a^2 - 1}$;

31) $\frac{(x - y)^2}{x^2 - y^2}$; 32) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab}$; 33) $\frac{(a + 1)^2}{a^2 - 1}$;

34) $\frac{x^2 - a^2}{a^2x - ax^2}$; 35) $\frac{x^2 - y^2}{x^3 + y^3}$; 36) $\frac{5x^2 - 5xy}{5(x - y)^2}$;

37) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$; 38) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{b^2 - a^2}$; 39) $\frac{(a - b)^2}{(b - a)^2}$;

40) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$; 41) $\frac{1 - 8xy + 16x^2y^2}{16y^2x^2 - 1}$; 42) $\frac{x^2 - 10000}{(100 - x)^2}$;

43) $\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2}$; 44) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$; 45) $\frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2}$;

46) $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}$; 47) $\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$; 48) $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}$;
49) $\frac{a^6-b^6}{a^3+b^3}$; 50) $\frac{a^6-b^6}{a^3-b^3}$; 51) $\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3}$;
52) $\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$; 53) $\frac{a^6-b^6}{a^4-b^4}$; 54) $\frac{a^6+b^6}{a^2+b^2}$;
55) $\frac{ax+ay-az}{bx+by-bz}$; 56) $\frac{5a^3b+5a^2b^2-5a^2bc}{4bc^3-4b^2c^2-4abc^2}$;
57) $\frac{xy+xz}{xy}$; 58) $\frac{24ap-36aq}{48ar+60as}$; 59) $\frac{25ab-35ac}{35pb-49pc}$;
60) $\frac{65a^2x^2+91ax^3}{85a^2x+119ax^2}$; 61) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ 62) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$;
63) $\frac{4a^2-5ab}{16a^2-40ab+25b^2}$; 64) $\frac{8ax+20x}{4a^2+20a+25}$;
65) $\frac{98x^3-72xy^2}{49x^2-84xy+36y^2}$; 66) $\frac{6a^3-12a^2b}{a^2b^2-4ab^3+4b^4}$;
67) $\frac{a^2-5ab+6b^2}{a^2-9ab+14b^2}$; 68) $\frac{3r^2-2rs-s^2}{3r^2-4rs+s^2}$;
69) $\frac{a^2+4ab-21b^2}{a^2+12ab+35b^2}$; 70) $\frac{10x^2-101xy+10y^2}{10xy-y^2}$;
71) $\frac{a^2+5ab-14b^2}{a^2+12ab-28b^2}$; 72) $\frac{49p^2+35pq-50q^2}{49p^2-25q^2}$;
73) $\frac{x^3+y^3}{5x^2-2xy-7y^2}$; 74) $\frac{4x^2+20xy+25y^2}{6x^2+23xy+20y^2}$;
75) $\frac{26x^2+63xy-5y^2}{65x-5y-26xy+2y^2}$; 76) $\frac{169u^2-v^2}{65vu-5v^2-91u+7v}$;
77) $\frac{1-5y-4x+20xy}{3-7x-20x^2}$; 78) $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$;
79) $\frac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}$; 80) $\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}$;
81) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$; 82) $\frac{x^2-x-20}{x^2+x-30}$; 83) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$;
84) $\frac{14a^2x^2-55a^2xy-36a^2y^2}{10ax-45ay-2a^2x^2+9a^2xy}$; 85) $\frac{12b^3u^2-9b^2cu+20bcu-15c^2}{8b^3u^2-3c^3-6bcu+4bc^2u}$;
86) $\frac{15a^2-21bc-35ab+9ac}{9ab-15ac-21b^2+35bc}$.

492. Определить x в следующих уравнениях (пропорциях), выполнив предварительно сокращение:

1) $\frac{1}{x}=\frac{10}{30}$; 2) $\frac{x}{8}=\frac{16}{64}$; 3) $\frac{x}{5}=\frac{75}{125}$; 4) $\frac{17}{x}=\frac{34}{2}$;
5) $\frac{75}{275}=\frac{3}{x}$; 6) $\frac{35}{91}=\frac{x}{13}$; 7) $\frac{999}{111}=\frac{x}{3}$; 8) $\frac{28ab}{7a}=\frac{x}{a}$;
9) $\frac{60}{100}=\frac{12}{x}$; 10) $\frac{12a}{3b}=\frac{x}{b}$; 11) $\frac{2a}{3a}=\frac{x}{3}$; 12) $\frac{18b}{6ab}=\frac{x}{a}$.

493. Определить x в следующих уравнениях (пропорциях), приводя обе их части к общему знаменателю:

1) $\frac{1}{2}=\frac{x}{6}$; 2) $\frac{2}{3}=\frac{x}{60}$; 3) $\frac{4}{5}=\frac{x}{70}$;

4) $\frac{3}{8}=\frac{x}{96}$; 5) $\frac{3}{4}=\frac{6}{x}$; 6) $\frac{2}{3}=\frac{144}{x}$;

7) $\frac{4}{5}=\frac{132}{x}$; 8) $\frac{3}{8}=\frac{303}{x}$; 9) $\frac{1}{2}=\frac{x}{2a}$;

10) $\frac{1}{5}=\frac{x}{10b}$; 11) $\frac{3}{7}=\frac{x}{35ab}$; 12) $\frac{5}{8}=\frac{x}{32a^2}$;

13) $\frac{3}{5}=\frac{15a}{x}$; 14) $\frac{2}{7}=\frac{16b}{x}$; 15) $\frac{5}{6}=\frac{125a^2b^2}{x}$;

16) $\frac{1}{11}=\frac{17a^3}{x}$; 17) $\frac{4}{x}=\frac{0,5a}{b}$; 18) $\frac{x}{0,01}=\frac{m}{0,001}$;

494. В дробях 1) $\frac{1}{x}$ и 2) $\frac{5}{x}$ задать знаменателю ряд последовательных значений 1, 2, 3 и т. д. и изобразить полученные результаты, насколько это возможно, на числовой прямой. К какому значению приближается дробь с возрастанием x?

495. В дробях: 1) $\frac{1+x}{2+x}$; 2) $\frac{4+x}{5+x}$; 3) $\frac{5+x}{10+x}$; 4) $\frac{x+6}{x+3}$

задать x последовательные значения 1, 2, 3, и т. д. К какому значению приближается дробь с возрастанием x?

496. В равенствах:

1) $\frac{x}{y}=2$; 2) $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$; 3) $\frac{x}{y}=a$; 4) $\frac{y}{x}=b$,

x получает ряд последовательных целых значений. Какие значения принимает при этом y?

497. В равенствах:

1) $\frac{3+x}{1+y}=1$; 2) $\frac{3+x}{1+y}=3$; 3) $\frac{3+x}{2+y}=2$; 4) $\frac{x+x}{b+y}=c$

x получает ряд последовательных целых значений. Какие значения принимает y?

498. Какие значения имеет дробь:

1) $\frac{0}{4}$; 2) $\frac{0}{m}$; 3) $\frac{0}{2m}$; 4) $\frac{0}{a-b}$,

если m, a и b — числа, отличные от нуля ($a \neq b$)?

499. Какие значения принимают дроби:

1) $\frac{1-x}{1+x}$; 2) $\frac{1+x}{1-x}$; 3) $\frac{3+2x}{3-2x}$; 4) $\frac{5+x}{5-x}$;

когда x проходит все целые значения от -6 до $+6$?

Указать значения x, при которых первая (вторая, третья, четвертая) дробь не имеет смысла.

500. Найти значения следующих дробей и указать те из дробей, которые при указанных подстановках не имеют смысла (указать при этом и соответствующие подстановки):

1) $y=\frac{x+2}{x-2}$ при $x=2$ и $x=-2$;

2) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ при $x=1$ и $x=-1$;

3) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x-2}$ при $x=1$, $x=-1$, $x=2$, $x=-2$;

4) $y=\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$ при $x=-2$, $x=+2$, $x=-3$, $x=+3$;

5) $y=\frac{4x^2-7x+3}{x^2-1}$ при $x=+1$, $x=-1$;

6) $y=\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ при $x=3$, $x=-3$;

7) $y=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+1}$ при $x=1$, $x=-1$;

8) $y=\frac{x^3+27}{x^3-27}$ при $x=3$, $x=-3$;

9) $y=\frac{(x-1)^2+4}{(x+1)^2-4}$ при $x=1$, $x=-1$, $x=3$, $x=-3$;

10) $y=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2}$ при $x=0$, $x=1$, $x=-1$, $x=2$, $x=-2$.

501. При каких значениях x следующие дроби обращаются в 0 и при каких не имеют смысла?

1) $y=\frac{x-1}{x+1}$; 2) $y=\frac{x+1}{x-1}$; 3) $y=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x-2)}$;

4) $y=\frac{(x+1)(x+2)}{x(x-1)}$; 5) $y=\frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$; 6) $y=\frac{x^2-6x+9}{x^2-16}$;

7) $y=\frac{x^3-27}{x^3+27}$; 8) $y=\frac{x^3+8}{x^3-8}$; 9) $y=\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}$;

10) $y=\frac{x^2+5x-6}{x^2+2x-3}$; 11) $y=\frac{x^2-1}{x^4-1}$;

12) $y=\frac{x^3-3x^2-4x}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$.

При сокращении алгебраических дробей мы делим числитель и знаменатель на одно и то же выражение и считаем новую дробь, полученную таким способом, равной первоначальной дроби. Но следует иметь в виду, что это равенство не имеет места, когда множитель, на который произведено сокращение, принимает значение 0, так как в этом случае сокращаемая дробь принимает вид $\frac{0}{0}$.

§ 3. Сложение и вычитание дробей.

502. 1) $\frac{1}{20}+\frac{1}{5}$, 2) $\frac{1}{60}+\frac{1}{15}$, 3) $\frac{1}{8}-\frac{1}{72}$,
4) $\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$, 5) $\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$, 6) $\frac{11}{14}-\frac{32}{63}$.
7) $\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$, 8) $\frac{1}{10}+\frac{1}{42}+\frac{1}{105}$, 9) $\frac{8}{15}+\frac{7}{12}+\frac{19}{20}$.

503. На числовой прямой между 0 и 1 изобразить (в подходящем масштабе) дроби: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ и т. д. до $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{10}$.

1) Указать наибольшее расстояние между двумя соседними пометками:

2) Указать наименьшее расстояние между двумя соседними пометками.

504. Произвести сложения (и вычитания) дробей:

1) $\frac{3a}{4}+\frac{a}{4}$; 2) $\frac{8x}{5}+\frac{3x}{5}$; 3) $\frac{5b}{7}+\frac{a}{7}$;
4) $\frac{4z}{9}-\frac{3z}{9}$; 5) $\frac{2a}{3}+\frac{5x}{3}$; 6) $\frac{2a-1}{4}+\frac{a+1}{4}$;
7) $\frac{3x-2}{5}-\frac{3x-3}{5}$; 8) $\frac{2a+3b}{7}+\frac{3a-3b}{7}$;
9) $\frac{3x-10y}{5}-\frac{8x-10y}{5}$; 10) $\frac{20p-7q}{11}+\frac{2p-4q}{11}$;
11) $\frac{7a}{9}+1$; 12) $\frac{3x}{5}-1$; 13) $\frac{4m}{3}-\frac{5m}{3}+\frac{7m}{3}$;
14) $\frac{3a}{4}+\frac{5a}{4}-\frac{7a}{4}$; 15) $\frac{8b}{5}+\frac{2a}{5}-\frac{10a}{5}$; 16) $\frac{2a}{x}+\frac{3a}{x}$;
17) $\frac{2}{2x}-\frac{3b}{2x}$; 18) $\frac{3y}{a}-\frac{y}{a}$; 19) $\frac{3x}{a}+\frac{x}{a}-\frac{2x}{a}$;
20) $\frac{4c}{3d}+\frac{c}{3d}-\frac{2c}{3d}$; 21) $\frac{2p+3q}{5x}+\frac{4d-q}{5x}+\frac{2q-6p}{5x}-\frac{4q-5p}{5x}$;
22) $\frac{11x+7y}{20}+\frac{2y-5x}{20}-\frac{x-y}{20}+\frac{5x+8y}{20}$;

23) $\frac{7m-8n}{17}-\frac{3m+5n}{17}+\frac{11n-3m}{17}-\frac{m-20n}{17}$;

24) $\frac{2x^2+3xy}{x+y}-\frac{3x^2+2xy}{x+y}-\frac{x^2+3y^2}{x+y}+\frac{5x^2+xy+2y^2}{x+y}$;

25) $\frac{a^2+4ab+b^2}{a-b}-\frac{3ab-2a^2-4b^2}{a-b}-\frac{5b^2+3a^2+ab}{a-b}$;

26) $\frac{5a^2+2ab-3b^2}{a^2-b^2}-\frac{3a^2-5ab+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2-ab+7b^2}{a^2-b^2}$;

27) $\frac{4p^2-8pq+10q^2}{p^2-q^2}-\frac{17pq-8p^2+6q^2}{p^2-q^2}-\frac{10p^2-18pq+2q^2}{p^2-q^2}$;

28) $\frac{7x^3-5x^2+4}{x^2-1}-\frac{2x^2+3x-5}{x^2-1}+\frac{10x-16}{x^2-1}$;

29) $\frac{3a^3+4a^2-5a}{a^2-1}-\frac{a^3-3a^2+3}{a^2-1}-\frac{5a^2-7a-5}{a^2-1}$;

30) $\frac{(a+b)^2}{2ab}-\frac{(a-b)^2}{2ab}$; 31) $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$;

32) $\frac{2b}{3}+b$; 33) $\frac{4a}{5}-a$; 34) $1+\frac{2x}{3}$; 35) $\frac{x}{a}+2$;

36) $3+\frac{4x}{5}$; 37) $y+\frac{2y}{7}$; 38) $z+\frac{z}{3}$; 39) $m+\frac{1}{m}$;

40) $\frac{5x}{3a}+\frac{2x}{3a}-1$; 41) $\frac{m}{n}-\frac{3m}{n}+2$;

42) $6-\frac{x}{y}+3x$; 43) $4-\frac{a}{b}-2b$;

44) $4-\frac{2}{m}+m$; 45) $\frac{5m}{n}+n-\frac{5m}{n}$;

46) $\frac{5c}{ab}-\frac{2c}{ab}+3-\frac{4a}{ab}$; 47) $\frac{3bx}{a^2}+\frac{5by}{a^2}-2-\frac{3by}{a^2}$.

505. 1) $\frac{2a}{3}-\frac{3b}{5}-\frac{a}{6}+\frac{b}{10}$; 2) $\frac{6x}{7}-\frac{3y}{5}+\frac{13x}{42}-\frac{7y}{30}$;

3) $\frac{a}{2}-\frac{b}{3}-\frac{a}{3}+\frac{5b}{6}$; 4) $\frac{a}{5}-\frac{b}{4}-\frac{a}{30}+\frac{b}{20}$;

5) $\frac{x}{5}-\frac{y}{7}-\frac{y}{42}+\frac{y}{20}$; 6) $\frac{x}{8}-\frac{y}{9}-\frac{x}{72}-\frac{y}{72}$;

7) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; 8) $\frac{2}{x}-\frac{2}{y}$; 9) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$; 10) $\frac{2a}{3}-\frac{b}{x}$;

11) $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}$; 12) $\frac{1}{3x}-\frac{1}{6x}$; 13) $\frac{a}{2b}-\frac{a}{3b}$; 14) $\frac{2a}{5x}-\frac{3a}{8x}$;

15) $\frac{a}{5x}-\frac{b}{10x}$; 16) $\frac{m}{ax}+\frac{n}{bx}$; 17) $\frac{3}{an}-\frac{5}{bn}$;

18) $\frac{8b}{3a}-\frac{5b}{2a}$; 19) $\frac{a}{b}+5+\frac{a}{3}$; 20) $a+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}$;

21) $5n-\frac{x}{2y}-\frac{x}{3y}$; 22) $\frac{x}{y}+1-\frac{x}{2y}$;

23) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$;

24) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{5}{z}$;

25) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$;

26) $\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}$;

27) $\frac{4a}{5b}-\frac{3a}{4b}$;

28) $\frac{5a}{6x}-\frac{7a}{30x}$;

29) $\frac{2b}{5y}-\frac{7b}{20y}$;

30) $\frac{7}{10y}-\frac{8x}{15y}$;

31) $\frac{3ax}{5by}-\frac{ax}{10by}$;

32) $\frac{6ab}{7xy}-\frac{5ab}{14xy}$;

33) $\frac{3xy}{5b^2}+\frac{ax}{15b^2}$;

34) $\frac{4a^2}{5bx}-\frac{11a^2}{20bx}$;

35) $\frac{2a}{3b}-\frac{5a}{6b}-\frac{a}{2b}+\frac{7a}{9b}$;

36) $\frac{3x}{4y}-\frac{5x}{9y}-\frac{2x}{3y}+\frac{7x}{12y}$;

37) $\frac{3a}{5x}-\frac{7a}{10x}-\frac{a}{6x}+\frac{7a}{15x}$;

38) $\frac{3n}{4p}-\frac{4n}{5p}+\frac{5n}{6p}+\frac{3n}{10p}$;

39) $\frac{2ab}{3xy}-\frac{3ab}{4xy}+\frac{5ab}{6xy}$;

40) $\frac{5ax}{6by}-\frac{3ax}{8by}-\frac{7ax}{16by}$;

41) $\frac{5a^2}{6xy}-\frac{7a^2}{8xy}+\frac{4a^2}{15xy}$;

42) $\frac{3ab}{5x^2}-\frac{5ab}{9x^2}+\frac{ab}{18x^2}$;

43) $\frac{1}{3a^2}-\frac{2}{4b^2}+\frac{4}{c^2}$;

44) $\frac{7bc}{3a}+\frac{4ac}{4b}-\frac{9ab}{2c}$;

45) $\frac{15ac}{8by}-\frac{3bc}{7ay}+\frac{11ab}{9cy}$;

46) $\frac{3}{7x^2}-\frac{4}{9y^2}-\frac{5}{11z^2}$;

47) $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}$;

48) $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$;

49) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}$;

50) $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}$;

51) $\frac{a-2b}{a+b}+\frac{a+3b}{a+b}$;

52) $\frac{3a+b}{a-b}-\frac{2a+b}{a-b}$;

53) $\frac{a}{x}-\frac{a+b}{2x}$;

54) $\frac{a-b}{2x}-\frac{a+b}{5x}$;

55) $\frac{3x-2}{5}-\frac{5x-3}{2}$;

56) $\frac{5x-4}{6x}-\frac{7x-6}{9x}$;

57) $\frac{2a-3b+4}{6}-\frac{3a-4b+9}{8}+\frac{a-1}{12}$;

58) $\frac{4x-5y+8}{18}+\frac{7x+3y-5}{30}+\frac{2x-5y-3}{45}$;

59) $\frac{9x+2}{3}-\frac{7x+5}{4}-\frac{8-7x}{6}+\frac{5-3x}{8}-\frac{3-7x}{12}$;

60) $\frac{7a-3b}{4}+\frac{4a-5b}{6}-\frac{3a-8b}{9}+\frac{5a-6x}{18}-\frac{3b-8x}{24}$;

61) $\frac{5(2x-3)}{4}-\frac{2(7x-5)}{3}+\frac{4(3x-1)}{5}$;

62) $\frac{3(2a-3b)}{8}-\frac{2(3a-5b)}{2}+\frac{5(a-b)}{6}$;

63) $\frac{1-4x}{8}+\frac{2-5x}{20}-\frac{3-6x}{15}$;

64) $\frac{(a+b)^2}{6}+\frac{(a-b)^2}{14}-\frac{a^2+b^2}{4}$;

65) $\frac{2a+3b}{4a}-\frac{2,5b-3a}{5b}$;

66) $\frac{11x-4y}{7x}-\frac{14x+3y}{11y}$;

67) $\frac{6p+11q}{13p}-\frac{1,5-0,8p}{1,7q}$;

68) $\frac{13u-9v}{19u}-\frac{8u-19v}{13v}$;

69) $\frac{a-3b}{6a}+\frac{4a-b}{2b}+\frac{5a+3x}{9x}-\frac{a^2-bx}{2ax}-\frac{2a}{b}$;

70) $\frac{3a-5b}{10ab}-\frac{a-7c}{12ac}-\frac{5b-4c}{20bc}+\frac{3}{4a}+\frac{3}{5b}+\frac{4}{3c}$;

71) $\frac{6a+c}{6bc}-\frac{5a-4b}{4ac}-\frac{3b-5c}{5ab}+\frac{3}{5a}-\frac{1}{6b}+\frac{5}{4c}$;

72) $\frac{2}{3a}-\frac{1}{2b}-\frac{2a+3}{6a^2}+\frac{1}{2a^2}+\frac{3a-2b}{6ab}$;

73) $\frac{1}{6b}+\frac{a-2b}{3ab}-\frac{3}{4b}-\frac{3a-4x^2}{8ax^2}+\frac{9}{8x^2}+\frac{5x^2-5b}{12bx^2}$;

74) $\frac{5a-2x}{10ax}-\frac{3b-4x}{12bx}+\frac{4a^2-5b}{20b^2b}-\frac{a^2-x}{4a^2x}-\frac{a-b}{5ab}+\frac{2}{3b}$;

75) $\frac{a(3x^2-2b)}{12bx^2}-\frac{b(5x^2-3a)}{15ax^2}+\frac{5a-6b}{30x^2}+\frac{a}{12b}+\frac{2b}{3a}$;

76) $\frac{a(3b-2c)}{6bc}-\frac{b(4a-5c)}{10ac}+\frac{8a^2+3b^2}{6ab}-\frac{5a-4b}{10c}$.

506. Произвести сложение и вычитание;

1) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$;

2) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$;

3) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$;

4) $\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x-y}$;

5) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$;

6) $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}$;

7) $\frac{x}{2x-2y}+\frac{y}{2y-2x}$;

8) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;

9) $\frac{3a+5b}{3a-5b}-\frac{3a-5b}{3a+5b}$;

10) $\frac{z}{a+z}+\frac{a}{a-z}$;

11) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

12) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

13) $\frac{7}{a+b}-\frac{5}{a}$;

14) $\frac{8}{a-1}-\frac{7}{a}$;

15) $\frac{x}{a+1}-\frac{x}{a-1}$;

16) $\frac{2x}{a-1}-\frac{ax}{a^2-1}$;

17) $\frac{6}{x+3}-\frac{5}{3}$;

18) $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{3x}$;

19) $\frac{3x-1}{1-3x}-\frac{2x-7}{7}$; 20) $\frac{2x-1}{x-2}-\frac{3x-5}{x-4}$;

21) $\frac{5}{2(x-1)}-\frac{7}{3(x-1)}$; 22) $\frac{8}{15(x-1)}+\frac{9}{10(x+1)}$;

23) $\frac{5}{3x-9}-\frac{8}{5x-15}$; 24) $\frac{5}{4x-4}-\frac{7}{6x+6}$;

25) $\frac{x-1}{2x+2}-\frac{3x-4}{3x+3}-\frac{2x-1}{6x+6}$;

26) $\frac{2x^2-3}{3x-3}-\frac{3x-1}{4x+4}-\frac{x+4}{x^2-1}$;

27) $\frac{5x-4}{x-2}-\frac{3x-2}{x-3}-\frac{x^2-2x+17}{x^2-5x+6}$;

28) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$;

29) $\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}$;

30) $\frac{5x-2y}{5x+2y}+\frac{5x+2y}{5x-2y}+\frac{15x^2-12y^2}{25x^2-4y^2}$;

31) $\frac{3p+4q}{3p-4q}-\frac{3p-4q}{3p+4q}-\frac{48pq}{9p^2-16q^2}$;

32) $\frac{2(4a-1)}{4a+1}-\frac{3(4a+1)}{4a-1}+\frac{32a^2+32a+2}{16a^2-1}$;

33) $\frac{5(2x-3y)}{4x-5y}-\frac{4(2x+3y)}{4x+5y}-\frac{4x^2-15xy}{16x^2-25xy^2}$;

34) $\frac{5}{a-b}-\frac{4}{b-a}$; 35) $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{y-x}$;

36) $\frac{a+b}{b-a}-\frac{b+a}{a-b}$; 37) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-xy+y^2}{y^2-x^2}$;

38) $\frac{5}{2a-2b}+\frac{3}{4b-4a}-\frac{5}{a-b}$; 39) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{y}{y-x}+\frac{x}{x-y}$;

40) $\frac{4m}{2m-3n}-\frac{5n}{3n-2m}-\frac{3}{4m-6n}$;

41) $\frac{5p}{2p-3q}-\frac{7q}{6p-9q}+\frac{3p}{6q-4p}$;

42) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}-\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$;

43) $\frac{x}{x^2+x-6}+\frac{x}{x^2-5x+6}$;

44) $\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}-\frac{2ab+b^2}{b^2-a^2}$;

45) $\frac{m}{m^2+n^2}-\frac{n}{m^2-n^2}-\frac{2mn^2}{n^4-m^4}$;

46) $\frac{1}{(a-b)(b+c)}+\frac{1}{(b-a)(a+c)}$;

47) $\frac{8(x^2+1)}{x^2-16}-\frac{1-x^2}{4-x}+\frac{1+x^2}{4+x}$;

48) $\frac{x-4}{2x+1}-\frac{3x-5}{x+2}+\frac{5x^2+9x+14}{2x^2+3x-2}$;

49) $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{1-x}-\frac{8}{1+x}+\frac{3x+7}{x^2-1}$;

50) $\frac{8}{2x-3}+\frac{3}{3-2x}-\frac{3x+8}{2x^2-x-3}$;

51) $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}-\frac{5}{x+2}$;

52) $\frac{4}{x-1}-\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-3}$;

53) $\frac{2}{2x-1}-\frac{9}{3x-1}+\frac{4}{2x-3}$;

54) $\frac{7}{x-a}-\frac{4}{x-b}-\frac{4}{x-c}$;

55) $\frac{1}{x+a}+\frac{2}{x+b}-\frac{3}{x+c}$;

56) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1+x^2}$;

57) $\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}$;

58) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{4}{x^2-1}-\frac{4}{(x^2-1)^2}$;

59) $\frac{x}{x+y-z}-\frac{y}{x+y+z}+\frac{xy-y(2z+x)}{(x+y)^2-z^2}$;

60) $\frac{2a}{2a-3b+c}-\frac{3b}{2a+3b-c}+\frac{c(c-2a)-3b(c-4a)}{4a^2-(3b-c)^2}$;

61) $\frac{6a-b+4c}{6a+b-4c}-\frac{6a+b-4c}{6a-b+4c}+\frac{144a^2}{36a^2-(b-4c)^2}$;

62) $\frac{p}{(p+q)^2}-\frac{q}{(q-p)^2}+\frac{2q}{p^2-q^2}-\frac{1}{p-q}+\frac{p-q}{p^2+2pq+q^2}$;

63) $\frac{a}{(a-b)^2}-\frac{b}{(a+b)^2}+\frac{2a}{a^2-b^2}+\frac{1}{b-a}-\frac{4a^2b}{(a^2-b^2)^2}$;

64) $\frac{3}{a-b}+\frac{b}{(a+b)^2}-\frac{a}{b^2-a^2}-\frac{b}{2ab-b^2-a^2}+$
$+\frac{4ab^2+b^3-4a^3-5a^2b}{(b^2-a^2)^2}$;

65) $\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}-\frac{ab(a+2b)}{a^3-b^3}$;

66) $\frac{1}{x+y}+\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}-\frac{x(x-y)}{x^3+y^3}$;

67) $\frac{a}{a-b}-\frac{ab(4a-b)}{a^3-b^3}+\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}$;

68) $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(a-c)(b-a)}-\frac{a+c}{(a-b)(c-b)}$;

69) $\frac{1}{(m-n)(n-p)}+\frac{1}{(p-n)(n-q)}+\frac{1}{(q-n)(n-m)}$;

70) $\frac{1}{(x-y)(y-z)}-\frac{1}{(z-y)(z-x)}+\frac{1}{(y-x)(x-z)}$;

71) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

72) $\frac{a+b}{(a-c)(c-b)}+\frac{b+c}{(b-a)(a-c)}+\frac{c+a}{(c-b)(b-a)}$;

73) $\frac{x^2-y^2}{4xy}-\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x-y}+\frac{4x^3y-(y^2-x^2)^2}{4(x^3y-xy^3)}$;

74) $\frac{12a-19b}{24a^2+12ab}-\frac{6a+4b^2}{6ab+3b^2}+\frac{5a+8b}{6ab}-\frac{8a-b}{8a^2+4ab}$;

75) $\frac{10x^3}{25xy-20y^2}-\frac{2x^2}{5y}+\frac{3y^2}{2x}+\frac{12y^3}{10x^2-8xy}$;

76) $\frac{9a^2}{21ab-49b^2}+\frac{49b^2}{9a^2-21ab}-\frac{3a}{7b}+\frac{7b}{3a}$;

77) $\frac{7x+2y}{6xy-2y^2}-\frac{3x-4y}{9x^2+3xy}-\frac{6x^2-4y^2}{27x^3-3xy^2}-\frac{6x^2+7y^2}{9x^2y-y^3}$;

78) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}+4$;

79) $\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^3+b^3}-$

80) $\frac{a^2+ab+b^2}{a-b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}-2b$;

81) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}-2$;

82) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m-n}{m+n}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}+1$;

83) $\frac{p^2-pq+q^2}{p^3-q^3}+\frac{p^2+pq+q^2}{p^3+q^3}-\frac{1}{p-q}-\frac{1}{p+q}$;

84) $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}-\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}-\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}$;

85) $\frac{4p-3q}{5p-4q}-\frac{5p-4q}{4p-3q}-\frac{5pq-7p^2+q^2}{(5p-4q)(4p-3q)}+1$;

86) $\frac{2r+3s}{3r+4s}-\frac{3r-4s}{2r-3s}-\frac{11r^2-rs-19s^2}{(3r+4s)(2r-3s)}-2$;

87) $1+\frac{2a}{7a-8b}+\frac{3b}{5a+3b}-\frac{8ab-48b^2+45a^2}{(5a+3b)(7a-8b)}$;

88) $\frac{3x}{4x-y}-\frac{4y}{2y-3x}+\frac{15xy-3x^2-2y^2}{(y-4x)(3x-2y)}-\frac{1}{2}$;

89) $\frac{2x}{5x-5y}-\frac{x+y}{4x-4y}+\frac{\frac{4}{5}y-\frac{1}{2}x}{3x-3y}+4$;

90) $\frac{3a^2+4ab}{35a-10b}-\frac{2ab}{7a-2b}-\frac{5ab-4b^2}{14a-4b}-\frac{7a+2b}{10}-3a$;

91) $\frac{5u^2}{10u-4v}+\frac{uv}{5u-2v}-\frac{2v^2+3uv}{20u-8v}-\frac{3u+v}{10}+6v$;

92) $\frac{x-y}{2xy}-\frac{3y}{x^2+xy}+\frac{3x}{xy+y^2}-2$;

93) $\frac{a^2}{4a^2-4a+1}-\frac{1}{4a^2+4a+1}-\frac{a^2+1}{4a^2-1}+\frac{a(6a-5)}{(4a^2-1)^2}$;

94) $\frac{2x-3y}{x^2+2xy+y^2}-\frac{2x+3y}{y^2-2xy+x^2}+\frac{10x^3+10x^2y}{x^4-2x^2y^2+y^4}-\frac{6y}{x^2-y^2}$;

95) $\frac{p+q}{p^2+pq-2q^2}-\frac{p-q}{p^2+3pq+2q^2}+\frac{p-2q}{p^2-q^2}$;

96) $\frac{x+y}{x^2+5xy+6y^2}-\frac{x-y}{x^2-9y^2}+\frac{2x-3y}{x^2-xy-6y^2}$;

97) $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2-x-2}-\frac{2}{x^2-4}$.

Исключение целого выражения из алгебраической дроби.

507. Проверить тожества: $\frac{a}{b}=c+\frac{a-bc}{b}$;

$\frac{a}{b}=\frac{a+bc}{b}-c$.

508. Разделить:

1) x^5 на x^2-x+1; 2) x^8+1 на $a-1$;

и представить $\frac{x^5}{x^2-x+1}$; $\frac{x^8+1}{x-1}$

в виде суммы целого выражения и дроби с числителем, в котором степень x ниже высшей степени этой буквы в знаменателе.

509. Исключить целые выражения из дробей:

1) $\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2-1}$; 2) $\frac{x^4+2x^2+3x+4}{x+2}$;

3) $\frac{x^7-1}{x+1}$; 4) $\frac{x^7+1}{x-1}$;

5) $\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^2+1}$; 6) $\frac{x^8-x^6+x^4-x^2+1}{x^2-1}$.

510. Упростить выражения (предварительно исключив целые выражения):

1) $\frac{x^6+5x^5+6x^4-7x^3+2x-1}{x^2-1}$; $\frac{x^7+x^4-x^2+3x-2}{x+1}+$
$+\frac{x^6-6x^3+4x^2-1}{x-1}$;

2) $\frac{a^8-a^6+a^4-a^2+1}{a^2-a+1}-\frac{a^7+9a^5-7a^3+a^2-1}{a+1}+\frac{a^8-1}{a^8+1}$;

3) $\frac{z^7-z^5+4z^2+2z+1}{z^2+z+1}-\frac{z^7+z^6+z^5+z^3+z^2+z+1}{z^3-1}+\frac{z^6+1}{z-1}$;

4) $\frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3+1}-\frac{x^6+x^3+1}{x+1}-\frac{x^6-x+1}{x^2-x+1}$.

Уравнения.

511. Решить следующие уравнения:

1) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=14$; 2) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}x=3$;

3) $\frac{3}{5}x-\frac{5}{9}x=21$; 4) $\frac{4}{5}x+9=\frac{5}{4}x$;

5) $3\frac{1}{3}x-2\frac{1}{2}x=4\frac{1}{6}$; 6) $2\frac{1}{5}x+11=5\frac{1}{2}x$;

7) $7\frac{1}{6}x-12\frac{1}{3}=x$; 8) $7\frac{1}{8}x-6\frac{6}{7}x=30$;

9) $29\frac{1}{4}x+14\frac{1}{3}=32\frac{5}{6}x$; 10) $18\frac{2}{3}x-49=5\frac{3}{5}x$;

11) $\frac{x}{a}-\frac{x}{3a}=2$; 12) $\frac{5x}{7m}-\frac{3x}{5m}=4$;

13) $\frac{a}{x}+b=\frac{b}{x}+a$; 14) $\frac{a}{x}+\frac{x-b}{x}-\frac{a-x}{x}=1$;

15) $3\left(\frac{x}{5}-3\right)=5\left(\frac{x}{3}-5\right)$; 16) $a\left(\frac{x}{2}-5\right)-b\left(\frac{x}{5}-2\right)=0$;

17) $7\left(\frac{x}{a}-1\right)=x\left(1-\frac{a}{x}\right)$; 18) $a-\frac{x}{b}=\frac{x}{a}-b$;

19) $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=2$; 20) $m\left(\frac{x}{a}-b\right)=n\left(\frac{x}{b}-a\right)$;

21) $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}x-\frac{5}{6}x+2=\frac{5}{12}x$;

22) $\frac{1}{2}x-19+\frac{3}{4}x+18\frac{5}{6}=27\frac{2}{3}x-3\frac{7}{12}-26\frac{1}{6}x-\frac{10}{3}$;

23) $15\frac{7}{8}x-\frac{7}{3}x+15\frac{1}{2}x-\frac{11}{12}x+18\frac{5}{6}-13\frac{5}{8}x=22\frac{1}{3}$;

24) $3\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}x-7\frac{3}{4}+7\frac{3}{4}x+4\frac{1}{5}-4\frac{1}{5}x-5\frac{1}{3}+5\frac{1}{3}x=0$;

25) $\frac{9}{x}-7\frac{1}{2}=\frac{7}{x}-\frac{2x-1}{3}+\frac{4x+1}{6}$;

26) $\frac{5x-3}{2x}-1\frac{1}{3}-\frac{1}{x}=3\frac{1}{4}=\frac{2x+1}{3x}-2\frac{1}{2}$.

§ 4. Умножение и деление дробей.

512. Вычислить:

1) $\frac{a}{b}\cdot 3$; 2) $\frac{x}{y}\cdot 5$; 3) $\frac{m}{p}\cdot 100$; 4) $\frac{x}{z}\cdot 100$;

5) $\frac{a}{b}\cdot\overline{2}$; 6) $\frac{x}{y}\cdot\overline{3}$; 7) $\frac{m}{p}\cdot\overline{100}$; 8) $\frac{x}{y}\cdot\overline{100}$.

513. Проверить справедливость равенства

$$\frac{a}{b}\cdot m=\frac{am}{b}$$

при

	1	2	3	4	5	6
a	1	2	6	4	10	$\frac{3}{7}$
b	4	3	5	0,6	3	6
m	4	6	$\frac{2}{3}$	0,1	$\frac{3}{5}$	13.

514. Показать на основании определения умножения на целое число, что:

$$\frac{a}{b}\cdot m=\frac{am}{b}$$

при $m=3,\ 5,\ 7,\ 1,\ 0,\ -4$.

515. Проверить справедливость равенства

$$a\cdot(x:y)=(ax):y$$

или

$$a\cdot\frac{x}{y}=\frac{ax}{y}$$

при

	1	2	3	4	5
a	8	4	—6	7	8
x	6	—10	12	5	—2
y	2	5	—4	3	6.

516. Проверить справедливость равенства:

$$(a:b)\cdot(x:b)=(ax):(by)$$

или

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=\frac{ax}{by},$$

при

	1	2	3	4	5		7
a	8	6	6	14	20	20	16
b	2	—3	3	—7	3	9	—18
x	15	8	—8	—12	6	16	5
y	3	4	—4	—6	5	7	—3.

517. В чем состоит действие, называемое **умножением на дробь?**

518. Упростить выражения:

1) $\frac{2}{5}\cdot 3$; 2) $3\cdot\frac{2}{5}$; 3) $\frac{a}{b}\cdot m$; 4) $m\cdot\frac{a}{b}$;

5) $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}$; 6) $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{7}$; 7) $\frac{a}{m}\cdot\frac{x}{y}$; 8) $\frac{x}{y}\cdot\frac{a}{m}$;

9) $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{7}{11}\cdot\frac{9}{5}\right)$; 10) $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{11}\right)\cdot\frac{5}{9}$; 11) $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{x}{y}\right)$; 12) $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}\right)\frac{x}{y}$.

519. Проверить справедливость равенств:

$$ab = ab,$$
$$a\cdot(bc) = (ab)c = abc,$$

при

	1	2	3	4	5
a	3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{m}{x}$	$-\frac{x}{y}$
b	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{n}{y}$	$-\frac{m}{n}$
c	7	$\frac{4}{9}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{p}{z}$	$\frac{p}{q}$.

520. Доказать поверкой справедливость следующих равенств:

$$\frac{a}{b}:m = \frac{a:m}{b} = \frac{a}{bm},$$
$$a:\frac{m}{p} = \left(\frac{a}{m}\right)\cdot p = \frac{ap}{m},$$
$$\frac{a}{b}:\frac{x}{y} = \frac{ay}{bx}.$$

521. Назвать числа, обратные числам:

1) $\frac{2}{3}$, 2) $\frac{5}{4}$, 3) 8, 4) $\frac{1}{11}$, 5) $-\frac{5}{6}$, 6) $-\frac{9}{8}$,

7) $\frac{a}{b}$. 8) $\frac{b}{a}$, 9) a, 10) $\frac{1}{b}$, 11) $-\frac{x}{y}$, 12) $-\frac{1}{a}$,

522. Проверить справедливость равенства

$$a:b = a\cdot\frac{1}{b}$$

при

	1	2	3	4	5	6	7
a	4	$\frac{3}{4}$	-3	$\frac{7}{8}$	x	$\frac{x}{y}$	$-\frac{m}{n}$
b	5	2	$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{9}$	$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{q}$	$-\frac{l}{k}$.

523. Каким действием может быть заменено деление?

524. Какое число больше:

1) 5 или $\frac{1}{5}$, 2) $\frac{3}{4}$ или $\frac{4}{3}$, 3) a или $\frac{1}{a}$, 4) $-x$ или $-\frac{1}{x}$?

Перемножить две дроби значит составить дробь, числитель которой есть произведение числителей данных дробей, а знаменатель есть произведение их знаменателей.

Деление на дробь может быть заменено умножением делимого на выражение, обратное делителю.

Умножение и деление.

525. Упростить выражения:

1) $\frac{1}{4}\cdot 4$; 2) $\frac{2}{3}\cdot 3$; 3) $1\frac{2}{5}\cdot 10$; 4) $\frac{1}{2}\cdot 2$;

5) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}$; 7) $1\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}$; 8) $2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{5}$;

9) $\frac{a}{7}\cdot 7$; 10) $\frac{ab}{10}\cdot 10$; 11) $\frac{2x}{9}\cdot 3$; 12) $\frac{xy}{a}\cdot a$;

13) $4a\cdot\frac{1}{2}$; 14) $\frac{2}{3}\cdot 9b$; 15) $12c\cdot\frac{3}{4}$; 16) $\frac{4}{5}\cdot 10c$;

17) $4\cdot\frac{7}{8}$; 18) $3h\cdot 7\frac{5}{6}$; 19) $8k\cdot 1\frac{1}{2}$; 20) $5\frac{1}{4}p\cdot 14$;

21) $\frac{2}{3}c\cdot 10$; 22) $\frac{2}{3}c\cdot 7d$; 23) $\frac{2}{3}d\cdot 7e$; 24) $6x\cdot 2\frac{3}{4}$;

25) $\frac{3}{a}\cdot 2$; 26) $\frac{a}{8}\cdot 4$; 27) $\frac{a}{5b}\cdot 5$; 28) $\frac{a}{12y}\cdot 8y$;

29) $a\cdot\frac{2x}{7ab}$; 30) $2x\cdot\frac{3}{8xy}$; 31) $4a\cdot\frac{5x}{6ab}$; 32) $9x\cdot\frac{5a}{12bx}$;

33) $a\cdot\frac{a}{b}$; 34) $5x\cdot\frac{a}{7x}$; 35) $a\cdot\frac{1}{ax}$; 36) $\frac{a}{x}\cdot ax$;

37) $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}$; 38) $\frac{3a}{4}\cdot\frac{5b}{6}$; 39) $\frac{2a}{b}\cdot\frac{b}{a}$; 40) $\frac{5x}{4}\cdot\frac{4x}{5}$;

41) $\frac{5ax}{6by}\cdot\frac{3x}{5y}$; 42) $\frac{7}{a}\cdot\frac{5ax}{14by}$; 43) $\frac{2ab}{7cd}\cdot\frac{5cx}{6by}$; 44) $\frac{8ax}{5by}\cdot\frac{3ay}{4bx}$;

45) $\frac{7}{3}a\cdot 1\frac{1}{5}b$; 46) $2\frac{1}{2}g\cdot 1\frac{3}{5}h$; 47) $3\frac{1}{3}k\cdot 7\frac{1}{2}h$; 48) $7\frac{1}{2}ay\cdot 1\frac{3}{5}ax$;

49) $\frac{4a}{3b}\cdot\frac{3}{8}$; 50) $\frac{6x}{5y}\cdot\frac{2}{3y}$; 51) $\frac{3a}{5x}\cdot\frac{1}{3}bx$; 52) $\frac{5n}{4p}\cdot\frac{3}{5}px$;

53) $3\frac{1}{2}ab\cdot\frac{4a}{7bx}$; 54) $1\frac{1}{3}ax\cdot\frac{6b}{xy}$; 55) $\frac{8a}{15bx}\cdot 2\frac{1}{2}x$; 56) $\frac{3a}{5y}\cdot 3\frac{1}{2}xy$.

526. Упростить выражения:

1) $\frac{3}{4}:3$; 2) $2\frac{1}{2}:5$; 3) $\frac{1}{3}:2$; 4) $\frac{1}{2}:3$;

5) $\frac{3}{7}:2$; 6) $\frac{4}{9}:2$; 7) $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$; 8) $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$;

9) $\frac{2}{3}:\frac{6}{7}$; 10) $2\frac{1}{2}:\frac{2}{5}$; 11) $1\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$; 12) $\frac{2}{5}:3\frac{3}{4}$;

13) $2a:\frac{1}{2}$; 14) $3x:\frac{3}{2}$; 15) $6b:\frac{2}{3}$; 16) $8y:\frac{4}{5}$;

17) $3a:1\frac{1}{2}$; 18) $7c:1\frac{2}{5}$; 19) $5x:1\frac{7}{8}$; 20) $\frac{1}{2}ab:1\frac{1}{2}$;

21) $9:\frac{3}{a}$; 22) $a:\frac{a}{x}$ 23) $ab:\frac{a}{b}$; 24) $a^2:\frac{a}{b}$;

25) $9x:\frac{12ax}{5b}$; 26) $8a:\frac{20ab}{3x}$; 27) $15n:\frac{5nx}{3y}$; 28) $18p:\frac{9p}{5x}$;

29) $\frac{a}{x}:\frac{b}{x}$; 30) $\frac{a}{b}:\frac{a}{x}$; 31) $\frac{7}{a}:\frac{1}{a}$; 32) $\frac{a}{b}:\frac{a}{3b}$;

33) $1\frac{1}{2}ab:2\frac{1}{4}$; 34) $3\frac{1}{2}ax:2\frac{1}{2}x$; 35) $3\frac{3}{4}xy:1\frac{2}{3}$;

36) $8\frac{1}{3}ay:1\frac{2}{3}a$; 37) $\frac{3ab}{7xy}:\frac{2ab}{7by}$; 38) $\frac{ax}{by}:\frac{3ab}{5xy}$;

39) $\frac{2x}{3y}:\frac{7bx}{9ay}$; 40) $\frac{8a}{9b}:\frac{5ax}{6by}$; 41) $\frac{5ab}{6xy}:\frac{a}{2x}$;

42) $\frac{16abc}{9xyz}:\frac{8b}{3z}$; 43) $\frac{24mnx}{35pqy}:\frac{8m}{5y}$; 44) $\frac{27npx}{10gh}:\frac{3p}{5h}$;

45) $\frac{8ac}{9b}:\frac{6ay}{5b}$; 46) $\frac{14ax}{15p}:\frac{21am}{10by}$; 47) $\frac{18mx}{5y}:4ax$;

48) $\frac{6np}{5x}:12py$; 49) $\frac{27pq}{10c}:18qx$; 50) $6ab:\frac{9ax}{5m}$;

51) $4am:\frac{8mx}{3y}$; 52) $20ax:\frac{15xy}{7b}$; 53) $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}:\frac{1}{x}$;

54) $\left(\frac{3a}{5b}:\frac{4a}{7b}\right)\cdot\frac{20}{21}$; 55) $\frac{9ab}{28xy}\cdot\frac{70ax}{27by}:\frac{a^2}{y^2}$;

56) $\frac{25xy}{36ab}\cdot\frac{24b^2}{35x^2y}:\frac{1}{x}$; 57) $\left(\frac{6a^8x^7}{25b^2y^4}:\frac{4a^3x^5}{15b^2y^5}\right)\cdot\frac{5}{9}$;

58) $\frac{28a^2xy^8}{3bz^4}\cdot\frac{9b^8x}{7a^2y^3}\cdot\frac{x^4}{12x^2yb^2}$; 59) $\frac{1}{abc}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{xyz}\cdot\frac{abc}{xyz}$;

60) $\left(\frac{16a^2b^8c^4}{35x^8y^4z^5}\cdot\frac{5x^2yz}{8ab^5}\right):\frac{2ac^4}{7b^2xy^8}$; 61) $\left(\frac{100a^5b^7}{9x^3y}:\frac{10a^6b^2}{27xy^2}\right)\cdot\frac{3x}{5a^6}$;

62) $\left(\frac{0{,}12p^6q^4}{0{,}7xy}\cdot\frac{0{,}5xy^3}{4p^4}\right):\frac{2p^4x}{q^2y^3}$.

527. Произвести умножения:

1) $(3x^3-7x^2+5x)\cdot\frac{2}{x^2}$; 2) $(ax^2+bx+c)\cdot\frac{1}{x}$;

3) $\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{y}+\frac{4}{x}\right)\cdot 3x^3$; 4) $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+3\right)\cdot 5x^2$;

5) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot xyz$; 6) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\cdot\frac{ab}{c}$;

7) $\left(-\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b-\frac{5}{6}c\right)\cdot\left(-2\frac{3}{5}y\right)$; 8) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b+\frac{3}{4}c\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}x\right)$;

9) $\left(2\frac{1}{4}x+1\frac{1}{2}y+2\frac{2}{3}z\right)\cdot 1\frac{1}{2}a$; 10) $\left(1\frac{1}{2}a-2\frac{1}{3}b+3\frac{3}{4}c\right)\cdot 2\frac{2}{3}x$;

11) $(a-b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$; 12) $\left(\frac{a}{b}-1\right)\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)$;

13) $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{y}\right)$; 14) $\left(\frac{x}{y}-\frac{2}{3}\right)\cdot(3x+2y)$;

15) $\left(2a-\frac{1}{4}b\right)^2$; 16) $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2$;

17) $\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y\right)^2$; 18) $\left(\frac{1}{2}a-1\right)^2$;

19) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}a\right)$; 20) $\left(a+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)$;

21) $\left(2\frac{1}{2}a-5b\right)\cdot\left(5a+1\frac{1}{2}b\right)$; 22) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+4b\right)$;

23) $\left(1\frac{1}{2}x-3\frac{1}{3}y\right)\cdot\left(1\frac{1}{3}x+1\frac{1}{5}y\right)$;

24) $\left(1\frac{1}{3}a-2\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(1\frac{1}{5}a+\frac{3}{4}x\right)$.

528. 1) $\left(\frac{8a^4}{15b^4}+\frac{9a^3}{4b^2}-\frac{5a}{8b}\right)\cdot -4ab$;

2) $\left(\frac{x}{2y}+\frac{z}{3y}-\frac{z}{5x}\right)\cdot\frac{12xy}{z}$;

3) $\left(\frac{7p}{6qr}+\frac{8q}{15pr}-\frac{13r}{21pq}-\frac{1}{pqr}\right)\cdot 42pqr$;

4) $\left(\frac{x}{x+y}-\frac{y}{y-x}+\frac{y}{xy+x^2}-\frac{x}{y^2-xy}\right)\cdot(x^2-y^2)$;

5) $\left(\frac{2x}{2x-5y}-\frac{3x}{4x+10y}+\frac{3y}{4x-10y}-\frac{x^2-y^2}{4x^2-25y^2}\right)\cdot(4x^2-25y^2)$;

6) $\left(\frac{2(2a-7b)}{2a+7b}+\frac{5(2a+7b)}{2a-7b}-\frac{7(4a^2-49b^2)}{4a^2-49b^2}\right)\cdot(4a^3-49ab^2)$;

7) $\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{9-x^2}\right)\cdot(x^2+2x-3)$;

8) $\left(\frac{x+2a}{a-2x}-\frac{a+2x}{x-2a}\right)(2x^2-5ax+2a^2)$;

9) $\left(\frac{28p^3q}{27xy^5}+\frac{49p^3q^2}{36x^2y^4}-\frac{7pq^3}{18x^3y^3}\right)\cdot\frac{9x^2y^3}{14p^2q^2}$;

10) $\left(\frac{33a^7b^2c}{13xy^2z^2}-\frac{44a^6b^3c^2}{65x^2y^4}+\frac{b^5c^5}{26x^6z^3}\right)\cdot-\frac{65x^2y^3z^5}{66a^4b^3c^2}$;

11) $\frac{r^2-s^2}{p^2-q^2}\cdot\frac{p^2+2pq+q^2}{r^2-2rs+s^2}$;

12) $\frac{a^2-a+1}{a^2+a+1}\cdot\frac{a^3-1}{a^3+1}$;

13) $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$;

14) $\frac{a^3-8}{a^3+8}\cdot\frac{a^2-2a+4}{a^2+2a+4}$;

15) $\frac{a^2+5a+6}{a^2-4}\cdot\frac{a-2}{a+3}$;

16) $\frac{x^2-11x+30}{x+6}\cdot\frac{x^2-36}{x^2-25}$;

17) $\frac{x^2+2x-3}{x-5}\cdot\frac{x^2-25}{x+1}$;

18) $\frac{a^2-a-20}{a^2-25}\cdot\frac{a+5}{(a+4)^2}$;

19) $\frac{7x^2-35x+42}{x^2-16}\cdot\frac{5x-20}{3x^2-15x+18}$;

20) $\frac{a^2-10a+25}{3a^2-36a+105}\cdot\frac{a^2-4}{5a^2-35a+50}$;

21) $\frac{3a^2+7a-6}{3a^2-7a-6}\cdot\frac{3a^2-11a+6}{3a^2+11a+6}$;

22) $\frac{12a^2-17a+6}{6a^2+a-12}\cdot\frac{12a^2-25a+12}{6a^2+5a-6}$.

529. 1) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot(a-b)+(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$;

2) $\left(\frac{3}{5}-\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{y}\right)-\left(\frac{3}{5x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(3-\frac{5x}{y}\right)$;

3) $\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{2x}{3}+1\right)$;

4) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(2x^2+\frac{3x}{2}+\frac{4}{3}\right)$;

5) $\left(\frac{2a^2}{9b}-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3b}+\frac{1}{a}\right)$;

6) $\left(\frac{5a}{3b}+\frac{b}{a}-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{3a}{b}+\frac{3}{2}\right)$;

7) $\left(\frac{3x}{4y}+\frac{2y}{5x}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{y}-\frac{2}{x}\right)$;

8) $\left(\frac{3a^2}{2bx}+\frac{2a}{y}+\frac{8bx}{3y^2}\right)\cdot\left(\frac{3a}{x}-\frac{4b}{y}\right)$;

9) $\left(\frac{a}{b}+\frac{5b}{2a}-1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}+\frac{2b}{5}\right)$;

10) $\left(\frac{3ay}{4x}-\frac{2b^2x}{3ay}-\frac{1}{2}b\right)\cdot\left(\frac{3a}{b}+\frac{2x}{y}\right)$;

11) $\frac{x^4-y^4}{x^2-xy+y^2}\cdot\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$;

12) $\frac{a^5-ab^4}{a^2-2ac+c^2}\cdot\frac{a-c}{a^3+ab^2}$;

13) $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{1-a+a^2}\cdot\frac{a^3+1}{a^3-ab^2+a^2b-b^3}$;

14) $(a^2+az+z^2)\cdot\left(1-\frac{z}{a}+\frac{z^2}{a^2}\right)$;

15) $(a^3+8)\cdot\left(1-\frac{1}{a+2}\right)$; 16) $\left(\frac{a^2}{a-b}-b\right)\cdot\frac{a-b}{a^3+b^3}$;

17) $\frac{1-x^2}{1+y}\cdot\frac{1-y^2}{x+x^2}\cdot\left(1+\frac{x}{1-x}\right)$;

18) $\frac{x^6-1}{x^3}\cdot\frac{x}{x^3-1}\cdot\frac{x}{x^2-x+1}$; 19) $\frac{a^2-a+1}{a}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)$;

20) $\frac{(x+y)^2-3xy}{x^3-y^3-3xy(x-y)}\cdot\frac{x^2-y^2}{x+y^3}$;

21) $\left(\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}\right)\cdot\frac{x^4-y^4}{(x-y)^2-2y(x+y)}$.

530. Произвести деления:

1) $\left(\frac{64ab}{5x}+\frac{40bc}{3y}-\frac{8abc}{7z}\right):8ab$;

2) $\left(\frac{70x^3y^2}{3x}-\frac{21x^2y^3}{4b}+\frac{28xy^4}{5c}\right):-35xy^3$;

3) $\left(\frac{144a^5b}{5}+\frac{81a^4b^2}{4}-\frac{64a^3b^3}{3}\right):72a^3b^3$;

4) $\frac{72(x+y)^2}{x-y}:45(x^2-y^2)$; 5) $\frac{x^3-y^3}{x+y}:2(x^2-y^2)$;

6) $\frac{64(x-y)^2}{x+y}:-56(x^2-y^2)$; 7) $\frac{x^3+y^3}{x-y}:4(x^2-xy+y^2)$;

8) $\frac{8x^2+8xy}{3x-3y}:24(x^4-x^2y^2)$; 9) $\frac{26(a^2+5a+6)}{7a}:(-13a^2-39a)$;

10) $\frac{a^2-3a-10}{2a+7}:(2a^2-3a-35)$;

11) $\frac{180(z^2-6z-7)}{7(z+2)}:75(2z-14)$;

12) $\frac{p^3-27}{2}:-(p^2+6p+9)$; 13) $\frac{8x^3-64y^3}{7xy}:(4x^2-16y^2)$;

14) $\frac{a^4-b^4}{2}:(a^2+b^2)$; 15) $\frac{x^6-y^6}{2xy}:2(x^3-y^3)$;

16) $\frac{a^6+b^6}{4}:-2(a^2+b^2)$; 17) $\frac{x^6-y^6}{8}:-\frac{1}{4}(x^3-y^3)$.

531. 1) $\left(\frac{x+y}{x}-\frac{x-y}{y}+\frac{(x+y)^2}{xy}-\frac{(x+y)^2}{xy}\right):(x^2-y^2)$;

2) $\left(\frac{3a-7b}{4a}-\frac{3a+7b}{5b}+\frac{9a^2-49b^2}{3ab}\right):(9a^2-49b^2)$;

3) $\left(\frac{4x^2-6xy}{3y}+\frac{6xy+9y^2}{2x}-\frac{6xy(4x^2-9y^2)}{4x^2+9y^2}\right):(4x^2-9y^2)$;

4) $\left(\frac{4x-5}{2x+3}+\frac{2x-3}{4x+5}+16x^2-25\right):(8x^2-22x+15)$;

5) $\frac{104(a+b)}{8(a-b)} : \frac{64(a+b)}{45(a-b)}$; 6) $\frac{(a-b)^2}{25(a+b)} : \frac{a^2-b^2}{5(a+b)^2}$;

7) $\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} : \frac{a-b}{a+b}$; 8) $\frac{2a(a-b)}{3b(a+b)} : \frac{8a(a^3-b^3)}{9b(a+b)^2}$;

9) $\frac{7y(a^2-ab+b^2)}{5x(a^2+ab+b^2)} : \frac{x(a^3+b^3)(a+b)}{(a^3-b^3)(a-b)}$;

10) $\frac{y^2+5y+4}{(z-1)^2} : \frac{y+4}{z^2-1}$; 11) $\frac{2xy+4y-3x-6}{2xy-4y+3x-6} : \frac{x+2}{4y+6}$;

12) $\frac{1}{u^2-8u+15} : \frac{1}{u^2-u-6}$;

13) $\frac{2a^2-5ab+2b^2}{3a^2-ab-9a+3b} : \frac{6a^2-5ab+b^2}{a^2-2ab-3a+6b}$;

14) $\frac{4}{a^2-ab-2b^2} : \frac{3}{a^2+3ab-10b^2}$;

15) $\frac{4a^2+12ab+9b^2}{2a-3} : \frac{4a^2-12ab+9b^2}{8a^3-27}$;

16) $\frac{a-b}{a^2-2ab-3b^2} : \frac{a^2+2ab-3b^2}{a+b}$;

17) $\frac{10x^3+25x^2y+15xy^2}{6x^2y-2xy^2-4y^3} : \frac{x+y}{y-x}$; 18) $\frac{u^2+uv-6v^2}{u-3v} : \frac{u-2v}{u^2-uv-6v^2}$;

19) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x-1} : \frac{x+1}{x^3-1}$;

20) $\frac{a^2+2ab+b^2-4}{9-a^2+2ab-b^2} : \frac{5a^2+5ab-10a}{6x-2ax+2bx}$;

21) $\left(20ab-\frac{5a^2}{9b^2}+\frac{8b^4}{15a^2}\right) : -\frac{10a^2}{3b^3}$;

22) $\left(\frac{4pq}{5}-\frac{4}{5pq}+10p^2q^2\right) : -\frac{1}{4pq}$;

23) $\left(\frac{a^2b^2}{x^3y^3}+\frac{4a^3b}{x^2y^4}-1\right) : \frac{a^2b^2}{x^3y^3}$;

24) $\left(\frac{0,25x^4}{0,3y^4}+\frac{2,5x^3}{3y^3}-\frac{25x^2}{y^2}\right) : \frac{0,5x^2}{0,3y^4}$;

25) $\left(\frac{5x+7y}{7x-4y}-\frac{5x-7y}{7x+4y}\right) : \frac{25x^2-49y^2}{49x^2-16y^2}$;

26) $\left(2(a-b)+\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}\right) : \frac{a^2-b^2}{2ab}$;

27) $\left(\frac{a^3-ab}{a^2-ab+b^2}-\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab}-\frac{ab^3-b^4}{a^4+ab^3}\right) : \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$;

28) $\left[\frac{(2x+1)^2}{4x^2+1}-\frac{(2x+1)^2}{4x^2-1}+\frac{8x^2+8x+2}{16x^4-1}\right] : \frac{8x^3+1}{16x^4-1}$.

532. 1) $\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right) : \left(a-\frac{1}{b}\right)$; 2) $\left(\frac{3a^2}{4b^2}-\frac{b^2}{3}\right) : \left(\frac{3a}{2b}+b\right)$;

3) $\left(4x^2-\frac{1}{9b^2}\right) : \left(2x-\frac{1}{3b}\right)$; 4) $\left(a^4-\frac{1}{16b^4}\right) : \left(a^2-\frac{1}{4b^2}\right)$;

5) $\left(a^3 - \frac{1}{b^3}\right) : \left(a - \frac{1}{b}\right)$; 6) $\left(\frac{9a^3}{2b} - \frac{4b^2}{3}\right) : \left(\frac{3a}{2} - b\right)$;

7) $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) : \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$; 8) $\left(2a^2 - \frac{1}{4a}\right) : \left(2a + 1 + \frac{1}{2a}\right)$;

9) $\left(x^4 - \frac{1}{y^4}\right) : \left(x - \frac{1}{y}\right)$; 10) $\left(x^4 - \frac{1}{y^4}\right) : \left(x + \frac{1}{y}\right)$;

11) $\left(\frac{32}{a^5} + \frac{1}{b^5}\right) : \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$; 12) $\left(\frac{243p^5}{q^5} - \frac{r^5}{s^5}\right) : \left(\frac{p}{q} - \frac{r}{3s}\right)$;

13) $\left(\frac{a}{bc} + \frac{bc}{ad^2} - \frac{2}{d}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)$; 14) $\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{3}{20} - \frac{9a^2}{20b^2}\right) : \left(\frac{b}{a} - \frac{3a}{4b}\right)$;

15) $\frac{x^3 - 64}{x^3 + 64} : \frac{x - 4}{x + 4}$; 16) $\left(1 - \frac{1 - x}{1 + x}\right) : \left(1 + \frac{1 - x}{1 + x}\right)$;

17) $\frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{a^2 + 2ab + b^2} : \frac{a^4 - b^4}{(a + b)^3}$;

18) $\left(\frac{a}{a - x} - \frac{a}{a + x}\right) ; \frac{ax}{a^2 - x^2}$;

19) $\left(\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a - b}\right) : \left(\frac{a}{a - b} - \frac{b}{a + b}\right)$;

20) $\left(\frac{x + 1}{y + 1} + \frac{x - 1}{y - 1}\right) : \left(\frac{x + 1}{y - 1} + \frac{x - 1}{y + 1}\right)$;

21) $\left(\frac{1 + 2m}{1 + m} + \frac{1}{m}\right) ; \left(\frac{1 + 2m}{m} - \frac{1}{1 + m}\right)$;

22) $\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right) : \left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$;

23) $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right)$;

24) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right)$;

25) $(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) : \frac{a + b - c}{a + b + c}$;

26) $\left[\frac{(m + n)^2 - 4n^2}{m^2 - n^2} - \frac{m - n}{m + n}\right] : \frac{2n}{m + n}$;

27) $\left(\frac{1}{x} + x\right) : \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \frac{(x - 1)^2}{x^3}$;

28) $\left[(0{,}01 + 0{,}1x + x^2) : \left(\frac{0{,}001}{x} - x^2\right)\right] \cdot \frac{0{,}01 - x^2}{x}$;

29) $\frac{x^4 - 8x}{x^2 - 4x - 5} \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} : \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 5}$;

30) $\frac{x^2 - 4}{y^2 + 3x + 2} \cdot \frac{(x + 1)^2}{x^2 - x - 12} : \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x}$;

31) $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{a - b} + \frac{b}{(a - b)^2}\right) : - \frac{1}{b}$;

32) $\left[\left(\frac{1}{z + a} - \frac{z + a}{z^2 - az + a^2}\right) \cdot \frac{z^3 + a^3}{3a^3z^3 + 7az}\right] : \frac{3}{3a^2z^2 + 7}$.

533. Вычислить значения дробей:

$$1)\ \frac{a}{b};\qquad 2)\ \frac{a+b}{a-b};\qquad 3)\ \frac{a^2+b^3}{a^2-b^2};$$

при

	а	б	в	г	д	е
$a=$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$b=$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$.

534. Упростить следующие выражения:

$$1)\ \frac{\frac{8}{5}-1}{2-\frac{3}{5}};\qquad 2)\ \frac{2-\frac{3}{7}}{\frac{5}{7}+4};\qquad 3)\ \frac{11+\frac{7}{10}}{\frac{43}{15}-2};\qquad 4)\ \frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{9}}{\frac{16}{9}-\frac{1}{3}};$$

$$5)\ \frac{\frac{5}{12}-\frac{3}{8}}{\frac{17}{12}+\frac{7}{8}};\qquad 6)\ \frac{\frac{7}{10}+\frac{12}{25}}{\frac{9}{10}+\frac{7}{25}};\qquad 7)\ \frac{2+\frac{3}{5}+\frac{4}{25}}{4+\frac{8}{5}+\frac{16}{95}};\qquad 8)\ \frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}}{\frac{17}{5}-\frac{5}{4}+\frac{4}{3}};$$

$$9)\ \frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}};\qquad 10)\ \frac{\frac{u}{v}+2}{\frac{3u}{v}-2};\qquad 11)\ \frac{\frac{a}{6}+\frac{6}{a}}{\frac{a}{2}-\frac{2}{a}};\qquad 12)\ \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}};$$

$$13)\ \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}};\qquad 14)\ \frac{\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}};\qquad 15)\ \frac{\frac{x+1}{y}-\frac{y+1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}};$$

$$16)\ \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}};\qquad 17)\ \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}};\qquad 18)\ \frac{\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}};$$

$$19)\ \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}};\qquad 20)\ \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}};\qquad 21)\ \frac{a+\frac{b}{c}}{d};$$

$$22)\ \frac{a}{b-\frac{c}{d}};\qquad 23)\ \frac{a+\frac{b}{c}}{a-\frac{c}{d}};\qquad 24)\ \frac{2+\frac{a}{3}}{b};$$

$$25)\ \frac{a^2-2b}{\frac{3a}{2b}-1};\qquad 26)\ \frac{3a-\frac{4x^2}{3a}}{1+\frac{2x}{3a}};\qquad 27)\ \frac{a-\frac{a(b^3-a)}{b^2}}{b-\frac{b^3-a}{b^3}};$$

28) $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2}$; 29) $\dfrac{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a-1}}{\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}}$; 30) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}$;

31) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{1}{2-a}+\dfrac{4}{a^2-4}}$; 32) $\dfrac{\dfrac{1}{x-y+z}+\dfrac{1}{x-y-z}}{\dfrac{1}{y-x-z}-\dfrac{1}{y+z-x}}$;

33) $\dfrac{\left(1-\dfrac{a}{b}+\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{b^3}{a^3}\right)\left(1-\dfrac{a-b}{a+b}\right)\dfrac{a+b}{2}}{\left(1+\dfrac{3b-a}{a+b}\right)\left(a^2+b^2\right)}$;

34) $\dfrac{\left(1-\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a+b}{2a}-\dfrac{b}{a+b}\right)}{\left(a-2b+\dfrac{b^2}{a}\right)\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}\right)}$.

535. Показать, что

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}}=\frac{a}{b};$$

вычислить выражение левой части при

$$a=5;\quad b=12;$$
$$a=6;\quad b=11.$$

536. Преобразовать

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a}{b}\cdot\frac{a-b}{a+b}};$$

Определить значение этого выражения при

1) $a=2;\quad b=5;$
2) $a=120;\quad b=119.$

537. Вычислить следующие так называемые **непрерывные** дроби:

1) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}$; 2) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$; 3) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}}$;

4) $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3}}$; 5) $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3}}}$; 6) $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3}}}}$.

538. Указать и вычислить последовательные приближенные значения **(подходящие дроби)** следующих непрерывных дробей:

1) $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}$; 2) $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}$; 3) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}$.

539. Вычислить значения следующих дробей (сделав предварительно необходимые упрощения)!

1) $y=\frac{2x+3}{2x-3}$ при $x=\frac{3}{2}$, $x=-\frac{3}{2}$;

2) $y=\frac{4x^2-1}{4x^2+1}$ при $x=\frac{1}{2}$, $x=-2$;

3) $y=\frac{5x^2-12x+7}{3x^2+7x+4}$ при $x=1$, $x=-1$, $x=\frac{7}{5}$ $x=-\frac{4}{3}$;

4) $y=\frac{9x^2-10x+1}{15x+16x+1}$ при $x=1$, $x=-1$, $x=\frac{1}{9}$, $x=-\frac{1}{15}$;

5) $y=\frac{20x^2+23x+3}{11x^2+14x+3}$ при $x=1$, $x=-1$, $x=-\frac{3}{2}$, $x=-\frac{3}{11}$.

540. При каких значениях x следующие дроби обращаются в 0 и при каких не имеют смысла?

1) $y=\frac{7x+3}{16x-3}$; 2) $y=\frac{7x-3}{3x+3}$; 3) $y=\frac{16x^2-1}{16x^2+1}$;

4) $y=\frac{16x^2+1}{16x^2-1}$; 5) $y=\frac{6x^2-19x+15}{6x^2+19x+15}$; 6) $y=\frac{6x^2+5x-6}{6x^2-5x-6}$;

7) $y=\dfrac{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}$; 8) $y=\dfrac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}$.

ПЯТАЯ ГЛАВА.

§ 5. Пропорции.

Пропорция и основное свойство ее членов.

541. Написать равенство, которое получится, если обе части равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ умножить на bd.

542. Заменить пропорции равенствами произведений:

1) $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$; 2) $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$;

3) $\frac{2a}{3b}=\frac{p}{q}$; 4) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$.

543. Проверить, пользуясь свойством произведений членов пропорции, какие из следующих равенств верны и какие нет:

1) $\frac{17}{23}=\frac{323}{437}$; 2) $\frac{13}{19}=\frac{231}{323}$; 3) $\frac{41}{31}=\frac{697}{527}$; 4) $1\frac{8}{29}=1\frac{184}{667}$;

5) $\frac{a^3-b^3}{a^3+2a^2b+ab^2+b^3}=\frac{a-b}{a+b}$; 6) $\frac{a^4-b^4}{a^4-2a^2b^2+b^4}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$;

7) $\frac{a^4+a^2b^2-a^2b^3+b^5}{a^4+a^2b^2-a^3b^2-a^5}=\frac{a^2-b^3}{b^2-a^3}$.

544. В следующих пропорциях определить неизвестное x, пользуясь свойством произведений ее членов:

1) $51:15=68:x$; 2) $20:95=x:57$; 3) $x:10{,}4=115:18\frac{2}{5}$;

4) $4{,}125:x=3\frac{1}{7}:26\frac{2}{3}$; 5) $7ab:5bc=3\frac{1}{2}a:x$; 6) $8ab:x=bc:1\frac{3}{4}ac$;

7) $x:\frac{a}{c}=\frac{c}{d}:\frac{a}{b}$; 8) $\frac{a}{b}:x=\frac{c}{b}:\frac{b}{d}$; 9) $\frac{a}{14b}:x=\frac{3c}{7b}:\frac{2c}{a}$;

10) $\frac{a+b}{a-b}:\frac{a^2-b^2}{ab}=x:\frac{(a-b)^2}{ac}$;

11) $\left(\frac{a^3-b^3-ab}{ab}\right):\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}+ab\right)=1:x$;

12) $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}+ab\right):\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}-ab\right)=(a+b)^2:x$.

545. Найти четвертое пропорциональное к

1) 3, 4, 6; 2) 6, 21, 22;

3) 2, $4\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{3}$; 4) $3\frac{1}{3}$, $3\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{3}$;

5) a, b, c; 6) -3, -4, 6;

7) 12, 42, -44; 8) -6, $-13\frac{1}{3}$, 28.

546. Можно ли составить пропорции из следующих групп чисел? Если возможно, то составить:

1) 6, 8, 300, 400; 2) 15, 3, 10, 50;

3) 16, 12, 12, 9; 4) 16, 12, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$;

5) -5, $+17$, $+20$, -64; 6) $-0{,}9$, $0{,}02$, $\frac{1}{9}$, -5;

7) 2, 6, 9, 8; 8) 10, 100, 3, 4;

9) a, a^2, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$; 10) x, y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$;

11) $x+y$, $x-y$, x^2-y^2, 1;

12) $x-y$, x^2-y^2, x^4-y^4, x^2+y^2.

547. Какая пропорция получится делением обеих частей равенства $x \cdot y = z \cdot v$ на $y \cdot z$?

548. По данным равным произведениям составить пропорции:

1) $4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$; 2) $9 \cdot 8 = 3 \cdot 24$;

3) $a_1 \cdot a_2 = a_3 \cdot a_4$; 4) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{p} \cdot \frac{p}{c}$.

549. Возможно ли преобразовать в пропорцию следующее равенство:

$$0 \cdot 7 = 0 \cdot 8?$$

550. Составить все возможные пропорции из чисел, входящих в следующие равенства:

1) $18 \cdot 10 = 20 \cdot 9$; 2) $x \cdot y = z \cdot v$.

551. Какие другие пропорции можно получить из

1) $3 : 4 = 15 : 20$; 2) $a : b = c : d$.

Во всех случаях сделать проверку, пользуясь произведениями крайних и средних членов.

552. Дана пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Показать, что в этом случае будут также справедливы пропорции:

1) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; 2) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$;

3) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$; 4) $\frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Проверить составленные пропорции

при

a	4	10	-5	$\frac{1}{2}$	$x+y$
b	6	200	25	$\frac{3}{8}$	$x-y$
c	0	5	-6	2	$-x-y$
d	30	100	$+30$	$1\frac{1}{2}$	$y-x$.

В каких иных видах можно записать пропорции: 1), 2), 3), 4)?

553. Если $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$, то

$$\frac{Ax+Cy+Cz}{mx+ny+pz} = \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Проверить справедливость этих равенств

при

	A	B	C	m	n	p
1)	8	12	30	4	6	15
2)	100	10	1	5	$\frac{6}{2}$	$\frac{1}{20}$.

Проверить справедливость написанной производной пропорции при помощи свойства произведений ее членов.

554. Если $\frac{A}{m} > \frac{B}{n} > \frac{C}{p}$, то

$$\frac{A}{m} > \frac{Ax + By + Cz}{mx + ny + pz} > \frac{C}{p}.$$

Проверить справедливость этих неравенств при

	A	B	C	m	n	p	y	z
1)	100	80	20	2	4	10	3	4
2)	20	100	8	1	25	4	10	2.

Останутся ли справедливыми написанные выше неравенства, если у некоторых указанных в таблице значений переменить знаки?

555. Пользуясь составлением производных пропорций, определить неизвестный член x в следующих пропорциях:

1) $(9 + x) : x = 4 : 1$, 2) $(10 - x) : x = 4 : 1$,
3) $(15 + x) : x = 4 : 1$, 4) $(a + x) : x = (a + 1) : 1$,
5) $(b + x) : x = a : b$, 6) $(a - x) : x = a : b$.

Знаменатель пропорции и коэффициент пропорциональности.

556. Если $a : b = c : d$, то число t, определяемое из уравнений $a = tc$ и $b = td$, называется **коэффициентом пропорциональности.**

Определить коэффициент пропорциональности в следующих пропорциях:

1) $10 : 12 = 5 : 6$, 2) $12 : 16 = 3 : 4$,
3) $2 : 3 = 2a : 3a$, 4) $1 : 2 = 7 : 14$.

557. В следующих пропорциях определить коэффициент пропорциональности, а затем и x:

1) $2:5=4:x$; 2) $a:b=a^2:x$;
3) $a:b=1:x$; 4) $m:n=x:n^2$;
5) $m:2n=x:n^2$; 6) $5:m=x:5m$;
7) $a^2:b^2=1:x$; 8) $a^2:b^2=x:1$.

558. Доказать справедливость производных пропорций, данных в задаче 552, вводя в вычисление коэффициент пропорциональности.

559. Число q, определяемое из уравнений $a=qb$ и $b=qd$, называется знаменателем пропорции. Вводя в вычисления знаменатель пропорции, доказать справедливость производных пропорций задач 552 и 553.

560. Если $a:b=c:d$, то можно положить $a=\frac{s}{d}$. Тогда и $b=\frac{s}{c}$. Доказать это. Какое значение имеет s в следующих пропорциях:

1) $10:12=5:6$; 2) $12:16=3:4$;
3) $2:3=2a:3a$; 4) $1:2=7:14$?

Среднее арифметическое и среднее геометрическое.

561. Составить все возможные пропорции из чисел:

1) 6, 6, 4, 9; 2) 10, 10, 25, 4.

562. Составить все возможные пропорции из a, b, c, если:

1) $a^2=bc$; 2) $b^2=ac$.

563. Решить пропорции:

1) $\frac{x}{7}=\frac{7}{98}$; 2) $\frac{5}{95}=\frac{95}{x}$; 3) $\frac{x}{p}=\frac{p}{q}$; 4) $\frac{k}{l}=\frac{l}{y}$;
5) $\frac{25}{x}=\frac{x}{4}$; 6) $\frac{y}{26}=\frac{4}{v}$; 7) $\frac{0{,}25}{x}=\frac{x}{4}$;
8) $\frac{0{,}125}{x}=\frac{x}{0{,}5}$; 9) $\frac{a^2}{x}=\frac{x}{b^2}$; 10) $\frac{ac^2}{y}=\frac{y}{a}$;
11) $\frac{x}{p^2+2pq+q^2}=\frac{1}{x}$; 12) $\frac{a^2+2ab+b^2}{z}=\frac{z}{a^2-2ab+b^2}$.

564. Подыскать целое число, ближе всего удовлетворяющее следующим **непрерывным** пропорциям:

1) $\frac{2}{x}=\frac{x}{5}$, 2) $\frac{20}{x}=\frac{x}{3}$; 3) $\frac{60}{x}=\frac{x}{40}$; 4) $\frac{80}{z}=\frac{z}{30}$.

565. Составить среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел a^2 и b^2.

Показать, что среднее арифметическое этих чисел больше их среднего геометрического при

$a = 5$	10	1
$b = 7$	3	9.

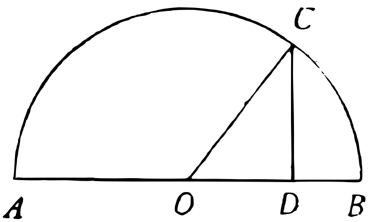
566. Проверить тожество

$$\frac{a^2+b^2}{2} - ab = \frac{(a-b)^2}{2};$$

показать на основании его, что среднее арифметическое чисел a^2 и b^2 больше их среднего геометрического.

В каком случае среднее арифметическое может оказаться равным среднему геометрическому?

567. Проверить измерением на чертеже, что перпендикуляр CD есть среднее геометрическое между отрезками диаметра AD и BD.



Фиг. 10.

На том же чертеже показать, что среднее арифметическое больше среднего геометрического.

568. Среднее арифметическое двух чисел, находящихся в отношении 9 : 25, равно 170. Найти среднее геометрическое между ними.

569. Найти среднее арифметическое и среднее геометрическое между $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$.

570. В 1910 году число жителей в городах Вятской губернии (губернском и уездных) было:

В Вятке	28700
» Глазове	3800
» Елабуге	10200
» Котельниче	4400
» Мальмеже	3500
» Нолинске	5000
» Орлове	3500
» Сарапуле	21800
» Слободском	10800
» Уржуме	4800
» Яранске	5100.

Определить среднюю населенность уездных городов Вятской губернии: 1) включая в их число и губернский город; 2) исключив губернский город.

Насколько населенность каждого города отклоняется от средней населенности в первом случае и во втором случае? Составить таблицу этих отклонений.

Почему средняя населенность, вычисленная в первом случае, выше вычисленной во втором?

571. Свободно падающее тело проходит в течение первой секунды 4,9 *м*, двух первых секунд—19,6 *м*, в течение трех первых секунд — 44,1 *м*, четырех — 78,4 *м*. Вычислить среднюю скорость падающего тела в течение:

1) первой секунды	2) первых двух секунд
3) второй »	4) первых трех секунд
5) третьей »	6) первых четырех секунд
7) четвертой »	8) последних двух (третьей и четвертой) секунд.

Применения теории пропорций.

572. 1) Пятеро детей должны разделить между собой 240 яблок так, чтобы числа полученных яблок относились как 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Сколько яблок придется каждому из них?

2) Два золотых кольца весят каждое по 6,5 граммов; в одном из них отношение веса чистого золота к общему весу равно 333 : 1000, в другом — 585 : 1000. Сколько чистого золота содержит каждое из колец?

3) Разделить 250 рублей между двумя лицами так, чтобы часть первого относилась к части второго, как 12 :13.

5) Три купца сложились торговать; первый положил 1400 руб., другой 1500 руб., третий 1600 руб., коими приторговали они 3600 руб.; спрашивается, сколько которому из приторгу достанется?

[Из «Курса чистой математики», сочиненного артиллерии штык-юнкером и математики партикулярным учителем Ефимом Войтяховским в пользу и употребление юношества и упражняющихся в математике. Москва, 1811 г. (изд. пятое).]

6) Выяснить, какие из чисел a, b, c, в равенстве $ab = c$, оказываются прямо пропорциональными и какие обратно пропорциональными, если 1) a сохраняет постоянное значение, 2) b сохраняет постоянное значение, 3) c сохраняет постоянное значение, а остальные величины меняются.

7) Выяснить, какие из чисел a, b, q, в равенстве $a:b=q$, оказываются прямо-пропорциональными и какие обратно-пропорциональными, если одна из букв сохраняет постоянное значение, а значения остальных меняются.

8) С капитала в a рублей при определенной процентной таксе получается b рублей процентных денег за некоторый промежуток времени. Сколько процентных денег при тех же условиях даст капитал в c рублей? Решить задачу в общем виде и вычислить результат, полагая

	a	b	c
1)	500	25	3750
2)	2375	23,75	6000
3)	325	13	1625.

9) Число рублей процентных денег с капитала в k рублей, отданного в рост по $p\%$ (простых) на n лет, выражается формулой

$$z=\frac{k\cdot p\cdot n}{100}.$$

Пользуясь этой формулой, составить выражения каждой из величин k, p и n, считая остальные данными, и указать в каждой из формул, каким величинам k, p и n прямо-пропорциональны и каким обратно-пропорциональны.

10) Некто имеет два капитала, один из которых помещен на $1^3/_4$ года по $5^1/_2\%$, а другой на 1 г. 10 м. по $5^1/_4\%$. Оба принесли в указанное время одинаковую прибыль. В каком отношении находятся капиталы?

11) Некоторый капитал, будучи отдан по $4{,}6\%$, в некоторый промежуток времени принес 414 р. прибыли; равный ему капитал, будучи отдан по $5^1/_2\%$, в другой промежуток времени принес 396 р. процентных денег. В каком отношении находятся времена обращения капиталов?

12) Два капитала A_1 и A_2 находятся одинаковое время в обороте. A_1 при $p_1\%$ дает c_1 рублей процентных денег; A_2 при $p_2\%$ за тот же промежуток времени дает процентных денег c_2 рублей. Как относятся а) капиталы при данных p_1, c_1, p_2, c_2? б) процентные деньги (даны A_1 и A_2, p_1 и p_2), в) процентные таксы (даны A_1 и A_2, c_1 и c_2)?

13) Один капитал A_1 приносит в n_1 лет c_1 рублей процентных денег; другой капитал A_2 при той же процентной таксе в n_2 лет приносит c_2 рублей процентных денег. В каком отношении находятся: а) капиталы, б) времена обращения, в) процентные деньги?

14) Капитал A_1 находится в обороте N_1 лет по $p_1\%$, другой капитал A_2 находится в обороте N_2 лет по $p_2\%$. Оба приносят одну и ту же прибыль. Как относятся между собой: а) капиталы, б) времена обращения, в) процентные таксы?

15) **Когда пуд муки продается по 85 коп., тогда пятикопеечные хлебы бывают весом в 1 фунт 44 зол.; а если пуд муки продаваться будет по 1 рублю 20 коп., то какого веса должны быть те хлебы?** ***(Войтяховский).***

Сколько должен весить пятикопеечный хлеб в настоящее время (по расчету Войтяховского), если пуд муки стоит 2 руб. 55 коп.?

573. 1) Большие стороны двух равновеликих прямоугольников относятся как 57 : 76. Как относятся меньшие стороны?

2) Отрезок длиною в 80 сантиметров внутренним образом разделен в отношении a) 11 : 5, b) 12 : 13, c) 5 : 7, d) 7 : 8, e) $m : n$. Как велика каждая из частей?

Разделить в том же отношении отрезок a.

3) Отрезок длиною в 1 метр разделить пропорционально числам: a) 3 : 8 : 9, b) 5 : 6 : 13, c) $u : v : w$.

4) Длина тени, отбрасываемой вертикальным шестом высотою в h метров, равна a метров; длина тени, отбрасываемой деревом, равна b метров. Определить высоту дерева, если длина тени прямо пропорциональна высоте предмета, бросающего тень.

5) Парижская башня Эйфеля, имеющая высоту $h = 300$ метров, на рисунке изображена высотой в 30 сантиметров; на том же рисунке пирамида Хеопса (в Египте) имеет высоту 4,5 сантиметра. Вычислить по этим данным действительную высоту пирамиды Хеопса и указать, в каком масштабе выполнен рисунок.

6) Какой высоты на рисунке предыдущей задачи должен оказаться Казбек, если его действительная высота равна 5000 *м*?

7) Давление измеряется силой (выраженной в весовых единицах), приходящейся на квадратную единицу поверхности. Написать формулу давления, получаемого при распределении нагрузки в P килограммов по поверхности в S *см*². Указать, какой пропорциональностью связано давление с величинами P и S. Для вычислений: а) $P = 200$ *кг*, $S = 100$ *см*²; б) $P = 275$ *кг*, $S = 25$ *см*².

8) При съемке плана участка земли расстояние от точки A до точки B, равное 14 *км*, изображено отрезком в 3 *см* длины. Отрезком какой длины следует изобразить на плане расстояние между точками C и D, равное 11,2 *км*.

9) Прямоугольный участок земли изображен на плане в масштабе 1 : 500. Чему равна площадь участка, если большая сторона прямоугольника $= 25$ *см*, а отношение сторон равно $\frac{3}{5}$?

10) Прямоугольный участок земли изображен на плане в масштабе 1 : 2500. Чему равна площадь участка, если диагональ прямоугольника на плане равна 2 *см*, а сторона—1,6?

11) Если сделать два маятника различной длины и заставить их качаться, то оказывается, что длины маятников относятся, как квадраты чисел, выражающих в одинаковых единицах времени (секундах) периоды их колебаний (промежутки, в которые маятник проходит через одну и ту же точку в том же направлении). Длина секундного (т.-е. маятника, совершающего полное колебание в течение одной секунды) маятника равна ∞ 0,97 метра. Какой длины следует сделать маятник, чтобы он делал в секунду пять полных (взад и вперед) качаний?

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ.

ШЕСТАЯ ГЛАВА.

Уравнения первой степени.

§ 1. Уравнения первой степени с одним неизвестным.

574. 1) $x + 3 = 7$; 2) $x - 3 = 8$;
3) $4 = 9 - x$; 4) $5x - 3 = 17$;
5) $2x + 7 = 13$; 6) $1 = 7 - 6x$;
7) $z + 7 = 9$; 8) $z - 9 = 2$;
9) $3 + y = 11$; 10) $20 - y = 13$;
11) $9x = 27$; 12) $7z = 63$;
13) $7x = 21$; 14) $18x = 12$;
15) $6y = 12$; 16) $5x + 7x = 36$;
17) $5x + 36 - 20x = 16$; 18) $18x - 3 - 15x + 2 = 2$;
19) $75 - 3y + 6y = 150$; 20) $4z - 5 - 8z = -1$;
21) $2z + 11 = z + 18$; 22) $14u + 12 = 100 - 30u$;
23) $10x - 73 = 2x - 3$; 24) $15z + 5 = 30z - 40$;
25) $32x - 21 = 20x + 15$; 26) $86 - 3u = 126 - 18u$;
27) $12x - 74 = 115 - 15x$; 28) $3x + 7x - 25 = 6x + 15$;
29) $7z - 38 = 2z + 12$; 30) $7z - 32 - 5z = -8$;
31) $19 - x = 100 - 10x$; 32) $5x + 2 + x = 20$;
33) $7 = 7 - 3x + x$; 34) $18 + 8x = 27 + 5x$;
35) $31 - 7x = 41 - 8x$; 36) $7x - 7 = 17 - x$;
37) $5x - 16 = 19 - 2x$; 38) $31 = 111 - x - 7x$;
39) $9x + 22 - 2x = 100 - 11x - 42$;
40) $30x + 39 - 35x = 47 - 20x - 8$;
41) $8x - 7 + x = 9x - 3 - 4x$;
42) $2x - 10 + 8x = 3x - 20 + 6x - 2$;
43) $24y + 5 + y = 13y + 10y + 7$;
44) $7x - 6 = 8x - 9 - 4x + 5$;

45) $0 = 14 + x - 8x - 3x - 6x + x$;
46) $9x + 12 - 6x - 13 + 2x = 8$;
47) $9x = 7x + 15 + 15x + 8 - 10$;
48) $25 + 6x + 13 - 8x = 43 - 4x + 7$;
49) $3x + 42 + 7x + 63 = 15x + 10$;
50) $3z + 6 - 19 + 6z = 5z + 61 - 27z - 12$;
51) $5y - 10 - 66 + 6y = 6y - 33 - 2y + 6$;
52) $7u - 30 - 4u + 10 = u + 100 - 6u$;
53) $9x + 13 - 12x - 17 = 6x + 23 - 3x - 29$;
54) $5x + 15 - 14x + 200 = 4x - 6$;
55) $25 + 5x - 17 + 7x = 200 - 125x - 50 - 5x$;
56) $12y + 56 - 5y + 60 = 3y + 100 - 20y + 8y$;
57) $4y + 100 - 2y + 50 + y - 225 = 0$;
58) $97y + 123 - 48y - 219 - 25y + 24 - 28y = 0$;
59) $9x - 27 - 8 - 3x + 21 = 0$;
60) $5x + 30 - 3x + 24 + 14x - 35 - 3x - 6 = 0$;
61) $3x + 12 - 8x - 16 - 9x - 24 = 0$;
62) $2x - 9 + 8x + 10 = 15 + 5x - 7$;
63) $7x - 6 + 5x - 4 + 3x - 2 + x = -4$;
64) $-8 = 7 - 6x - 11 - 4x - 5 - 2x + 1$;
65) $12x - 10 + 8x - 6 + 4x - 2 = 0$;
66) $x - 3 + 6x - 9 + 12x - 15 = x$;
67) $3x + 2 + 5x + 3 + 7x + 9 = x$;
68) $7 - 5x + 10 + 8x - 7 + 3x = x + 10$;
69) $6 + 12x - 9 - 8x + 10 + x = 0$;
70) $100 + 2x - 9x + 15 = 10 - 7x + 5 - 11x + 100$;
71) $13 + 12x + 11 - 10x = 10x - 11 - 12x - 13$;
72) $16y + 5 - 9y + 64 - 2y = 7y + 30 + 10y + 39$;
73) $5x + 4 - 4x + 5 + x = 1 + x + 3 + x + 5$;
74) $20x - 1 - 10x - 3 - 5x - 5 = x - 3 + 3x - 3 + x - 3$;
75) $x + 9 + 2x + 7 + 3x + 5 + 4x + 3 = 3 - x + 5 - 2x +$
$+ 7 - 3x + 9 - 4x$.

575. 1) $\frac{x}{7} = 4$; 2) $\frac{1}{2x} = 7$;

3) $\frac{x}{5} + 8 = 13$; 4) $\frac{x}{3} - 5 = 16$;

5) $x : 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$; 6) $\frac{x}{-3\frac{1}{3}} = 2\frac{1}{10}$;

7) $x : 0{,}925 = 120$; 8) $x : 0{,}175 = 4{,}44$;

9) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 5$; 10) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}x$;

11) $28{,}3 - 8x = 2{,}7$; 12) $1\frac{1}{2} + x = 2\frac{2}{3}$;

13) $3y - 2,8 = 1,7$; 14) $3\frac{3}{4} = y + 1\frac{1}{12}$;
15) $z + 0,1 = 1$; 16) $0,2 - z = 0,09$;
17) $3\frac{11}{17} + 1\frac{2}{5}x = 4\frac{11}{17}$; 18) $59\frac{2}{5} - 2\frac{4}{5}x = 3\frac{2}{5}$;
19) $0,75 - 0,7x = 0,54$; 20) $1,6y - 2,5 = 3,1 + 0,6y$;
21) $32,41 + 7,5y = 47,41$;
22) $15,3 + 12,5x = 109,4 - 1,7x$;
23) $8\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z = 5\frac{1}{2}$;
24) $0,9y - 1,5 + 1,2 = 1,9 - 0,1y$;
25) $0,3z + 8 = 9 - 0,7z$;
26) $0,8x + 3 + 1,7x = 9 + 1,5x$;
27) $3\frac{1}{6} - 5\frac{1}{2}x = 3\frac{3}{4}x - 15\frac{1}{3}$; 28) $30 - 0,6x = 14 + 0,4x$;
29) $73,4 - 25,7x = 15,3x - 8,6$;
30) $13\frac{2}{5} + 2\frac{1}{4}x = 10\frac{3}{7}x - 19\frac{11}{35}$; 31) $3x + 19\frac{7}{11} = 59\frac{7}{11} - 5\frac{2}{3}x$;
32) $\frac{11}{15}x + 2\frac{7}{9} + \frac{2}{135}x = 74 - 4x$;
33) $2x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}x + 2$;
34) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} = 11$;
35) $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$;
36) $x - \frac{3x}{2} + 9 = \frac{5x}{3} + 4 + \frac{5x}{6} - \frac{6x}{5} + \frac{1}{5}$;
37) $x = 2\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{5}x + 1$;
38) $2\frac{2}{3}x + \frac{x}{3} = 2\frac{1}{2} + x - 4\frac{1}{5}x + 5\frac{1}{4}$;
39) $\frac{1}{4}x + \frac{5}{6}x = x + 1 + \frac{1}{18}x - 2\frac{1}{6}x + 1\frac{2}{3}x + 18$;
40) $5x - 2 = \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x + \frac{9}{10}x + \frac{11}{12}x + \frac{14}{15}x$;
41) $x = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}x$;
42) $2x - 3 = 2,25x - 5 - 0,4x + 2,6$;
43) $44x - 32 = 84 + 31,5x + 4,2x + 16,8$;
44) $0 = 0,75x - 2x - 0,6x + 0,5x - 9$;
45) $0,617x - 0,617 = 12,34 - 1,234x$;
46) $44,44x = 2222 + 222,2 + 22,22 + 2,222$;

47) $2,5x + 12,5 = 1,5x + 64,64 - 6,7x$;
48) $19,1 - 2,4x - 10,4 = 2,4x + 3,9$;
49) $9,4 - 0,6y + 8,1 - 0,4y = 2 + 0,5y - 7$;
50) $0,8x + 0,9 - 0,3x = 0,7 - 0,6x + 1,3$;
51) $0,23z + 4,7 - 0,19z - 3,4 = 0,18z + 5,7 - 0,25z$;
52) $19x + 27 = \frac{2}{5}x + 60\frac{1}{5} + 2x$.

576. 1) $x - (5 - x) = 3)$; 2) $2(x - 3) = x - 3$;
3) $5(9x - 10) = 40$; 4) $9(2x + 3) = 5(5x - 10)$;
5) $6(5y - 30) = 5(y - 1)$; 6) $12(2z + 3) = 11(5z - 8)$;
7) $17(5y + 8) = 3(4 - 13y)$; 8) $6(2x + 7) = 15(x + 2)$;
9) $3x + 5(4x + 3) = 10x + 2(7x - 2)$;
10) $12z - 7(z + 4) = 26 - 4z$; 11) $15x - 3(x - 4) = 0$;
12) $0 = 3(9 - 2x) - 5(2x - 9)$;
13) $7(4x - 3) + 3(7 - 8x) = 1$;
14) $8(3x - 2) - 7x - 5(12 - 3x) = 13x$;
15) $7(3x - 6) + 5(x - 3) + 4(17 - x) = 11$;
16) $6x - 7(11 - x) + 11 = 4x - 3(20 - x)$;
17) $(x - 5)(x + 3) - (3x - 4) = (x - 1)^2$.
18) $(x - 3)(x + 2) - 3(2x - 3) = (x - 6)^2 + 2$;
19) $(7x - 5)(7 - 3x) - (6 - 5x)(3x - 7) = (3x - 7)\cdot(7 - 2x)$.
20) $(x - 3)(2x - 5) - 4(x - 2) = 2(x - 1)^2 - 12$;
21) $(x - 6)^2 + (x - 4)^2 + 9 = (6x - 2)(11x - 1) - (8x - 3)^2$;
22) $(2x + 1)^2 + (3x + 1)^2 + (8x - 3)^2 = (7x - 2)(11x - 1)\cdot$
23) $(8 - 3x)^2 + (5 - 4x)^2 - 6 = (9 - 5x)^2 + 20x - 4$;
24) $(4x - 1)(6x + 17) - 58 = (3x - 2)(8x + 3)$;
25) $(4y + 1)(3y - 2) - (6y - 1)(2y - 3) = 25$;
26) $4(2z + 3)(3z + 1) - 12(z^2 + 2z + 1) = (4z + 5)(3z + 1)$;
27) $(x - 3)(8 - x) = (x - 6)(2 - x)$;
28) $(z - 7)(z - 5) - (z - 8)(z - 3) = 0$;
29) $(y - 5)(y + 1) - (y - 2)(y - 3) = 0$;
30) $(p + 1)(p + 2) = (p - 1)^2 + 11$;
31) $3(y + 2)^2 + 2(y + 3)^2 = 5(y - 1)^2 + 7(6y - 1)$;
32) $(x + 5)^2 - (x - 6)^2 = 2(x + 7)^2 - 2x^2 + 2(3x - 72,5)$;
33) $(x + 8)^2 + (x - 5)^2 = (x - 4)^2 + (x - 6)^2 + 93$;
34) $(z + 5)^2 - (z - 9)^2 = 140$;
35) $(x - 3)^3 + 101 = (x - 4)^3 + 3(x + 1)^2$;
36) $(y - 2)^3 + (y - 3)^3 + (y - 4)^3 = 3(y - 2)(y - 3)(y - 4) + 18$.

577. 1) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$;
2) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} = \left(5x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\left(5x + 3\frac{1}{2}\right)$;
3) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + 3x$;

4) $(x+0{,}1)^2+(x-0{,}1)^2-x^2=(x-0{,}1)(x+0{,}1)+x;$

5) $5=3x+\frac{2}{5}(x+3)-\frac{1}{5}(11x-37);$

6) $\frac{2}{3}(3x-5)-1=\frac{2}{3}(11-2x)+x;$

7) $1-3\left(7\frac{1}{2}+x\right)+7\left(\frac{2}{3}x-\frac{5}{2}\right)+\frac{8}{3}x=0;$

8) $0=2x-3\left(5+\frac{3}{4}x\right)+\frac{2}{3}(4-x)-\frac{1}{4}(3x-16);$

9) $3-\frac{3-7x}{10}+\frac{x+1}{2}=4-\frac{7-3x}{5};$

10) $\frac{4x-1}{3}-4=1-\frac{x-4}{6}+\frac{3x+5}{4}-4\frac{1}{4};$

11) $\frac{5x-6}{10}-\frac{9-10x}{14}=\frac{3x-4}{5}-\frac{3-4x}{7};$

12) $\frac{7x-1}{25}-\frac{x+3}{20}=\frac{4x+9}{10}-\frac{x+5}{5};$

13) $\frac{x-3}{7}-\frac{x-25}{5}=7-\frac{2+x}{4};$

14) $\frac{7x-2}{3}-\frac{4}{5}(x+3)+6=\frac{3(x+2)}{2};$

15) $11-\left(\frac{3x-1}{4}+\frac{2x+1}{3}\right)=10-\left(\frac{2x-5}{3}+\frac{7x-1}{8}\right);$

16) $\frac{3x+3}{2}-\left(\frac{x+1}{6}+3\right)=\frac{5x+2}{3}-\left(\frac{3x-1}{2}-3\right);$

17) $3x-\frac{2x+5}{7}=16-\frac{7x+19}{2}-\frac{2x+1}{3};$

18) $\frac{2x-1}{2}+\frac{3x-2}{4}+\frac{5x-4}{8}=1-\frac{7x-6}{8};$

19) $\frac{13x+5}{2}-\frac{16x+5}{3}=\frac{11x+4}{3}-\frac{5x-1}{2}-x;$

20) $\frac{5x+4}{7}-2=\frac{3x-7}{4};$ 21) $\frac{x+2}{9}-1=\frac{2x+1}{18}-\frac{x}{6};$

22) $\left(\frac{2}{3}x+10\right)\frac{2}{7}-4=0;$ 23) $\frac{x-2}{6}-\frac{x+7}{15}=\frac{x}{4}-2;$

24) $\frac{7}{12}x+\frac{2-x}{4}-1=\frac{5x-6}{9}-\frac{1}{2};$

25) $x=\frac{x-1}{3}+\frac{2x-5}{5}-\frac{x+8}{6}+7;$

26) $\frac{x}{6}-\frac{x}{8}=\frac{x}{3}-\frac{x}{12}-10;$

27) $x-\frac{8-x}{4}+3{,}25=\frac{x-7}{8}+10;$

28) $\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}-\frac{x-4}{4}=\frac{x+4}{6};$

29) $\frac{5x-2}{3}-\frac{3x-1}{2}+2=2x;$

30) $\frac{x}{8}-\frac{x-2}{6}=\frac{5x-4}{12}-\frac{x+1}{3}-\frac{3x}{4}+6;$

31) $\frac{5x-14}{25}-\frac{3x-5}{20}\cdot x-9\frac{3}{4}=0.$

32) $(x-0{,}4)^2-(x+0{,}4)(x-0{,}4)=0{,}1;$

33) $(x+0{,}1)(x+0{,}01)-(x-0{,}1)(x-0{,}01)=0{,}22;$

34) $(x+0{,}2)(x-0{,}02)-(x-0{,}2)(x+0{,}02)=36;$

35) $(0{,}3x-0{,}03)(0{,}5x+1)=(0{,}5x-0{,}05)(0{,}3x+2).$

578. 1) $\frac{5}{x}=9;$ 2) $\frac{5}{6}=\frac{3}{4}:x;$ 3) $\frac{12}{x}+5=8;$

4) $\frac{15}{x}+7{,}5=15;$ 5) $15:(-x)=3;$ 6) $18:(-x)+8=0;$

7) $\frac{9}{x}+\frac{1}{2}=\frac{10}{x}+\frac{4}{9};$ 8) $\frac{7}{x}+\frac{1}{3}=\frac{23-x}{3x}+\frac{7}{12}-\frac{1}{4x};$

9) $\frac{7}{3}+\frac{13}{5x}=\frac{13x-24}{3x}-\frac{37}{20}+\frac{10}{x};$ 10) $\frac{2}{x+5}=2;$ 11) $\frac{10}{x-2}=2.$

12) $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1};$ 13) $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x-2};$

14) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{7(x+1)}=\frac{2}{x+9};$ 15) $\frac{1}{2x+5}=\frac{1}{8x+3};$

16) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-5}{x-3};$ 17) $\frac{x}{x-5}=\frac{x-2}{x-6};$

18) $\frac{x+3}{3x-1}=\frac{4}{7};$ 19) $\frac{z+3}{z-3}=\frac{5}{2};$

20) $\frac{7y+8}{7y+2}=\frac{13}{12};$ 21) $\frac{2x+7}{3(x+2)}=\frac{5}{6};$

22) $\frac{10x+8}{3}=\frac{4-26x}{17};$ 23) $\frac{10}{x+8}=\frac{3}{x-6};$

24) $\frac{5}{17-4x}=\frac{2}{3x-7};$ 25) $\frac{-3}{1\frac{1}{2}-x}=\frac{8}{x-\frac{2}{3}};$

26) $\frac{12}{5y-8}=\frac{11}{2y+3};$ 27) $\frac{z+2}{5z-4}=\frac{1}{3};$

28) $\frac{p-\frac{1}{2}}{p-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4};$ 29) $\frac{3x+1}{4}=\frac{3(1-2x)}{2};$

30) $\frac{5x^2-3x+46}{2x^2+10x-4}=\frac{5}{2};$ 31) $\frac{6x^2+25x-35}{2x^2-5x-25}=\frac{15}{5};$

32) $\frac{8y^2-3y+4}{12y^2+5y-13}=\frac{2}{3};$ 33) $\frac{7y^2-3y-15}{9y^2+y-25}=\frac{3}{5};$

34) $\frac{6z^2-2z-20}{4z^2+18z+20}=\frac{3}{2};$ 35) $\frac{7x^2+x-1}{8x^2-1}=\frac{7}{8}.$

579. 1) $\frac{7x+26}{x+21}-\frac{17+4x}{21}=\frac{10-x}{3}+\frac{13+x}{7}$;

2) $\frac{1-x}{3}+\frac{3-x}{5}=\frac{6x+5}{8x-15}-\frac{1+8x}{15}$;

3) $\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+3)}=\frac{5}{x+3}+\frac{2}{2(x+3)}$;

4) $3-\frac{1}{6(2x-5)}=\frac{1}{2(2x-5)}+\frac{7}{3(2x-5)}$;

5) $1=\frac{2x+1}{3x-15}-\frac{x-11}{2x-10}$;

6) $\frac{5x-7}{4x+4}+\frac{x+3}{3x+3}=1$;

7) $3-\frac{3x-5}{5x-5}+\frac{5x-1}{7x-7}+\frac{x-4}{x-1}=2$;

8) $\frac{3x-5}{x+2}+\frac{7x-10}{x+1}+\frac{x+99}{x^2+3x+2}=10$;

9) $\frac{3x-5}{3(x-1)}-\frac{2x-7}{2(x-1)}=\frac{19x-3}{6(x^2-1)}$;

10) $\frac{5(2x^2-1)}{2x+3}-\frac{7x+2}{2x-3}=5x-11$;

11) $\frac{5(2x^2+3)}{2x-1}-\frac{7x-12}{2x-7}=5x-1$;

12) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}=\frac{20}{4x-7}=0$;

13) $\frac{9}{x-5}-\frac{5}{x-9}+\frac{28}{45-7x}=0$;

14) $\frac{13}{x-8}-\frac{15}{3x-26}=\frac{8}{x-13}$;

15) $\frac{2}{2x-5}-\frac{9}{3x-5}+\frac{4}{2x-15}=0$;

16) $\frac{x+7}{x+1}+\frac{x+9}{x+2}=\frac{4(x+8)}{2x+3}$;

17) $\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-5}$;

18) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}$;

19) $\frac{1}{x+4}+\frac{1}{8-x}=\frac{1}{7-x}+\frac{1}{5+x}$;

20) $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x-11}$;

21) $\frac{7}{x-9}+\frac{2}{x-4}=\frac{7}{x-7}+\frac{2}{x-11}$;

22) $\frac{3}{x+3}-\frac{3}{x+8}=\frac{5}{x-8}-\frac{5}{x-5}$;

23) $\dfrac{x-\dfrac{2}{3}}{1\dfrac{1}{6}}-\dfrac{32}{35}=\dfrac{1}{5-\dfrac{5x}{x+1}}+\dfrac{x^2-1}{7x+7}$;

24) $\dfrac{\dfrac{3}{4}x-7}{5}-\dfrac{\dfrac{3}{2}x-4}{10}=\dfrac{3+\dfrac{x-20}{8}}{2}-\dfrac{\dfrac{x}{8}-2}{5}$;

25) $\dfrac{2x-\dfrac{5x-6}{9}}{2}-\dfrac{\dfrac{4x-3}{5}-6}{3}=\dfrac{3x-16}{10}+x-6$;

26) $\dfrac{8}{x+1}-\dfrac{12}{x-1}=-\dfrac{4}{x-3}$;

27) $\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{21}{1+x}=\dfrac{33}{1-x^2}$;

28) $\dfrac{2}{2x-5}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x-2}$;

29) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-5}$;

30) $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-3}{x-4}-\dfrac{x-4}{x-5}$;

31) $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-8}{x-9}-\dfrac{x-9}{x-10}$;

32) $\dfrac{5-2x}{1-x}-\dfrac{2x-14}{x+1}=\dfrac{20}{x^2-1}$;

33) $\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{17x-26}{x^2-8x+15}=\dfrac{10}{x-5}$;

34) $\dfrac{10}{z+4}-\dfrac{5}{z-6}=\dfrac{4z+2}{z^2-2z-24}$;

35) $\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{11}{x^2+x-20}-\dfrac{1}{x+5}$;

36) $\dfrac{5}{2x+3}=\dfrac{16x+14}{14x^2+11x-15}+\dfrac{7}{7x-5}$;

37) $\dfrac{11}{2y+7}+\dfrac{7}{y-3}=\dfrac{24y+28}{2y^2+y-21}$;

38) $\dfrac{23}{5z+4}-\dfrac{12}{3z+6}=\dfrac{20z+57}{15z^2+42z+24}$;

39) $\dfrac{15}{2y+1}+\dfrac{17}{3y+2}=\dfrac{175y-49}{6y^2+7y+2}$;

40) $\dfrac{1+x}{2+3x}-\dfrac{1-8x}{1+12x}=1$; 41) $\dfrac{7x+25}{3x+5}-\dfrac{2x+15}{6x-5}=2$;

42) $\dfrac{5y}{y+8}-\dfrac{3y-5}{y-3}=2$; 43) $\dfrac{15y+106}{3y+18}-2\dfrac{2}{3}=\dfrac{21y+60}{9y+16}$;

44) $\dfrac{z-10}{z-7}+\dfrac{z+3}{z-3}=2$;

45) $\frac{24x+51}{4x+7}-10=-\frac{56x-25}{14x-6}$;

46) $\frac{x-3}{x+3}=2-\frac{3x-1}{3x+1}$;

47) $\frac{6,5x+68}{0,25x+3,7}=17+\frac{72x-36,3}{8x+51,9}$;

48) $\frac{8x-5}{2x+5}+\frac{3x+7}{3x+2}=5$;

49) $8,3-\frac{13,44x+32,11}{2,4x+3,9}=\frac{13,5x+2}{58,5x-80}$;

50) $\frac{2x-9}{2x-5}+\frac{3x}{3x-2}=2$;

51) $\frac{3x+1}{5x+3}-\frac{7x+3}{3-5x}=\frac{(10x-2)(5x+6)}{25x^2-9}$;

52) $\frac{3x+16}{2x+7}-3=-\frac{12x-5}{8x+13}$;

53) $\frac{6z+5}{4z+3}-\frac{3z-7}{4z-3}=\frac{12z^2+30z-21}{16z^2-9}$;

54) $\frac{2x^2-3x+5}{7x^2-4x-2}=\frac{2}{7}$; 55) $\frac{2x^2-14x+9}{3x^2-14x+24}=\frac{3}{8}$;

56) $\frac{7}{z+3}+\frac{3}{z-4}=\frac{10}{z-4}$;

57) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$;

58) $\frac{y-1}{y-2}-\frac{y-2}{y-3}=\frac{y-4}{y-5}-\frac{y-5}{y-6}$;

59) $\frac{2}{2x-5}=\frac{3}{2x+5}+\frac{3x+5}{4x^2-25}$;

60) $\frac{5x-6}{25x^2-4}+\frac{18-5x}{30x^2-12x}=\frac{4x-5}{20x^2+8x}-\frac{1}{6x}$;

61) $\frac{1}{3-x}+\frac{2}{(1-2x)(1-x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2(5-x)}{(3-x)(1-x)}$;

62) $\frac{2}{x-6}+\frac{1}{2x-3}-\frac{7-3x}{7x-x^2-6}=\frac{13-2x}{15x-2x^2-18}+\frac{3x+1}{5x-2x^2-3}$;

63) $\frac{1}{3y-2}+\frac{7}{3-2y}-\frac{y+8}{3y^2-8y+4}=\frac{4}{2-y}+\frac{y+12}{2y^2-7y+6}$.

580. 1) $y+a=b$; 2) $x-a=7$;
3) $x+a-b=m$; 4) $a-x=b-8$;
5) $m-9+b=x-a+m-19$;
6) $ax+b=c$; 7) $a-bx=c$;
8) $a-mx+b=-c$; 9) $5x-a=3x+b$;
10) $3a+2x-4b=5x-b$; 11) $5mx+2a=7mx-2b$;
12) $5a-7b+6nx=3a-5b-2c+8nx$;
13) $3mx-7a-5b=mx+2b+7c-5mx$;

14) $a(x-b)=c;$ 15) $4(x-a)=3x+5b;$
16) $7(a-x)=6(b-x);$ 17) $3(4a-3x)=5(4b-x);$
18) $(a-1)x=b-x;$
19) $ab+(b+1)x=(a+x)b+a;$
20) $2(3a+10x)+7(a-x)=13(a+b);$
21) $3(2a-x)+5(3b-2x)=5(3a-2x)+3(2b-3x);$
22) $3(5x-7a)+7(3a-5b)+5(3b-7x)=0;$
23) $mx+nx=a;$ 24) $ax-b=cx-d;$
25) $a-bx=cx-d;$ 26) $ax-cx=ab+bc;$
27) $ax+x=m;$ 28) $ax+bx=m+x;$
29) $a-bx=cx-x;$ 30) $ax-bx-m(x-1)=m;$
31) $a(x-1)-b=x-a;$ 32) $ax=b(c-x)$
33) $(a+b)x=m-cx,$ 34) $(a-b)x=2a-(a+b)x,$
35) $(a-b)x-c=d-(b-c)x;$
36) $ab-(x-c)d=c(d+x);$
37) $a(b-x)+b(c-x)=b(a-x)+cx;$
38) $12ax-3b(x-a)=5a(2x+b);$
39) $(a+b)x+(a-b)x-ax=b+c;$
40) $(a+b)x-(a-b)x-bx=a+c;$
41) $(a-x)(b-x)=x^2;$ 42) $(a-x)(1-x)=x^2-1;$
43) $(a-x)(b+x)=a^2-x^2;$ 44) $(x-a)(x-b)=x^2-a^2;$
45) $(x-a)^2=(x-b)^2;$

46) $\frac{x}{a}=b;$ 47) $\frac{a}{x}=b;$ 48) $\frac{x}{a}-b=c;$

49) $a-\frac{x}{b}=c;$ 50) $\frac{a}{x}-b=c;$ 51) $a-\frac{b}{x}=c;$

52) $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}=c;$ 53) $x-\frac{x}{a}=b;$

54) $\frac{a}{x}-1=\frac{b}{x}-9;$ 55) $\frac{x-a}{a}+b=x-1;$

56) $\frac{a-bx}{c}+b=\frac{bc-x}{c};$ 57) $\frac{a-bx}{c}+x=\frac{cx-b}{c}.$

58) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c;$ 59) $\frac{ax}{b}-\frac{cx}{d}=m;$

60) $\frac{a-x}{b}=\frac{x-b}{a};$ 61) $\frac{a-bx}{b}=\frac{ax-b}{a};$

62) $\frac{x-a}{a}-m=\frac{x-b}{b}-n;$ 63) $a-\frac{b+x}{b}=b-\frac{a+x}{a};$

64) $\frac{x+a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{x-b}{a}+\frac{a}{b};$ 65) $\frac{x}{a}-b=\frac{x}{b}-a;$

66) $\frac{a+b}{x}-c=d-\frac{a-b}{x};$ 67) $a\left(m-\frac{x}{n}\right)=b\left(n-\frac{x}{m}\right);$

68) $\frac{a-x}{b}=\frac{b-x}{a};$ 69) $\frac{2(a-x)}{a+x}=\frac{a+x}{a-x}-1;$

70) $\frac{x}{a}-\frac{a}{2x}=\frac{2x+x}{2a}-\frac{a}{x}$;

71) $a^2-\frac{a}{x}+\frac{b^2}{ax}=\frac{a^2}{bx}-\frac{b}{x}+b^2$;

72) $\frac{x-d}{ef}-\frac{x+f}{de}=\frac{2(e-f)}{de}-\frac{x+e}{df}$;

73) $\frac{x-a}{b}+\frac{x+b}{a}=\frac{x-a-b}{b}-\frac{x+a+b}{a}+2$;

74) $\frac{x-a}{b}+\frac{bx}{a}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}+b$;

75) $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}$; 76) $\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{a}$; 77) $\frac{x+1}{x-1}=m$;

78) $\frac{ax+b}{ax-b}=\frac{m}{n}$; 79) $\frac{a+x}{b+2x}=1$; 80) $\frac{a(b+x)}{a-x}=b$;

81) $\frac{a}{a-x}=\frac{b}{b-x}$; 82) $\frac{a+x}{a-x}=\frac{a+b}{a-b}$;

83) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{a+b}{a-b}$; 84) $\frac{a+b}{c+x}=\frac{a-b}{c-x}$;

85) $\frac{a+bx}{a+b}=\frac{c+dx}{d+c}$; 86) $\frac{a+bx}{a-b}=\frac{c+dx}{c-d}$;

87) $\frac{a-x}{b-x}=\frac{a+x}{b+x}$; 88) $\frac{ax-2a}{ax-2b}=\frac{ax-2b}{ax+2a}$;

89) $\frac{a}{b+x}-m=n$; 90) $\frac{a}{b+x}-m=\frac{c}{b+x}-n$;

91) $\frac{a}{mx}+\frac{b}{nx}=c$. 92) $\frac{a-bm}{mx}-\frac{c-bn}{nx}=1$;

93) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=d$; 94) $\frac{ax}{b}+\frac{cx}{d}+\frac{fx}{g}=h$;

95) $\frac{a+b-x}{a-b-x}=\frac{a+b+x}{a-b+x}$;

96) $\frac{5b-6z-a}{2z-16a+10b}=\frac{15z+8a-7b}{51a-5z-14b}$;

97) $\frac{6x-7a-5b}{8x-5a+21b}=\frac{7a-3x+13b}{3b-4x-5a}$;

98) $\frac{5x-a-9b}{3x-2a-4b}=\frac{10x-11a+9b}{6x-8a+4b}$;

99) $\frac{3y+p+3q}{4y+2p-3q}=\frac{6y-2p+6q}{8y-2p+q}$;

100) $\frac{24y+15a-9b}{15y+8a-7b}=\frac{86a-8y-18b}{51a-5y-14b}$;

101) $\frac{x-a+b}{x-a-b}=\frac{a-b+2x}{2x}$;

102) $\frac{2a+b-5x}{3a-2b-4x}=\frac{4a-3b+5x}{6a-8b+4x}$;

103) $\frac{6a-bx}{2a}+\frac{9b-cx}{3b}+\frac{20c-ax}{5c}=10$;

104) $\frac{3b(x-a)}{5a}+\frac{x-b^2}{15b}+\frac{b(4a+cx)}{6a}=0$;

105) $\frac{ax}{b}-\frac{b-x}{2c}+\frac{a(b-x)}{3d}=a$;

106) $\frac{a-x}{a}+\frac{b-x}{b}+\frac{c-x}{c}=3$;

107) $\frac{a^2-bx}{a}-\frac{a(b-x)}{b}+\frac{b^2}{a}=a$;

108) $\frac{a+1}{x}:\frac{b-1}{x}=(a+x):(b-x)$;

109) $\frac{ax+b}{x}:\frac{a}{d}=\frac{b}{c}:\frac{x}{cx+d}$;

110) $\frac{a^2b-x}{a}+\frac{b^2c-x}{b}+\frac{ac^2-x}{c}=0$;

111) $\frac{1-ax}{bc}+\frac{1-bx}{ac}+\frac{1-cx}{ab}=0$;

112) $\frac{a-x}{bc}+\frac{b-x}{ac}+\frac{c-x}{ab}=0$;

113) $\frac{a-bx}{bc}+\frac{b-cx}{ac}+\frac{c-ax}{ab}=0$;

114) $\frac{a}{x+a}-\frac{b}{x+b}=\frac{a-b}{x-b}$;

115) $\frac{c}{a-x}+\frac{a}{c-x}=\frac{a+c}{b-x}$;

116) $\frac{a}{x-b^2}+\frac{b}{x-a^2}=\frac{a+b}{x+2ab}$;

117) $\frac{a}{x-b}+2=\frac{b}{b-x}$;

118) $\frac{m}{m-z}-\frac{b^2}{(m-z)c}=\frac{mc-b^2}{c}$;

119) $\frac{5p}{y-5p}+\frac{10q}{5p-y}=1$;

120) $\frac{x}{b(a-x)}+\frac{c}{d(x-a)}=\frac{ad-bc}{3abd}$;

121) $\frac{2}{z+a}+\frac{1}{z-a}=\frac{z}{z^2-a^2}$;

122) $\frac{ay+b}{cy+d}+\frac{cy+d}{ay+b}=\frac{a^2+c^2}{ac}$;

123) $\frac{m}{px-mq}-\frac{p}{mx-pq}=\frac{m^2-p^2}{mpx+q^2}$;

124) $\frac{b}{2a-bx}-\frac{a}{2b+ax}+\frac{2ab}{2+abx}=0$;

125) $\frac{a}{x}+2+\frac{b^2}{ax}=\frac{2b}{x}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$;

126) $\frac{1}{d}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{x}[ab(c+d)-cd(a+b)]$;

127) $\frac{1+x}{1+a}+\frac{1-x}{1-a}=\frac{2(1-x^2)}{1-a^2}$;

128) $\frac{x}{3m-2}-\frac{x}{3m+2}=\frac{4m}{9m^2-4}$;

129) $\frac{x+4b}{a+b}+\frac{3(x-2a)}{a-b}=1$; 130) $\frac{a^2x}{b-c}-cd=bx+ac$;

131) $\frac{1}{ab-ax}-\frac{1}{ac-ax}=\frac{1}{bc-bx}+\frac{1}{b^2-bx}$;

132) $\frac{x}{b(a+b)}-\frac{x}{(a+b)a}=\frac{a-b}{ab}$; 133) $\frac{a(b^2+x^2)}{bx}=ac+\frac{ax}{b}$;

134) $\frac{x}{a-b}+b=a-\frac{x}{b^2-a^2}-1+\frac{2b}{a+b}$;

135) $\frac{a}{a+x}-\frac{b}{b+x}=\frac{a-b}{x-b}+\frac{x(b-a)(b+2a)}{(a+x)(b+x)(x-b)}$.

Смешанные задачи.

581. 1) Решить следующие уравнения, а затем в уравнения и в выражения корней вместо n подставить последовательно 1, 2, 3....10:

а) $nx+3x=n^2+6n+9$,
б) $nx=7x+n^2-14n+49$,
в) $nx=n^2+2n+1-x$.

2) Решить следующие уравнения, а затем в уравнения и в выражения корней подставить вместо a и b числа от 1 до 3:

а) $ax-b=a-b$,
б) $a^2+bx=b^2-ax$,
в) $ax+b^2=bx+a^2$.

3) Определить из следующих уравнений 1) a, 2) b:

а) $a+b=c$, б) $a-b=c$,
в) $a\cdot b=c$, г) $\frac{a}{b}=c$.

4) Решить следующие уравнения относительно 1) p, 2) q, 3) r:

а) $p-q+r+s=0$, б) $\frac{b}{q}+r=s$,
в) $pq-r=s$, г) $p(q-r)=s$.

5) Из следующих уравнений определить y:

а) $a+y=x$, б) $m+ny=x$,
в) $\frac{m+ny}{r}=x$, г) $\frac{a+by}{c+dy}=x$.

6) Определить коэффициенты при x, на месте которых поставлены точки:

$$\text{а) } 5x - 5 = \dots x - 3,$$

если $x = 2$;

$$\text{б) } \frac{1}{2}x + 3 = \dots x + 2,$$

если $x = 6$;

$$\text{в) } \dots x + 3 = 2x + 5.$$

если $x = 1$.

7) Чему равен коэффициент a в уравнении:

1) $ax - 5 = 4x - 3$, если $x = 1$?

2) $\frac{x}{a} - \frac{1}{5} = \frac{x}{16} - \frac{1}{20}$, если $x = \frac{4}{5}$?

3) $\frac{a}{x} - \frac{1}{5} = x - \frac{1}{5}$;
а) если $x = 1$?
б) если $x = -\frac{3}{5}$?

4) $ax - 5 = 4 - 9x$, если $x = 1$?

8) Среднее гармоническое m двух чисел a и b — выражается формулой: $m = \frac{2ab}{a+b}$. Выразить a через b и m.

9) Если g есть значение стороны треугольника, а h — соответствующей ей высоты, выраженные в каких-либо единицах длины, то площадь f, выраженная в соответственных квадратных единицах, определяется по формуле: $f = \frac{g \cdot h}{2}$. Выразить 1) g, 2) h через остальные величины.

10) Если r есть числовое значение радиуса круга в каких-либо единицах длины, то длина окружности в тех же единицах выражается формулой $C = 2\pi r$. Выразить r через C ($\pi = 3{,}14159\dots$).

11) На рычаг, в расстояниях a_1 и a_2 от точки опоры, действуют параллельные силы k_1 и k_2, при чем имеет место равенство: $a_1 k_1 = a_2 k_2$. Выразить 1) k_1, 2) a_2 через другие величины.

12) Если r означает сумму (в рублях), которую следует уплатить по счету, и со счета делается скидка в $p\%$, то подлежащая уплате сумма выражается формулой: $b = r - \frac{rp}{100}$. Выразить 1) r, 2) p через остальные величины.

13) Капитал k рублей, отданный в рост по $p\%$, обращается через год в $K = k(1 + p)$ рублей. Выразить 1) k, 2) p через остальные величины.

14) Если с суммы в a рублей производится учет за t дней до срока по $p\%$, то уплачиваемая сумма определяется по формуле (в рублях) $b = a - \frac{apt}{36000}$. Выразить 1) a, 2) p, 3) t через остальные величины.

15) Если железную полосу, длина которой при 0° равна l_0, нагреть до $t°$, то длина ее будет $l_1 = l_0(1 + at)$, где $a = 0{,}000012$. Определить t, если даны l_1 и l_0.

16) Если m_1 граммов воды при температуре $t_1°$ смешать с m_2 граммами воды при температуре $t_2°$, то температура полученной таким образом смеси определяется по формуле $t = \frac{m_1t_1 + m_2t_2}{m_1 + m_2}$. Выразить 1) m_1, 2) t_1, 3) m_2, 4) t_2 через остальные величины.

§ 2. Задачи на составление уравнений первой степени с одним неизвестным.

582. В следующих задачах следует: 1) составить уравнение, 2) решить его, 3) проверить справедливость полученного результата.

1) Сколько следует прибавить к 0,738, чтобы получить 0,96?

2) К какому числу следует прибавить $\frac{3}{5}$, чтобы получить $\frac{5}{3}$?

3) Сколько следует вычесть из $3\frac{1}{3}$, чтобы получить $2\frac{1}{2}$?

4) Из какого числа следует вычесть $5\frac{1}{2}$, чтобы получить 5,5?

5) На сколько следует разделить 33,033, чтобы получить 231?

6) На какое число следует умножить $3\frac{1}{3}$, чтобы получить $7\frac{1}{7}$?

7) На какое число следует разделить $3\frac{1}{8}$, чтобы получить $2\frac{1}{2}$?

8) 10-я доля какого числа равна $5\frac{1}{2}$?

9) К какому числу следует прибавить b, чтобы получить a?

10) Какое число следует увеличить на m, чтобы в результате получить 0?

11) На сколько следует уменьшить a, чтобы получить b?

12) Во сколько раз следует уменьшить m, чтобы получить n?

13) Какое число следует вычесть из a, чтобы получить в остатке d?

14) m-кратным какого числа является число a?

15) Найти число, которое в k раз больше a.

16) n-ой долей какого числа является число a?

17) Найти число, которое при умножении на разность чисел p и q дает в произведении a.

18) На какое число следует разделить a, чтобы получить m?

19) Если неизвестное число умножить на 9 и прибавить к результату:

а) 2, то получится 11;
б) 3, » » 111;
в) 4, » » 1111;
. . . .
з) 8, » » 11111111;
и) 9, » » 111111111.

Найти в каждом случае соответствующее число и составить таблицу решений.

20) Если неизвестное число умножить на 8 и прибавить:

а) 2, то получится 98; б) 3, то получится 987;
в) 4, » » 9876; . . . .
ж) 7, » » 98765432; з) 8, » » 987654321.

Найти в каждом случае соответствующее число и составить таблицу решений.

21) Если неизвестное число умножить на 9 и прибавить:

а) 7, то получится 88; б) 6, то получится 888;
в) 5, » » 8888; г) 4, » » 88888;
. . . . ж) 1, » » 88888888;
з) 0, » » 888888888;

Найти в каждом случае соответствующее число и составить таблицу решений.

22) На какое число следует уменьшить 702, чтобы получить удвоенное искомое число?

23) На сколько нужно увеличить 56, чтобы получить 65?

24) На сколько нужно уменьшить 98, чтобы получить 89?

25) На сколько нужно уменьшить 785 и увеличить 587, чтобы получить одинаковые числа?

26) На сколько нужно уменьшить число 8642, чтобы получить число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке?

27) Найти число, которое на столько же меньше $7\frac{1}{3}$, на сколько оно больше $5\frac{1}{5}$.

28) Найти среднее арифметическое между $2\frac{1}{2}$ и $6\frac{1}{6}$.

29) Найти число, если среднее арифметическое между ним и 916 равно 619.

30) Какое число при уменьшении на 99 дает тот же результат, что и при делении на 10?

31) Какое число нужно удвоить, чтобы полученный результат был на 7 больше четверти искомого числа?

32) Какое число больше своей четверти на 81?

33) Утроенное неизвестное число на $7\frac{1}{7}$ больше удвоенного того же числа. Найти это число.

34) Найти число, которое при увеличении на $6\frac{1}{4}$ дает тот же результат, что и при умножении на $7\frac{1}{4}$.

35) Сумма третьей и пятой доли искомого числа равна 88. Найти это число.

36) Найти число, пятая часть которого меньше седьмой его доли на 2.

37) Найти число, восьмая доля которого на 3 меньше его шестой доли.

38) Если от утроенного искомого числа отнять 13, то получится столько же, сколько от прибавления 57 к его пятой доле. Найти число.

39 Найти число, сумма m-кратного и n-кратного которого равна a.

40) Найти число, сумма m-ой и n-ой долей которого равна p.

41) Если к неизвестному числу прибавить число, которое в m раз его больше, то получится a. Определить число.

42) Если к неизвестному числу прибавить его $\frac{1}{k}$ долю, то получится m. Найти число.

43) Найти число, которое на 48 больше себе противоположного.

44) Найти число, которое меньше на 100 себе противоположного.

45) Найти число, которое равно себе противоположному.

46) Разность между неизвестным числом и числом, ему противоположным, равна d. Найти число.

47) Если от искоемого числа отнять 5, остаток умножить на 7, к тому, что получится, прибавить 2, результат разделить на 6, к частному прибавить 4, то снова получим искомое число. Найти это число.

48) Если к неизвестному числу прибавить 3, полученную сумму умножить на 2, из произведения вычесть 8, то получится столько же, сколько получилось бы, если от этого же неизвестного числа отнять 4, утроить разность и от произведения отнять 1. Найти это число.

49) Если отнять 7 от неизвестного числа, полученную разность умножить на 3 и к произведению прибавить 2, то полу-

чится столько же, сколько получилось бы, если это же неизвестное число умножить на 8, от произведения отнять 3 и остаток разделить на 7. Найти число.

50) Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{26}{69}$, чтобы она обратилась в $\frac{1}{2}$?

583. Составить задачи, решение которых приводится к решению следующих уравнений:

1) $9+x=5$; 2) $7-x=3$; 3) $\frac{x}{3}=7$;

4) $9x=11\frac{1}{4}$; 5) $m=n-mx$; 6) $px-p=p$;

7) $ax=a$; 8) $ax=a-x$; 9) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}$;

10) $\frac{x+m}{x-m}=p$; 11) $\frac{51}{5-x}-3=14$; 12) $\frac{a}{x}+b=\frac{b}{x}+a$;

13) $\frac{m}{x}-n=m+n$; 14) $pqx=p+q$.

584. 1) На сколько следует уменьшить каждый из сомножителей произведений $25\cdot51$ и $31\cdot40$, чтобы эти произведения оказались равными?

2) На сколько следует уменьшить каждый из сомножителей произведения $30\cdot147$ и увеличить каждый из сомножителей произведения $14\cdot62$, чтобы произведения оказались равными?

3) Какое число нужно прибавить к каждому члену пропорции $3:6=4:8$, чтобы снова получить пропорцию?

4) По сколько следует прибавить к 3 и 5, чтобы полученные числа относились между собой, как $8:11$?

5) Какое число следует прибавить к делимому 820 и делителю 37, чтобы в частном получилось 10.

6) Какое число должно отнять от делимого 1728 и делителя 519, чтобы в частном получилось 4?

7) На какое число следует увеличить каждое из чисел: 1, 5, 27, 57, чтобы полученные числа, взятые в той же последовательности, составили пропорцию?

8) На какое число следует уменьшить каждое из чисел: 11, 16, 35, 60, чтобы полученные числа, взятые в той же последовательности, образовали пропорцию?

9) Какое число следует прибавить к числителю дроби $\frac{7}{44}$, чтобы она обратилась в $\frac{3}{4}$?

10) По сколько нужно прибавить к a и b, чтобы полученные суммы относились как $c:d$?

11) На какое число следует уменьшить каждое из чисел: 6, 10, 22, чтобы вновь полученные числа, взятые в той же последовательности, составили непрерывную пропорцию?

12) Найти число, если сумма цифр равна 15; если цифры переставить, то получится число, которое на 27 больше искомого.

13) Число, образованное десятками неизвестного числа, в 18 раз больше числа единиц, а число десятков четырьмя более числа единиц. Найти это число.

14) Разность цифр двузначного числа равна 7; если же переставить цифры, то получится число в $4\frac{1}{2}$ раза больше искомого. Найти это число.

15) Если к числу, записанному тремя одинаковыми цифрами, прибавить 112 и порученную сумму разделить на 125, то в частном получим однозначное число, обозначенное той же цифрой. Найти это число.

16) Трехзначное число, изображенное цифрами, увеличивающимися вправо на единицу, деленное на сумму его цифр, дает в частном 26. Найти это число.

17) Сколько следует вычесть из m и n, чтобы полученные числа находились в отношении $p:q$?

18) Сумма двух чисел равна 100; если большее число разделить на меньшее, то в частном будет 4 и в остатке 5. Найти оба числа.

19) Разбить 80 на два числа таким образом, чтобы сумма частных от деления первого числа на 5, а второго на 6 составила бы 15.

20) Разность двух чисел равна 4; притом известно, что $\frac{3}{4}$ большого числа равны $\frac{5}{6}$ меньшего. Найти эти числа.

21) Какое число следует прибавить к m и вычесть из n, чтобы полученные числа находились в отношении $a:b$?

22) Число a разделить на две части таким образом, чтобы частное от деления одной части на другую равнялось бы также a.

23) Разность между делимым и делителем равна 1404, а частное равно 40. Найти делимое и делитель.

24) От числителя дроби $\frac{143}{257}$ отнято столько раз по 5, сколько от знаменателя по 11. Сколько было сделано вычитаний, если в результате получилась дробь, равная 1?

25) Какое число должно отнять 5 раз от числителя и 7 раз от знаменателя дроби $\frac{20}{31}$, чтобы эта дробь обратилась в $\frac{1}{2}$?

26) Сумма делимого и частного равна 100, а делитель равен 49. Найти делимое и частное.

585. 1) *A* и *B* внесли для некоторого предприятия: первый 7000 р., второй 9000 р. Сколько получил каждый из общей прибыли в 1824 р.?

2) *A* и *B* организовали торговое дело: первый с капиталом в 3925 р., второй с капиталом в 1725 р. Они получили прибыли 314 р. Сколько придется на долю каждого?

3) Троим братьям вместе 96 лет; средний вдвое старше младшего, а старшему столько лет, сколько среднему и младшему вместе. Найти лета каждого.

4) В трех кусках полотна 180 метров; притом известно, что во втором куске вдвое больше метров, чем в первом, а в третьем втрое больше, чем во втором. Сколько метров в каждом куске?

5) *A*, *B* и *C* должны поделить между собой некоторую сумму денег. *A* получает $\frac{1}{5}$ этой суммы и 190 р., *B* — $\frac{1}{4}$ суммы и 170 р., *C* — $\frac{1}{3}$ суммы и 160 рублей. Как велика сумма, подлежащая разделу и сколько получит каждый?

6) *A*, *B* и *C* должны поделить между собой некоторую сумму. *A* получает на 200 р. меньше $\frac{2}{5}$ этой суммы, *B* — на 700 рублей меньше $\frac{2}{3}$ ее, *C* — на 330 рублей больше, чем $\frac{1}{4}$ этой суммы. Как велика подлежащая разделу сумма и сколько получит каждый?

7) *A*, *B*, *C* и *D* должны разделить между собой 9000 р. *A* должен получить в 4 раза больше *D*, за вычетом 3000 р.; *B* должен получить в 3 раза больше, чем *D*, за вычетом 2000 р.; и, наконей, *C* получает вдвое больше *D*, за вычетом 1000 р. Сколько получил каждый?

8) Некто оставил капитал в 7350 р., который должны поделить между собой 4 его сына. Второй должен получить в 2 раза больше первого, за вычетом 1500 р.; третий в 2 раза больше второго, за вычетом 2000 р.; четвертый в 2 раза больше третьего, за вычетом 2500 р. Сколько получит каждый?

9) Два лица, имея по 200 рублей, тратят ежедневно: первый по 1 рублю, а второй по 7 рублей. Через сколько дней у первого станет втрое более денег, чем у второго?

10) Четыре лица *A*, *B*, *C* и *D* разделили 4500 гектаров леса следующим образом: *A* взял 500 гектаров, *B* — столько, сколько *A* и *C* вместе, а *D* — третью часть того, что досталось *B* и *C*. Сколько гектаров леса получили *B*, *C* и *D*?

11) Трем братьям достался в наследство капитал в 12000 р. с тем, чтобы они разделили его в обратном отношении их лет. Сколько следует получить каждому, если старшему брату 30 лет, среднему 24, а младшему 20?

12) Куплено по одинаковому количеству березовых и осиновых дров; в продолжение месяца было сожжено 18 сажен березовых и 58 сажен осиновых дров. Сколько было куплено дров каждого сорта, если по прошествии месяца березовых дров осталось втрое более, нежели осиновых?

13) Сестра старше брата в 15 раз, а чрез 13 лет она будет только вдвое старше этого брата. Сколько лет каждому из них теперь?

14) Сыну 10 лет, а отец вчетверо старше его. Чрез сколько лет отец будет втрое старше сына?

15) Сколько воды нужно прилить к 40 ведрам вина 75 градусов (т.-е. к смеси, содержащей 75 частей спирту и 25 частей воды), чтобы получить смесь в 48 градусов?

16) Сколько золотников меди должно прибавить к 64 золотникам серебра 90 пробы, чтобы получилось серебро 72 пробы?

17) Сколько килограммов чая, ценою в 3 р. 50 коп. килограмм, должно смешать с 16 килограммами чая, ценою по 5 рублей килограмм, чтобы, продавая килограмм смеси по 5 р. 50 к., получить на всей смеси 58 р. 25 к. прибыли?

18) Виноторговец смешал 6 ведер вина, ценою по 5 рублей ведро, с вином в $3\frac{1}{2}$ рубля ведро. Оставив одно ведро для себя, он продал остальное количество смеси по $4\frac{3}{5}$ рубля ведро, при чем получил на всю смесь 37 рублей прибыли. Сколько взято им было при составлении смеси вина низшего сорта?

19) Некто смешивает два сорта вина: бутылка первого сорта стоит 1 р. 35 к., а второго 60 к. Он желает получить 150 бутылок по 1 рублю. Сколько бутылок он должен взять того и другого сорта?

20) В лавке продано 15 *кг* чая двух сортов за 82 р. 50 к. Килограмм лучшего чая стоит 7 р. 50 к., а худшего—4 р. 50 к. Сколько было продано чая каждого сорта?

21) Некто имеет 3000 бутылок 70-градусного спирта. Сколько он должен добавить воды, чтобы получить спирт в 60 градусов?

22) Некто имеет 600 литров спирта в 60 градусов. Сколько спирта в 95° он должен сюда добавить, чтобы получить спирт в 80°?

23) Некто должен получить 1000 литров 80-градусного спирта. Для этого он смешивает спирт в 77° и 87°. Сколько он должен взять спирта каждого сорта?

24) Золотых дел мастер желает сделать сплав серебра 84-ой пробы. Сколько он должен для этого взять серебра 85-ой пробы и 80-ой, чтобы получить слиток в 1 пуд?

25) Сколько лигатуры следует добавить к 200 золотникам серебра 84-ой пробы, чтобы получить серебро 56-ой пробы?

26) Некто имеет 100 фунтов золота 54-ой пробы. Сколько следует удалить лигатуры, чтобы получить золото 56-ой пробы?

27) Кооператив купил K *кг.* чая двух сортов по средней цене a руб. килограмм. Сколько куплено чая того и другого сорта, если за килограмм чаю высшего сорта он платил p руб., а за килограмм низшего сорта q рублей? Какому условию должно удовлетворять a, чтобы задача имела смысл?

28) Сколько воды следует прибавить к a ведрам p-градусного спирта, чтобы получить смесь в $q°$? (Рассмотреть случаи: $p > q$; $p = q$; $p < q$.)

29) Некто имеет двух доброт серебро, из коих одного фунт 12 рублей, а другого 25 рублей, и желает смешать один фунт так, чтобы смешанного фунт был ценою 20 рублей; спрашивается, сколько которого серебра в смешение взять должно? (Войтях.)

30) 20 человек нечто работали 8 дней, потом, приняв к себе в товарищи еще 5 чел., вообще то дело довершили в 13 дней, за которую работу получили $381\frac{1}{4}$ р.; спрашивается, сколько из сих денег достанется первым и сколько последним работникам? (Войтях.)

586. 1) Издатель имел валового доходу 375282 рубля. На какую сумму он сдал книг книгопродавцам, если с номинальной цены книги он делал им $33\frac{1}{3}\%$ скидки?

2) Неизвестный капитал, отданный в банк по 4%, чрез 3 месяца обратился в 86961 р. Найти этот капитал.

3) По сколько процентов должно отдать в банк капитал, чтобы он чрез год обратился в сумму, относящуюся к нему, как 13 : 12?

4) На сколько времени нужно отдать в банк по 10% капитал, чтобы он увеличился в $1\frac{3}{5}$ раза?

5) Два капитала, составляющие вместе 6000 рублей, отданы были в банк: первый по 8%, а второй по 6%. Найти каждый капитал, если в продолжение $2\frac{1}{2}$ лет с обоих капиталов получено 1075 рублей процентных денег.

6) Некто, разделив свой капитал на две части в отношении 2 : 3, отдал первую часть в банк по 5%, а вторую по 8%. Чрез $4\frac{1}{2}$ года капитал его обратился в 3265 рублей. Найти первоначальный капитал и каждую его часть.

7) Некто отдал $\frac{1}{6}$ часть своего капитала по 8%, четверть капитала по 10%, а остальную часть по 4%. Через 5 лет капитал его обратился в 6280 р. Найти первоначальный капитал.

8) Некто хотел положить 5000 р. в банк, но один его знакомый попросил эти деньги взаймы, предложив заплатить в $1\frac{5}{11}$ раза большие проценты в сравнении с теми, которые платит банк. Определить проценты, платимые банком, если разность между годовыми процентными деньгами в том и в другом случае составляет 125 рублей?

9) Некто отдал первую часть своего капитала в банк по 5%, вторую часть, которая была больше первой на 100 рублей, по 6%, и третью, которая составляла половину второй, по 8%. Найти его капитал, если годовая прибыль с него составляет $77\frac{1}{2}$ рублей.

10) Кооператив купил 10 цыбиков чая и остаток от початого цыбика в 20 килограммов за 3675 рублей. Продавая затем каждый цыбик по 480 рублей, он получил на товаре $33\frac{1}{3}$% прибыли. Сколько килограммов чая было в каждом цыбике?

11) Капитал был отдан в банк по $4\frac{1}{2}$% и через 3 года обратился в 13620 рублей. Каков был основной капитал?

12) *А* должен был получить с *В* через некоторый промежуток времени 41000 руб., но *В* сейчас же уплатил 39000 руб. Через сколько времени *В* должен был произвести уплату первоначально, если считать на капитал по $\frac{1}{3}$% в месяц?

13) *А* хотел купить у *В* мануфактуры. *В* потребовал определенную сумму, которую *А* должен был уплатить через 8 месяцев. Вместо этого *А* уплатил немедленно 81750 рублей. Сколько запросил *В*, если он соглашался на отсрочку из $4\frac{1}{2}$ процентов годовых?

14) *А* покупает у *В* дом. *В* запросил 47908 р. с уплатой через 3 мес. *А* уплатил наличными. Каков был наличный расчет, если при отсрочке взималось $\frac{1}{2}$% в месяц?

15) Некто отдал капитал по 4%. Вследствие уменьшения процентной таксы до $3\frac{1}{2}$% он потерял в течение года 75 рублей. Как велик был помещенный им капитал?

16) A предлагает за дом 20000 р. наличными, B дает 20500 руб. через 6 мес., а C 21000 руб. через год. Кто предлагает больше и на сколько больше, чем остальные, если расчет ведется из 5% годовых?

17) Капитал a рублей через n лет обратился в b рублей. По сколько % он был отдан?

18) Капитал a рублей, отданный в банк по p%, обратился в b рублей. На сколько времени был отдан капитал?

19) Некто должен через m месяцев уплатить a руб. Как велик будет наличный расчет, если сделать с суммы, подлежащей уплате, скидку в p% за месяц?

20) Кооператив приобретает на товаре 32%, продавая 1 *кг* этого товара за 1 р. 98 к. Сколько % приобретет или потеряет кооператив, если он будет продавать товар по 1 р. 20 к. фунт?

21) Продавая 1 *кг* товара по рублю, кооператив приобретает на этом товаре 25%. Почем он должен продавать 1 *кг*, если желает приобресть 30%?

22) Продавая 1 *кг* товара по a рублей, торговец получит на нем p% прибыли. Сколько % прибыли он получит, если будет килограмм товара продавать по b рублей?

23) Книгопродавец покупает книгу со скидкой 40% с обложки. Какую скидку с обложки он должен делать, чтобы иметь 50% прибыли?

24) Отделом снабжения Наркомпроса отправлена в школу 2-ой ступени партия книг. Школа, оставив у себя 75%, вернула в отдел снабжения остальные 60 книг. Сколько книг было послано отделом снабжения?

25) Столовая в течение года может увеличить число выдаваемых обедов на 20%. Определить, сколько она могла выдать обедов при открытии, если через четыре месяца она уже выдавала 400 обедов?

26) На сколько % следует увеличить длину балки, чтобы новая ее длина относилась к прежней, как 5 : 3.

27) Население города в течение года увеличивается на 7%. За какой промежуток времени оно возрастет в $2^2/_5$ раза?

28) Производительность завода № 1, вырабатывающего $^1/_6$ часть продукта, потребного для выдачи населению, возрастает на 4% в год; производительность завода № 2, дающего четвертую часть продукта, — на 5%, а завода № 3, дающего остальную часть, — на 2%. По истечении 5 лет работы в кладовых завода оказался запас в 22140 пудов. Как велик был запас при начале работы?

29) На рабочий факультет принята группа слушателей, разбитых на два отделения — A и B, при чем число слушателей в A относится к числу слушателей в B, как 2 : 3. Ежегодно из первой группы выбывает $12^1/_2$%, а из второй — $8^1/_3$% первоначаль-

ного числа. Как велика была поступившая группа, если через 2 года окончило 48 человек?

30) Разделить 5600 на пять частей так, чтобы II была больше I вдвое и еще на 200, III втрое больше I за вычетом 400, IV равна полусумме II и III части и еще 150 и, наконец, V часть равна четверти суммы остальных четырех и еще 475.

31) В трехзначном числе цифра десятков вдвое больше цифры сотен, цифра единиц в свою очередь вдвое больше цифры сотен; если к искомому числу прибавить 297, то получится число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Определить неизвестное число.

32) Для освещения детского дома имеется некоторое количество электрических лампочек. Если в каждую комнату поместить по 7 лампочек, то в запасе останется 5 лампочек, если же в каждую комнату провести по 8 лампочек, то не хватит 5. Сколько было выдано лампочек?

33) В цейхгаузе остались две катушки с телефонным кабелем: на 1-й — 3 километра, на 2-й — два. Если от первой катушки отнять вдвое меньше, чем от второй, то на первой останется в три раза больше, чем на второй. Сколько кабеля осталось на той и другой катушке?

587. 1) Отрезок длиною в 4,8 *см* разделить: 1) внутренним и 2) внешним образом в отношении 3 : 5.

2) Какой угол: 1) вдвое больше своего смежного; 2) в n раз больше; 3) составляет $\frac{1}{2}$ своего смежного?

3) В равнобедренном треугольнике угол при вершине: 1) вдвое больше; 2) в n раз больше каждого из углов при основании. Определить углы треугольника.

4) В равнобедренном треугольнике боковая сторона вдвое больше основания. Определить стороны, если периметр равен 1) 25 *дм.*; 2) $2p$ *см.*

5) В равнобедренном треугольнике отношение боковой стороны к основанию равно $\frac{4}{7}$. Определить стороны, если периметр равен 1) 45 *см*; 1) $2p$ *см.*

6) Какой многоугольник имеет диагоналей: 1) вдвое больше; 2) вдвое меньше, чем сторон?

7) В каком выпуклом многоугольнике сумма углов равна $10d$?

8) Площадь прямоугольника равна 36 *см*^{2}. Одна из сторон его равна 1, 2, 3... до 12 *см.* Каковы соответственные значения другой стороны?

9) В трапеции разность верхнего и нижнего основания равна 3 *см.* Вычислить основания, если высота трапеции равна 6 *см*, а площадь 96 *см*^{2}.

10) В трапеции отношение оснований равно $\frac{3}{5}$. Вычислить основание, если высота трапеции 6 *см*, а площадь 192 $см^2$.

11) Один катет в треугольнике равен 18 *м*, а другой на 6 *м* меньше гипотенузы. Вычислить стороны треугольника. (Теорема Пифагора.)

12) Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, на 3 *см* больше меньшего и на 4 *см* меньше большего отрезка гипотенузы. Вычислить перпендикуляр.

13) Две стороны треугольника равны 4 *см* и 6 *см*. Высоты, соответствующие этим сторонам, длиннее одна другой на 1 *см*. Определить длину обеих высот.

14) Периметр равнобедренного треугольника равен 45 *дм*, а боковая высота относится к высоте треугольника, как 4 : 7. Определить стороны треугольника.

Задачи на движение.

588. 1) Скорости, выраженные в сантиметрах в секунду, выразить в километрах в час (и в верстах в час с двумя значащими цифрами; 1 $км = \frac{14}{15}$ версты).

а)	Улитка	0,001
б)	Пешеход	100
в)	Лошадь рысью	350
г)	Легкий ветер	400
д)	Лошадь с галопом	450
е)	Океанский пароход	1 000
ж)	Буря; Скаковая лошадь	1 700
з)	Пассажирский поезд; Почтовый голубь	1 800
и)	Аэроплан Райта	1 330
к)	Автомобиль	4 700
л)	Звук	33 000
м)	Ружейная пуля	43 000
н)	Вращение земли около оси (у экватора)	46 400
о)	Свет; Электрические колебания	30 000 000 000.

2) Скорости, выраженные в следующей таблице в километрах в час, выразить в сантиметрах в секунду:

а)	Пешеход	от 4 до 5 *км* в час.
б)	Пассажирский поезд	» 30 » 40 » » »

в) Скорый поезд	от 60 до 80 *км*	в час.		
г) Паровоз при пробе	205	»	»	»
д) Наибольшая скорость автомобиля	220	»	»	»

3) Зазор на стыках рельсов служит причиной стука колес в такт на ходу поезда. Пассажир в одну минуту насчитывает 92 удара; какова скорость поезда, выраженная в верстах в час, если длина рельса равна 8 *м*.

4) Двое знакомых живут на расстоянии 25 километров и идут друг другу навстречу; первый проходит в 1 час $3\frac{1}{2}$ *км*, а второй 4 *км*. Через сколько часов они встретятся, если они вышли одновременно?

5) A и B находятся на расстоянии 12 километров один от другого и идут в одном направлении. A проходит в час 5 километров, B — $3\frac{1}{2}$ *км*. Через сколько времени A догонит B?

6) A и B находятся на расстоянии 36 *км* друг от друга и едут на велосипедах навстречу один другому. Сколько должен проехать каждый из них до встречи, если они выезжают в одно время и скорости их относятся как $5:7$?

7) Верховой отправляется из некоторого пункта и проезжает в каждые 3 часа 28 *км*. Час спустя, ему вслед отправляется другой и делает в 2 часа 20 *км*. Когда и где догонит второй первого?

8) Из A в B отправился курьер и сделал этот путь в 80 минут. Из B в A отправляется другой и делает путь в 120 мин. Когда и где встретятся эти курьеры, если они выедут в одно время?

9) Пешеход вышел из M в 8 час. и пришел в N в 10 час. Верховой выехал из N в 9 час. и приехал в M в 9 час. 40 мин. Когда и где встретились верховой и пешеход, если расстояние MN равно 10 *км*.

10) Определить расстояние между двумя городами, если замечено, что переднее колесо повозки, имеющее в окружности 2,4 *м*, сделало на этом расстоянии 2900 оборотами более заднего, имеющего в окружности 3,2 *м*.

11) По наклонной плоскости катятся два шара; один из них имеет a футов, а другой b футов в окружности. Определить длину наклонной плоскости, если первый шар сделал на ней c оборотами больше второго?

12) Из A выезжает велосипедист со скоростью 12 *км* в час. Из местечка B, которое он должен миновать, за час до него в том же направлении выступил батальон солдат, который проходил по 5 *км* в час. Когда велосипедист догонит батальон, если расстояние между A и B равно 9 километрам?

13) Из Москвы отправился в Смоленск товарный поезд, проезжающий средним числом по 16 километров в час; спустя 8 часов, из Смоленска в Москву отправился пассажирский поезд, проезжающий по 28 *км* в час. На каком расстоянии от Москвы оба поезда встретятся, если известно, что от Москвы до Смоленска 420 *км*.

14) Пассажирский поезд шел со скоростью 36 *км* в час. Пассажир, смотревший в окно, заметил, что встречный товарный поезд, длина которого 200 метров, шел мимо него 15 сек. С какой скоростью шел товарный поезд?

15) Пассажирский поезд идет со скоростью 40 *км* в час., а товарный—со скоростью 14 *км* в час. Какой длины товарный поезд, если пассажир, смотревший в окно, заметил, что встречный товарный поезд шел мимо него 10 сек.?

16) По параллельным путям идут в одном и том же направлении пассажирский и товарный поезда. Скорость пассажирского поезда 30 *км* в час. Какова скорость товарного поезда длиной в 200 *м*, если пассажир, смотревший в окно, наблюдал товарный поезд 40 секунд?

17) Когда бьет 6 часов, то минутная и часовая стрелки составляют прямую линию. Чрез сколько времени они будут находиться в таком же положении?

18) Когда в первом часу минутная стрелка составляет с часовою прямую линию?

19) Когда и как совпадают минутная и часовая стрелки?

20) По окружности круга навстречу двигаются две точки: одна со скоростью 10 *см* в секунду, другая 8 *см;* через какие промежутки происходят их встречи, если длина окружности равна 378 *см*? Через какие промежутки будут происходить их встречи, если одна из точек переменит направление движения?

Задачи из физики.

А. Удельный вес.

589. 1) Размеры кирпича в сантиметрах выражаются приблизительно следующими числами: 25 *см*, 12,5 *см* и 6,25 *см*. Вес его приблизительно 4 *кг*. Определить его удельный вес. (Килограмм воды имеет объем 1 *дм*^{3}.)

2) Ледяная глыба выступает из воды на 12 *см*. Определить толщу всего льда. (Удельный вес льда 0,9.)

3) Ледяная глыба плавает в морской воде, при чем объем ее надводной части равен 2000 *м*^{3}. Как приблизительно велик объем всей глыбы и ее вес, если удельный вес морской воды считать равным 1,03, а удельный вес льда 0,9?

4) Сплав серебра и олова весит 10 *кг*, а удельный вес этого сплава равен 9. Сколько серебра и олова содержит сплав, если удельный вес серебра равен 10,2, а олова 7,3?

5) Определить вес доски из тополя, если удельный вес его равен 0,39 и если подъемная сила ее должна быть равна 5 *кг*, т.-е. доска должна быть на 5 *кг* легче, чем вес воды в ее объеме.

6) Какой величины следует привязать кусок пробки к куску свинца, весом 10 *кг*, чтобы подъемная сила такой системы была равна 2 *кг*? Удельный вес свинца 11,3, а удельный вес пробки 0,24.

7) Закрытый со всех сторон ящик имеет наружные размеры: длину 100 *мм*, ширину — 84 *мм* и высоту — 60 *мм*; толщина его стенок повсюду 2 *мм*. Ящик погружен в воду на 2 *мм*. Каков удельный вес материала, из которого сделан этот ящик?

8) Открытый сверху ящик, наружные размеры которого: длина — 100 *мм*, ширина — 98 *мм* и высота — 26 *мм*, а толщина стенок и дна повсюду равна 1 *мм*, до половины погружается в воду. Определить удельный вес материала, из которого сделан этот ящик?

9) Как глубоко погружается в воду закрытый цинковый ящик, толщина стенок которого 1 *мм*, а наружные размеры: длина — 80 *мм*, ширина — 52 *мм*. и высота — 50 *мм*, если удельный вес цинка припять равным 7?

10) Удельный вес латуни 8,5. Как глубоко погрузится открытый ящик из латуни, если толщина его стенок равна 1 *мм*, а наружные размеры: длина — 130 *мм*, ширина — 80 *мм* и высота — 51 *мм*?

11) Как глубоко погрузится указанный в задаче 10 ящик, если он будет, кроме того, еще наполнен водой до высоты в 25 *мм*?

12) Открытый ящик из жести с удельным весом 8, толщина стенок которого равна 1 *мм*, а наружные размеры: длина, ширина и высота — соответственно равны 192, 114 и 158 *мм*, частью наполнен водой, благодаря чему он сидит до краев в воде. До какой высоты налита в нем вода, и насколько погрузится в воду пустой ящик?

13) Военное судно имеет площадь поперечного сечения по ватерлинии в 140 $м^2$. Насколько оно погрузится в воду, если оно примет на борт 500 человек с средним весом по 84 *кг*?

14) Судно с поперечным сечением по ватерлинии в 120 $м^2$ погружается в воду, принимая на борт 300 человек, на 22 *мм*. Определить средний вес каждого человека.

15) Военное судно в 23000 тонн водоизмещения (весом) имеет площадь сечепия по ватерлинии 4500 $м^2$. Это военное судно переходит из пресной воды в морскую, удельный вес которой равен 1,03. На сколько изменится осадка судна?

16) Воздушный шар с кубическим содержанием в 1500 *м*^{3} наполнен светильным газом. Литр воздуха весит на уровне моря приблизительно 1,3 *г*, литр светильного газа 0,6 *г*. Материя, из которой сделан шар, весит 150 *кг*, общий вес остального груза 800 *кг*. Определить подъемную силу этого шара.

17) Определить подъемную силу шара, описанного в предыдущей задаче, если он будет наполнен водородом (вес 1 *м*^{3} водорода принять равным 90 *г*), и если груз будет увеличен на 1500 *кг*.

Б. Работа.

18) Фабрика обслуживается 36 машинами одинаковой мощности при 10-часовом рабочем дне. Сколько машин нужно добавить, чтобы выполнить ту же работу при 9-часовом рабочем дне?

19) На фабрике, имеющей a рабочих, рабочий день уменьшается с t_1 часов на t_2 часов. Сколько следует добавить рабочих, при условии одинаковой их работоспособности?

20) Вышла в поле артель косцов. Ей предстояло скосить два луга, из которых один был вдвое больше другого. Полдня вся артель косила большой луг, а на вторую половину дня артель разделилась пополам, и одна половина осталась доканчивать большой луг, а другая стала косить малый луг. К вечеру большой луг был скошен, а от малого остался участок, который был скошен на другой день одним косцом, работавшим весь день. Сколько было косцов в артели?

В. Рычаг.

21) На концах стержня, длиною в 30 *см*, подвешены грузы: на одном 1 *кг*, а на другом 0,5 *кг*. В какой точке следует подпереть стержень, чтобы он находился в равновесии?

22) По одну сторону точки опоры рычага первого рода подвешены два груза: в 70 *г* и 40 *г*. Точка привеса одного отстоит от точки опоры на 3 *см* далее, чем точка привеса другого. На каких расстояниях находятся точки привеса грузов от точки опоры, если оба груза уравновешиваются грузом в 120 *г*, подвешенным по другую сторону точки опоры на расстоянии 10 *см* от нее?

23) На одном плече рычага первого рода, в расстоянии 6 и 12 сантиметров от точки опоры, подвешены два груза, общий вес которых равен 190 *г*. Определить вес каждого из них, если они уравновешиваются грузом в 90 *г*, подвешенным на другом плече на расстоянии 16 *см* от точки опоры.

Г. Теплота.

24) Сравнение шкал Цельсия, Реомюра и Фаренгейта дано на приложенном чертеже фиг. 11. Сколько градусов показывают термометры Реомюра и Цельсия, если Фаренгейт показывает 95°?

Темп. кипения воды:	Цельсий.	Реомюр.	Фаренгейт.
	+100	+80°	+212
	+	+	+
Темп. таяния льда	0°	0°	32°
		—	+ 0°
			—

Фиг. 11.

25) Фаренгейт считал нормальную температуру человеческого тела равной 100° по своему термометру. Сколько градусов по Цельсию составляет эта температура?

26) Какую температуру показывает термометр Фаренгейта, если сумма отсчетов по Реомюру и по Цельсию равна 27°?

27) Для какой температуры показания Фаренгейта и Реомюра отличаются лишь знаками?

28) Для какой температуры число градусов по Реомюру в четыре раза больше, чем у Фаренгейта?

29) При какой температуре число градусов Цельсия, независимо от знака, в 3 раза больше, чем показание Фаренгейта?

30) Два смежных рельса, имеющих при 0° длину в 10 *м*, при 30° Цельсия сдвигаются вплотную. Как велик зазор между ними при 10°, если коэффициент линейного расширения железа равен 0,000012?

31) При прокладке железнодорожных рельсов в С. С. С. Р. между концами рельсов, длиною в 28 футов, полагается оставлять такой зазор, ширина которого при 0° равнялась бы $\frac{1}{4}$ дюйма. Коэффициент линейного расширения рельсовой стали равен 0,0000108. На сколько должна подняться температура рельсов, чтобы зазор закрылся?

До каких размеров доходит ширина зазора при очень сильном морозе (40° Ц.)?

32) Сколько следует прибавить кипящей воды к комнатной воде (16° Ц.), чтобы получить 100 литров воды температурой в 25°?

33) 54 грамма железа при температуре в 7° погружаются в 10 *г* воды, имеющей температуру в 20°. Какая установится тогда температура, если удельная теплота железа принимается за $\frac{1}{9}$?

34) Определить, какую температуру имел скипидар, если 20 граммов его при смешении с 42 *г* воды, температурой в 30°, дали температуру смеси в 28,4°. Удельная теплота скипидара 0,4.

35) В 80 $г$ воды при 13° Ц. был впущен пар кипящей воды, вследствие чего вода закипела, а масса ее увеличилась при этом на 13 $г$. Определить скрытую теплоту парообразования воды.

36) При повторении того же опыта с 75 граммами воды при 14° начальной температуры кипение наступило лишь после того, как количество воды увеличилось на 14 $г$. Сколько калорий пошло на нагревание сосуда и других предметов?

37) Скрытая теплота таяния льда равна 80 калориям. Определить вес куска льда, если при погружении в сосуд, содержавший килограмм кипящей воды, он растаял, и температура смеси оказалась 80°.

38) В сосуд, содержавший 2500 $г$ воды при температуре 100°, брошен кусок льда весом 500 $г$. Определить, растает ли весь лед, и, если он растает, какова будет температура смеси.

---

39) Свисток локомотива дает звук в n колебаний в секунду: 1) локомотив удаляется от стоящего неподвижно наблюдателя со скоростью 15 метров в секунду; 2) с той же скоростью приближается к наблюдателю. Каково число колебаний звука, доходящего до наблюдателя в секунду, если скорость звука равна 330 метрам в секунду?

40) Обыкновенная электрическая лампа в 16 свечей расходует в час 60 уаттов и стоит 30 коп. Во сколько времени окупит себя экономическая лампа ценой в 1 рубль при экономии 75%, при тарифе $2\frac{1}{2}$ коп. за 100 уаттов?

Задачи, заимствованные из старинных книг по математике и старых учебников.

В папирусе **Ахмеса** (иначе папирусе **Ринда**), старейшем уцелевшем математическом памятнике (1700 г. до нашей эры), имеются следующие задачи:

590. 1) Хау (куча); ее седьмая и ее целое дают 19. (Определить хау.)

2) Хау; ее $\frac{2}{3}$, ее $\frac{1}{2}$, ее $\frac{1}{7}$, ее целое дают 33. (Определить хау.)

3) Задача «на бассейны» впервые встречается у **Герона Александрийского.**

Бассейн, емкостью в 12 кубических единиц, получает воду через две трубы, из которых одна дает в каждый час одну кубическую единицу, а другая в каждый час четыре кубических единицы. В какое время наполнится бассейн при совместном действии обеих труб?

Задачи, заимствованные из греческих эпиграмм, собранных Максимом Планудом (ок. 1300 г.).

4) Четыре фонтана дано. Обширный дан водоем.
За сутки первый фонтан до краев его наполняет,
Два дня и две ночи второй над этим должен работать.
Третий втрое, чем первый, слабей,
В четверо суток последний за ними едва поспевает.
Ответь мне, скоро ли будет он полон,
Если сразу все их открыть?

5) Надпись, которая будто бы помещена над могилой **Диофанта** (греческий математик, который главным образом занимался арифметикой и теорией чисел).

Путник, здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать
Могут,—о чудо,—тебе, сколь долог был век его жизни:
Часть шестую ее составляло прекрасное детство;
Двунадесятая часть протекла еще жизни, покрылся
Пухом тогда его подбородок; а седьмой к окончанью
Браком себя сочетал Диофант. Жизни брачной год пятый
Был осчастливлен рождением прекрасного первенца сына,
Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой
Дал на земле по сравненью с отцом, и в печали глубокой
Старец земного удела конец восприял, переживши
Года четыре с тех пор, как сына лишился; скажи мне,
Скольких лет жизни достигнув, смерть восприял Диофант.

6) Час который, скажи! Осталось дважды две пятых того,
Что протекло их с рассвета [1]).

7) Пифагор на вопрос Поликрата о числе учеников, как передают, ответил так:

Их половина себя посвящает прекрасной науке
И математику здесь изучает. Природы бессмертной
Четверть познанью себя отдает; часть же седьмая в молчаньи
Время проводит, отдавши себя размышленьям; три девы
Есть еще в доме моем; средь них всех мудрес Теано.

Сколько было учеников у Пиѳагора?

8) Я изваянье Минервы из злата. Поэты то злато
В дар принесли: Харизий принес половину всей жертвы,
Ѳе́спия часть восьмую дала, десятую Со̀лон,
Часть двадесятая — жертва певца Ѳемисо̀на, а девять
Вес завершивших талантов—обет, Аристо̀ником данный».

Что весит статуя Минервы?

---

[1]) День у древних делился на 12 часов.

Из Лилавати Бхаскары *(из индусской арифметики; 1150 нашей эры).*

9) Из множества чистых цветков лотоса были принесены в жертву: Шиве—третья доля этого множества, Вишну — пятая, и Солнцу — шестая; четвертую долю получил Бхавани, а остальные шесть цветков получил уважаемый учитель. (Сколько было цветков?)

Из «Проворных и красивых вычислений» *Иоанна Видмана (1489 г.).*

(В пересказе, заимствованном из русских рукописных сочинений по арифметике, относящихся к XVII веку, из сборника Горячева-Воронца.)

10) Лев съел овцу одним часом, а волк съел овцу в два часа, а пес съел овцу в три часа. Ино, хощешн ведати, сколько бы они все три — лев и волк и пес — овцу съели вместе вдруг, и сколько бы они скоро ту овцу съели — сочти ми.

Из Косса (старинное название алгебры) *Кристофа Рудольфа (1525 г.).*

11) Пастух травит лисицу; лисица находится впереди на 60 прыжков, и в то время как лисица делает 9 прыжков, собака делает 6 прыжков. Но 3 прыжка собаки равны 7 прыжкам лисицы. Вопрос, сколько прыжков должна сделать собака, чтобы схватить лисицу?

Из «Арифметики» *Магницкого (1703 г.).*

12) Некий человек нанял работника на год, обещал ему дати 12 рублей и кафтан, но той по случаю работав 7 месяцев восхоте отъити, и прошаше достойныя платы с кафтаном, он же даде ему по достоинству расчет 5 рублей и кафтан, и ведательно есть: коликия цены оный кафтан бяше. (Ср. с № 20.)

13) Един человек выпьет кадь пития в 14 дней, а со женою выпьет тое же кадь в 10 дней, и ведательно есть в колико дней жена его особно выпьет тое же кадь.

14) Некто муж благоговеин вниде в сиротопитательницу милостыню дати убогим, дав же кождому их по три пенязя, и усмотре яко недостанет денег на три человека. Аще же бы дал им по два пенязя; и тогда бы осталось денег на четыре человека: и ведательно есть колико бяше убогих в сиротопитательнице оной, такожде и денег колико у того мужа было, и по чему кождому от них досталось.

Из «Курса чистой математики» *Ефима Войтяховского.*

15) В 326-ведерной водохрань всякие 2 часа одною трубой втекает воды 70 ведер, из коего другою трубою вытекает 42 ведра; спрашивается, в какое время тот водохрань наполнится?

16) Одному курьеру приказано прибыть к назначенному месту в 12 дней, к которому он прежде, ехав всякие сутки по 228 верст, прибыл в 15 дней; спрашивается, по скольку верст должен он проезжать в сутки, дабы поспеть к тому месту в назначенное время?

17) Капитан на вопрос, сколько имеет в команде своей людей, ответствовал, что $\frac{2}{5}$ его команды в карауле, $\frac{2}{7}$ в работе, $\frac{1}{4}$ в лазарете да 27 человек налицо; спрашивается число людей его команды.

18) Собака усмотрела в 150 саженях зайца, который перебегает в 2 минуты по 500 сажен, а собака в 5 минут 1300 саж.; спрашивается, в какое время собака догонит зайца? (Ср. № 15.)

19) Некто пришед в ряд, купил игрушек для малых ребят: за первую игрушку заплатил $\frac{1}{9}$ часть всех своих денег, за другую $\frac{3}{7}$ остатка от первой покупки, за третью игрушку заплатил $\frac{3}{5}$ остатка от второй покупки; а по приезде в дом нашел остальных в кошельке денег 1 руб. 92 коп.; спрашивается, сколько в кошельке денег было и сколько за которую игрушку денег заплачено?

20) Нововыезжей в Россию Французской Мадаме вздумалось ценить свое богатство в чемодане: новой выдумки нарядное фуро и праздничный чепец а ла фигаро; оценщик был Русак, сказал Мадаме так: богатства твоего первая вещь фуро вполчетверта дороже чепца фигаро; вообщем стоют не с половиною четыре алтына, но настоящая им цена только сего половина; спрашивается каждой вещи цена, с чем Француженка к Россам привезена.

Задачи-шутки и загадки.

591. Указать ошибку, допущенную при выводах заключений на основании следующих равенств:

1) Имеем:

$$\text{a) } 2\ \textit{кг} = 2000\ \textit{г},$$
$$5\ \textit{кг} = 5000\ \textit{г};$$

перемножая оба равенства по частям, получаем равенство:

$$10\ \textit{кг} = 10000000\ \textit{г}.$$

$$б)\ 2 \text{ рубля} = 200 \text{ коп.};$$

возводя почленно в квадрат, получаем:

$$4 \text{ руб.} = 40000 \text{ коп.} = 400 \text{ руб.}$$

2) Имеем:

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2;$$

в левой части возьмем x за скобку, а правую разложим по формуле:

$$(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2,$$

получаем:

$$x(x - x) = (x + x)(x - x);$$

деля обе части равенства на $x - x$, получаем неожиданный результат:

$$x = 2x.$$

3) Уравнение:

$$6x + 25 = 10x + 15;$$

можно привести к виду:

$$3(2x - 5) = 5(2x - 5);$$

следовательно,

$$3 = 5.$$

Как получается правильное решение непосредственно из второго уравнения?

4) Уравнение:

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$$

преобразуется следующим образом:

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x},$$

$$\frac{-4x+40}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x},$$

$$\frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x},$$

отсюда следует, что

$$7 = 13.$$

5) Бутылка с пробкой стоит 11 коп.; бутылка стоит на 10 коп. дороже, чем пробка. Сколько стоит пробка и сколько бутылка? (Сказать решение быстро, не прибегая к вычислению.)

6) Взята веревка на 10 *м* длиннее земного экватора. Веревку обводят вокруг экватора так, что она находится повсюду на одном

и том же расстоянии от экватора. Пролезет ли под веревкой мышь? кошка?

7) Мальчика спросили, сколько у него братьев и сестер. Он ответил: столько же братьев, сколько и сестер. Тогда спросили сестру: сколько у нее братьев и сестер. Она отвечала: у меня сестер вдвое меньше, чем братьев. Как это могло быть?

8) По преданию чешская народоправительница Любуша решила выйти замуж за того из женихов, который решит следующую задачу: сколько слив было в корзине, из которой она дала первому жениху половину всех имевшихся слив и еще одну, второму половину остатка и еще одну, третьему половину нового остатка и еще 3 сливы, после чего в корзине ничего не осталось?

9) Женщина несла на продажу в город яйца. Первому своему покупателю она продала половину всего запаса и одно яйцо. Второму продала половину нового остатка и еще одно яйцо. Затем третьему—половину нового остатка и еще одно яйцо. У нее осталось 10 яиц. Сколько яиц понесла она в город?

10. Командир на вопрос, сколько у него солдат, отвечал: «если из моей команды убьют половину да еще $\frac{1}{2}$ солдата, из оставшихся убьют половину да еще $\frac{1}{2}$ солдата, а из тех, кто уцелеет, еще половину да $\frac{1}{2}$ солдата, то останется всего один солдат». Сколько солдат было в команде?

11) Четыре мальчика отправились на прогулку. Первый захватил на завтрак пять пирожков, второй — четыре, третий — три. Четвертый же ничего с собой не взял. Завтрак разделили поровну и съели. Четвертый отдал своим товарищам 12 коп., которые дала ему мать; хотели деньги поделить так: первому дать 5 коп., второму 4 коп., а третьему 3 коп. Но первый из мальчиков на это не согласился. Какое он имел право на это? Как будет справедливо разделить эти деньги?

12) Старый араб имел 3 сыновей и владел 17-ю верблюдами. Умирая, он завещал младшему сыну половину, среднему — третью часть, и, наконец, старшему—девятую часть своего имущества. Когда отец умер, и дети стали делить наследство, то никак не могли этого сделать. Наконец, один из них предложил: пойдем к соседу и займем у него одного верблюда, тогда у нас будет 18; первый получит половину, т.-е. 9, второй — треть, т.-е. 6, а третий девятую часть, т.-е. 2. Таким образом, останется один верблюд, которого мы и отдадим назад соседу. Правильно ли разделили они наследство?

§ 3. Системы уравнений первой степени с двумя и многими неизвестными.

Уравнения с двумя неизвестными.

592. 1) $x+y=12$, $y=x-4$; 2) $x-y=7$, $x=3y+3$; 3) $3x+4y=253$, $y=5x$;

4) $x=3y$, $8x-7y=85$; 5) $9x-4y=98$, $x=\frac{3}{5}y$; 6) $0{,}2y+4x=44$, $x=0{,}5y$;

7) $7x-5y=25$, $7x=10y+15$; 8) $11x-20y=19$, $20y=6x+17$; 9) $5x+3y=36$, $3y=10x-9$;

10) $9x-5y=-5$, $5y=8x+5$; 11) $13x-14y=27$, $13x=2y+15$; 12) $10x+2y=3$, $2y=20x-3$;

13) $8x-9y=1$, $3y=4x+1$; 14) $3x+14y=44$, $7y=x-3$; 15) $50x-3y=11$, $10x=7y-17$;

16) $\frac{3}{7}x-2y=17$, $\frac{1}{7}x=22+3y$; 17) $7x+9y=31$, $18y=13x+116$; 18) $3x-4y=-20$, $9x=17+5y$;

19) $5x-4y=0$, $10x=3y-25$; 20) $2x-5y=42$, $3x=2y+85$; 21) $5y=47-4x$, $10x-2y=16$;

22) $7y=3x-35$, $10x-3y=15$; 23) $1\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}y=11$, $2\frac{3}{5}x=3y+3$; 24) $0{,}7x-0{,}6y=1{,}1$, $0{,}3y=2x-8{,}8$;

25) $\frac{36}{x}+\frac{25}{y}=11$, $\frac{12}{x}=\frac{35}{y}-5$; 26) $4x+\frac{9}{y}=21$, $\frac{18}{y}=17-3x$; 27) $5x-4y=6$, $8x=7y$;

28) $2x-11y=95$, $x-3y=0$; 29) $7x-3y=27$, $5x-6y=0$; 30) $19x+6y=12$, $11x+3y=6$;

31) $15x-16y=24$, $3x=4y$; 32) $5x=7y$, $11x-14y=21$;

33) $x:y=3:4$, $(x-1):(y+2)=1:2$; 34) $(x+y):(y+1)=2:1$, $(x+2):(y-1)=3:1$;

35) $mx+ny=c$, $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$; 36) $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$, $x-y=(a-b)^2$;

37) $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$, $x-y=a^2-b^2$; 38) $\frac{x+1}{y}=a$, $\frac{y+1}{x}=b$.

593. 1) $x = 4y + 2$, $x = 15y - 20$; 2) $y = 3x - 7$, $y = 5x - 13$; 3) $2z = 3y + 2$, $2z = y + 10$;

4) $5x = 4y + 5$, $5x = 5 - y$; 5) $8y = 3x + 25$, $8y = x + 19$; 6) $7y = 3x + 20$, $7y = 6 - 4x$;

7) $11x = 7y + 12$, $11x = 13y - 6$; 8) $10x = 7 + 3y$, $10x = 17 - 7y$; 9) $\frac{3}{5}x = 5y - 1$, $\frac{3}{5}x = 7y - 1$;

10) $0{,}2x = 4y - 3$, $0{,}2x = 3 - 8y$; 11) $5y = 2x + 43$, $10y = x + 74$; 12) $9z = 2y + 10$, $3z = y - 1$;

13) $3x = 5y + 17$, $\frac{1}{2}x = 3y - 8$; 14) $\frac{2}{3}y = 3x - 9$, $8y = 11x - 67$; 15) $15x = 13y + 128$, $\frac{5}{6}x = 3y - 2$;

16) $\frac{4}{9}y = 2\frac{1}{2}x - 1$, $8y = 66 + 3x$; 17) $\frac{1}{3}x = \frac{1}{9}y + 7$, $\frac{1}{9}x = \frac{1}{3}y - 3$; 18) $\frac{1}{2}u = 1 - v$, $\frac{1}{6}u = 3 - 4\frac{1}{4}v$;

19) $5x = 9y - 1$, $3x = 4y + 5$; 20) $4x = 3y + 5$, $7x = 8y - 16$; 21) $10x = 7y + 30$, $12x = 36 - 5y$;

22) $6y = 17x + 1$, $5y = 19x - 4$; 23) $12x = 16 - 9y$; $18x = 15y + 5$; 24) $5x = 13 - 4y$, $22x = 5 - 0{,}2y$;

25) $0{,}1x = y - 1$, $2x = 13y + 1$; 26) $0{,}3y = 2x - 0{,}5$, $0{,}5y = 3x - 0{,}5$; 27) $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} - 1$, $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} - 2$;

28) $2{,}5y = 0{,}1x + 11{,}6$, $1{,}9y = 4{,}4 - 0{,}2x$; 29) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y + 2\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}x = 5\frac{13}{14} - \frac{3}{7}y$; 30) $x = my + n$, $x = m'y + n'$;

31) $y = kx + b$, $y = k'x + b'$.

594. 1) $x + y = 17$, $x - y = 13$; 2) $x - y = 5$; $x + y = 1$; 3) $x + y = 347$, $x - y = 153$;

4) $x + 5y = 573$, $x + y = 181$; 5) $x + 3y = 20$, $x - 5y = 12$; 6) $5x + y = 40$, $3x + y = 26$;

7) $3x + y = 7{,}3$, $2x - y = 3{,}2$; 8) $4x + 3y = 9{,}7$, $7x + 3y = 12{,}7$; 9) $2x - 3y = 1$, $2x + y = 1{,}56$;

10) $3x - y = 1{,}3$, $6x + y = 32$; 11) $5x + 7y = 1{,}76$, $5x - 3y = 0{,}46$; 12) $4x + 3y = 4{,}3$, $5x - 3y = 2$;

13) $x + y = a$, $x - y = b$; 14) $y + mx = a$, $y + nx = b$; 15) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = a$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = b$.

595. 1) $x + 4y = 37$, $2x + 5y = 53$; 2) $7x + 3y = 104$, $3x - y = 20$; 3) $x + 2y = 7$, $x + 4y = 11$;

4) $2x + 5y = 1$, $6x + 7y = 3$; 5) $8x - 15y = -30$, $2x + 3y = 15$; 6) $x - 3y = 2$, $x - 2y = 5$;

7) $5x + 6y = 529$, $3x + 2y = 431$; 8) $24x + 7y = 27$, $8x - 33y = 115$; 9) $3x + 4y = 24$, $3x - 4y = 0$;

10) $2x + 3y = 41$, $3x + 2y = 39$; 11) $5x + 7y = 17$, $7x - 5y = 9$; 12) $4x - 5y = 33$, $3x + 2y = 19$;

13) $11x + 12y = 100$, $9x + 8y = 80$; 14) $18x - 35y = -13$, $15x + 28y = 275$; 15) $10x + 3y = 3$, $5x + 6y = 3$;

16) $3x + 7y = 7$, $5x + 3y = -36$; 17) $3x + 16y = 5$, $28y - 5x = 19$; 18) $17x + 4y = 51$, $11x + 16y = 33$;

19) $5x + 3y + 2 = 0$, $3x + 2y + 1 = 0$; 20) $21x + 8y + 66 = 0$, $23y - 28x + 13 = 0$; 21) $5x + 9y + 33 = 0$, $3x + 5y + 19 = 0$;

22) $10x + 7y + 4 = 0$, $6x + 5y + 2 = 0$; 23) $x = 3y - 19$, $y = 3x - 23$; 24) $x = 7y - 7$, $y = 5x + 5$;

25) $23x + 15y = 4\frac{1}{4}$, $48x + 45y = 18$; 26) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 6$, $3x - 4y = 4$; 27) $\frac{1}{7}x + \frac{1}{2}y = 3$, $\frac{1}{7}x - \frac{1}{4}y = 0$;

28) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y + 1$, $\frac{1}{4}x = \frac{4}{3}y - 10$; 29) $\frac{1}{3}y = \frac{1}{2}x - 1$, $\frac{1}{4}y = \frac{2}{5}x - 1$; 30) $\frac{1}{3}y = \frac{1}{5}x + 3$, $\frac{1}{5}y = x + 1$;

31) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = 17$, $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 19$; 32) $2\frac{1}{4}x = 3\frac{1}{3}y + 4$, $2\frac{1}{5}y = 3\frac{1}{3}x - 47$; 33) $2\frac{1}{8}x = 4\frac{1}{3}y + 4$, $1\frac{1}{8}x = 2\frac{1}{3}y + 2$;

34) $4\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{5}y = 12$, $3\frac{1}{4}x - 3\frac{2}{5}y = 5$; 35) $5\frac{1}{2}x - 1\frac{2}{5}y = 19$, $6\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{2}y = 15$; 36) $7x - 10y = 0{,}1$, $11x - 16y = 0{,}1$;

37) $7x - 5y = 3{,}042$, $3x - 2y = 1{,}323$; 38) $1{,}5x - 2y = 1$, $2{,}5x - 3y = 6$; 39) $5x - 4{,}9y = 1$, $3x - 2{,}9y = 1$.

596. 1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$; 2) $\frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3$, $\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4$; 3) $\frac{1{,}6}{x} - \frac{2{,}7}{y} = -1$, $\frac{0{,}8}{x} + \frac{3{,}6}{y} = 5$;

4) $17x - \frac{0{,}3}{y} = 3$, $16x - \frac{0{,}4}{y} = 1{,}7$; 5) $\frac{x}{3} + \frac{5}{y} = 4\frac{1}{3}$, $\frac{x}{6} + \frac{10}{y} = 2\frac{2}{3}$; 6) $\frac{5x}{0{,}7} + \frac{0{,}3}{y} = 6$, $\frac{10x}{7} + \frac{9}{y} = 31$.

597. 1) $5x - 4y + 1 = 0$
$1{,}7x - 2{,}2y + 7{,}9 = 0;$

2) $0{,}16x - 0{,}04y = 1$
$0{,}19x - 0{,}11y = 1;$

3) $2{,}7x + 2{,}6y = 8{,}8$
$0{,}9x + 2{,}2y = 4{,}4;$

4) $3{,}9x - 0{,}08y = 2{,}77$
$26x + 0{,}4y = 18;$

5) $27{,}4x - 31{,}5y = 11$
$21{,}4x - 26{,}5y = 1;$

6) $25{,}9x - 60{,}1y = 1$
$24{,}1x - 55{,}9y = 1;$

7) $2x - 3y = 5b - a$
$3x - 2y = a + 5b;$

8) $2x - 3y = -5a$
$3x - 2y = -5b;$

9) $5x + 3y = 4a + b$
$3x + 5y = 4a - b;$

10) $7x - 5y = 24a$
$5x - 7y = 24b;$

11) $3x + 2y = 5a^2 + ab + 5b^2$
$3y + 2x = 5a^2 - ab + 5b^2;$

12) $x + 2y = a$
$x - 2y = b;$

13) $3x - 2y = a^2 + 5ab + b^2$
$3y - 2x = a^2 - 5ab + b^2;$

14) $ax + by = a^2 - b^2$
$ax - by = a^2 + b^2;$

15) $3x - y = 2(a + b)^2$
$3y - x = 2(a - b)^2;$

16) $5x - 2y = 3(a + 7c)$
$5y - 2x = 3(a + 7b);$

17) $3x - 2y - 6x + 21 = 12x - 24y - 10$
$35x - 80 - 60y + 9x - 6y = 8x - 16y;$

18) $15x + 25y - 14 = 12x + 20y + 31$
$40x + 32y - 57 = 30x + 17y + 28;$

19) $3x + 9y + 210 = 10y + 270$
$20y - (24y + 60) = 7x - (y - 24) - 9x - 72;$

20) $5x - 17 + 3y = 48 - (4x - 5) - (5y - 22)$
$7x + 19 - 5y = 7y - (17 + 8x) + 3y - 9;$

21) $10(3x - 5y) - 9(x + y) = 644$
$5(7x - 2y) = 8(x - y + 5) + 271;$

22) $3(3x - y) - 5(x + 4y) = 12y - 400$
$4\left(x - \frac{y}{3}\right) + 7(y - 2x) = 18;$

23) $10(5x - y) = 44 + 8(6x + 7)$
$2x - 5y - 150 = 0;$

24) $17(2x - 73y) - 50 = 8x - (13y - 24x)$
$2(5y - 3x) = y - 6x;$

25) $19(5x + y) - 14(y - x) = 2(3x - 4y) + 3(35x + 4y)$
$3x - 5y = -7;$

26) $7x + y - 3(x + y) + 6 = 4(2x - y)$
$5(x - y) + 10y = 7(x - 3y) - 5(4x + y) - 13;$

27) $9(x + y - 3) = 2(2x - 5y) - 3(3x + 7y) - (x - 9y)$
$5\left(\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y\right) = 20;$

28) $3(5x + 0{,}5y) - (4x - 0{,}4y) = 5(7x - 0{,}4) - 0{,}75y$
$10x + 3y = 32;$

29) $5x(14y - 3) - 7y(10x - 3) = 5(2x + y + 1)$
$y(3x - 6) = 3x\left(y - 3\frac{1}{3}\right);$

30) $3(x - 1)(x + 1) - 2(3x - 7y) = (3x + 2)(x - 5) + 70$
$4(y - 2)^2 - 7(x - 2y) = 13 + y(4y - 3).$

598. 1) $12x - 13y = 8$
$17y - 4x = 48;$

2) $10x + 21y = 100$
$3x + 7y = 20;$

3) $8x + 11y = 30$
$78y - 24x = 30;$

4) $0{,}1x + 2y = 30$
$3y + 0{,}2x = 50;$

5) $0{,}1x + 2y = 21$
$36y + 39x = 6:$

6) $7y + 13x = 91$
$5x - 49y = 35;$

7) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 12$
$\frac{4x}{7} - \frac{y}{25} = 11;$

8) $\frac{x}{6} - \frac{y}{9} = 3$
$\frac{2y}{3} + \frac{x}{2} = 27;$

9) $\frac{3}{7}x + \frac{4}{5}y = 14$
$\frac{4}{5}y - \frac{1}{2}x = 1;$

10) $\frac{7}{8}x - \frac{3}{4}y = 34$
$\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}y = 87;$

11) $\frac{9x}{14} + \frac{3y}{5} = 30$
$\frac{3x}{14} - \frac{2y}{5} = 7;$

12) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{8}{15}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{15};$

13) $\frac{3}{4x} + \frac{5}{6y} = 4$
$\frac{3}{2x} - \frac{4}{3y} = -1;$

14) $\frac{3}{4y} - \frac{7}{2x} = 3\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8y} - \frac{2}{3x} - \frac{23}{48};$

15) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2$
$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 0;$

16) $20x + 27y = 181;$
$25x - 18y = 71;$

17) $16x - 5y = 29$
$24x + 2y = 110;$

18) $14x + 9y = 133$
$15y - 49y = -140;$

19) $21x + 4y = 23$
$5x - \frac{1}{6}y = 1;$

20) $6x + 6y = 5$
$5x + 1\frac{1}{2}y = 3;$

21) $7x + 9y = 75$
$3x - 4y = 20;$

22) $28x + 21y = 0$
$4y - 3x = 25;$

23) $100x - 10y = 0$
$10x + 4y = \frac{1}{2};$

24) $58x - 15y = 71$
$25y + 87x = 249;$

25) $\frac{18}{x} + \frac{y}{3} = 4$
$\frac{12}{x} - \frac{2y}{3} = 0;$

26) $\frac{16}{x} + \frac{y}{5} = 5$
$\frac{8}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{3};$

27) $\frac{5}{9}x + \frac{14}{y} = 3\frac{41}{45}$
$\frac{63}{2y} + 0{,}1x = 6\frac{1}{2};$

28) $\frac{5}{x + 2y} = \frac{7}{2x + y}$
$\frac{7}{3x - 2} = \frac{5}{6 - y};$

29) $\frac{1}{3x + 1} = \frac{2}{5y + 4}$
$\frac{1}{4x - 3} = \frac{2}{7y - 6};$

30) $\frac{x + 3y}{x - y} = 8$
$\frac{7x - 13}{3y - 5} = 4;$

31) $\frac{15x + 1}{45 - y} = 8$
$\frac{12y + 19}{x - 10} = 25;$

32) $\frac{3x + 1}{4 - 2y} = \frac{4}{3}$
$x + y = 1;$

33) $\frac{7 - 2x}{5 - 3y} = \frac{3}{2}$
$y - x = 4;$

34) $\dfrac{x-3}{y+2}=\dfrac{2}{3}$
$\dfrac{x+1}{y-2}=\dfrac{3}{2}$;

35) $\dfrac{8x+1}{1{,}5-y}=11$
$\dfrac{7y+0{,}3}{2x-0{,}3}=6$;

36) $\dfrac{x+2y+1}{2x-y+1}=2$
$\dfrac{3x-y+1}{x-y+3}=5$;

37) $\dfrac{x+3y+13}{4x+5y-25}=3$
$\dfrac{8x+y+6}{5x+3y-23}=5$;

38) $\dfrac{x-1}{x+15}=\dfrac{y-6}{y+2}$
$\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{y-4}{y-1}$;

39) $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{2(x-y)}{5}$
$\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{y-3}{3}=2y-x$;

40) $\dfrac{5x-y}{7}-\dfrac{2y-15}{5}=\dfrac{y-16}{14}$
$\dfrac{x+3y}{10}+9=\dfrac{y-9}{3}+\dfrac{3x+y}{15}$;

41) $\dfrac{2x+5y}{5}+12+y=-\dfrac{3x-25y}{3}$;
$4x+7y=41$;

42) $\dfrac{6x-5y}{2}+\dfrac{3x+11\frac{2}{3}y}{1}=3\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{4x-3y}{13}-\dfrac{3x+5y}{75}=0$;

43) $\dfrac{0{,}2x+0{,}1y}{2}-\dfrac{4x-y}{10}=\dfrac{3x+0{,}5y}{30}+\dfrac{x-y}{5}$
$\dfrac{3x+2y-1}{8}=3-\dfrac{\frac{4}{5}x-5y}{41}$;

44) $\dfrac{3y}{5}-\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{1-3y}{4}+\dfrac{15x}{8}$
$\dfrac{1}{5}(5x+y)-\dfrac{1}{2}(2y+x)=-8$;

45) $(2x+y-1):(3x+2y+11)=1:2$
$(5x-3y+4):(6x-3y+3)=3:4$;

46) $(x+y-4):(2x+y+1)=1:2$
$(2x+y-9):(x+2y+7)=3:4$;

47) $(x-4)(y+7)=(x-3)(y+4)$
$(x+5)(y-2)=(x+2)(y-1)$;

48) $(x+3)(y+5)=(x+1)(y+8)$
$(2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1)$;

49) $ax+by=2a$
$a^2x-b^2y=a^2+b^2$;

50) $ax+by=a^3+2a^2b+b^3$
$bx+ay=a^3+2ab^2+b^3$;

51) $x+y=\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x-y=\dfrac{4ab}{a^2-b^2}$

52) $ax+by=2a$
$x+y=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$;

53) $ay+bx-a^2=ab+by$
$ax-by-b^2=ab-ay$;

54) $2ay - ab - 2a^2 = ay + bx - 2b^2$
$bx + b^2 - ab = a^2 - by + 2bx;$

55) $px - qy = p^2 - q^2$
$qx - py = 0;$

56) $a(x - y) + b(x + y) = a^2 + b^2;\ bx = ay;$

57) $(2a + b)x - (2a - b)y = 8ab$
$(2a + b)x + (2a - b)y = 8a^2 + 2b^2;$

58) $ax - by = a^2 + b^2$
$bx + ay = a^2 + b^2;$

59) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2}{b}$
$x + y = \frac{a^2 + b^2}{ab};$

60) $\frac{x-1}{a} - \frac{y-1}{b} = 0$
$(a + b)(x - y) + 2b^2 = (a + b)^2 - 2ab;$

61) $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 - b^2}$
$\frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = 2;$

62) $\frac{x}{a^2 + ab + b^2} + \frac{y}{a^2 - ab + b^2} = 2a$
$y - x = 2b^3;$

63) $\frac{1}{ay + bx} = \frac{1}{a^2 + b^2}$
$ax - by = a^2 + b^2$

64) $\frac{x}{a-b} + \frac{y}{a} = a$
$\frac{x}{b} - \frac{y}{a-b} = -b;$

65) $x + y = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2 + ab + 3b^2}{a^2 - b^2};$

66) $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} + \frac{1}{a-b}$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b};$

67) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c$
$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = c_1;$

68) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c$
$\frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} = c;$

69) $(a - b)x + (a + b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b};$

70) $(a - b)\,x + y = \frac{a + b + 1}{a + b}$
$x + (a + b)\,y = \frac{a - b + 1}{a - b};$

71) $(a + b - c)\,x - (a - b + c)\,y = 4a\,(b - c)$
$x : y = (a + b - c) : (a - b + c);$

72) $(x+y):(x-y)=a:(b-c)$
$(x+c):(y+b)=(a+b):(a+c)$;

73) $\frac{x+1}{y+1}=\frac{a+b+c}{a-b+c}$
$\frac{x-1}{y-1}=\frac{a+b-c}{a-b-c}$;

74) $\frac{x-y+1}{x-y-1}=a$;
$\frac{x+y+1}{x+y-1}=b$;

75) $\frac{x+y+1}{x-y+1}=\frac{a+1}{a-1}$
$\frac{x+y+1}{x-y-1}=\frac{1+b}{1-b}$;

76) $\frac{x-y+1}{x+y-1}=a$
$\frac{x+y+1}{x-y-1}=b$.

599. Выяснить, какие из следующих систем уравнений имеют определенные решения, какие их не имеют.

1) $x-3y=5$
$3x-9y=15$;

2) $7x-5=6y+3$
$y+8x-7=x+7y+5$;

3) $3(x+y)=7$
$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$;

4) $y=3x+5$
$3y=9x+7$;

5) $x=\frac{y-16}{3}$;
$x=\frac{y+3}{3}$;

6) $y-x=0$
$2y=2x+2b$.

600. Даны уравнения

$$y+x=0 \text{ и } \frac{x}{2}=13-\frac{y}{2}.$$

Ученик рассуждает так: из второго уравнения имеем:

$$x=26-y.$$

Если подставить это выражение в первое уравнение, то получим:

$$26=0.$$

Следовательно, доказано, что $26=0$. Какая ошибка допущена при этом выводе?

601. Составить уравнения, противоречивые следующим:

1) $x=3$; 2) $y=5$; 3) $x+y=5$;
4) $3x+4y=7$; 5) $12x-y=8$; 6) $x:y=2:3$.

602. К следующим уравнениям добавить вторые так, чтобы получаемые при этом системы оказывались неопределенными:

1) $x-y=3$; 2) $x+y=0$;
3) $\frac{x}{2}+\frac{3}{4}y=5$; 4) $3x+2y=15$.

603. Дана система:

1) $\begin{aligned} 3x + 5y &= 8 \\ ax + y &= 9; \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 3x + ay &= 12; \end{aligned}$

при каком значении a система несовместна?

604. Дана система:

1) $\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ ax + y &= b; \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} 5x - 3y &= 1 \\ ax + y &= b; \end{aligned}$

при каких значениях a и b система несовместна и при каких неопределенна?

Системы уравнений с тремя и более неизвестными.

605. 1) $\begin{aligned} x + y &= 37 \\ x + z &= 25 \\ y + z &= 22; \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} y + z &= a \\ z + x &= b \\ x + y &= c; \end{aligned}$ 3) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ 3x + 2z &= 11 \\ 3y + 4z &= 10; \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 2x + 2y &= 7 \\ 7x + 9z &= 29 \\ y + 8z &= 17; \end{aligned}$ 5) $\begin{aligned} 5x + 3y &= 13 \\ 7x - 3z &= 8 \\ 3y + 5z &= 11; \end{aligned}$ 6) $\begin{aligned} 1{,}3x - 1{,}9y &= 1 \\ 1{,}7y - 1{,}1z &= 2 \\ 2{,}9z - 2{,}1x &= 3; \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ 3x - 2z &= 4 \\ 5y &= 4z; \end{aligned}$ 8) $\begin{aligned} x + y + z &= 36 \\ 4x &= 3y \\ 2x &= 3z; \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} x + 5y - 2z &= 5 \\ 7x - 3y - 4z &= -9 \\ 5x - y + 2z &= 31; \end{aligned}$ 10) $\begin{aligned} 2x + 7y - 3z &= 13 \\ 3x - 2y + 8z &= 7 \\ 5x + y + 2z &= 9; \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} 5x + 6y - 2z &= 50 \\ 2x - 3y + z &= 20 \\ 4x - 7y + 4z &= 45; \end{aligned}$ 12) $\begin{aligned} 4x - 3y - z &= 0 \\ 6x - 9y + 7z &= 7 \\ 2x + 3y - 5z &= -3; \end{aligned}$

13) $\begin{aligned} 3x + y - 2z &= -6 \\ 4x + 2y + 5z &= 33 \\ 5x + 3y - 2z &= 2; \end{aligned}$ 14) $\begin{aligned} 2x - 5y - z &= -36 \\ 4x + 2y - 7z &= 38 \\ 3x - 7y + 3z &= -40; \end{aligned}$

15) $\begin{aligned} 9x + 20y + 8z &= 7 \\ 45x - 30y + 2z &= 3 \\ 27x + 10y - 4z &= 2; \end{aligned}$ 16) $\begin{aligned} 10x - 2y - 3z &= -12 \\ x + 10y + 2z &= 58 \\ 3x - 4y + 5z &= 30; \end{aligned}$

17) $\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 3 \\ 7x + 4y - 8z &= 7; \\ 5x - 6y - 12z &= -1; \end{aligned}$ 18) $\begin{aligned} 7x - 5y + 3z &= 653 \\ 2x + 3x - 30z &= 200 \\ 5x - y - 90z &= 400; \end{aligned}$

19) $\begin{aligned} 3x - 4y + 4z &= 2 \\ 9x - 10y - 8z &= 2 \\ 12x + 5y - 6z &= 13; \end{aligned}$ 20) $\begin{aligned} 5x + 6y - 7z &= 0 \\ 8x + 3y - 6z &= 1 \\ 3z - 4x - y &= 1; \end{aligned}$

21) $x + 7y - 3z = 5$
$3x + 2y - 5z = 0$
$2x - 3y - 8z = -9;$

22) $2x + 3y + 4z = 29$
$3x + 4y - 2z = 10$
$4x - 2y + 3z = 14;$

23) $3x + 8y + 10z = 22$
$6x + 20y + 3z = 30$
$2x - 4y - 5z = -4;$

24) $2x - y - 8z = 1$
$3x + 7y - 56z = 0$
$4x - 2y - 7z = 11;$

25) $8x + 3y - 5z = -1$
$2x - 5y + 9z = 19$
$5x + 2y + 3z = 18;$

26) $7x - 3y - z = 50$
$2x + 9y - 8z = 1;$
$5x - 10y + 3z = 39;$

27) $3y + 2z - x = 9$
$3x + 5y - 11z = 5$
$10x - 2y - 7z = 20;$

28) $3x + 3y + 4z = 21$
$4x + 7y - 2z = 12$
$5x - 2y + 3z = 10;$

29) $7x - y - 3z = 10$
$5x - 3y - 7z = 0$
$4x + 2y + 5z = 15;$

30) $6x + 8y - 5z = 5$
$9x - 4y + 10z = 7$
$12x + 16y + 15z = 15;$

31) $7x - 4y - 3z = 31$
$6x - 10y + 5z = 25$
$2x - 5y + 2z = 0;$

32) $4x - 2y - z = 7$
$2x - 3y + 5z = 33$
$6x - 5y + 3z = 3;$

33) $2x + 3y + 4z = 49$
$4x + 9y - 3z = 36$
$6x - 5y + 6z = 35;$

34) $4x + 3y - 8z = 26$
$6x + 9y + 10z = 70$
$18x - y + 6z = 130;$

35) $6x + 7y + 3z = 5$
$8x + 14y - 5z = 0$
$12x - 21y - 4z = -5;$

36) $3x + 5y - 5z = 30$
$8x - 7y + 3z = 40$
$10x - 4y - z = 50;$

37) $5x + 7y - 10z = 57$
$4x - 3y + 12z = 4$
$10x - 5y - 8z = 6;$

38) $11x + 15y + 3z = 100$
$8x + 10y - 4z = 2$
$7x - 2y - z = -3;$

39) $0{,}4x + 0{,}3y - 0{,}2z = 4$
$0{,}6x - 0{,}5y + 0{,}3z = 5$
$0{,}3x + 0{,}2y + 0{,}5z = 22;$

40) $0{,}6x - 0{,}3y - 0{,}5z = -1$
$0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}3z = 5$
$x + 0{,}7y - 0{,}1z = 8;$

41) $0{,}3x + 0{,}4y + 0{,}5z = 43$
$0{,}6x - 0{,}8y - 0{,}1z = -38$
$0{,}9x + y - 1{,}1z = 15;$

42) $0{,}1x + 0{,}2y - z = 110$
$0{,}3x - y + 0{,}2z = 202$
$0{,}4x + 0{,}9y + z = 500;$

43) $1{,}2x - 1{,}8y + 0{,}5z = 5$
$0{,}9x - 0{,}4y - 0{,}1z = 18$
$0{,}3x + 2{,}4y - 1{,}3z = 44;$

44) $2x + y + z = 4$
$5x - 3y + 21z = 23$
$15x + 13y - 11z = 17;$

45) $8x + y + 7z = 10$
$4x - 2y + z = 15$
$4x + 3y + 6z = 18;$

46) $10x + 11y - 2z = 6$
$3x - 7y + z = 14$
$x + 32y - 5z = 7;$

47) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{3}z = 45$
$5{,}1x + \frac{6}{5}y - 4z = 15$
$0{,}1x - 0{,}4y + \frac{4}{5}z = 5;$

48) $\frac{x+y}{7} + 3 = \frac{z}{2}$
$\frac{x-y}{5} - \frac{z}{8} = 0$
$\frac{x-z}{y} = -2.$

606. 1) $x + y - z = 17$
$x + z - y = 13$
$y + z - x = 7;$

2) $y + z - x = a$
$z + x - y = b$
$x + y - z = c;$

3) $x + y + z = 26$
$x : z = 11 : 7$
$y : z = 14 : 9;$

4) $ax + by + cz = r$
$x : y = m : n$
$y : z = p : q;$

5) $x + y + z = 9$
$x + 2y + 4z = 15$
$x + 3y + 9z = 23;$

6) $x + y + z = 3$
$2x + 4y + 8z = 13$
$3x + 9y + 27z = 34;$

7) $7x + 6y + 7z = 100$
$x - 2y + z = 0$
$3x + y - 2z = 0;$

8) $3x + 2y + 3z = 110$
$5x + y - 4z = 0$
$2x - 3y + z = 0;$

9) $x + y + z = 9$
$x + 2y + 3z = 14$
$x + 3y + 6z = 20;$

10) $x + 2y + 3z = 32$
$2x + 3y + z = 42$
$3x + y + 2z = 40;$

11) $2x + 3y + 4z = 14$
$3x - 2y - z = 12$
$5x + 4y + 3z = 14;$

12) $3x + 3y + z = 17$
$3x + y + 3z = 15$
$x + 3y + 3x = 13;$

13) $5x - y + 3z = a$
$5y - z + 3x = b$
$5x - x + 3y = c;$

14) $7x + 11y + z = a$
$7y + 11z + x = b$
$7z + 11x + y = c;$

15) $x + 2y + 3z = 15{,}4$
$3x + 5y + 7z = 37{,}4$
$5x + 8y + 11z = 59{,}5;$

16) $x + 2y - x = 4{,}6$
$y + 2z - z = 10{,}1$
$x + 2x - y = 5{,}7;$

17) $\frac{x+1}{y+1} = 2$
$\frac{y+2}{z+1} = 4$
$\frac{z+3}{x+1} = \frac{1}{2};$

18) $\frac{3x+y}{z+1} = 2$
$\frac{3y+z}{x+1} = 2$
$\frac{3z+x}{y+1} = 2;$

19) $\frac{x+y}{y-z} = 10$
$\frac{x+z}{x-y} = 9$
$\frac{y+z}{x+5} = 1;$

20) $\frac{x+3}{y+z} = 2$
$\frac{y+3}{x+z} = 1$
$\frac{z+3}{x+y} = \frac{1}{2}.$

607. 1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 15$
$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 7$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 3;$

2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 15$
$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 7$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 5;$

3) $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=6\frac{2}{3}$
$\frac{5}{x}-\frac{3}{y}+\frac{6}{z}=5\frac{1}{2}$
$\frac{4}{x}+\frac{5}{y}-\frac{7}{z}=4\frac{1}{6}$;

4) $\frac{1}{x}+\frac{10}{y}+\frac{100}{z}=3$
$\frac{10}{x}-\frac{100}{y}+\frac{1000}{z}=10$
$\frac{5}{x}-\frac{20}{y}-\frac{300}{z}=0$;

5) $\frac{6}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=4$
$\frac{3}{x}+\frac{8}{y}+\frac{5}{z}=4$
$\frac{9}{x}+\frac{12}{y}-\frac{10}{z}=4$;

6) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{5}{12}$
$\frac{2}{x}-\frac{1}{y}-\frac{4}{z}=\frac{5}{6}$
$\frac{3}{x}+\frac{5}{y}-\frac{2}{z}=2\frac{3}{4}$;

7) $\frac{1}{x}-\frac{4}{y}+\frac{3}{z}=2$
$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$
$\frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{6}{z}=3$;

8) $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{2}{a}$
$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{2}{b}$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{2}{c}$.

608. 1) $x+y=9$
$x+z=11$
$y+z=12$;

2) $x+y=60$
$x-z=10$
$y-z=6$;

3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$
$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$
$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=4$;

4) $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=5$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1$
$\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=2$;

5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}$
$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{18}$
$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{13}{36}$;

6) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}$
$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}$
$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{3}{10}$;

7) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7$
$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=5,1$;
$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=2,1$;

8) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=4,9$
$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=1,9$;

9) $\frac{xy}{x+y}=\frac{12}{7}$
$\frac{xz}{x+z}=\frac{15}{8}$
$\frac{yz}{y+z}=\frac{20}{9}$;

10) $\frac{xy}{x+y}=\frac{ab}{b-a}$
$\frac{xz}{x+z}=\frac{ac}{c-a}$
$\frac{yz}{y+z}=-\frac{bc}{b+c}$;

11) $xz+yz+xy=9xyz$
$2yz+3xz+4xy=25xyz$
$2yz-5xy-2xz=-20xyz$;

12) $xy+yz-xz=\frac{5}{6}xyz$
$2yz+3xz-4xy=2\frac{1}{6}xyz$
$5yz+6xy-8xz=3xyz$;

13) $$\frac{7}{2x-3y}-\frac{2}{10z-3y}+\frac{3}{3y-8z}=8$$
$$\frac{2}{2x-3y}-\frac{3}{10z-3y}+\frac{1}{3y-8z}=0$$
$$\frac{5}{2x-3y}-\frac{4}{10z-3y}+\frac{7}{3y-8z}=8;$$

14) $$\frac{20}{2x+y}-\frac{20}{3y-z}-\frac{20}{5x-z}=-5$$
$$\frac{10}{2x+y}+\frac{5}{3y-z}-\frac{3}{5x-z}=\frac{2}{5}$$
$$\frac{5}{2x+y}+\frac{2}{3y-z}-\frac{2}{5x-z}=\frac{1}{20};$$

15) $ax+by-cz=2ab$
$by+cz-ax=2bc$
$cz+ax-by=2ac$;

16) $(a+b)a+(a-b)z=2bc$
$(b+c)y+(b-c)x=2ac$
$(c+a)z+(c-a)y=2ab$.

609. Выяснить, какие из следующих систем уравнений имеют определенные решения, какие их не имеют.

1) $x+y=28$
$x+z=30$
$2x+y+z=58$;

2) $x+y=33$
$y-z=10$
$x+z=23$;

3) $2x=5z$
$3y=4z$
$8x=15y$;

4) $x=2y$
$4y=5z$
$2x=7z$;

5) $x:y=2:3$
$y:z=5:6$
$x:z=5:9$;

6) $2x+y=7$
$2y+z=9$
$4x-z=1$.

610. Решить системы:

1) $x:y:z:u=2:3:4:5$
$x+y+z+u=7$;

2) $x:y:z:u=1:2:3:4$
$9x+7y+3z+2u=200$;

3) $x:y:z:u=a:b:c:d$
$mx+ny+pz+qu=r$;

4) $x:y=2:1$
$x:z=3:1$
$y:u=3:1$
$\dfrac{y^2-z^2}{x-u}=1$;

5) $y+z=au$
$x+z=bu$
$x+y=cu$
$\dfrac{1-x}{1-y}=\dfrac{a}{b}$;

6) $x+2y=5$
$y+2z=8$
$z+2u=11$
$u+2x=6$;

7) $x+y=m$
$y+z=a$
$z+u=n$
$u-x=b$;

8) $y+z+u=a$
$z+u+x=b$
$u+x+y=c$
$x+y+z=d$;

9) $x+y-z=a$
$y+z-u=b$
$z+u-x=c$
$u+x-y=d$;

10) $$\begin{aligned} x+3y-z&=1\\ y+3z-u&=4\\ z+3u-x&=11\\ u+3x-y&=2; \end{aligned}$$

11) $$\begin{aligned} 3x+y+z&=20\\ x+4y+3u&=30\\ 6x+z+3u&=40\\ 8y+3z+5u&=50; \end{aligned}$$

12) $$\begin{aligned} 7x+5y+z-u&=a\\ 7y+5z+u-x&=b\\ 7z+5u+x-y&=c\\ 7u+5x+y-z&=d; \end{aligned}$$

13) $$\begin{aligned} 11x+9y+z-u&=a\\ 11y+9z+u-x&=b\\ 11z+9u+x-y&=c\\ 11u+9x+y-z&=d; \end{aligned}$$

14) $$\begin{aligned} \frac{x}{3}-\frac{y}{5}+\frac{z}{6}-\frac{u}{10}&=2\\ -\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{9}-\frac{u}{5}&=-2\\ \frac{x}{2}-\frac{2y}{15}-\frac{z}{2}+\frac{u}{2}&=5\\ -\frac{x}{6}+\frac{7y}{15}+\frac{z}{3}-\frac{u}{5}&=7; \end{aligned}$$

15) $$\begin{aligned} x+y+z+u&=112\\ \frac{x}{5}-\frac{y}{4}+\frac{z}{3}+\frac{u}{2}&=22\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{z}{4}-\frac{u}{6}&=32\\ \frac{x}{7}+\frac{y}{5}-\frac{z}{10}-\frac{u}{5}&=8{,}8; \end{aligned}$$

16) $$\begin{aligned} 2x-3y+4z&=13\\ 2x-3z+4u&=15\\ 3x-2y-5u&=-38\\ y+z-u&=1; \end{aligned}$$

17) $$\begin{aligned} x-4y+2z&=-8\\ 5y-2z+4u&=23\\ 3x-4y-7u&=10\\ y-5u&=5. \end{aligned}$$

611. 1) $$\begin{aligned} x+3y&=19\\ y+3z&=8\\ z+3u&=7\\ u+3v&=11\\ v+3x&=15; \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x+y&=a\\ y+z&=b\\ z+u&=c\\ u+v&=d\\ v+x&=e; \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 2x+y+z&=5\\ 2y+z+u&=5\\ 2z+u+v&=7\\ 2u+v+x&=12\\ 2v+x+y&=11; \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} x+2y-z&=12\\ y+2z-u&=10\\ z+2u-v&=8\\ u+2v-x&=1\\ v+1x-y&=9; \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} x+y+z&=a\\ y+z+u&=b\\ z+u+v&=c\\ u+v+x&=d\\ v+x+y&=e; \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} x-y+z&=a\\ y-z+u&=b\\ z-u+v&=c\\ u-v+x&=d\\ v-x+y&=e; \end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned} x+y-t&=a\\ y+z-v&=b\\ z+t-x&=c\\ t+v-y&=d\\ v+x-z&=e; \end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned} x+y-z&=a\\ y+z-u&=b\\ z+u-v&=c\\ u+v-x&=d\\ v+x-y&=e; \end{aligned}$$

9) $\begin{aligned} y+z+u+v&=a\\ z+u+v+x&=b\\ u+v+x+y&=c\\ v+x+y+z&=d\\ x+y+z+u&=e; \end{aligned}$ 10) $\begin{aligned} x+y+z-u&=a\\ y+z+u-v&=b\\ z+u+v-x&=c\\ u+v+x-y&=d\\ v+x+y-z&=e; \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} y+z+u+v-x&=a\\ z+u+v+x-y&=b\\ u+v+x+y-z&=c\\ v+x+y+z-u&=d\\ x+y+z+u-v&=e; \end{aligned}$ 12) $\begin{aligned} x+y+z-u-v&=a\\ y+z+u-v-x&=b\\ z+u+v-x-y&=c\\ u+v+x-y-z&=d\\ v+x+y-z-u&=e; \end{aligned}$

13) $\begin{aligned} x+y+z+u+v&=15\\ x+2y+4z+8u+16v&=57\\ x+3y+9z+27u+81v&=179\\ x+4y+16z+64u+256v&=453\\ x+5y+25z+125u+625v&=975. \end{aligned}$

§ 4. Составление систем уравнений.

612. 1) Найти два числа, сумма которых равна 175, а разность 125.

2) Полуразность двух чисел $1\frac{1}{4}$, а полусумма $3\frac{1}{4}$. Найти эти числа.

3) Одно из двух чисел больше другого на 9,1. Сумма этих чисел 10,1. Найти эти числа.

4) Найти два числа, если их сумма a, а разность b.

Вычислить решение при:

	1	2	3	4	5	6	
a	13	$+13$	8	$\frac{3}{5}$	$p+q$	m^2+n^2	m^2-n^2
b	5	-13	0	$\frac{5}{3}$	$p-q$	m^2-n^2	m^2+n^2.

5) Сумма двух чисел равна 1000; сумма удвоенного первого с утроенным вторым равна 2222. Найти числа.

6) Найти два числа по следующим условиям: если первое увеличить на a, то получится число в k раз больше второго; если же второе увеличить на b, то получится число в l раз больше первого.

7) Найти два числа, если их сумма равна a, а отношение равно k. Вычислить решения при:

	1	2	3
a	25	5,6	10
k	1,5	$\frac{3}{5}$	10.

8) Найти два числа, если второе число в k раз и на k единиц меньше первого.

9) Найти два числа по следующим условиям: если первое число умножить на m и к произведению приложить второе, то получится a; если второе умножить на n и к произведению приложить первое, то получится b.

10) Определить два числа по следующим данным: если первое число умножить на 5, а второе на 7, то сумма этих произведений будет равна 100; если же первое умножить на 7, а второе на 5, то сумма полученных таким образом произведений будет 116.

11) Если первое из двух искомых чисел умножить на 8, а второе на 3 и произведение сложить, то сумма будет равна 310; если же первое разделить на 8, а второе на 3, то сумма частных будет равна 10. Найти эти числа.

12) Сумма двух чисел равна 350. Если первое разделить на второе, то в частном получится 8 и в остатке тоже 8. Найти эти числа.

13) Найти два числа, если половина первого при сложении с третью второго дает 8, а треть первого при сложении с половиной второго дает 6.

14) Найти два числа, если их разность, сумма и произведение относятся, как $1:2:3$.

15) Найти два числа, сумма которых относится к их разности, как $3:2$, а к произведению—как $2:5$.

16) Сумма двух чисел 30, а разность квадратов 120. Найти эти числа.

17) Разность двух чисел равна 1, а разность квадратов равна 9. Найти эти числа.

18) Если первое из двух неизвестных чисел разделить на 5, а второе на 3 и результаты сложить, то получим 5; если первое разделить на 3, а второе на 5 и результаты сложить, то получим 3. Найти числа.

19) Найти двузначное число по следующим условиям: если цифры числа переставить и полученное таким образом число сложить с искомым, то получится 77. Если искомое число разде-

лить на число, полученное перестановкой цифр, то и в частном и в остатке получится 2.

20) Двузначное число на 9 больше числа, написанного теми же цифрами, но в обратном порядке. Если это число разделить на сумму его цифр, то в частном получим 4 и в остатке 3. Найти это число.

21) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 8 и в остатке 2. Если искомое число написать теми же цыфрами, но в обратном порядке, и разделить его на сумму цифр, увеличенную на 1, то получится в частном 2 и в остатке 6. Найти это число.

22) Если в искомом двузначном числе переставить цифры, то полученное таким образом число будет на 18 больше искомого. Если же разделить искомое число на сумму его цифр, то в частном получим 4 и в остатке 9. Найти число.

23) От деления одного числа на другое получается в частном $a+1$; если же делитель увеличим на 2, то в частном будет $a-1$. Найти делимое и делитель.

24) Если к делимому прибавим 8, а от делителя отнимем 8, то в частном получим 8; если же от делимого отнимем 8, а к делителю придадим 8, то получим в частном 7 и в остатке 88. Найти делимое и делитель.

25) Дробь обращается в $\frac{1}{3}$, если ее числитель уменьшить на 3, а знаменатель увеличить на 2. Эта же дробь принимает значение $\frac{3}{4}$, если ее числитель увеличить на 1, а знаменатель уменьшить на 1. Найти эту дробь.

26) Если к числителю искомой дроби прибавить ее знаменатель, а от знаменателя отнять числитель, то искомая дробь принимает значение 14. Если теперь к числителю той же дроби прибавить знаменатель, уменьшенный на 8, а от знаменателя отнять числитель, уменьшенный на 8, то значение новой дроби равно 2. Найти эту дробь.

27) Дробь обладает следующими свойствами: если уменьшить числитель на 4, а знаменатель увеличить на 1, то дробь примет значение $\frac{1}{2}$; если же к числителю прибавить знаменатель, а из знаменателя вычесть 5, то дробь примет значение, равное 3. Определить эту дробь.

28) Какая дробь обращается в $\frac{1}{6}$, если числитель и знаменатель ее уменьшить на 11, и в $\frac{1}{7}$, если числитель и знаменатель уменьшить на 12?

29) Дробь, обращающаяся по сокращении в $\frac{3}{4}$, получит после сокращения значение $\frac{5}{7}$, если ее числитель и знаменатель уменьшить на 6. Определить эту дробь.

30) Какая дробь даст после сокращения $\frac{1}{2}$, если числитель ее и знаменатель увеличить на 1, и $\frac{1}{4}$, если числитель и знаменатель ее уменьшить на 1?

32) Если прибавить к числителю неизвестной дроби 1, то дробь по сокращении обратится в $\frac{1}{2}$; если же, не меняя числителя искомой дроби, увеличить на единицу ее знаменатель, то она обратится по сокращении в $\frac{1}{3}$. Найти дробь.

32) Если к числителю и знаменателю прибавить по 3, то дробь примет значение $\frac{3}{5}$; если же из числителя и знаменателя дроби вычесть по 5, то дробь примет значение $\frac{1}{2}$. Найти неизвестную дробь.

33) Если делимое увеличить в 4 раза, а делитель оставить без перемены, то частное увеличится на 9 единиц; если же делимое увеличить на 4 единицы, а делитель оставить без перемены, то частное будет равно 9. Найти делимое и делитель.

34) Определить два двузначных числа по следующим условиям: если первое из них написать перед вторым, то получившееся таким образом четырехзначное число будет на 9 единиц больше второго числа, увеличенного в 58 раз. Если же второе число поместить перед первым, то получается число, в 176 раз большее первого.

35) Сумма двух трехзначных чисел равна 999. Если второе из этих чисел поместить перед первым, то полученное таким образом шестизначное число будет в 6 раз больше числа, получающегося в том случае, если первое поставить перед вторым. Найти эти числа.

36) Сумма двух трехзначных чисел равна 999. Если второе из этих чисел поместить перед первым, то отношение полученного таким образом шестизначного числа к числу, получающемуся в том случае, если первое поставить перед вторым, равно 2 : 5. Найти эти числа.

37) Сумма двух чисел равна 15390; одно из них однозначное, а другое пятизначное. Если первое поставить перед вторым, то полученное шестизначное число будет в 4 раза больше числа, получающегося в том случае, если второе поместить перед первым. Найти эти числа.

38) Выражение $y = x^2 + px + q$ принимает значения:

$$\begin{array}{ll} 2 & \text{при } x = 1 \\ 0 & \quad\; x = -1. \end{array}$$

Определить коэффициенты p и q.

39) Выражение $y = ax^2 + b$ принимает значения:

$$\begin{array}{ll} -3 & \text{при } x = 3 \\ +5 & \quad\; x = 1. \end{array}$$

Определить a и b.

613. Составить задачи, решение которых сводилось бы к решению следующих систем уравнений:

1) $\frac{x+b}{2} = 4$
$\frac{x-y}{2} = 1;$

2) $y + 5x = 40$
$y + 3x = 26;$

3) $x = 3y - 2$
$x = 5y - 12;$

4) $ax + by = c$
$mx - ny = 0;$

5) $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$
$\frac{x+1}{y+1} = \frac{5}{7}.$

*6) $3x - 2y = 11$
$2x + 3y = 16.$

614. 1) Найти три числа по следующим условиям: сумма второго и удвоенного первого дает 75, сумма третьего и удвоенного второго дает 65 и сумма первого и удвоенного третьего 55.

2) Сумма трех чисел равна 100. Если второе из них разделить на первое, то в частном получится 5 и в остатке 1. При делении третьего на второе получается тот же самый разультат. Найти эти числа.

3) Сумма трех чисел равна 200. От деления первого числа на второе получается в частном 1 и в остатке 2; от деления первого же числа на третье в частном получается 2 и в остатке 1. Определить эти три числа.

4) Разложить 300 на три слагаемых так, чтобы частные от деления первого слагаемого на 3, второго на 5 и третьего на 7 были равны между собою.

5) Определить три числа по следующим условиям. Если уменьшить первое и второе на 3, то полученные числа будут относиться, как 1 : 2, если же первое и третье уменьшить на 4, то полученные числа будут находиться в отношении 1 : 3; наконец, если второе и третье увеличить на 5, то результаты будут относиться, как 3 : 4.

6) Найти три таких числа, что, если к сумме любых двух из них прибавить удвоенное третье, то получатся соответственно числа 60, 54 и 50.

7) Найти три таких числа, что если к каждому из них прибавить утроенную сумму двух остальных, то получим соответственно следующие суммы: 19, 27 и 31.

8) Найти три числа, если известно, что они относятся между собой, как $2:3:4$, а сумма их равна 999.

9) Разделить число a на три части так, чтобы первая относилась ко второй, как $m:n$, а вторая к третьей, как $p:q$.

10) Найти три дроби, имеющие числителями 1, если известно, что сумма первых двух дробей равна $\frac{1}{12}$, сумма первой и третьей равна $\frac{1}{15}$, а сумма второй и третьей равна первой дроби.

11) Трехзначное число, сумма цифр которого равна 15, на 99 больше числа, написанного теми же цифрами, но в обратном порядке. Если число, обозначенное средней цифрой, разделить на сумму двух остальных, то получится 1 в частном и 1 в остатке. Определить трехзначное число.

12) Сумма цифр трехзначного числа равна 9; число десятков менее числа сотен и более числа единиц на одно и то же число. Если написать цифры в обратном порядке, то новое число будет менее искомого на 396 единиц. Опредилить это число.

13) Найти число, состоящее из трех цифр, сумма которых равна 8, при чем число сотен на 2 меньше числа десятков; если же переставить цифры в обратном порядке, то получится число меньше искомого на 297.

14) Найти число, состоящее из четырех цифр, сумма которых равна 18, если известно, что: 1) сумма цифр, стоящих на четных местах, на 8 менее суммы цифр, стоящих на нечетных местах; 2) прибавить к искомому числу 4725, получим число изображенное теми же цифрами, но в обратном порядке; 3) разделив искомоечисло на сумму его крайних цифр, получим в частном 320 и в остатке 8.

15) Найти значения коэффициентов a, b, c в выражении $y = ax^2 + bx + c$, если y принимает значения:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \text{при} & x = 1 \\ 14 & \text{»} & x = 3 \\ 52 & \text{»} & x = 5. \end{array}$$

16) Найти значения коэффициентов a, b, c в выражении $y = ax^2 + bx + c$, если y обращается в 0

$$\text{при} \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3. \end{cases}$$

17) Определить коэффициенты b, c, d, e в выражении $y = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, если y обращается в 0 при $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$.

18) Найти значения коэффициентов b, c, d, e, если y обращается в 0 при $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 3$, $x = \frac{1}{3}$.

615. 1) При голосовании некоторого предложения оно прошло большинством 16 голосов из 50 голосовавших. Сколько голосов было за, сколько против этого предложения?

2) Куплено 45 метров ковра и 13 метров клеенки за 39 рублей; в другой раз, покупая по той же цене, заплатили за 40 метров ковра рублем дешевле, нежели за 36 метров клеенки. Что стоит метр ковра и метр клеенки?

3) Отцу и сыну вместе 80 лет. Четыре года тому назад отец был в 8 раз старше сына. Сколько лет каждому?

4) Отец старше сына на 36 лет. Через 5 лет отец будет в $3\frac{1}{4}$ раза старше сына. Сколько лет каждому?

5) Четыре года тому назад отец был в $5\frac{1}{2}$ раз старше своего сына; через 4 года отец будет в $3\frac{1}{2}$ раза старше его. Сколько лет каждому?

6) 5 лет тому назад лета двух братьев относились, как 3 : 2, а через пять лет будут относиться, как 11 : 8. Сколько лет каждому из них в настоящее время?

7) Длина Оки, увеличенная на 220 *км*, составляет $\frac{3}{4}$ длины Камы, а увеличенная на 5,5 *км* относится к длине Камы, как 16 : 25. Найти длину каждой из этих рек.

8) 7 лет тому назад сестра была вдвое старше брата, а через год она будет в полтора раза старше его. Сколько лет каждому из них теперь?

9) Одно лицо говорит другому: «Мне вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам теперь; когда же вам будет столько лет, сколько мне теперь, то мне не достанет 7 лет, чтобы быть вдвое старше, чем вы в настоящее время»: Сколько лет каждому?

10) Кооператив, смешав 2 *кг* чая низшего сорта с 4,4 *кг* высшего сорта, получил смесь, ценою по 1 р. 75 к. килограмм; в другой раз, взяв низшего сорта 4,4 *кг*, а высшего 2 *кг*, получил смесь, ценою в 1 р. 45 к. килограмм. Определить цену килограмма каждого сорта.

11) В магазине $2\frac{1}{2}$ десятка груш и $1\frac{1}{2}$ десятка яблок стоят 3 рубля; при покупке по ошибке положили $1\frac{1}{2}$ десятка груш и $2\frac{1}{2}$

десятка яблок и дали сдачи 40 коп. Что стоил десяток груш и что десяток яблок?

12) Для оклейки квартиры куплены обои двух сортов; за 17 кусков лучшего сорта заплачено на 2 р. 50 к. дороже, чем за 20 кусков худшего сорта; притом известно, что 3 куска первого сорта стоят столько же, сколько 5 кусков второго. Сколько стоит кусок обоев каждого сорта?

13) На странице небольшого формата помещается средним числом 1300 букв при крупном шрифте и 1850 букв при мелком шрифте. Статья в 37250 букв занимает ровно 24 страницы. Сколько страниц напечатано крупным шрифтом и сколько мелким?

14) Разносчик, купив сотню яблок и сотню груш, продал из них в первый день 84 яблока и 25 груш за 2 р. 43 к., при чем получил прибыли по $1\frac{1}{4}$ копейки на каждое яблоко и по копейке на каждую грушу. На другой день он продал остальной свой товар за 83 коп., при чем получил убытку по $\frac{1}{4}$ коп. на каждое яблоко и по копейке на каждую грушу. Сколько он сам платил за яблоко и за грушу?

15) Кооператив, продав за 9 руб. 76 коп. 40 метров коленкора и 20 метров миткаля, получил при продаже всего этого товара 1 р. 76 к. прибыли. Сколько ему самому стоил метр коленкора и метр миткалю, если на коленкоре он получил 30% прибыли, а на миткале 2% убытка?

16) Кооператив купил на 600 руб. 10 кусков полотна и 33 куска мадеполама, но заплатил за товар только 496 руб. 50 коп., так как с полотна ему сделали 20% скидки с продажной цены, а с мадеполама 15%. Определить продажную цену куска полотна и куска мадеполама.

17) Некто получает со своего капитала ежегодно 2160 руб. процентных денег. Если бы еще повысили процентную таксу на $\frac{1}{2}$%, то он получал бы в год дохода на 240 руб. больше. Как велик капитал и по сколько % он отдан в оборот?

18) Капитал приносит ежегодно a рублей прибыли. Если процентную таксу повысить на p %, то капитал ежегодно будет давать процентных денег на d рублей больше. Как велик капитал и какова процентная такса?

19) Капитал одного кооператива меньше капитала другого на 1000 рублей и больше капитала третьего на 2000 рублей; первый кооператив получает на свой капитал $1\frac{1}{2}$ процентами менее, нежели второй, и 2 процентами более, нежели третий. Определить капиталы кооперативов и проценты, ими получаемые,

если известно, что первый получает в год на 395 рублей менее дохода, чем второй, и на 520 рублей более третьего.

20) Учитель задал ученику пример на деление. Ученик получил в частном 57 и в остатке 52. Он сделал поверку, умножив делитель на частное и приложив остаток, при чем получил 17380. Это не совпало с заданием. Ученик сделал ошибку именно в том, что при умножении он принял в делителе на втором месте справа 6 за 0. Найти делимое и делитель.

21) Учитель дал двум ученикам перемножить два числа. Затем для поверки он посоветовал разделить произведение на меньший из сомножителей. Ни у того, ни у другого не получилось верного результата. Первый получил 575 в частном и в остатке 227; второй 572 в частном и в остатке 308. Ошибка их состояла в том, что каждый из них при умножении забыл прибавить по единице, только один в одном месте, другой в другом. Таким образом, первый получил в произведении на 100, а второй на 1000 меньше, чем следовало. Определить числа, данные для умножения.

22) Некто просит за золотые часы с цепочкою 190 р., за серебряные часы с тою же цепочкою 70 руб., а за те и другие часы без цепочки 180 р. Что стоит каждая вещь?

23) Сумма лет трех братьев равна 60; лета среднего брата составляют среднее арифметическое между летами старшего и младшего; известно также, что 12 лет тому назад лета старшего брата равнялись сумме лет остальных двух братьев. Сколько лет каждому из них в настоящее время?

24) На линии М.-Ярославско-Архангельской ж. дороги расположены станции: Москва, Мытищи, Пушкино, Софрино и Сергиево. От Москвы до Сергиева — 70 *км*, от Москвы до Пушкина — 30 *км*, от Мытищ до Софрина 29 *км*, от Мытищ до Сергиева — 52 *км*. Определить расстояния между каждыми двумя соседними станциями.

25) Москва, Вязьма и Ржев соединены друг с другом железнодорожными путями, образующими треугольник, в вершинах которого находятся эти города. Определить длины железнодорожных путей, соединяющих города друг с другом, если путь из Москвы в Вязьму через Ржев равняется 360 *км*, из Москвы в Ржев через Вязьму 370, и из Ржева в Вязьму через Москву — 480 километрам.

26) Из Коврова можно проехать в Арзамас либо через Нижний-Новгород (314 *км* железнодорожного пути), либо через Муром (240 *км* железнодорожного пути). Определить расстояния от Коврова до Нижнего-Новгорода и до Мурома, если от Нижнего до Мурома через Ковров 306 *км* и если железнодорожные пути Арзамас — Нижний и Арзамас — Муром имеют одинаковую длину.

27) На три поезда, отправлявшихся один после другого, было продано билетов от Ленинграда до Ораниенбаума: на первый поезд 140 третьего класса, 70 второго и 28 первого, всего на сумму 130 руб. 90 коп.; на второй—121 третьего класса, 44 второго класса и 22 первого класса, на общую сумму 100 руб. 10 коп.; на третий—120 третьего класса, 36 второго и 12 первого, на общую сумму 84 руб. Определить стоимость билета каждого класса от Ленинграда до Ораниенбаума.

28) На поезд, шедший из Москвы в Ленинград, было продано 140 билетов третьего класса, 45 второго и 15 первого, на сумму 1568 руб. Что стоит билет каждого класса от Москвы до Ленинграда, если стоимости билетов третьего, второго и первого классов находятся в отношении $2:3:5$?

29) Торговец продал трем покупателям партию чая, содержавшую 56 *кг* высшего сорта, 72 среднего и 80 низшего. Первый покупатель взял $\frac{1}{2}$ первого сорта, $\frac{1}{3}$ второго и $\frac{1}{4}$ третьего и заплатил 378 руб.; второй покупатель взял $\frac{1}{3}$ первого сорта, $\frac{1}{4}$ второго и половину третьего и заплатил 382 рубля. Третий взял остальное и заплатил 306 руб. Что стоит килограмм каждого сорта?

Задачи из геометрии.

616. 1) Внутри круга, диаметр которого равен d, дана точка P на расстоянии p от центра. Как велико наименьшее и наибольшее расстояние точки P от окружности?

2) Наибольшее расстояние между точками двух концентрических окружностей равно a, наименьшее b. Определить радиусы этих окружностей.

3) Разделить данный отрезок a на такие три части, чтобы они относились между собой, как $1:2:3$.

4) Определить стороны треугольника, если суммы их по две соответственно равны 38 *см*, 46 *см* и 42 *см*.

5) В треугольнике наибольший угол больше среднего по величине на 23°, а средний больше меньшего на 29°. Определить углы треугольника.

6) Углы треугольника относятся между собой, как $a:b:c$. Определить величину каждого из них.

7) В треугольнике один из углов равен a, разность двух других равна d. Определить эти углы.

8) Сумма внешнего угла и одного из внутренних, с ним не смежных, равна 115°; сумма того же внешнего и другого внутреннего, с ним не смежного, равна 125°. Определить эти внутренние углы и данный внешний.

9) Если бы в треугольнике ABC угол A был больше на $6°$, то отношение его к углу C равнялось бы $\frac{3}{5}$, а если бы угол B был меньше 1 градусом, то он был бы в 4 раза меньше угла C. Определить углы треугольника.

10) Прямоугольный треугольник изменяют так, что гипотенуза остается постоянной, а один из катетов удлиняется в первом случае на 3 *см*, а во втором укорачивается на 8,5 *см*. Другой же катет в первом случае укорачивается на 2 *см*, а во втором удлиняется на 3,5 *см*. Определить первоначальные размеры катетов.

11) Сумма двух сторон треугольника равна 23 *см*. Проекции их на третью сторону равны 9 *см* и 5 *см*. Определить стороны треугольника. (Применить теорему Пифагора.)

12) Одна из сторон треугольника делится высотой на два отрезка: в 30 *см* и в 9 *см*. Сумма двух других сторон равна 91 *см*. Определить эти стороны.

13) Разность двух сторон треугольника равна 15 *см*; проекции их на третью сторону равны 32 *см* и 7 *см*. Определить размеры первых двух сторон.

14) Определить две стороны треугольника, если проекции их на третью сторону равны 20 *см* и 8 *см* и одна из сторон больше другой на 8 *см*.

15) Определить проекции двух сторон треугольника на третью, если эти стороны равны 13 *см* и 11 *см*, а третья равна 12 *см*.

16) Суммы сторон четырехугольника, взятых последовательно по три, равны соответственно: 130 *м*, 135 *м*, 147 *м* и 152 *м*. Определить длину каждой из сторон.

17) Периметр трапеции равен 32 *дм*. Определить стороны, если разность между параллельными сторонами равна разности между непараллельными сторонами; большая из параллельных сторон на 1 *дм* меньше суммы непараллельных сторон; если сумму трех больших сторон увеличить на 3 *дм*, то она окажется в 6 раз больше меньшей стороны.

18) Площадь ромба увеличивается на 21 *см*^{2}, если каждую из диагоналей увеличить на 2 *см*; она увеличивается лишь на 3 *см*^{2}, если меньшую диагональ увеличить на 3 *см*^{2}, а большую диагональ уменьшить на 3 *см*. Определить длину каждой из диагоналей.

19) Если увеличить большую из диагоналей ромба на 4 *см*, а меньшую уменьшить на 8 *см*, то, несмотря на то, что сторона его не меняется, площадь его уменьшится на 48 *см*^{2}. Определить длину каждой из диагоналей.

Задачи на движение.

617. 1) Лодка с гребцом проходит против течения 3,5 *км* в час, а по течению 7 *км* в час. Определить скорость лодки в стоячей воде и скорость течения.

2) Пароход проходит расстояние между Рыбинском и Ярославлем, равное 80 *км*, в 4 ч. 30 мин. по течению и в 5 часов против течения. Определить скорость парохода в стоячей воде и скорость течения Волги на участке Рыбинск — Ярославль.

3) Звук выстрела из пушки имеет скорость по ветру в 344 *м* в секунду и против ветра—в 325 *м* в секунду. Как велика скорость звука и какова скорость ветра?

4) Дирижабль развивает по ветру скорость в 97200 *м* в час. против ветра 43200 *м*. Какова скорость ветра и какова скорость самого дирижабля? (То и другое выразить в метрах в секунду.)

5) Наименьшее расстояние между Землей и Венерой при их движении вокруг Солнца 41400000 *км*, а наибольшее равно 257600000 *км*. Как велики расстояния Земли и Венеры от Солнца, если принять, что обе планеты движутся вокруг Солнца по окружностям.

6) По окружности, длина которой равна 100 *м*, движутся два тела. Они встречаются каждые 20 сек., двигаясь по одному и тому же направлению, и каждые 4 сек., двигаясь в противоположных направлениях. Какова скорость каждого тела в секунду?

7) По окружности, длина которой 999 *м*, движутся два тела по одному и тому же направлению и встречаются каждые 37 сек. Как велика скорость каждого, если скорость первого в 4 раза больше скорости второго?

8) Два путешественника идут друг другу навстречу из двух городов, находящихся на расстоянии 30 *км* один от другого. Если A выйдет 2 часами раньше B, то они встретятся через $2\frac{1}{2}$ часа после выхода B. Если же B выйдет раньше на 2 часа, чем A, то они встретятся лишь через 3 часа после выхода A. Сколько километров проходит в час каждый из них?

9) Два тела движутся друг другу навстречу. Начальное расстояние между ними p метров. Если первое начнет движение на d часов раньше, чем второе, то они встретятся спустя a часов после выхода второго. Если же второе начнет движение d_1 часами раньше первого, то они встретятся через a_1 часов после выхода первого. Сколько метров в час проходит каждое из этих тел?

Задачи из физики.

618. 1) Латунь состоит из меди и цинка. Сколько содержится меди и сколько цинка в сплаве в 124 *кг*, если 89 *кг* меди теряют в воде 10 *кг*, 7 *кг* цинка теряют 1 *кг*, а 124 *кг* латуни 15 *кг*.

2) Сплав из свинца и цинка, весом в 149 *кг*, теряет в воде в своем весе 18 *кг*. Сколько килограммов каждого из металлов содержится в сплаве, если $11\frac{1}{3}$ *кг* свинца теряют в воде 1 *кг*, так же, как и $6\frac{3}{4}$ *кг* цинка.

3) Сплав из двух металлов теряет в воде в своем весе p *кг* Сколько каждого из металлов содержится в сплаве, если q первого металла теряют в воде a, второго — b и если весь сплав весит q?

4) Требуется составить сплав из двух металлов. Если взять 36 *г* первого металла и второго 35,2 *г*, то удельный вес сплава будет 7,91. Если взять первого металла 86,4 *г*, а второго 220 *г*, то удельный вес сплава окажется 8,28. Определить удельный вес каждого из металлов.

5) В двух сосудах имеется две различных жидкости. Если взять первой жидкости 10,8 *г*, а второй 4,8 *г*, то удельный вес смеси будет 1,56. Если же взять жидкостей поровну, то удельный вес будет 1,44. Определить удельный вес каждой жидкости.

6) Камень, удельный вес которого 3, связан вместе с куском пробки, удельный вес которой 0,24. Сколько весит камень и какого веса должна быть пробка, чтобы все вместе весило 115 *кг* и было бы равно весу воды в том же объеме, т.-е., чтобы в воде не погружалось и не всплывало?

7) Пловец одел пробковый пояс. Вес пловца и пояса вместе равен 71 *кг*. Веса их таковы, что часть своего тела, в 8 *кг*, пловец может держать над водой, при чем он в воду не погружается и вода его не поднимает, и таким он образом может руки и ноги свои использовать только для передвижения. Сколько весит пловец и сколько пробковый пояс, если 40 *кг* погруженной части тела весят в воде только 1 *кг* и если удельный вес пробки равен 0,24?

8) Сосновая доска с медной обшивкой весит 4200 *г*. При погружении в воду над водой остаются 100 *г* дерева и 236 *г* меди. Как распределяется общий вес между деревом и медью, если удельные веса их принять равными 0,5 и 8,9?

9) Доска из бука с железной обшивкой погружается в воду так, что поверх воды остаются всего 300 *г*. Как распределяется этот вес между деревом и железом, если доска весит 2600 *г*, а обшивка 1600 *г*, и если удельные веса их принять равными 0,6 и 7,5?

10) Если для составления смеси взять по 50 *см*³ трех различных жидкостей, то вес смеси будет равен 175 *г*. Если первой жидкости взять 20 *см*³, второй 60 *см*³, третьей 80 *см*³, то вес смеси будет равен 212 *г*. Если же взять 60 *см*³ первой жидкости, 80 *см*³ второй и 20 *см*³ третьей, то вес смеси окажется в 162 *г*. Определить удельный вес каждой из жидкостей.

11) Составлены три сплава. В первый сплав вошло: 2 *г* одного металла, 3 *г* другого и 5 *г* третьего, и сплав вышел с удельным весом 7,76. Во второй сплав на 3 *г* первого металла вошло 5 *г* второго и 2 *г* третьего, и удельный вес оказался 7,71. В третий сплав вошло: на 5 *г* первого 2 *г* второго и 3 *г* третьего, и удельный вес его оказался 8,03. Определить удельный вес каждого из металлов.

12) Удельную теплоту железа можно принять равной $\frac{1}{9}$, скипидара $\frac{4}{9}$. Если 44 *г* железных стружек облить 14 граммами скипидара, то общая температура окажется в 39 градусов. Если при тех же температурах облить 17 граммами скипидара 32 *г* железных стружек, то общая температура будет равна 42 градусам. Какой температуры взято железо и какой скипидар?

13) В двух сосудах находится вода при различных температурах. Если из первого взять 240 *г*, а из второго 260 *г*, то температура смеси окажется в 52 градуса. Если взять из первого сосуда 180 *г*, а из второго 120 *г*, то температура полученной смеси будет 46°. Определить температуру воды в каждом из сосудов.

14) Некоторое количество древесного угля, удельная теплота которого 0,24, а температура 20°, обливается скипидаром, имеющим удельную теплоту 0,45 и температуру в 30°. Общая температура устанавливается в 26 градусов. Общий вес равен 90 *г*. Как этот вес распределяется между углем и скипидаром?

15) Золотой шарик, нагретый до температуры 100°, брошен в сосуд с водой, первоначальная температура которой была 19°. Определить вес шарика и вес воды, если температура поднялась до 20°, и если общий вес воды и шарика равняется 35,2 *г* (удельная теплота золота 0,032).

16) К рычагу первого рода привешены два груза. Длины плеч относятся между собой, как 4 : 7. Оба груза вместе весят 16,5 *кг*. Как велик каждый из грузов?

Задачи на работу.

619. 1) Трое рабочих выполнили некоторую работу. *A* и *B* могли бы кончить всю работу в 12 дней; *B* и *C* в 20 дней; *A* и *C* в 15 дней. Во сколько времени может окончить эту работу каждый из них, работая отдельно, и во сколько времени при совместной работе всех трех рабочих?

2) В бассейн проведены три трубы; первая и вторая, действуя одновременно, могут его наполнить в $10\frac{2}{7}$ минуты, первая и третья в 12 минут, вторая и третья в $14\frac{2}{5}$ минуты. Во сколько времени каждая из них в отдельности может наполнить бассейн?

3) Во сколько времени три фабрики, работая одновременно, могут исполнить заказ, если первая и вторая могут исполнить его вместе в 4 месяца, первая и третья в 3 месяца, вторая и третья в 2 месяца и 12 дней?

4) Два работника, работая вместе, могут окончить известную работу в 80 дней; но они сделали только $\frac{2}{15}$ работы, потому что первый работал 10 дней, а второй 12 дней. Во сколько дней каждый из них один мог бы сделать всю работу?

5) Некоторую работу три работника выполнят, если первый будет работать 2 дня, второй 3 дня, третий 12 дней. Если первый будет работать 3 дня, второй 2 дня, третий 2 дня, то они исполнят лишь $\frac{23}{24}$ всей работы. Если же первый будет работать 1 день, второй 5 дней, третий 2 дня, то они исполнят $\frac{17}{24}$ всей работы. Во сколько времени может окончить всю работу каждый из работников в отдельности?

6) Если мастер работает с 8 помощниками и 6 учениками, то за день им приходится заплатить 45 рублей. Если же он будет работать с 12 помощниками и 9 учениками, то они все вместе заработают в день 65 рублей. Если же мастер работает с 4 помощниками и 12 учениками, то суточный их заработок равен лишь 43 рублям. Сколько рублей получает каждый из них за один день?

7) Несколько рабочих должны выполнить некоторую работу. Если бы их было одним меньше, то они кончили бы работу 2 днями раньше. Сколько рабочих, и во сколько дней они кончат работу?

8) Несколько труб одинакового диаметра наполняют бассейн водою. Если бы таких же труб было на 9 больше, то бассейн можно было наполнить 3 часами скорее. Если же их было 4 меньше, то бассейн наполнился бы 10 часами позднее. Сколько было труб и в какое время мог наполниться пустой бассейн?

Задачи, заимствованные из старых сочинений по математике, и задачи-шутки.

Из *Магницкого.*

620. 1) Два человека хотяще вещь некую купити, из нихже первый глаголет другому, даждь ми $\frac{2}{3}$ твоих денег ихже имаши, и аз един за ону вещь заплачу цену, а другий первому глаголет, даждь ты мне денег твоих $\frac{3}{4}$ ихже у себе ныне имаши, и аз един за ту вещь цену заплачу, цена же вещи тоя есть 38 рублев, и ведательно есть; колико у которого в то время было денег;

2) Два человека поидоша с единого места окрест града, и един от них идяше по 4 версты на час, а другий по $3\frac{1}{3}$ версты, окрест же того града 15 верст, и ведательно есть в колико часов паки сошлися, и коликожды кийждо обшел той град.

Из теоретической и практической арифметики, собранной *Дмитрием Аничковым (Москва, 1793).*

3) Молодой осел и ослица несли наполненные вином мехи; ослица, несучи мех, для престарелых своих лет, столько устала, что более уже итти не могла; видя сие, молодой осел сказал ей: что ты так скоро устала, несучи меньший мех против моего; ибо естьли я из своего меха одно ведро перелью в твой мех, то у нас будет поровну, но я сделать того не хочу; ты из своего меха перелей одно ведро в мой, то у меня будет вдвое больше твоего. Спрашивается по сколько ведер вина несли в своих мехах осел и ослица? (Ср. № 1.)

Из *Войтяховского.*

4) Некто продает двух коней с седлами, из коих цена одному седлу 120 руб., а другому 25 руб. Первой конь с хорошим седлом втрое дороже другого с дешевым седлом; а другой конь с хорошим седлом вдвое дешевле первого коня с дешевым седлом; спрашивается цена каждого коня.

5) Две торговки разговаривали о числе своих яиц; первая сказала другой: естьли ты мне дашь 13 своих яиц, то у меня будет вдвое больше твоего; а другая сказала первой: когда ты мне дашь 12 своих яиц, то у меня будет втрое больше твоего; спрашивается сколько у которой яиц было.

6) Некто имеет 3 бочки A, B и D, такой меры, что ежели бочку A вылить в бочку D, то в бочке A останется еще $\frac{1}{5}$; есть-

ли же бочку B вылить в бочку D, то в B останется $\frac{1}{2}$; когда же бочкою D наполнять будешь обе бочки A и B, то войдет в них две бочки D и еще не достанет 9 ведер; спрашивается число ведер каждой бочки.

7) Для Сиракузского царя Герона сделана была золотая корона в 12 фунтов. Государь, подозревая мастера, приказал исследовать Архимеду, не положено ли в ту корону серебра; спрашивается, сколько в той короне было серебра и чистого золота [1]).

Решение. По остроте Архимедова разума и по некоторым известным его предложениям (в коих он изъясняет: «что всякое твердое тело, в какую-нибудь жидкость погруженное, столько теряет в той жидкости своего веса, сколько равное тому телу количество той жидкости имеет в себе весу») заключить можно, что Архимед приказал сделать кусок чистого золота и кусок чистого серебра, из коих каждой весом равен был короне, и свесив каждой кусок особо в воде, нашел, что чистое золото потеряло в воде 19 лотов; а чистое серебро потеряло в воде $28\frac{1}{2}$ лотов; потом, таким же образом свесив в воде корону, нашел, что оная потеряла своего весу $21\frac{1}{4}$ лот [2]); наконец, приняв потеряние золотого и серебреного веса за смешиваемые вещи, а потеряние весу от короны за смешанную среднюю вещь, нашел, как в предыдущей задаче показано, что в означенной

[1]) *Архимедов* приступ к решению сей задачи был не так то скор, но проницательные и острые сего достойного математика мысли достигли желаемого успеха, как то уверяют нас историки таким образом: *Архимед,* будучи в мыльне, сел в ванну (то есть в наполненный водою сосуд) и размышляя о погружении своем в воду, вдруг решение сей задачи представилось его уму так, что он выбежав из мыльни, кричал с превеликим восторгом: *нашел! нашел!* тако говорят (хотя невероятно) бежал он по улицам города *Сиракуз,* весь наг, повторяя непрестанно сии слова; потом оное исследовал, как показано.

[2]) Хотя некоторые уверяют, что Архимед в наполненный водою сосуд, опустя кусок чистого золота весом в 12 фун., выдавленную воду свесил, и нашел, что оное золото выдавило воды 19 лотов, чистое серебро такого же веса выдавило воды $28\frac{1}{2}$ лотов, и опущенная в воду корона выдавила $21\frac{1}{4}$ лота; а потом уже нашел количество золота и серебра, в короне заключающееся; однако ж признаться должно, что сие решение кажется нам недостойным Архимеда; поелику количество выдавленное каким-нибудь телом воды в точности исследовать не можно; по сей-то причине вероятно, что оный великой тогда математик разрешил помянутый вопрос как в задаче показано.

короне чистого золота только 9 фунт. $5\frac{1}{19}$ лота; а серебра в смешение положено 2 фун. $26\frac{18}{19}$ лота.

8) Из одного английского задачника:

В убежище для неизлечимых больных имеются больные: однорукие, одноногие, одноглазые и одноухие, всего 80 человек. Первых 70%, вторых 75%, третьих 80%, четвертых 85%. Найти наименьше возможное число лиц, обладающих всеми четырьмя недостатками.

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ.

СЕДЬМАЯ ГЛАВА.

Таблицы и графики.

§ 1. Определение средних значений.

621. 1) При четырехкратном измерении некоторого отрезка получились следующие результаты: 65,13 *м*, 65,08 *м*, 65,21 *м*, 65,16 *м*. Как велико среднее значение результата? Как велики отклонения отдельных значений от среднего?

2) Пять лиц измеряли один и тот же отрезок при помощи линейки с делениями, при чем получили следующие результаты: 131,7 *см*; 133,6 *см*; 133,9 *см*; 133,8 *см*; 133,5 *см*. Как велико среднее значение? Как велики отклонения результатов отдельных измерений от среднего?

3) При определении широты некоторой местности получены следующие результаты на основании пяти наблюдений: $51°35'12''$, $51°34'56''$, $51°43'49''$; $51°35'31''$, $51°35'15''$. Как велико среднее значение? Как велики отклонения отдельных наблюдений от их среднего значения?

4) В школе была составлена таблица среднего возраста учащихся для каждого класса на 1 января каждого года, с 1 января 1900 г. по 1 января 1909 г. включительно.

Год.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1900	10,4	11,4	12,9	14,0	15,1	16,3	17,5	18,8
1901	10,3	11,5	12,8	14,0	15,2	16,4	17,4	18,7
1902	10,2	11,4	12,7	13,9	15,2	16,3	17,5	18,6
1903	10,3	11,3	12,6	13,8	15,0	16,4	17,5	18,7
1904	10,4	11,5	12,5	13,9	14,9	16,2	17,4	18,6
1905	10,2	11,6	12,6	13,7	15,1	16,1	17,2	18,6
1906	10,3	11,4	12,7	13,8	14,9	16,3	17,2	18,5
1907	10,5	11,6	12,6	13,9	15,0	16,1	17,4	18,3
1908	10,1	11,7	12,8	13,7	14,7	16,2	17	18,3
1909	10,2	11,3	12,9	13,8	14,9	16	17,1	18,2

Определить с одним десятичным знаком после запятой средний возраст за 10 лет для каждого класса. Изобразить данные в таблице средние возрасты отдельных классов для каждого года при помощи отрезков.

§ 2. Построения, употребляемые обычно для наглядного представления данных статистического характера.

Изображение сравнительных размеров величин при помощи отрезков.

622. 1) Изобразить следующую таблицу высот гор (в метрах) при помощи вертикальных отрезков:

Валдайские горы (Рвеницы)	320	Казбек	5040
Рудные горы (Кейльберг)	1240	Эльбрус	5630
Везувий	1300	Олимп	2990
Яйла (Роман-Хош)	1540	Монблан	4810
Урал (Теплос-Из)	1690	Килиманджаро	6010
Афон	1940	Эверест	8840.

а) Масштаб выбрать: 100 *м* **натуры** $\equiv$ 1 *мм*; б) 100 *м* **натуры** $\equiv$ 2 *мм*; в) изобразить высоту Эвереста отрезком в 10 *см*; какой длины будут отрезки, изображающие высоты остальных гор? г) изобразить высоту Рудных гор отрезком в 1 *см*; какой длины должны быть остальные отрезки?

2) Следующая таблица дает наибольшие подъемы горных дорог. Изобразить величины подъемов при помощи вертикальных отрезков в подходящем масштабе:

Сен-Готтард (тоннель)	1154 *м*
Бреннер	1367 »
Церматт-Горнерграт	3018 »
Юнгфрау (тоннель)	4075 »
Перуанская южная ж. д. (тоннель)	4580 »
Перуанская центральная ж. д. (тоннель)	4770 »

Как при этом придется **округлить** числовые данные?

3) Глубина Великого океана достигает — 9788 *м*, Атлантического океана — 8431 *м*, Индийского океана — 6205 *м*, Средиземного моря — 4000 *м*, Южного Ледовитого океана — 3000 *м*, Северного Ледовитого океана — 3390 *м*, Северного моря — 200 *м*, Балтийского моря — 400 *м*, Черного моря — 1870 *м*. Данные числа представить в виде вертикальных отрезков в подходящем масштабе.

4) Длина телеграфных линий (в километрах) в различных государствах выражается в следующих числах:

Болгария	5.560	Нидерланды	6.990
Бельгия	8.310	Португалия	8.640
Великобритания	86.500	Румыния	7.010
Греция	6.300	С. С. С. Р.	126.000
Германия	143.790	Юго-Славия	18.400
Дания	3.770	Турция	42.630
Испания	32.270	Франция	157.620
Италия	47.730	Швейцария	9.040
Норвегия	14.770	Швеция	25.000.

Представить эти числа при помощи отрезков.

5) Радиусы (средние) орбит планет даны в следующей таблице. Дать геометрическое представление длин радиусов в подходящем масштабе и составить таблицу радиусов, если за единицу принять радиус орбиты земли (в круглых числах):

Меркурий	58	милл.	*км*
Венера	108	»	»
Земля	149	»	»
Марс	228	»	»
Юпитер	778	»	»
Сатурн	1428	»	»
Уран	2872	»	»
Нептун	4501	»	»

6) Сила ветра измеряется при метеорологических наблюдениях по так называемой Бофортовой шкале. Следующая таблица дает характер этой шкалы с соответствующими скоростями ветра

(таблица взята из нового «Энциклопедического словаря» Брокгауза и Ефрона):

Бофортова шкала.		Метры в секунду.	
Баллы.	Паруса корабля и его ход.	По Кеппену.	По Скотту исправлено.
0	Затишье, штиль	—	—
1	Корабль имеет ход.	2,1	2,8
2	Паруса наполнены. Ход 1—2 узла.	3,8	4,8
3	» 3—4 »	5,4	6,4
4	» 5—6 »	7,3	8,0
5	Корабль несет в бейдевинд бом-брамсели, брамсели и.	9,0	10,0
6	Марсели в 1 риф.	11,6	12,0
7	» » 2 »	13,3	14,4
8	» » 2 »	15,8	17,2
9	Зарифленные марсели и нижний пар . .	—	20,0
10	Корабль едва может нести зарифленные: грот-марсель, фок	—	2,32
11	Корабль может нести одни штормовые стаксели	—	26,0
12	Ураган; корабль не может нести никаких парусов	—	32,0

Дать графическое представление Бофортовой шкалы при помощи отрезков: а) по Кеппену; б) по Скотту.

7) Следующая таблица дает для разного рода горючего материала под I — процентное содержание углерода, под II — процентное содержание золы, под III — процентное содержание воды и под IV — количество выделяемой теплоты, выраженное в больших калориях.

Горючие материалы.	I.	II.	III.	IV.
Дерево сухое.	42,50	0,85	15,00	3700
Торф	46,00	5,70	14,00	3950
Бурый уголь.	40,00	8,50	36,00	3720
Антрацит.	82,00	5,00	1,50	7750
Древесный уголь	94,00	2,00	—	7790
Кокс.	86,00	7,00	3,5	7040

Изобразить числа граф I, II и III на одной и той же оси при помощи отрезков различных цветов. Изобразить при помощи отрезков числа графы IV. Какие из этих четырех рядов чисел отличаются наибольшим сходством?

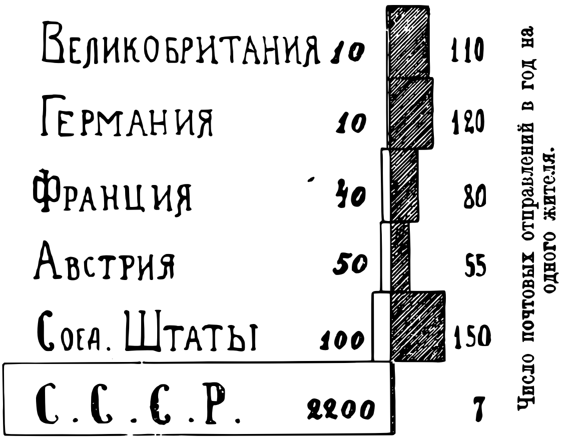
8) В следующей таблице даны средние значения содержания питательных веществ в различных жизненных припасах — остатком везде является вода. 1) Представить эту таблицу наглядно, изображая числа процентного содержания питательных веществ белка, жира и пр. каждого из жизненных продуктов на отрезке в 10 *см* различными цветами. 2) Человек съедает в день средним числом: 600 *г* ржаного хлеба, 500 *г* молока, 400 *г* картофеля, 150 *г* говядины, 300 *г* гречневой крупы, 35 *г* русского масла, 100 *г* капусты, 50 *г* огурцов. Сколько граммов белка, жира и углеводов усвояется им? Изобразите это при помощи отрезков.

	Белок.	Жир.	Углеводы.	Клетчатка.	Зола.
Говядина.	21,0%	5,0%	—	—	1,0%
Телятина (нежирная) . .	20,0	1,0	—	—	1,0
Свинина » . .	20,5	7,0	—	—	1,0
Молоко.	3,4	3,7	4,8%	—	0,7
Русское масло	0,7	83,0	0,6	—	1,0
Сыр.	35,0	11,5	5,4	—	4,0
Горох.	23,0	2,0	52,5	5,5%	2,5
Гречневая крупа	11,0	2,0	7,0	—	2,0
Ржаной хлеб.	7,8	1,3	45,0	—	1,3
Картофель.	2,0	0,2	20,7	1,0	1,0
Капуста.	1,5	0,3	4,5	—	1,0
Огурец	1,0	0,1	3,0	—	0,4

Сравнительное представление величин при помощи площадей.

623. 1) Фигура 11 представляет диаграмму, указывающую число квадратных верст, приходящееся на одно почтовое учреждение, и число почтовых отправлений, приходящееся в год на одного жителя в различных государствах (по данным до 1914 г.).

Число квадратных верст, приходящееся на одно почтовое учреждение:



Фиг. 11.

а) Вычертить ту же диаграмму, расположив государства в порядке, соответствующем возрастанию (убыванию) числа почтовых отправлений, приходящихся на каждого жителя.

б) Определить, в каком масштабе дана диаграмма.

2) Площади, занимаемые различными частями света, выражаются в квадратных верстах следующими числами:

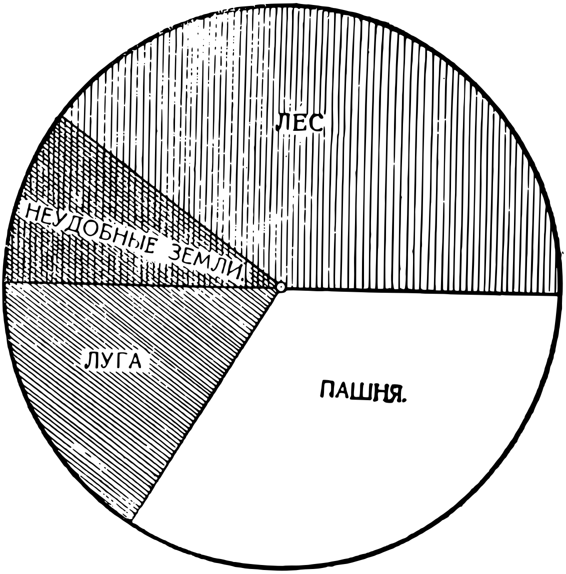
Южный полярный материк	8	милл.	$км^2$
Австралия	9	»	»
Европа	10	»	»
Южная Америка	18	»	»
Северная Америка	24	»	»
Африка	29	»	»
Азия	44	»	»

Изобразить эти числа при помощи прямоугольников одинаковой высоты. 1) Начертить эти прямоугольники один вне другого; 2) один внутри другого.

3) Привоз товаров в Россию в 1912 году (по учебнику «Отечествоведение» Курдова) выражался по различным отраслям в следующих суммах:

Изделия	230	милл.	руб.
Сырые и полуобработанные материалы	425	»	»
Жизненные припасы	187	»	»
Животные	8	»	»

Изобразить привоз по отдельным отраслям при помощи прямоугольников с одинаковыми основаниями.



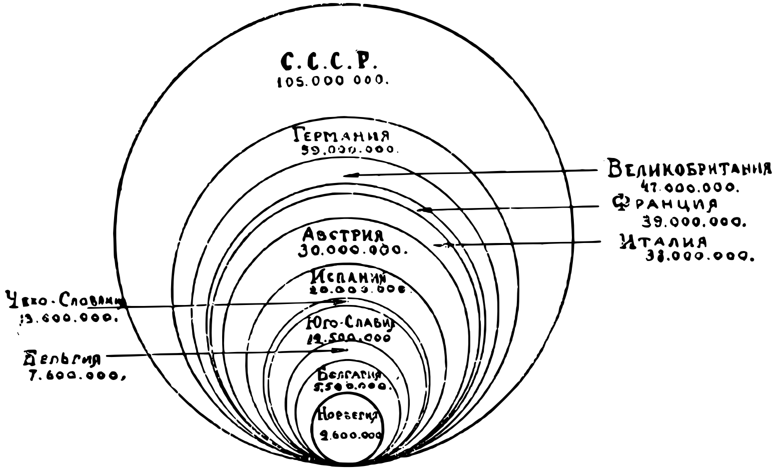
Фиг. 12.

4) Фигура 12 (из учебника Курдова) дает сравнительную таблицу угодий Европейской России. Вся площадь угодий Европейской России равна 395 миллионам десятин. Определить, измерив диаграмму транспортиром, сколько десятин находится под лесом, пашней, лугами и неудобными землями и вычислить в процентах, какую часть всей площади составляют земли каждой категории.

5) Площадь океанов относится к площади суши, как 23 : 9. 1) Представить это отношение делением круга на два сектора (воспользоваться транспортиром). 2) Поверхность океанов содержит около 370 миллионов *км*²; из них 15 милл. приходится на

Северный Ледовитый океан; 30 милл. — на Южный Ледовитый океан; 75 милл. на Индийский океан; 80 милл.— на Атлантический океан и 170 милл. на Великий океан; разделить часть круга, изображающую водную поверхность, на секторы, изображающие поверхности отдельных океанов.

6) Диаграмма 13 дает сравнительную величину населения некоторых государств Европы. Вычертить ту же диаграмму при



Фиг. 13.

помощи прямоугольников с одинаковыми основаниями, расположенных один вне другого (пользуясь числами, данными на соответственных кругах).

§ 3. Координатная бумага.

Применение координатной (клетчатой) бумаги для графического представления опытных данных.

624. На координатной бумаге построить две взаимно-перпендикулярные прямые (по жирным линейкам клетчатой бумаги). На каждой прямой установить положительные направления. Ту **ось**, которая на чертеже располагается горизонтально, обычно называют осью x, а ту, которая располагается вертикально, осью y. Тогда, выбрав подходящий масштаб, для каждого числового значения x можно построить соответствующую точку на оси x и для каждого числового значения y построить соответствующую точку на оси y. Если через построенные точки провести прямые, параллельные осям, то они пересекутся в некоторой точке M. Эту точку можно построить также следующим образом: через точку, соответствующую данному значению x провести прямую, параллельную оси y (перпендикуляр к оси x), и на ней построить точку, соответствующую данному значению y. (Построение этих прямых облегчается благодаря нанесенной на бумагу сетке.) Значения x и y называются **координатами точки M**.

Построить точки по координатам (масштаб $1 \equiv 1$ *см*):

1) $x = 2,\ y = 3$;
2) $x = 5,\ y = 6$;
3) $x = 6,\ y = 5$;
4) $x = 5,\ y = 5$.

2) Сосуд с водой подогревался на газовой горелке. Каждую минуту отмечались показания термометра. Получилась таблица: 18°, 23°, 29°, 36°, 48°, 53°, 59°, 65°, 70°. Изобразить графически изменения температуры. (На оси x-ов изобразить 1 мин.$\equiv$1 *см*, на оси y-ов и на прямых, ей параллельных, $1° \equiv 1$ *мм*.) Соединить каждые две соседние построенные точки прямыми. Какие выгоды приобретает диаграмма, благодаря проведению ломаной через построенные точки?

3) Сосуд с водой подогревается на маленькой и на большой газовой горелке попеременно через каждые 5 минут. Спустя $10^1/_2$ минут подливают к подогретой воде холодную воду. Термометр, который наблюдают каждые $^1/_2$ минуты, дает такие показания: 18°, $19^1/_2$°, 21°, $22^1/_2$°, 24°, $25^1/_2$°, 27°, 28°, 29°, $30^1/_2$°, $33^1/_2$°, $36^1/_2$°, 40°, 43°, $46^1/_2$°, $49^1/_2$°, $52^1/_2$°, 56°, $59^1/_2$°, 62°, 58°, 60°, 62°, 64°, 66°, 68°, 70°, $72^1/_2$°, $74^1/_2$°, $76^1/_2$°, $78^1/_2$°, $80^1/_2$°, $82^1/_2$°, $84^1/_2$°, $86^1/_2$°. 1) Представить графически изменение температуры, соединяя построенные точки ломаной линией. 2) Что можно усмотреть из диаграммы относительно возрастания температуры при изменении притока тепла и при изменении количества воды?

4) Из различных наблюдений над понижением температуры с возрастанием глубины в экваториальной части Тихого океана получены следующие температуры:

Глубина в *м.*	Температура по Цельсию.	Глубина в *м.*	Температура по Цельсию.
0	28,0°	1440	3,0
180	21,7	1620	2,5
360	10,0	1800	2,2
540	7,5	1980	2,0
720	6,2	2160	1,9
900	5,0	2360	1,8
1080	4,2	2520	1,7
1260	3,5	2700	1,6.

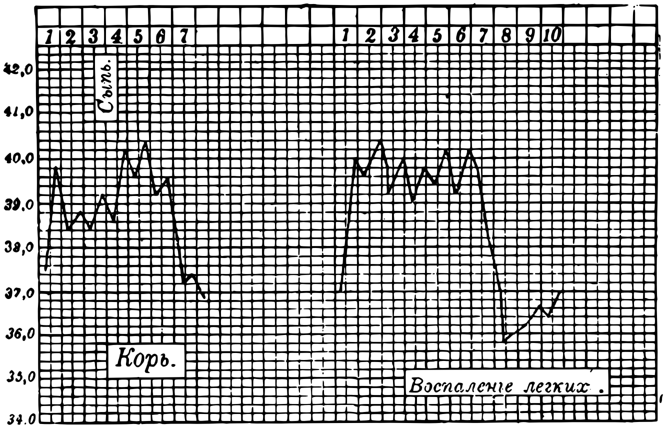
Изобразить в подходящем масштабе изменение температуры с глубиною.

5) Следующая таблица дает температуры, отмеченные термометром с 12 час. дня 15 марта по 12 часов дня 16 марта.

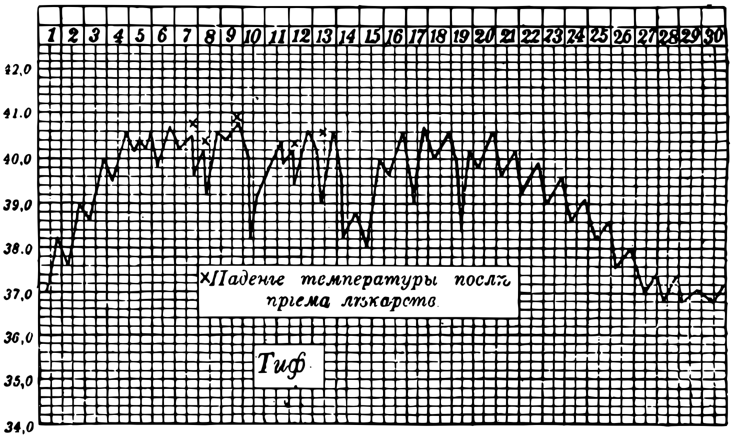
Время.	Температура.	Время.	Температура.
15 марта 12 ч. дня.	0°	16 марта 1 ч. ночи.	— 1°
» 1 » »	+ 1,5°	» 2 » »	— 1,5°
» 2 » »	+ 2°	» 3 » »	— 2°
» 3 » »	+ 1,25°	» 4 » »	— 3°
» 4 » »	+ 1°	» 5 » »	— 3°
» 5 » »	+ 0,5°	» 6 » утра.	— 3°
» 6 » »	0°	» 7 » »	— 2,5°
» 7 » »	— 0,25	» 8 » »	— 2,5°
» 8 » »	— 0,5°	» 9 » »	— 1,5°
» 9 » »	— 0,5°	» 10 » »	— 2°
» 10 » »	— 0,5°	» 11 » »	— 0,5°
» 11 » »	— 1°	» 12 » дня.	— 0°.
» 12 » ночи.	— 1°		

Составить графики изменения температуры в течение суток: 1) отмечая температуры через каждые 2 часа; 2) через каждый 1 час; 3) определить среднюю суточную температуру и построить соответствующую ей прямую, параллельную оси x-ов.

6) На фиг. 14 и 15 даны температурные кривые, характеризующие изменения температуры при кори, воспалении легких и тифе. Измерения температуры производились два раза в день,



Фиг. 14.

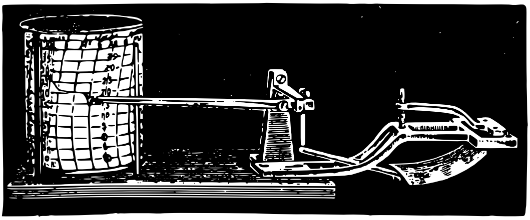


Фиг. 15.

утром и в 5 часов дня. Сверху обозначены дни; каждое деление ординаты соответствует 0,2 градуса. Два последовательных измерения соединены между собою прямыми линиями.

а) Определить по кривой больного корью: 1) на сколько падала температура в 1-ю, 2-ю и т. д. до 7-й ночи; 2) когда была самая высокая температура и как она была высока?

б) Определить по кривой больного воспалением легких: 1) время и размер самой высокой и самой низкой температуры; 2) записать разности температур утром и в 5 часов за каждый день (характеризуя повышения и понижения знаком).



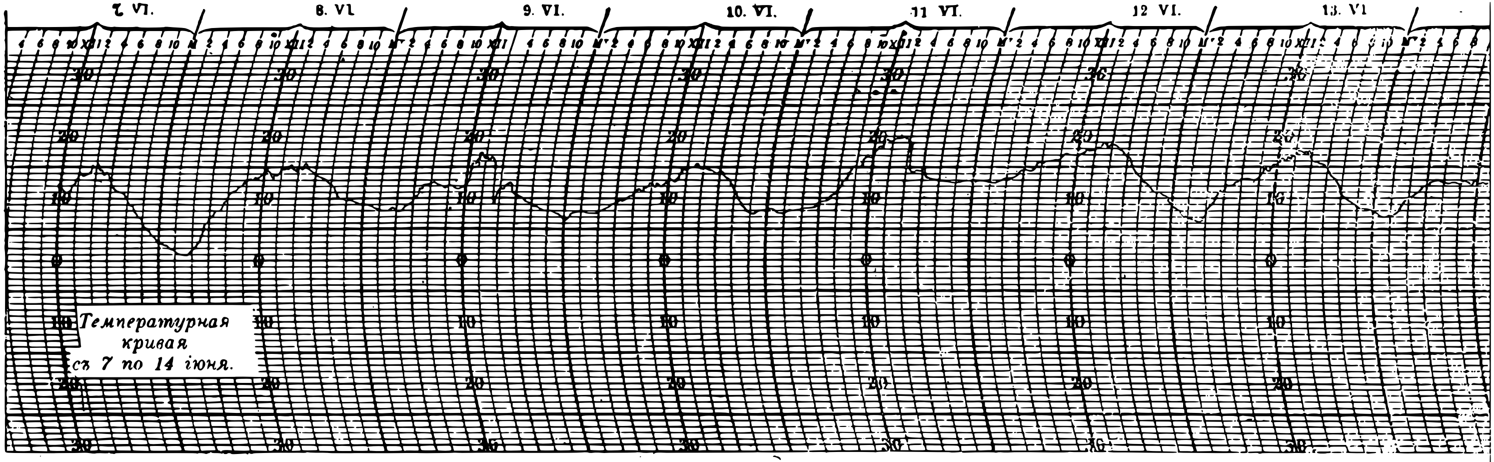
Фиг. 16.

Записать по кривой больного воспалением легких ежедневные повышения температуры за все 10 дней и изобразить их графически при помощи отрезков. По той же кривой определить среднюю температуру за каждый день и представить ее графически.

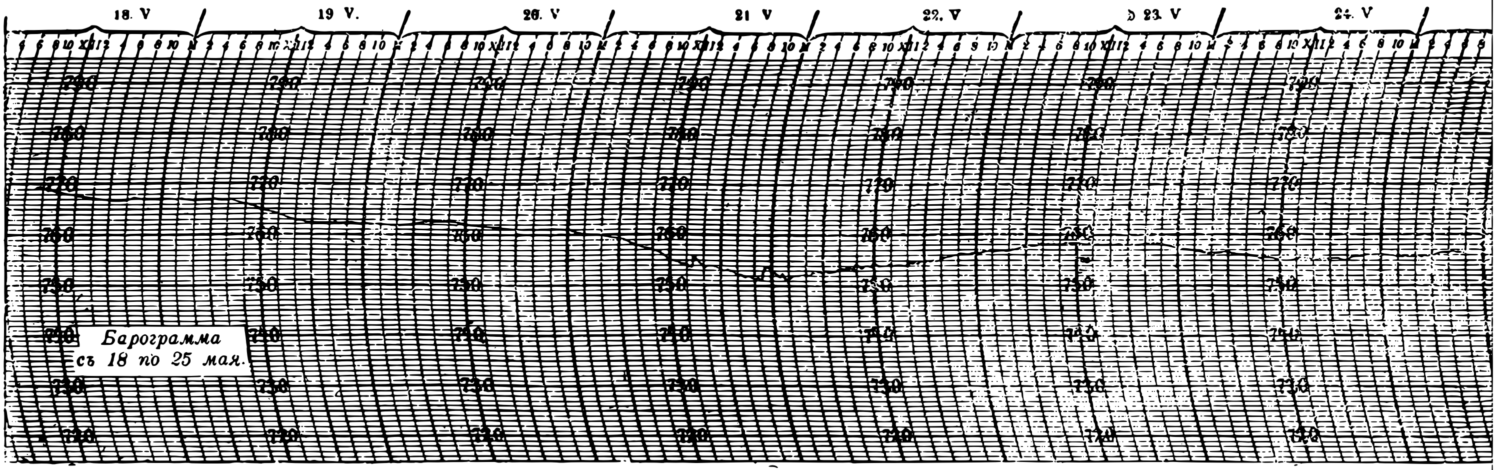
в) Решить те же вопросы (а и б) на основании кривой тифа.

7) На фиг. 16 изображен самопишущий термометр, а на фиг. 17 дана кривая самопишущего термометра. Определить время и размеры наивысшей и наинизшей температур по отдельным дням, указать время резких изменений температуры, составить таблицу изменений температуры за какой - либо день через каждые два часа и дать графическое изображение этих изменений.

8) По барограмме, данной на фиг. 18, с 18 до 25 мая 1908 г. указать наибольшую и наименьшую высоту барометра (и время) и описать колебания барометра с полудня 21 мая по полдень 22 мая.

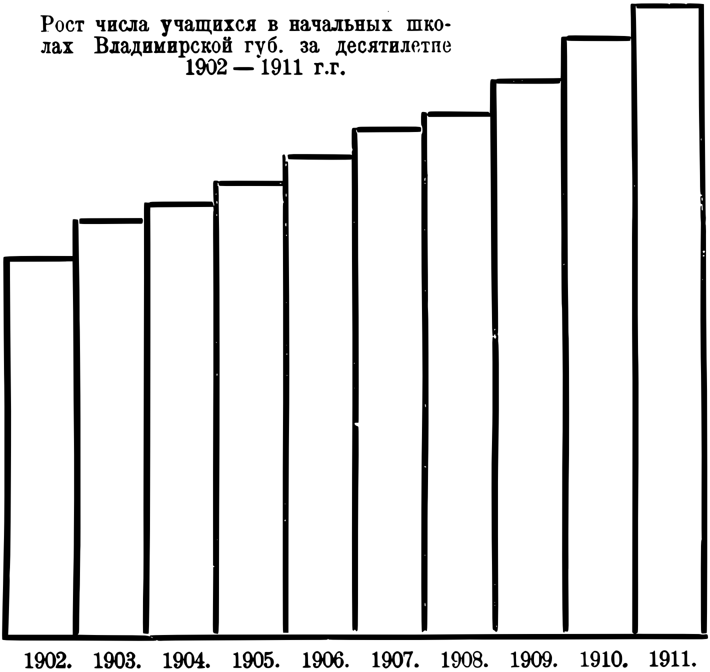

Температурная
кривая
съ 7 по 14 іюня.

Фиг. 17.


Барограмма
съ 18 по 25 мая.

Фиг. 18.

Ступенчатые кривые.



Фиг. 19.

625. 1) Фиг. 19 представляет рост числа учащихся в народных школах Владимирской губернии за время с 1902 г. по 1911 г. Число учащихся в 1902 году равнялось 53.000. Измерением таблицы найти: а) число учащихся в 1911 г.; б) прирост числа учащихся за десятилетие.

Выразить этот прирост в процентах.

2) Определить число делителей целых чисел 1, 2, 3, 4 и пр., включая и самое число 1, и представить числа этих делителей графически при помощи ступенчатой кривой (изображая число делителей площадью, основание которой равно 1 *см*, а высота содержит столько сантиметров, сколько делителей имеет число).

3) Представить графически число всех множителей, получающихся при разложении на первоначальные множители чисел 2, 3, 4 и далее (1 при этом считать не следует) до 20.

4) Число учащихся отдельных групп одной из московских школ составляет:

в 1-й группе	. . . .	34 чел.
» 2-й »	. . . .	39 »
» 3-й »	. . . .	37 »
» 4-й »	. . . .	37 »
» 5-й »	. . . .	41 »
» 6-й »	. . . .	35 »
» 7-й »	. . . .	24 »
» 8-й »	. . . .	26 »
» 9-й »	. . . .	22 »

Изобразить графически по группам число учащихся.

Железнодорожные графики.

626. I. На фиг. 20 (стр. 552—553) дан график движения пассажирских поездов одноколейной дороги. На оси x-ов отложено время; по оси y-ов отложены расстояния от Москвы. Разрывными линиями обозначены дальние поезда: почтовый и скорые. 1) По внешнему виду диаграммы определить периоды наиболее частых отправлений поездов. 2) Пользуясь графиком, составить расписание поездов и отметить поезда почтовый и скорый. 3) В промежуток времени от 8 ч. веч. до 9 ч. веч. требуется отправить из Москвы экстренный поезд со скоростью от 40 до 50 верст в час. Построить график движения этого поезда.

II. По прилагаемому расписанию построить график расписания (путь одноколейный), делая остановки: на платформах 1—2 мин., на станциях 3 — 5 минут. (См. табл. стр. 220.)

Если каждому значению, которое может принимать какая-нибудь данная величина, соответствует вполне определенное значение некоторой другой величины, то эта вторая величина называется *функцией* первой, а первая величина называется *независимой* переменной.

Ряз.-Уральская ж. д. Москва—Кашира.

Черта (—) означает, что поезд не останавливается. Рамкой (|‾) очерчено время от 6 ч. вечера до 5 ч. 59 м. мин. утра.

Расстояние.	Наименование остановочных пунктов.	Домод. дач. 16.	Домод. дач. 18.	Михп. дач. 20.	Кашир. пс. 10.	Праздп. дач. 36.	Барыб. дач. 22.	Домод. дач. 24.	Кашир. пс. 12.	Барыб. дач. 26.	Михн. дач. 28.	Сарат. пч. 4.	Сарат. ск. 2.	Михн. дач. 30.	Елецк. пс. 6/3.	Михн. дач. 32.	Кашир. пс. 14.	Венев. см. 8.
—	Москва	5 30	6 10	8 35	9 40	10 30	11 35	2 50	3 30	4 30	5 15	5 30	6 35	6 50	7 40	8 20	9 25	1 00
10	Коломенское	—	—	—	—	—	—	3 07	—	—	—	—	—	7 11	—	—	—	—
17	Бирюлево пас.	6 03	6 45	9 13	10 18	11 20	12 05	3 22	4 08	5 00	5 45	6 11	7 10	7 29	8 21	8 58	10 03	1 43
22	Расторгуево	6 13	6 53	9 20	—	11 27	12 12	3 29	4 15	5 07	5 52	6 19	—	7 37	8 28	9 00	10 10	1 53
28	Герасим. пл.	6 25	7 05	9 31	—	11 37	12 22	3 39	4 26	5 17	6 02	6 30	—	7 49	—	9 18	10 21	2 08
34	Домодедово	6 37	7 18	9 44	10 48	11 47	12 33	3 49	4 39	5 28	6 13	6 46	—	8 03	8 31	9 31	10 34	2 28
39	Востряково			9 54	10 58		12 42		4 49	5 37	6 22	6 57	—	8 14	—	9 42	10 44	2 41
43	Белые Столбы			10 04	11 08		12 52		4 59	5 47	6 32	7 11	—	8 26	9 11	9 54	10 54	2 55
53	Барыбино			10 21	11 25		1 03		5 16	5 58	6 44	7 29	8 06	8 45	9 28	10 14	11 11	3 15
60	Вельяминово			10 33	11 37				5 28		6 57	—	—	8 57	—	10 20	11 23	3 31
70	Михнево			10 46	11 51				5 42		7 10	8 00	—	9 10	9 54	10 39	11 37	4 03
84	Жилево				12 15				6 06			8 27	—		10 19		12 01	4 47
93	Ступино				12 32				6 23			8 43	—		10 34		12 18	5 07
102	Кашира				12 46				6 37			8 59	9 17		10 48		12 32	5 30

Ряз.-Уральская ж. д. Кашира—Москва.

Расстояние.	Наименование остановочных пунктов.	Венев. смеш. 7.	Михн. пс. 15.	Домод. дач. 17.	Елец. пс. 4/3.	Домод. дач. 19.	Михп. дач. 21.	Кашир. пс. 9.	Сарат. ск. 1.	Сарат. пч. 3.	Михн. дач. 23.	Барыб. дач. 25.	Кашир. пс. 11.	Домод. дач. 27.	Барыб. дач. 29.	Кашир. пс. 13.	Праздн. дач. 30.	Михп. дач. 27.
—	Кашира	2 50			5 05			6 40	7 38	7 55			2 11			5 37		
9	Ступино	3 13			5 27			7 00	—	8 19			2 32			5 57		
18	Жилево	3 35			5 45			7 16	—	8 35			2 49			6 13		
33	Михнево	4 15	5 20		6 15		7 08	7 40	—	9 02	11 32		3 14			6 37		9 06
42	Вельяминово	4 36	5 37		—		7 23	7 57	—	—	11 49		3 31			6 54		9 21
49	Барыбино	4 53	5 52		6 42		7 33	8 12	8 52	9 32	12 04	1 40	3 40		6 39	7 09		9 31
56	Белые Столбы	5 11	6 04		6 55		7 45	8 24	—	9 46	12 16	1 53	3 59		6 54	7 21		9 43
62	Востряково	5 24	6 14		7 05		7 54	8 34	—	9 56	12 26	2 04	4 10		7 06	7 31		9 52
68	Домодедово	5 40	6 24	7 03	7 17	7 43	8 03	8 44	—	10 07	12 36	2 15	4 21	6 09	7 18	7 41	7 55	10 0
74	Герасим. пл.	5 52	6 34	7 13	—	7 53	8 13	8 54	—	10 18	12 46	2 27	4 31	6 21	7 30	—	8 07	10 11
80	Расторгуево	6 07	6 46	7 23	—	8 03	8 23	9 06	—	10 30	12 58	2 39	4 44	6 33	7 42	—	8 19	10 19
84	Бирюлево пас.	6 22	6 56	7 31	7 51	8 11	8 31	9 16	9 47	10 45	1 08	2 48	4 54	6 42	7 51	8 13	8 28	10 22
92	Коломенское	—	—	7 45	—	—	—	—	—	—	1 27	—	—	—	—	—	—	—
102	Москва	7 00	7 30	8 00	8 20	8 40	9 00	9 50	10 15	11 15	1 40	3 20	5 25	7 15	8 25	8 45	9 00	10 55

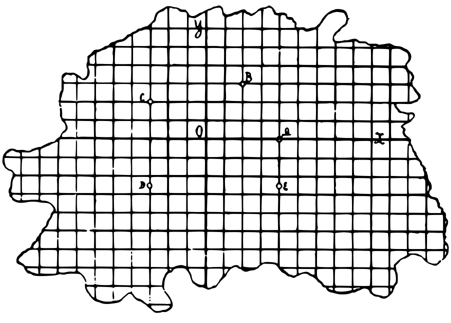
ВОСЬМАЯ ГЛАВА.

Графическое представление функций.

§ 1. Координаты точки.

627. На клетчатой (координатной) бумаге построить координатные оси. Принимая масштаб $1 = 1$ *см*, построить точки, имеющие координаты:

1) 1; 3;	2) —1; 3;	3) 1; — 3;	4) — 1; — 3;
5) 7; 4;	6) —7; 4;	7) 7; — 4;	8) — 7; — 4;
9) 1,5; 2,4;	10) —1,5; 2,4;	11) 1,5;—2,4;	12) —1,5; —2,4;
13) 5; 6;	14) 6; 5;	15) 4; 3;	16) —4; — 3;
17) 2; —1;	18) $\frac{1}{2}$; 1;	19) 0,5; —0,6;	20) —0,6; 0,5.



Фиг. 21.

628. Пользуясь прилагаемым чертежом (фиг. 21), определить координаты точек: ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***E*** (сторону клетки принять за единицу).

629. Построив данные точки, определить (на основании чертежа) расстояние между ними, если их координаты равны:

1) (2, 7) и (2, 3),
2) (5, 2) и (5, 8),
3) (2, 15) и (2, 0),
4) (0, 5) и (0, 0).

630. Какой формулой выражается расстояние между точками A и B, имеющими координаты: 1) (x, y_1) и (x, y_2), 2) (x_1, y) и (x_2, y)?

631. Проверить справедливость составленных формул при значениях координат, данных в предыдущей задаче. Какой смысл имеет знак при числовом значении результата?

632. Вершины прямоугольника расположены в точках (3, 5), (3, —5) (— 3, + 5), (— 3, — 5); вычислить периметр и площадь этого прямоугольника.

633. Построить точку и определить ее координаты, если она делит пополам расстояние между точками:

1) (5, 0) и (9, 0); 2) (0, 7) и (0, 3);
3) (3, 2) и (3, 8); 4) (2, 10) и (12, 10);
5) (7, 6) и (—7, 6); 6) (— 6, 4) и (— 12, 4);
7) (—9, 5) и (—9, — 3); 8) (— 7, —1) и (—7, —5).

634. Составить формулы координат середины отрезка AB, если координаты точек A и B суть:

1) (x, y_1) и (x, y_2); 2) (x_1, y) и (x_2, y).

Проверить справедливость выведенных формул на данных предыдущей задачи.

635. Построить точку и определить ее координаты, если она делит расстояние между точками:

1) (— 3, 4) и (— 3, 8) в отношении 3 : 5.
2) (0, — 2) и (0, — 10) в отношении 1 : 3.
3) (2, — 5) и (16, — 5) в отношении 2 : 5.

636. Пользуясь свойством средней линии трапеции, вычислить координаты точки M — середины отрезка AB — и построить M, если координаты A и B суть:

1) (0, 6) и (4, 8); 2) (4, 0) и (2, 8);
3) (5, 5) и (9, 9); 4) (4, 10) и (10, 4);
5) (— 3, 6) и (3, — 6); 6) (— 6, 4) и (6, 2);
7) (9, — 3) и (5,3); 8) (— 5, — 3) и (— 1, 1).

637. Составить формулы координат середины отрезка AB, если координаты точек A и B суть (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Проверить составленные формулы на данных предыдущей задачи.

638. Построить на миллиметровой бумаге точки (1, 7), (1, 2), (5, 7). Пользуясь тем, что бумага разбита на квадратные миллиметры, вычислить площадь треугольника, вершины которого лежат в данных точках.

639. Построить треугольник ABC и вычислить его площадь, если координаты вершин A, B, C, суть:

1) (2, 3), (5, 6), (7, 1); 2) (5, 5), (2, 8), (9, 13);
3) (— 1, 2), (— 2, 1), (5, 5); 4) (3, 1), (5, 4), (7, 7).

640. Построить точки (0, 0), (2, 6), (4, 1), (3, — 2). Определить площадь четыреугольника, вершины которого лежат в данных точках.

641. Построить точки (1, 0), (1, 6), (7, 0), (7, 9). Определить площадь трапеции, имеющей вершинами данные точки.

Координатами точки называются два числа, выражающие в определенных единицах длины расстояния этой точки от двух взаимноперпендикулярных прямых — осей координат (ось x — ось абсцисс, ось y — ось ординат). Значение абсциссы обыкновенно обозначается буквой x, а значение ординаты — буквой y. Если задать x и y произвольные числовые значения, то можно по ним построить точку, имеющую эти значения своими координатами.

Каждой паре чисел, заданных в определенном порядке, соответствует некоторая (одна и только одна) точка плоскости.

Положительные направления на осях координат обычно выбирают так, что абсциссы точек, расположенных вправо от оси y, оказываются положительными, влево — отрицательными; ординаты точек, расположенных кверху от оси x, — положительными, а точек, расположенных книзу от этой оси, — отрицательными.

Точки, обе координаты которых положительны, располагаются в *нормальном* координатном угле.

§ 2. Уравнение прямой.

642. Указать геометрическое место точек, для которых координата y (ордината) имеет значения:

1) 2; 2) 1,2; 3) — 3; 4) 0.

643. Указать геометрическое место точек, для которых координата x (абсцисса) имеет значения:

1) 3; 2) 2,5; 3) — 1,5; 4) 0.

644. Указать геометрическое место точек, у которых равны друг другу координаты x и y (абсцисса и ордината).

645. Найти геометрическое место точек, имеющих координаты, равные по абсолютному значению, но противоположные по знаку.

646. Построить геометрическое место точек, координаты любой из которых удовлетворяют уравнению:

1) $y = x$; 2) $y = 2x$; 3) $y = \frac{1}{2}x$;

4) $y = -x$; 5) $y = -2x$; 6) $y = -\frac{1}{2}x$.

647. Построить геометрическое место точек (на одном и том же чертеже), координаты которых удовлетворяют уравнению $y = kx$, задавая k значения;

1) 1, 2, 3, 4, 5... 2) 0, — 1, — 2, — 3...

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\ldots$ 4) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ldots$

648. В каких четвертях располагается построенное геометрическое место при 1) положительных значениях k, 2) отрицательных значениях k? К совпадению с какой осью приближается это геометрическое место 1) при возрастании абсолютного значения k, 2) при убывании абсолютного значения k? Что характеризует в уравнении $y = kx$ **параметр** k (каков геометрический смысл параметра k)?

649. Доказать, пользуясь подобием треугольников, что все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению: $y = kx$, лежат на прямой линии. Как эта прямая расположена относительно начала координат?

650. Построить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x + b$, полагая $b = +1, +2, +3$ и $-1, -2, -3$. Из рассмотрения чертежа установить геометрический смысл **параметра** b.

651. Доказать, что геометрическое место, координаты точек которого удовлетворяют уравнению $y = x + b$, есть прямая линия. Показать, что эта прямая наклонена к оси x под углом в 45°.

652. Как меняется положение прямой линии $y = x + b$ в зависимости от $b \gtreqless 0$?

653. Построить прямые:

1) $y = x + 3$; 2) $y = x - 2$;
3) $y = -x + 3$; 4) $y = -x - 2$.

654. Найти геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

1) $y = 2x + 1$; 3) $y = 3x - 1$; 5) $y = -2x - 3$;
2) $y = 2x + 3$; 4) $y = -2x + 1$; 6) $y = \frac{1}{3}x + 1$.

655. Доказать, что точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = bx + k$, располагаются на прямой линии. От значения какого параметра зависит **подъем** прямой? Какой **отрезок**, считая от начала, отсекает эта прямая **на оси** y? каков геометрический смысл **параметров** k и b в уравнении $y = kx + b$?

656. Как располагается графика линейной функции $y = kx + b$, 1) если $k = 0$, 2) если $b = 0$, 3) если k и b оба имеют значение нуль?

657. Какому уравнению удовлетворяют координаты точек прямой: 1) параллельной оси x, 2) параллельной оси y, 3) самой оси x, 4) самой оси y?

658. Построить прямые (на одном и том же чертеже):

1) $y = x + 5$; 2) $y = x - 7$; 3) $y = 3x + 5$;
4) $y = 3x - 7$; 5) $y = -0{,}5x + 5$; 6) $y = -0{,}5x - 7$.

659. Указать, когда прямые $y = a_1 x + b_1$ и $y = a_2 x + b_2$ будут: 1) параллельны, 2) пересекаться в какой-нибудь точке оси y?

660. При печатании книг за набор платят по 2 руб. с тысячи букв. Выразить формулой зависимость между стоимостью набора и числом букв набора. Построить графику изменения стоимости набора в зависимости от числа букв набора. При построении графики принять 100 букв за 1.

661. Зависимость между показаниями термометров со шкалами Цельсия, Реомюра и Фаренгейта указана на прилагаемой фиг. 22.

	Темп. кипения воды Цельсий.	Реомюр.	Фаренгейт.
	+100°	+80°	+212°
	+	+	+
Темп. таяния льда	0°	0°	32°
	—	—	+
			0°
			—

Фвг. 22.

Составить формулы для вычисления температуры для шкал Реомюра и Фаренгейта, если температура отсчитывается по шкале Цельсия. Составить формулы обратного перехода. Построить графики полученных функций так, чтобы на одном и том же чертеже были построены графики, изображающие переход: 1) от шкалы Цельсия к шкале Реомюра и обратно, 2) от шкалы Цельсия к шкале Фаренгейта и обратно. Как располагаются построенные графики относительно биссектрисы нормального угла?

662. Следующие уравнения привести к виду $y = kx + b$, т.-е. представить y в виде функции x:

1) $2x + 3y = 43$; 2) $bx + ay = c$; 3) $4x - 1{,}9y = 1$;
4) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 7$; 5) $3\frac{1}{2}x = 8y$; 6) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2}$;
7) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 2$; 8) $ax + by = 0$; 9) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{2}{3}$.

663. Построить прямые:

1) $4x + 3y = 12$: 2) $5x - 2y = 10$;
3) $3x + 4y + 12 = 0$; 4) $6x - y + 12 = 0$;
5) $4y + 1 = 0$; 6) $3x - 1 = 0$.

664. 1) Вычертить график $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, если а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = -1$, $b = +2$; в) $a = -2$, $b = -3$. Указать геометрический смысл параметров a и b.

2) Уравнения, данные в задаче 663, привести по возможности к виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ и построить соответственные прямые. В каком случае оказывается невозможным привести уравнение к такому виду?

665. Определить площади трапеций, ограниченных осью x, прямою

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = 9{,}8x$; 3) $y = 9{,}8x + 1$

и ординатами точек

1) (0, 3), (3, 9); 2) $(0, 0), (4, \frac{5}{7})$; 3) (0, 1), (5, 5).

666. Найти точки пересечения следующих пар прямых или, иначе говоря, прочитать, пользуясь графическим изображением соответствующих функций, корни следующих систем линейных уравнений с двумя неизвестными:

1) $x + y = 4$, $y = x$; 2) $x + y = 8$, $y = 3x$; 3) $x = y$, $y = -x$;

4) $x + y = 3$, $x - y = 3$; 5) $x = 2y$, $y = 2x$; 6) $x - y = 5$, $x + y = 7$;

7) $x - y = 2$, $y = \frac{x}{2}$; 8) $y - x = 3$, $x + y = 9$; 9) $y - x = 8$, $9x = y$;

10) $x = 3y - 2$, $x = 5y - 12$; 11) $7x - 5y = 15$, $7y - 5x = 3$; 12) $2x - 2y = 11$, $2x + 3y = 16$;

13) $x = 6 - y$, $x = 3y - 4$; 14) $4x + 6y = 5$, $6x + 4y = 5$; 15) $\frac{2x-1}{2y+1} = 1$, $x + y = 15$;

16) $\frac{3x+4}{3y+5} = 2$; $\frac{4x+3}{3y+2} = 3$.

667. Пользуясь графическим представлением функций, пояснить, почему следующие пары уравнений не имеют общих решений:

1) $y - x = 5$, $3y - 3x = 6$; 2) $y + x = 7$, $10y = 5 - 10x$;

3) $x - y = 6$, $x = y$; 4) $x + y = 3$, $y = -x$;

5) $x = 3y + 5$, $2x - 10 = 6y$; 6) $2x + 5 = 6y - 9$, $3x + 1 = 9y - 20$.

668. В функции $y = kx + b$ определить k и b так, чтобы

1) $y = 3$ при $x = 2$, $y = 7$ » $x = 4$; 2) $y = 1$ при $x = -1$, $y = 3$ » $x = +1$;

3) $y = 0$ » $x = 0$, $y = 3$ » $x = 3$; 4) $y = 0$ » $x = -3$, $y = 9$ » $x = 0$.

В каждом случае дать графическое представление функции.

669. Решить систему уравнений:

$$x + y = 1$$
$$x + ky = 1 - k.$$

При каких значениях k 1) оба корня положительны? 2) система не имеет общих решений? Каков геометрический смысл последнего случая? Могут ли прямые, соответствующие данным уравнениям, совпасть?

670. Решить систему:

$$x + y = m$$
$$ax + by = c.$$

При выполнении каких условий система имеет оба положительных корня? При какой зависимости между коэффициентами m, a, b, c система 1) не имеет общих решений? 2) имеет бесчисленное множество решений $\left(\text{имеет решение вида } \frac{0}{0}\right)$?

Выяснить геометрический смысл каждого из случаев.

671. Решить систему уравнений:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2.$$

При каком соотношении между коэффициентами a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 (и какими из них) уравнений система не имеет общих решений (x и y принимают бесконечные значения)? Каков геометрический смысл этого случая? При каких соотношениях между коэффициентами x и y принимают значение вида $\frac{0}{0}$? Каков геометрический смысл этого случая? При каких значениях b_1 и b_2 y принимает значение ∞, а x — значение $\frac{0}{0}$? Каков геометрический смысл этого случая?

Точки, координатами которых служат значения независимой переменной и соответствующие им значения функции $y = kx + b$, располагаются на некоторой прямой линии. Число k называется угловым коэффициентом прямой; угловой коэффициент характеризует *подъем* прямой по отношению к оси x; число b представляет значение отрезка, отсекаемого прямою на оси y.

Функция $y = kx + b$ называется линейной (первой степени).

Если $b = 0$, то линейная функция характеризует так называемую пропорциональность: $y = kx$. В этом случае прямая, изображающая зависимость между y и x, проходит через начало координат, а угловой коэффициент представляет в то же время коэффициент пропорциональности.

Так как всякое уравнение первой степени с двумя неизвестными x и y может быть решено относительно y, т.-е. приведено к виду

$y = kx + b$, то уравнение первой степени с двумя неизвестными называют также уравнением *прямой*. На этой прямой располагаются те точки, координатами которых служат любые пары корней этого уравнения. Таким образом, *прямую* можно назвать геометрическим *изображением уравнения первой степени.*

Точки, располагающиеся на одной и той же прямой, параллельной оси x, имеют одну и ту же ординату. Поэтому сооотношение $y = b$ называют уравнением прямой, параллельной оси x, как геометрического места точек, ординаты которых равны b.

Точно так же соотношение $x = a$ называют уравнением прямой, параллельной оси y.

Уравнения осей координат суть:

$$y = 0 \text{ для оси } x;$$
$$x = 0 \text{ для оси } y.$$

Общие корни двух уравнений (системы) с двумя неизвестными представляют координаты общей точки тех прямых, которыми изображаются данные уравнения, т.-е. координаты точки пресечения этих прямых.

Если в уравнениях $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x = b_2y = c_2$ коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 составляют пропорцию $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, то уравнения *несовместны* (не имеют общих решений), а прямые, определяемые этими уравнениями, *параллельны.*

Если коэффициенты a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 удовлетворяют соотношениям: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система *неопределенна,* а определяемые уравнениями прямые *сливаются.*

§ 4. Исследование уравнений.

Выражение вида $\frac{0}{0}$.

672. 1) Какое значение может иметь x в уравнениях $ax = b$ при а) $b = 0$; б) $a = 0$; в) $a = b = 0$.

2) Какое значение можно придать выражению $\frac{0}{0}$, которое само по себе не имеет смысла?

3) Всегда ли из равенства двух пропорций $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ можно заключить, что $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$?

Проверить равенства:

673. 1) $\frac{6x - 30}{5x - 25} = \frac{6}{5}$; 2) $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 9x + 20} = \frac{x - 3}{x - 4}$

при $x = 0, 1, 2, 3, 4\ldots.$

Какой вид принимают эти равенства при $x = 5$?

Так как уравнение $ax=b$ при $a=b=0$ удовлетворяется любым значением x, то выражение $\frac{0}{0}$, в которое обращается в этом случае $\frac{a}{b}$, называют *неопределенным* выражением и разумеют под ним любое число.

674. 1) Какие значения должны иметь a и b в уравнении

$$ax=b:$$

а) чтобы x приняло положительное значение?
б) чтобы x приняло целое значение?
в) чтобы x приняло значение 0?
г) чтобы x приняло отрицательное значение?
д) чтобы x приняло значение ∞?
е) чтобы x приняло значение $\frac{0}{0}$?

2) Разность цифр двузначного числа равна 6. Цифра, обозначающая десятки, представляет число, которое в $1\frac{1}{2}$ раза больше цифры единиц. Найти число.

3) Ученик пятой группы школы на вопрос, сколько ему лет, отвечал: через 8 лет мне будет вдвое больше лет, чем было 8 лет тому назад. Сколько ему лет?

4) Пассажир, зная, что скорость товарного поезда равна 12 километрам в час, захотел определить длину вагона проходившего мимо товарного поезда: для этого он заметил по часам время, когда мимо него прошло начало переднего вагона и заднего, и сосчитал число вагонов в поезде. Определить какова была длина вагона товарного поезда (считая ее вместе с буферами), если первое показание часов было 3 ч. 25 мин., второе 3 ч. 45 мин.; число вагонов — 40; кроме того, известно, что пассажир наблюдал товарный поезд во время остановки пассажирского.

5) Для перевозки некоторого количества товара пришлось нанять 49 одноконных подвод; если же на каждую подводу грузить 5 пудами меньше, то для перевозки этого же товара понадобится 50 подвод. Сколько грузили в первом случае на подводу?

6) Хозяйка купила сырых яиц по 26 коп. десяток и получила с 3 рублей сдачи 15 коп. Сколько яиц купила хозяйка?

7) В школе было 160 учеников, которые распределялись по классам следующим образом: в среднем классе было в $1\frac{1}{2}$ раза больше, чем в старшем, а в младшем — в $1\frac{1}{2}$ больше, чем в среднем. Сколько было учеников в каждом классе?

8) Игрок сыграл 12 партий по 40 коп. за партию и выиграл 1 руб. 20 коп. Сколько партий он выиграл и сколько проиграл?

9) Определить двузначное число, число единиц которого в два раза больше числа десятков, сумма же числа единиц и удвоенного числа десятков равна 14.

10) 8 детям роздали 20 коп. Каждому мальчику дали по 5 коп., каждой девочке — по 3 коп. Сколько было мальчиков и сколько девочек?

11) Составлено 16 *кг* смеси из сахара по 12 коп. и по 14 коп. за 400 *г* так, что смесь вышла по 15 коп. за 400 *г*. Сколько пошло в смесь каждого сорта?

12) Сделан сплав из золота и серебра (удельный вес золота 19,3, удельный вес серебра 10,4). Сколько серебра и золота пошло в сплав, если объем сплава 8 $см^3$, а вес 26 граммов.?

13) Всех билетов 1-го и 2-го поездов продано на 75 руб. Пассажиров 1-го поезда было 150 чел., а 2-го поезда 200 чел. Сколько стоит билет на 2-й поезд и сколько на 1-й, если оба вместе стоят 1 р. 50 к.?

14) Сумма цифр двузначного числа равна 7. Если от искомого числа отнять 63, то получится число, написанное теми же цифрами в обратном порядке. Найти число.

15) Гребец может ехать в стоячей воде со скоростью, на 5 *км* в час большей скорости течения реки. Определить скорость течения реки, если гребец в 3,5 часа проехал по течению 17,5 *км*.

16) Старшему брату 15 лет, младшему 13 лет; через сколько лет они будут ровесниками?

17) Найти точку пересечения прямой, отсекающей на сторонах координатного угла отрезки 3 и 4, с прямою $4x + 3y = 24$.

18) Найти двузначное число, разность между цифрами которого 3. Если цифры числа переставить, то число уменьшится на 27.

19) Определить сторону квадрата, если известно, что при увеличении одной его стороны на 5 *дм* и одновременном уменьшении другой на 5 *дм* площадь уменьшается на 25 $дм^2$.

20) Найти точку пересечения прямой, отсекающей на сторонах угла отрезки 2 и 6, с прямою $3x + y = 6$.

21) Артель, состоявшая из 17 мужчин и 14 женщин, заработала 21 руб.; другая артель, работавшая по той же цене и состоявшая из 153 мужчин и 126 женщин, заработала 189 руб. Определить, сколько платили за работу мужчине и сколько женщине.

22) Найти два числа по следующим условиям: сумма произведений первого числа на 4 и второго на 3 равна 55; если к $\frac{1}{3}$ разности первого и второго числа прибавить их удвоенную сумму,

то в результате получим $\frac{1}{3}$ разности между 110 и суммой этих чисел.

23) Пароход имеет скорость в стоячей воде a *км* в час. Скорость течения реки b *км* в час. Во сколько времени пароход пройдет k *км* вверх по течению реки? Исследовать решение при:

a	15	5	5
b	2	5	6
k	65	100	30

24) Лодка имеет в стоячей воде скорость a *км* в час. Течение реки имеет скорость b *км* в час. В какое время пройдет лодка от пристани A до пристани B и обратно, если расстояние между пристанями равно d? Истолковать смысл решений при:

a	6	4	2
b	2	4	6
d	24	24	24

25) Если точка M расположена относительно точек A, B и F так, что $\frac{AF}{FB} = \frac{AM}{BM}$, то точка M называется **четвертой гармонической** к точке F относительно точек A и B. Обозначив абсциссы точек A, B, F соответственно через a, b, f, найти абсциссу точки M. Разобрать смысл решения при:

	1	2	3	4	5	6	7
a	0	0	0	0	0	0	0
b	2	2	2	2	2	2	2
f	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	4	-1	1.

26) Сумма цифр двузначного числа равна a, а разность b. Найти это число. Указать условия, которым должны удовлетворять числа a и b, чтобы решение задачи имело смысл.

27) Сумма цифр двузначного числа равна a, а отношение однозначных чисел, обозначенных этими цифрами, равно k. Найти это число. Указать условия, которым должны удовлетворять a и k, чтобы решение задачи имело смысл.

28) Составить a *кг* сплава из двух металлов с удельными весами q_1 и q_2 так, чтобы его удельный вес был q. Указать условия, при которых решение задачи имеет смысл. Какой смысл имеет здесь нулевое решение? При какой зависимости между q, q_1 и q_2 оно имеет место?

29) На фабрике работают a человек и получают в неделю b рублей. Сколько работает на фабрике женщин и сколько мужчин, если мужчина получает p рублей, а женщина q рублей? Указать условия, при которых решение задачи имеет смысл. Какой смысл имеет нулевое решение?

30) В бассейн проведены две трубы. Первая наполняет бассейн в a часов, а обе вместе в b часов. Во сколько времени наполнит бассейн одна вторая труба? Составить условия, при которых решение задачи имеет смысл. Какой смысл имеет здесь бесконечное и отрицательное решение?

31) Найти точку, в которой пересекает ось x прямая, проходящая через точки (a', b') и (a', b'). Указать смысл, который имеют решения нулевое, отрицательное, бесконечное и неопределенное.

ОТВЕТЫ.

160. 11) $30-3a$; 13) 12498; 15) 2; 17) $19x-4y$; 19) $9a$; 21) $4y$; 23) $6a+3b$; 25) a; 27) $5a+15b$; 29) $117a+9b-18c$; 31) $8a+2b+2c$; 33) $1,1m+0,3n$; 35) $8,9a-3b-10,8c$; 37) $28,9m-0,1n-1,2x$; 39) $1\frac{3}{4}a+2\frac{1}{2}b-1\frac{1}{2}c$; 41) $\frac{8}{35}a-\frac{25}{6}b$; 43) $\frac{11}{24}x-\frac{7}{24}y$; 45) $5a-2b-2\frac{1}{4}c$; 47) $26,2a-2,62c$; 49) $2,2t-7,7n-3,3p$; 51) $0,55x$. **184.** 7) $5a+10b$; 9) $7x+42$; 11) $6a+2,1$; 13) $18\frac{7}{18}$. **191.** 7) $17c+17d$; 9) $44k-17l+20m$; 11) $2,1p+0,7q$; 13) $15x-10y$; 15) $6-25a$; 17) $4x-10y$. **199.** 7) $5\frac{4}{7}$; 9) 8; 11) $850-10a$. **208.** 11) $2x-1$; 13) $76a-18b$; 15) $45x+80y$; 17) $1,4c-1,7d$; 19) $35a-15b+6c$; 21) $20a+2b+2c$; 23) $9-3x$; 25) $m-2p$; 27) $59x-22y-17z$; 29) $b+c-d$; 31) $y+a-x$; 33) $2x$; 35) $n-8p$; 37) $6,6p-7r+5$; 39) $39x+131y$; 41) $140r-11s$. **258.** 1) $9ax-4by$; 3) 0; 5) $2ab-10ac+19bc$; 7) $2abcd$. **275.** 1) $y=6$; 3) $y=13$; 5) $y=40$; 7) $y=0$; 9) $y=0$; 11) $y=0,9$; 13) $y=1\frac{6}{25}$; 15) $y=0$.
276. 3) $5\frac{7}{30}z^2y^3+2z^2y$; 5) $9a^2b+4ab^2$; 7) $17ax^2-a^2x$; 9) p^2+4p+2; 11) $19x^2+2x+7$; 13) $8az^2+5by^2+35cx^2+7a^2z+16c^2x$; 15) $6-9x^2$; 17) $11x^3-13\frac{30}{77}$. **296.** 1) $3b^3-2a^2b-16ab^2-6a^3$; 3) a^3b^4; 5) $3a^3b-2a^2b^2+3ab^3$. **305.** 5) $6a+4b$; 7) $5a-5b+5c$; 9) $14a-21b-56$; 11) $6ax-8bx+10cx$; 13) c. **306.** 5) $3,06m^2q-5,67mnp+11,43mpq-3,24mq^2$; 7) $9\frac{1}{4}x^6z^2-14\frac{4}{5}x^3z^3+11,1x^2z^2-46\frac{1}{4}xz^2$; 9) $55x-36y$; 11) $16yz+30y^2-16xz+12xy$; 13) $20xy-28yz-6xz$; 15) $0,4x^3-10,52x^2+5,22x-9,28$.
323. 1) $35x^2-43x+12$; 3) $42a^2+5ab-25b^2$; 5) $16a^2-33,96ab+14b^2$; 7) $29,4x^2+0,63x-0,06$; 9) $14,4y^2+5,1y-3$; 11) $25a^2+20ab+4b^2$; 13) $36x^2-84xy+49y^2$; 15) $25c^2-10cd+d^2$; 17) $0,04a^2+0,12ab+0,09b^2$; 19) $6,25r^2+20rs+16s^2$; 21) $20x^2-33xy-27y^2$; 23) $28ab-16b^2-18a^2$; 25) $ad+ae+bd+be+cd+ce$; 27) $a^2+2ab+b^2-c^2$; 29) $9a^2+b^2+x^2+6ab-6ax-2bx$; 31) $9x^2+25y^2+4-30xy-12x+20y$; 33) $a^3-ab^2+a^2b-b^3$; 35) x^3+y^3; 37) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

39) $1-3y+3y^2-y^3$; 41) $27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3$;
43) $x^3-ax^2-bx^2-cx^2+abx+acx+bcx-abc$; 45) $42x^8+79x^2-25$; 47) v^2+u^2;
49) $0{,}25-4y^2$; 51) $\frac{9}{4}r^2-\frac{25}{4}s^2$; 53) $625x^4-50x^2y^2+y^4$; 55) $81r^{12}-112\frac{1}{2}r^6+39\frac{1}{16}$;
57) $a^3-15a^2b+75ab^2-125b^3$; 59) $8a^3b^3+36a^2b^2c+54abc^2+27c^3$;
61) $125a^9b^6c^3-75a^6b^4c^2+15a^3b^2c-1$; 63) $3\frac{3}{8}a^3-4\frac{1}{2}a^2b+2ab^2-\frac{8}{27}b^3$;
65) $0{,}125a^6+3a^5b^3+24a^4b^6+64a^3b^9$; 67) $0{,}001x^{12}-0{,}3x^9+30x^6-1000x^3$;
69) $12xy-3x^2+181y^2$; 71) $304r^2-177s^2+160rs$; 73) $72c^2-132cd-85d^2$;
75) $43p^2-41pq+24q^2$; 77) $21x^2-35y^2+37xy$; 79) $48r^2+19s^2-72rs$;
81) $25a^2b^2c^3-64a^2bcd-10bc^4d$; 83) $0{,}96x^2-0{,}57xy+0{,}24y^2$.
343. 31) $5a(4a-7b-9c)$; 33) $a(a-b-c+d)$; 35) $(n+p)(a-b)$.
37) $(x-1)(a+b)$; 39) $(3b-2)(2a-x)$; 41) $(a+b)(x-1)$; 43) $(x+y)(a+1)$;
45) $(3a+b)(x-1)$; 47) $(c+d)(a+b)$; 49) $(x+y)(a-b)$; 51) $(b+y)(a-x)$;
53) $(b+3)(a-2)$; 55) $2(15x-y)(2a-3b)$; 57) $5(a-14b)(8x-9y)$;
59) $(5b-4y)(8a-5x)$; 61) $(5a-6x)(7a-5y)$; 63) $(b-x)(a+1)$; 65) $(a-x)(b-1)$;
67) $(a-2)(x-1)$; 69) $(a+b-c)(x-y)$; 71) $(3x-2y)(2a-3b+5c)$;
73) $(a-b)(7x+5y)$. **347.** 5) 5; 7) 4; 9) $x=$ любому числу; 11) 1,7.
348. 1) 7; 3) 10; 5) 116; 7) 14; 9) брату 1 год; 11) 22,5; 13) 15 и 12.
15) 36 и 14; 17) 40 и 100; **421.** 65) $12a-7b-3c+4d$; 67) $-m+3n-2v$;
69) $\frac{13}{6}a-\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c-\frac{4}{3}d+\frac{1}{2}g-\frac{1}{3}f$; 71) $x-8y+16u+6v$.
422. 101) $4a-2b+10c-5d$; 103) $-x-7y+12u$. **423.** 1) 0; 3) $x+5y$;
5) $14y+18z-32v$; 7) $86a-b+9c$; 9) $9s+6r+19t$; 11) $89x+29y-59z$;
13) $71x-21y+52z$; 15) $5xy^2-5x^2y-9x^3+4{,}2y^3$. **439.** 0. **448.** 1) 0; 3) -25;
5) $+7$; 7) -9. **451.** 1) $-10a^2bc+14ab^2c+6abc^2$; 3) $6ax-9bx-4ay+6by$;
5) $-10a^2-13ab+3b^2$; 7) $2a$; 9) 4; 11) $25a^2b^2-225a^2c^2-b^2d^2+9c^2d^2$;
13) $3a^4-26a^3b+37a^2b^2-14ab^3$; 15) $2x^4-x^3-4x^2+44x-21$;
17) $-24+43x-33x^3+14x^4$; 19) $a^5b^3-ab^7-a^7b+a^3b^5$;
21) $5x^5-20x^4y+14x^3y^2-3x^2y^3+25xy^4-21y^5$; 33) x^3-7x+6;
35) $6x^3+13x^2+2x-5$; 37) $120x^4-26x^3-111x^2-244x+24$;
39) $36x^4-132x^3+157x^2-66x+9$. **455.** 64. **456.** 1) -210; 3) 7.
458. 7) $a+b$; 9) $2m-3n$; 11) $a-3b+4c$; 13) $a+b$; 15) $x-1$;
17) $x+5$; 19) $a-5$; 21) $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}$; 23) $0{,}5x+3{,}4$; 25) $2{,}6x+\frac{10}{3}y$;
27) $a^2-2ab+2b^2$; 29) $x^2+\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}$; 31) $c-d$; 33) $u-v$; 35) $x+y$; 37) $x-y$;
39) $3a-5b$; 41) $3r+4u$; 43) $3x^2-2y^2$; 45) $a+b$; 47) $12u^3+11w^7$;
49) $12p+0{,}3q$; 51) $1{,}23x^2y^2-2{,}7z^2$; 53) $\frac{5}{2}x^2-\frac{17}{3}z^3$; 55) $\frac{3}{5}x^2+\frac{4}{7}y^2$;
57) $5a-4c$; 59) a^2+ab+b^2; 61) $27a^3-18a^2b+12ab^2-8b^3$; 63) $3ab+2ac-bc$;
65) $3a+2b-c$; 67) $a-2x$; ост. $-2a^2$; 69) $2{,}4x-5y-2{,}7z$; 71) $2a-3b-c$; ост. $10c^2-4bc$;
73) $2x^2+4x+3$; 75) $4x-7y+9z$; 77) $t-2r+10s$; 79) $2z+3u$;
81) $\frac{1}{4}r-\frac{2}{5}s-\frac{2}{7}t$; 83) $27x^4-17x^3+11x^2-19x+17$; 85) $6z^2+7$;
87) $3y^3+2x^2y+3x^3$; 89) $-3u+2$; 91) $25x^2y^2-70xyz-77z^2$; ост. $10z^3$;
93) $4p-5q+r$; 95) $3z^4+2$; 97) $z^4+z^3y+z^2y^2+zy^3+y^4$. **461.** 13) 0,7;

15) 0,2; 17) —1; 19) —1,5; 21) 4. **484.** 31) $13a^3b^5(4a^2b-5ab^2+6a-3b^3)$; 33) $0,11p(7q-9r+3)$; 35) $c^4d^3(0,3c+0,7d)$. **485.** 3) $(x-y)(a-b)$; 5) $(3p-q)(2x-1)$; 7) $(x+y)(n-1)$; 13) $(c+d)(a-b)$; 15) $(x-1)(a+1)$; 17) $(b-1)(a-1)$; 19) $(a+b)(3x-5y)$; 21) $(2n-3y)(5n-7x)$; 23) $(7a-5b)(8a+9c)$; 25) $(13x-16m)(7x+5n)$; 27) $(2x-5y+1)(a-b)$; 29) $(z+3x)(3a+b)$; 31) $(a+b+c)(x+y+z)$; 33) $c(b+c)(a-d)$; 35) $x(x+y)(x-z)$; 37) $2ab(2b^2-a^2)(a-b)$; 39) $(a-1)(b+1)(c-1)$; 41) $(a+b)(c+d)(x-y)$; 43) $3(2a-b)^2$; 45) $6(a-b)^2$; 47) $(5c-2d)(a-x)$; 49) $(x-y)(a+b)$; 51) $(2b-a)(y+x)$. **486.** 7) $(8ab+3c)^2$; 9) $(11x^2+2)^2$; 31) $(0,04x^3-0,1y)(0,04x^3+0,1y)$; 41) $4ab$; 43) $(a-b)^2$; 45) $(a-b)^2$; 47) $(m+n+p)(m-n-p)$; 49) $4xy(x^2+y^2)$; 59) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$; 61) $(3x-1)(9x^2+3x+1)$; 63) $(9+xy)(81-9xy+x^2y^2)$; 67) $(3a-b)^3$; 69) $(ab-1)^3$.

487. 1) $(x+2)(x+3)$; 3) $(a-3)(a+2)$; 5) $(a+7)(a+5)$; 7) $(a-2b)(a+b)$; 9) $y(y-8)(y+1)$; 11) $b(b-2)(b+1)$; 13) $(a-3b)(3a-b)$; 15) $(2x+3y)(3x-2y)$; 17) $(6x-y)(5x-y)$; 19) $(r-s)(10r-s)$; 21) $(x-11y)(x-3y)$; 23) $(a-10b)(a+12b)$; 25) $(a-8)(a+7)$; 27) $(x^2+7y)(x+2y)$; 29) $(3a+2b)(4a-5b)$; 31) $(7p+5q)(3p-4q)$; 33) $5(2x-3y)(6x+y)$.

488. 1) $(a-b)(a+b-1)$; 3) $(a+b)^3(a-b)$; 5) $(a+b)^2(a-b)$; 7) $a(a-x)^2(a+x)$; 9) $(m+n)^2(m-n)^2(m^2+n^2)$; 11) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; 13) $x(x+1)(x+2)(x+3)$; 15) $(a-1)(a+1)^2(a^2-a+1)$; 17) $(a-b)(a^2+ab+b^2+a+b)$; 19) $(x^2+y^2)(a^2+b^2+c^2)$; 21) $(a+b)^4$; 23) $(x+2)(x-1)^2$; 25) $(a+2)^2(a-1)$; 27) $c^3(ab+xy)(a^2b^2-abxy+x^2y^2)$; 29) $(a-d+b-c)(a-b-d+c)$; 31) $(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b+c-a)$; 33) $(a+b-c+d)(a-b+c+d)(a+b+c-d)(d+b+c-a)$; 39) $12c(a-2b)$; 41) $(a+3b-c)(a-b+3c)$; 43) $(a-c)(a+c-2b)$; 45) $(1+y)(1-y-3x)$; 47) $4xy(x+y)^2$; 49) $(x+y)(x-y)(2+z)(2-z)$; 51) $(x+4)(x-4)(x+3)(x-3)$; 53) $(x+q)(px-1)$; 55) $(2x^2+5)^2$; 57) $(x-2y)(18x-49y)$; 59) $(x+c)(x+a+b)$; 61) $(x-14)(x+13)$; 63) $(3x-5y)(5x+3y)$; 65) $(x+2)(2x-1)(x+1)$; 67) $(x+y)(x^2+4xy+y^2)$; 69) $(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)$; 71) $(x^2+10x+1)(x^2-10x+1)$; 73) $(2x^2-5y^2+xy)(2x^2-5y^2-xy)$.

489. 3) $a(x^2-y^2)$; a; 5) $(a-b)^2$; $(a-b)^2$; 7) $6(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$; $x-y$; 9) $(a-b)(b-c)(c-a)$; 1; 11) $(x-2)(2x+3)(3x-1)$; $x-2$; 13) $(3-x)(2-x)(x-4)$; $2-x$; 15) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$; $a+b+c$; 17) $12(x+2)(x-1)(2-x)$; $x-1$; 19) $2x(x-1)(x-5)(1-2x)$; $x-5$.

490. 1) $(x^3-1)(x+1)$; 3) $(a-b)(b-c)(b-d)$; 5) $42(a^2-b^2)$. **491.** 39) 1. 41) $\frac{4xy-1}{4xy+1}$; 43) $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$; 45) несократ.; 47) a^2+b^2; 49) a^3-b^3; 51) $\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{a^2-ab+b^2}$; 53) $\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}$; 55) $\frac{a}{b}$; 59) $\frac{5a}{7p}$; 63) $\frac{a}{4a-5b}$; 65) $\frac{2x(7x+6y)}{7x-6y}$; 67) $\frac{a-3b}{a-7b}$; 69) $\frac{a-3b}{a+5b}$; 71) $\frac{a+7b}{a+14b}$; 73) $\frac{x^2-xy+y^2}{5x-7y}$; 75) $\frac{2x+5y}{5-2y}$; 77) $\frac{1-5y}{3+5x}$; 79) $\frac{a-b}{a+b}$; 81) $\frac{x-2}{x-3}$; 83) $\frac{x-4}{x-5}$;

85) $\frac{3b^2u+5c}{c^2+2bu}$. **504.** 41) $\frac{2n-2m}{n}$; 43) $\frac{4b-a-2b^2}{b}$; 45) n;

47) $\frac{3bx+2by-2a^2}{a^2}$. **505.** 1) $\frac{a-b}{2}$; 3) $\frac{a+3b}{6}$; 5) $\frac{3x-2y}{12}$;

7) $\frac{a+b}{ab}$; 9) $\frac{ay+bx}{xy}$; 11) $\frac{3}{2a}$; 13) $\frac{a}{6b}$; 15) $\frac{2a-b}{10x}$;

17) $\frac{3b-5a}{abn}$; 19) $\frac{3a+15b+ab}{3b}$; 21) $\frac{3ny-5x}{6y}$; 23) $\frac{bc+ac+ab}{abc}$;

25) $\frac{a+b+c}{abc}$; 27) $\frac{a}{20b}$; 29) $\frac{b}{20y}$; 31) $\frac{ax}{2by}$; 33) $\frac{9xy+ax}{15b^2}$; 35) $\frac{a}{9b}$;

37) $\frac{a}{5x}$; 39) $\frac{3ab}{4xy}$; 41) $\frac{9a^2}{40xy}$; 43) $\frac{2b^2c^2-3a^2c^2+24a^2b^2}{6a^2b^2c^2}$;

45) $\frac{945a^2c^2-216b^2c^2+616a^2b^2}{504abcy}$; 47) b; 49) $\frac{2y}{x^2-y^2}$; 51) $\frac{2a+b}{a+b}$;

53) $\frac{a-b}{2x}$; 55) $\frac{11-19x}{10}$; 57) $\frac{a-13}{24}$; 59) $\frac{63x-37}{24}$; 61) $\frac{14x+23}{60}$;

63) $\frac{1-14x}{40}$; 65) $\frac{12a^2+15b^2}{20ab}$; 67) $\frac{187q^2-93pq+104q^2}{221pq}$; 69) $\frac{a}{18x}$;

71) $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$; 73) $\frac{ax^2-bx^2-ab}{6abx^2}$; 75) $\frac{a^2+b^2}{3ab}$. **506.** 3) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$;

5) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 7) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{60ab}{9a^2-25b^2}$; 11) $\frac{2(a^4+b^4)}{a^4-b^4}$; 13) $\frac{2a-5b}{a(a+b)}$;

15) $\frac{2x}{1-a^2}$; 17) $\frac{3-5x}{3(x+3)}$; 19) $-\frac{2x}{7}$; 21) $\frac{1}{6(x-1)}$; 23) $\frac{1}{15(x-3)}$;

25) $\frac{6-5x}{6(x+1)}$; 27) $\frac{x^2-x+1}{(x-2)(x-3)}$; 29) $\frac{1+4x+x^2}{1-x^2}$; 31) 0;

33) $\frac{3(x+y)}{4x+5y}$; 35) 1; 37) $\frac{2xy}{x^2-y^2}$; 39) $\frac{2(x+y)}{x-y}$;

41) $\frac{21p-14q}{6(2p-3q)}$; 43) $\frac{2x^2}{(x^2-9)(x-2)}$; 45) $\frac{1}{m+n}$; 47) $\frac{2}{x-4}$;

49) $\frac{20}{x^2-1}$; 51) $\frac{11x+7}{(x^2-1)(x+2)}$; 53) $\frac{30x-17}{(2x-1)(3x-1)(2x-3)}$;

55) $\frac{3cx-2bx-ax+bc+2ac-3ab}{(x+a)(x+b)(x+c)}$; 57) $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$; 59) $\frac{x-y}{x+y-z}$;

61) $\frac{24a}{6a+b-4c}$; 63) $\frac{2a}{(a+b)^2}$; 65) 1; 67) $\frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2}$;

69) $\frac{3n-p-q-m}{(m-n)(n-p)(n-q)}$; 71) $\frac{1}{abc}$; 73) $\frac{y^2}{x^2-y^2}$; 75) $\frac{16x^2+75y^2}{10(5x-4y)}$;

77) $\frac{9x^2+3xy-2y^2}{2y(9x^2-y^2)}$; 79) $\frac{3a^2b-3ab^2-2b^3}{a^3+b^3}$; 81) $\frac{4n^3}{m^4-n^4}$;

83) $\frac{4pq^4}{q^6-p^6}$; 85) $\frac{18p^2-20pq+4q^2}{(5p-4q)(4p-3q)}$; 87) 0; 89) $3\frac{50}{60}$;

91) $\frac{4u+123v}{20}$; 93) $\frac{a}{4a^2-1}$; 95) $\frac{4pq+p^2-4q^2}{(p^2-q^2)(p+2q)}$; 97) $\frac{2}{(4-x^2)(x+1)}$;

509. 1) $x^3+x^2+2x+2+\frac{3}{x-1}$; 3) $x^6-x^5+x^4-x^3-x^2-x+1-\frac{2}{x+1}$; 5) $x^6+x^2+\frac{1}{x^2+1}$. **510.** 1) $2x^5+x^4+6x^3+2x^2-10x+6+\frac{2-16x}{x^2-1}$; 3) $2z^5-z^4-z^3+2z^2-z+2-\frac{2z+1}{z^3-1}$. **511.** 1) 24; 3) $472\frac{1}{2}$; 5) 5; 7) 2; 9) 4; 11) $3a$; 13) 1; 15) 15; 17) a; 19) $a+b$; 21) 60; 23) $\frac{7}{29}$; 25) $\frac{1}{4}$. **528.** 1) $-\frac{32a^5}{15b^3}-\frac{9a^3}{b}+\frac{5a^2}{2}$; 3) $49p^2+22\frac{2}{5}q^2-26r^2-42$; 5) $20\frac{1}{2}xy+8\frac{1}{2}y^2$; 7) $\frac{x^3+x^2+7x-9}{(1+x)(3-x)}$; 9) $\frac{2px}{3y^2q}+\frac{7p}{8y}-\frac{q}{4px}$; 11) $\frac{(r+s)(p+q)}{(p-q)(r-s)}$; 13) $\frac{x-y}{x+y}$; 15) 1; 17) $\frac{(x+5)(x+3)(x-1)}{x+1}$; 19) $\frac{35}{3(x+4)}$; 21) $\frac{(3a-2)^2}{(3a+2)^2}$. **529.** 1) 0; 3) $x^4-\frac{11}{30}x^3+\frac{33}{24}x^2+\frac{3}{4}$; 5) $\frac{4a^2}{27b^2}+\frac{b}{2a}$; 7) $\frac{15x}{4y^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4y}{5x^2}$; 9) $\frac{2a^2}{3b}+\frac{b^2}{a}+\frac{16b}{15}-\frac{3}{5}a$; 11) $(x^2+y^2)(x+y)$; 13) $\frac{(a+b)^2}{a-b}$; 15) $(a^2-2a+4)(a+1)$; 17) $\frac{1-y}{x}$; 19) $\frac{1+a^3}{a^3}$; 21) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. **530.** 1) $\frac{8}{5x}+\frac{5c}{3ay}-\frac{c}{7z}$; 3) $\frac{2a^2}{5b^2}+\frac{9a}{32b}-\frac{8}{27}$; 5) $\frac{x^2+xy+y^2}{2(x+y)^2}$; 7) $\frac{x+y}{4(x-y)}$; 9) $-\frac{2(a+2)}{7a^3}$; 11) $\frac{6(z+1)}{35(z+2)}$; 13) $\frac{2(x^2+2xy+4y^2)}{7xy(x+2y)}$; 15) $\frac{x^3+y^3}{4xy}$; 17) $\frac{(x^2+y^2)(x^4+y^4)}{2}$. **531.** 1) $-\frac{2}{x^2-y^2}-\frac{1}{xy}$; 3) $\frac{2x}{3y(2x+3y)}+\frac{3y}{2x(2x-3y)}-\frac{6xy}{4x^2+9y^2}$; 5) $\frac{9}{54}$; 7) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$; 9) $\frac{7y(a-b)^2}{5x^2(a+b)^2}$; 11) $\frac{2(2y-3)}{x-2}$; 13) $\frac{(a-2b)^2}{(3a-b)^2}$; 15) $\frac{(2a+3b)^2(4a^2+6a+9)}{(2a-3b)^2}$; 17) $-\frac{5x(2x+3y)}{2y(2y-3x)}$; 19) $(x+1)^2(x^2+x+1)$; 21) $-\frac{6b^4}{a}+\frac{b}{6}-\frac{4b^7}{25a^4}$; 23) $1+\frac{4ax}{by}-\frac{x^3y^3}{a^2b^2}$; 25) $\frac{138xy}{25x^2-49y^2}$; 27) $-\frac{b^2(2a+b)}{a^3-b^3}$. **532.** 1) $\frac{ab+1}{b}$; 3) $\frac{6bx+1}{3b}$; 5) $\frac{a^2b^2+ab+1}{b^2}$; 7) $\frac{x^2+1}{x}$; 9) $\frac{(ay+1)(x^2y^2+1)}{y^3}$; 11) $\frac{16a^4-8ab^3+4a^2b^2-2a^3b+a^4}{a^4b^4}$; 13) $\frac{ad-bc}{acd}$; 15) $\frac{x^2+4x+16}{x^2-4x+16}$; 17) $\frac{a+b}{a-b}$; 19) 1; 21) 1; 23) $\frac{x^4-x^2+1}{x^2}$ 25) $(a+b+c)(a-b+c)$; 27) $\frac{x-1}{x^2(x+1)}$; 29) 1; 31) -1. **534.** 11) $\frac{a^2+36}{3(a^2-4)}$; 13) $a-b$; 15) $x-y$; 17) $\frac{xy}{x+y}$; 19) $\frac{x+y}{xy}$; 21) $\frac{ac+b}{cd}$; 23) $\frac{(ac+b)d}{(ad-c)c}$; 25) $\frac{2b(a^2-2b)}{3a-2b}$; 27) a; 29) a; 31) $\frac{a-2}{2}$; 33) $\frac{a^2-b^2}{4a^3}$. **544.** 11) $\frac{(a^2+b^2)ab}{a^3-b^3-ab}$.

572. 5) **приблиз. 1, 62;** 15) **1 фун.** $3\frac{1}{6}$ **зол.;** $46\frac{2}{3}$ **зол.** **573.** 1) $1\frac{1}{3}$; 3) 15 *см*, 40 *см*, 45 *см*; $\frac{5}{24}$ ***м***, $\frac{1}{4}$ *м*, $\frac{13}{24}$ *м*; $\frac{u}{u+v+w}$, $\frac{v}{u+v+w}$, $\frac{w}{u+v+w}$; 5) 45; **масшт.** 1 : 1000; 500; 7) 2, 4 *см*; 9) 1200 *м*;

574. 17) $1\frac{1}{3}$; 19) 25; 21) 7; 23) $8\frac{3}{4}$; 25) 3; 27) 7; 29) 10; 31) 9; 33) 0; 35) 10; 37) 5; 39) 2; 41) 1; 43) 1; 45) $\frac{14}{15}$; 47) —1; 49) 19; 51) 7; 53) $\frac{1}{3}$; 55) 1; 57) 25; 59) $2\frac{1}{3}$; 61) —2; 63) $\frac{1}{2}$; 65) $\frac{3}{4}$; 67) —1; 69) $-1\frac{2}{3}$; 71) —12; 73) **Тожество.**

575. 1) 28; 3) 25; 5) 2,25; 7) 111; 9) 6; 11) 3,2; 13) 1,5; 15) 0,9; 17) $\frac{5}{7}$; 19) 0,3; 21) 2; 23) 4; 25) 1; 27) 2; 29) 2; 31) $4\frac{8}{13}$; 33) $2\frac{11}{17}$; 35) 36; 37) 30; 39) 36; 41) 32; 43) 16; 45) 7; 47) 3,2; 49) 15; 51) 40;

576. 1) 0,25; 3) 2; 5) 7; 7) —1; 9) 19; 11) —1; 13) 9,25; 15) 0; 17) —4; 19) $2\frac{1}{3}$; 21) 1,7; 23) $\frac{1}{3}$; 25) 2; 27) 4; 29) 11; 31) 4; 33) $2\frac{2}{13}$; 35) 5.

577. 1) 7,5; 3) 0,5; 5) —3; 7) 9; 9) —1; 11) $\frac{1}{3}$; 13) 10; 15) 7; 17) 1; 19) 1; 21) 5; 23) 8; 25) 10; 27) 7; 29) 1; 31) $9\frac{89}{95}$.

578. 5) —5; 7) 18; 9) 4; 11) 7; 13) 5; 15) $\frac{1}{3}$; 17) 10; 19) 7; 21) 4; 23) 12; 25) 2; 27) 5; 29) $\frac{1}{3}$; 31) —1; 33) 0; 2,25; 35) 0,125.

579. 1) 100; 3) 16; 5) 13; 7) $1\frac{71}{74}$; 9) 1,75; 11) 11; 13) 7; 15) $2\frac{5}{6}$; 17) 6; 19) 1,5; 21) 19; 23) 3; 25) 12; 27) 2; 29) 3; 31) 6; 33) 1,75; 35) 5; 37) 12; 39) 1; 41) 5; 43) 2; 45) 0, 5; 47) 4; 49) $1\frac{2}{3}$; 51) 1; 53) 3; 55) 0; 10; 57) —2,5; 59) 4; 61) 0; 63) 1.

580. 11) $\frac{a+b}{m}$; 13) $\frac{a+b+c}{m}$; 15) $4a+5b$; 17) $3a-5b$; 19) a; 21) $\frac{3(a-b)}{2}$; 23) $\frac{a}{m+n}$; 25) $\frac{a+d}{c+b}$; 27) $\frac{m}{a+1}$; 29) $\frac{a}{b+c-1}$; 31) $\frac{b}{a-1}$; 33) $\frac{m}{a+b+c}$; 35) $\frac{c+d}{a-c}$; 37) $\frac{bc}{a+c}$; 39) $\frac{b+c}{a}$; 41) $\frac{ab}{a+b}$; 43) a; 45) $\frac{b+a}{2}$; 47) $\frac{a}{b}$; 49) $b(a-c)$; 51) $\frac{b}{a-c}$; 53) $\frac{ab}{a-1}$; 55) $\frac{ab}{a-1}$; 57) $\frac{c+b}{b}$; 59) $\frac{bdm}{ad-bc}$; 61) $\frac{a^2+b^2}{2ab}$; 63) ab; 65) ab; 67) mn; 69) $\frac{a}{3}$; 71) $\frac{a+b}{ab}$; 73) $-b$; 75) $\frac{a-b}{a+b}$; 77) $\frac{m+1}{m-1}$; 79) $a-b$; 81) 0;

83) $\frac{a}{b}$; 85) 1; 87) 0; 89) $\frac{a-mb-bn}{m+n}$; 91) $\frac{an+bm}{cmn}$; 93) $\frac{abcd}{bc+ac+ab}$; 95) 0; 97) $\frac{70a^2-78ab-288b^2}{3b+73a}$; 99) $\frac{2p^2+20pq-21q^2}{2(3q-p)}$; 101) $\frac{a^2-b^2}{a-5b}$; 103) 0; 105) b; 107) b; 109) $\frac{bd(a-c)}{ac(d-b)}$; 111) $\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$; 113) $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}$; 115) $\frac{a^2b-a^2c+bc^2-ac^2}{ab+bc-2ac}$; 117) $\frac{b-a}{2}$; 119) $10(p-q)$; 121) $\frac{a}{2}$; 123) $\frac{mpq}{m^2+p^2+q^2}$; 124) $\frac{2(a^2-b^2-2a^2b^2)}{ab(2+a^2-b^2)}$; 125) b; 127) a; 0; 129) $\frac{7a^2+2ab+3b^2}{2(2a-b)}$; 131) $\frac{b+c}{2}$; 133) $\frac{b}{c}$; 135) $\frac{ab}{a-b}$.

584. 13) 95; 15) 888; 17) $\frac{np-mq}{p-q}$; 19) 50 и 30; 21) $\frac{an-bm}{a+b}$; 23) 1440 и 36; 25) 3; 27) 90.

585. 1) 798 и 1026; 3) 16, 32, 48; 5) 2400; 7) 3000, 2500, 2000, 1500; 9) 20; 11) Старш. 3200; 13) Брату 1 г.; 15) 22,5; 17) $25\frac{1}{8}$; 19) 80 и 70; 21) 500; 23) 700 и 300; 25) 112,5 зол.; 27) 1200 литров.; 29) 330, 15 и 51,1 (прибл.).

586. 1) 562923; 3) $8\frac{1}{3}$; 5) 2500 и 3500; 7) 4800; 9) 450, 550, 275; 11) 12000 р.; 12) Прибл. 1 г. 3,4 мес.; 13) 84202,5; 15) 15000; 17) $\frac{100(b-a)}{an}$; 19) $a\left(1-\frac{mp}{100}\right)$; 21) 1,04 руб.; 23) 10%; 25) 375; 27) 21 г.; 29) 60; 31) 366; 33) $2\frac{2}{5}$ и $\frac{4}{5}$ *км.*

587. 9) 14,5 и 17,5; 11) Гипотенуза 30 *м.* 13) 2 и 3.

588. 3) 88 (прибл.); 5) 8; 7) 14; 9) 2,5 *км.* от М.; 11) $\frac{abc}{b-a}$; 13) 240; 15) 75; 17) 1 ч. $5\frac{5}{11}$ м.; 19) Через каждые 1 ч. $5\frac{5}{11}$м.

589. 1) ∞ 1,74; 3) ∞ 15846 $м^3$; 5) ∞ 3,2 *кг*; 7) ∞ 0,227; 9) 35 *мм*; 11) 49,5 *мм*; 13) 0,3; 15) ∞ 0,1; 17) 16,35 *кг*; 19) $a.\frac{t_1-t_2}{t_2}$; 21) на 10 *см* от точки приложения груза в 1 *кг*; 23) 50 и 140; 25) $37\frac{7}{9}°$; 27) $-9\frac{11}{13}°$ R; 29) $-29\frac{9}{11}°$ C; 31) 64,4° C; 33) $15\frac{1}{8}°$ C; 35) ∞ 536.

592. 1) $x=8$; $y=4$; 3) 11; 55; 5) 42; 70; 7) 5; 2; 9) 3; 7; 11) 1; —1; 13) —1; —1; 15) 0,4; 3; 17) —2; 5; 19) —4; —5; 21) 3; 7; 23) 15; 12; 25) 6; 5; 27) 14; 16; 29) 6; 5; 31) 8; 6; 33) 6; 8; 35) $\frac{ac}{am-bn}$; $\frac{bc}{bn-am}$; 37) $a(a+b)$; $b(b+a)$.

593. 1) 10; 2; 3) 7; 4; 5) —3; 2; 7) 3; 3; 9) 15; 2; 11) —4; 7; 13) 14; 5; 15) 12; 4; 17) 27; 18; 19) 7; 4; 21) 3; 0; 23) $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$; 25) 20; 3; 27) 9; 10; 29) 10; 8;

31) $\frac{b-b'}{k'-k}$; $\frac{k'b-kb'}{k'-k}$. **594.** 1) 15; 2; 3) 250; 97; 5) 17; 1; 7) 2,1; 1; 9) 0,71; 0,14; 11) 0,17; 0,13; 13) $\frac{a+b}{2}$; $\frac{a-b}{2}$; 15) $a+b$; $a-b$.

595. 1) 9; 7; 3) 3; 2; 5) $2\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{3}$; 7) 191; —71; 9) 4; 3; 11) 2; 1; 13) 8; 1; 15) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}$; 17) —1; $\frac{1}{2}$; 19) —1; 1; 21) —3; —2; 23) 11; 10; 25) $-\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; 27) 7; 4; 29) 12; 10; 31) 12; 15; 33) 8; 3; 35) 6; 10; 37) 0,531; 0,135; 39) 10; 10. **596.** 1) 2; 3; 3) 0,8; 0,9; 5) 12; 15.

597. 1) 7; 9; 3) 2,2; 1,1; 5) 5; 4; 7) $a+b$; $a-b$; 9) $\frac{a+b}{2}$; $\frac{a-b}{2}$; 11) $a+ab^2+b^2$; a^2-ab+b^2; 13) a^2+ab+b^2; a^2-ab+b^2; 15) a^2+ab+b^2; a^2-ab+b^2; 17) 5; 2; 19) 24; 12; 21) 11; —7; 23) 100; 10; 25) 1; 2; 27) 8; —3; 29) 3; 5. **598.** 1) 5; 4; 3) $2\frac{39}{148}$; $1\frac{3}{37}$; 5) —10; 11; 7) 21; 25; 9) 14; 10; 11) 42; 5; 13) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 15) 2; 3; 17) 4; 7; 19) $\frac{1}{3}$; 4; 21) $8\frac{3}{11}$; $1\frac{6}{11}$; 23) 0,01; 0,1; 25) 6; 3; 27) 2; 5; 29) 7; 8; 31) 17; 13; 33) —7; —3; 35) 0,7; 0,9; 37) 4,4; 3,3; 39) 11; 6; 41) 5; 3; 43) 5; 9; 45) 13; 11; 47) 7; 5; 49) $\frac{a+b}{a}$; $\frac{b}{a-b}$; 51) $\frac{a+b}{a-b}$; $\frac{a-b}{a+b}$; 53) $-(a+b)$; $\frac{(a+b)^2}{a-b}$; 55) p; q; 57) $2a+b$; $2a-b$; 59) $\frac{a-b}{b}$; $\frac{a+b}{a}$; 61) $a+b$; $a-b$; 63) $a+b$; $a-b$; 65) $\frac{a}{a+b}$; $\frac{b}{a-b}$; 67) $\frac{aa_1(b_1c_1-bc)}{ab_1-ab_1}$; $\frac{bb_1(ac-a_1c_1)}{ab_1-a_1b}$; 69) $\frac{a}{a-b}$; $\frac{b}{a+b}$; 71) $a+b-c$; $a-b+c$; 73) $\frac{a+b}{c}$; $\frac{a-b}{c}$; 75) $\frac{a+1}{ab-1}$; $\frac{b+1}{ab-1}$.

605. 1) 20; 17; 5; 3) 3; 2; 1; 5) 1,7; 1,5; 1,3; 7) 28; 32; 40; 9) 4; 3; 7; 11) 10; 1; 3; 13) 0; 4; 5; 15) $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{2}$; 17) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; 19) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; 21) 1; 1; 1; 23) 2; $\frac{3}{4}$; 1; 25) 1; 2; 3; 27) 4; 3; 2; 29) 2; 1; 1; 31) 10; 6; 5; 33) 3; 5; 7; 35) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; 1; 37) 4; 6; $\frac{1}{2}$; 39) 10; 20; 30; 41) 10; 50; 40; 43) Неопределенна; 45) Несовместна; 47) 10; 20; 15. **606.** 1) 15; 12; 10; 3) 9,9; 9,8; 6,3; 5) 5; 3; 1; 7) 3; 5; 7; 9) 5; 3; 1; 11) 3; —4; 5; 13) $x=\frac{2a+b-c}{14}$; 15) Несовместна; 17) 5; 2; 0; 19) 11; 9; 7; **607.** 1) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; 3) 1; 2; 3; 5) 3; 4; 5; 7) 2; —4; 6. **608.** 1) 4; 5; 7; 3) $\frac{2}{3}$; 2; $\frac{2}{5}$; 5) 4; 6; 9; 7) 0,5; 0,2; 10; 9) 3; 4; 5; 11) $\frac{1}{27}$; $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{10}$; 13) 5; 3; 1; 15) $b+c$; $a+c$; $a+b$. **610.** 1) 1; 1,5; 2; 2,5; 3) $x=\frac{ar}{ma+nb+pc+qd}$;

5) $z=\frac{a+b-c}{a+b+c}$; 7) $u=\frac{m+n+b-a}{2}$; 9) $z=\frac{c-a+3b+2d}{5}$; 11) 5; 4; 1; 3;
13) $x=\frac{a}{10}-\frac{3b}{40}+\frac{c-d}{20}$; 15) 70; 12; 24 и 6; 17) 10; 5; 0 и 1.
611. 1) $x=4$; $y=5$; $z=1$; $v=3$; $u=2$; 3) $x=2$; $y=1$; $z=0$; $u=3$; $v=4$;
5) $z=\frac{2c+2a-b-d-e}{3}$; 7) $x=b+d-c$; 9) $x=\frac{b+c+d+e-3a}{4}$,
11) $x=\frac{1}{6}(b+c+d+e-2a)$; 13) 5; 4; 3; 2; 1. **612.** 7) $\frac{ka}{k+1}$; $\frac{a}{k+1}$;
9) $\frac{na-b}{mn-1}$; $\frac{mb-a}{mn-1}$; 11) 32; 18; 13) 14,4; 2,4; 15) 15; 3; 17) 5; 4;
19) 52; 21) 82; 23) a^2-1; $a-1$; 25) $\frac{8}{13}$; 27) $\frac{11}{13}$; 29) $\frac{36}{48}$;
31) $\frac{3}{8}$; 33) 2; $\frac{2}{3}$; 35) 142; 857; 37) 15384; 6; 39) -1; 6;
614. 1) 25; 25; 15; 3) 81; 79; 40; 5) 17; 31; 43; 7) 1; 3; 7;
9) $\frac{apm}{pm+pn+qn}$; $\frac{apn}{pm+pn+nq}$; $\frac{aqn}{pm+pn+nq}$; 11) 483; 13) 350;
15) $a=3$; $b=-5$; $c=2$; 17) $b=0$; $c=-5$; $d=0$; $e=4$. **615.** 1) 33 и 7;
3) 68; 12; 5) 14; 59; 7) 1242,5 и 1950. 9) 21; 28; 11) 90; 50;
13) 13; 11; 15) 15; 10; 17) 48000; 4,5%;
19) 21000; 20000; 18000; 9,5%; 8%; 6%; 21) 327; 576; 23) 24; 20; 16;
25) 245; 235; 125; 27) 40; 65; 1 р. 05 к.; 29) 2,4; 2; 1,8.
616. 1) $p+\frac{d}{2}$; $\frac{d}{2}-p$; 3) $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{6}$; 5) 33°; 62°; 85°;
7) $90+\frac{d-a}{2}$; $90-\frac{d+a}{2}$; 9) 26°; 54°; 100°; 11) $12\frac{30}{46}$; $10\frac{13}{46}$; 15) 8; 4;
17) 9; 13; 3 и 7; 19) 14; 12. **617.** 1) $5\frac{1}{4}$; $1\frac{3}{4}$; 3) 334,5; 9,5;
5) $1495\cdot10^5$; $1081\cdot10^5$; 7) 9; 36; 9) $\frac{p(a_1-a-d)}{a_1d+ad_1+dd_1}$; $\frac{p(a_1-a+d_1)}{a_1d+ad_1+dd_1}$.
618. 1) 89; 35; 3) $d\cdot\frac{p-b}{a-b}$ 5) ∾ 1,58; 1,3; 7) ∾ 67,47; 3,53;
9) 200 и 100; 11) 8,5; 7,2; 7,8; 13) 26°; 76°; 15) ∾ 9,8; 25,4.
619. 1) 20; 30; 60; 3) 60; 5) 4; 12; 48; 7) 2 и 3.

Из предисловия к первому изданию.

Предлагаемая вторая часть — сборник упражнений и задач по алгебре — представляет, как и первая часть сборника, переработку реформированного издания задачника Бардей: Bardey-Lietzmann и Bardey-Lietzmann-Zühlke «Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis. T. I, II — Reformausgabe». Причины, которые заставили составителей положить в основание своего труда сборник Литцмана, выяснены в предисловии к первой части.

При составлении своего труда составители, кроме задачников Литцмана, пользовались и другими источниками; главнейшими из них являются New Algebra Barnard and Child и учебник алгебры П. Н. Полякова.

Составители считают необходимым обратиться с просьбой указать несомненно имеющиеся в сборнике недочеты и промахи, за что заранее выражают благодарность тем лицам, которые такие указания сделают.

Д. Бем, А. Волков, Р. Струве.

Часть вторая.

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Приближенные вычисления.

§ 1. Приближенное значение числа.

1. Относительно некоторого числа известно, что оно больше 1,4, но меньше 1,5. Какой величины не превышает ошибка, если данное число принять равным 1,4 или равным 1,5?

2. Предыдущую задачу решить для чисел, относительно которых известно:

Число больше.	Число меньше.
1) 1,7	1,8
2) 3,14	3,15
3) 2,718	2,719

3. Определить, с какой ошибкой числа 3,5 и 3,6 дают приближенное значение числа 1) 3,57, и какое из этих приближенных значений ближе к данному числу? 2) 3,54.

4. Решить предыдущую задачу для чисел:

1) 1,2	и	1,3	для	числа	1,21;
2) 2,92	»	2,93	»	»	2,927;
3) 5,46	»	5,47	»	»	5,465;
4) 0,037	»	0,038	»	»	0,0377.

5. Указать приближенные значения следующих дробей с точностью до 0,01 и выбрать из них более точные:

1) 64,87456; 2) 2,353535; 3) 0,60187187187;
4) 52,0088787; 5) 1,66666; 6) 0,571428571428;
7) 0,454545; 8) 0,545454.

Какое из приближенных значений получится, если десятичную дробь оборвать на первом, на втором и т. д. десятичном знаке? Как по приближенному значению по недостатку получить приближенное значение с тою же точностью по избытку? Каким неравенствам удовлетворяют число и его приближенные значения по недостатку и по избытку?

6. Составить таблицу приближенных значений по недостатку и по избытку с точностью до 0,1, до 0,01 и т. д. для дробей:

$$1)\ \frac{2}{3},\quad 2)\ \frac{5}{6},\quad 3)\ \frac{6}{7},\quad 4)\ \frac{22}{7},\quad 5)\ \frac{223}{71},\quad 6)\ \frac{336}{106},\quad 7)\ \frac{355}{113}.$$

При практических вычислениях приходится в большинстве случаев пользоваться приближенными значениями чисел, а не точными. Принято приближенные значения записывать в виде десятичных дробей.

Приближенным значением числа *по недостатку* (например дробного числа) с точностью до единицы (до 0,1, до 0,01 и т. д.) называется наибольшее число единиц (десятых долей единицы, сотых и т. д.), которое содержится в данном числе; приближенным значением числа *по избытку* с точностью до единицы (до 0,1, до 0,01 и т. д.) называется число, превышающее приближенное значение по недостатку на единицу (соответственно на 0,1, на 0,01 и т. д.). Приближенное значение числа *по недостатку* меньше этого числа, приближенное значение *по избытку* больше этого числа.

Абсолютное значение разности между числом и приближенным значением, которым заменяется число при вычислении, называется *погрешностью* приближенного значения (числа, входящего в вычисление).

§ 2. Сложение и вычитание.

7. Определить *предел* ошибки, которая получится, если при сложении чисел:

1)	2)
64,857 894	2,689 7
2,574 39764	4,666 54
0,068 754325	0,268 9543
0,333 33	0,006 777
6,262 626	0,528 7
0,006 835	0,002 2828
0,000 235	

заменить каждое из слагаемых более близким из его приближенных значений с точностью до 0,001 и произвести сложение.

8. С какой степенью точности получится сумма, если она содержит более десяти слагаемых и каждое из них вычислено с точностью до 0,01, 0,001?

9. Определить предел ошибки в следующих вычитаниях, если и уменьшаемое, и вычитаемое заменить их приближенными значениями (более близкими) с точностью до 0,01:

1) 2,087547 — 1,63285;
2) 16,42895 — 0,33333...;
3) 4,56534 — 2,324949...;
4) 2,6543585 — 0,0626262...;
5) 5,252525... — 1,004856;
6) 2 — 0,03333....

10. Как велика ошибка, если вместо того, чтобы 1) складывать числа $a+\alpha$ и $b+\beta$, сложить их приближенные значения a и b? 2) вычитать $b+\beta$ из $a+\alpha$, вычесть b из a? Как велико наибольшее возможное абсолютное значение такой ошибки? Распространить полученный результат на выражение, содержащее более двух членов (слагаемых и вычитаемых).

11. С какой точностью следует взять слагаемые и вычитаемые, чтобы результат вычисления:

1) 2,75894 — 0,66666.... — 1,373737.... + 0,006485;
2) 1,6565.... — 0,77777.... + 2,57896 + 3,428957

содержал ошибку, не превышающую:

1) 0,01, 2) 0,001, 3) 0,0001?

Вычислить 1) с точностью до 0,001; с точностью до 0,01.

Так как общее число слагаемых и вычитаемых меньше 10, то каждое из этих чисел следует взять с точностью:

1) 0,001, 2) 0,0001, 3) 0,00001.

12. В следующих задачах удержать в наибольшем из данных чисел: 1) четыре, 2) три, 3) пять значащих цифр, сохраняя в остальных числах лишь те цифры, которые соответствуют удержанным цифрам в наибольшем из чисел, и заменяя каждое из чисел его более близким приближенным значением. В каждом случае указать точность результата:

$$1)\ \begin{array}{r} 17{,}1718 \\ +\,14{,}030 \\ +\ 8{,}7140 \\ +\ 0{,}14375 \\ \hline \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} 565{,}712 \\ +\ 5{,}3813 \\ +\ 3{,}794 \\ +\ 0{,}1415 \\ \hline \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} 56770{,}5 \\ +\ 717{,}66 \\ +\ 3465{,}134 \\ +\ 0{,}143 \\ \hline \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{r} 713704 \\ +\ 215{,}56 \\ +\ 43140 \\ +\ 5480{,}5 \\ \hline \end{array}$$

$$5)\ \begin{array}{r} 957{,}713 \\ -\ 12{,}5994 \\ \hline \end{array} \qquad 6)\ \begin{array}{r} 1714{,}58 \\ -\ 18{,}74 \\ \hline \end{array} \qquad 7)\ \begin{array}{r} 0{,}785683 \\ -0{,}5372853 \\ \hline \end{array} \qquad 8)\ \begin{array}{r} 577{,}7778 \\ -\ 0{,}544 \\ \hline \end{array}$$

Погрешность суммы или разности двух чисел не превышает суммы погрешностей данных чисел.

§ 3. Умножение.

13. Сколько десятичных знаков следует удержать во множимом 0,33333333, чтобы получить произведения: 1) 0,33333333·7; 2) 0,33333333·29; 3) 0,33333333·525 с точностью до 0,01?

14. Умножить 0,62 на 0,4; 0,628 на 0,4 и 0,6285 на 0,4. Сравнить полученные произведения и выяснить, с какой степенью точности каждое из них дает приближенное значение произведения 0,62854326·0,4.

15. Те же вопросы решить относительно произведений: 1) 0,62 на 0,07; 0,628 на 0,07; 0,6285 на 0,07 и 0,62854326 на 0,07; 2) 0,62 на 0,006; 0,625 на 0,006; 0,6258 на 0,006 и 0,62854326 на 0,006.

16. Сколько десятичных знаков следует удержать во множимом, чтобы произведения:

а) 1) 0,82643·5;
2) 0,82643·0,2;
3) 0,82643·0,04;
4) 0,82643·0,007

б) 1) 2,8579643·7;
2) 2,8579643·0,6;
3) 2,8579643·0,03;
4) 2,8579643·0,009;
5) 2,8579643·0,0005

содержали ошибку, не превышающую 0,001?

Произвести эти умножения.

17. Указать наименьшую десятичную дробь с числителем 1, превышающую ошибку результата умножения:

а) 0,82643·5,247; б) 2,8579643·7,6395,

если произведения (вычисленные выше с точностью до 0,001) принять за частные произведения и сложить для получения окончательного результата.

18. С какой точностью должны быть вычислены частные произведения в умножении:

1) 64,8256803·2,68957964; 2) 2,6806459·3,2685264;
3) 3,6432654·0,666666.... 4) 0,266666.... 1,0625,

чтобы произведение содержало ошибку, не превышающую 0,01?

С какой точностью должно быть взято множимое при умножении на каждый знак множителя? На какие знаки множителя не имеет смысла умножать? Произвести умножение, заменяя сомножители их более близкими приближенными значениями.

19. Вычислить наибольшее возможное абсолютное значение ошибки, которая получится, если заменить умножение чисел $a+\alpha$ и $b+\beta$ умножением их приближенных значений a и b. Как упростится полученное выражение предела ошибки, если пренебречь произведением $\alpha\beta$ по его малости? Вычислить по составленной формуле, как велик наивысший предел ошибки при сокращенном умножении, если перемножаемые числа суть: 1) 356,8935 и 60,6459 и сомножители берутся с точностью до 0,01; 2) 8935,4478 и 69,8885 и в них удерживается по 5 значащих цифр (с соответственным округлением последнего десятичного знака).

20. Вычислить с точностью до 0,01 произведения:

1) $0{,}87666666 \cdot 2{,}7333333$;
2) $4{,}277777777 \cdot 4{,}285714285714$;
3) $6{,}44444444 \cdot 0{,}1285714285$;
4) $3{,}1415929 \cdot 2{,}7182818284$;
5) $75{,}896 . 4{,}5389$.

21. Возвести в квадрат (с точностью до 0,01):

1) 0,888886425; 2) 3,1415929; 3) 1,4142135.

Погрешность произведения двух (положительных) чисел не больше суммы погрешностей каждого из этих сомножителей, умноженных соответственно на другой сомножитель.

§ 4. Деление.

22. Доказав справедливость равенства

$$\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}=\frac{\alpha b-\beta a}{b^2+b\beta},$$

определить на основании его наибольшее возможное абсолютное значение ошибки, которую мы допускаем, заменяя частное от деления $a+\alpha$ на $b+\beta$ частным от деления a на b (если при том пренебречь произведением $b\beta$ по его малости сравнительно с b^2).

23. Определить ошибку, которую мы сделаем, если за значение частного:

1) $\frac{6}{2{,}52}$ примем дробь $\frac{6}{2{,}5}$,
2) $\frac{3{,}6}{3{,}62}$ » » $\frac{3{,}6}{3{,}6}=1$,
3) $\frac{8}{2{,}57}$ » » $\frac{6}{2{,}6}$.

24. Показать, что, если при делении $3:6{,}666\ldots$ делитель заменить его приближенным значением

6,67, то ошибка результата будет $< 0{,}001$,
6,667 » » » » $< 0{,}0001$.

Произвести деление $3:0{,}666\ldots.$

1) Заменяя делитель числом $6\frac{2}{3}$ (простой дробью, которая обращается в $6{,}666\ldots$)
2) » » » 6,67
3) » » » 6,667
4) » » » 6,667 и 6,666,

и сравнить полученные результаты.

25. С какой точностью следует взять делитель, чтобы ошибка частного не превышала 0,01:

а) 1) $3:66{,}666$;
2) $3:6{,}6666$;
3) $3:0{,}6666$;
4) $3:0{,}06666$;
5) $3:0{,}00666$;

б) 1) $3:6{,}6666$;
2) $30:6{,}6666$;
3) $300:6{,}6666$;
4) $3000:6{,}6666$;
5) $30000:6{,}666$;

в) 1) $23:5{,}65656$;
2) $173:0{,}686868$;
3) $6{,}45:88{,}888$;
4) $0{,}327:0{,}757575$;
5) $0{,}026:0{,}858585$.

26. Произвести деления, указанные в предыдущей задаче, так, чтобы ошибка результата не превышала:

1) 0,01; 2) 0,001.

С одинаковой ли точностью следует брать делитель при вычислении отдельных знаков частного? Сделать вычисление наиболее сокращенным способом. Сравнить результаты при вычислении последовательных знаков частного без сокращения делителя и при его сокращении.

27. Произвести деления:

1) $6{,}25:3{,}262626$;
2) $4:0{,}33333$;
3) $0{,}696919:0{,}55555$;
4) $4{,}32:0{,}858585$;
5) $25:1{,}4142135$;
6) $2{,}85363:3{,}14139$;

с точностью до 0,01.

28. В следующих делениях удержать в делимом и делителе по 4 значащих цифры, произвести действия, пользуясь всеми допустимыми сокращениями и оценить ошибку результата.

1) $189{,}35:19{,}455076$;
2) $39{,}6666\ldots:10{,}90871212$;
3) $7{,}0128:16{,}7484925$;
4) $21{,}4285714:1{,}732050807$;
5) $8{,}3333\ldots:22{,}3606798$;
6) $0{,}4616161\ldots:2{,}4494898$;
7) $99:4{,}9749372$;
8) $18{,}125:12{,}04159495$;
9) $11:4{,}69041576$;
10) $(0{,}2784:0{,}452740):0{,}452740$.

Погрешность частного двух (положительных) чисел не больше частного от деления на квадрат делителя суммы погрешностей делимого и делителя, умноженных соответственно на делитель и делимое [1]).

§ 5. Приложения.

29. Для вычисления объема газа (например воздуха) при температуре t° (и неизменном давлении), имевшего при 0° объем v_0, пользуются формулой Гей-Люссака:

$$v_t = v_0 (1 + \alpha t),$$

где v_t—числовое значение объема при t°, v_0 — числовое значение объема при 0°, $\alpha = \frac{1}{273} \backsim 0{,}0037$, t — число градусов.

a) Вычислить по формуле Гей-Люссака v_t, если

1) v_0 (в литрах) $= 10$, $t = 3,\ 5,\ 10,\ 27{,}3$;

2) $v_0 = 25{,}46$, $t = 8,\ 15,\ -7,\ -25$

с точностью до 0,01 литра.

b) Вычислить (пользуясь формулой приближенного деления на выражения вида $1 \pm \alpha$) по формуле Гей-Люссака v_0, если:

1) $v_t = 5{,}08$, $t = 10^\circ$, $t = -5^\circ$;

2) $v_t = 4{,}865$, $t = 8$, $t = -8$, с точностью до 0,01 литра.

30. Найти решения следующих задач с тремя значащими цифрами.

1) Вычислить: а) площадь круга, б) длину окружности радиуса 5,13 *см* ($\pi = 3{,}14159$), если окружность круга радиуса r равна $2\pi r$, а площадь $= \pi r^2$.

2) Зная, что объем шара радиуса r выражается фурмулой $v = \frac{4\pi r^3}{3}$, а поверхность — формулой $s = 4\pi r^2$, вычислить вес шара из пробки, радиус которого равен 2,15 *м*. Удельный вес пробки $\backsim$ 0,25.

3) Вычислить поверхность земного шара, полагая его радиус $\backsim$ 6370 *км*.

4) Вычислить радиус колеса, если длина его обода равна 4,27 *м*.

5) Какой путь описывает точка экватора в одну секунду при вращении земли вокруг оси? Радиус земли $\backsim$ 6370 *км*.

6) Какой путь проходит земля в 1 секунду, двигаясь по своей орбите около солнца. Радиус земной орбиты $\backsim 149 \cdot 10^6$ *км*.

7) Вес алмаза равен 1,17 *г*. Сколько каратов содержит этот алмаз, если 1 карат $\backsim$ 205,894 миллиграмма?

---

[1]) При этом предполагается, что погрешности чисел малы в сравнении с самыми числами (см. зад. № 19 и 22).

8) Масса земли, по Рихарцу и Кригар-Менцелю, равна 5960 триллионам тонн, по Брауну—5987 трилл. тонн и по Вильзингу — 6100 трилл. тонн. Пользуясь каждым из этих значений, вычислить плотность земли. Радиус земного шара $\backsim$ 6370 *км.*

9) На основании возмущений планеты Эрос установлено, что масса луны составляет $\frac{1}{81,5}$ массы земли. Как велика окажется масса луны при значениях массы земли, взятых из предыдущей задачи?

10) Времена обращений спутников Марса равны соответственно 0,3189 и 1,2642 дням. Найти приближенное значение отношения времен их обращения.

11) Четыре небольших спутника Юпитера имеют следующие времена обращения:

$$u_1 = 1,7691 \text{ день}$$
$$u_2 = 3,5512 \text{ »}$$
$$u_3 = 7,1545 \text{ »}$$
$$u_4 = 16,6890 \text{ »}$$

Найти приближенные значения отношений:

а) u_1 к u_2, б) u_2 к u_3, в) u_3 к u_4.

31. Плотность воды при различных температурах дана в следующей таблице:

0°C	0,99988	6°	0,99997	15°	0,99915
1°	0,99993	7°	0,99993	20°	0,99827
2°	0,99997	8°	0,99988	25°	0,99713
3°	0,99999	9°	0,99982	30°	0,99577.
4°	1,00000	10°	0,99974		
5°	0,99999				

Вычислить в *кг* с возможно высокой точностью вес ведра воды при различных температурах, если 1 ведро = 12,299 литра.

32. Скольким пудам равна метрическая тонна, если 1) 1 пуд = = 16,3805 *кг*; 2) 1 *кг* = 2,44193 фунта (с возможно более высокой точностью)? Сравнить результаты, полученные на основании тех и других данных.

Уравнения.

33. Оценить ошибку, которая получается при замене решения уравнения $(a+\alpha)x+(b+\beta)=0$ решением уравнения $ax+b=0$.

34. Решить следующие уравнения 1-й степени, сохраняя в коэффициентах 1) три, 2) четыре значащих цифры.

1) $6{,}745x + 1{,}2961 = 0;$ 2) $25{,}8043x - 0{,}45463 = 0;$

3) $12148340x - 7458 - 0;$ 4) $\frac{12385}{x} - 30{,}12 = 0;$

5) $x + y = 2$
$x - y = 0{,}03363;$ 6) $278{,}43x + 281{,}5y = 371{,}9$
$188{,}54x - 176{,}34y = 53{,}374.$

35. Синодический (y) и сидерический (x) периоды обращения какой-либо внутренней планеты находятся в следующем отношении:

$$y : x = (365{,}25 + y) : 365{,}25.$$

1) Как велик сидерический период обращения Меркурия, если синодически его период содержит 115 дней 21 час?

2) Как велик синодический год Венеры, если ее сидерический содержит 224,7 дней?

Результат вычисления называется обладающим точностью до 1 (до 0,1, до 0,01 и т. д.), если погрешность результата меньше 1 (0,1; 0,01 и т. д.). Обычно определить точно погрешность данных (приближенных) чисел оказывается невозможно или затруднительно. Поэтому вычисление погрешности результата заменяют вычислением *предела* (верхней границы) этой погрешности.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Степени с натуральным показателем.

§ 1. Понятие степени.

36. Составить таблицу квадратов натуральных чисел от 1 до 20.

37. Составить таблицу разностей квадратов пар последовательных натуральных чисел. На сколько единиц квадрат числа n меньше квадрата следующего за ним числа?

38. Какими цифрами оканчиваются квадраты последовательных натуральных чисел? В какой последовательности повторяются эти цифры?

39. Составить таблицу кубов натуральных чисел от 1 до 10.

40. Если составить таблицу кубов целых чисел, то последними цифрами полученных кубов, начиная с 0, будут: 0, 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9. Затем цифры будут повторяться в том же порядке; 1) доказать это; 2) пользуясь указанным свойством ряда кубов, угадать двузначные числа, кубы которых равны: 19683, 753571, 438976.

41. Проверить равенства:

1) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$; 2) $11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3$.

42. Вычислить значения следующих выражений:

1) $1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5 + 1^6 + 1^8 + 1^9 + 1^{10}$;
2) $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6$;
3) $(-1)^1 + (-2)^2 + (-3)^3 + (-4)^4 + (-5)^5 + (-6)^6$;
4) $(-1)^1 - (-2)^2 + (-3)^3 - (-4)^4 + (-5)^5 - (-6)^6$;
5) $(-x)^5 + (-x)^4 + (-x)^3 + (-x)^2 + (-x)$ при $x = -1$;
6) $(+2)^3 + (-3)^2$; 7) $(+3)^3 + (-3)^3$; 8) $(+2)^4 + (-2)^4$;
9) $(-7)^2 - (-2)^7$; 10) $(-5)^2 - (-2)^5$;

11) $4\cdot3^2+7\cdot3^2-9\cdot3^2+3\cdot3^2-5\cdot3^2$;
12) $3\cdot2-4\cdot2^2+5\cdot2^3-6\cdot2^4+7\cdot2^5$;
13) $4(-3)^2+3(-3)^3+6(-3)^4-12(-3)^5$;
14) $0{,}3\cdot(-0{,}2)^2+6\cdot(-0{,}2)^3+50(-0{,}2)^4-100(-0{,}2)^5$;
15) $\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{9}{16}\left(-\frac{4}{3}\right)^3-\frac{27}{64}\left(-\frac{4}{3}\right)^4$;
16) $5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+5\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^3+7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4+7\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^4$;
17) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ а) при $x=1$, б) при $x=-1$;
18) $3x^6-4x^5+5x^4+6x^3-7x^2$ а) при $x=2$, б) при $x=-2$;
19) x^8+y^8 при $x=4$, $y=-4$;
20) x^9+y^9 при $x=2$, $y=-2$.

43. Упростить следующие выражения:

1) $x^2+(-x)^2$; 2) $y^3+(-y)^3$; 3) $a^4+(-a)^4$;
4) $a^2-(-a)^2$; 5) $a^3-(-a)^3$; 6) $x^5-(-x)^5$;
7) $(a-b)^2+(b-a)^2$; 8) $(a-b)^3+(b-a)^3$;
9) $(x-y)^4+(y-x)^4$; 10) $(c-d)^2-(d-c)^2$;
11) $(c-d)^3-(d-c)^3$; 12) $(p-q)^5+(q-p)^5$.

44. Как называются числа a, n и b в равенстве $a^n=b$?

При каких значениях n выражение a^n не имеет смысла? Имеет ли место для выражения a^n переместительный закон? Сколько обратных действий должно иметь возведение в степень? Всегда ли можно найти такое x, что $x^n=b$? Всегда ли можно найти такое x, что $a^x=b$? При каких значениях a и b имеет место $a^b=b^a$? Подыскать примеры, в которых $a^b=b^a$ при $a\neq b$.

45. Какое из чисел больше:

1) 2^2 или $(-2)^2$? 2) 2^3 или $(-2)^3$?
3) $(0{,}5)^2$ или $(-0{,}5)^2$? 4) 4^2 или 4^3?
5) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ или $\left(\frac{1}{4}\right)^3$? 6) a^2 или $(-a)^2$?
7) a^3 или $(-a)^3$? 8) a^2 или a^3?
9) a^2 или $\left(\frac{1}{a}\right)^2$?

46. Указать ошибку в рассуждении:

1)
$$4-10=9-15 \text{ или}$$
$$4-10+\frac{25}{4}=9-15+\frac{25}{4};$$

но $$4-10+\frac{25}{4}=\left(2-\frac{5}{2}\right)^2;\quad 9-15+\frac{25}{4}=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

Следовательно $\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$,

а поэтому и $2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$,

откуда $2=3$ (!?).

2) Доказательство: всякие два числа равны друг другу: пусть a и b два числа, при чем $a \neq b$.

Тогда $a^2-2ab+b^2=b^2-2ab+a^2$,

или $(a-b)^2=(b-a)^2$,

откуда $a-b=b-a$,

или $2a=2b$,

или $a=b$(?!).

47. Вычислить первые шесть степеней чисел:

1) а) 2, б) $1\frac{1}{2}$, в) 1,1, г) 1,01, д) 1,001;

2) а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{2}{3}$, в) 0,9, г) 0,99, д) 0,999.

Что делается с числом при возведении в степень с возрастанием показателя степени, если это число (основание степени) 1) больше 1, 2) меньше 1, 3) равно 1?

При каких значениях a $a^n > a$? $a^n = a$? $a^n < a$?

48. 1) Представив число $a>1$ в виде $a=1+p$, где $p>0$, показать, что

$$(1+p)^{n+1}=(1+p)^n(1+p)>(1+p)^n+p.$$

2) На основании доказанного неравенства показать, что $(1+p)^n>1+np$.

3) Как велико должно быть n,

чтобы при $p=4$ было $1+np>10000$?

Какая степень 5 поэтому наверное больше 10000?

4) Как велико должно быть n, чтобы $1+np$ было больше произвольно большого числа A, т.-е. чтобы

$$1+np>A?$$

Почему при этом значении n и $(1+p)^n>A$, т.-е. $a^n>A$?

Как велико должно быть n, чтобы $\left(\frac{1}{5}\right)^n<\frac{1}{10000}$? (Воспользоваться результатами № 4.)

5) Представив число $b<1$ в виде $b=\frac{1}{a}$, где $a>1$, показать, что можно подобрать так n, чтобы $b^n<\alpha$, где α произвольно малое число.

49. *Задача из папируса Ахмеса* (1700 до нашей эры). 7 человек имеют по 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя, а из каждого колоса вырастает 7 мер. Сколько мер ячменя сохранится благодаря этим кошкам?

50. На лестнице с десятью перекладинами сидят голуби: на первой 1, на второй 2, на 3-й 4 и т. д.,— на каждой перекладине вдвое больше, чем на предыдущей. Сколько голубей сидит на последней перекладине и какой ширины должна быть последняя перекладина, если на каждом аршине ее может сесть 8 голубей?

51. Жемчужное ожерелье состоит из сорока жемчужин. Чудак предлагает владельцу ожерелья следующие условия: за первую жемчужину он дает одну спичку, за вторую 2, за третью 4 и т. д. за каждую из следующих вдвое больше, чем за предъидущую. 1) Сколько спичек он должен дать за последнюю жемчужину? 2) Сколько он заплатил бы за последнюю жемчужину, если 500 спичек стоят 70 копеек? Что стоила бы в этом случае 10-я жемчужина?

Задача из арифметики *Магницкого 1703 г.*

52. **Некто имаше великое свинечное ядро в немже диаметр есть 18-ти цоль, из него же хощет делати пули, ихже всякая в диаметре своем имела в $\frac{1}{2}$ цоли. И ведателно есть колико тех мелких из болшаго ядра будет (цоль — дюйм).**

(Указание: объемы тел относятся, как кубы их диаметров.)

§ 2. Действия над степенями.

53. Проверить равенство:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

подставляя вместо m и n любые целые числа.

54. Показать на числовых примерах, что

$$a^m + a^n \neq a^{m+n}.$$

55. Упростить выражение:

1) $a^7 \cdot a^3$; 2) $x^n \cdot x^5$; 3) $a^p \cdot a$; 4) $b \cdot b^{m-1}$;
5) $p^n \cdot p^n$; 6) $q^n \cdot q^{5n}$; 7) $q^{m-n} \cdot q^n$; 8) $a^3 \cdot a^{x-4}$;
9) $b^7 \cdot b^{20-x}$; 10) $q^{2n} \cdot q^{3-n}$; 11) $r^n \cdot r^{5-2n}$; 12) $a^{3+n} \cdot a^{x-3}$;
13) $h^{5-n} \cdot h^{n+x}$; 14) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$; 15) $x^n \cdot x^{n-1} \cdot x^{9-2n}$;

19) $9b^7\cdot\frac{2}{3}\,b^2\cdot\frac{1}{6}\,b$; 20) $0{,}6x^3\cdot 0{,}25x\cdot 1{,}6x^{9-x}$; 21) $a^{n-1}b^{n+1}\cdot ab^2$;

22) $x^2y^3\cdot x^{n-2}y^{n-5}$; 23) $\frac{5}{9}\,a^2bx\cdot\frac{6}{7}\,ab^3y^2\cdot\frac{4}{5}\,a^nbx^ny$;

32) $a^{m+n-7}\cdot a^{2m-n+8}\cdot a^{11-3m}$; 33) $p^{2x-3y+5}\cdot p^{3x+2y-5}\cdot p^{x+6y}$;

36) $(-a)^{2n}\cdot a$; 37) $(-a)^{2n}\cdot(-a)$; 38) $(-a)^{2n}\cdot(-a)^8$;

39) $(-a)^{2n+1}\cdot(-a)$; 40) $(-a)^{2n-1}\cdot(+a)$;

41) $(-a)^{2n-1}\cdot(-a)^{2m+1}$; 44) $(y-x)^n\cdot(y-x)^4$;

45) $(a-b)\,(b-a)^{2n-3}$; 49) $\frac{a^{3n}}{b^4}\cdot\frac{a^{2n}}{b^2}\cdot\frac{a^n}{b}$.

56. Разложить следующие выражения на множители:

1) $a^{11}+a^8-a^5$; 2) $a^3b^4+a^2b^5+a^5b^3$;

3) $a^2b^4c^3+a^3b^4c^2+a^4b^3c^2$; 4) $a^{3n}+a^{4n+1}+a^{5n+1}$;

5) $x^{2a+5b}+x^{5a-2b}-x^{2a+3b}$; 6) $r^{5s-t}-r^{2s-2t}+r^{3s-3t}$.

57. Подставляя вместо m и n произвольные целые числа,

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ при } m > n.$$
$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ при } m < n.$$

58. Проверить справедливость тех же равенств:

$$\left\{\begin{array}{l} a^m : a^n = a^{m-n} \text{ при } m > n \\ a^m : a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}} \text{ при } n > m \end{array}\right\} \text{ умножением на } a^n.$$

59. Произвести деление:

1) $\frac{a^n}{a^4}$; 2) $\frac{a^8}{a^n}$; 3) $\frac{x}{x^{n-2}}$; 4) $\frac{x^1}{x^{n-2}}$; 5) $\frac{x^{n-1}}{x^n}$;

6) $\frac{a^{n-1}}{a}$; 7) $\frac{x^5}{x^{5-n}}$; 8) $\frac{b^x}{b^{n-1}}$; 9) $\frac{a^{n-2}}{a^3}$; 10) $\frac{a}{a^{n-5}}$;

11) $\frac{m^{x-1}}{m^{x-2}}$; 12) $\frac{d^{x-2}}{d^{x+3}}$; 13) $\frac{a^{2n}}{a^{n-x}}$; 14) $\frac{k^{x+1}}{k^{x-1}}$; 15) $\frac{a^{x+n}}{a^{-xn}}$;

16) $\frac{a^{5-x}}{a^{13-2x}}$; 17) $\frac{a^{x+5}}{a^{5-2x}}$; 18) $\frac{a^nb}{ab^m}$; 19) $\frac{a^nb^3}{a^3b^m}$; 20) $\frac{a^mb^{m-1}}{a^nb^{n-1}}$;

21) $\frac{a^{m+1}b^{n+1}}{a^mb^n}$; 22) $\frac{a^{m-1}b^{n-1}}{a^mb^n}$; 23) $\frac{a^{m+1}b}{ab^{n+1}}$; 24) $\frac{(a-1)^4(x-1)^8}{(a-1)^3(1-x)^4}$.

60. Упростить выражения:

1) $\frac{2a^3x^5}{3b^2y^4}\cdot\frac{6ay^8}{5bx^4}\cdot\frac{by}{a^2x^2}$; 2) $\frac{2a^3b^7c^4}{3x^3y^4z^8}\cdot\frac{4a^2b^8c^5}{5xy^3z^4}$;

3) $\frac{4a^7b^4}{5c^4d^3}\cdot\frac{15bc^3}{8a^6d^2}\cdot\frac{2cd}{3ab}$; 4) $\frac{4a^5x^3y}{5b^3cz^4}:\frac{8a^0xy^4}{3bc^2z^5}$;

5) $\frac{2a^2b^3c}{3x^2y^3}\cdot\frac{a^mb^nc^r}{x^my^n}\cdot\frac{6x^{m-1}y^{n-2}}{a^{m+1}b^{n+2}c^{r+3}}$; 6) $\frac{5a^nb^{n-1}c^{n-2}}{6x^{n+1}y^{n+2}z^{n+3}}:\frac{3a^{n-1}bc^{n+1}}{2xy^nz^{n+1}}$.

61. Произвести деление:

1) $(ax^7+bx^3):x^5$; 2) $(ax^{2m}+bx^{2n}):x^{m+n}$;
3) $(ax^m+bx^n+cx^{m+n}):x^{m-n}$; 4) $(x^{2m}-y^{2n}):(x^m-y^n)$;
5) $(x^{3m}+y^{3n}):(x^m+y^n)$; 6) $(x^n-y^n):(x-y)$.

62. Привести к общему знаменателю и по возможности упростить:

1) $\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x}$; 2) $\frac{1}{x^3}+\frac{1-x}{x^4}$;
3) $\frac{1-x^2}{x^5}+\frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{1-x^5}{x^7}+\frac{1}{x^2}$;
5) $\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^{n-2}}$; 6) $\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{n-p}}$;
7) $\frac{x^n}{(x+y)^n}+\frac{2x^{n-1}}{(x+y)^{n-1}}-\frac{x^{n-2}}{(x+y)^{n-2}}$;
8) $\frac{a^x-b^y}{a^x+b^y}+\frac{a^x+b^y}{a^x-b^y}$; 9) $\frac{a^x+b^y}{a^x-b^y}-\frac{a^x-b^y}{a^x+b^y}$.

63. Показать, что

$$(ka)^p=k^pa^p,$$
$$\left(\frac{a}{k}\right)^p=\frac{a^p}{k^p},$$

задавая p любые целые значения.

64. Упростить следующие выражения:

1) $(1\frac{1}{2})^4\cdot(6\frac{2}{3})^4$; 2) $(1\frac{1}{3})^3\cdot(1\frac{1}{2})^3$; 3) $(7\frac{1}{2})^5\cdot(1\frac{1}{3})^5$;
4) $(-ax)^3\cdot(-by)^3\cdot(abxy)^{n-3}$; 5) $(ab)^2\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^3$;
6) $\left(\frac{6a}{b}\right)^4\cdot\left(\frac{b}{4a}\right)^2\cdot\frac{b^2}{(3a)^3}$; 7) $(-\frac{2}{3}ab)^5\cdot\left(\frac{6a}{5b}\right)^2\cdot\left(-\frac{3b}{8a}\right)^3$;
8) $\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{c}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^4$; 9) $\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{x}\right)^n$.

65. Показать, подставляя вместо m и p произвольные целые числа, что

$$(a^m)^p=(a^p)^m=a^{mp}.$$

66. Раскрыть скобки и, если возможно, упростить.

1) $(a^n)^p$; 2) $(a^3)^{v-1}$; 3) $(x^{n+1})^4$;
4) $(-a^3)^2$; 5) $(-a^2)^3$; 6) $(-a^3)^5$;
7) $(-a^3)^{2n}$; 8) $(-a^{2n})^3$; 9) $(-a^{2n-1})^{2n}$;
10) $(-a^2)^{2n-1}$; 11) $(-a^{2n-1})^2$; 12) $(-a^{2n})^{2n-1}$;

13) $(a^4b^2)^5$; 14) $(-a^5b^7)^8$; 15) $(x^ny)^3$;

19) $(x^{a-b})^{a+b}$; 20) $(y^{a+b})^{a+b}$; 21) $(a^{2x-3y})^{2x+3y}$;

22) $(b^{4x+5})^{5-4x}$; 26) $\left(\frac{4a^4b^n}{3x^2y^{n-1}}\right)^3$; 27) $\frac{(a^2x^4)^4}{(ax)^{10}}$;

28) $\frac{(a^2)^3\cdot(b^2)^3}{(ab)^5}$; 29) $\frac{(a^2b^4)^3}{(a^2b^8)^8}$; 30) $\left(\frac{a^2}{x^3}\right)^n\cdot\left(\frac{c^2}{y^3}\right)^n\cdot\left(\frac{x^2y^3}{ac^2}\right)^n$.

67. Смешанные задачи (на раскрытие скобок и упрощение).

1) $(-a)^n\cdot(-a)^n$; 2) $(-a)^{n+x}\cdot(-a)^{n-x}$; 3) $(-a^{n-1})^2$;

4) $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}$; 5) $\left(x^3+\frac{1}{x^8}\right)^2$; 6) $\left(\frac{2}{a^5}+\frac{a^5}{4}\right)^2$;

7) $\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^4$; 8) $\left(\frac{a}{b}+2\frac{b}{a}\right)^4$; 9) $\frac{1-a}{a^n}+\frac{1}{a^{n-1}}$;

10) $\left(\frac{7ab^3}{5ax^3}\right)^4$; 11) $\left(\frac{3a^2b^2}{5x^2y^2}\right)^3\cdot\left(\frac{2ax^2}{5b^3y}\right)^3:\left(\frac{4a^4}{5b^8y^6}\right)^2$;

12) $\left(\frac{2a^3x}{3by^2}\right)^3\cdot\left(\frac{4b^3x^2}{3a^3y^3}\right)^4\cdot\left(\frac{9ay^0}{8b^8x^2}\right)^3$;

13) $(a^{2m}+2a^{m+n}+a^{2n}):(a^m+a^n)$;

14) $(a^{2x}-a^{x+1}+a^2)\cdot(a^{n+x}+a^{n+1})$;

15) $(a^{2x}-a^{2y}):(a^x+a^y)$; 16) $(a^{n+1}+a^{n-2}):(a+1)$.

68. На сколько единиц число x^n-1 больше или меньше x^{n-1}?

Произведение равных сомножителей называется *степенью.*

Число, которое возводится в степень, называется *основанием* степени.

Число, которое показывает, в какую степень возводится основание, называется *показателем степени.*

Выражение a^1 само по себе не имеет смысла, но принято под a^1 разуметь a, так как в этом случае

$$a^n\cdot a=a^{n+1}=a^n\cdot a^1.$$

При	$a>1$	$a^n>a$
	$a=1$	$a^n=a$
	$a<1$	$a^n<a.$

Если $a>1$, то при неограниченно возрастающем n a^n неограниченно возрастает, т.-е. всегда можно найти такое значение для n, чтобы $a^n>A$, где A произвольно заданное (большое) число.

Если $a<1$, то при неограниченно возрастающем n a^n неограниченно убывает, т.-е. всегда можно найти такое значение для n, чтобы $a^n<\alpha$, где α произвольно заданное (малое) число.

Действия над степенями.

1. Сумма $a^m \pm a^k$ не может быть заменена одночленом, содержащим степень того же основания, если $m \neq к$.

$a^m \pm a^k = a^k(a^{m-k} \pm 1)$ при $m > к$;

$a^m \pm a^k = a^m(1 \pm a^{k-m})$ при $m < к$.

2. $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$.

3. $a^m : a^k = a^{m-k}$ . . . . . . при $m > к$;

$a^m : a^k = 1$ . . . . » $m = к$;

$a^m : a^k = \frac{1}{a^{k-m}}$ . . . . . » $m < к$.

4. $(кa)^n = к^n a^n$.

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

6. $(a^m)^k = (a^k)^m = a^{mk}$.

7. $(a^m)^{pq} = (a^{mp})^q$.

§ 3. Степенная функция и ее графическое представление. Параболы.

69. Составить таблицу квадратов чисел 0,1; 0,2 и проч. до 2,0; пользуясь полученными значениями, построить на миллиметровой бумаге графику функции $y = x^2$ в пределах от $x = -2$ до $x = +2$, соединяя последовательные построенные точки а) ломаной линией, б) округляя на-глаз построенную ломаную линию; проследить изменение функции вне промежутка $x = -2$ до $x = +2$.

70. Построить графику функции $y = cx^2$; при 1) $c = 2$, 2) $c = 3$, 3) $c = \frac{1}{2}$, 4) $c = 0{,}1$.

71. Построить графику функции $y = -cx^2$; при 1) $c = 1$, 2) $c = 2$, 3) $c = 3$, 4) $c = \frac{1}{2}$, 5) $c = 0{,}1$.

72. Построить графику функции $y = x^3$.

73. Пользуясь графическим изображением функции $y = x^3$, построить графики следующих функций: 1) $y = \frac{x^3}{2}$, 2) $y = 2x^3$; 3) $y = 0{,}1x^3$; 4) $y = -x^3$; 5) $y = -\frac{x^3}{3}$; 6) $y = -0{,}01x^3$.

74. Построить графику функции $y = cx^4$, при 1) $c = 1$; 2) $c = -1$; 3) $c = 0{,}2$.

75. Построить графику функции $y = cx^5$, при 1) $c = 1$, 2) $c = -1$, 3) $c = 0{,}2$.

76. Как меняется графическое изображение функции $y = x^n$, если n принимает последовательно значения 1, 2, 3, 4, 5... 1) для значений $x > 1$, 2) для значений $1 > x > 0$, 3) для значений $x < 0$? (Сравн. задачи №№ 96 и 97.)

77. Какие точки являются общими: 1) всем параболам $y = x^n$; 2) всем параболам $y = x^n$ с четными показателями; 3) всем параболам $y = x^n$ с нечетными показателями (n есть натуральное число)?

78. При каких значениях n парабола $y = x^n$ имеет ось симметрии? Что является осью симметрии? Что происходит при такого рода симметрии с значением функции при замене x через $-x$?

79. Когда парабола $y = x^n$ имеет центр симметрии? Что является центром симметрии? Что происходит с значением функции при такого рода симметрии в случае замены x через $-x$?

80. Как меняет коэффициент пропорциональности c в $y = cx^n$ вид параболы $y = x^n$?

81. При свободном падении тела путь s и время t связаны следующей формулой $s = \frac{1}{2}gt^2$. Если s измерено в метрах, t — в секундах, то g равно приблизительно 10. 1) Представить графически путь, как функцию времени, в подходящем масштабе. 2) Какой путь будет пройден в 1,3 секунды? 3) в 3,5 секунды (определить по графике и путем вычисления)? 4) Во сколько секунд тело пройдет путь в 10 *м*? 5) в 50 *м* (определить по графике; построение сделать в подходящем масштабе)?

82. Представить площадь квадрата, как функцию стороны квадрата. Определить по кривой, при каком значении стороны квадрата площадь приблизительно равна 2.

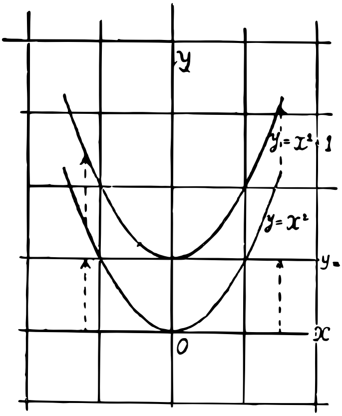
83. Представить графически объем куба, как функцию его ребра. Определить по кривой, при каком значении ребра объем куба приблизительно равен 2. (*Делийская задача.*)

84. Представить объем призмы с квадратным основанием и с высотой в 3 единицы, как функцию стороны основания. Какое значение должна иметь сторона основания, если объем должен быть равен 10?

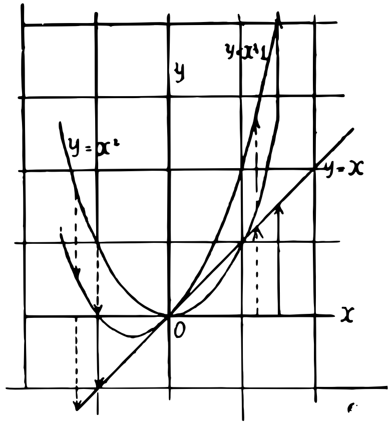
85. На фиг. 1 показано, как, складывая ординаты параболы $y = x^2$ и прямой $y = 1$, можно построить кривую $y = x^2 + 1$. Построить таким же приемом кривую:

1) $y = x^2 + 2$; 2) $y = x^2 - 2$; 3) $y = x^2 \pm 3$.

86. На фиг. 2 [1]) показано, как сложением ординат кривой $y=x^2$ и прямой $y=x$ строится кривая $y=x^2+x$. Построить таким же приемом кривую $y=x^2-x$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

87. Построить кривые:

1) $y=x^2+7$; 2) $y=2x^2+7$;
3) $y=-x^2+7$; 4) $y=-0{,}1x^2+7$;
5) $y=-x^2-7$; 6) $y=-0{,}1x^2-7$;
7) $y=x^2+\frac{1}{2}x$; 8) $y=x^2+x+1$;
9) $y=x^2-\frac{1}{2}x$; 10) $y=x^2-x-1$;
11) $y=x^2+5x$; 12) $y=x^2-5x$;
13) $y=x^2+5x+6$; 14) $y=x^2-5x-6$.

§ 4. Системы счисления.

88. Написать числа, которые получатся при подстановке $x=10$ в выражения функций:

1) $y=2x^2+x+1$; 2) $y=5x^2+7$;
3) $y=7x^3+7x^2+7x+7$; 4) $y=x^3+1$;
5) $y=ax^4+bx^2+c$; 6) $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

---

[1]) На фиг. 2 опечатка: напечатано $y=x^2+1$ вместо $y=x^2+x$.

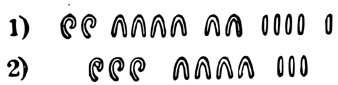
89. Записать в виде суммы степеней десяти следующие числа: 1) 375, 2) 1100, 3) 1003, 4) 1000010.

90. Составить общее выражение: 1) трехзначного числа по десятичной системе; 2) пятизначного числа.

91. Составить общее выражение любого числа по десятичной системе.

92. Иероглифические знаки первых четырех степеней десяти суть:

Прочесть следующие числа, записанные иероглифическим письмом:



93. Записать при помощи иероглифов: 1) 375, 2) 1218, 3) 755 (следует принять во внимание, что после каждых четырех цифр, означающих одно и то же число единиц, оставляется промежуток).

94. Римские цифры для первых степеней десяти имеют следующий вид:

$$\mathrm{I} = 1,\ \mathrm{X} = 10,\ \mathrm{C} = 10^2,\ \mathrm{M} = 10^3.$$

Для обозначения 5-ти единиц того или иного разряда употребляются особые цифры:

$$\mathrm{V} = 5,\ \mathrm{L} = 5 \cdot 10,\ \mathrm{D} = 5 \cdot 10^2.$$

Кроме того, следует иметь в виду, что меньшее число, записанное перед бо́льшим, вычитается из бо́льшего. Прочитать: XII, CXLIII, DCCCXCIX, MDCCCLXXVI, MDCCCLXXX, MDCCCXII, MCMXII.

95. Записать римскими цифрами: 38, 75, 44, 1817, 2900, 1990.

96. Вывести признаки делимости на 10, на 5 и на 2 на основании общего выражения десятичного числа.

97. На основании общего выражения десятичного числа вывести признаки делимости на: 1) 4, 2) 8, 3) 16, 4) 25, 5) 125.

98. Доказать теорему: Число делится без остатка на 8, если при четном числе сотен две последние цифры образуют число, делящееся на 8, а при нечетном числе сотен — две последние цифры образуют число, делящееся на 8 лишь при увеличении его на 4.

99. На основании общего выражения десятичного числа вывести признаки делимости на 1) 9 и 2) 3.

100. Доказать, что остаток при делении на 9 некоторой суммы равен сумме остатков при делении на 9 каждого слагаемого или отличается от него на число, кратное 9.

101. Доказать, что остаток при делении на 9 разности равен разности остатков при делении на 9 уменьшаемого и вычитаемого или разнится от него на число, кратное 9.

102. Доказать, что остаток при делении на 9 произведения равен произведению остатков при делении на 9 каждого из сомножителей или отличается от него на число, кратное 9.

103. Доказать, что при делении без остатка остаток от деления на 9 делимого равен произведению остатков от деления на 9 частного и делителя или отличается от него на число, кратное 9. Дать соответствующее правило для деления с остатком.

104. Доказать на основании разложения на множители $y + x^3 + 1$, что 1001 делится без остатка на 11.

105. Доказать разложением на множители выражения $y = x^3 + (x+1)(x-10) + 1$, что 1001 делится без остатка на 7, 11 и 13.

106. Если к трехзначному числу приписать его цифры в том же порядке, то полученное шестизначное число делится на 1) 7, 2) 11, 3) 13. Доказать это.

Системы счисления с основанием, отличным от 10.

107. Вычислить значение функции $y = x^4 + x^3 + x + 1$

при 1) $x = 1$, 2) $x = 2$, 3) $x = 3$, 4) $x = 9$, 5) $x = 10$.

Записать выражение данной функции, пропуская букву x и взамен этого пользуясь принципом положения.

108. Составить общее выражение дву-, трех-, четырех- и пятизначного числа при основании:

1) 2, 2) 5, 3) 7, 4) 9, 5) 11, 6) 12, 7) 60, 8) a.

Сколько значений и какие могут иметь коэффициенты в написанном общем выражении многозначного числа в каждом из указанных случаев?

109. Составить общее выражение чисел, записанных по системе с основанием:

1) 2, 2) 5, 3) 11, 4) 12, 5) 60, 6) n?

110. Сколько цифр необходимо для системы, построенной по образцу арабской, с основанием:

1) 2; 2) 5; 3) 11; 4) 12; 5) 60; 6) n?

111. Какое число среди двузначных чисел, написанных по системам, указанным в предыдущей задаче, является в каждой из этих систем наименьшим? наибольшим?

112. Как записать следующие десятичные числа по системе с основанием 7:

1) 12; 2) 21; 3) 37; 4) 49; 5) 87; 6) 100; 7) 700; 8) 8941?

113. Как записать следующие десятичные числа по системе с основанием 5:

1) 17; 2) 25; 3) 50; 4) 111; 5) 333; 6) 527?

114. Записать десятичные числа: 1) 7; 2) 9; 3) 27; 4) 40; 5) 100, по системе с основанием 3.

115. Числа: 1) $(13)_4$; 2) $(123)_4$; 3) $(300)_4$; 4) $(333)_4$; 5) $(1023)_4$, написанные по системе с основанием 4, записать по десятичной системе.

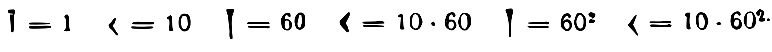
116. Числа: 1) $(11)_2$; 2) $(10)_2$; 3) $(111)_2$; 4) $(1001001)_2$; 5) $(1011101)_2$, написанные по системе с основанием 2, записать по десятичной системе.

117. Числа, написанные по системе с основанием 12, 1) $(317)_{12}$; 2) $(8e0)_{12}$; 3) $(700z)_{12}$; 4) $(zz)_{12}$; 5) $(ee)_{12}$, где z есть цифра десяти, e цифра одиннадцати, написать по десятичной системе.

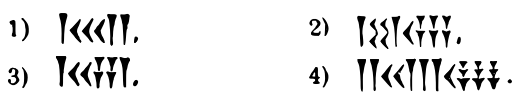
118. Произвести действия, указанные в следующих примерах, не переходя к десятичной системе:

1) $(317)_{12}+(8e0)_{12}+(700z)_{12}$;
2) $(8243)_{12}+(90e)_{12}+(7430)_{12}+(1581z)_{12}$; 3) $(783)_{12}-(415)_{12}$;
4) $(845)_{12}-(97)_{12}$; 5) $(647z)_{12}-(ze7)_{12}$; 6) $(8)_{12}\cdot(7)_{12}$;
7) $(9)_{12}\cdot(17)_{12}$; 8) $(25)_{12}\cdot(7e)_{12}$; 9) $(81)_{12}\cdot(z3)_{12}\cdot(200)_{12}$.

119. Вавилонские цифры для обозначения первых степеней числа 60 и их десятикратных были следующие:



Числа писали, пользуясь поместным значением цифр. Кратные единицы писали, повторяя одну и ту же цифру; в одну строку писали не более 3 цифр, при большем числе знаков последние записывались одни над другими. Записать следующие числа по десятичной системе:



120. Записать следующие числа по вавилонской шестидесятичной системе: 1) 90; 2) 115; 3) 700; 4) 1010; 5) 80000.

§ 5. Решение уравнений.

121. Построить параболу $y = x^2$ и прямую $y = 5x - 6$. Что представляют значения абсцисс точек пересечения построенных линий для уравнения $x^2 = 5x - 6$?

122. Составить уравнения, решения которых даны на приложенных чертежах (фиг. 3 и 4), и проверить решения, подставляя в уравнения значения корней (обратить внимание на различие масштабов: горизонтального — по оси X и вертикального — по оси Y).

123. Пользуясь графикой параболы $y = x^2$, определить по чертежу корни следующих уравнений, пересекая эту параболу прямой. Проверить подстановкой правильность полученных решений:

1) $x^2 = 4$; 2) $x^2 = 9$; 3) $x^2 = 2$;
4) $x^2 = 8$; 5) $x^2 - 2x = 0$; 6) $x^2 = x + 2$;
7) $x^2 = 2{,}25$; 8) $x^2 = 5x - 4$; 9) $x^2 + 2 = 3x$;
10) $x^2 = x + 12$; 11) $x^2 = 4x - 3$; 12) $x^2 + 2x = 1$.

124. Найти на графике корни следующих уравнений, пересекая кубическую параболу $y = x^3$ прямой линией:

1) $x^3 + x = 2$; 2) $x^3 - 8 = 0$;
3) $x^3 - 4x = 0$; 4) $x^3 - 3x + 2 = 0$;
5) $x^3 + x + 2 = 0$; 6) $x^3 - 7x + 6 = 0$.

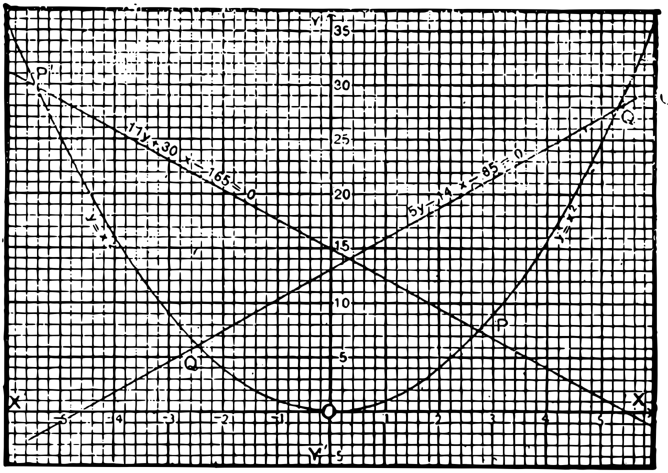
125. Показать, пользуясь графикой параболы, какие из следующих уравнений имеют два корня, один корень или совсем не имеют корней:

1) $x^2 + 2x + 1 = 0$; 2) $x^2 - 9 = 0$;
3) $x^2 + x + 1 = 0$; 4) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
5) $x^2 = 0$; 6) $x^2 + 4 = 0$.

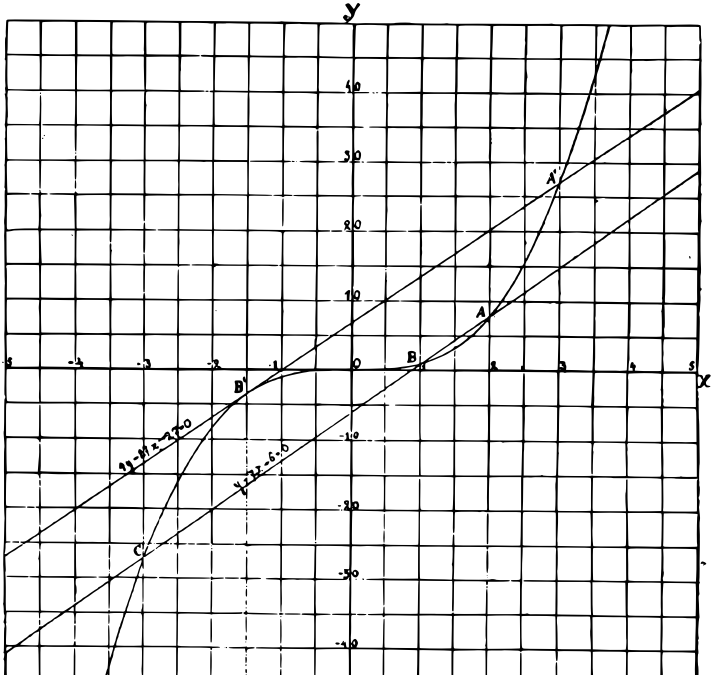
126. Решить следующие уравнения при помощи параболы $y = ax^2$ или при помощи параболы $y = x^2$:

1) $4x^2 = 1$; 2) $6x^2 - x = 2$;
3) $3x^2 - x - 4 = 0$; 4) $2x^2 + 3x = 2$.

127. Показать, как располагается прямая $y = ax + b$ относительно параболы третьего порядка $y = x^3$, если уравнение $x^3 = ax + b$ имеет один, два или три корня. Возможен ли такой случай, чтобы это уравнение не имело корней?



Фиг. 3.



Фиг. 4

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Радикалы и действия над ними. Иррациональное число.

§ 1. Понятие корня.

128. Определить сторону квадрата, равновеликого прямоугольнику, со сторонами *a см* и *b см* при

	1	2	3	4	5	6
a	8	5	10	0,1	2	$\frac{m}{p}$
b	18	125	1000	1,6	1	mp

129. Определить ребро куба, равновеликого данному прямоугольному брусу (параллелепипеду) с ребрами *a см*, *b см*, *c см*, если

	1	2	3	4	5
a	2	1	10	1	ab
b	4	3	100	1	bc
c	8	9	1000	2	$\frac{b}{ac}$

130. Что значит извлечь квадратный (второй) корень из числа? кубичный (третий) корень? n-й корень?

131. Какое действие определяют следующие уравнения:

$$1)\ x^2 = a,\quad 2)\ x^3 = a,\quad 3)\ x^n = a?$$

Как называется x в этом случае? Как обозначается квадратный корень из числа a? n-й корень из числа a?

132. Определить значения следующих корней:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{16}$; 3) $\sqrt{36}$; 4) $\sqrt{20}$; 5) $\sqrt{100}$; 6) $\sqrt{144}$; 7) $\sqrt{10000}$; 8) $\sqrt{8}$; 9) $\sqrt{45}$; 10) $\sqrt[3]{8}$; 11) $\sqrt[3]{27}$; 12) $\sqrt[3]{64}$; 13) $\sqrt[3]{125}$; 14) $\sqrt[3]{1000}$; 15) $\sqrt[3]{512}$; 16) $\sqrt[3]{8000}$; 17) $\sqrt[3]{75}$; 18) $\sqrt[3]{60}$; 19) $\sqrt[5]{32}$; 20) $\sqrt[7]{10000000}$; 21) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; 22) $\sqrt{\frac{25}{36}}$; 23) $\sqrt{0,25}$; 24) $\sqrt{0,0025}$; 25) $\sqrt{1,44}$; 26) $\sqrt{2,25}$.

133. Всегда ли выполнимо извлечение корня? Указать, какие из следующих выражений имеют смысл (и какой) и какие смысла не имеют:

1) $\sqrt{1}$; 2) $\sqrt[3]{1}$; 3) $\sqrt[3]{-1}$; 4) $\sqrt[3]{-1}$; 5) $\sqrt{4}$; 6) $\sqrt{5}$; 7) $\sqrt{-4}$; 8) $\sqrt[3]{27}$; 9) $\sqrt[3]{8}$; 10) $\sqrt{8}$; 11) $\sqrt{9}$; 12) $\sqrt[3]{9}$; 13) $\sqrt[3]{-27}$; 14) $\sqrt[4]{16}$; 15) $\sqrt[4]{-16}$.

134. При выполнении каких условий имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{a}$, 2) $\sqrt{-b}$?

3) $\sqrt[n]{a}$, 4) $\sqrt[n]{-b}$?

$\left.\right\}$ при n четном? при n нечетном?

135. Вычислить

1) а) $\sqrt{100}$; б) $\sqrt[6]{1000000000000}$, в) $\sqrt[4]{81}$, г) $\sqrt{6{,}25}$,

д) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$, е) $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$.

2) а) $\sqrt{0{,}01}$, б) $\sqrt[3]{0{,}000001}$, в) $\sqrt{\frac{1}{27}}$, г) $\sqrt{0{,}16}$ д) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$,

е) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$.

Какому условию должно удовлетворять a, чтобы $\sqrt[n]{a}$ (если он существует) удовлетворял неравенству:

1) $\sqrt[n]{a} < a$; $\sqrt[n]{a} = a$; $\sqrt[n]{a} > a$?

Проверить справедливость данного ответа возведением в n-ю степень.

§ 2. Квадратный корень. Извлечение квадратного корня.

136. Чему равен квадрат числа 2? числа — 2? числа a? числа — a? Сколько существует чисел, квадрат которых равен 4? равен a^2?

137. Какое из значений квадратного корня из числа A (если этот корень имеет смысл) разумеют под знаком $\sqrt{A}$? Как обозначить второе значение квадратного корня из A?

138. Чему равен $\sqrt{a^2}$, 1) если a имеет положительное значение? 2) если a имеет отрицательное значение?

139. При выполнении какого условия справедливо равенство:

$$\sqrt{a^2} = a?$$

140. Чему $= \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$ 1) при $a > b$?
2) при $a < b$?
3) при $a = b$?

141. Проверить на числовых подстановках и возведением в квадрат обеих их частей следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \\ &\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{aligned}\right\} \text{Распределительный закон.}$$

$$\sqrt{a^m} = a^{m:2} \ (a > 0)$$

$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$$

(если $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ имеют смысл и если m есть четное число).

Извлечь n-й корень из числа a значит найти число, n-я степень которого равна a.

Число, n-я степень которого равна данному числу a, называется n-м корнем из a и обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Число n, указывающее, какой корень извлекается из данного числа a, называется показателем корня.

Число, из которого извлекают корень, называется подкоренным числом.

$\sqrt{\ }$ называется знаком корня.

Извлечение корня есть обратное действие т р е т ь е й ступени.

Вместо $\sqrt[2]{a}$ обычно пишут $\sqrt{a}$.

Под $\sqrt{a}$ (если это выражение имеет смысл) разумеют п о л о ж и т е л ь н о е число, квадрат которого равен a.

Второе (отрицательное) значение квадратного корня из a обозначается посредством $-\sqrt{a}$.

Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то при $a > 1$ $\sqrt[n]{a} < a$;

$a = 1$ $\sqrt[n]{a} = a$;

$a < 1$ $\sqrt[n]{a} > a$.

Извлечение квадратного корня из чисел.

142. Составить таблицу квадратов чисел:

1) 1, 2, 3.... 9;
2) 1, 10, 100, 1000... , 10^k.

Сколько цифр имеет квадрат однозначного, двузначного..., k-значного числа?

143. Извлечь квадратные корни:

1) $\sqrt{64}$; 2) $\sqrt{81}$; 3) $\sqrt{100}$; 4) $\sqrt{900}$; 5) $\sqrt{6400}$; 6) $\sqrt{810000}$; 7) $\sqrt{250000}$; 8) $\sqrt{16000000}$; 9) $\sqrt{\frac{9}{16}}$, 10) $\sqrt{\frac{40}{81}}$, 11) $\sqrt{\frac{4}{25}}$, 12) $\sqrt{0{,}64}$; 13) $\sqrt{0{,}0064}$; 14) $\sqrt{0{,}09}$; 15) $\sqrt{0{,}0009}$; 16) $\sqrt{0{,}81}$; 17) $\sqrt{0{,}01}$; 18) $\sqrt{0{,}0004}$; 19) $\sqrt{0{,}000004}$; 20) $\sqrt{0{,}000025}$.

144. Представляя произведения и квадраты чисел в виде прямоугольников и квадратов, дать геометрическое истолкование формуле

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=x^2+y(2x+y).$$

Площадью какой фигуры изображается выражение $y(2x+y)$ [1]?

145. На основании рассмотрения чертежа предыдущей задачи определить значение y, если

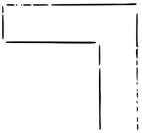
1) $(x+y)^2= 144$ и $x=10$;
2) $(x+y)^2= 256$ $x=10$;
3) $(x+y)^2= 729$ $x=20$;
4) $(x+y)^2=2401$ $x=40$.

146. Какими разрядными единицами выражается квадрат десятков? удвоенное произведение десятков на единицы? квадрат единиц? Почему для приблизительного определения числа единиц корня достаточно разделить на удвоенное число десятков остаток, полученный после вычитания квадрата десятков?

147. Извлечь квадратные корни:

1) $\sqrt{144}$; 2) $\sqrt{256}$; 3) $\sqrt{729}$; 4) $\sqrt{196}$; 5) $\sqrt{225}$; 6) $\sqrt{289}$; 7) $\sqrt{361}$; 8) $\sqrt{32400}$; 9) $\sqrt{84100}$; 10) $\sqrt{7840000}$; 11) $\sqrt{4410000}$;

---

[1] Фигуру вида  греческие геометры называли **гномоном**.

12) $\sqrt{4356}$; 13) $\sqrt{1225}$; 14) $\sqrt{5329}$; 15) $\sqrt{1849}$; 16) $\sqrt{7921}$; 17) $\sqrt{2209}$; 18) $\sqrt{9409}$; 19) $\sqrt{8464}$; 20) $\sqrt{7225}$; 21) $\sqrt{193600}$; 22) $\sqrt{67240000}$; 23) $\sqrt{2401}$; 24) $\sqrt{1681000000}$; 25) $\sqrt{54756}$; 26) $\sqrt{18225}$; 27) $\sqrt{64009}$; 28) $\sqrt{42849}$; 29) $\sqrt{94864}$; 30) $\sqrt{687241}$; 31) $\sqrt{499849}$; 32) $\sqrt{879844}$; 33) $\sqrt{826281}$; 34) $\sqrt{15129}$; 35) $\sqrt{49284}$; 36) $\sqrt{11881}$; 37) $\sqrt{138384}$; 38) $\sqrt{241081}$; 39) $\sqrt{256036}$; 40) $\sqrt{257049}$; 41) $\sqrt{497025}$; 42) $\sqrt{1522756}$; 43) $\sqrt{5527201}$; 44) $\sqrt{18215824}$; 45) $\sqrt{57108249}$; 46) $\sqrt{4149369}$; 47) $\sqrt{13749264}$; 48) $\sqrt{49098049}$; 49) $\sqrt{12278016}$; 50) $\sqrt{16467364}$; 51) $\sqrt{32524209}$; 52) $\sqrt{49434961}$; 53) $\sqrt{1703025}$; 54) $\sqrt{896809}$; 55) $\sqrt{0,0484}$; 56) $\sqrt{0,0625}$; 57) $\sqrt{0,8649}$; 58) $\sqrt{0,9801}$; 59) $\sqrt{0,015129}$; 60) $\sqrt{2,7889}$; 61) $\sqrt{3906,25}$; 62) $\sqrt{48,8601}$; 63) $\sqrt{0,000576}$; 64) $\sqrt{0,000169}$; 65) $\sqrt{19,0969}$; 66) $\sqrt{25,8064}$; 67) $\sqrt{0,450241}$; 68) $\sqrt{0,054756}$; 69) $\sqrt{\frac{1444}{6241}}$; 70) $\sqrt{\frac{7056}{18225}}$; 71) $\sqrt{\frac{121}{12321}}$; 72) $\sqrt{\frac{576}{6561}}$; 73) $\sqrt{25\frac{161}{256}}$; 74) $\sqrt{1\frac{143}{5041}}$.

148. Найти, пользуясь приемом извлечения квадратного корня, наибольшее число, квадрат которого меньше числа (или ему равен):

1) 6000; 2) 100000; 3) 1000000; 4) 57897;
5) 99999; 6) 888888; 7) 169296; 8) 1111111.

149. 1) Вычислить гипотенузу прямоугольного треугольника, если катеты равны: 1) 21 *дм* и 28 *дм*; 2) 36 *см* и 48 *см*.

2) Вычислить один из катетов, если другой катет равен 27 *см*, а гипотенуза равна 45 *см*.

150. Определить расстояние начала координат до следующих точек:

1) (9,12), 2) (15,20), 3) (63,84).

151. Составить формулу, выражающую расстояние d от начала координат точки (x, y). Где располагаются все точки, расстояние которых от начала имеет постоянное значение d?

152. Вычислить расстояние между следующими точками:

1) (76,20) и (100,38), 2) (1,5) и (34,49), 3) (0,46) и (42,102), 4) (0,0) и (303, 404).

153. Составить формулу, выражающую расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

154. На-днях один студент на вопрос, сколько ему лет, дал такой ответ: «Мне исполнится n лет в году, номер которого есть n^2». В котором году родился студент?

§ 3. Иррациональное число.

155. Приняв за единицу масштаба 10 *см*, представить на оси числа: 0, 1, 2. На отрезке 0,1, как на стороне, построить квадрат и отложить на оси от точки 0 его диагональ (конец отложенной диагонали обозначить буквой M). Составить уравнение, из которого определяется значение абсциссы x точки M. Может ли x быть целым числом? Может ли x быть дробью? Существует ли рациональное число, которое могло бы оказаться значением x абсциссы точки M?

156. Найти наибольшее десятичное число с знаменателем 10, 100, 1000..., квадрат которого меньше 2 (первая группа); найти наименьшее десятичное число с каждым из указанных выше знаменателей, квадрат которого больше 2 (вторая группа). Построить точки, абсциссы которых равны этим числам. Что происходит при увеличении числа десятичных знаков с точками первой группы? Что происходит с точками второй группы? Каким способом удобнее всего находить числа, входящие в первую группу? Может ли когда-либо закончиться определение десятичных чисел (с любым десятичным знаменателем), квадраты которых приближаются к 2 с той и другой стороны? Существует ли в первой группе последнее число? во второй группе первое число (если эти числа располагать в порядке по величине)? Может ли бесконечная десятичная дробь, приближенными значениями которой являются найденные десятичные числа, быть периодической или нет? Почему?

157. Указать, какие из следующих бесконечных дробей **определяют** иррациональные числа (если предполагать, что закон, по которому пишутся дальнейшие десятичные знаки, ясен по напечатанной части этих дробей):

1) 0,727272....; 2) 0,727727772....; 3) 1,414141....;
4) 1,4142....; 5) 2,718 2818 2818 2818 28....; 6) 2,7182818284.....

158. Показать, что 1) $1{,}7 < \sqrt{3}$; 2) $1{,}8 > \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{7} < \frac{238}{8}$.

159. Вычислить с точностью а) до 1, б) до 0,1, в) до 0,01, г) до 0,001:

1) $\sqrt{235}$; 2) $\sqrt{578}$; 3) $\sqrt{240}$; 4) $\sqrt{148,93}$;
5) $\sqrt{72,5}$; 6) $\sqrt{8,8888\ldots}$ 7) $\sqrt{52,5}$; 8) $\sqrt{10}$;
9) $\sqrt{1000}$; 10) $\sqrt{0,1}$; 11) $\sqrt{0,001}$; 12) $\sqrt{\frac{5}{8}}$;
13) $\sqrt{62,5}$; 14) $\sqrt{\frac{1}{21}}$; 15) $\sqrt{33,333\ldots}$; 16) $\sqrt{18\frac{3}{8}}$;
17) $\sqrt{150\frac{7}{8}}$; 18) $\sqrt{44,1777\ldots}$; 19) $\sqrt{248\frac{1}{3}}$; 20) $\sqrt{2400\frac{5}{9}}$.

160. Вычислить

1) $\sqrt{10}$ с точностью до $\frac{1}{6}$, до $\frac{1}{37}$;
2) $\sqrt{5}$ » » » $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$;
3) $\sqrt{17}$ » » » $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{65}$;
4) $\sqrt{11}$ » » » $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{19}$.

161. Составить таблицу сумм приближенных значений $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$, вычисленных 1) по недостатку, 2) по избытку, с точностью до 0,1, до 0,01, до 0,001 и т. д. Определяют ли получаемые при этом суммы какую-либо бесконечную дробь? Почему? Что называется **суммой** двух иррациональных чисел?

2) Составить таблицу произведений приближенных значений $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$, вычисленных 1) по недостатку, 2) по избытку, с точностью до 0,1, до 0,01, до 0,001 и т. д. Сравнить полученные произведения с приближенными значениями $\sqrt{6}$. Определяют ли произведения полученных приближенных значений какую-либо бесконечную дробь? Что называется **произведением** двух иррациональных чисел? Чему = произведение $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$?

162. Показать, вычисляя приближенные значения корней и перемножая их, что

1) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{1,5}=3$; 2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=9$; 3) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$;
4) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$; 5) $(\sqrt{2})^2=2$; 6) $(\sqrt{3})^2=3$;
7) $(\sqrt{10})^2=10$; 8) $(\sqrt{0,6})^2=0,6$; 9) $(\sqrt{1000})^2=1000$.

163. Что называется общей мерой двух отрезков? Чему равна общая мера двух отрезков, если отношение большего из них к меньшему равно целому числу m? Какую часть каждого из данных отрезков составляет их общая мера, если их отношение равно дроби $\frac{m}{k}$? Какие отрезки называются несоизмеримыми? Может ли отношение несоизмеримых отрезков выражаться рациональным числом? Каким числом выражается отношение двух несоизмеримых отрезков?

Система чисел, в которую входят числа целые и дробные, положительные и отрицательные, называется системой рациональных чисел.

Обратное действие третьей ступени — извлечение корня из рационального числа—не всегда выполнимо в рациональных числах. Чтобы извлечение корня из положительного числа оказывалось всегда выполнимым, введены иррациональные числа. Они определяются бесконечными непериодическими десятичными дробями. Благодаря введению иррациональных чисел, оказывается возможным обозначить числами не только точки, расстояния которых от начала соизмеримы с единицей длины, но и такие, расстояние которых от начала несоизмеримы с единицей длины.

Каждое иррациональное число можно сравнить с любым рациональным числом, т.-е. узнать, будет ли выбранное рациональное число больше или меньше данного иррационального числа. Поэтому каждое иррациональное число занимает вполне определенное место в числовом ряду.

Числовой ряд, содержащий рациональные и иррациональные числа, распространяется и на отрицательные числа, при чем отрицательным иррациональным числом называется число, определяемое числами, противоположными приближенным значениям некоторой непериодической бесконечной дроби. Система чисел, в которую входят рациональные и иррациональные числа, называется системой действительных или вещественных чисел.

Благодаря введению иррациональных чисел, каждой точке на оси соответствует число рациональное или иррациональное — ее абсцисса, и для каждого произвольно заданного числа на оси имеется точка, имеющая это число своей абсциссой (аксиома Кантора-Дедекинда).

Ряд, образованный рациональными и иррациональными числами, называется непрерывным числовым рядом.

Числа в непрерывном числовом ряду располагаются в том же порядке, как и соответствующие им точки на оси.

Суммой двух иррациональных чисел называется число, определяемое суммами приближенных значений данных чисел.

Произведением двух иррациональных чисел называется число, определяемое произведениями приближенных значений этих чисел.

§ 4. Действия над квадратными корнями. Преобразование радикалов.

Вывод рационального множителя из-под знака корня:

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}.$$

164. 1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{12}$; 3) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{28}$;
5) $\sqrt{320}$; 6) $\sqrt{45}$; 7) $\sqrt{18}$; 8) $\sqrt{24}$;
9) $\sqrt{32}$; 10) $\sqrt{96}$; 11) $\sqrt{243}$; 12) $\sqrt{175}$;
13) $\sqrt{405}$; 14) $\sqrt{363}$; 15) $\sqrt{432}$; 16) $\sqrt{1053}$;
17) $\sqrt{x^3}$; 18) $\sqrt{x^7}$; 19) $\sqrt{x^{2n+1}}$; 20) $\sqrt{x^{2n+3}}$;
21) $\sqrt{4ab^2}$; 22) $\sqrt{9a^2x}$; 23) $\sqrt{7x^2y^2}$; 24) $\sqrt{ax^4y^2}$;
25) $\sqrt{5abc^2}$; 26) $\sqrt{9a^4b^2c}$; 27) $\sqrt{16a^2bc^4}$; 28) $\sqrt{7a^2b^4x^2}$;
29) $\sqrt{a^2b^2}$; 30) $\sqrt{x(1+x)^2}$; 31) $\sqrt{x^3(1-x)^2}$; 32) $\sqrt{a^5(a+b)^2}$;
33) $\sqrt{80a^3b}$; 34) $\sqrt{3{,}43ab^7c^8}$;
35) $\sqrt{0{,}384x^2y^{3n+1}}$; 36) $\sqrt{1{,}25a^5b^8}$.
37) $\sqrt{\frac{4}{9}a^{4n}b^{4n+1}}$; 38) $\sqrt{0{,}32x^{2n+3}y^{4n-1}}$; 39) $\sqrt{1\frac{9}{16}a^{3n}b^3}$;
40) $\sqrt{2\frac{1}{4}a^{6n}b^{6n+1}}$; 41) $\sqrt{ab^3c^4}$; 42) $\sqrt{4a^2b^2c^3}$; 43) $\sqrt{7x^4y^9z^{11}}$;
44) $\sqrt{9x^3y^8z^{10}}$; 45) $3\sqrt{8}$; 46) $5\sqrt{80}$; 47) $8\sqrt{75}$; 48) $6\sqrt{150}$;
49) $3\sqrt{12a^2}$; 50) $4\sqrt{20b^2}$; 51) $5\sqrt{40c}$; 52) $7\sqrt{48ax^2}$;
53) $\frac{5}{2}\sqrt{24a^3}$; 54) $\frac{4}{3}\sqrt{27b^5}$; 55) $\frac{5}{6}\sqrt{45c^6}$; 56) $\frac{5}{8}\sqrt{80x^3y^4}$;
57) $1\frac{1}{4}\sqrt{72a^2}$; 58) $7\frac{1}{2}\sqrt{96b^7}$; 59) $3\frac{1}{3}\sqrt{54c^9}$; 60) $2\frac{1}{5}\sqrt{125x^2y^3}$;
61) $a\sqrt{a^2b}$; 62) $a\sqrt{4a^3b^2}$; 63) $\frac{a}{b}\sqrt{192ab^2c^3}$;
64) $\frac{a^2}{b^2}\sqrt{0{,}75b^5c^{2n+1}}$; 65) $\sqrt{a^2x-a^2}$; 66) $\sqrt{a^3+a^2x}$.

165. 1) $\sqrt{2}$, вычисленный с точностью до 0,001, равен 1,414. Вычислить значения: а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{32}$; г) $\sqrt{50}$.
2) $\sqrt{6}$ равен 2,449. Вычислить: а) $\sqrt{24}$; б) $\sqrt{54}$; в) $\sqrt{96}$.

Подведение множителей под знак корня.

166. 1) $5\sqrt{\frac{1}{5}}$; 2) $5\sqrt{0{,}6}$; 3) $11\sqrt{\frac{2}{11}}$; 4) $2\sqrt{0{,}5}$;
5) $a\sqrt{\frac{x}{a}}$; 6) $x\sqrt{\frac{ab}{x}}$; 7) $2a\sqrt{\frac{7x}{2a}}$; 8) $3b\sqrt{\frac{a}{3b}}$;

9) $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a+b}}$; 10) $(x-y)\sqrt{\frac{2}{x-y}}$; 11) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^3}{a}}$;
12) $\frac{a^3}{b^3}\sqrt{\frac{b^6c}{a^5}}$; 13) $ab\sqrt{\frac{c}{ab}}$ 14) $ab^2\sqrt{\frac{3c}{b^3}}$; 15) $\frac{ab^2}{xy^2}\sqrt{\frac{x^3y^5}{ab^3}}$;
16) $\frac{ab^2}{xy^n}\sqrt{\frac{y^{3n}x^3}{ab^8}}$; 17) $(a+x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$; 18) $\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{(a-1)^8}{a+1}}$;
19) $\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^4-2a^3+a^2}{x^4+2x^3+x^2}}$; 20) $(a-x)\sqrt{\frac{3a+3b}{2a^2-4ax+2x^2}}$;
21) $(a+b)\sqrt{\frac{ax^2-bx}{9a^2+18ab+9b^2}}$.

Приведение корней к нормальному виду.

167. 1) $\sqrt{\frac{2}{9}}$; 2) $\sqrt{\frac{3}{16}}$; 3) $\sqrt{\frac{40}{81}}$; 4) $\sqrt{\frac{72}{25}}$;
5) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; 7) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; 8) $\sqrt{\frac{1}{a}}$; 9) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$;
10) $\sqrt{12\frac{1}{2}}$; 11) $\sqrt{1\frac{1}{4}a}$; 12) $\sqrt{3\frac{1}{5}a^3b}$; 13) $\sqrt{\frac{3}{4}}$;
14) $\sqrt{\frac{5x}{9}}$; 15) $8\sqrt{\frac{7a}{16x^2}}$; 16) $15\sqrt{\frac{11b}{25y^2}}$; 17) $\sqrt{\frac{1}{2}}$;
18) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; 19) $\sqrt{\frac{3}{5}}$; 20) $\sqrt{\frac{7}{8}}$; 21) $\sqrt{\frac{5}{7}}$; 22) $\sqrt{\frac{9}{8}}$;
23) $\sqrt{\frac{5}{14}}$; 24) $\sqrt{\frac{10}{27}}$; 25) $\sqrt{\frac{1}{2,8}}$; 26) $\sqrt{\frac{1}{0,75}}$;
27) $\sqrt{\frac{3}{0,5}}$; 28) $\sqrt{\frac{4}{0,7}}$; 29) $\sqrt{\frac{5,4}{2,4}}$; 30) $\sqrt{\frac{0,8}{3,6}}$;
31) $\sqrt{\frac{4,4}{0,96}}$; 32) $\sqrt{\frac{0,15}{5,4}}$; 33) $a\sqrt{\frac{x}{a}}$; 34) $b\sqrt{\frac{x^2}{b}}$;
35) $c\sqrt{\frac{x^8}{c}}$; 36) $\sqrt{\frac{1}{6a}}$; 37) $\sqrt{\frac{2a^3}{3b^2}}$; 38) $\sqrt{\frac{3a^2}{5x^8}}$;
39) $\sqrt{\frac{5a^3}{6x^5}}$; 40) $\sqrt{\frac{7a^5}{10b}}$; 41) $ab\sqrt{\frac{5}{8a^2}}$; 42) $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{11}{12}a^3}$;
43) $2ax\sqrt{\frac{17x^8}{24a}}$; 44) $\frac{3}{a^2}\sqrt{\frac{13a^7}{18x}}$; 45) $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2-a^2x}{1+x}}$;
46) $\sqrt{\frac{4(a+b)}{(a-b)^8}}$; 47) $\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$; 48) $\sqrt{a+\frac{b^2}{a}}$;
49) $\sqrt{2x^2-4x+2}$; 50) $\sqrt{a^2x^3-6a^2x^2+12a^2x-8a^2}$.

168. Пользуясь приближенным значением: 1) $\sqrt{2}=1{,}414$, вычислить: 1) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{8}}$; 3) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$.

2) $\sqrt{6}=2{,}449$; вычислить: 1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{3}{8}}$;
4) $\sqrt{2\frac{2}{3}}$; 5) $\sqrt{4\frac{1}{6}}$; 6) $\sqrt{8\frac{1}{6}}$.

169. Доказать, что $\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$. По этой формуле преобразовать следующие корни: $\sqrt{5\frac{5}{24}}$; $\sqrt{12\frac{12}{143}}$; $\sqrt{20\frac{20}{399}}$.

Сложение и вычитание (приведение) корней:

$$m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}.$$

170. Упростить следующие выражения:

1) $\sqrt{3}+2\sqrt{3}$; 2) $8\sqrt{7}-3\sqrt{7}$; 3) $9\sqrt{5}-\sqrt{5}$;
4) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; 6) $\sqrt{a}+3\sqrt{a}$;
7) $a\sqrt{x}-\sqrt{x}$; 8) $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}$;
9) $a\sqrt{x}+b\sqrt{x}-m\sqrt{x}-9\sqrt{x}$;
10) $8\sqrt{a}+5\sqrt{x}-7\sqrt{a}+4\sqrt{a}-6\sqrt{x}-3\sqrt{a}$;
11) $\sqrt{a}+2\sqrt{b}-3\sqrt{a}+5\sqrt{b}+2\sqrt{a^2}-6\sqrt{b}$;
12) $\sqrt{x}+5\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}+\sqrt{4x}-\sqrt{8x}+\sqrt{12x}$;
13) $2\sqrt{a}+5\sqrt{b}-x\sqrt{a}-c\sqrt{b}+\sqrt{(x-1)^2a}+\sqrt{bc^2}$;
14) $3\sqrt{a}+2\sqrt{b}-4\sqrt{a}-5\sqrt{b}+\sqrt{4a}+\sqrt{9b}$;
15) $5\sqrt{x}-7\sqrt{y}+2\sqrt{2x}+8\sqrt{y}-\sqrt{4y}-\sqrt{8x}$;
16) $6\sqrt{x}+3\sqrt{2x}-5\sqrt{3x}-2\sqrt{4x}+\sqrt{12x}-\sqrt{18x}$;
17) $4\sqrt{a^2x}+3\sqrt{b^2x}+2\sqrt{c^2x}+\sqrt{d^2x}-2\sqrt{(b+d)^2x}$;
18) $7\sqrt{4x}+4\sqrt{9x}+3\sqrt{45x}-5\sqrt{36x}-2\sqrt{80x}$;
19) $2\sqrt{81a}-3\sqrt{24a}+5\sqrt{36a}+2\sqrt{54a}-4\sqrt{100a}$;
20) $4\sqrt{3a}-7\sqrt{12a^2}+5\sqrt{48a}+6\sqrt{27a^2}-5\sqrt{75a}$;
21) $3\sqrt{8}+4\sqrt{32}-5\sqrt{50}-7\sqrt{72}+6\sqrt{98}$;
22) $7\sqrt{12}-5\sqrt{27}+8\sqrt{48}-6\sqrt{75}+2\sqrt{108}$;
23) $\frac{1}{2}\sqrt{20}+\frac{2}{3}\sqrt{45}-\sqrt{25}+\frac{1}{4}\sqrt{80}+\sqrt{5}$;
24) $\frac{1}{5}\sqrt{18}+\frac{2}{25}\sqrt{50}-3\sqrt{2}+\sqrt{200}$;
25) $\sqrt{\frac{28}{9}}-\sqrt{35}-7\sqrt{\frac{1}{7}}+\frac{1}{4}\sqrt{112}-1\frac{4}{21}\sqrt{\frac{1}{63}}$;

26) $\sqrt{10\frac{1}{12}ab^3} - \frac{a}{6}\sqrt{3a^3b} + 1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{27}ab}$;

27) $\sqrt{(a+b)^2x} + \sqrt{(a-b)^2x} - \sqrt{a^2x} + \sqrt{(1-a)^2x} - \sqrt{x}$;

28) $\sqrt{4+4x^2} + \sqrt{9+9x^2} + \sqrt{a^2+a^2x^2} - 5\sqrt{1+x^2}$;

29) $\sqrt{a-b} + \sqrt{16a-16b} + \sqrt{ax^2-bx^2} - \sqrt{9(a-b)}$;

30) $\sqrt{(a^2-2ax+x^2)x^9} + \sqrt{(a^2-x^2)(a+x)(a-x)} - a^2\sqrt{x} + \sqrt{x^5}$.

Умножение и деление квадратных корней:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

171. Произвести умножение:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; 2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}$; 3) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{7}$;
4) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ 5) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$; 6) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{42}$;
7) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$; 8) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}$; 9) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{30}$;
10) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}$; 11) $2\sqrt{a}\cdot\sqrt{3x}$; 12) $5\sqrt{2a}\cdot 3\sqrt{5x}$;
13) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{3a}$; 14) $\sqrt{5x}\cdot\sqrt{x}$; 15) $\sqrt{y}\cdot\sqrt{8y}$;
16) $a\sqrt{x}\cdot b\sqrt{5}$; 17) $5\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}$; 18) $7\sqrt{x}\cdot a\sqrt{x}$;
19) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{8a}$; 20) $\sqrt{3a}\cdot\sqrt{5a}$; 21) $\sqrt{6x}\cdot\sqrt{8x}$;
22) $\sqrt{6x}\cdot\sqrt{10x}$; 23) $\sqrt{3y}\cdot\sqrt{6y}$; 24) $\sqrt{5z}\cdot\sqrt{35z}$;
25) $\sqrt{7a}\cdot\sqrt{21a}$; 26) $\sqrt{10b}\cdot\sqrt{15b}$; 27) $\sqrt{14c}\cdot\sqrt{70c}$;
28) $\sqrt{d^3}\cdot\sqrt{d^3}$; 29) $\sqrt{b^5}\cdot\sqrt{b^7}$; 30) $\sqrt{c^7}\cdot\sqrt{7c}$;
31) $\sqrt{p}\cdot\sqrt{p^9}$; 32) $\sqrt{5q}\cdot\sqrt{q^5}$; 33) $\sqrt{q^{n+1}}\cdot\sqrt{q^{n-1}}$;
34) $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{8}$; 35) $\sqrt{a^2b}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{a^3}$;
36) $\sqrt{2\frac{1}{2}xy^3}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}xy}\cdot\sqrt{9x^3}$; 37) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a}{b}}\cdot\frac{1}{4}b\sqrt{\frac{2a}{c^3}}$;
38) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8a}{3c}}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2a^3}{27c}}$;
39) $\sqrt{x^{n+1}y^{n-1}}\cdot\sqrt{x^{n-1}y^{n+1}}$; 40) $a=\sqrt{a^{m+n}b}\cdot\sqrt{a^{3m-n}b^{2n+1}}$.

172. Произвести деление:

1) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$; 2) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}$;
5) $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$; 6) $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{7}}$; 7) $\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{2x}}$; 8) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{6x}}$;

9) $\sqrt{5x} : \sqrt{5}$; 10) $\sqrt{ax} : \sqrt{x}$; 11) $\sqrt{a^2b} : \sqrt{b}$; 12) $\sqrt{ab} : \sqrt{bx}$;
13) $\sqrt{32} : \sqrt{2}$; 14) $\sqrt{28} : \sqrt{7}$; 15) $\sqrt{60} : \sqrt{5}$; 16) $\sqrt{72} : \sqrt{30}$;
17) $5\sqrt{7} : 2\sqrt{5}$; 18) $3\sqrt{6} : 2\sqrt{3}$; 19) $4\sqrt{5} : 5\sqrt{2}$; 20) $8\sqrt{9} : 3\sqrt{3}$;
21) $\sqrt{a^3b} : \frac{1}{2}\sqrt{ab}$; 22) $\frac{1}{2}\sqrt{xy^5} : \sqrt{x^3y^3}$; 23) $0{,}75\sqrt{2a} : 0{,}5\sqrt{8b}$;
24) $\sqrt{\frac{3a}{x+y}} : \sqrt{\frac{3a^3}{(x+y)^3}}$; 25) $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{5a}} : \sqrt{\frac{15a^3b}{x^2-y^2}}$;
26) $\sqrt{a^{2m-1}} : \sqrt{a^{2m-3}}$; 27) $\sqrt{p^{k+1} \cdot q^{k-1}} : \sqrt{p^{k-1} \cdot q^{3-k}}$.

173. Выполнить умножение и по возможности упростить:

1) $(3\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{72}) \cdot \sqrt{2}$;
2) $(4\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{50} - \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$;
3) $(2\sqrt{6} - \sqrt{12} - \sqrt{24} + \sqrt{48}) \cdot \sqrt{2}$:
4) $(5\sqrt{24} - 4\sqrt{32} + 3\sqrt{54}) \cdot \sqrt{3}$;
5) $(7\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 3\sqrt{8} + 4\sqrt{20}) \cdot 3\sqrt{2}$;
6) $(2\sqrt{20} - 7\sqrt{8} - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{18}) \cdot 4\sqrt{10}$.
7) $\left(\sqrt{xy} + \sqrt{xz} - \sqrt{\frac{x}{z}}\right)\sqrt{\frac{z}{x}}$;
8) $\left(a\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{ab} + b\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{ab}$;
9) $(\sqrt{8} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;
10) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$;
11) $(5\sqrt{7} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{7} + 10\sqrt{5})$;
12) $(8 + 3\sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$; 13) $(3 - \sqrt{2})(2 + 3\sqrt{2})$;
14) $(5\sqrt{3} + \sqrt{6})(5\sqrt{2} - 2)$; 15) $(5 - 2\sqrt{3})(6 + 5\sqrt{3})$;
16) $(2a + 3\sqrt{x})(3a - 2\sqrt{x})$;
17) $(4\sqrt{a} - \sqrt{3x})(\sqrt{a} + 2\sqrt{3x})$;
18) $(2\sqrt{6} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{2})(\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$;
19) $(2\sqrt{30} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$;
20) $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})$;
21) $(\sqrt{3a} + \sqrt{2b}) \cdot (\sqrt{3a} - \sqrt{2b})$;
22) $(\sqrt{x+y} - x)(\sqrt{x+y} - y)$;
23) $(a + 2\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)$; 24) $(b - 2\sqrt{b+1})(\sqrt{b+1})$.

174. Возвести в степень и по возможности упростить:

1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$; 2) $(a-b\sqrt{x})^2$;
3) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$; 4) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$;
5) $(1+\sqrt{2})^2$; 6) $(-1+\sqrt{3})^2$;
7) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$; 8) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$;
9) $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2$; 10) $(\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b})^2$;
11) $(a+\sqrt{1+a^2})^2$; 12) $(\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax})^2$;
13) $(\sqrt{3-x}-\sqrt{2+x})^2$; 14) $(\sqrt{7-5x}+\sqrt{4x-5})^2$;
15) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$; 16) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$;
17) $\left(\sqrt{\frac{2a}{3b}}-\sqrt{\frac{2b}{3a}}\right)^2$. 18) $\left(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}-\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}\right)^2$;
19) $(\sqrt{a+b-x}+\sqrt{a-b+x})^2$;
20) $(\sqrt{4a+b-4x}-2\sqrt{3b-a+x})^2$.

175. Выполнить деление и по возможности упростить:

1) $(a\sqrt{x}+\sqrt{x}):\sqrt{x}$; 2) $(3\sqrt{a}+\sqrt{ab^2}):\sqrt{a}$;
3) $(\sqrt{ab}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}):\sqrt{a}$;
4) $(2\sqrt{xy}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}):\sqrt{xy}$;
5) $(\sqrt{x^3y}+\sqrt{x^2y^2}-\sqrt{xy^3}):\sqrt{xy}$;
6) $6:\sqrt{\frac{2}{3}}$; 7) $15:\sqrt{\frac{5}{7}}$; 8) $18:\sqrt{\frac{6}{7}}$; 9) $20:5\sqrt{\frac{4}{5}}$;
10) $a:\sqrt{\frac{a}{b}}$; 11) $a:\sqrt{\frac{a}{b^3}}$; 12) $ax:\sqrt{\frac{a}{x}}$; 13) $\frac{a}{x}:\sqrt{ax}$;
14) $\sqrt{\frac{4}{5}}:2$; 15) $\sqrt{\frac{8}{9}}:6$; 16) $\sqrt{\frac{25}{27}}:10$; 17) $\sqrt{\frac{5}{8}}:\frac{5}{4}$;
18) $\sqrt{\frac{a}{b}}:a$; 19) $\sqrt{\frac{a^2}{b}}:a$; 20) $\sqrt{\frac{a^3}{b}}:ab$; 21) $\sqrt{\frac{a}{b}}:\frac{a}{b}$;
22) $\sqrt{a}:\sqrt{\frac{a}{b}}$; 23) $\sqrt{ab}:\sqrt{\frac{a}{b}}$; 24) $\frac{a}{b}:\sqrt{\frac{a}{b}}$;
25) $\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{b}{a}}$.

176. Упростить выражения:

1) $(\sqrt{5}-2)\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; 2) $(\sqrt{10}+\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$;
3) $(2\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; 4) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})\sqrt{7-2\sqrt{10}}$;

5) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; 6) $(3-2\sqrt{2})\sqrt{17+12\sqrt{2}}$;

7) $(-1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; 8) $(2-\sqrt{3})\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

9) $(x-y):(\sqrt{x}+\sqrt{y})$; 10) $(1-a):(1-\sqrt{a})$;

11) $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right):\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)$;

12) $(bx-ay):(\sqrt{ay}+\sqrt{bx})$;

13) $(x^3-y^3):(\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3})$.

177. Освободить следующие дроби от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; 4) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; 5) $\frac{5}{\sqrt{5}}$;

6) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{8}{\sqrt{6}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 9) $\frac{9}{2\sqrt{3}}$; 10) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$;

11) $\frac{48}{5\sqrt{32}}$; 12) $\frac{54}{\sqrt{72}}$; 13) $\frac{a^2}{\sqrt{a^3}}$; 14) $\frac{xy}{\sqrt{xy}}$; 15) $\frac{1}{\sqrt{x^3y}}$;

16) $\frac{a}{b\sqrt{a}}$; 17) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; 18) $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$; 19) $\frac{3}{3+\sqrt{6}}$;

20) $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$; 21) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$; 22) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; 23) $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$;

24) $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; 25) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$; 26) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 27) $\frac{12}{4-\sqrt{7}}$;

28) $\frac{11}{5+\sqrt{3}}$; 29) $\frac{13}{5+2\sqrt{3}}$; 30) $\frac{14}{8-5\sqrt{2}}$; 31) $\frac{12}{7-3\sqrt{5}}$;

32) $\frac{5\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}}$; 33) $\frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; 34) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

35) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 36) $\frac{9-5\sqrt{3}}{7-3\sqrt{3}}$; 37) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

38) $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 39) $\frac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$; 40) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$;

41) $\frac{a}{a+\sqrt{a}}$; 42) $\frac{1}{a-\sqrt{b}}$; 43) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

44) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 45) $\frac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}$; 46) $\frac{3+2\sqrt{x}}{5+3\sqrt{x}}$;

47) $\frac{a+b\sqrt{x}}{c+d\sqrt{x}}$; 48) $\frac{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}{c\sqrt{x}-d\sqrt{y}}$;

49) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; 50) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

51) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 52) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Преобразование $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ (извлечение квадратного корня).

178. Проверить справедливость равенств:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{m}+\sqrt{n} \text{ и } \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{m}-\sqrt{n},$$

где
$$m=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},\ n=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2},$$

извлекая корни с точностью до 0,1; 0,01; 0,001... и полагая:
1) $a=2$ и $b=3$; 2) $a=3$ и $b=5$; 3) $a=4$ и $b=7$.

Проверить справедливость тех же равенств, возводя обе части их в квадрат и заменяя m и n их выражениями через a и b.

Показать, что выражения m и n можно получить как значения x и y, если положить

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$$

и, возведя обе части равенства в квадрат, отдельно приравнять рациональные и иррациональные члены обеих частей полученного равенства.

При какой зависимости между a и b преобразование по указанной формуле ведет к упрощению вида выражения

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}?$$

179. Преобразовать по формуле, данной в предыдущей задаче, следующие выражения:

1) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$; 2) $\sqrt{9-\sqrt{17}}$; 3) $\sqrt{15+\sqrt{29}}$;
4) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; 5) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$; 6) $\sqrt{12+3\sqrt{7}}$;
7) $\sqrt{16+\sqrt{156}}$; 8) $\sqrt{8+\sqrt{39}}$; 9) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;
10) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$; 11) $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}$; 12) $\sqrt{a+2b+\sqrt{8ab}}$.

§ 5. Приближенные вычисления с квадратными корнями.

180. Вычислить с точностью до а) 0,01; б) 0,001:

1) $3\sqrt{3}$; 2) $4\sqrt{7}$; 3) $5\sqrt{11}$; 4) $7\sqrt{13}$;
5) $5\sqrt{0,2}$; 6) $4\sqrt{0,125}$; 7) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$; 8) $5\sqrt{\frac{1}{5}}$;

9) $\frac{1}{2}\sqrt{0,35}$; 10) $0,8\sqrt{56}$; 11) $\frac{7}{8}\sqrt{3}$; 12) $2\frac{1}{2}\sqrt{2\frac{1}{2}}$;
13) $\sqrt{\frac{4}{5}}$; 14) $\sqrt{\frac{5}{4}}$; 15) $\sqrt{\frac{3}{7}}$; 16) $\sqrt{\frac{5}{9}}$.

Почему при приближенном вычислении корней следует коэффициенты при корнях подводить под знаки корня?

181. На основании формулы $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+x+\frac{1}{4}$ выяснить, какое из двух приближенных значений с точностью до 1 (по избытку или по недостатку) является более точным для следующих корней:

1) $\sqrt{20}$; 2) $\sqrt{21}$; 3) $\sqrt{42}$; 4) $\sqrt{44}$;
5) $\sqrt{56}$; 6) $\sqrt{57}$; 7) $\sqrt{133}$; 8) $\sqrt{156}$;
9) $\sqrt{306}$; 10) $\sqrt{210}$; 11) $\sqrt{240}$; 12) $\sqrt{1260}$.

182. Составить, пользуясь формулами $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = x^2-x+\frac{1}{4}$ и $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+x+\frac{1}{4}$, таблицу квадратных радикалов из целых чисел, если наиболее точные значения этих радикалов (с точностью до 1) представляют числа:

1) 7; 2) 11; 3) 13; 4) 17; 5) 33; 6) 35; 7) 48; 8) 85.

183. Подыскать в неравенствах:

$$a < x < b$$

такие целые значения для a и b, чтобы под x можно было разуметь любое целое число, наиболее точным значением (с точностью до 1) квадратного корня из которого служило бы число:

1) 8; 2) 16; 3) 145; 4) 160; 5) 220; 6) 1000.

184. На основании формул: $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ и $\left(x+\frac{1}{10^k}\right)^2 = x^2+\frac{2x}{10^k}+\frac{1}{10^{2k}}$, указать наибольшее и наименьшее из целых чисел, приближенными значениями квадратного корня из которых служат числа:

1) а) 4000 и 4001; б) 400,0 и 400,1; в) 40,00 и 40,01;
2) а) 1002 и 1003; б) 100,2 и 100,3; в) 10,02 и 10,03;
3) а) 998 и 999; б) 99,8 и 99,9; в) 9,98 и 9,99;
4) а) 9998 и 9999; б) 999,8 и 999,9; в) 99,98 и 99,99.

185. Сколько значащих цифр достаточно сохранить в подкоренном числе, чтобы квадратный корень имел четыре точных значащих цифры? три? пять? две?

186. Доказать справедливость неравенства:

$$\sqrt{a+\alpha}-\sqrt{a}<\frac{\alpha}{2\sqrt{a}} \qquad (\alpha>0).$$

187. Вычислить, применяя при вычислении все допустимые сокращения:

1) $\sqrt{164,888888\ldots}$; 2) $\sqrt{0,657796666\ldots}$; 3) $\sqrt{3,14159\ldots}$;
4) $\sqrt{2875,4444\ldots}$; 5) $\sqrt{7,8787\ldots}$; 6) $\sqrt{2,7182818284\ldots}$

с точностью до 0,01; до 0,001.

188. Вычислить с точностью до 0,01 следующие выражения (приводя все выражения к наиболее удобному для вычисления виду и производя все допустимые сокращения вычислений):

1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$;

4) $(3+\sqrt{5})^2$; 5) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; 6) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

189. Вычислить (производя все допустимые сокращения) следующие выражения, удерживая при определении приближенных значений по 3 значащих цифры, и оценить погрешность результата:

1) $\sqrt{0,05}+\sqrt{3}$; 2) $\frac{1+\sqrt{0,5}}{1-\sqrt{0,5}}$; 3) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

4) $(1+\sqrt{2})^3$; 5) $\sqrt{3}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; 6) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{1}}$.

Задачи из геометрии [1]).

190. В прямоугольном треугольнике даны катеты:

1)	5 *см* и	12 *см*;		2)	12 *см* и	35 *см*;	
3)	11 » »	15 » ;		4)	28 » »	195 » ;	
5)	44 » »	117 » ;		6)	10 » »	15 » ;	
7)	2288 » »	3534 » ;		8)	2914 » »	1248 » .	

Определить гипотенузу.

191. В прямоугольном треугольнике дана гипотенуза и катет:

1)	65 *см* и	16 *см*;	2)	1898 *см* и	1702 *см*;
3)	365 » »	27 » ;	4)	514 » »	64 » ;
5)	485 » »	44 » ;	6)	15 » »	6 » ;
7)	17 » »	13 » ;	8)	6,5 » »	6 » .

Определить другой катет.

---

[1]) При приближенных вычислениях вести их так, чтобы в результате оказались верными три значащих цифры.

192. В прямоугольном треугольнике гипотенуза $c = 10{,}97$ *м*, один из катетов $a = 9{,}28$ *м*. Определить площадь треугольника (вычислив другой катет).

193. Площадь квадрата: 1) 10, 2) 40, 3) 90 *см*^{2}. Определить сторону.

194. Преобразовать прямоугольник со сторонами: 1) 9 *см* и 16 *см*, 2) 10 *см* и 40 *см*, 3) 0,1 *м* и 0,3 *м* в равновеликий квадрат. Определить сторону искомого квадрата.

195. Вычислить высоту равностороннего треугольника со стороной: 1) 5 *см*, 2) 13 *см*, 3) Герберт (ставший позднее папой Сильвестром, † 1003) определяет высоту равностороннего треугольника, умножая сторону на $\frac{6}{7}$, Герон († 100 лет до нашей эры) берет с тою же целью множитель $\frac{13}{15}$, в элементарных учебниках настоящего времени взят множитель $\frac{7}{8}$. Какая из этих дробей дает лучшее приближение? Вычислить приближенно этот множитель и определить погрешность каждой из дробей (4 цифры).

196. Определить диагональ прямоугольника, стороны которого равны: 1) 12 *см* и 3 *см*; 2) 2,5 *см* и 17,2 *см*; 3) 18,4 *см* и 34,5 *см*; 4) 2,08 *м* и 8,19 *м*.

197. Проекции катетов на гипотенузу равны: $p = 48$ *см* и $q = 90$ *см*. Определить меньший катет.

198. Отрезки хорды, делящей другую хорду пополам, равны: 1) 4 *см* и 9 *см*, 2) 18 *см* и 32 *см*, 3) 7 *см* и 11 *см*. Определить вторую хорду.

199. Из данной точки вне круга проведена касательная и секущая. Определить длину касательной, если внешний отрезок секущей и вся секущая соответственно равны: 1) 2,1 *см* и 2,8 *см*, 2) 4,8 *см* и 5 *см*, 3) 13 *см* и 27 *см*.

200. Площадь треугольника определяется по трем сторонам a, b, c у Герона Александрийского (около 100 л. до нашей эры) следующей формулой:

$$\Delta = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Треугольники, стороны и площадь которых выражаются рациональными числами, называются Героновыми треугольниками. Вычислить площадь треугольника, если числовые значения сторон в сантиметрах равны:

a	13	92	52	70	55
b	14	85	41	65	51
c	15	39	15	9	26

201. 1) Сторона правильного четыреугольника, восьмиугольника и шестнадцатиугольника, вписанных в круг, радиус которого равен 1, равны:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2-\sqrt{2}};\ \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Вычислить стороны с 4 десятичными знаками.

2) Стороны правильного треугольника, двенадцатиугольника и двадцатичетыреугольника, вписанных в круг, радиус которого равен 1, равны соответственно:

$$\sqrt{3},\ \sqrt{2-\sqrt{3}},\ \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Вычислить стороны с 4 десятичными знаками.

3) Стороны правильного десятиугольника, пятиугольника и двадцатиугольника, вписанных в круг, радиус которого равен 1, равны соответственно:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})};\ \sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}.$$

Вычислить стороны с 4 десятичными знаками.

§ 6. Графическое представление функции $y = \pm\sqrt{x}$.

202. Построить параболу $y = x^2$; найти графически приближенные значения корней:

$$\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \sqrt{5};\ \sqrt{3{,}6};\ \sqrt{7};\ \sqrt{0{,}5}.$$

203. Построить точки, симметричные точкам:

1) (1, 2); 2) (5, —3); 3) (4, 4); 4) (—1, 4); 5) (0, 4); 6) (4, 0);

а) относительно оси x; б) относительно оси y; в) относительно прямой $y = x$.

204. Построить точки, симметричные относительно прямой $y = x$ точкам:

1) (2, 3); 2) (3, 0); 3) (0, 3); 4) (5, 5);
5) (—2, 4); 6) (4, —2); 7) (—4, 2); 8) (6, 3).

Назвать координаты этих точек.

205. Построить симметричные изображения прямых:

1) $y = x + 3$; 2) $y = x - 2$; 3) $y = 2x$;
4) $y = \frac{x}{3}$; 5) $x = 0$; 6) $y = 0$;
7) $x = 2$; 8) $y = 5$; 9) $y = 2x + 1$;
10) $y = \frac{x}{4} - 1$.

по отношению к прямой $y=x$. Какой вид будет иметь уравнение каждой из полученных прямых?

Как проще всего получить из уравнений данных прямых уравнения их симметричных изображений?

206. При каких значениях k и b прямая $y=kx+b$ совпадает с своим симметричным изображением относительно прямой $y=x$?

207. Построить графику функции $y=x^2$; на том же чертеже построить графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt{x}$, задавая x значения 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4; 1,6 и т. д.

Как располагаются графики функций $y=x^2$ и $y=\pm\sqrt{x}$ относительно прямой $y=x$.

Какими функциями являются друг по отношению к другу функции $y=x^2$ и $y=\pm\sqrt{x}$? В чем оказываются сходными и чем отличаются друг от друга графики двух взаимно-обратных функций? Как они располагаются на плоскости координат?

208. Пересекая кривую $y=\sqrt{x}$ прямой линией, определить приближенные значения решений следующих уравнений:

1) $\sqrt{x}+x=2$; 2) $\sqrt{x}-x+2=0$;
3) $\sqrt{x}+x=12$; 4) $2\sqrt{x}+x=3$;
5) $2\sqrt{x}-x=1$; 6) $\sqrt{x}-3x+10=0$.

209. Выяснить при помощи графики (пересекая кривую $y=\sqrt{x}$ прямой линией), сколько корней имеют следующие уравнения:

1) $\sqrt{x}=3$; 2) $\sqrt{x}=-2$; 3) $\sqrt{x}-x=4$;
4) $\sqrt{x}+x=4$; 5) $\sqrt{x}=x$; 6) $4\sqrt{x}+8x=3$.

210. Заменяя дугу ветви параболы $y=\sqrt{x}$ между точками (4, 2) и (3, 9) хордой, найти приближенные значения с точностью до 0,1 корней $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ при помощи линейной интерполяции (т.-е. найти ординаты точек, лежащих на хорде и соответствующих абсциссам 5, 6, 7, 8).

Функции, получаемые одна из другой заменой y через x и обратно (под y разумеется функция, под x — независимая переменная), называются взаимно-обратными.

Функция $y=x^2$ имеет две функции ей обратных: $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$.

Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно биссектрисы нормального угла.

§ 7. Общее понятие корня.

211. Что называется n-м корнем из a? Как он обозначается? Каким числом должно быть n? Имеет ли смысл $\sqrt[n]{a}$, если n четное число, а число a имеет отрицательное значение? Что разумеют под $\sqrt[n]{a}$ при a положительном? Что разумеют под $\sqrt[n]{-a}$ $(a>0)$ при n нечетном? В каком случае $\sqrt[n]{a}$ есть целое число? рациональное число? иррациональное число?

212. Вычислить значение выражений:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{8}$; 3) $\sqrt[3]{27}$; 4) $\sqrt[3]{125}$;
5) $\sqrt[4]{16}$; 6) $\sqrt[4]{625}$; 7) $\sqrt[6]{64}$; 8) $\sqrt[4]{81}$;
9) $(\sqrt[3]{1})^3$; 10) $(\sqrt[3]{27})^3$; 11) $(\sqrt[4]{11})^4$; 12) $(\sqrt[8]{8})^8$;
13) $\sqrt[5]{a^5}$; 14) $\sqrt[4]{x^8}$; 15) $\sqrt[5]{a^{15}}$; 16) $\sqrt[7]{7^{14}}$;
17) $\sqrt[5]{5^{25}}$; 18) $\sqrt[5]{25^5}$; 19) $\sqrt[5]{32}$; 20) $\sqrt[5]{a^{5m}}$;
21) $\sqrt[k]{a^{kp}}$; 22) $\sqrt[m]{m^{mn}}$; 23) $\sqrt[n]{m^{mn}}$; 24) $\sqrt[x]{x^{2x}}$;
25) $3\sqrt[3]{27}$; 26) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{27}$; 27) $a\sqrt[n]{a^{2n}}$; 28) $b^2\sqrt[3]{b^{3n}}$;
29) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{125}$; 30) $5\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$; 31) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; 32) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$.

213. Построив параболу $y=x^3$, найти графически приближенные значения корней: 1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{4}$; 3) $\sqrt[3]{7}$; 4) $\sqrt[3]{9}$; 5) $\sqrt[3]{0{,}5}$; 6) $\sqrt[3]{0{,}8}$;

214. 1) Построить отражение параболы $y=x^3$ по отношению к прямой $y=x$ для получения кривой $y=\sqrt[3]{x}$. 2) Таким же образом построить кривую $y=\sqrt[4]{x}$. 3) Чем отличается графика корня с четным показателем от графики корня с нечетным показателем? 4) Какие точки являются общими для всех график корней с нечетными показателями и корней с четными показателями?

215. Пользуясь графиками, определить корни следующих уравнений:

1) $\sqrt[3]{x}=\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[3]{x}=\sqrt[5]{x}$; 3) $\sqrt[4]{x}=\sqrt{x}$;
4) $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[6]{x}$; 5) $\sqrt[4]{x}=-\sqrt{x}$; 6) $\sqrt[4]{x}=\sqrt[3]{x}$.

216. Пересекая кривые $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[4]{x}$ прямыми линиями, определить приближенные значения корней следующих уравнений:

1) $\sqrt[3]{x} = 2$; 2) $\sqrt[3]{x} = -2$; 3) $\sqrt[3]{x} + x = 2$;
4) $\sqrt[3]{x} - x + 6 = 0$; 5) $\sqrt[4]{x} = 2$; 6) $\sqrt[4]{x} = -2$;
7) $\sqrt[4]{x} = x$; 8) $4\sqrt[4]{x} - x + 8 = 0$.

Под n-м корнем из числа a при a положительном разумеют *положительное* число, n-я степень которого равна a.

Корень $\sqrt[n]{a}$ при n четном и a отрицательном не имеет смысла в области действительных чисел, так как четная степень всякого действительного числа есть число положительное.

Если n число нечетное, а подкоренное число отрицательное, то минус может быть вынесен из-под знака корня:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Если $\sqrt[n]{a}$ при a целом и положительном не есть целое число, то он представляет иррациональное число.

§ 8. Действие над корнями с любым натуральным показателем.

Преобразование корней.

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}.$$

217. Вывести рациональные множители из-под знака корня:

1) $\sqrt{x^9}$; 2) $\sqrt{a^7}$; 3) $\sqrt{a^2b}$; 4) $\sqrt{ax^6}$;
5) $\sqrt[3]{16}$; 6) $\sqrt[3]{24}$; 7) $\sqrt[3]{54}$; 8) $\sqrt[3]{72}$;
9) $\sqrt[3]{80}$; 10) $\sqrt[3]{-81}$; 11) $\sqrt[3]{250}$; 12) $\sqrt[3]{-648}$;
13) $\sqrt[5]{x^7b}$; 14) $\sqrt[4]{16c^5d^6}$; 15) $\sqrt[4]{5x^4}$; 16) $\sqrt[5]{3x^5y}$;
17) $\sqrt[3]{x^4}$; 18) $\sqrt[?]{x^8}$; 19) $\sqrt[3]{x^{3n+1}}$; 20) $\sqrt[3]{x^{3n-2}}$;
21) $\sqrt[n]{x^{n+1}}$; 22) $\sqrt[n]{x^{n+3}}$; 23) $\sqrt[n]{5x^{2n+1}}$; 24) $\sqrt[n]{ax^{2n-1}}$;
25) $2\sqrt[3]{48}$; 26) $7\sqrt[3]{108}$; 27) $5\sqrt[3]{-320}$; 28) $8\sqrt[3]{-375}$.

218. Пользуясь приближенным значением $\sqrt[3]{2} = 1,260$, вычислить: 1) $\sqrt[3]{16}$; 2) $\sqrt[3]{54}$; 3) $\sqrt[3]{250}$.

219. Подвести рациональные множители под знак корня:

1) $3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$; 2) $2\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$; 3) $a\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$; 4) $b\sqrt[5]{\frac{1}{b^4}}$; 5) $2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$;

6) $b\sqrt{\frac{a}{b}}$; 7) $4\sqrt[3]{\frac{3}{32}}$; 8) $b\sqrt[3]{\frac{8}{25}}$; 9) $c\sqrt[3]{\frac{x^2}{c}}$; 10) $\frac{ay}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2x}{a^2y}}$;

11) $\frac{a^2}{b}\sqrt[4]{\frac{b^5\cdot x}{a^7}}$; 12) $-\frac{x}{y}\sqrt[3]{-\frac{y^4}{x}}$; 13) $\frac{x}{a^n}\sqrt[4]{\frac{a^{4n+1}\cdot b}{x}}$; 14) $a\sqrt[n]{a^{3-n}}$.

220. Следующие корни привести к нормальному виду:

1) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; 3) $2\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$; 4) $8\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$; 6) $a\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$; 7) $\sqrt[4]{\frac{2}{a}}$; 8) $x^2\sqrt[5]{\frac{1}{2x^3}}$.

221. Пользуясь приближенным значением $\sqrt[3]{2}=1{,}260$, вычислить: 1) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; 2) $\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$.

$$\sqrt[mk]{a^{nk}}=\sqrt[m]{a^n}.$$

222. Сократить корни (если это возможно):

1) $\sqrt[4]{a^2}$; 2) $\sqrt[6]{a^3}$; 3) $\sqrt[4]{a^2b^2}$; 4) $\sqrt[6]{a^4b^2}$;
5) $\sqrt[4]{3^2}$; 6) $\sqrt[4]{4}$; 7) $\sqrt[6]{27}$; 8) $\sqrt[6]{16}$;
9) $\sqrt[4]{25}$; 10) $\sqrt[4]{49}$; 11) $\sqrt[6]{81}$; 12) $\sqrt[6]{8}$;
13) $\sqrt[6]{a^3}$; 14) $\sqrt[6]{a^4x^2}$; 15) $\sqrt[4]{a^6x^6}$; 16) $\sqrt[6]{a^2}$;
17) $\sqrt[9]{27}$; 18) $\sqrt[9]{64}$; 19) $\sqrt[9]{64}$; 20) $\sqrt[9]{8}$;
21) $\sqrt[12]{27}$; 22) $\sqrt[12]{81}$; 23) $\sqrt[18]{64}$; 24) $\sqrt[12]{16}$;
25) $\sqrt[10]{36}$; 26) $\sqrt[10]{32}$; 27) $\sqrt[10]{243}$; 28) $\sqrt[10]{9}$;
29) $\sqrt[12]{b^8}$; 30) $\sqrt[10]{c^5}$; 31) $\sqrt[9]{d^{12}}$; 32) $\sqrt[9]{a^3}$;
33) $\sqrt[12]{a^4b^8}$; 34) $\sqrt[6]{9a^2b^4}$; 35) $\sqrt[8]{16a^{12}}$; 36) $\sqrt[9]{8x^6}$;
37) $\sqrt[4]{9a^{2m}b^2}$; 38) $\sqrt[4]{25a^{2k+2}}$; 39) $\sqrt[6]{8a^3b^{3m}}$; 40) $\sqrt[2n]{0{,}01a^4b^6}$.

223. Преобразовать: 1) $\sqrt{a}$; 2) $\sqrt[3]{a}$ в корень 6-й, 12-й и 18-й степени.

Сложение и вычитание (приведение) корней.

224. Упростить следующие выражения:

1) $5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{-54}-6\sqrt[3]{-128}+7\sqrt[3]{-250}+2\sqrt[3]{432}$;

2) $7\sqrt[3]{24}+5\sqrt[3]{81}+4\sqrt[3]{-192}+2\sqrt[3]{-375}-\sqrt[3]{1029}$;

3) $2\sqrt[3]{17}+3\frac{1}{2}\sqrt[3]{136}-\sqrt[3]{-459}-0,5\sqrt[3]{1088}$;

4) $5\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{-648}-\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{3993}$;

5) $b\sqrt[3]{a^3b}+a\sqrt[3]{b^4}-2\sqrt[3]{a^3b^4}$;

6) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{32x^5}+2\frac{1}{3}\sqrt[4]{162x}-\sqrt[4]{2x}$;

7) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}}-\sqrt{2}-\sqrt[3]{27}$;

8) $\sqrt[3]{\frac{5}{36}}-2\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{225}}+10\sqrt[3]{0,03}$;

9) $7\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{x}-6\sqrt{x}-\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x^3}$;

10) $a+2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}+4\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{a^2}-3\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{a^3}$.

Умножение и деление корней.

225. Перемножить корни:

1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{18}$; 3) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{50}$; 4) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$;

5) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{x}$; 6) $2\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{2x}$; 7) $5\sqrt[3]{2a}\cdot\sqrt[3]{5b}$; 8) $\sqrt[5]{a}\cdot 2\sqrt[5]{a^4}$;

9) $\sqrt[3]{2d^2}\cdot\sqrt[3]{4d}$; 10) $\sqrt[3]{9x}\cdot\sqrt[3]{9x^2}$; 11) $\sqrt[3]{25y^2}\cdot\sqrt[3]{50y^2}$;

12) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$; 13) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{x}$; 14) $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ax}$;

15) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4b}{a}}$; 16) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{xy^2}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{81}{4}x^3y}$;

17) $\sqrt[3]{0,8a^2b^2c}\cdot\sqrt[3]{0,01ab^2c^2}$; 18) $\sqrt[n]{a^{n-1}b^{n+1}}\cdot\sqrt[n]{ab^2}$;

19) $\sqrt[m]{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt[m]{ab^{2m-1}}$; 20) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[3]{2}$;

21) $\sqrt[4]{10}\cdot\sqrt[4]{25}\cdot\sqrt[4]{40}$; 22) $\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{140}\cdot\sqrt[3]{10}$;

23) $\sqrt[5]{2a^2b}\cdot\sqrt[5]{8a^2b}\cdot\sqrt[5]{6ab^3}$; 24) $\sqrt[3]{0,45x^2yz}\cdot\sqrt[3]{4xyz}\cdot\sqrt[3]{0,3y^2z^4}$.

226. Произвести деление:

1) $\sqrt[3]{28}:\sqrt[3]{14}$; 2) $\sqrt[3]{0,27}:\sqrt[3]{\frac{10}{3}}$; 3) $\sqrt[4]{0,01}:\sqrt[4]{100}$;

4) $\sqrt[3]{4a}:\sqrt[3]{a}$; 5) $\sqrt[6]{2a^2}:\sqrt[6]{0,2b}$; 6) $\sqrt[3]{30a^2}:\sqrt[3]{\frac{0,03}{a}}$;

7) $\sqrt[n]{a^{3m}}:\sqrt[n]{a^{2m}}$; 8) $\sqrt[2n+1]{-b^{2n+2}}:\sqrt[2n+1]{b}$; 9) $\sqrt[3]{2a^{4m}b^2}:\sqrt[3]{\frac{1}{4}a^mb}$.

227. Выполнить действие и по возможности упростить:

1) $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}):\sqrt[3]{9}$; 2) $(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}):2\sqrt[4]{8}$;

3) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{3}{16}}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; 4) $(5\sqrt[3]{0,08}+\sqrt[3]{10})\sqrt[3]{0,1}$;

5) $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a})\sqrt[3]{a}$; 6) $(a\sqrt[3]{b}+b\sqrt[3]{a})\cdot\sqrt[3]{a^2b^2}$;

7) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$; 8) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})$.

228. Произвести деление и по возможности упростить:

1) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}):\sqrt[3]{3}$; 2) $(\sqrt[3]{30}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{5}):\sqrt[3]{5}$;

3) $(\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{ab}):\sqrt[3]{ab}$;

4) $(2\sqrt[6]{x^4y^3}+\sqrt[6]{x^3y^2}-\frac{1}{2}\sqrt[5]{x^2y^4}):2\sqrt[6]{x^2y^4}$.

229. Привести к общему показателю и выполнить действие:

1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a}$; 2) $\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt[3]{b}$; 3) $\sqrt[3]{c}\cdot\sqrt{d}$; 4) $\sqrt{p}\cdot\sqrt[4]{q}$;

5) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[6]{b}$; 6) $\sqrt[3]{c}\cdot\sqrt[6]{c}$; 7) $\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[9]{a}$; 8) $\sqrt[9]{d}\cdot\sqrt[12]{d}$;

9) $\sqrt[9]{x}\cdot\sqrt[12]{y}$; 10) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{x}}$; 11) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{\frac{8}{a}}$;

12) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{6}$; 13) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$; 14) $\sqrt{\frac{5}{12}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{10}}$;

15) $\sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\sqrt[3]{\frac{n}{m}}$; 16) $\sqrt[3]{\frac{q}{p}}\cdot\sqrt[4]{\frac{p}{q}}$; 17) $\sqrt[n]{6}\cdot\sqrt[2n]{y}$;

18) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[nx]{b}$; 19) $\sqrt[mx]{a}\cdot\sqrt[nx]{b}$; 20) $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{5}}$; 21) $\frac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt{10}}$;

22) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$; 23) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$; 24) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b}}$; 25) $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt[6]{c}}$.

230. Освободить следующие дроби от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt[4]{9}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$; 4) $\frac{a}{\sqrt[4]{a}}$; 5) $\frac{a}{\sqrt[7]{a^5}}$;

6) $\frac{a}{\sqrt[8]{a^3}}$; 7) $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}$; 8) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$; 9) $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}}$; 10) $\frac{a}{\sqrt[n]{a}}$.

Возведение корней в степень и извлечение из них корня.

231. Возвести в степень и привести к нормальному виду:

1) $(\sqrt[3]{a^2})^3$; 2) $(\sqrt[4]{a^3})^4$; 3) $(\sqrt[3]{a^2})^2$; 4) $(\sqrt[3]{a})^6$;

5) $(\sqrt[4]{5})^2$; 6) $(\sqrt[4]{25})^2$; 7) $(\sqrt[3]{9})^4$; 8) $(\sqrt[3]{100})^2$;

9) $(a\sqrt[3]{a^2b})^3$; 10) $\left(\frac{1}{a}\sqrt[4]{ab}\right)^4$; 11) $(-a\sqrt[6]{a^3b^2})^2$; 12) $\left(\frac{x}{y}\sqrt[6]{\frac{x}{y}}\right)^3$.

232. Извлечь корень:

1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}$; 3) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{c}}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt[n]{d}}$;

5) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$; 6) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{y^{10}}}$; 7) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$; 8) $\sqrt{\sqrt[6]{36}}$;

9) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{255}}$; 10) $\sqrt{a\sqrt[4]{a}}$; 11) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$;

12) $\sqrt{y\sqrt{y}}$; 13) $\sqrt{x\sqrt[3]{y}}$; 14) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$;

15) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$; 16) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b\sqrt[3]{c}}}$; 17) $\sqrt[m]{x\sqrt[n]{y\sqrt[p]{z}}}$;

18) $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a}}$; 19) $\sqrt[3]{b^2\sqrt[4]{c}}$; 20) $\sqrt[4]{c\sqrt[3]{c}}$.

§ 9. Уравнения, содержащие радикалы

(приводимые к уравнениям первой степени).

Решить следующие уравнения. При решении этих уравнений следует проверить, удовлетворяет ли найденный корень данному радикальному уравнению. Почему это необходимо сделать?

233. 1) $\sqrt{x+4}=3$; 2) $\sqrt{5-x}=2$; 3) $\sqrt[3]{x+5}=2$;

4) $\sqrt[4]{x+79}=3$; 5) $\sqrt{x-a}=b$; 6) $\sqrt[3]{a-x}=b$;

7) $\sqrt[4]{a^4+x}=a$; 8) $\sqrt{a^5-x}=b$; 9) $2\sqrt{x}=3$;

10) $\frac{1}{2}\sqrt{x}=5$; 11) $\frac{3}{4}\sqrt{x}=4\frac{1}{2}$; 12) $1\frac{1}{4}\sqrt{x}=7\frac{1}{2}$;

13) $\sqrt{3x}=6$; 14) $\sqrt{5x}=10$; 15) $\frac{3}{4}\sqrt{2x}=1\frac{1}{2}$;

16) $3\frac{1}{8}\sqrt{7x}=43\frac{3}{4}$; 17) $\sqrt{2x-3}=7$; 18) $\sqrt{17-2x}=3$;

19) $2\sqrt{3x-2}=8$; 20) $7\sqrt{8x+9}=91$;

21) $\frac{1}{2}\sqrt{x+17}=3$; 22) $\frac{2}{3}\sqrt{99-x}=6$;

23) $2\frac{1}{2}\sqrt{93+x}=25$; 24) $3\frac{1}{4}\sqrt{78-7x}=19\frac{1}{2}$;

25) $\sqrt{3x}=\sqrt{2x}$; 26) $2\sqrt{5x}=3\sqrt{7x}$;

27) $2\sqrt{x-7}=3\sqrt{x-17}$; 28) $3\sqrt{x+3}=2\sqrt{x+8}$;

29) $7\sqrt{x-3}=5\sqrt{2x-7}$; 30) $4\sqrt{x+7}=3\sqrt{x+14}$;

31) $9\sqrt{x-7}=4\sqrt{5x-31}$; 32) $2\sqrt{x+4}=3\sqrt{x-1}$;

33) $9\sqrt{x-21}=7\sqrt{x+11}$;
34) $4\sqrt{x+3}=3\sqrt{x+10}$;
35) $a\sqrt{x-1}=b\sqrt{1-x}$;
36) $5\sqrt{x-a}=8\sqrt{a-x}$;
37) $3+\sqrt{x}=5$;
38) $\sqrt{x}-4=3$;
39) $7-\sqrt{x}=4$;
40) $7-3\sqrt{x}=1$;
41) $5\sqrt{x}-8=7$;
42) $19-2\sqrt{x}=7$;
43) $8+3\sqrt{x-7}=23$;
44) $7+5\sqrt{x-3}=17$;
45) $2\sqrt{x}+7=1$;
46) $4\sqrt{x-1}+9=1$;
47) $4\sqrt{x+1}-9=-1$;
48) $3\sqrt{x+5}+10=1$;
49) $2\sqrt[3]{x}+9=1$;
50) $3\sqrt[3]{x-1}+28=1$;
51) $13-\sqrt{3x-5}=8$;
52) $7+\sqrt{19+3x}=17$;
53) $17-2\sqrt{7x+1}=1$;
54) $29-3\sqrt{13-2x}=20$;
55) $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=3$;
56) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{a}{b}$;
57) $\frac{9}{7+2\sqrt{x}}=\frac{8}{13-5\sqrt{x}}$;
58) $\frac{23}{7\sqrt{x}+4}=\frac{31}{9\sqrt{x}+4}$;
59) $\frac{17-3\sqrt{x}}{11}=\frac{23-4\sqrt{x}}{15}$;
60) $\frac{29-5\sqrt{x}}{9}=\frac{39-5\sqrt{x}}{19}$;
61) $(7-\sqrt{x})\cdot(8-\sqrt{x})=x+11$;
62) $(3\sqrt{x}-5)\cdot(5\sqrt{x}-3)=5(3x-31)$;
63) $(3\sqrt{x}-1)^2+(4\sqrt{x}-7)^2=(5\sqrt{x}-6)^2$;
64) $a(\sqrt{x}-a)-b(\sqrt{x}-b)+a+b=\sqrt{x}$;
65) $\sqrt{x-3}=3-\sqrt{x}$;
66) $\sqrt{4x-3}=2\sqrt{x}-1$;
67) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$;
68) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-1}=1$;
69) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+8}=9$;
70) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$;
71) $\sqrt{4x+5}+2\sqrt{x-3}=17$;
72) $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b$;
73) $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{x-6}=\sqrt{x-14}$;
74) $3\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-13}=5\sqrt{x-10}$;
75) $3\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-6}=\sqrt{x+42}$;
76) $4\sqrt{x-3}-3\sqrt{x-8}=\sqrt{x+24}$;
77) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+14}+\sqrt{x-7}$;
78) $\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}=\sqrt{a-b}$;
79) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b}$.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Квадратные уравнения.

§ 1. Решение уравнений разложением левой части на множители.

234. Пользуясь тем свойством, что произведение двух или нескольких чисел может обратиться в нуль лишь в том случае, когда один из сомножителей обращается в нуль, найти корни уравнений:

1) $5(x-2)=0$; 2) $(x-1)(x-2)=0$;
3) $6(x-1)(x-3)=0$; 4) $x(x-1)(x-2)(x-3)=0$;
5) $(4x-3)(2x-5)(3x-7)=0$; 6) $9(x+1)(x-2)=0$;
7) $(5x-1)(3x-1)(4x+1)=0$; 8) $(x+1)(2x+1)(3x+1)=0$;
9) $\frac{(x+3)(x-5)}{12}=0$.

235. Написать уравнение, корнями которого служили бы

1) 1 и 2; 2) 1, 2, 3; 3) 1, 2, 3, 4;
4) $1, -1$; 5) $1, -1, 2, -2$; 6) $\frac{1}{2}, 2$;
7) $2, -\frac{1}{2}$; 8) $1, -1, 0{,}1; -0{,}1$.

236. Разлагая левую часть уравнения на множители, решить уравнения:

1) $x^2-5x=0$; 2) $x^2+5x=0$;
3) $4x^2+x=0$; 4) $x^2-4=0$;
5) $x^2-9=0$; 6) $4x^2-1=0$;
7) $4x^2-25=0$; 8) $100x^2-1=0$;
9) $0{,}01x^2-1=0$; 10) $x^2-5x+6=0$;

11) $x^2+3x+2=0$; 12) $x^2-9x+18=0$;
13) $x^2-2x-3=0$; 14) $x^2-16x+60=0$;
15) $x^2-x-56=0$; 16) $5x^2-9x+4=0$;
17) $5x^2+9x+4=0$; 18) $63x^2-16x+1=0$;
19) $x^3+8x^2+15x=0$; 20) $30x^4-11x^3+x^2=0$;
21) $56x^5-x^4-x^3=0$; 22) $x^4-13x^2+36=0$;
23) $x^6+x^5-2x^4=0$; 24) $x^6-29x^4+100x^2=0$;
25) $x^4-25x^2+144=0$; 26) $x^2+8x+16=0$;
27) $4x^3+4x^2+x=0$; 28) $5x^2-10x-315=0$;
29) $x^2-(a+b)x+ab=0$; 30) $x^2-2ax+a^2=0$.

§ 2. Неполные и двучленные квадратные уравнения. Понятие о мнимом числе.

237. Решить уравнения:

1) $x^2-3x=0$; 2) $5x^2-x=0$; 3) $7x^2+2x=0$;
4) $x^2-mx=0$; 5) $x^2+px=0$; 6) $ax^2+bx=0$;
7) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)+26=0$;
8) $(3x-8)^2-(4x-6)^2+(5x-2)(x+2)=24$;
9) $(x-1)^2+(x+1)^2=2$;
10) $(2x-5)(3x-4)-(3x+4)(x-2)-10x-28=0$;
11) $(x+2)(x-3)(x-1)-x(x+1)(x+6)=0$;
12) $(x+a)(x-b)+(x+b)(x-a)+2ab=0$;
13) $(x+10)(x-0{,}1)+(x-10)(x+0{,}1)+2=0$;
14) $(x+m)(x+n)(x+p)-(x-m)(x-n)(x-p)=2mnp$

238. Решить уравнения:

1) $x^2-4=0$; 2) $x^2=25$; 3) $x^2-100=0$;
4) $x^2=625$; 5) $x^2-a^2=0$; 6) $x^2=m^2$;
7) $x^2-n=0$; 8) $x^2=l$; 9) $x^2+p=0$.

239. При каких значениях p существуют числа, удовлетворяющие уравнению $x^2+p=0$?

240. Решить уравнения:

1) $16x^2-1=0$; 2) $16x^2=25$; 3) $81x^2-4=0$;
4) $m^2x^2-n^2=0$; 5) $m^2x^2=1$; 6) $a^2x^2-ab^2=0$;
7) $5x^2-0{,}2=0$; 8) $6x^2-\frac{2}{3}=0$; 9) $ax^2-\frac{1}{a}=0$;
10) $ax^2-\frac{m^2}{a}=0$; 11) $ax^2-m=0$; 12) $ax^2+c=0$.

241. Какими свойствами должны обладать числа a и c в уравнении $ax^2+c=0$, чтобы это уравнение имело корни: 1) целые, 2) дробные, 3) иррациональные? Какие знаки должны быть у a и c во всех этих случаях?

242. Решить уравнения:

1) $\frac{15x}{2}=\frac{810}{3x}$; 2) $\frac{2x}{3}=\frac{1050}{7x}$; 3) $\frac{5x}{2}=\frac{800}{0,2x}$;

4) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}$; 5) $(3x+1,5)(3x-1,5)=54$;

6) $(a+x)(b-x)+(a-x)(b+x)=0$;

7) $\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-2}=2\frac{2}{3}$; 8) $\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x+2}=5\frac{5}{9}$;

9) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=7\frac{1}{7}$; 10) $\frac{3x+4}{5x-1}-\frac{2x+1}{6x-7}=0$;

11) $\frac{8x+5}{14x-1}-\frac{35x+1}{x+4,5}=1$; 12) $\frac{7}{x-2}-\frac{4}{x-3}=\frac{2}{x+1}$;

13) $(a+bx)^2+(ax-b)^2=2(a^2x^2+b^2)$;

14) $(7+x)(9-x)+(7-x)(9+x)=76$;

15) $(2x+7)(5x-9)+(2x-7)(5x+9)=1874$;

16) $\frac{a+x}{a-x}=\frac{x+b}{x-b}$; 17) $\frac{ax+b}{a+bx}=\frac{cx+d}{c+dx}$;

18) $\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x}$; 19) $\frac{25+x}{9+x}=\frac{13+x}{47-x}$;

20) $\frac{35+3x}{1+x}=\frac{x-55}{3x-53}$; 21) $\frac{x-2}{3x+14}=\frac{3x-4}{28-x}$;

22) $\frac{x+5a+b}{x-3a+b}=\frac{x-a+b}{a-x+3b}$; 23) $\frac{3a-2b+3x}{a-2b+x}=\frac{x-7a+8b}{3x-5a+4b}$.

243. Ученик решал уравнение $(x-3)^2=(x-5)^2$ следующим образом: «Если $(x-3)^2=(x-5)^2$, то $x-3=x-5$, откуда следует, что $3=5$». В чем заключалась ошибка в его рассуждении? Чему равняется на самом деле корень написанного уравнения? Как доказать таким же способом, что любые два числа равны?

244. Найти ошибку в следующем рассуждении:

$$n^2-n(2n+1)=(n+1)^2-(n+2)(2n+1);$$

прибавляя к обеим частям тождества по $\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, имеем:

$$n^2-n(2n+1)+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2=(n+1)^2-(n+1)(2n+1)+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$$

$$\text{или } \left(n-\frac{2n+1}{2}\right)^2=\left(n+1-\frac{2n+1}{2}\right)^2,$$

откуда $n-\frac{2n+1}{2}=n+1-\frac{2n+1}{2}$, или $n=n+1$, т.-е. всякое число равно числу, которое больше его на 1.

Уравнение $x^2+p=0$ при p положительном и уравнение $ax^2+c=0$ при одинаковых знаках у a и c не имеют корней среди

действительных чисел, так как квадраты и положительных, и отрицательных чисел положительны, а число x при указанных условиях должно иметь своим квадратом отрицательное число.

Чтобы выразить корни двучленного уравнения и в этом случае, в алгебру введены особые числа, носящие название **мнимых** чисел.

Мнимые числа образуются при помощи **мнимой** единицы i.

Условия, которыми определяются свойства мнимых чисел, следующие:

1. $i^2 = -1$.

2. $\overbrace{i + i + i + i + i + \ldots + i}^{n \text{ раз.}} = ni$.

3. $ai + bi = (a + b)i$.

4. Выражение $a + bi$, определяющее соединение a действительных единиц с b мнимыми, называется комплексным числом.

5. $a + bi = 0$ лишь в том случае, когда $a = 0$ и $b = 0$.

6. Сложение двух комплексных чисел определяется равенством

$$(a + bi) + (a + b'i) = a + a + (b + b')i.$$

7. Умножение комплексных чисел определяется равенством:

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + i^2bb' = \\ = aa' - bb' + (ab' + a'bi).$$

(Подробности о комплексных числах см. гл. IX.)

§ 3. Полные квадратные уравнения.

245. Решить уравнения:

1) $(x + 3)^2 - 4^2 = 0$; 2) $(x - 5)^2 = 25$;
3) $(2x + 3)^2 - 169 = 0$; 4) $(8x + 3)^2 = 361$;
5) $(3x + 2{,}3)^2 - 6{,}25 = 0$: 6) $(1{,}5x - 1{,}1)^2 = 7{,}84$;
7) $\left(7x + 5\frac{2}{5}\right)^2 = 73\frac{24}{25}$; 8) $(3{,}5x - 4{,}2)^2 = 96{,}04$;
9) $(5y + 3)^2 = 225$; 10) $(1{,}5 + 3z)^2 = 2{,}25$;
11) $(3x + 7)^2 = 4x^2$; 12) $(5z - 3)^2 = 16z^2$;
13) $(30 - 12y)^2 - 36y^2 = 0$; 14) $(2y + 3)^2 - y^2 = 0$;
15) $(x + 3)^2 = (5x + 21)^2$;
16) $(19z - 6)^2 - (11z - 10)^2 = 0$;
17) $(20y - 17)^2 = (5y + 13)^2$;
18) $(3{,}4t - 12{,}8)^2 = (2{,}2 - 1{,}6t)^2$;
19) $(m + x)^2 = (n - x)^2$; 20) $(2a + 3z)^2 = (2b - z)^2$;
21) $(a - by)^2 - (cy + d)^2 = 0$; 22) $(pnx - bc)^2 = (qnx + dc)^2$;
23) $(x - a)^2 = b^2$; 24) $z^2 - 2az + a^2 - c^2 = 0$;
25) $(3y - 3m + 4b)^2 = (y - 4b)^2$;

26) $(15n + 7y - 6q)^2 - (10y - 6q)^2 = 0;$

27) $x^2 + 2x + 1 = 9;$ 28) $x^2 - 6x + 9 = 16;$

29) $z^2 - 8z + 16 = 1;$ 30) $y^2 + 144 = 169 - 24y;$

31) $x^2 + 3x + 2{,}25 = 6{,}25;$ 32) $z^2 - 9z + 20{,}25 = 81;$

33) $x^2 + 2mx + m^2 - l^2 = 0;$ 34) $y^2 - 2ay + a^2 = b^2;$

35) $z^2 + 6az + 9a^2 - m^2 = 0;$

36) $x^2 - 6{,}8mx + 11{,}56m^2 = 1{,}44m^2;$

37) $x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4};$ 38) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 4;$

39) $z^2 + 3z + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 25;$ 40) $y^2 - 7y + \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 64;$

41) $x^2 + px + \frac{p}{4}^2 = m^2;$ 42) $z^2 - mz + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = n^2;$

43) $x^2 + 2(a + b)x + (a + b)^2 = r^2;$

44) $t^2 - (a + b)t + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = a^2;$

45) $y^2 - 2(a + b)y + (a + b)^2 = c^2;$

46) $z^2 + (p + q)z + \left(\frac{p + q}{2}\right)^2 = n^2;$

47) $x^2 + 2x = 8;$ 48) $z^2 - 8z = 48;$

49) $y^2 + 32y = 144;$ 50) $x^2 + 10x - 24 = 0;$

51) $z^2 + 1{,}2z = 0{,}45;$ 52) $y^2 - 3{,}4y - 1{,}52 = 0;$

53) $x^2 + 14x = 15;$ 54) $x^2 - 18x = 19;$

55) $x^2 - 12x + 11 = 0;$ 56) $x^2 + 18x + 17 = 0;$

57) $x^2 - 10x + 9 = 0;$ 58) $x^2 + 16x + 28 = 0;$

59) $x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0;$ 60) $x^2 + 2(a - b)x - 4ab = 0;$

61) $x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + 4 = 0;$ 62) $x^2 - 2\left(m - \frac{1}{m}\right)x - 4 = 0;$

63) $x^2 + x = 2;$ 64) $x^2 - x = 12;$

65) $x^2 - x + \frac{3}{16} = 0;$ 66) $x^2 + x + 0{,}24 = 0;$

67) $x^2 - 3x + 2 = 0;$ 68) $x^2 + 3x + 2 = 0;$

69) $x^2 - 9x + 20 = 0;$ 70) $x^2 + 11x + 30 = 0;$

71) $x^2 - 0{,}6x + 0{,}05 = 0;$ 72) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{81} = 0;$

73) $x^2 + px = \frac{3}{4}p^2;$ 74) $x^2 + px - 2p^2 = 0;$

75) $x^2 - mx + \frac{3}{16}m^2 = 0;$ 76) $x^2 + px + 0{,}21p^2 = 0;$

77) $x^2 + mx = l^2 + ml;$ 78) $y^2 - ny - q^2 - nq = 0;$

79) $x^2 + 2x + 1 = 7;$ 80) $x^2 - 2x - 5 = 0;$

81) $x^2 + 4x + 14 = 0;$ 82) $x^2 + 6x + 7 = 0;$

83) $x^2 + x = 3;$ 84) $x^2 - x - 1 = 0;$

85) $x^2 + 3x - 1 = 0;$ 86) $x^2 - 7x + 9 = 0;$

87) $x^2 - 2mx + m^2 = n;$ 88) $x^2 + 2mx + m^2 = n;$

89) $x^2 - lx = n - \frac{l^2}{4};$ 90) $x^2 + lx = n - \frac{l^2}{4};$

91) $x^2 + px - p^2 = 0$; 92) $x^2 + px + \frac{p^2}{8} = 0$;

93) $x^2 + px + q = 0$.

246. Вычислить значения выражений:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

если

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p=$	$+12$	-10	7	-7	9	6	-8	7	$1{,}6$	$a+b$	$a-b$	$-(a+b)$
$q=$	27	21	12	12	14	0	16	$12\frac{1}{4}$	$0{,}05$	ab	$-ab$	ab

Написать в каждом из этих случаев уравнение, в которое при соответственной подстановке обращается

$$x^2 + px + q = 0.$$

247. Решить, пользуясь выведенной формулой, квадратные уравнения:

1) $x^2 + 2x = 63$;
2) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
3) $x^2 + 6x = 91$;
4) $x^2 - 40x + 111 = 0$;
5) $x^2 + 2x = 1$;
6) $x^2 - 6x + 4 = 0$;
7) $x^2 - 2x + 2 = 0$;
8) $x^2 + 2{,}4x + 0{,}8 = 0$;
9) $x^2 + x - 56 = 0$;
10) $x^2 - 11x + 10 = 0$;
11) $x^2 - 7x = 30$;
12) $x^2 - 17x + 60 = 0$;
13) $x^2 + x = 1$;
14) $x^2 - 7x + 11\frac{1}{2} = 0$;
15) $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$;
16) $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$;
17) $x^2 - \frac{3}{x} = 8$;
18) $x^2 + \frac{x}{7} = 50$;
19) $x^2 = 1\frac{1}{2}x = 1$;
20) $x^2 + 38\frac{2}{3} = 12\frac{7}{12}x$;
21) $x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1 = 0$;
22) $x^2 - 5\frac{1}{2}x + 1 = 1$;
23) $x^2 - x + \frac{15}{64} = 0$;
24) $x^2 - 3\frac{5}{12}x + 2 = 0$;
25) $x^2 + 1\frac{11}{45}x - 1 = 0$;
26) $x^2 - \frac{1}{3}x - 2\frac{2}{9} = 0$;
27) $x^2 - \frac{11}{40}x - 3 = 0$;
28) $x^2 + \frac{7}{40}x - \frac{1}{2} = 0$;
29) $x^2 - 0{,}9x + 0{,}2 = 0$;
30) $x^2 - 0{,}4x - 0{,}21 = 0$;

31) $x^2 + x - 4,59 = 0$; 32) $x^2 - 0,8x - 0,0704 = 0$;
33) $x^2 - 2,1x - 1 = 0$; 34) $x^2 + 0,7x - 0,0375 = 0$;
35) $(x-1)^2 + (x-2)^2 - 1 = 0$;
36) $(x-1)(x-2) + 2x - 3 = 0$;
37) $(x+3)(x-2) + (x+2)^2 = 3x + 10$;
38) $(x-2)^2 + (x-1)^2 - (x-2)(x-1) - 1 = 0$;
39) $(x-5)^2 + (x-3)^2 + 4(x+5)(x-3) = (x+1)^2 + 48$;
40) $(x-3)(x-5) - (x-3)^2 + (x-5)^2 + 2(x-4) = 0$;
41) $(x+a)^2 + (x-b)^2 + (x-a)(x+b) = a^2 + b^2 + 2x^2$;
42) $(x+a)^2 + (x+a)(x+b) + (x+b)^2 = (a-b)^2$.
43) $x^2 + 2mx + q = 0$.

248. Решить уравнения.

1) $2x^2 - 16x + 30 = 0$; 2) $3x^2 + 9x = 84$;
3) $5z^2 = 165z + 740$; 4) $4y^2 - 532 = 48y$;
5) $mx^2 + a^2m = 2amx + m$; 6) $5y^2 - 10a^2y + 10b^2y = 20a^2b^2$;
7) $2x^2 - 11x + 14 = 0$; 8) $2x^2 + 6 = 7x$;
9) $3z^2 + 23z - 70 = 0$; 10) $49y^2 + 147y = 540$;
11) $5d^2 + 23d = 318$; 12) $3x^2 - 22x + 35 = 0$;
13) $91x^2 - 2x = 45$; 14) $15x^2 + 21 = 44x$;
15) $14x^2 - 33 = 71x$; 16) $15x^2 + 527 = 178x$;
17) $25x^2 + 2 = 30x$; 18) $6x^2 - 13x + 6 = 0$;
19) $7x^2 + 25x - 12 = 0$; 20) $6x^2 + 5x - 56 = 0$;
21) $7x^2 + 9x = 10$; 22) $1\frac{1}{5}x^2 + 10 = 7x$;
23) $1,2x^2 + 10 = 7x$; 24) $6x^2 + 5mx + m^2 = 0$;
25) $3x^2 - 10x + 3 = 0$; 26) $10x^2 + 13x - 3 = 0$;
27) $56x^2 + x - 1 = 0$; 28) $56x^2 + ax - a^2 = 0$;
29) $90x^2 - 19x + 1 = 0$; 30) $90x^2 - 19mx + m^2 = 0$;
31) $ax^2 + 2nx + b = 0$; 32) $ax^2 + bx + c = 0$.

249. Вычислить значения:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

		1	2	3	4	5	6	7
при	a	3	10	10	21	15	1	3
	b	—10	13	—13	—13	80	—7	8
	c	3	—3	—3	—20	—60	12	5

Какое упрощение получается в применении написанной формулы при b четном (задача 248,31)?

250. Как преобразовать уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

к виду

$$x^2 + px + q = 0?$$

Указать, какие значения получают p и q при преобразовании уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

к виду

$$x^2 + px + q = 0.$$

251. Решить уравнения:

1) $7x^2 - 16x + 9 = 0$; 2) $4x^2 - 20x + 9 = 0$;
3) $12x^2 + 31x + 9 = 0$; 4) $9x^2 - 31x + 12 = 0$;
5) $14x^2 - 9x - 8 = 0$; 6) $14x^2 + 9x - 8 = 0$;
7) $8x^2 - 9x - 14 = 0$; 8) $8x^3 + 9x - 14 = 0$;
9) $5x^2 - 16x + 3 = 0$; 10) $3z^2 = 10z - 3$;
11) $10x^2 + x = 3$; 12) $6x^2 + 2 - 7x = 2$;
13) $3y^2 + 2y - 1 = 0$; 14) $4u^2 + 7u - 2 = 0$;
15) $10x^2 = 3x + 1$; 16) $10m^2 + 49m = 5$;
17) $72x^2 - 18x - 35 = 0$; 18) $5c^2 - 76c + 15 = 0$;
19) $5x^2 = 3x + 1566$; 20) $400x^2 - 280x + 49 = 0$;
21) $(z + 1)(z + 2) = (2z - 1)(2z - 10)$;
22) $(y - 3)(y + 4) + (y + 5)(y - 7) = 19$;
23) $2x^2 - (b - 2c)x = bc$;
24) $4x^2 - 4ax + a^2 = b^2$;
25) $mnz^2 - mz = nz - 1$;
26) $5u^2 - m(3 - 5m)u - 3m^3 = 0$;
27) $(az + c)(cz - d) = 0$;
28) $(x - 6)^2 + (x + 4)^2 + (x - 5)^2 - (x + 6)^2 + 4x + 7 = 0$;
29) $(2x - 1)^2 + (3x - 2)^2 - (x - 2)(2x + 3) - (2x + 1)^2 = 0$;
30) $x(x + 4)(x + 1) - (x + 3)(x + 4)(x - 7) = 18$;
31) $x(x - 3)(x - 7)(x + 4) - x(x - 1)(x + 2)(x - 7) + 80x = 0$.

252. Решить уравнения и сделать затем в уравнении и в выражениях корней подстановки $n = 1, 2, 3 \ldots 10$:

1) $x^2 - 3nx + 2n^2 = 0$;
2) $x^2 + nx - 2n^2 = 0$;
3) $x^2 - nx - 2n^2 = 0$.

253. Решить уравнения и сделать затем в уравнении и в выражениях корней все возможные комбинации подстановок $a = 1, 2, 3$; $b = 1, 2, 3$:

1) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$;
2) $x^2 + x(b - a) - ab = 0$;
3) $x^2 + 2(a - b)x - 4ab = 0$.

254. Решить следующие уравнения при всех возможных комбинациях знаков перед коэффициентами:

1) $x^2 \pm 13x \pm 30 = 0$; 2) $x^2 \pm 15x \pm 54 = 0$;
3) $x^2 \pm 17x \pm 60 = 0$; 4) $x^2 \pm 25x \pm 84 = 0$;
5) $x^2 \pm 20x \pm 96 = 0$; 6) $x^2 \pm 26x \pm 120 = 0$;
7) $x^2 \pm 29x \pm 210 = 0$; 8) $x^2 \pm 34x \pm 240 = 0$;
9) $x^2 \pm 39x \pm 270 = 0$; 10) $x^2 \pm 50x \pm 336 = 0$.

255. Корни следующих уравнений вычислить с тремя значащими цифрами, обрывая коэффициенты этих уравнений на соответствующих знаках и применяя при вычислениях способы сокращенного умножения, деления и извлечения корня:

1) $x^2 + 4{,}1853x + 4{,}37276 = 0$;
2) $x^2 - 77{,}34056x + 175{,}542 = 0$;
3) $x^2 + 0{,}51388x - 0{,}33333 = 0$;
4) $7x^2 - 8{,}0589x + 2{,}1681 = 0$;
5) $403x^2 - 574{,}165x + 124{,}683 = 0$;
6) $391x^2 - 133{,}31x - 575{,}21 = 0$.

256. Решить уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 0{,}05y^2 - 4y + 7 = 0 \\ 2)\ 0{,}015z^2 + 10z + 3 = 0 \\ 3)\ 0{,}001x^2 + x - 1 = 0 \end{array}\right\}\ \text{с точностью до } 0{,}001$$ [1]).

257. Решить уравнения:

1) $x^2 - 12x + 36 = 0$; 2) $x^3 - 10x + 25 = 0$;
3) $x^2 - 0{,}2 + 0{,}01 = 0$; 4) $x^2 + 1{,}6 + 0{,}64 = 0$;
5) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 6) $x^2 - 6x + 45 = 0$;
7) $x^2 + 8x + 71 = 0$; 8) $x^2 + 12x + 40 = 0$;
9) $4x^2 + 6x + 9 = 0$; 10) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
11) $3x + 8x + 15 = 0$; 12) $9x^2 - 6x + 4 = 0$.

258. 1) Сколько корней имеет квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, если $\frac{p^2}{4} = q$? Как в таком случае может быть представлена левая часть квадратного уравнения?

2) Какому неравенству должны удовлетворять коэффициенты квадратного уравнения, чтобы оно имело два различных между собой действительных корня?

3) При какой зависимости между коэффициентами p и q квадратное уравнение не имеет решений (имеет мнимые корни)?

[1]) (При решении этих задач можно воспользоваться тем обстоятельством, что если коэффициент a очень мал сравнительно с остальными, то значение меньшего по абсолютной величине корня весьма близко к $-\frac{c}{b}$. Почему?)

259. Каким числом должен быть **дискриминант** $b^2 - 4ac$ уравнения $ax + bx + c = 0$, чтобы уравнение имело: а) два действительных корня? б) два равных корня? в) не имело решений (два мнимых корня)?

§ 4. Свойства корней квадратного уравнения. Исследование квадратного уравнения.

260. Представить левые части следующих уравнений в виде произведений двух множителей, из которых каждый содержит x, найти корни и составить их сумму и произведение:

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
2) $x^2 + 12x - 64 = 0$;
3) $x^2 - 11x + 30 = 0$;
4) $x^2 - 3x - 4 = 0$;
5) $x^2 - 8x + 3 = 0$;
6) $x^2 - 9x + 11 = 0$;
7) $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$;
8) $x^2 + px + q = 0$.

261. 1) Показать, что коэффициенты уравнения $x + px + q = 0$ p и q выражаются через корни уравнения x_1 и x_2 следующим образом (теорема Виета):

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1x_2 = q.$$

2) Как выразятся сумма и произведение корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ через его коэффициенты?

262. Составить квадратное уравнение, если его корни равны:

1) 5 и 7;
2) -3 и -5;
3) -4 и -8;
4) 5 и -5;
5) 8 и -8;
6) -9 и $+9$;
7) 2 и 0;
8) 0 и 6;
9) 0 и $+p$;
10) 0 и $-p$;
11) 0 и $\frac{b}{a}$;
12) 0 и $-\frac{b}{a}$;
13) 5 и 5;
14) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$;
15) $-\frac{p}{2}$ и $-\frac{p}{2}$;
16) 11 и $\frac{1}{11}$;
17) 5 и $-\frac{1}{5}$;
18) $-\frac{1}{6}$ и -6;
19) 73 и -15;
20) $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$;
21) 0,6 и 0,9;
22) $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{3}$;
23) $-\frac{5}{6}$ и $\frac{6}{5}$;
24) $-\frac{7}{8}$ и $\frac{8}{7}$;
25) 0,1 и 0,001;
26) 0,4 и 0,6;
27) 1,8 и $-0,8$;
28) $a+b$ и $a-b$;
29) $\frac{m+n}{2}$ и $\frac{m-n}{2}$;
30) $\frac{m-2n}{n}$ и $\frac{2n-m}{m}$;
31) $\frac{p+q}{p-q}$ и $\frac{q-p}{q+p}$;
32) $1+\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$,
33) $4+\sqrt{3}$ и $4-\sqrt{3}$;
34) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$;
35) $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$;

36) $\frac{-m+\sqrt{n}}{2}$ и $\frac{-m-\sqrt{n}}{2}$; 37) $a+b\sqrt{2}$ и $a-b\sqrt{2}$;

38) $3a+2b\sqrt{5}$ и $3a-2b\sqrt{5}$; 39) $a+b\sqrt{m}$ и $a-b\sqrt{m}$.

263. Разложить на множители:

1) $x^2-40x+391$;
2) $x^2-18x-819$;
3) $x^2-23x+112$;
4) $x^2-31x-180$;
5) $x^2+42x+437$;
6) $x^2-19x-120$;
7) $x^2-17x+72$;
8) $x^2-54x+665$;
9) $x^2-11x-1452$;
10) $x^2-34x+285$;
11) $m^2+21m-442$;
12) $k^2+30k+209$;
13) $y^2-2003y+6000$;
14) $z^2-2z+323$;
15) $a^2+55a+736$;
16) $b^2-80b+1431$;
17) $y^2-37y+342$;
18) $x^2-2ax+a^2-b^2$;
19) $x^2-mx-mn-n^2$;
20) $z^2-2a^2z+a^4-9$;
21) $x^2-2b^2x-a^4+b^4$;
22) $y^2-6ay+9a^2-25b^2$;
23) $10y^2+23y-21$;
24) $3x^2-7x+2$;
25) $10x^2-54x+24{,}5$;
26) $2y^2+y-15$;
27) $6x^2-(3a+2b)x+ab$;
28) $2z^2-21z+10$;
29) $4y^2-4a^2y+a^4-b^4$;
30) $6x^2-35x+49$;
31) $z^2-(2ab+c)z+2abc$;
32) $9z^2+21z-170$.

264. Найти два числа, если среднее арифметическое и среднее геометрическое между ними равны соответственно:

1) 13 и 12, 2) 5 и 4, 3) 8,5 и 16,

4) $2(a^2+b^2)$ и $2ab$, 5) p^2+q^2 и pq, 6) $\frac{m+n}{2}$ и $\sqrt{mn}$.

265. Проверить тождество

$$\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{(a-b)^2}{2};$$

показать на основании его, что среднее арифметическое чисел a^2 и b^2 больше их среднего геометрического.

В каком случае среднее арифметическое может оказаться равным среднему геометрическому?

Указать на чертеже (фиг. 5) среднее арифметическое и среднее геометрическое между AD и DB.

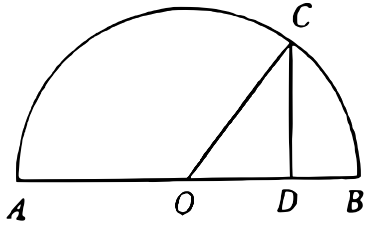


Рис. 5.

На том же чертеже показать, что среднее арифметическое больше среднего геометрического.

266. Показать, что сумма обратных значений корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна $-\frac{p}{q}$.

267. Зная, что корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$ служат x_1 и x_2, составить уравнение, корнями которого служили бы:

1) $1 + x_1$ и $1 + x_2$; 2) $1 - \frac{2}{x_1}$ и $1 - \frac{2}{x_2}$;

3) x_1^2 и x_2^2; 4) $x_1 + \frac{1}{x_2}$ и $x_2 + \frac{1}{x_1}$;

5) $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_2}{x_1}$.

268. Какие значения должны иметь p и q, чтобы $x_1 = p$, $x_2 = q$?

269. Не решая следующих уравнений, указать их корни:

1) $x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1 = 0$; 2) $x^2 + 3\frac{1}{3}x + 1 = 0$;

3) $x^2 - \left(m + \frac{1}{m}\right)x + 1 = 0$; 4) $x^2 - \left(m - \frac{1}{m}\right)x - 1 = 0$;

5) $x^2 - 3\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 0$; 6) $x^2 + 4\frac{1}{5}x + \frac{4}{5} = 0$;

7) $x^2 + 2\frac{2}{3}x - 1 = 0$; 8) $x^2 - 4{,}6x + 2{,}4 = 0$;

9) $x^2 + 1{,}1x + 0{,}1 = 0$; 10) $x^2 + \frac{q^2+1}{q}x + 1 = 0$.

270. Не решая следующих уравнений, указать: 1) какие из уравнений не имеют решений (имеют мнимые корни); 2) какие из уравнений имеют равные корни; 3) какие из уравнений имеют оба корня положительные; 4) какие из уравнений имеют оба корня отрицательные; 5) какие из уравнений имеют корни: один положительный, другой отрицательный.

1) $x^2 - 4x + 4 = 0$; 2) $x^2 - 8x + 20 = 0$;
3) $x^2 + 16x + 48 = 0$; 4) $x^2 - 9x - 22 = 0$;
5) $4x^2 + 6x + 9 = 0$; 6) $4x^2 + 12x + 9 = 0$;
7) $16x^2 + 21x - 22 = 0$; 8) $18x^2 - x - 1 = 0$;
9) $4x^2 + x + 1 = 0$; 10) $12x^2 + 17x + 5 = 0$;
11) $7x^2 - x - 1 = 0$; 12) $14x^2 + 11x - 3 = 0$.

271. При каких значениях a следующие уравнения имеют по два равных корня:

1) $4x^2 + ax + 9 = 0$; 2) $9x^2 + 6x + a = 0$;
3) $ax^2 + 4x + 1 = 0$; 4) $x^2 + ax + b = 0$;
5) $x^2 - 2(1 + 3a)x + 7(3 + 2a) = 0$.

272. Квадратные уравнения были записаны вместе с их корнями; часть записей стерлась (обозначено точками) — восстановить уравнение и найти вторые корни:

1) $x^2-4x=\ldots$; если $x_1=7$, $x_2=\ldots$
2) $x^2+\ldots x=15$; » $x_1=3$, $x_2=\ldots$

273. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b, c, чтобы уравнение $ax^2+bx+c=0$ имело: 1) корни положительные, 2) корни отрицательные, 3) один корень положительный, другой отрицательный?

274. Может ли квадратное уравнение с действительными коэффициентами иметь один корень действительный, другой мнимый?

275. Какое значение должен иметь параметр m, 1) чтобы один из корней уравнения $x^2-7x+m=0$ был равен 5, 2) чтобы уравнение $u^2+20u+m=0$ имело один корень равным -13?

276. Какое значение должен иметь параметр m, если уравнение:

1)	$z^2-2az+m=0$	имеет	одним	корнем	$a-b$;
2)	$z^2-2a^kz+m=0$	»	»	»	a^k+b^k;
3)	$z^2+mz+15=0$	»	»	»	$+3$;
4)	$z^2+mz-18=0$	»	»	»	-3;
5)	$z^2+mz-35=0$	»	»	»	-7;
6)	$z^2+mz-24=0$	»	»	»	$+8$;
7)	$z^2+mz+a^2-b^2=0$	»	»	»	$a+b$;
8)	$z^2+mz+a^2+5a+6=0$	»	»	»	$a+3$;
9)	$mz^2-15z-7=0$	»	»	»	7;
10)	$mx^2+12x-3=0$	»	»	»	$\frac{1}{5}$.

277. Корни уравнения $x^2+3x+k=0$ суть x_1 и x_2; какие значения следует придать параметру k, чтобы

1) $x_1-x_2=6$; 2) $3x_1-x_2=4$; 3) $\frac{x_1}{x_2}=-\frac{2}{5}$;
4) $x_1^2+x_2^2=34$; 5) $x_1^2-x_2^2=30$;
6) уравнение это имело равные корни?

278. При каком соотношении между коэффициентами уравнения $ax^2+bx+c=0$ в нем один корень: 1) в 2 раза больше другого, 2) в 3 раза меньше другого, 3) в n раз больше другого?

279. При каком значении k корни уравнения

$$\frac{x^2-bx}{ax-c}=\frac{k-1}{k+1}$$

равны по абсолютному значению и противоположны по знаку?

280. Определить характер корней уравнения:

$$x^2 + 2(p - q)x + p^2 + q^2 = 0,$$

где p и q суть действительные числа.

281. В следующих уравнениях представить 1) x, 2) y в функциях остальных встречающихся величин:

1) $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

3) $x^2 + xy + y^2 = a$; 4) $(y - b)^2 = 2p(x - a)$;

5) $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$;

6) $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$;

7) $\frac{x^2 + y^2}{2xy} = a$; 8) $\frac{x^2 - y^2}{2xy} = b$.

282. Длина пути, пройденного за время t телом, двигающимся с начальной скоростью c, выражается формулой:

$$s = ct + \frac{gt^2}{2}.$$

Выразить t, как функцию s.

283. Если t_1 и t_2 — времена обращения двух планет, а a_1 и a_2 — наибольшие диаметры их орбит, то $\frac{a_1^3}{t_1^2} = \frac{a_2^3}{t_2^2}$. Выразить t_2 через остальные величины.

284. Между сторонами a, b, c треугольника с углом $p = 60^\circ$ существует соотношение:

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc;$$

выразить 1) b, 2) c через остальные величины.

§ 5. Задачи.

285. Решить уравнения:

1) $(x + 8)(x - 9) = -52$;

2) $(x + 1)(x + 2) = (2x - 1)(2x - 10)$;

3) $(x - 3)(x + 4) + (x + 5)(x - 7) = 19$;

4) $(3x + 19)^2 = (7x - 9)^2$;

5) $x - 6 + (2x + 10)^2 = (3x + 4)^2$;

6) $\frac{5x^2 - 72x + 448}{3x^2 + 56x - 320} = \frac{3}{5}$; 7) $\frac{3x^2 - 8x + 15}{7x^2 - 15x + 27} = \frac{2}{5}$;

8) $\frac{2x^3 - 3x + 10}{3x^3 + 5x^2 - 14} = \frac{2}{3}$; 9) $\frac{3x^3 - 7x^2 - 6}{4x^3 - 31x + 1} = \frac{3}{4}$;

10) $\frac{3x^3 - 5x^2 - 8}{x^2 + 2x - 1} = 3x - 7$; 11) $\frac{2x^3 - 9x^2 + 12}{x^2 - 5x + 3} = 2x - 7$;

12) $\dfrac{x^2-3x+7}{2x^2-3+5x}=\dfrac{x+3}{2x-3}$; 13) $\dfrac{2x^2-7x+5}{3x^2-7x-8}=\dfrac{2x+7}{3x+8}$;

14) $\dfrac{x^2-2x-1}{x^3-3x^2+2x-1}=\dfrac{2x-4}{2x^2-6x+5}$;

15) $\dfrac{x^2-3x-1}{2x^3-5x^2+3x-1}=\dfrac{3x-9}{6x^2-15x+7}$;

16) $\dfrac{4x^2-10x-3}{6x^3-8x^2-x+5}=\dfrac{6x-15}{9x^2-12x+5}$;

17) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}=\dfrac{2x^2-4x-3}{2x^2-6x-2}$;

18) $\dfrac{2x^2-4x+5}{4x^2-6x-3}=\dfrac{3x^2-6x+5}{6x^2-9x-5}$;

19) $2x+\dfrac{1}{x}=3$; 20) $\dfrac{x}{4}-\dfrac{21-x}{4-x}=1$;

21) $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{x-8}{x}=3$; 22) $\dfrac{x}{x-12}-\dfrac{12-x}{x}=\dfrac{26}{5}$;

23) $\dfrac{x}{2(x-1)}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{1}{3}$; 24) $\dfrac{16}{x+7}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2(2x-3)}$;

25) $\dfrac{5x-1}{9}+\dfrac{3x-1}{5}=\dfrac{2}{x}+x-1$;

26) $\dfrac{5x-7}{9}+\dfrac{14}{2x-3}=x-1$; 27) $\dfrac{16-x}{4}-\dfrac{2(x-11)}{x-6}=\dfrac{x-4}{12}$;

28) $\dfrac{6x+4}{5}-\dfrac{15-2x}{x-3}=\dfrac{7(x-1)}{5}$;

29) $\dfrac{2x+2}{18}+\dfrac{12}{x+4}=\dfrac{x-4}{4}+\dfrac{x-2}{6}$;

30) $\dfrac{7}{2x-3}+\dfrac{5}{x-1}=12$; 31) $\dfrac{7-x}{11-2x}+\dfrac{4x-5}{3x-1}=2$;

32) $\dfrac{x^3-10x^2+1}{x^2-6x+9}=x-3$; 33) $\dfrac{x^2-x+3}{x^2-4x+5}=\dfrac{x+3}{x-1}$;

34) $\dfrac{3x}{2}-\dfrac{3x-20}{18-2x}=2+\dfrac{3x^2-80}{2(x-1)}$;

35) $\dfrac{21}{x}-\dfrac{10}{x-2}-\dfrac{4}{x-3}=0$; 36) $\dfrac{5+x}{3-x}-\dfrac{8-3x}{x}=\dfrac{2x}{x-2}$;

37) $\dfrac{2x-3}{x-2}+\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{3x+11}{x+1}$; 38) $\dfrac{2x-1}{x-2}+\dfrac{3x+1}{x-3}=\dfrac{5x-14}{x-4}$;

39) $\dfrac{7}{3(x^2-1)}-\dfrac{2}{5(x+1)}=\dfrac{29}{45}$;

40) $\dfrac{12}{x+1}-\dfrac{10}{x-1}+\dfrac{11}{x}=\dfrac{120}{x^2-1}$; 41) $ax^2-ax=x-1$;

42) $\dfrac{1}{x^2-x-6}+\dfrac{2}{x^2+x-6}=\dfrac{4}{x^2-9}-\dfrac{2}{x^2-4}$;

43) $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$; 44) $a+x=\frac{1}{a}+\frac{1}{x}$;

45) $x-\frac{1}{x}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$; 46) $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$;

47) $\frac{(a-x)^2+(a-b)^2}{(a-x)^2-(x-b)^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; 48) $\frac{ax}{a+x}=x-\frac{9}{4}a$;

49) $\frac{x-a}{bc}-\frac{x+2c}{c(x+c)}=\frac{a+2c}{b(x+c)}$; 50) $\frac{ax^2-bx+c}{xa^2-\beta x+\gamma}=\frac{c}{\gamma}$;

51) $\frac{ax^2-bx+c}{\alpha x^2-\beta x+\gamma}=\frac{a-b+c}{\alpha-\beta+\gamma}$; 52) $\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a-x)-(x-b)}=\frac{a^3-b^3}{a+b}$;

53) $\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a-x)^2+(x-b)^2}=\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}$;

54) $\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a-x)^2+(x-b)^2}=a-b$; 55) $\frac{ax+b}{bx+a}=\frac{bx-a}{ax-b}$;

56) $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2-\frac{7}{2}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+3=0$; 57) $\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^2-2\left(\frac{a+x}{b+x}\right)-3=0$;

58) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2=8\cdot\frac{a-x}{x-b}-15$; 59) $\frac{a+x}{b+x}+\frac{b+x}{a+x}=\frac{5}{2}$;

60) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=\frac{x+1}{\sqrt{x+4}}$;

61) $\sqrt{x+3}-\sqrt{5x-25}=\frac{8}{\sqrt{x+3}}$;

62) $\sqrt{x+15}-\sqrt{5x-77}=\frac{16}{\sqrt{x+15}}$;

63) $\sqrt{x+5}-\frac{24}{\sqrt{x+5}}+\sqrt{5x-63}=0$;

64) $\sqrt{x+12}-\frac{10}{\sqrt{x+12}}=\sqrt{5x-56}$;

65) $\sqrt{x-7}+\frac{4}{\sqrt{x-7}}=\sqrt{2x+9}$;

66) $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x-5}=\frac{6}{\sqrt{x-5}}$;

67) $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2a}$;

68) $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=2\sqrt{a}$;

69) $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$;

70) $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{2}$;

71) $\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}=2$;

72) $\sqrt{37+x}+\sqrt{37-x}=12$;

73) $2\sqrt{5+x}+\sqrt{9-3x}=\sqrt{41-3x}$;

74) $\sqrt{37-3x}-\sqrt{13-3x}=2\sqrt{5+x}$;

75) $\sqrt{5+x}-\sqrt{25-3x}=2\sqrt{5-x}$;

76) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-2}=\sqrt{3x+20}$;

77) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-10}=2\sqrt{x-2}$;

78) $2\sqrt{2x-6}-3\sqrt{x-10}=\sqrt{x+6}$;

79) $\sqrt{13x-30}-3\sqrt{x-2}=2\sqrt{x-3}$;

80) $\sqrt{a+4b+4x}-\sqrt{a+4b-4x}=4\sqrt{b}$;

81) $\sqrt{5x+4a-3b}+\sqrt{5x-4a-3b}=2\sqrt{x+b}$;

82) $\sqrt{14x-13a+2b}-\sqrt{6x+3a-6b}=4\sqrt{2x-a-b}$;

83) $\sqrt{a+7b-x}+2\sqrt{7a+b-x}=\sqrt{21a+3b+3x}$;

84) $\dfrac{\sqrt{2x+a}+\sqrt{2x-2a}}{\sqrt{2x+a}-\sqrt{2x-2a}}=\dfrac{3a}{2x+a}$;

85) $\sqrt{(39-x)(21+x)}-\sqrt{(39+x)(21-x)}=6$.

§ 6. Исследование функции второй степени

(квадратного трехчлена).

286. Построить кривую, ординаты всех точек которой больше ординат кривой $y=x^2$ на:

1) 2; 2) 4; 3) 6; 4) -1; 5) -4; 6) -5.

287. Каким перемещением параболы $y=x^2$ в плоскости чертежа могут быть получены построенные кривые? В каждом из случаев составить выражения функций, имеющих своей графикой построенную кривую.

288. Перенести параболу $y=x^2$ 1) вверх на 3 единицы; 2) вверх на 5; 3) вниз на 1; 4) вниз на 1,5 и составить в каждом случае выражение соответствующей функции.

289. Построить графики функций:

1) $y=x^2-1$; 2) $y=x^2+1$;
3) $y=x^2-2$; 4) $y=x^2+2$.

Найти точки пересечения каждой кривой с осью x и сравнить получаемые при этом результаты с результатами решения уравнений:

1) $x^2-1=0$; 2) $x^2+1=0$;
3) $x^2-2=0$; 4) $x^2+2=0$.

290. При каких значениях x функции

1) $y = x^2 - 1$; 2) $y = x^2 + 1$;
3) $y = x^2 - 2$; 4) $y = x^2 + 2$

имеют наименьшее значение (minimum)? Найти это наименьшее значение. Указать точки, координатами которых являются найденные значения x и y. Пояснить на чертеже смысл полученного результата. На основании чертежа и на основании выражения функции выяснить в каждом случае, имеет ли функция наибольшее значение.

291. Найти вершину параболы:

1) $y = x^2 - 4$; 2) $y = x^2 + 9$;
3) $y = x^2$; 4) $y = x^2 - 0{,}01$.

292. Как располагается вершина параболы $y = x^2 + q$: 1) относительно оси ординат; 2) оси абсцисс, и какое значение при этом имеет q, если: а) парабола пересекает ось x; б) не пересекает оси x; в) касается оси x?

293. Построить кривую, все точки которой имеют те же ординаты, что и кривая $y = x^2$, а абсциссы больше их абсцисс на:

1) 1; 2) -1; 3) 4; 4) -4; 5) 0,5; 6) $-0{,}5$.

Каким перемещением в плоскости параболы $y = x^2$ может быть получена в каждом случае построенная кривая? Составить в каждом случае выражение функции, имеющей своей графикой построенную кривую.

294. Перенести параболу $y = x^2$ на 1) 2, 2) 5, 3) $2\frac{1}{2}$ вправо, на 4) 4, 5) 10, 6) 0,5 влево. Какая функция соответствует перенесенной кривой в каждом отдельном случае?

295. Построить графики функций

1) $y = (x - 3)^2$; 2) $y = (x + 1)^2$;
3) $y = (x - 0{,}3)^2$; 4) $y = x^2 - 4x + 4$;
5) $y = x^2 + 10x + 25$; 6) $y = x^2 - x + \frac{1}{2}$.

Указать для каждой из этих функций: 1) ее нулевые значения, если они существуют; 2) значение x, при котором функция имеет наименьшее значение; указать координаты вершины параболы, представляющей графику функции. Имеют ли заданные функции наибольшее значение (maximum) или нет? Почему?

296. При каком значении q функция $y = x^2 + px + q$ представляет квадрат двучлена (полный квадрат)? Как располагается в этом случае вершина параболы: 1) относительно оси x; 2) относительно оси y: а) при $p > 0$; б) $p < 0$; в) $p = 0$?

297. Параболу $y = x^2$ перенести:

1) на 2 единицы вверх и на 4 вправо,
2) на 1 вниз и на 2 влево;
3) на 4 вниз и на 3 вправо;
4) на 9 вниз и на 5 влево;
5) на 2,25 вниз и на 1 вправо;
6) на 2 вниз и на 1 влево;
7) на m вниз и на n вправо.

В каждом случае составить выражения функции и определить нулевые значения как графически, так и путем вычисления.

298. Указать, каким перемещением параболы $y = x^2$ получается каждая из кривых:

1) $y = (x - 2)^2 + 3$; 2) $y = (x + 4)^2 - 8$;
3) $y = x^2 - 8x + 7$; 4) $x = x^2 + 8x + 7$;
5) $y = x^2 + 4x - 12$; 6) $y = x^2 - 4x - 12$;
7) $y = x^2 + px + q$.

Найти в каждом случае наименьшее значение функции, а также координаты вершины параболы.

299. Найти значение коэффициентов p и q функции $y = x^2 + px + q$,

1) если функция обращается в нуль лишь при $x = 3$;
2) если графика функции касается оси x в точке (5,0);
3) если наименьшее значение функции равно 0, и она принимает его при $x = -1$;
4) если функция принимает наименьшее свое значение 4 при $x = 0$; при каких значениях x функция принимает значение 0?
5) если функция принимает свое наименьшее значение -9 при $x = 0$; при каких значениях x функция принимает значение 0?
6) если функция принимает свое наименьшее значение $+4$ при $x = 3$; при каких значениях x она обращается в 0?
7) если функция принимает свое наименьшее значение -4 при $x = 2$; в каких точках ее графика пересекает ось x?
8) если один корень функции 0, а другой равен: а) 6, б) -3, в) 1,4, г) m; найти для каждого случая минимальное значение функции и положение вершины соответственной параболы.

300. Целая функция второй степени $y = x^2 + px + q$ обращается в нуль при $x =$

1) -1 и $+1$;	2) -5 и $+5$;
3) $+2$ и $+4$;	4) -2 и -4;
5) -2 и $+3$;	6) $+4$ и -1;
7) $+m$ и $-m$;	8) m и n.

Определить в каждом случае положение вершины соответствующей параболы и найти выражение функции.

301. Найти выражение функции $y = x^2 + px + q$, если

1) при $x = 1$ она принимает значение 3; а при $x = -1$ значение -3;
2) при $x = -2$ она принимает значение -2, а при $x = 2$ значение 2;
3) при $x = 7$ она принимает значение 0, а при $x = 3$ значение 3.

В каждом случае найти минимальное значение функции.

302. При каких значениях k трехчлен
$(k-1)x^2 - 2(k+1)x + (k-2)$ представляет полный квадрат?

303. При каких значениях λ выражение

$(x-a)^2 - \lambda(x-b)(x-c)$ есть полный квадрат?

304. При каком значении k наименьшее значение функции $x^2 - 2kx + k$ равно -2?

305. Указать границы, в которых может изменяться x, чтобы при этом выполнялось неравенство:

1) $x^2 - 4 < 0$;	2) $x^2 > 25$;	3) $(x-5)^2 \geq 25$;
4) $x^2 + 4x + 4 \geq 0$;	5) $x^2 - 6x + 9 < 0$;	6) $y^2 + 5x + 6 < 0$;
7) $x^2 - 5x + 6 > 100$;	8) $x^2 + px + q > 0$;	9) $x^2 + px + q < 0$.
	10) $x^2 + px + q > A$.	

306. Указать относительно функции $y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$; 1) чему равно ее наименьшее значение и при каком значении x она его принимает? 2) При каком значении дискриминанта $\frac{p^2}{4} - q$ функция имеет: а) одно нулевое значение; б) два; в) ни одного? 3) Есть ли среди значений функции наибольшее значение или всегда можно найти такие значения x, при которых она оказывается больше любого заданного числа?

307. Складывая ординаты график функций $y=x^2$ и $y=px+q$, построить кривую $y=x^2+px+q$, если

1) $p=0,\ q=3$; 2) $p=0,\ q=-2$;
3) $p=3,\ q=0$; 4) $p=-3,\ q=0$;
5) $p=2,\ q=5$; 6) $p=-5,\ q=6$.

308. Определить графически корни следующих уравнений:

1) $x^2-4x=0$; 2) $x^2-\frac{x}{2}=8$;
3) $x^2-2x+2=0$; 4) $x^2-6x+4=0$;
5) $x^2-7x+12=0$; 6) $x^2-8x+12=0$;
7) $x^2-x-12=0$; 8) $x^2+x-12=0$.

309. Определить графически, пересекая параболу $y=x^2$ прямой линией, корни следующих уравнений (можно воспользоваться фиг. 3, стр. 268).

1) $x^2=x+2$; 2) $x^2=5x-4$;
3) $x^2+2=3x$; 4) $x^2=4x-3$;
5) $x^2+2x=1$; 6) $x^2-4x+3=0$;
7) $3x^2-x-4=0$; 8) $2x^2+2x=2$.

310. Построить графику функции $y=-x^2$. Чем отличается графика этой функции от параболы $y=x^2$? Существует ли такое значение x, при котором функция $y=-x^2$ принимает минимальное значение, или нет? Существует ли такое значение x (и если существует, то какое), при котором функция $y=-x^2$ принимает максимальное значение?

311. Построить графику функции $y=-(x^2+px+q)$, если

1) $p=0,\ q=4$; 2) $p=0,\ q=-4$;
3) $p=4,\ q=4$; 4) $p=-4,\ q=3$.

312. Может ли и при каком значении x трехчлен

$$y=-(x^2+px+q)=-\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)\right]$$

принять 1) минимальное значение, 2) максимальное значение? Почему?

313. Найти наибольшие или наименьшие значения функций:

1) $y=x^2-6x+9$; 2) $y=x^2-4x+11$;
3) $y=-(x^2+14x-9)$; 4) $y=-x^2-8x-1$.

314. При выполнении каких условий совпадают параболы:

1) $y=x^2+a$ и $y=x^2+b$;
2) $y=ax^2+b$ и $y=cx^2+d$;
3) $y=x^2+ax$ и $y=x^2+bx$;

4) $y = x^2 + ax$ и $y = bx^2 + x$;
5) $y = x^2 - ax$ и $y = -bx^2 + x$;
6) $y = ax^2 + bx + c$ и $y = mx^2 + nx + p$;
7) $y = ax^2 + x + c$ и $y = x^2 + nx$?

315. Найти функцию $y = ax^2 + bx + c$, которая принимает те же значения, что и

1) $y = x^2 - x + 1$ при $x = 0, 1, 2$;
2) $y = 4x^2 - 4$ $\quad x = 1, -1, 0$;
3) $y = -2x^2 - 7x + 1$ $\quad x = -5, -1, 2$.

316. Решить неравенства:

$4x^2 - 4x + 1 > 0$; $\quad 9x^2 - 6x + 1 > 0$;
$5x^2 - 9x + 4 < 0$; $\quad -x^2 + 5x - 6 > 0$;
$-x^2 + 6x + 5 > 0$; $\quad -4x^2 + 6x + 4 < 0$.

317. При каких значениях x следующие функции принимают наибольшее или наименьшее значение?

1) $y = 4(x^2 - 2x + 1)$; $\quad$ 2) $y = -3(x^2 - 6x + 5)$;
3) $y = 3x^2 + 10x + 3$; $\quad$ 4) $y = -3x^2 + 10x - 3$;
5) $y = 6x^2 - 3x - 3$; $\quad$ 6) $y = -4x^2 - 6x + 1$.

318. При каком значении k функция $y = x^2 - 2(k + 1)x + 1$ имеет своим наибольшим значением 5?

319. Какие значения должны иметь корни уравнения:

1) $x^2 - 6x + q = 0$; $\quad$ 2) $x^2 + 7x + q = 0$;
3) $x^2 + px + q = 0$,

чтобы q приняло наибольшее возможное для него значение? Чему равно это значение q?

320. Какие значения должны принять корни уравнения:

1) $x^2 - px + 9 = 0$ $\quad (p > 0)$,
2) $x^2 - px + 12 = 0$
3) $x^2 - px + q = 0$,

чтобы p приняло наименьшее возможное для него значение?

321. Какие значения должны иметь два числа, чтобы, при заданной их сумме, произведение их имело наибольшее из возможных для него значений?

322. Какие значения должны иметь два числа, чтобы, при заданном их произведении, их сумма приняла наименьшее из возможных для нее значений?

323. 1) Исследовать решение уравнения $(1 - \lambda)x^2 + px + q = 0$ при постоянных p и q и изменении λ в пределах от 0 до 2.

2) Исследовать решения уравнения $ax^2+bx+c=0$ при постоянных b и c и неограниченном приближении a к 0. (Указание: ввести новое неизвестное $y=\frac{1}{x}$, выяснив при этом характер изменения y с изменением x и обратно; сравнить с приемом решения задачи 256.)

Графическим представлением функции $y=x^2$ служит кривая, носящая название *параболы.* Ось y служит осью симметрии параболы, так как противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y(y не меняет своего значения при перемене x на $-x$). Ось симметрии параболы называется ее *осью.* Точка пересечения параболы с ее осью называется *вершиной* параболы. Функция $y=x^2$ достигает своего наименьшего значения (minimum'a), в вершине параболы — при $x=0$: это наименьшее значение функции $y=x^2$ равно нулю; при всех других значениях x, как положительных, так и отрицательных, функция имеет значения большие нуля. В точке $(0,0)$ парабола $y=x^2$ касается оси x.

Функция $y=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$ имеет своим графическим представлением ту же параболу, но смещенную в плоскости координат так, что вершина ее находится в точке $\left[-\frac{p}{2},-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)\right]$, а ось паралельна оси y. Функция достигает своего minimum'a при $x=-\frac{p}{2}$; minimum этот равен $-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$. Таким образом координаты вершины параболы представляют значения функции и независимой переменной, соответствующие ее minimum'y.

Функция $y=-x^2$ имеет своим геометрическим представлением параболу, симметричную параболе $y=x^2$ относительно оси x. Все значения этой функции отрицательны за исключением значения 0, которое функция принимает в вершине параболы при $x=0$. Это значение функции является ее maximum'ом (наибольшим значением).

Функция $y=-x^2-px-q$, значения которой противоположны значениям функции $y=x^2+px+q$, имеет своим геометрическим представлением параболу, симметричную относительно оси x параболе, изображающей эту функцию. Она достигает своего maximum'a, равного $\frac{p^2}{4}-q$ при $x=-\frac{p}{2}$.

Функция $ax+bx+c=a\ (x^2+px+q)$ получается умножением значений функции x^2+px+q на число $a\left(p=\frac{b}{a},\ q=\frac{c}{a}\right)$, графика этой функции может быть получена из графики функции $x+px+q$ изменением ординат последней в одном и том же отношении (изменением масштаба ординат), при чем при отрицательном значении a, кроме изменения масштаба, приходится менять направление ординат на противоположное. При положительном a функция $ax^2 + bx + c$ имеет minimum, а при отрицательном a maximum, равный $-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, при $x=-\frac{b}{2a}$.

Геометрический смысл решения уравнения $x^2+px+q=0$ или $ax^2+bx+c=0$ сводится к отысканию точек пресечения параболы $y=x^2+px+q$ (или $y=ax^2+bx+c$) с осью x. Если дискриминант уравнения $\frac{p^2}{4}-q$ (или b^2-4ac), равный (пропорциональный) по своему значению числу, противоположному ординате вершины параболы, положителен, то функция имеет отрицательный minimum (или положительный maximum), а парабола пересекает ось x в двух точках; точки эти симметричны друг другу относительно прямой $x=-\frac{p}{2}$ (оси параболы), так как их ординаты равны 0, и на основании теоремы Виета полусумма абсцисс $=-\frac{p}{2}$, а если дискриминант равен нулю, то minimum (maximum) функции равен 0, а парабола касается оси x в своей вершине (уравнение имеет равные корни); если дискриминант отрицателен, то функция имеет положительный minimum (или отрицательный maximum), и кривая не пересекает оси x (уравнение имеет мнимые корни).

При неограниченно убывающем a парабола $y=ax^2+bx+c$ неограниченно приближается к прямой $bx+c$, абсцисса одной из точек пересечения параболы с осью x стремится к пределу $-\frac{a}{c}$, а абсцисса другой точки неограниченно возрастает по своему абсолютному значению. Последнее обстоятельство кратко выражается в следующей форме: при $a=0$ один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ равен ∞ (бесконечности), а другой $-\frac{c}{b}$.

§ 7. Задачи на составление уравнений 2-ой степени с одним неизвестным.

324. 1) Произведение четвертой и пятой долей некоторого числа равно 500. Найти это число.

2) Произведение третьей доли некоторого числа на число, в 5 раз его большее, равно 540. Найти это число.

3) Произведение суммы некоторого числа и единицы на разность между тем же числом и единицей равно 360. Определить это число.

4) Если к искомому числу прибавить 7, а затем от него отнять семь, то сумма квадратов полученных результатов равна 1066. Определить число.

5) Квадрат суммы двух последовательных целых чисел равен 529. Найти эти числа.

6) Найти два числа, если известно, что одно из них на столько больше 100, на сколько другое меньше 100, а произведение этих чисел равно 9831.

7) Сумма квадратов двух чисел, из которых одно на столько больше 58, на сколько другое меньше этого числа, равна 6970. Найти эти числа.

8) Сумма квадратных корней из двух чисел, из которых одно на столько больше 37, на сколько другое меньше 37, равна корню квадратному из 74. Найти эти числа.

9) Решить предыдущую задачу, заменяя 37 числом 58 и полагая сумму корней равной четырнадцати.

10) Найти число, если известно, что число, в 29 раз большее искомого, превышает его квадрат на 190.

11) Если искомое число умножить на 10, то получится число, которое на 999 меньше квадрата искомого числа. Определить число.

12) Разложить 53 на два слагаемые, произведение которых равно 612.

13) Разложить 42 на два слагаемые, произведение которых 441.

14) Разложить $a^2 + b^2$ на два слагаемые, произведение которых равно $\frac{1}{4}(a^4 + a^2b^2 + b^4)$.

15) Разложить 384 на два множителя, разность между которыми равна 8.

16) Разложить 2268 на два множителя, сумма которых равна 99.

17) Сумма квадратов двух чисел, из которых одно больше другого на 12, равна 1130; найти эти числа.

18) На сколько следует увеличить каждый из сомножителей произведения $24 \cdot 20$, чтобы произведение увеличилось на 540?

19) Определить два числа, зная, что их произведение равно 900, а частное 4.

20) Два числа находятся в отношении $5 : 4$. Если каждое из них увеличить на 15, то разность квадратов вновь полученных чисел будет равна 999. Найти эти числа.

21) Разложить 36 на две части, произведение которых относилось бы к сумме их квадратов, как $3 : 10$.

22) Разложить 70 на две части, произведение которых относилось бы к разности их квадратов, как $6 : 5$.

23) Если $4\frac{1}{2}$ разделить на неизвестное число, то частное окажется равным разности между $4\frac{1}{2}$ и этим числом. Найти это число.

24) Какое число при делении на 5 дает в результате единицей больше, чем при делении 360 на искомое число?

25) Произведение двух чисел равно 2744, а частное $1\frac{1}{7}$. Найти эти числа.

26) Сумма двух чисел равна 40, а сумма квадратов относится к разности квадратов, как $17:8$. Определить эти числа.

27) Разложить 900 на два таких слагаемых, чтобы сумма их обратных значений была равна обратному значению числа 221.

28) При увеличении произведения двух чисел на их сумму в результате получается 999. Найти эти числа, если известно, что первое больше второго на 15.

29) Знаменатель дроби на 4 больше числителя; если числитель уменьшить на 3, а знаменатель увеличить на то же число, то полученная дробь будет в два раза меньше первоначальной. Найти дробь.

30) Сумма числителя и знаменателя дроби равна 100; если бы числитель был на 18 больше, а знаменатель на 16 меньше, то значение дроби было бы в 2 раза больше первоначального. Найти эту дробь.

31) Разность двух дробей, имеющих числителем единицу, равна $\frac{1}{20}$, а сумма их знаменателей равна 42. Найти эти дроби.

32) Сумма дробей равна $\frac{2}{5}$, числитель первой дроби 1, числитель второй 3, сумма знаменателей 48. Найти эти дроби.

33) Произведение двух дробей равно $\frac{1}{4}$, разность их знаменателей 4; числитель дроби, имеющей больший знаменатель, на 7 меньше своего знаменателя, а числитель другой дроби на 1 меньше своего знаменателя. Найти эти дроби.

34) Дробь, у которой числитель на 1 меньше знаменателя, будучи сложена с обратною ей дробью, т.-е. имеющею числителем знаменатель, а знаменателем числитель первой, дает в сумме $2\frac{1}{6}$. Найти эту дробь.

35) Между 50-ю и 10-ю есть число, обладающее следующими свойствами: отношение разностей между искомым числом и данными числами равно отношению сумм искомого с числами 94 и 10. Найти это число.

36) Найти двузначное число, в котором число десятков на 3 больше числа единиц; если число умножить на сумму его цифр, то получится 814.

37) Найти двузначное число, зная, что сумма его цифр равна 10; если цифры числа переставить и вновь полученное число умножить на первоначальное, то получится 2944.

38) Сумма двух чисел равна 200. Если к квадратному корню из первого числа прибавить второе, то получится 44. Найти эти числа.

39) Сумма двух чисел равна 290; сумма квадратных корней из этих чисел равна 24. Найти эти числа.

40) Трехзначное число, изображенное одинаковыми цифрами, по разделении его на произведение его цифр дает в частном $12\frac{1}{3}$. Найти это число.

41) Сумма двух чисел равна 40, сумма кубов этих чисел равна 17080. Найти эти числа.

42) Разность двух чисел равна десяти, разность их кубов равпа 20530. Найти эти числа.

43) Разность кубов двух последовательных чисел равна 7. Определить эти числа.

44) Сумма двух чисел 7110, сумма кубичных корней из этих чисел 30. Найти числа.

45) Найти три последовательных числа, произведение которых равно их сумме.

46) Если произведение трех целых последовательных чисел разделить сперва на первое из них, потом на второе и, наконец, на третье и полученные частные сложить, то получится 26. Найти эти числа.

47) При каком основании системы счисления число 7 оказывается записанным в виде 111?

48) При каком основании системы счисления число 81 изобразится в виде 311?

Планиметрические задачи.

325. 1) Определить диагональ квадрата, если его периметр равен 1) 100 *см*, 2) a.

2) Диагональ квадрата равна 1) 100 *см*, 2) a; определить сторону.

3) Радиус круга равен 100 *см*; определить сторону вписанного квадрата.

4) Отношение метра к аршину, вычисленное с точностью до 0,001, равно 1,406. Указать ошибку, которую мы сделаем, если примем метр равным диагонали квадрата со стороною в аршин.

5) Периметр вписанного в круг квадрата равен 20 *см*. Определить диаметр круга.

6) Сторона вписанного в круг квадрата равна 20 *см*. Определить сторону описанного квадрата.

7) Диагональ квадрата на 5 *см*. больше его стороны. Определить сторону.

8) Сумма стороны и диагонали квадрата равна 10 *см*. Определить площадь квадрата.

9) Определить диаметр круга, если сторона квадрата, вписанного в этот круг, на метр больше радиуса.

10) При увеличении стороны квадрата на 1) 3 *см*, 2) *a см* площадь его увеличивается в 4 раза. Определить первоначальную длину стороны квадрата.

11) Периметры двух квадратов дают в сумме: 1) 40 *см*, 2) *a см*, суммы площадей равны соответственно: 1) 58 $см^2$, 2) b $см^2$. Определить стороны квадратов.

12) В квадрат вписан равносторонний треугольник так, что одна из его вершин совпадает с вершиной квадрата, а две другие лежат на сторонах его. 1) Определить сторону равностороннего треугольника, если сторона квадрата a. 2) Определить сторону квадрата, если сторона треугольника равна b.

13) Стороны прямоугольника относятся, как 12 : 5; определить стороны, если диагональ равна 29,9 *см*.

14) Площадь прямоугольника равна 1440 кв. метрам. Как велики его стороны, если одна длиннее другой на 18 метров?

15) Сумма двух неравных сторон прямоугольника равна 18,4 *дм*, а площадь равна 84 $дм^2$. Определить стороны.

16) Сад имеет вид прямоугольника, длина которого на 2 метра больше ширины, а диагональ 58 *м*. Определить площадь сада.

17) Одна из сторон прямоугольника на 19 метров больше другой. Если бы меньшая была на $\frac{1}{4}$ своей длины больше, а большая на $\frac{1}{3}$ меньше, то площадь всего прямоугольника оказалась бы на 1320 кв. метров меньше. Найти стороны.

18) Периметр прямоугольника равен 78 *м*, а площадь 350 $м^2$. Определить стороны.

19) Полупериметр прямоугольника равен *p см*, а площадь равна площади квадрата со стороною в *m см*. Чему равны стороны?

20) Найти прямоугольник, равновеликий квадрату со стороною в 6 *см*, если разность сторон прямоугольника равна 9 *см*.

21) Найти прямоугольник, равновеликий квадрату со стороною *m см*, если разность сторон прямоугольника равна *d см*.

22) Площадь прямоугольника, бо̀льшая сторона которого на 99 метров больше другой стороны, не изменится, если бо̀льшую сторону сделать равной 972 метрам, а меньшую сторону уменьшить на 133 метра. Определить площадь и стороны прямоугольника.

23) Внутри одного прямоугольника со сторонами 50 *м* и 48 *м* помещен другой так, что расстояние между их сторонами везде

одинаково. Площадь полученной рамки в 19 раз больше площади меньшего прямоугольника. Определить ширину рамки и ее площадь.

24) Вокруг грядки, имеющей форму прямоугольника со сторонами в 3 метра и 4 метра, следует положить газон одинаковой ширины, площадь которого должна быть в 10 раз больше площади самой грядки. Определить ширину газона.

25) Размеры прямоугольной клумбы равны 4,5 *м* и 2 *м* 37,5 *см*. Определить ширину дернового бордюра, если он покрывает $\frac{3}{19}$ всей площади клумбы.

26) Длина и ширина прямоугольной клумбы равны соответственно 2,5 *м* и 1,5 *м*; площадь, занятая цветами, равна $2\frac{13}{16}$ *м*^{2}. Определить ширину дернового бордюра по краям клумбы.

27) План дома имеет вид прямоугольника; длина дома равна 21 *м*, ширина 10 *м*. Во сколько кирпичей построен дом, если площадь дома внутри, включая перегородки, равна 180 *м*^{2} (ширина стен в «кирпичах» определяется числом кирпичей, которое можно положить поперек стены, кладя кирпичи их длинной стороной), если размеры кирпича: 28 *см*, 14 *см*, 7 *см*?

326. 1) Катеты прямоугольного треугольника относятся между собой, как 3 : 4. Определить длину катетов, если гипотенуза равна 555 *м*.

2) Площадь прямоугольного треугольника содержит 216 кв. метров, сумма катетов равна 42 *м*. Определить длину катетов.

3) Определить площадь прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза больше одного из катетов на 49 футов и больше другого на 18 футов.

4) Определить периметр прямоугольного треугольника, площадь которого равна 24 *м*^{2} и один из катетов составляет $\frac{3}{4}$ другого.

5) Определить площадь прямоугольного треугольника, в котором сумма катетов равна 127 фут., а гипотенуза больше одного из них на 1 фут.

6) Определить стороны прямоугольного треугольника, в котором разность катетов равна 2 футам, а гипотенуза больше меньшего катета на 18 футов.

7) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 37 *м*, а сумма катетов 47 *м*. Определить катеты.

8) Гипотенуза 17 *м*, а разность катетов 7 *м*. Определить катеты.

9) Периметр прямоугольного треугольника равен 60 футам, а гипотенуза 26 футам. Определить катеты.

10) Один из катетов на 49 метров меньше гипотенузы и на 31 метр меньше другого катета. Определить все три стороны.

11) Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 46 единицам длины, сумма гипотенузы с одним из катетов равна 50 единицам длины. Определить стороны.

12) Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла треугольника на гипотенузу, равен 9,6 метра; разность отрезков гипотенузы равна 5,6 метра. Определить стороны.

13) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна a, соответствующая ей высота h. Определить отрезки гипотенузы. Вычислить отрезки, полагая $a = 34$ *см*, $h = 15$ *см*.

14) Сумма диагоналей ромба, сторона которого равна $10\frac{1}{4}$ *см*, равна 19 *см*. Найти длину диагоналей.

15) Каждая из равных сторон равнобедренного треугольника равна 35 футам, а высота меньше основания на 14 футов. Найти основание и высоту.

16) В равнобедренном треугольнике основание на 2 *см* длиннее соответственной высоты. Периметр треугольника равен 13 *см*. Определить боковые стороны треугольника.

17) Стороны треугольника равны 49 *м*, 36 *м* и 51 *м*. Определить длину биссектрисы угла, противолежащего большей стороне.

18) Определить биссектрису угла треугольника, если противолежащая сторона равна 78 *м*, остальные же две стороны равны 81 *м* и 49 *м*.

19) Стороны треугольника равны: 1) $a = 15$ *м*, $b = 13$ *м* и $c = 14$ *м*; 2) $a = 39$ *м*, $b = 41$ *м* и $c = 50$ *м*. Определить медиану стороны c.

20) Площадь трапеции равна 221 кв. метру; одна из параллельных сторон на 6 метров больше другой, а высота на 7 метров меньше большей из параллельных сторон. Определить высоту и каждую из параллельных сторон.

327. 1) Определить число сторон многоугольника, имеющего 1) 54, 2) 20, 3) n диагоналей.

2) Какой многоугольник имеет на 12 диагоналей больше, чем сторон?

328. 1) Если диаметр круга увеличить на 3 *см*, то площадь круга удвоится. Определить первоначальный диаметр круга.

2) Диаметр круга равен 13 дюймам; перпендикуляр, опущенный на него из точки, находящейся на окружности, равен 6 дюймам. Определить отрезки диаметра.

3) Две секущие проведены из одной точки, взятой вне круга; внутренний отрезок первой равен 47 метрам, а внешний 9-ти;

внутренний отрезок второй секущей па 72 метра больше внешнего ее отрезка. Определить длину второй секущей.

4) Секущая и касательная проведены из одной точки, взятой вне круга; сумма их равна 84 *см*; внешний отрезок секущей на 9 *см*. меньше касательной. Определить длину каждой из этих двух линий.

5) Определить радиус внешнего круга, если он в два раза больше радиуса внутреннего круга, а площадь кольца между окружностями равна 100 *см*^{2}.

6) Хорда удалена от центра на 1) 10 *см*, 2) *a см*. Найти длину хорды, если она на 1) 4 *см*, 2) *b см* больше радиуса.

7) Из точки, удаленной от центра на 1) 8 *см*, 2) *d см*, проведена касательная. Определить длину касательной, если радиус равен 1) 1 *см*, 2) *a см*. Определить длину радиуса, если касательная равна 1) 6 *см*, 2) *b см*.

8) Из данной точки проведены касательная и секущая к данному кругу. Касательная равна 32 *см*, образовавшаяся хорда равна 4,8 см. Определить длину секущей.

9) Разделить в крайнем и среднем отношении (т.-е. на две такие части, чтобы большая представляла среднее геометрическое между всем отрезком и меньшею частью) отрезок в 1) 1 *м*, 2) 17 *см*.

10) В правильном десятиугольнике сторона равна большему отрезку радиуса описанного круга, разделенного в крайнем и среднем отношении. Найти радиус, если сторона десятиугольника равна 5 *см*.

Задачи из стереометрии.

329. 1) Три измерения прямоугольного параллелепипеда находятся в отношениях 3 : 4 : 5. Поверхность его равна 376 *см*^{2}. Найти ребра.

2) Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 1) 3 *м*, 4 *м* и 12 *м*; 2) 21 *см*, 16 *см* и 12 *см*. Определить его диагональ.

3) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 12 *м* и 9 *м*, диагональ параллелепипеда равна 17 *м*. Найти высоту параллелепипеда.

4) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 12 *см* и 16 *см*, диагональ параллелепипеда равна 25 *см*. Определить высоту параллелепипеда.

5) Сумма объемов двух кубов равна 9990 *см*^{3}. Определить ребра каждого из кубов, если сумма этих ребер равна 30 *см*.

6) Разность объемов двух кубов содержит 9970 *см*^{3}. Опре-

делить каждый из объемов, если разность ребер обоих кубов равна 10 *см.*

7) Из железного листа приготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам вырезано по квадрату со стороной в 4 *дм* и края обрезов склепаны; какого размера был железный лист, если длина его вдвое больше ширины и если объем коробки оказался равным 768 *см*^{3}?

330. 1) Определить толщину (диаметр поперечного сечения) медной проволоки, если 5 *м* ее весят 26 *г* (удельный вес меди 8,8).

2) Высота прямого цилиндра на 3 *см* больше диаметра основания. Определить объем, если боковая поверхность равна 28π *см*^{2}.

3) Диаметр основания прямого цилиндра на 5 *см* меньше его высоты. Определить объем, если боковая поверхность равна 84π *см*^{2}.

4) Образующая прямого конуса равна 5 *см*, боковая поверхность 36π *см*^{2}. Определить объем.

5) Отношение высоты прямого круглого конуса к диаметру основания равно 2 : 3. Определить высоту и диаметр, если полная поверхность конуса равна 24π *см*^{2}.

6) Полная поверхность прямого круглого конуса, высота которого 8 *см*, равна 96π *см*^{2}. Определить радиус основания.

331. 1) Ребро тетраэдра равно а) 5 *см*, б) *a см*. Определить поверхность.

2) Поверхность тетраэдра равна а) 100 *см*^{2}, б) *a см*^{2}. Определить ребро.

3) Ребро октаэдра равно а) 5 *см*, б) *a см*. Определить поверхность.

4) Поверхность октаэдра равна а) 100 *см*^{2} б) *a см*^{2}. Определить ребро.

5) Тетраэдр и октаэдр имеют равновеликие поверхности. В каком отношении находятся ребра?

6) Октаэдр и куб имеют равновеликие поверхности. Определить отношение ребер.

Задачи смешанного характера.

332. 1) Некто купил сукна на 100 р.; при покупке такого же сукна во второй раз ему сделали уступку по 50 коп. на каждый метр, вследствие чего он получил на 100 рублей десятью метрами больше, чем в первый раз. Сколько метров сукна куплено было им в первый раз?

2) На 1 рубль куплены тетради. Если бы каждая тетрадь стоила копейкой дешевле, то тетрадей было бы куплено на 5 больше. Что стоила тетрадь?

3) Если скорость поезда на расстоянии 1200 километров увеличить на 10 *км* в час, то поезд пройдет то же расстояние на 10 часов скорее. Определить, сколько километров в час проходит поезд?

4) По обе стороны улицы, длиной в 1200 *м*, во вновь разбиваемом поселке лежат полосы земли, отведенные под участки, одна шириною 50 *м*, а другая 60 *м*. На сколько участков разбит поселок, если узкая сторона содержит на 5 участков больше, чем широкая, но на ней участки каждый на 1200 $м^2$ меньше, чем на последней?

5) Неизвестный капитал, отданный в банк, обратился чрез 5 лет в 11200 рублей. Найти капитал и таксу, по которой он был отдан, если такса составляет тысячную долю числа рублей капитала.

6) Посредством двух труб бассейн наполняется в 8 часов. Во сколько времени каждая из труб может наполнить бассейн отдельно, если первая труба наполняет его на 12 часов скорее, чем вторая?

7) Расстояние между Москвою и Ленинградом равно 654 *км*. Курьерский поезд проходит этот путь на 10 часов скорее поезда, состоящего из вагонов четвертого класса, при чем проходит в час на 32,6 *км* больше поезда четвертого класса. Во сколько часов проезжает курьерский поезд расстояние от Москвы до Ленинграда?

8) Два пешехода вышли одновременно друг другу навстречу и встретились через три часа; во сколько времени пройдет все расстояние каждый из них, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, $2\frac{1}{2}$ часами позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

9) Посредством двух труб бассейн наполняется в 4,2 часа. Во сколько времени каждая из труб может наполнить бассейн отдельно, если первая труба наполняет его на 8 час. медленнее, чем вторая?

10) *A* может окончить некоторую работу пятью днями позже, чем *B*, и девятью днями позже, чем *C*, *A* и *B* вместе могут окончить ту же работу во столько дней, во сколько ее может окончить *C*. Во сколько дней каждое лицо в отдельности может окончить эту работу?

11) На коллектив было получено 112 пудов хлеба. Если бы членов коллектива было 2-мя больше, то каждый из них получил бы на 2,8 пуда меньше. Сколько было членов коллектива.

12) Лист бумаги содержит 90 кв. сантиметров. Определить, какова ширина этого листа, если известно, что длина его на 9 сантиметров больше ширины.

13) Лодка, идя все время па веслах, спускается по течению реки на 7 километров и снова возвращается в исходный пункт. На все это она тратит $2\frac{1}{3}$ часа. Определить скорость движения лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 4 километра в час.

14) Население двух дачных поселков состоит из 16000 чел. Население одного из поселков увеличивается ежегодно на 180 чел., а другого на 400 человек. Выразить в процентах прирост населения, если известно, что прирост населения второго поселка на два процента больше первого.

Задачи из физики.

333. 1) Камень падает (с начальной скоростью $=0$) на дно колодца, глубиной 87 *м*; а) через сколько времени с края колодца будет видно, б) будет слышно падение камня, если ускорение силы тяжести $g=9{,}8$, а скорость звука $=333$ *м* в сек.

2) Камень падает в колодец. Удар при падении на дно колодца слышен через 4 секунды после начала падения. Определить глубину колодца (в метрах), полагая скорость звука 333 метра в секунду и ускорение силы тяжести $g=9{,}8$.

3) Удар от падения камня, брошенного в колодец глубиной в 113 метров, был слышен через 3 секунды. Определить начальную скорость.

4) Стрела пущена вертикально вверх и поднимается на высоту 35 метров. а) Через сколько времени она достигнет наиболее высокой точки? б) Когда она снова упадет на землю? в) Какова была ее начальная скорость?

5) Шар пустой внутри, со стенками толщиной в 1 *см*, плавает в воде, погружаясь на 13 *см*, удельный вес материала, из которого он сделан, $=2{,}75$. Вычислить радиусы внешней и внутренней поверхностей.

6) Равнодействующая двух взаимно-перпендикулярных сил $=13$ *кг*. Если одну из этих сил увеличить в 3 раза и другую на $\frac{1}{3}$ ее уменьшить, то равнодействующая будет равна 17 килограммам. Найти величину этих сил.

7) Из двух маятников более короткий совершает а) 5, б) a колебаний, в то время как более длинный делает а) 4, б) b колебаний. Один маятник длиннее другого на 45 *см*; определить длину маятников.

8) В вогнутом зеркале с фокусным расстоянием в 40 *см.* предмет и изображение располагаются на расстоянии 65 *см.* один от другого. Определить их расстояния от зеркала.

9) При помощи собирательной линзы с фокусным расстоянием в 30 *см* изображение получается на расстоянии 5 метров от предмета. На каком расстоянии от линзы помещен предмет?

Задачи, заимствованные из старинных книг по математике и старых учебников.

334. Из арифметики *Диофанта Александрийского* (вторая половина III столетия нашей эры).

1) К двум данным числам 200 и 5 подыскать такое третье, при умножении которого на первое из них получается квадрат, при умножении на другое — корень из этого квадрата. [Если x^2 квадрат, то x корень.]

Из алгебры *Мухамеда-Ибн-Муза-Алхваризми* (первая четверть IX столетия.)

2) Один квадрат и 21 в числах равны десяти корням того же квадрата, т.-е. как велик должен быть квадрат, который при сложении с 21 дает число, равное десяти квадратным корням из этого квадрата? [Если x^2 означает квадрат, то x есть корень этого квадрата].

3) Квадрат и 10 его корней равны 39, т.-е. если к квадрату прибавить десять его квадратных корней, то все вместе даст 39.

С индусского из *Бхаскары* (род. 1114 г. нашей эры).

4) Стая обезьян забавлялась; число их, равное квадрату восьмой их части, бегало в лесу, остальные двенадцать кричали на верхушке холма. Сколько было обезьян?

5) Квадрат пятой части обезьян, уменьшенный на 3, спрятался в гроте, одна обезьяна, влезшая на дерево была видна. Сколько было обезьян?

6) Цветок лотоса возвышался над поверхностью пруда на 4 фута; под напором ветра он скрылся под водой на расстоянии 16 футов от того места, где он раньше подымался над водой. Какой глубины был пруд?

7) На самом берегу ручья растет тополь. Порыв ветра сломил его на высоте 3 единиц длины от земли и он упал перпендикулярно к направлению ручья, ширина которого = 4 единицам длины; при падении дерево уперлось в край противоположного берега. Как высок был тополь?

Из Lider abaci *Леонардо Пизанского (1200 г.).*

8) $\frac{19}{20}$ некоторого числа оказываются равными квадратному корню из того же числа. Определить число.

9) Две башни в равнине находятся на расстоянии 60 локтей одна от другой. Высота одной 50 локтей. Другой — 40. Между башнями находится колодец, одинаково удаленный от вершин обеих башен. Спрашивается, как далеко находится колодец от основания каждой башни?

Из Мюнхенской рукописи XV столетия.

10) Arbor 20 pedum iuxta aquam 6 pedum, queritur, in qua parte frangatur, ut summitas eius extremitati aque iungatur. (На расстоянии 6 футов от ручья стоит дерево высотой в 20 локтей; спрашивается, на какой высоте должно сломиться дерево, чтобы вершина его коснулась края воды?)

11) Item arbor 20 pedum frangitur in 8 pedibus a radice; queritur, ad quod se extendit a basi. [Также дерево высотой в 20 футов ломается в 8 футах от корня; спрашивается, на каком расстоянии от основания дерева окажется вершина?]

12) Nota scala 13 pedum distans a muro per 5 adhuc retrahitur per 7 pedes, ut sit elongata a basi per 12: queritur, quo descendit in muro. (Лестница в 13 футов, отстоявшая своим основанием от стены на 5 футов, была отодвинута еще на 7 футов, так что оказалась удаленной от основания стены на 12 фут. Спрашивается, на сколько футов опустилась она по стене?)

Из арифметики *Магницкого (1793 г.).*

13) Ино количество числа к егоже квадрату аще приложиши 108, и тогда сумма будет 24-мя больше неже оно число.

14) Случися некоему человеку к стене лествицу прибрати, стены же тоя высота есть 117 стоп. И обрете лествицу долготою 125 стоп. И ведати хощет колико стоп сея лествицы нижний конец от стены отстояти имать?

15) Некий генерал имяше ратных людей 49.000 человек, и хощет от сих баталлю учинить, яже да будет в полтретья долготою неже широтою. И ведательно есть колико человек будет широтою и долготою?

§ 8. Уравнения, решение которых приводится к решению квадратных уравнений.

Уравнения с легко угадываемыми (одним или несколькими) корнями.

335. Показать, что x^3+ax^2+bx+c делится без остатка на $x-x_1$, если x_1 есть корень уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$.

336. Какого члена не должно содержать уравнение, если один из его корней равен 0?

337. Решить уравнения:

1) $x^2 - 4x = 0$; 2) $x^2 + 6x = 0$;

3) $x^3 - 9x = 0$; 4) $x^3 - \frac{x}{4} = 0$;

5) $x^3 - 4x^2 - x = 0$; 6) $x^3 - 6x^2 - 16x = 0$;

7) $x^3 - 1 = 0$; 8) $x^3 + 1 = 0$;

9) $x^3 - 8 = 0$; 10) $x^3 - 0{,}001 = 0$;

11) $x^3 + 27 = 0$: 12) $x^4 - 16 = 0$;

13) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$; 14) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$;

15) $x^3 - 27 = 7(x - 3)$; 16) $x^4 - 16 = 2(x^2 - 4)$;

17) $x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1 = 0$; 18) $x^2 + 3\frac{1}{3}x + 1 = 0$;

19) $(x - 7)^3 + 2(x - 7)^2 + (x - 7) = 0$;

20) $x^2 - 8\frac{8}{9}x - 1 = 0$.

Уравнения, решаемые введением вспомогательного неизвестного.

Трехчленные уравнения.

338. 1) $(3x + 1)^2 - 10(3x + 1) + 21 = 0$;

2) $(5y + 4)^2 - 5(5y + 4) - 36 = 0$;

3) $(3z - 8)^2 + 5(3z - 8) - 150 = 0$;

4) $(7x + 3)^2 = 17(7x + 3) + 60$;

5) $3(2x + 5)^2 - 34(2x + 5) + 11 = 0$;

6) $5(5y + 7)^2 = 109(5y + 7) + 22$;

7) $(mx + n)^2 - (a + 2)(mx + n) + 2a = 0$;

8) $4(y + b)^2 - 4a(y + b) + a^2 = b^2$;

9) $3(kz + l)^2 + b^2 = 4(b - m)(kz + l) + 4mb$;

10) $\left(\frac{a + x}{a - x}\right)^2 + \frac{7}{2}\left(\frac{a + x}{a - x}\right) + 3 = 0$,

11) $\frac{17}{6} \cdot \frac{a + x}{b + x} - \left(\frac{a + x}{b + x}\right)^2 = 2$; 12) $\frac{3x - 16}{2x - 12} + \frac{2x - 12}{3x - 16} = \frac{5}{2}$;

13) $\frac{2x - 6}{3x - 4} + \frac{3x - 4}{2x - 6} = \frac{17}{4}$; 14) $\frac{x - a}{x - b} - \frac{x - b}{x - a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$;

15) $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{a - b}{a + b} = \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{a + b}{a - b}$.

339. 1) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; 2) $x^4 - 21x^2 = 100$;

3) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$; 4) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

5) $y^4 + 9y^2 = 400$; 6) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

7) $x^4 - 30x^2 + 36 = 0$; 8) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$;

9) $x^4 - 12x^2 - 64 = 0$; 10) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$;

11) $(x^2-10)\cdot(x^2-3)=78$; 12) $x^4+9=10x^2$;
13) $(x^2-5)^2+(x^2-1)^2=40$; 14) $6x^4-35=11x^2$;
15) $x^4-14x^2-15=0$; 16) $x^4+18x^2+1=0$;
17) $10x^4-21=x^2$; 18) $x^4-8{,}6x^2+19=0$;
19) $x^4-0{,}29x^2+0{,}01=0$; 20) $4x^4-41x^2+100=0$;
21) $a^4+b^4+x^4=2a^2b^2+2a^2x^2+2b^2x^2$;
22) $4(x+4)^4-29{,}6(x+4)^2+49=0$;
23) $x^4-ax^2+b^2=0$;
24) $5(z+2)^4-0{,}65(z+2)^2+0{,}018=0$;
25) $x^4-4(a+b)x^2+3(a+b)^2=0$;
26) $10(y+3)^4+19(y+3)^2=810$;
27) $x^4-4(a^2+b^2)x^2+4a^2b^2=0$;
28) $z^4-2(a^2+b^2)z^2+a^4+b^4=2a^2b^2$;
29) $(x^2+ax)^2+m(x^2+ax)=p$;
30) $u^4-9k^2=(k^2-9)u^2$; 31) $(x+1)^4-54(x+1)^2+648=0$.

340. 1) $x^6-9x^3+8=0$; 2) $x^6-35x^3+216=0$;
3) $x^6-2x^3+1=0$; 4) $x^6+7x^3-8=0$;
5) $(x+2)^8-97(x+2)^4+1296=0$; 6) $16x^8-257x^4+16=0$;
7) $x^{10}-33x^5+32=0$ [1]; 8) $x^{10}+33x^5+32=0$ [1];
9) $8y^6+1=9y^3$; 10) $8x^6-215x^3+26{,}75=0$;

11) $\left(\frac{x+3}{5}\right)^6-9\left(\frac{x+3}{5}\right)^3+8=0$;

12) $8(3y+7)^6-217(3y+7)^3+27=0$.

341. 1) $\frac{(x+3)^4}{x^4}-\frac{61(x+3)^2}{x^2}+900=0$;

2) $\frac{x-20}{x}+\frac{15x}{x-20}-8=0$;

3) $\frac{y^2-5y+15}{y}+\frac{33y}{y^2-5y+15}-14=0$;

4) $64+y^4(y+7)^4=65y^2(y+7)^2$;
5) $(x+5)^4-13(x+5)^2x^2+36x^4=0$;
6) $25(z+15)^2-144z^2+16z(z+15)=0$;
7) $(x+a)^6-a^3(x+a)^3-56a^6=0$;
8) $(x-m)^6+m^3(x-m)^3-56m^6=0$;
9) $x-6\sqrt{x}+5=0$; 10) $x+10=7\sqrt{x}$;
11) $x+\sqrt{x}=30$; 12) $x-3\sqrt{x}=28$;
13) $(\sqrt{x}-5)\cdot(\sqrt{x}-7)=3$; 14) $(5-\sqrt{x})^2=2(7+\sqrt{x})$;
15) $(4-\sqrt[4]{x})\cdot(5-\sqrt[4]{x})=2(7-\sqrt{x})$;
16) $(\sqrt[4]{x}-3)^2+(\sqrt[4]{x}-2)^2=1$;

---

[1]) Найти только действительные корни. Мнимые корни могут быть найдены приемом решения возвратных уравнений (см. задача 343).

17) $(\sqrt[3]{x}-1)^3+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$; 18) $7\sqrt[7]{x^5}+5x\sqrt[7]{x^3}=66$;
19) $3\sqrt[3]{(x+2)^2}-8\sqrt[3]{x+2}=3$;
20) $2x^2+3\sqrt{x^2-x+1}=2x+3$;
21) $8^{x+1}-8^{2x-1}=30$.

Системы, решаемые введением вспомогательных неизвестных.

342. 1) $5\sqrt{x}+6\sqrt{y}=529$; $3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=431$;

2) $3(x+y)+7(x-y)=7$; $5(x+y)+3(x-y)=-36$;

3) $2xy+\frac{5x}{y}=26$; $6xy+\frac{7x}{y}=62$;

4) $\frac{5(x-y)}{x+y}+\frac{3(x-2y)}{x+2y}=4$; $\frac{10(x-y)}{x+y}-\frac{9(x-2y)}{x+2y}=3$;

5) $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}=17$; $\sqrt{x}+\sqrt{z}-\sqrt{y}=13$; $\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{x}=7$;

6) $2x^2+7y^2-3z^2=13$; $3x^2-2y^2+8z^2=7$; $5x^2+y^2+2z^2=9$.

Возвратные уравнения.

343. Показать, что следующие уравнения не изменятся, если вместо x подставить $\frac{1}{x}$ и выяснить, почему эти уравнения называются возвратными.

1) $ax^3+bx^2+bx+a=0$; 2) $ax^3+bx^2-bx-a=0$;
3) $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$;
4) $ax^4+bx^3-bx-a=0$;
5) $ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$;
6) $ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$.

344. Решить уравнения:

1) $x^2-2\frac{1}{2}x+1=0$; 2) $10x^2+101x+10=0$;
3) $x^3+2x^2+2x+1=0$; 4) $x^3-2x^2+2x-1=0$;
5) $x^3-3x^2-3x+1=0$; 6) $3x^3-7x^2-7x+3=0$;
7) $2x^3-7x^2+7x-2=0$; 8) $2x^3+7x^2+7x+2=0$;
9) $3x^3-13x^2+13x-3=0$; 10) $2x^3+3x^2-3x-2=0$;
11) $6x^3-19x^2+19x-6=0$; 12) $6x^3-7x^2-7x+6=0$;
13) $4x^3-21x^2+21x-4=0$; 14) $20x^3-61x^2+61x-20=0$;
15) $2x^4+5x^3-5x-2=0$; 16) $6x^4-13x^3+13x-6=0$;
17) $20x^4-41x^3+41x-20=0$;
18) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$;
19) $x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$;
20) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$;

21) $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$;
22) $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$;
23) $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$;
24) $3x^4 - 16x^3 + 26x^2 - 16x + 3 = 0$;
25) $4x^4 - 9x^3 - 26x^2 - 9x + 4 = 0$;
26) $6x^4 - 25x^3 + 38x^2 - 25x + 6 = 0$;
27) $2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$;
28) $36x^4 - 481x^3 + 1466x^2 - 481x + 36 = 0$;
29) $8x^4 + 2x^3 - 31x^2 - 2x + 8 = 0$;
30) $5x^4 + 24x^3 - 10x^2 - 24x + 5 = 0$;
31) $3x^4 + x^3 - 8x^2 + x + 3 = 0$;
32) $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$;
33) $2x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 7x - 2 = 0$;
34) $3x^5 - 7x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 7x - 3 = 0$;
35) $3x^5 - 7x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 7x + 3 = 0$;
36) $6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0$;
37) $6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0$;
38) $6x^5 + 7x^4 - x^3 - x^2 + 7x + 6 = 0$.

§ 9. Простейшие дробные функции. Гиперболы.

345. 1) Стороны прямоугольника равны x и y, площадь равна s. Как выразится зависимость стороны y от x и s? Если s будет сохранять постоянное значение, какие величины будут представлять y и x?

2) Общая формула зависимости между двумя обратно пропорциональными величинами такова: $y = \frac{k}{x}$, где k есть некоторое число.

Построить точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \frac{k}{x}$, при $k = 1$, задавая x значения:

а) $1, 2, 3, 4, 5\ldots$
б) $-1, -2, -3, -4, -5\ldots$
в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\ldots$
г) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}\ldots$

Какие значения принимает ордината при убывающем по абсолютному значению положительном x? отрицательном?

Почему не имеющему смысла по определению деления выражению $\frac{1}{0}$ можно приписать значение **бесконечность** (∞)? Какая мысль выражается равенством $\frac{1}{0} = \infty$?

3) Соединить сплошной кривой точки, построенные в предыдущей задаче, округляя линию на-глаз. (Кривая эта называется **гиперболой.**) Где расположена часть кривой, соответствующая положительным значениям абсциссы? Где расположена часть кривой, соответствующая отрицательным значениям абсциссы? Что происходит с «ветвями» кривой в точках, абсциссы которых мало отличаются от 0? Связаны ли между собою отдельные ветви гиперболы?

4) Имеет ли построенная гипербола ось симметрии? Какие прямые служат осями симметрии? Почему? Как называются оси симметрии гиперболы? Какие точки называются вершинами гиперболы?

346. Пользуясь графикой функции $y=\frac{1}{x}$, построить графику 1) функции $y=-\frac{1}{x}$; 2) функции $y=\frac{a}{x}$ при $a=4$; $a=2$.

347. Какой вид принимает зависимость между y и x $y=\frac{a}{x}$, если уравнение, ее определяющее, освободить от дробей? Решить это уравнение относительно x.

Какая функция является обратной функции $y=\frac{a}{x}$?

348. Построить графики функций: $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{1}{x^3}$, $y=\frac{1}{x^4}$ и исследовать значение этих функций при x, неограниченно приближающемся к 0? Чем различаются построенные графики при четном и нечетном показателе при x?

349. По закону Бойля-Мариотта между объемом v некоторой массы газа и давлением p, под которым находится газ, существует (при неизменной температуре) такая зависимость, что $p \cdot v$ имеет постоянное значение. Представить в виде формулы и графически зависимость между значениями p и v для массы воздуха, которая, находясь под давлением 1 атмосферы, имеет объем $\frac{1}{2}$ литра.

350. Построить кривую, ординаты точек которой на одно и то же число a больше ординат точек гиперболы $y=\frac{1}{x}$, соответствующих тем же значением x, если

$$a=1, \qquad a=-1, \qquad a=4, \qquad a=\frac{1}{4}.$$

Составить выражение функции, имеющей своей графикой построенную кривую. Каким перемещением по плоскости может быть получена построенная кривая из кривой $y=\frac{1}{x}$?

351. Перенести гиперболу $y=\frac{6}{x}$[1] на 1) 4 единицы, 2) 2, 3) 1,5 кверху, на 4) 2, 5) 4, 6) 2,5 книзу. Какая кривая получается в каждом отдельном случае?

352. Построить графику функции:

1) $y=\frac{6}{x}-1$; 2) $y=\frac{6}{x}+2$;

3) $y=\frac{6-2x}{x}$; 4) $y=\frac{3x+6}{x}$.

353. Построить кривую, абсциссы точек которой на одно и то же число b больше абсцисс точек гиперболы $y=\frac{1}{x}$, соответствующих тем же значениям ординаты, если

$$b=2,\qquad b=-1,\qquad b=\frac{1}{2}.$$

Составить выражение функции, имеющей своей графикой построенную кривую. Каким перемещением в плоскости может быть получена построенная кривая из кривой $y=\frac{1}{x}$?

354. Перенести гиперболу $y=\frac{6}{x}$ на 1) 2, 2) 5, 3) $2\frac{1}{2}$, 4) $\frac{1}{3}$ вправо, на 5) 4, 6) 10, 7) $\frac{2}{3}$, 8) $1\frac{3}{4}$ влево. Кикая кривая получится в каждом отдельном случае?

355. Построить графики функций:

1) $y=\frac{6}{x-3}$; 2) $y=\frac{6}{x+1}$ 3) $y=\frac{6}{x-\frac{1}{3}}$;

4) $y=\frac{12}{2x-1}$; 5) $y=\frac{18}{3x+2}$; 6) $y=\frac{48}{8x-9}$.

Каково смещение гиперболы в каждом случае? Какой абсциссе соответствует точка разрыва функции?

356. Перенести гиперболу $y=\frac{6}{x}$:

1) на 2 единицы вверх и на 4 вправо;
2) на 1 вниз и на 2 влево;
3) на 4 вниз и на 3 вправо;
4) на $\frac{1}{2}$ вниз и на 3 влево;
5) на 2 вниз и на $\frac{4}{3}$ вправо;
6) на $\frac{2}{3}$ вверх и на $\frac{3}{4}$ вправо.

Указать в каждом отдельном случае абсциссу нулевого значения функции и точки разрыва.

---

[1]) Для облегчения построения полезно вырезать из картона шаблон гиперболы $y=\frac{6}{x}$.

357. Перенести гиперболу $y=\frac{a}{x}$: 1) на m вверх; 2) на n вправо; в 3) на m вверх и на p вправо; 4) на $\frac{p}{b}$ вверх и на $\frac{r}{s}$ вправо. В каждом случае составить уравнение кривой и указать абсциссы нулевого значения функции и точки разрыва.

358. Вычислить смещение относительно гиперболы $y=\frac{a}{x}$ график следующих рациональных дробных функций:

1) $y=\frac{a}{x-3}+2$; 2) $y=\frac{a}{x-n}+m$; 3) $y=\frac{x+a+2}{x+2}$;
4) $y=\frac{mx+a-mn}{x-n}$; 5) $y=\frac{ax+b}{x-c}$; 6) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$;
7) $y=3-\frac{1}{x-2}$; 8) $y=\frac{4x-5}{x}$; 9) $y=\frac{x-1}{x+1}$;
10) $y=\frac{x+2}{x-2}$; 11) $y=\frac{x+5}{2x}$; 12) $y=\frac{2x-3}{3x-4}$.

Указать в каждом случае абсциссу нулевого значения функции.

359. Гипербола $y=\frac{x+m}{x+n}$ имеет абсциссами нулевого и бесконечного значений:

	1	2	3	4	5
0	2	-2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{3}$
∞	5	3	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$

Определить m и n. Построить кривые. Где располагаются вершины этих гипербол?

360. При каких условиях следующие гиперболы совпадают:

1) $y=\frac{a}{x+b}$ и $y=\frac{c}{x+d}$; 2) $y=\frac{ax+b}{x}$ и $y=\frac{cx+d}{x}$;
3) $y=\frac{x+a}{bx+c}$ и $y=\frac{x+d}{ex+f}$; 4) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ и $y=\frac{ex+f}{gx+h}$.

Элементарные дроби.

361. Разложить на элементарные дроби вида $\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}$ следующие функции и сложением ординат кривых $y=\frac{A}{x+a}$ и $y=\frac{B}{x+b}$ получить их графики:

1) $y=\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}$; 2) $y=\frac{2}{x^2-1}$;

3) $y=\frac{1}{x(x-1)}$;   4) $y=\frac{2x}{1-x^2}$;

5) $y=\frac{4+x}{2x-x}$;   6) $y=\frac{3}{3x-2x^2}$;

7) $y=\frac{5x}{(2-x)(3+x)}$;   8) $y=\frac{1+x}{1-4x+3x^2}$;

9) $y=\frac{a-b}{(x-a).(x-b)}$;   10) $y=\frac{ax+b}{(x+a)(x+b)}$.

Функция $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) характеризует зависимость между величинами, называемую обратной пропорциональностью.

Кривая, которая изображает изменение функции $y=\frac{k}{x}$, называется гиперболой. Она состоит из двух *ветвей*, одна из которых лежит в нормальном угле ($k>0$), а другая в угле, ему вертикальном. Ветви гиперболы неограниченно приближаются к координатным осям по мере удаления точек ее от начала координат.

Гипербола $y=\frac{k}{x}$ имеет своей осью симметрии биссектрису нормального угла (и биссектрису угла, ему смежного): эти оси симметрии называются осями гиперболы.

Прямые, являющиеся осями координат для гиперболы $y=\frac{k}{x}$, называются ее *асимптотами*.

Выражением $\frac{1}{0}$, $\frac{a}{0}$ (при $a\neq 0$), которые сами по себе не имеют смысла, приписывают значение ∞ (бесконечность) потому, что функция $y=\frac{k}{x}$ при убывании x *неограниченно* возрастает, т.-е. x можно дать такое малое по абсолютной величине значение, чтобы абсолютное значение y было больше любого заданного числа, например, чтобы y получило значение, большее 1000000, следует x дать любое значение, меньшее 0,000001.

Так как кривая, изображающая функцию $y=\frac{1}{x}$, как бы разрывается при $x=0$, то говорят, что функция $y=\frac{1}{x}$ при $x=0$ испытывает разрыв.

Выражение: „y при $x=0$ обращается в ∞“, есть сокращенное выражение мысли: „при неограниченно убывающем по абсолютной величине x, абсолютное значение y неограниченно возрастает“.

§ 10. Простейшие алгебраические функции.

$$x^2+y^2=r^2.$$

362. Составить выражение квадрата расстояния r точки (x, y) от начала координат.

363. Решить уравнение $x^2+y^2=r^2$ относительно y и построить графику функции при $r=5$. При каких значениях x ордината y

не имеет действительных значений? Доказать, что построенная кривая есть окружность.

364. Построить графику функции:

1) $2x^2+2y^2=50$; 2) $5x^2+5y^2=60$;
3) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=8$; 4) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}=8$.

365. Построить окружность, ординаты точек которой на a больше ординат точек окружности, соответствующих тем же абсциссам:

$$x^2+y^2=1,$$

если 1) $a=1$, 2) $a=2$, 3) $a=-2$, 4) $a=\frac{1}{2}$, 5) $a=-\frac{1}{2}$.

Составить уравнение, связывающее y и x в каждом случае. Как переместится при этом центр окружности?

366. Перенести центр окружности $x^2+y^2=9$:

1) на 3 единицы вправо; 2) на 2 влево;
3) на 10 кверху; 4) на $\frac{2}{3}$ книзу;
5) на 3 вправо и на 2 кверху; 6) на 3 влево и на 2 книзу;
7) на a вправо и на b кверху.

Составить в каждом случае уравнение окружности и указать нули функции, если они существуют.

367. В следующих уравнениях определить положение центра и радиус окружности:

1) $(x+3)^2+(y-2{,}5)^2=9$; 2) $x^2+4x+y^2=12$;
3) $x^2+y^2+y=3\frac{3}{4}$; 4) $x^2-2x+y^2-4y=20$;
5) $x^2+y^2-x-y=8\frac{1}{2}$; 6) $x^2+y^2-6x+10y=2$;
7) $x^2+y^2+ax+by=c$.

368. Указать, графики каких из следующих функций симметричны относительно: 1) оси x, 2) оси y и 3) относительно обеих осей.

1) $x^2+y^2=a^2$; 2) $x^2+y^2+x=a$;
3) $x^2+y^2+ay=b$; 4) $x^2+ax+y^2+by=c$.

369. 1) Какой вид будет иметь уравнение окружности, если ее центр сдвинуть вправо на отрезок, равный радиусу: $r=a$, и вверх на b. 2) Какому уравнению 2-й степени удовлетворяют значения x, соответствующие точкам пересечения полученной окружности с осью x.

370. Воспользоваться указаниями предшествующей задачи для построения корней уравнения:

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0,$$

пользуясь пересечением подвижного круга с осью x.

371. Подобным же образом построить корни уравнений:

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 9 = 0$;
3) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 4) $x^2 - 7x + 16 = 0$.

В каждом случае решить уравнение также при помощи вычисления.

372. Катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $a=10$ см представить, как функцию другого катета.

373. Выразить расстояние хорды от центра окружности радиуса 8 *см*, как функцию половины этой хорды.

374. Прямоугольник со сторонами a и b должен изменяться так, что диагональ его остается постоянной. Каким соотношением должны быть связаны стороны x и y нового прямоугольника. Дать графику этого соотношения.

$$x^2 - y^2 = r^2.$$

375. 1) Уравнение $x^2 - y^2 = r^2$ решить относительно y и построить графику функции для $r = 5$. 2) Для каких значений x-са y не имеет действительных значений?

376. Придумать способ построения кривой $x^2 - y^2 = r^2$ по точкам, если r дано в виде отрезка (на основании теоремы Пифагора).

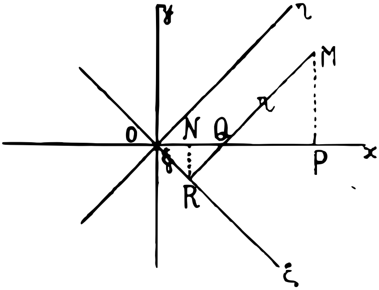
377. Построить графики функций:

1) $2x^2 - 2y^2 = 32$;
2) $3x^2 = 27 + 3y^2$;
3) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 5$.

378. Какой вид примет уравнение $x^2 - y^2 = r^2$, если положить

$$x = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{\eta - \xi}{\sqrt{2}}.$$

Выяснить на основании прилагаемого чертежа, что представляют ξ, η для точки M, если за координатные оси принять биссектрисы нормального угла и угла, ему смежного? (Принять во внимание, что $\triangle$ OQR и QMP прямоугольные равнобедренные и что поэтому



Фиг. 6.

$RQ = OR$, $QP = PM$, $ON = NQ = \sqrt{\frac{\xi}{2}}$, $NP = \sqrt{\frac{\eta}{2}}$). Какая кривая определяется уравнением $x^2 - y^2 = r^2$? Как следует переместить в плоскости гиперболу $yx = \frac{r^2}{2}$, чтобы ее уравнение приняло вид: $x^2 - y^2 = r^2$?

379. Переместить центр равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = r^2$:

1) на 3 единицы вправо, 2) на 2 влево,
3) на 10 кверху, 4) $\frac{2}{3}$ кверху,
5) на 2 вправо и на 5 кверху,
6) на 3 книзу и на 4 влево,
7) на a вправо и на b кверху.

Написать в каждом отдельном случае уравнение гиперболы и указать нули функции.

380. Указать положение центра гиперболы, а также значение полуоси (значение r) для график следующих уравнений:

1) $(x+3)^2 - (y - \frac{3}{2})^2 = 9$; 2) $x^2 + 4x - y^2 = 12$;
3) $x^2 - y^2 + y = 4{,}25$; 4) $x^2 - y^2 - y = 4{,}25$;
5) $x^2 - 2x - y^2 + 4y = 28$; 6) $x^2 - y^2 + x - y = 5$;
7) $x^2 - y^2 + ax + by = c$.

381. Решить $y^2 - x^2 = r^2$ относительно y и дать графику функции для $r = 5$.

382. В каком отношении находятся друг к другу кривые: $y^2 - x^2 = r^2$ и $x^2 - y^2 = r^2$? Какие функции представляют друг по отношению к другу ординаты этих кривых? Показать это на основании формул; на основании график.

383. Переместить центр равносторонней гиперболы $y^2 - x^2 = r^2$ в положения, указанные в задаче 379 от 1) до 7). Указать в каждом отдельном случае уравнение гиперболы и нули функции, если таковые существуют.

384. Определить положение центра и значение полуоси (значение r) гиперболы, определяемой следующим уравнением:

1) $(y+3)^2 - (x - \frac{3}{2})^2 = 9$; 2) $y^2 + 6y - x^2 = 7$;
3) $x^2 + 4x - y^2 + 12 = 0$; 4) $x^2 - y^2 + x - y = -5$;
5) $x^2 - y^2 + ax + by + c = 0$.

385. Какие из кривых, определяемых следующими уравнениями, симметричны относительно: 1) оси x, 2) оси y, 3) относительно обеих осей:

1) $x^2 - y^2 = r^2$; 2) $y^2 - x^2 = r^2$;
3) $x^2 + x - y^2 = a$; 4) $y^2 + y - x^2 = b$;
5) $x^2 - y^2 - x - y = c$.

386. Катет треугольника, другой катет которого равен $b=8$ *см*, представить как функцию значения гипотенузы.

387. Гипотенузу треугольника, один из катетов которого равен 6 *см*, представить как функцию другого катета.

388. Два числа связаны между собой таким соотношением, что произведение суммы этих чисел на их разность равно 360. Выразить одно число как функцию другого.

Смешанные задачи и повторение.

389. Построить графики функций: 1) $y^2=ax$, 2) $x^2=ay$, 3) $xy=a$, при $a=2$. 4) Какие из координатных осей являются осями симметрии по отношению к каждой из построенных кривых? 5) Какое геометрическое соотношение можно установить между точками кривых $y^2=ax$ и $x^2=ay$.

390. Дать графики следующих уравнений, указывая в каждом отдельном случае координаты вершины параболы.

1) $y^2-x=0$; 2) $x^2+y=0$;
3) $x^2+5y=0$; 4) $x^2-5y=0$;
5) $y^2+5x=0$; 6) $y^2-5x=0$;
7) $2x-y^2=0$; 8) $3y^2-2x=0$.

391. Переместить: 1) параболу $y^2=ax$; 2) параболу $x^2=by$ на m вправо и на n кверху. Каковы будут уравнения новых кривых?

392. Дать графики следующих уравнений:

1) $y^2-x=3$; 2) $y^2+3=x$;
3) $x^2-y=2$; 4) $x^2+2=y$;
5) $(x-2)^2+y=0$; 6) $(y-1)^2-x=0$;
7) $(x-3)^2-y+2=0$; 8) $(y-3)^2=-3x+6$,

и указать координаты вершин соответствующих парабол.

393. Исследовать геометрические свойства график следующих уравнений:

1) $x^2+y^2=0$; 2) $x^2-y^2=0$;
3) $xy=0$; 4) $x\pm y=0$;
5) $y^2=0$; 6) $x^2=0$;
7) $(x+3)(y-2)=0$; 8) $(x-2)(y-4)=0$.

Если зависимость между y и x дана в виде уравнения, не разрешенного относительно y, то y называется неявной функцией x.

Координаты любой точки окружности с центром в начале и с радиусом равным r удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=r^2$; если рассматривать y, как функцию x, то указанное уравнение определяет две функции: $y=\sqrt{r^2-x^2}$ и $y=-\sqrt{r^2-x^2}$.

Функция, обратная функции, определяемой уравнением круга, определяется тем же уравнением.

Если центр окружности радиуса r перенести в точку (a, b), то уравнение ее примет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Уравнению $x^2-y^2=r^2$ удовлетворяют координаты точек, располагающихся на равносторонней гиперболе; эта равносторонняя гипербола отличается от гиперболы $xy=m$ лишь своим положением относительно осей координат; у гиперболы $xy=m$ осями координат служат асимптоты, а у гиперболы $x^2-y^2=r^2$ ее оси. Та ось гиперболы, которая ее пересекает, называется ее *действительной* осью; ось гиперболы, которая ее не пересекает, называется *мнимой* осью; точки пересечения гиперболы с осью называются вершинами гиперболы.

У гиперболы две вершины.

Уравнению $y^2-x^2=r^2$ удовлетворяют координаты точек, располагающихся на гиперболе конгруентной с гиперболой $x^2-y^2=r^2$, но расположенной относительно координатных осей так, что ее центр находится в начале, но действительная ось совпадает не с осью x, а с осью y.

Гиперболы $x^2-y^2=r^2$ и $y^2-x^2=r^2$ имеют общие асимптоты и называются друг другу сопряженными.

Функции, определяемые уравнениями двух равносторонних сопряженных гипербол, являются взаимно обратными функциями.

Если равностороннюю гиперболу перенести в плоскости координат так, чтобы центр оказался в точке (a, b), а действительная ось была параллельной оси x, то уравнение гиперболы примет вид $(x-a)^2-(y-b)^2=r$.

Уравнению $y^2=x$ удовлетворяют функции $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$, являющиеся обратными функции $y=x^2$.

Параболы $y=x^2$ и $y^2=x$ разнятся друг от друга лишь тем, что для первой кривой ось y является осью, а ось x касательною в вершине, а для второй наоборот.

§ 11. Квадратные уравнения со многими неизвестными.

394. Построить равностороннюю гиперболу $xy=6$. Построить прямую $x+y=5$. Найти их точки пересечения. Найти значения координат общих точек этих линий, определяя из одного из уравнений значение y, подставляя его в другое уравнение и решая полученное после подстановки квадратное уравнение.

395. Решить подобным же образом системы уравнений (вычислением и графически):

1) $x+y=6,$
$x\cdot y=8;$

2) $x-y=2,$
$x\cdot y=48;$

3) $x-y=7,$
$xy=30;$

4) $y - x = -3,\quad xy = 4;$ 5) $x - y = 5,\quad xy = 36;$ 6) $x + y = 2,\quad xy = -15;$

7) $x - y = \frac{5}{6},\quad xy = 1;$ 8) $x\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 19,\quad xy = 90.$

396. Решить вычислением следующие системы уравнений:

1) $x + y = a,\quad x\cdot y = b;$ 2) $x - y = a,\quad xy = b;$ 3) $x + y = 2a,\quad x\cdot y = a^2;$

4) $x - y = a - b,\quad xy = ab;$ 5) $x + xy + y = 7,\quad x - xy + y = 1;$ 6) $2x - xy + 2y = 4,\quad 2x + xy + 2y = 6.$

397. Решить следующие системы уравнений, вводя вспомогательные неизвестные:

1) $x + y = 12,\quad (x-1)\cdot(y-1) = 24;$ 2) $x + y = 18,\quad (x-7)\cdot(y+3) = 48;$

3) $(x-8)\cdot(y-6) = 0,\quad x + y = 13;$ 4) $(x-3)\cdot(y-4) = 0,\quad 4x + 3y = 36;$

5) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4,\quad xy = 9;$ 6) $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1,\quad xy = 36;$

7) $x^3 + y^3 = 28,\quad xy = 3;$ 8) $x^3 - y^3 = 19,\quad xy = 6.$

398. Построить равностороннюю гиперболу $yx = 12$; построить круг $x^2 + y^2 = 25$; определить точки пересечения этих кривых. Определить из данных уравнений значения выражений $(x+y)^2$ и $(x-y)^2$, а затем и x и y.

399. Подобным же образом (построением и вычислением) решить системы уравнений:

1) $x^2 + y^2 = 5,\quad xy = 2;$ 2) $x^2 + y^2 = 40,\quad xy = 12;$ 3) $x^2 + y^2 = 97,\quad xy = 36;$

4) $x^2 + y^2 = 130,\quad xy = 63;$ 5) $x^2 + y^2 = 4\frac{4}{9},\quad xy = \frac{4}{3};$ 6) $x^2 + y^2 = \frac{25}{16},\quad 4xy = 3;$

7) $x^2 + y^2 = 52,\quad xy = 24;$ 8) $x^2 + y^2 = 1{,}16,\quad 5xy = 2;$ 9) $x^2 + y^2 = 1{,}69\quad xy = 0{,}6.$

400. Решить следующие системы уравнений вычислением:

1) $x^2 + y^2 = a,\quad xy = b;$ 2) $x^2 + y^2 = 2a^2,\quad xy = a^2;$

3) $x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2,\quad xy = a^2 - b^2;$ 4) $x^2 + y^2 = \frac{(a-b)^2}{2},\quad xy = -\frac{(a-b)^2}{4};$

5) $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}a^2 + 2ab + \frac{4}{5}b^2$, $xy = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{5}{4}ab$;

6) $x^2 + y^2 = \frac{p^2(q^4+1)}{q^2}$, $xy = p^2$;

7) $x^2 + xy = 78$, $y^2 - xy = 7$;

8) $x^2 + xy = 5$, $y^2 - xy = 12$;

9) $x^2 - xy = 18$, $xy + y^2 = 112$;

10) $x^2 + xy + y^2 = 57$. $x^2 - xy + y^2 = 43$;

11) $x^2 - xy + y^2 = 49$, $x^2 - xy + y^2 = 19$;

12) $x^2 - xy + y^2 = 2a$, $x^2 - xy + y^2 = 2b$;

13) $x^2 - xy + y^2 = 39$, $2x^2 - 3xy + 2y^2 = 43$;

14) $x^2 + 5xy + y^2 = 79$, $x^2 + 3xy + y^2 = 59$;

15) $x^2 + 3xy + y^2 = 61$; $xy = 12$;

16) $x^2 - 5xy + y^2 = 35$, $xy = 9$;

17) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 50$, $xy = 12$;

18) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 84$, $x^2 + y^2 = 58$;

19) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 122$, $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 120$;

20) $x^2 + \sqrt{xy} + y^2 = 334$, $xy = 36$;

21) $x^2 - 3\sqrt{xy} + y^2 = 395$, $xy = 100$;

22) $x^2 - 2\sqrt{xy} + y^2 = 841$, $x^2 + y^2 = 881$;

23) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 260$, $x^2 - xy + y^2 = 97$;

24) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 144$, $x^2 + xy + y^2 = 133$.

401. Решить построением и вычислением следующие системы уравнений:

1) $x^2 + y^2 = 250$, $x - y = 4$;
2) $x^2 + y^2 = 90$, $x + y = 12$;
3) $x^2 + y^2 = 25$, $x - y = 1$;
4) $x^2 + y^2 = 136$, $x + y = 16$;
5) $x^2 + y^2 = 100$, $x - y = 2$;
6) $x^2 + y^2 = 25$, $x + y = 5$.

402. Решить вычислением следующие системы:

1) $x^2 + y^2 = a$, $x + y = b$;
2) $x^2 + y^2 = a$, $x - y = b$;
3) $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y = 2a$;
4) $x^2 + y^2 = a$, $x - y = 0$;
5) $x^2 + y^2 = m^2$, $x + y = n$;
6) $x^2 + y^2 = b^2$, $x + y = b$;
7) $x(x+2) + y(y+2) = 183$, $x + y = 17$;
8) $x(x+4) + y(y-4) = 9$, $x - y = 1$;
9) $x + y = 58$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$;
10) $x + y = 100$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 14$;
11) $x + y = 25$; $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$;
12) $\sqrt{x+2} + \sqrt{y+1} = 4$, $x + y = 5$;
13) $\sqrt{x+2} - \sqrt{y-1} = 1$, $x + y = 12$;
14) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 13$, $x - y = -3$;
15) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$, $x + y = 0$.

403. Решить графически и вычислением следующие системы и выяснить на основании геометрического решения, почему системы имеют лишь о д н у систему решений:

1) $x^2 - y^2 = 7,\quad x - y = 1;$ 2) $x^2 - y^2 = 24,\quad x + y = 6;$ 3) $x^2 - y^2 = 5,\quad x - y = 4;$

4) $x^2 - y^2 = 20,\quad x - y = 7;$ 5) $x^2 - y^2 = 2{,}01,\quad x - y = 0{,}1;$ 6) $x^2 - y^2 = \frac{15}{16},\quad x + y = 1\frac{1}{4}.$

404. Решить вычислением следующие системы:

1) $x^2 - y^2 = a,\quad x - y = b;$ 2) $x^2 - y^2 = a,\quad x + y = b;$ 3) $x^2 - y^2 = a^2,\quad x - y = a;$

4) $x^2 - y^2 = a^2 - b^2,\quad x + y = a - b;$ 5) $x^2 - y^2 = m^2 - n^2,\quad x - y = m + n;$

6) $x^2 - y^2 = 4ab,\quad x - y = 2a;$ 7) $(x + 2)^2 - y^2 = 56,\quad x + y = 12;$

8 $(x - 1)^2 - (y + 3)^2 = 3,\quad x - y = 1;$

9) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12,\quad x - y = 72;$ 10) $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1,\quad x - y = 25.$

405. Решить следующие системы и выяснить геометрический смысл полученных решений:

1) $x^2 + y^2 = 25,\quad x^2 - y^2 = 7;$ 2) $x^2 + y^2 = 25,\quad y^2 = 5\frac{1}{3}x;$ 3) $x^2 - y^2 = 5,\quad x^2 = 4\frac{1}{2}y;$

4) $xy = 8,\quad x^2 - y^2 = 12;$ 5) $xy = 8,\quad y^2 = 8x;$ 6) $x^2 - y^2 = a^2,\quad x^2 + y^2 = b^2;$

7) $x^2 + y^2 = r^2,\quad y^2 = 2px;$ 8) $x^2 - y^2 = r^2,\quad y^2 = 2px;$ 9) $x^2 - y^2 = a^2,\quad xy = m.$

406. Пользуясь теоремой Виета $x_1 + x_2 = -p;\ x_1x_2 = q$, свести решение следующих систем на решение одного квадратного уравнения;

1) $x + y = 11,\quad xy = 30;$ 2) $x + y = 17,\quad xy = 72;$ 3) $x + y = m.\quad xy = n;$

4) $x + y = 2\frac{1}{2},\quad xy = 1;$ 5) $x + y = \frac{3}{8},\quad 32xy = 1;$ 6) $x + y = \frac{a^2 + b^2}{ab},\quad xy = 1;$

7) $x + xy + y = 19,\quad xy = 12;$ 8) $x + y - xy = -1,\quad xy = 6;$ 9) $x + y + xy = 11,\quad x + y = 5;$

10) $x + y + \sqrt{xy} = 19,\quad xy = 36;$ 11) $x + y - 3\sqrt{xy} = 0,\quad xy = 64;$

12) $x+y-2\sqrt{xy}=4,$
$x+y=10;$

13) $x+y=2\frac{1}{2},$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2\frac{1}{2};$

14) $x+y=12,$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8};$

15) $xy=1,$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7\frac{1}{7};$

16) $x+y+xy=19,$
$(x+y)xy=84;$

17) $x+y+3xy=9,$
$xy(x+y)=6;$

18) $2x+2y+xy=16,$
$(x+y)xy=30;$

19) $(x-3)(y-4)=1,$
$x+y=9;$

20) $(x-2)(y+2)=21,$
$x+y=10;$

21) $(x+1)(y+1)=6,$
$x+y=3;$

22) $x^2+y^2=25,$
$xy=12;$

23) $x^2+y^2=58,$
$xy=21;$

24) $x^2+y^2=41,$
$x+y=9;$

25) $x^3+y^3=9,$
$xy=2;$

26) $x^4+y^4=17,$
$xy=2;$

27) $x^5+y^5=244,$
$xy=3.$

407. 1) $x-y=1.$
$xy=20;$

2) $x-y=12,$
$xy=28;$

3) $x-y=a,$
$xy=m^2;$

4) $x+xy-y=17,$
$xy=15;$

5) $x+xy-y=13,$
$x-y=3;$

6) $x+\sqrt{xy}-y=19.$
$xy=144;$

7) $x-y+2\sqrt{xy}=41,$
$xy=100;$

8) $x-y+3\sqrt{xy}=61,$
$x-y=16;$

9) $2x-2y+\sqrt{xy}=52,$
$xy=100;$

10) $x-y+xy=31,$
$(x-y)xy=84;$

11) $x-y-xy=\frac{1}{2};$
$(x-y)xy=\frac{3}{2};$

12) $x+xy-y=37,$
$x^2y-xy^2=70;$

13) $x^2-y^2=9,$
$xy=20;$

14) $x^2-y^2=a^2-b^2,$
$xy=-ab;$

15) $\sqrt{x}-\sqrt{y}=a,$
$xy=144a^4;$

16) $x^3-y^3=26,$
$xy=3;$

17) $(x^2-y^2)xy=180,$
$x^2-xy-y^2=-11;$

18) $x^4-y^4=80,$
$xy=3.$

408. Решить следующие системы уравнений с однородной левой частью, присоединяя к ним (к тем, в которые оно не входит) уравнение луча $y=kx$ и принимая за вспомогательное неизвестное угловой коэффициент k:

1) $x^2+y^2=400,$
$y:x=4:3;$

2) $x^2-y^2=14,$
$x:y=9:5;$

3) $x^2+xy=84,$
$5x=7y;$

4) $x^2-xy+y^2=39,$
$2x^2-3xy+2y^2=43;$

5) $5x^2-6xy+5y^2=29,$
$7x^2-8yx+7y^2=43;$

6) $3x^2+11xy+3y^2=207,$
$2x^2-3xy+2y^2=14;$

7) $3x^2+2xy-4y^2=543,$
$x^2+y^2=173;$

8) $x^2-xy+y^2=3,$
$2x^2-xy-y^2=5;$

9) $3x^2+5xy-4y^2=38,$
$5x^2-9xy-3y^2=15.$

Смешанные задачи.

409. Решить системы и выяснить геометрический смысл решения (решать также графически):

1) $x^2 + y^2 = 25,\ x^2 - y^2 = 5;$ 2) $x^2 + y^2 = 50,\ x^2 - y^2 = -48;$ 3) $x^2 - y^2 = 40,\ xy = 21;$

4) $x^2 - y^2 = 28,\ xy = 48;$ 5) $x^2 - y^2 = 5,\ xy = 6;$ 6) $x^2 - y^2 = 19,\ xy = -90;$

7) $x^2 + y^2 = 40,\ x = 3y;$ 8) $xy = 12,\ 2x + 3y = 18;$ 9) $xy = 54,\ 3x = 2y;$

10) $x^2 + y^2 = 50,\ 9x + 7y = 70;$ 11) $4x - 3y = 24,\ xy = 96;$ 12) $3x - 2y = 1,\ x^2 + y^2 = 74;$

13) $x^2 + y^2 = 100,\ x : y = 3 : 4;$ 14) $x^2 - y^2 = 640,\ y : x = 3 : 7;$ 15) $x : y = 9 : 4,\ x : 12 = 12 : y;$

16) $x : y = 3 : 5,\ x : 5 = 12 : y;$ 17) $x + y = 10,\ xy = 2(y + 6);$ 18) $2x - xy + y + 8 = 0,\ x + y = 10.$

410. Решить следующие системы:

1) $2x^2 - 3y^2 = 24,\ 2x = 3y;$ 2) $x(x + y) = 25,\ 2x + 3y = 10;$ 3) $3x^2 - 7y^2 = 84,\ 3x + 7y = 42;$

4) $5x^2 + y^2 = 3xy,\ 2x - y = 0;$ 5) $x^2 + xy + y^2 = 343,\ 2x - y = 21;$ 6) $x^2 - xy + y^2 = 7,\ 2x - 3y = 0;$

7) $x^2 + 2xy - y^2 = 7(x - y),\ 2x - y = 5;$ 8) $2x^2 - 5xy + y^2 + 10x + 12y = 100,\ 2x - 3y = 1;$

9) $7(x + 5)^2 - 9(y + 4)^2 = 118,\ x - y = 1;$

10) $5(x + 4)^2 - 11(y - 2)^2 = 320,\ x + y = 4;$

11) $x^2 + y^2 = 130,\ \dfrac{x + y}{x - y} = 8;$ 12) $(3x - y)(3y - x) = 36,\ \dfrac{x + y}{x - y} = \dfrac{5}{2};$

13) $\dfrac{8}{x} + \dfrac{3}{y} = 3,\ \dfrac{5}{x + 1} = \dfrac{2}{y - 1};$ 14) $\dfrac{10}{x + 2} + \dfrac{9}{y - 1} = 5,\ \dfrac{2}{x - 1} = \dfrac{4}{y};$

15) $x^2 + xy + y^2 = 75,\ x^2 - xy + y^2 = 25;$ 16) $x^2 - xy + y^2 = 27,\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 1701;$

17) $x^2 + y = y^2 + x - 18,\ x : y = 2 : 3;$ 18) $xy + 72 = 6(2x + y),\ x : y = 2 : 3;$

19) $xy = a,\ x : y = b;$ 20) $x^2 + y^2 = a^2,\ x : y = m : n;$

21) $x+xy=3,\ xy^2+xy^3=12;$

22) $x+xy+xy^2=7,\ xy^2+xy^3+xy^4=28;$

23) $x+xy=4,\ x+xy^3=28;$

24) $xy+xy^2=12,\ x^2y=8;$

25) $xy-x-y=29,\ x^2+y^2-(x+y)=72;$

26) $x^2+xy+y^2=61,\ 4y^2-5x^2=20;$

27) $x^2+y^2-5(x+y)=8,\ x^2+y^2-3(x+y)=28;$

28) $\frac{x^3}{y}+xy=25,\ \frac{y^3}{x}+xy=16;$

29) $(x^2+y^2)\frac{x}{y}=6,\ (x^2-y^2)\frac{y}{x}=1;$

30) $x^3+y^3=4x^2-\frac{3}{4}xy+4y^2=13(x+y);$

31) $x+xy+y=5,\ x^2+xy+y^2=7;$

32) $x+xy+y=11,\ x^2+x^2y^2+y^2=49;$

33) $(x^2+y^2)(x+y)=a,\ xy(x+y)=b;$

34) $x+y=a(1+xy),\ x-y=b(1-xy);$

35) $\frac{x+\sqrt{xy}+y}{x-\sqrt{xy}+y}+\frac{x-\sqrt{xy}+y}{x+\sqrt{xy}+y}=\frac{58}{21},\ (x^2-y^2)(x+y)=x(x^2+4)-y(y^2+4).$

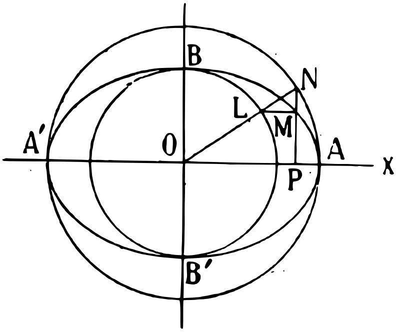
§ 12. Общее уравнение второй степени с двумя неизвестными.

411. 1) Найти уравнение, которому удовлетворяют координаты точек, одинаково удаленных: 1) от прямой $x=-1$ и от точки $(1,0)$; 2) от прямой $y=-a$ и от точки $(0,a)$; 3) от прямой $x=-\frac{p}{2}$ и от точки $\left(\frac{p}{2},0\right)$. Какую кривую представляет найденное геометрическое место? Как по отношению к кривой $y^2=2px$ называется точка $\left(\frac{p}{2},0\right)$? прямая $x=-\frac{p}{2}$? число p? Чему равен параметр кривой $y=x^2$?

2) Найти уравнение, которому удовлетворяют координаты точки, отношение расстояния которой от точки $(-r\sqrt{2},0)$ к расстоянию от прямой $x=-\frac{r}{\sqrt{2}}$ равно $\sqrt{2}$. Какую кривую представляет геометрическое место данной точки? Как называется точка $(-r\sqrt{2},0)$? Прямая $x=-\frac{r}{\sqrt{2}}$? Решить ту же задачу, если вместо прямой $x=-\frac{r}{\sqrt{2}}$ будет дана прямая $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$ и вместо

точки $(-r\sqrt{2},0)$ точка $(r\sqrt{2},0)$. Какая кривая определяется полученным уравнением? Сколько у равносторонней гиперболы фокусов? Директрис?

3) Найти уравнение, которому удовлетворяют координаты точки, отношения расстояния которой от точки $(-ae,0)$ к расстоянию от прямой $x=-\frac{a}{e}$ равно e. Составить подобное же уравнение, если вместо данных прямой и точки взять прямую $x=\frac{a}{e}$ и точку $(ae,0)$. Разделить все члены полученного уравнения на $a^2(1-e^2)$ и перенести все члены с координатами в левую часть. Какие знаки будут иметь члены в левой части уравнения: 1) если $e^2<1$? 2) если $e^2>1$? Принять в полученном уравнении: в первом случае $a^2(1-e^2)=b^2$ и во втором случае $a^2(1-e^2)=-b^2$. Какой вид примут тогда полученные уравнения? Как называется для полученных кривых число e?



Фиг. 7.

4) Как называется кривая, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$? Сколько у этой кривой фокусов? Директрис? Как расположены фокусы и директрисы? Из рассмотрения приложенного черт., фиг. 7, сравнивая эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ с кругами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ и $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, найти способ построения эллипса по точкам.

5) Сравнивая гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, придумать подобный же прием построения всякой гиперболы по точкам, если ранее построить равностороннюю гиперболу с той же (по величине) действительной осью.

6) Представляя уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в виде $y^2=(a^2-x^2)(1-e^2)$, показать, что $r_1=a-ex$ и $r_2=a+ex$, где под r_1 и r_2 разумеются соответственно абсолютные значения расстояний точки эллипса от правого (с координатами $ae,0$) и левого (с координатами $-ae,0$) фокусов.

Чему равна в силу полученных равенств сумма $r_1 + r_2$?

Какое геометрическое определение можно дать эллипсу на основании выведенного свойства его радиусов-векторов?

Как на основании этого определения может быть построен эллипс непрерывным движением точки (острия карандаша)?

7) Представляя уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в виде

$$y^2 = (x^2 - a^2)\ (e^2 - 1)$$

(сравнить это уравнение с уравнением эллипса), показать, что

$$r_1 = ex - a \qquad r_1 = ex + a$$

$$r_1' = -ex + a \qquad r_2'' = -ex - a,$$

где под r_1 и r_2 разумеются соответственно **абсолютные** значения расстояний точки правой ветви гиперболы от правого и левого фокусов а под r_1' и r_2' расстояния точки левой ветви от правого и левого фокусов.

Чему равна в силу полученных равенств разность: а) $r_2 - r_1$; б) $r_1' - r_2'$?

Какое геометрическое определение можно дать гиперболе на основании выведенного свойства ее радиусов-векторов?

8) Освободить общее уравнение второго порядка:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

от коэффициента a? Как это сделать? Всегда ли это возможно?

9) Освободить уравнение [1]):

$$x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

от членов первого порядка подстановкой: $\begin{matrix} x = X + m \\ y = Y + n \end{matrix}$. Всегда ли это возможно? Выяснить геометрический смысл преобразования.

10) Исследовать геометрический смысл уравнений:

а) $x^2 + nx + ey + f = 0$,

б) $y^2 + dx + ey + f = 0$.

11) Исследовать геометрический смысл уравнения:

$$x^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

а) при c положительном, б) при c отрицательном.

---

[1]) Уравнение $x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ может быть освобождено от произведения xy подстановкой $\begin{matrix} x = pX - qY \\ y = qX + pX \end{matrix}$, где p и q удовлетворяют соотношению: $p^2 + q^2 = 1$. Геометрический смысл этого преобразования сводится к вращению кривой в ее плоскости около начала координат. (См. задачу 712.)

12) Показать:

а) что левая часть уравнения $x^2 - y^2 + x + y = 0$ разлагается на произведение двух линейных множителей; как располагаются в этом случае точки, координаты которых удовлетворяют написанному уравнению,

б) что не существует точек, координаты которых удовлетворяли бы уравнению $x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 19 = 0$,

в) что координаты только одной точки удовлетворяют уравнению $3x^2 - 6x + 4y^2 - 8y + 7 = 0$. Какая это точка?

13) Перечислить кривые, которые определяются уравнением:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

при различных значениях, входящих в уравнение букв (если уравнение имеет более одной системы действительных решений и левая часть уравнения не разлагается на два линейных относительно x и y множителя).

14) Изменится ли вид кривой, если все члены уравнения, определяющего ее, умножить на одно и то же число (не содержащее в своем выражении координат), или нет? Почему? Сколько постоянных необходимо для того, чтобы уравнение кривой второго порядка было вполне определено? Сколько пар значений следует задать для x и y, чтобы вполне определить кривую второго порядка, проходящую через точки, определяемые этими парами значений координат?

15) Найти кривую, проходящую через точки:

1) $(0,1)$, $(0, -1)$, $(2,0)$, $(-2,0)$, $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $(0,0)$, $\left(\frac{9}{4}, 3\right)$, $\left(\frac{9}{4}, -3\right)$, $(4,4)$, $(+4, -4)$;

3) $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,5)$, $(5,2)$.

Пересечение двух кривых в общем случае.

412. Расположение кривой

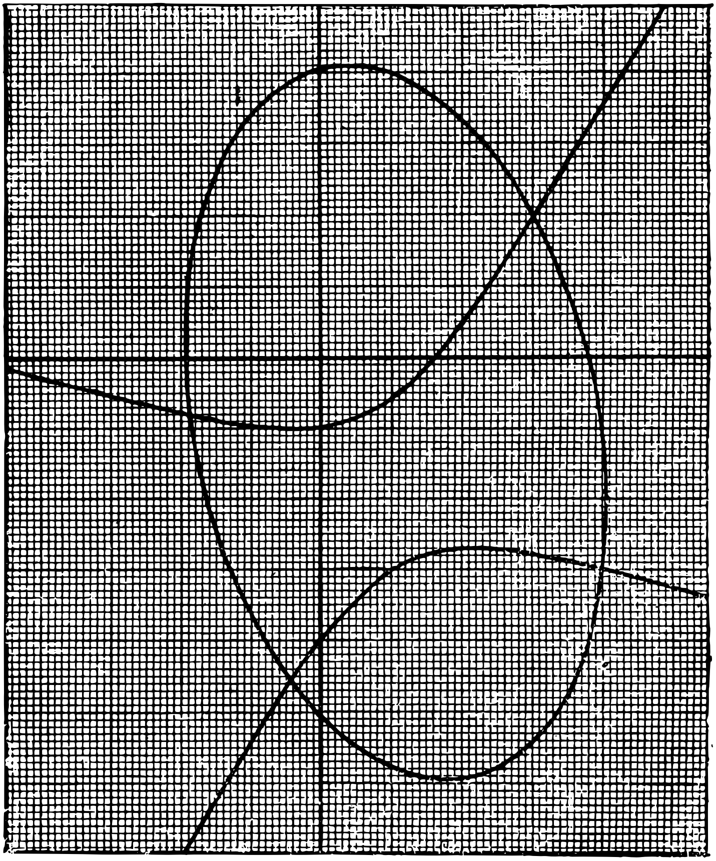
$$14x^2 + 4xy^2 + 5y^2 + 26x - 5y - 102 = 0$$

представлено на фиг. 8.

1) Проверить точность этого чертежа вычислением для возможно большего числа точек. 2) Выяснить на основании указаний задач 411, 9—13 характер расположения кривой на плоскости. 3) Кривая

$$5x^2 + 14xy - 10y^2 - 17x + 50y - 40 = 0,$$

также изображена на фиг. 8. 4) Проверить точность построения этой кривой. 5) Исследовать расположение этой кривой. 6) Прочесть по чертежу координаты точек пересечения этих кривых. Оказывается, что две точки пересечения кривых имеют координаты, выражаемые целыми числами. 7) Пользуясь этим, определить возможно точнее координаты остальных точек пересечения (зная два корня получаемого после исключения одной координаты уравнения четвертой степени).



Фиг. 8.

413. 1) Построить кривые:

$$xy - 2y = 16,$$
$$x^2 - 2xy - 2x + 4y + 24 = 0.$$

2) Найдя по чертежу действительные значения координат двух точек пересечения, определить пары мнимых решений предложенной системы уравнений (воспользоваться указанием зад. 414).

414. Решить графически, а, если возможно, и вычислением следующие системы:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0,$
$7x + xy + 4y - 20 = 0;$

2) $x^2 + y^2 + 2x + 2x = 15,$
$3x + xy + 3y = 9;$

3) $xy = 1,$
$x^2 + y^2 + 5x + 5y + 6 = 0;$

4) $2y^2 - x + 4y + 2 = 0,$
$x^2 + y^2 - 7x + 2y + 10 = 0;$

5) $y = 2x^2 - 4x + 1,$
$x^2 + y^2 - 2x - 5y + 4 = 0;$

6) $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 9\frac{1}{4},$
$xy = 1;$

7) $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 14,$
$x + xy + y = 5.$

Пересечение двух кривых при их особом относительном расположении.

415. 1) Эллипс с полуосями $a = 15$ *см*, $b = 10$ *см* пересекается с параболой, фокус и вершина которой располагаются на одной и той же его большой полуоси, при чем вершина параболы от центра эллипса находится на расстоянии 13 *см*, а фокус на расстоянии 9 *см*. Определить точки пересечения обеих кривых.

2) Тот же эллипс, что и в задаче 1), пересекается с равносторонней гиперболой, полуось которой равна 12 *см*, а асимптоты совпадают с осями эллипса. Определить точки пересечения кривых.

3) Эллипс, данный в задаче 1), пересекается с равносторонней гиперболой, полуось которой равна 3 *см*, а асимптоты являются осями симметрии прямоугольника, построенного на полуосях эллипса. Определить точки пересечения этих кривых.

4) Центр эллипса с полуосями $a = 10$ *см*, $b = 7$ *см*, служит фокусом параболы, вершина которой совпадает с вершиной малой полуоси эллипса. Определить точки пересечения этих кривых.

5) Полуоси гиперболы соответственно равны $a = 7$ *см* и $b = 8$ *см*. Центр гиперболы служит фокусом параболы, вершина которой совпадает с одной из вершин гиперболы. Где пересекаются обе кривые?

6) Полуоси гиперболы: $a = 6$ *см*, $b = 15$ *см*. Ее оси совпадают с асимптотами равносторонней гиперболы, полуось которой $a_1 = 20$ *см*. Найти точки пересечения этих кривых.

7) Две конгруентных параболы с параметром $= 9$ *см*, направленные в противоположные стороны, так располагаются одна относительно другой, что их директрисы находятся на расстоянии

5 *см*, а оси — на расстоянии 3 *см*. Определить точки пересечения парабол.

8) Два концентрических эллипса расположены так, что их главные оси взаимно перпендикулярны. Полуоси одного эллипса равны 40 *см* и 25 *см*, а другого 52 *см* и 26 *см*. Определить точки пересечения обоих эллипсов.

9) Два конгруентных эллипса, у которых большая ось вдвое больше малой, так расположены, что малая полуось одного эллипса совпадает с большой полуосью другого. Где пересекаются эллипсы?

Общее уравнение второй степени с двумя неизвестными имеет вид:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + bx + ey + f = 0.$$

Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, носит название кривой второго порядка.

Так как при умножении всех членов уравнения на одно и то же число, не равное ни нулю, ни бесконечности, получается уравнение, равносильное ему, то, хотя в уравнение кривой второго порядка входит шесть коэффициентов, кривая оказывается вполне определенной, если задать пять величин, например пять отношений между этими шестью коэффициентами.

Кривая второго порядка оказывается вполне определенной, если задать пять точек, через которые она должна проходить.

Преобразованием координат уравнение кривой второго порядка может быть упрощено.

Если уравнение второй степени не разлагается на два множителя первой степени относительно x и y и имеет более одной системы действительных решений, то оно определяет одну из следующих кривых; эллипс (в частном случае окружность), гиперболу (в частном случае равностороннюю) или параболу.

Все эти кривые могут быть определены геометрически, как места таких точек, расстояние которых от определенной точки *(фокуса)* и от определенной прямой *(директрисы)* находятся в данном отношении; это отношение называется эксцентриситетом и обозначается буквой e; для параболы $e = 1$, для эллипса e меньше, а для гиперболы—больше единицы.

У параболы одна директриса и один фокус, а у эллипса и гиперболы по две директрисы и по два фокуса.

Эллипс может быть определен, как геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек (фокусов) постоянна. Гипербола может быть определена, как геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек (фокусов) постоянна.

Система уравнений, из которых одно первой степени и другое второй, сводится исключением одной из неизвестных к решению квадрат-

ного уравнения; поэтому эта система имеет две системы корней; следовательно, кривая второго порядка пересекается с прямой в двух точках (которые называются действительными, слившимися или мнимыми в зависимости от того, какие корни входят в систему решений).

Порядком кривой называется число точек пересечения ее с прямой. Решение системы двух уравнений второй степени приводится исключением одной из неизвестных к решению уравнения четвертой степени. Следовательно, две кривые второго порядка пересекаются в четырех точках.

Так как решение уравнения четвертой степени представляет задачу более высокой трудности (более высокого порядка), чем решение уравнения второй степени, то решение систем квадратных уравнений не может быть рассмотрено во всей полноте в теории квадратных уравнений.

Системы уравнений со многими неизвестными.

416. Решить системы:

1) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 61 \\ y^2 + z^2 &= 85 \\ z^2 + x^2 &= 74; \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 &= 59 \\ 3y^2 + 2z^2 &= 98 \\ 3z^2 + 2x^2 &= 93; \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 3z^2 &= 70 \\ y^2 + 2z^2 + 3x^2 &= 53 \\ z^2 + 2x^2 + 3y^2 &= 51; \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} x(x + y + z) &= -15 \\ y(x + y + z) &= 10 \\ z(x + y + z) &= 30; \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} x(x + y + z) &= a \\ y(x + y + z) &= b \\ z(x + y + z) &= c; \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} 2x - 4y - z &= 0 \\ x + y - 4z &= 0 \\ \frac{x+1}{y-1} &= \frac{y+6}{z+1}; \end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned} ax &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ by &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ cz &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}; \end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned} \frac{xyz}{y+z} &= a \\ \frac{xyz}{x+z} &= b \\ \frac{xyz}{x+y} &= c; \end{aligned}$$

9) $$\begin{aligned} xy &= a \\ yz &= b \\ zx &= c; \end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned} x^3 &= ayz \\ y^3 &= bxz \\ z^3 &= cxy; \end{aligned}$$

11) $$\begin{aligned} x^2yz &= a \\ xy^2z &= b \\ xyz^2 &= c; \end{aligned}$$

12) $$\begin{aligned} x(y + z) &= 220 \\ y(z + x) &= 252 \\ z(x + y) &= 196; \end{aligned}$$

13) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 484 \\ x:y &= 1:3 \\ y:z &= 2:3; \end{aligned}$$

14) $$\begin{aligned} xy + yz - zx &= 1 \\ xy - yz + zx &= 11 \\ -xy + yz + zx &= 19; \end{aligned}$$

15) $$\begin{aligned} 5xy + 2xz + 3yz &= 240 \\ 2xy - 3xz + 6yz &= 207 \\ 3xy + 5xz - 2yz &= 68; \end{aligned}$$

16) $$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 49 \\ x^2 + xz + z^2 &= 79 \\ y^2 + yz + z^2 &= 109; \end{aligned}$$

17) $$\begin{aligned} (x + y)^2 + (x + z)^2 + (y + z)^2 &= 94 \\ 2(x + y)^2 - 3(x + z)^2 + 4(y + z)^2 &= 26 \\ 5(x + y)^2 - 4(x + z)^2 - 9(x + z)^2 &= 20; \end{aligned}$$

18) $x + y = 5t$
$x - y = 2t$
$x^3 + y^3 = 185t;$

19) $x + y = 2t$
$x^2 + y^2 = 5t$
$x^3 + y^3 = 7t^2;$

20) $x:y = y:z$
$x + y + z = 19$
$x^2 + y^2 + z^2 = 133;$

21) $x:y = y:z$
$xyz = 64a^3$
$x + y + z = 21a;$

22) $x^2 - y^2 - z^2 - 11$
$yz = 2$
$x + y + z = 7;$

23) $x^2 + y^2 + z^2 = 35$
$xy + yz + zx = 23$
$x + y = 8;$

24) $x + y = 7$
$w + v = 3$
$x + w^2 = 3$
$y + v^2 = 4;$

25) $x + y = 2$
$w + v = 4$
$x^2 + w^2 = 34$
$y^2 + v^2 = 50;$

26) $x:v = w:y$
$x + y = 16$
$v + w = 14$
$\frac{v}{x} + \frac{w}{y} = 4;$

27) $xy = 24$
$vw = 6$
$x + v = 14$
$y + w = 4;$

28) $x + y = 16$
$v + w = 12$
$xy + vw = 95$
$xv + yw = 100;$

29) $x^2 + y^2 = 17$
$v^2 + w^2 = 13$
$xy + vw = 10$
$xv + yw = 14.$

§ 13. Задачи на составление систем уравнений второй степени.

417. 1) Найти два числа, сумма квадратов которых равна 145, а разность квадратов 17.

2) Произведение двух чисел, находящихся в отношении 3 : 4, равно 588; найти эти числа.

3) Отношение двух чисел равно 4 : 7; сумма их квадратов равна 585. Определить эти числа.

4) Разность квадратов двух чисел, отношение которых равно 2:5, равна 1029. Найти эти числа.

5) Два числа относятся между собой, как 5 : 11; квадрат первого числа на 90 меньше 15-ти-кратного второго числа. Определить эти числа.

6) Сумма двух чисел относится к их разности, как 7 : 2, а разность квадратов этих чисел равна 56. Найти эти числа.

7) Сумма двух чисел равна 90, произведение их равно 2016. Найти эти числа.

8) Разложить число 84 на два слагаемые, произведение которых равно 1728.

9) Число 864 разложить на два множителя, сумма которых равна 60.

10) Среднее арифметическое двух чисел равно 25, а среднее геометрическое 15. Определить эти числа.

11) Среднее пропорциональное двух чисел, из которых одно больше другого на 21, равно 14. Найти эти числа.

12) Разность квадратов двух чисел, произведение которых равно 54, более квадрата их разности в 5 раз. Найти эти числа.

13) Если произведение двух чисел увеличить на первое из них, то получится 300; если же произведение увеличить на второе из них, то получится 304. Определить эти числа.

14) Произведение двух чисел на 91 больше 10-кратного первого числа и на 51 больше 10-кратного второго числа. Найти эти числа.

15) Число 100 разделить на такие две части, чтобы сумма квадратов их равнялась 5882.

16) Разность двух чисел равна 8, сумма их квадратов 2210. Определить эти числа.

17) Число 100 разделить на две такие части, чтобы квадрат первой части был на 10 меньше семикратной второй.

18) Сумма двух чисел, сложенная с суммой квадратов этих чисел, равна 686, а сумма разности этих чисел и разности квадратов их равна 74. Определить эти числа.

19) Сумма квадратов двух чисел составляет 370. Если бы первое число было единицей больше, а второе 3-мя больше, то сумма квадратов была бы равна 500. Определить эти числа.

20) Сумма суммы и произведения двух чисел равна 1063; произведение этих чисел на 1099 меньше суммы их квадратов. Найти эти числа.

21) Сумма цифр двузначного числа на 29 меньше произведения этих цифр и на 72 меньше суммы квадратов цифр. Определить это число.

22) Определить двузначное число, если известно, что оно втрое больше произведения его цифр; если записать цифры в обратном порядке, то получится новое число, отношение которого к искомому равно 7 : 4.

23) Если переставить цифры искомого двузначного числа, то получится число, которое на 18 меньше искомого; произведение обоих чисел в 126 раз больше произведения цифр, которыми они записаны. Определить число.

24) Если искомое двузначное число разделить на произведение его цифр, то получится 5 в частном и 2 в остатке; если переставить цифры и произвести то же деление, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найти двузначное число.

25) Двузначное число на 4 больше суммы квадратов его цифр. Если цифры написать в обратном порядке, то вновь полученное число будет на 13 больше суммы квадратов его цифр. Найти число.

26) Определить двузначное число, которое на 4 меньше суммы квадратов его цифр и на 5 больше удвоенного произведения этих цифр.

27) Если числитель искомой дроби увеличить на 6, а знаменатель ее уменьшить на 2, то вновь полученная дробь будет вдвое больше первопачальной. Если же увеличить числитель на 3, а знаменатель уменьшить на 3, то получится дробь, обратная первоначальной. Определить дробь.

28) Сумма двух чисел, умноженная на сумму квадратов этих чисел, равна 320, а разность их, умноженная на разность их квадратов, равна 128. Найти числа.

29) Разность двух чисел равна 7, разность их кубов равна 2863. Найти эти числа.

30) Сумма двух чисел равна 50; если первое из них увеличить на 3, а второе уменьшить на 3, то сумма кубов вновь полученных чисел будет равна 35000. Найти эти числа.

31) Число 16120 разделить на такие две части, чтобы сумма кубических корней из этих частей была равна 40.

32) Сумма двух чисел на 76 больше их среднего геометрического. Квадратный корень из одного числа на 6 больше квадратного корня из другого числа. Определить эти числа.

33) Определить два числа по следующим условиям: если сумму этих чисел умножить на разность их квадратов, то получится 1296; если же умножить разность этих чисел на сумму их квадратов, то получится 680.

34) Если попарно перемножить три искомых числа, то получится соответственно 84, 120 и 280. Определить эти числа.

35) Если сумму трех чисел умножать на каждое из них, то произведения дадут соответственно 240, 270 и 390. Найти эти числа.

36) Если 3 искомых числа; сумма которых равна 100, разделить соответственно на 3, 4 и 5, то сумма полученных частных будет равна 25. Произведение двух последних чисел в $2\frac{1}{2}$ раза больше квадрата первого числа. Определить эти числа.

37) Сумма трех чисел равна 65, второе из них есть среднее геометрическое между первым и третьим и среднее арифметическое между третьим и разностью первого числа и 20. Найти числа.

38) Если цифры искомого трехзначного числа записать в обратном порядке, то получится число, на 198 меньше первоначального. Сумма цифр числа равна 12, сумма их квадратов 74. 1) Найти искомое число. 2) Как изменится решение, если слово «меньше» заменить словом «больше»?

39) В непрерывной геометрической пропорции сумма ее трех членов равна 39, сумма их квадратов равна 741. Найти пропорцию.

40) Если из трех искомых чисел сумму каждых двух из них умножить на третье, то получатся числа 810, 680, 572. Определить эти числа.

41) Определить три числа по следующему условию: разности между квадратом одного из этих чисел и квадратом разности двух других равны соответственно 3, 5 и 15.

42) Произведения по три четырех искомых чисел равны 120, 150, 240 и 400. Найти эти числа.

43) Сумма крайних членов пропорции равна 24, сумма средних равна 16; сумма первых трех членов втрое больше суммы трех последних. Определить пропорцию.

44) Четыре искомых числа составляют пропорцию. Сумма первого и четвертого членов равна 22, сумма второго и третьего равна 13; сумма квадратов всех четырех чисел равна 493. Найти эти числа.

Задачи из геометрии.

418. 1) Через точку, отстоящую от центра на 5 *см* и лежащую внутри круга с радиусом в 13 *см*, проведена хорда длиною в 25 *см*. Определить отрезки, на которые данная точка делит хорду.

2) В круге, радиус которого равен 20 *см*, проведена хорда длиною в 24 *см*. Определить расстояние от центра точки пересечения касательных, точками прикосновения которых являются концы данной хорды.

3) В двух концентрических кругах, радиусы которых равны $r = 25$ *см* и $\rho = 17$ *см*, требуется провести хорду так, чтобы часть ее, лежащая во внутреннем круге, составляла $\frac{2}{5}$ всей хорды. Определить длину хорды и расстояние ее от центра.

4) Вне круга, радиус которого равен 21 *см*, дана точка на расстоянии 29 *см* от центра. Провести через данную точку секущую так, чтобы внутренний отрезок ее был равен 9 *см*. Определить длину секущей.

5) Периметр прямоугольника содержит 82 *м*, диагональ его равна 29 *м*. Определить стороны прямоугольника.

6) Диагональ прямоугольника, площадь которого содержит 120 *м*^{2}, равна 17 *м*. Определить стороны прямоугольника.

7) Диагональ прямоугольника равна 85 *м*. Если каждую из сторон увеличить на 2 метра, то площадь нового прямоугольника будет на 230 *м*^{2} больше первоначального. Определить стороны.

8) Площадь прямоугольника содержит 168 *м*^{2}, периметр его равен 62 *м*. Определить стороны.

9) Данный прямоугольник со сторонами в 5 *см* и 7 *см* требуется превратить в равновеликий ему прямоугольник, периметр которого втрое больше периметра данного. Определить стороны нового прямоугольника.

10) Диагональ данного прямоугольника равна 89 *м*. Если бы каждая из сторон была на 3 *м* короче, то диагональ была бы на 4 *м* короче данной. Определить стороны данного прямоугольника.

11) Диагональ данного прямоугольника равна 65 *м*. Если бы меньшая сторона была на 17 *м* короче, а большая на 7 *м* длиннее, то диагональ прямоугольника была бы та же. Определить стороны данного прямоугольника.

12) Площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 41 *м*, содержит 180 $м^2$. Найти катеты.

13) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 30 *см*; перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен 12 *см*. Определить катеты.

14) Определить стороны прямоугольного треугольника, периметр которого равен 48 футам, а высота, соответствующая гипотенузе, равна 9 футам.

(Представив 1-е уравнение в виде: $x + y = 48 - z$, возвести обе части его в квадрат.)

15) Разность катетов прямоугольного треугольника равна 10 метрам, а высота, соответствующая гипотенузе, равна 24 метрам. Определить стороны и отрезки гипотенузы.

16) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна a; три стороны треугольника составляют непрерывную геометрическую пропорцию. Вычислить отрезки гипотенузы и указать способ их построения.

17) Определить стороны треугольника, если известно, что одна сторона равна 39 *м*, сумма двух других содержит 66 *см*, и угол между ними равен 60°.

18) На двух пересекающихся прямых, образующих угол в 60°, даны две точки A и B на расстоянии 31 *м* друг от друга. Если точку A приблизить к точке пересечения на 20 *м*, то расстояние от A до B будет равно лишь 21 *м*. Определить расстояния точек A и B до точки пересечения.

19) Определить площадь прямоугольника, если дано, что диагональ его, сложенная с одной из сторон, равна 49 футам, а сложенная с другою из сторон равна 32 фут.

20) Основание одного прямоугольника на 20 метров более основания другого, а высота первого на 8 метров меньше высоты второго; площадь каждого из этих прямоугольников равна 600 кв. метрам. Определить основание и высоту каждого из них.

21) Площадь ромба равна 480 кв. дюймам, а сторона 26 дюймам. Определить диагонали.

22) Сумма площадей четырех квадратов равна 1040 кв. метрам. Определить сторону каждого из них, если эти стороны находятся в отношениях $2:3:4:6$.

23) По данным гипотенузе a и периметру p определить катеты прямоугольного треугольника.

24) Определить периметр равнобедренного треугольника, если одна из равных сторон его равна a, а площадь s.

25) По данным периметру p и диагонали d прямоугольника определить его стороны.

26) Определить стороны прямоугольника, равновеликого треугольнику и имеющего равный с треугольником периметр, если периметр треугольника $2p$, основание b и высота его h.

27) Равнобедренная трапеция, высота которой равна 9 см и разность оснований равна 18 *см*, вписана в круг, радиус которого равен 25 *см*. Определить основания и расстояния их от центра.

28) Площадь равнобедренной трапеции, высота которой равна 35 *см*, содержит 1080 *см*^{2}. Радиус описанного около трапеции круга равен 65 *см*. Определить основания трапеции и положение центра круга.

29) Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда содержит 568 *см*^{2}. Одно из его измерений на 4 *см* больше второго и на 4 *см* короче третьего. Определить ребра параллелепипеда.

30) Три измерения прямоугольного параллелепипеда находятся в отношениях $3:4:12$. Диагональ параллелепипеда равна 91 *см*. Вычислить ребра параллелепипеда.

31) Объем прямоугольного параллелепипеда содержит 585140 *м*^{3}. Из трех его измерений можно построить прямоугольный треугольник, площадь которого равна 2730 *м*^{2}. Определить ребра параллелепипеда.

32) Высота прямоугольного параллелепипеда равна 12 *см*, диагональ его равна 13 *см*. и объем — 144 *см*^{3}. Определить стороны его основания.

33) Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда содержит 522 *см*^{2}, диагональ его равна 17 *см*. Сумма двух ребер на 13 *см* больше третьего. Найти ребра параллелепипеда.

34) Осевое сечение прямого цилиндра есть прямоугольник, периметр которого равен 26 *см*; полная поверхность равна 44π *см*^{2}. Определить объем цилиндра.

35) Периметр осевого сечения прямого цилиндра, боковая поверхность которого равна 220 *см*^{2}, равен 34 *см*. Определить высоту и радиус основания цилиндра $\left(\pi = 3\frac{1}{7}\right)$.

36) В шар, радиус которого равен 25 *м*, вписан цилиндр, боковая поверхность которого содержит 2112 $м^2$. Определить высоту и радиус основания цилиндра.

37) В шар, радиус которого равен 29 *м*, вписан цилиндр; периметр осевого сечения цилиндра равен 164 *м*. Определить высоту и радиус основания цилиндра.

38) Около цилиндра, полная поверхность которого равна 9680 кв. см, описан шар; радиус шара равен 50 *см*. Определить высоту и радиус основания цилиндра.

39) Отношение диаметра основания к образующей прямого конуса равно 10 : 13; полная поверхность конуса содержит 360π $м^2$. Определить диаметр и образующую.

40) Образующая прямого конуса на 3 *см* больше диаметра основания; полная поверхность равна 36π $см^2$. Определить боковую поверхность и объем.

41) Высота прямого конуса равна 12 *см*, боковая поверхность содержит 135π $см^2$. Определить полную поверхность и объем.

42) Полная поверхность прямого конуса, высота которого равна 4 *см*, содержит 24π $см^2$. Определить радиус основания и образующую.

43) Полная поверхность прямого конуса равна 96π $м^2$; площадь осевого сечения содержит 48 $м^2$. Определить высоту, радиус основания и образующую.

44) Полная поверхность прямого усеченного конуса содержит 120π $см^2$; образующая равна 10 *см*; отношение радиусов оснований равно 1 : 5. Определить радиусы.

45) Радиусы оснований прямого усеченного конуса, высота которого равна 10 *см*, а объем содержит 390π $см^3$, относятся между собой как 1 : 3. Определить радиусы.

46) Сумма радиусов оснований прямого усеченного конуса, высота которого равна 21 *см*, а объем содержит 2926 $см^3$, равна 13 *см*. Определить радиусы.

47) Разность радиусов оснований прямого усеченного конуса, высота которого равна 5 *см*, а объем содержит 140π $см^3$, равна 6 *см*. Определить радиусы.

48) Высота прямого усеченного конуса равна 12 *м*, объем его равен 616 $см^3$. Определить радиусы оснований, если произведение их значений (в метрах) равно 15.

49) Высота прямого усеченного конуса равна 12 *см*, образующая его равна 13 *см*, объем его содержит 532π $см^3$. Определить радиусы оснований.

50) В данный прямой усеченный конус вписан полушар, радиус которого равен 3 *см*. Объем конуса равен 31π $см^3$. Определить радиусы оснований конуса. (Прежде всего следует

геометрически показать, что образующая равна большему радиусу.)

51) Определить радиусы оснований прямого усеченного конуса, описанного около шара, радиус которого равен r, если известно, что объем усеченного конуса в $1\frac{1}{2}$ раза больше объема шара.

52) Объем прямого усеченного конуса, описанного около шара, радиус которого равен 6 *см*, равен 1672 *см*^{3}. Определить высоту, радиусы оснований и боковую поверхность $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

53) Высота прямого усеченного конуса равна 6 *см*, объем его содержит 182π *см*^{3}, а боковая поверхность 100π *см*^{2}. Вычислить радиусы оснований.

54) Сумма площадей оснований прямого усеченного конуса, высота которого равна 3 *м*, равна 80π *м*^{2}, боковая поверхность равна 60π *м*^{2}. Определить радиусы оснований.

55) Прямой усеченный конус, осевое сечение которого описано около круга с площадью 15π *м*^{2}, имеет высоту и объем, равные высоте и объему конуса, радиус основания которого = 7 метрам. Определить радиусы оснований и высоту усеченного конуса.

Задачи из физики.

419. 1) Две силы, приложенные к одной и той же точке, направлены друг к другу под прямым углом; отношение сил равно 2 : 5; равнодействующая равна 37,7 килограмма. Определить силы.

2) Определить удельный вес двух тел, если смесь, содержащая a *кг* первого тела и b *кг* второго имеет удельный вес p, а смесь, содержащая c *кг* первого и d *кг* второго, имеет удельный вес q.

3) На оси линзы находится светящая точка; изображение ее, даваемое линзой, находится от этой точки на расстоянии 150 *см*. На каком расстоянии от линзы находится светящая точка, если фокусное расстояние линзы равно 24 *см*?

4) На вогнутое зеркало падает свет из некоторой точки его оптической оси; если светящую точку приблизить к зеркалу на 40 *см*, то ее изображение удалится от зеркала на 5 *см*. Определить расстояние от зеркала светящей точки и ее изображения, если фокусное расстояние зеркала равно 20 *см*.

5) Фокусное расстояние линзы равно 36 *см*. Определить, на каком расстоянии от нее находится предмет, если при приближении его к линзе на 36 *см* его изображение удаляется от линзы на 18 *см*.

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ.

ПЯТАЯ ГЛАВА.

Ряды (прогрессии).

§ 1. Арифметические ряды (прогрессии) первого порядка.

420. Вычислить значения функции $a_x = a_1 + r(x - 1)$ при $x = 1, 2, 3$ и т. д. до n. Записать полученные значения в ряд в порядке их получения, отделяя полученные последовательные значения друг от друга запятыми.

a_1	1	?	100	5	a	a
r	1	2	-10	0	$a+1$	d

Какими свойствами обладают члены написанного ряда? Как получить каждый член ряда из предыдущего? Как называется написанный ряд? Что называется разностью арифметической прогрессии?

421. Первый член арифметической прогрессии равен a_1, разность r. Определить значения второго, третьего, седьмого, . . k-го членов.

422. Если a_{k-1}, a_k, a_{k+1} три последовательные члена арифметического ряда, то $a_{k-1} - a_k = a_{k-1}$, следовательно, $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$. В какой форме, согласно этому, можно дать определение арифметической прогрессии, пользуясь понятием среднего арифметического?

423. 1) Какая арифметическая прогрессия называется возрастающей, какая убывающей? 2) Какой вид будет иметь прогрессия при $r = 0$?

424. 1) Первый член арифметической прогрессии равен 1, разность 2, число членов 10. Написать ряд. 2) Вычислить наиболее простым способом сумму всех членов этого ряда.

425. Первый и второй члены арифметической прогрессии суть:

1) 1 и 2; 2) 1 и 3; 3) 2 и 4; 4) 1 и -1

5) 1 и -2; 6) -1 и 1; 7) $\frac{1}{2}$ и -1; 8) $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$;

9) 0,1 и $-0{,}2$; 10) a и b.

Написать следующие три члена прогрессии.

426. В папирусе, найденном в Кагуне, к югу от пирамиды Иллагун (Illahun), относящемся к двадцатому веку до нашей эры, встречается десятичленный арифметический ряд, первые два члена которого суть $13\frac{3}{4}$ и $12\frac{11}{12}$. Найти остальные члены.

427. Первый член некоторой прогрессии равен 0, разность 5; последний член 30. Написать ряд, определить число членов и сумму членов.

428. Решить предыдущую задачу для ряда: первый член равен -10, разность 3 и последний член 17.

429. Представить прогрессии задачи 425 (с 1 по 10) графически, принимая номера членов за абсциссы точек, а значения членов за ординаты этих точек. Что можно сказать относительно расположения точек, соответствующих отдельным членам этих рядов?

430. 1) Первый член прогрессии равен 496, седьмой 6. 2) Первый равен 1, пятый член равен -5. Определить промежуточные члены вычислением и графически.

431. 1) Как изменится разность прогрессии, если порядок ее членов переменить на обратный? 2) Как изменится графика этого ряда?

Сумма членов арифметической прогрессии.

432. Вычислить наиболее коротким путем:

1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$;
2) $30 + 31 + 32 + 33 + 34 + \ldots + 40$;
3) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 100$;
4) $101 + 102 + 103 + 104 + \ldots + 1000$;
5) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$;
6) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + \ldots + 50$;
7) $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$.

433. Прогрессия, первый член которой равен a_1, разность r, последний член a_n, написана в обратном порядке. Определить первый член нового ряда, второй член, третий, k-ый и последний.

434. В n-членной арифметической прогрессии сложить 1-ый и n-ый члены, 2-ой и $n-1$-ый, и вообще k-ый и $n-k+1$-ый. Какой закон можно при этом подметить?

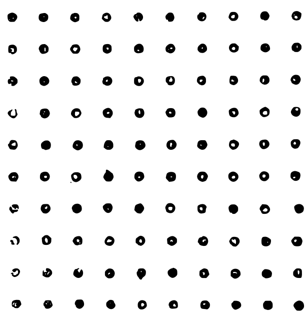
435. Под членами арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3... a_k... a_n подписать соответственные члены другой прогрессии, полученной из первой переменной порядка членов на обратный. 1) Чему равна сумма каждой пары членов, расположенных друг под другом? 2) Как, в силу этого, можно найти сумму ряда, т.-е. сумму всех членов ряда до n-го включительно?

436. 1) Как, пользуясь графикой членов арифметического ряда, можно представить графически сумму членов этого ряда в виде площади некоторой фигуры? 2) Представить геометрически данный в задачах 433 — 435 вывод формулы суммы членов арифметического ряда.

437. 1) При помощи фиг. 9 найти результат, полученный Ямвлихом (начало IV столетия нашей эры):

$$1+2+3+\ldots+9+10+9\ldots+\\+3+2+1=10^2.$$

(Соединяя точки, расположенные по параллелям к диагонали квадрата, образованного точками.) 2) Представить a^2 в виде суммы членов ряда, начинающегося с 1 и кончающегося 1.



Фиг. 9.

438. Пользуясь фиг. 9: 1) Показать, что $1+3+5+7+\ldots+19=10^2$ (соединяя точки ломаными, образующими прямой угол). 2) Показать, что вообще квадрат каждого числа может быть представлен в виде суммы ряда нечетных чисел, начиная с 1. Какое значение имеет последнее число этого ряда?

439. Если a_1 — первый член, r — разность, n — число членов, a_n — последний и s_n — сумма, то имеют место следующие соотношения:

$$\text{I. } a_n = a_1 + (n-1)\,r;$$

$$\text{II. } s_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n;$$

$$\text{III. } s_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,r = [2a_1 + (n-1)r]\,\frac{n}{2}.$$

Вывести формулу III из первых двух основных.

440. Составить формулу суммы членов прогрессии, если известны n, r, a_n, и вывести эту формулу двумя способами из той или другой пары формул, данных в задаче 439.

441. Сколько величин достаточно дать для полного определения арифметической прогрессии (Почему?!)?

442. В арифметической прогрессии:

	Дано.	Определить.		Дано.	Определить.
1)	n, a_n, s_n	a_1, r	6)	a_1, n, s_n	r, a_n
2)	r, a_n, s_n	a_1, n	7)	a_1, n, a_n	r, s_n
3)	r, n, s_n	a_1, a_n	8)	a_1, r, s_n	n, a_n
4)	r, n, a_n	a_1, s_n	9	a_1, r, a_n	n, s_n
5)	a_1, a_n, s_n	r, n	10)	a_1, r, n	a_n, s_n

Почему задачи 2 и 8 приводятся к квадратным уравнениям (обратить внимание на основную формулу II)? Почему достаточно знать, что задача 2 сводится к квадратному уравнению, чтобы можно было заключить, что и задача 8 приводится к тому же (обратить внимание на одинаковую роль a_1 и a_n; обратимость ряда)?

Возрастание абсолютного значения n-ого члена арифметической прогрессии и суммы ее членов при возрастании n.

443. Найти в прогрессии

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9....$$

такой ее член, который 1) больше 1000; 2) больше 1000000; больше 5550. В каждом случае указать его номер.

444. Найти в прогрессии a_1, a_2, a_3,... a_k... первый из членов ее, превосходящих по абсолютному значению число A. Указать его номер.

445. Найти, сколько (наименьшее возможное число) членов нужно взять в прогрессии:

1) 1, 3, 5, 7...
2) 1, 10, 100, 1000...
3) 5, 7, 9, 11...,

чтобы сумма их превзошла число 1000000.

446. Найти, сколько членов нужно взять в прогрессии:

1) 1, 7, 13, 19... —
2) — 100, — 98, — 96...
3) 1000, 995, 990...,

чтобы абсолютное значение суммы превысило 1000000.

447. Сколько членов следует взять в прогрессии

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\ a_k,$$

чтобы абсолютное значение их суммы превзошло A. Разобрать отдельно случаи: 1) когда все члены положительны и $r > o$; 2) когда a_1 и некоторое число следующих за ним членов отрицательных и $r > o$; 3) когда $a_1 > o$ и $r < o$ 4) когда $a_1 < 0$ и $r < o$.

§ 2. Примеры.

448. Найти в натуральном ряде n-ое нечетное число и сумму n первых нечетных чисел. Положить $n = 20$.

449. Найти в натуральном ряде n-ое четное число и определить сумму первых n четных чисел. Положить $n = 24$.

450. Определить сумму всех натуральных чисел 1) от 1 до 100; 2) от 1 до n.

451. Определить сумму всех трехзначных чисел.

452. Определить сумму всех нечетных чисел, начиная с 13 и кончая 81.

453. Определить сумму всех четных чисел от 24 до 97 включительно.

454. Определить сумму всех чисел, кратных 3-х, начиная с 3 и кончая 99.

455. Определить сумму всех чисел, кратных 7, начиная с 7 и кончая 343.

456. Определить сумму всех чисел, кратных p, начиная с p и кончая np.

457. Определить сумму всех чисел, кратных k, начиная с mk и кончая nk.

458. Решить следующие задачи, полагая в ниже помещенной таблице известными три величины из пяти (проверить таким образом таблицу):

	a_1	r	n	a_n	s_n		a_1	r	n	a_n	s_n
1)	1	12	40	469	9400	8)	5	$-3\frac{1}{2}$	13	-37	-208
2)	2	3	17	50	442	9)	-4	$5\frac{1}{3}$	37	188	3404
3)	21	-5	17	-59	-323	10)	$-4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	20	100	955
4)	$-37\frac{1}{2}$	4	22	$46\frac{1}{2}$	99	11)	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	24	34	448
5)	29	$1\frac{1}{2}$	33	77	1749	12)	60	$-1\frac{1}{4}$	21	35	$997\frac{1}{2}$
6)	25	$-2\frac{1}{2}$	25	-35	-125	13)	5,2	0,4	43	22	584,8
7)	-19	$1\frac{1}{2}$	29	23	58	14)	2,3	1,3	19	25,7	266

459. Между каждыми двумя последовательными членами арифметического ряда 1, 5, 9, 13 и т. д. поместить по 5 таких чисел, чтобы снова получить арифметический ряд. (Интерполяция.) 1) Написать этот новый ряд. Получить члены этого ряда на графике.

460. Между каждыми двумя последовательными членами ряда 2, 14, 26 вставить по 7 средних арифметических. Составить искомый ряд вычислением и путем построения.

461. Поместить между a и b n чисел так, чтобы получить арифметическую прогрессию (интерполировать между a и b n членов). 1) Определить разность полученного ряда и первые три члена. Продолжить ряд за b (экстраполяция). 2) Определить три ближайших члена, следующих за b. 3) Определить $n^2 + n + 1$-ый член этого ряда.

462. 7-й член арифметической прогрессии равен 10; 17-й член равен 50-ти. Определить первый член и разность прогрессии. 1) Решить задачу вычислением. 2) При помощи графики.

463. Одиннадцатый член арифметической прогрессии равен 47, девятнадцатый член 75. Определить 283 член.

464. Сумма четвертого и седьмого членов арифметической прогрессии $= 100$. Сумма 17-го и 29-го равняется 800. Найти прогрессию.

465. Сумма тридцати семи первых членов арифметической прогрессии равна 888, разность между 13-м и 31-м членами равна 126. Определить первый член и разность прогрессии.

466. Даны две прогрессии: первый член одной из них равен 1, а 7-й член равен 4; первый член другой прогрессии равен 11, а 6-й член — единице. 1) Определить графически член, общий обоим рядам (т.-е. число, встречающееся в обоих рядах под одним и тем же номером.)

467. Определить число членов и последний член арифметической прогрессии, если первый член ее равен — 7, разность 3, а сумма всех членов 430. Другие примеры можно взять из таблицы задачи № 458.)

468. Последний член арифметической прогрессии равен 97, разность 3, сумма 1612. Определить первый член и число членов. (Другие примеры можно взять из таблицы задачи № 458.)

469. В арифметической прогрессии, состоящей из 20 членов, произведение двух средних членов равно 725, сумма 3-го и 12-го членов равна 30. Определить первый член и разность прогрессии.

470. Сумма крайних членов десятичленной арифметической прогрессии равна 67, сумма их квадратов равна 2609. Определить первый член и разность.

471. Произведение крайних членов арифметической прогрессии, состоящей из 14 членов, равно 276, произведение двух средних членов равно 1326. Определить первый член и разность.

472. В арифметической прогрессии, состоящей из 100 членов, сумма всех членов равна 8200. Произведение двух средних членов равно 6723. Определить первый член и разность.

473. Какое натуральное число равно сумме всех ему предшествующих натуральных чисел?

474. Определить натуральное число, которое 1) равно десятой части, 2) k-ой части суммы всех предшествующих чисел.

Приложения.

475. Сколько ударов сделают часы за сутки, 1) если они отбивают лишь целые часы? 2) Если отбивают также $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ часа (1, 2, 3 ударами)?

476. Служащий, поступивший на службу с содержанием 2550 рублей, получает по истечении каждого года 30 рублей прибавки. Как велико будет его содержание на 25 году службы и сколько он получит за все 25 лет?

477. Сторож нанят за 120 руб. в год с условием ежегодной прибавки по 9 рублей. Сколько времени он должен прослужить, чтобы в год получать 300 рублей, и сколько он получит за все время, включая и жалование за последний год?

478. Роют колодец, при чем платят за первый метр глубины 1 рубль, а за каждый следующий на 5 копеек дороже. Во что обойдется весь колодец и сколько будет стоить последний метр, если глубина колодца равна 81 метру?

479. Некто желает 1000 рублей разделить между 16 лицами так, чтобы каждое следующее получило на 5 рублей больше предыдущего. Сколько получит первое и сколько последнее?

480. A держит пари с B. A должен пройти взад и вперед 6000 шагов раньше, чем B соберет в корзину 200 яблок; при этом яблоки должны быть сперва разложены в ряд, на расстоянии шага друг от друга, и должны быть поочереди по одному положены в корзину. Корзина поставлена возле первого яблока. Кто из спорящих выиграет пари?

Задачи из физики.

481. Приемник нагнетательного насоса содержит 1000 *см*^{3}; вместимость цилиндра, внутри которого ходит поршень, равна 200 *см*^{3}. Как велика будет упругость сжатого воздуха после десяти колебаний поршня, если известно, что первоначальное давление было 1 атмосфера?

482. Сколько следует сделать качаний поршня, чтобы получить давление в 2 атмосферы при помощи насоса, с приемником в 1200 *см*³ и объемом рабочей части цилиндра равным 150 *см*³?

483. Определить объем рабочей части цилиндра нагнетательного насоса, если манометр, помещенный в приемнике, объем которого 9,8 *л*, после десяти качаний поршня показывает давление в $2\frac{1}{2}$ атмосферы.

484. Тело при свободном падении в пустоте проходит в первую секунду приблизительно 4,9 *м*, а в каждую следующую на 9,8 *м* больше. Какой путь оно пройдет в 12 секунд и какой путь в 12-ю секунду?

485. Сколько метров пройдет тело, при условиях предыдущей задачи, в $\frac{1}{2}$ минуты, и за 30-ю секунду?

486. Во сколько секунд, при условиях задачи 484, тело пройдет расстояние в 490 *м*?

487. Вертикально брошенное вверх тело в каждую секунду теряет в скорости 9,8 метра. Сколько времени будет подниматься кверху пуля, имеющая при выходе из дула скорость 490 *м* в сек.?

488. Тело, движущееся вертикально вверх, под действием силы земного притяжения замедляет свое движение настолько, насколько падающее тело его ускоряет. Как высоко поднимется пуля, при условиях движения задачи 487, и через сколько времени, считая от момента выстрела, она вернется на поверхность земли?

489. Какую скорость имела при вылете из дула пуля, летевшая кверху по вертикали, если она через минуту упала на поверхность земли?

490. Как высоко поднялась пуля, пущенная вверх по вертикали, если она упала на поверхность земли через 80 секунд, и какова была ее скорость при выходе из дула?

491. Шар катится по наклонной плоскости. Движение по наклонной плоскости является равноускоренным, как и в случае свободного падения. В 1-ую секунду шар проходит 1 метр. Какой путь он сделает в течение пяти секунд и какой в пятую секунду?

492. Какой путь прошел шар в первую секунду по наклонной плоскости, если в 10-ую секунду он прошел $28\frac{1}{2}$ метров?

493. Шар катился 6 секунд с наклонной плоскости длиною в 54 метра. Сколько метров прошел он в первую секунду?

Задачи, заимствованные из старинных книг по математике.

Из папируса Ахмеса (около 1700 г. до нашей эры).

494. 1) Разделить 10 мер хлеба между 10 лицами так, чтобы каждое следующее получило на $\frac{1}{8}$ меры меньше предыдущего.

2) 100 хлебов разделить между пятью лицами так, чтобы части составили арифметический ряд и чтобы две наименьшие части вместе дали $\frac{1}{7}$ суммы трех остальных частей.

Из Бахшалийской арифметики (индусской) (300—400 г.г. по нашему летоисчислению).

3) Путешественник в первый день проходит две (a_1) единицы пути, и в каждый следующий день на 3 (d_1) единицы больше. Второй путешественник проходит в первый день 3 (a_2) единицы пути, а в каждый следующий день на 2 (d_2) больше. Когда первый догонит второго?

Из Диофантовой рукописи о многоугольных числах (300 г. нашей эры).

4) Доказать следующее предложение:

Если p, q, r суть три последовательных члена арифметического ряда, то $p^2 + 8qr = (2q + r)^2$.

Из «Анафорикоса» Гипсикла (около 170 г. до нашей эры).

5) Доказать, что в арифметическом ряде с четным числом членов сумма членов второй половины превышает сумму членов первой половины на число, кратное квадрату половины числа членов.

Из Герона Александрийского (I столетие до нашей эры).

6) Амфитеатр, состоящий из n рядов, в нижнем ряде имеет a мест, а в верхнем z. Сколько зрителей может вместить амфитеатр[1])?

Из арифметики Магницкого (1703 г.).

7) **Купецкий некто человек имяше 14 чарок сребряных, ихже каяждо превышает тягостию по чину прогрессии четырьмя лотами, а последняя чарка весит 59 лотов. И ведателно есть, колико вся чарки веса имуть.**

---

[1]) Предполагая, что число мест в рядах возрастает в арифметической прогрессии.

§ 3. Арифметические ряды высших порядков.

495. Составить ряд квадратов n ($n = 10$) первых натуральных чисел. Составить новый ряд, членами которого служили бы разности последовательных пар членов первого ряда (разностный ряд). Какой ряд составляют эти разности?

496. Составить ряд кубов n ($n = 10$) первых натуральных чисел. Составить новый ряд из разностей, получаемых вычитанием каждого члена написанного ряда из члена, за ним следующего (первый разностный ряд). Из членов полученного ряда составить новый ряд таким же способом (второй разностный ряд). Какой ряд образуют последние разности?

497. Задавая k значение 1, 2, 3... 10, составить ряд, общий член которого имеет вид $u_k = \alpha + \beta k + \gamma k^2$, полагая:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α	0	1	1	5	3	0	0	1	1	3	1	3
β	1	1	2	3	-1	0	1	1	2	2	-1	$+1$
γ	0	0	0	0	0	1	1	1	3	1	1	-2

Составить для каждого из написанных рядов их первые разностные ряды. Какими свойствами обладают эти ряды?

498. Составить ряд, общий член которого выражается формулой $u_k = \alpha + \beta k + \gamma k^2 + \delta k^3$, полагая

	1	2	3	4	5
α	0	0	0	1	1
β	0	0	1	1	2
γ	0	1	1	1	3
δ	1	1	1	1	4

составить для этих рядов первые и вторые разностные ряды. Какими свойствами обладают составленные вторые разностные ряды?

499. Выяснить, ряд какого порядка представляет ряд

1) «треугольных» чисел: 1, 3, 6, 10, 15, и составить формулу общего члена этого ряда;

2) «пирамидальных» чисел: 1, 4, 10, 20, 35... и составить формулу общего члена этого ряда.

500. Подставить в тождество $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ вместо n последовательно числа 1, 2, 3..., $(n-1)$, n и сложить полученные числовые тождества. Пользуясь тождеством, полученным путем указанного сложения, доказать формулу (**Архимеда**):

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}}.$$

501. Пользуясь тождеством

$$(n-1)^4 = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1,$$

подобным же способом доказать, что

$$\mathbf{1^2 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 =}$$
$$\mathbf{= (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2}.$$

502. Составить ряд, складывая соответственные члены рядов:

1, 4, 9, 16, 25....
1, 3, 5, 7, 9....

Составить формулу общего члена полученного таким образом ряда и вычислить сумму его n членов.

503. Составить ряд, общий член которого $u_k = k^2 - k + 1$. Вычислить сумму его первых десяти членов.

504. Составить ряд второго порядка, помещая по два члена между каждыми двумя последовательными членами ряда 1, 4, 9, 16, 25.... Составить формулу его общего члена и суммы n членов.

505. В цейхгаузе сложены ядра в виде трехгранной пирамиды. Стороны треугольника каждого ряда составляются соответственно из 1, 2, 3,... n ядер. 1) Определить, сколько ядер лежит в каждом отдельном ряду; 2) сколько в последнем; 3) сколько ядер содержится во всей пирамиде?

506. Куча ядер сложена в виде усеченной трехгранной пирамиды. На стороне верхнего ряда помещаются 4 ядра, на стороне нижнего ряда 20. Сколько ядер во всей пирамиде?

Если некоторые числа записаны в таком порядке, что значение каждого из этих чисел определяется тем местом, которое занимает это число, то говорят, что числа образуют числовой ряд.

Числа, составляющие ряд, называются его членами.

Арифметической прогрессией (первого порядка) или арифметическим рядом первого порядка называется ряд чисел, из которых каждое

последующее равно сумме своего предыдущего и некоторого постоянного числа r.

Число r называется разностью прогрессии. Если $r > 0$, то прогрессия называется возрастающей, если $r < 0$ — убывающей; если же $r = 0$, то все члены ряда равны одному и тому же числу.

Основные формулы, относящиеся к арифметическим прогрессиям, следующие:

Если a_k означает $к$-ый член прогрессии, r—разность, s_n—сумму n членов прогрессии, то

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & a_k = a_1 + r(к - 1) \\ \text{II} & s_n = (a_1 + a_n)\cdot\frac{n}{2} \\ \text{III} & s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\, r = [2a_1 + r(n-1)]\,\frac{n}{2} \end{array}\right\}$$

Для определения арифметической прогрессии необходимо из пяти величин, входящих в формулы II и III, дать три.

Всякую арифметическую прогрессию всегда можно продолжить настолько (выписать столь большое число ее членов), чтобы 1) абсолютное значение последнего члена оказалось больше любого наперед заданного числа; 2) чтобы абсолютное значение их суммы оказалось больше любого наперед заданного числа.

Если мы имеем числовой ряд:

$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4, \ldots\ u_n$, и составим ряд разностей

$u_2 - u_1,\ u_3 - u_2,\ u_4 - u_3$ и т. д.,

то новый составленный ряд называется его первым разностным рядом.

Арифметическим рядом (прогрессией) второго порядка называется ряд, первый разностный ряд которого представляет обыкновенную арифметическую прогрессию.

Если для первого разностного ряда составить его первый разностный ряд, то полученный ряд называется вторым разностным рядом по отношению к основному ряду.

Первый разностный ряд второго разностного ряда называется третьим разностным рядом по отношению к основному ряду.

Арифметическим рядом n-ого порядка числовой ряд называется в том случае, если его $(n-1)$-ый разностный ряд представляет обыкновенную арифметическую прогрессию.

§ 4. Конечные геометрические прогрессии.

507. Вычислить значения функции $u_{x+1} = u_1 q^x$, задавая x значения 0, 1, 2, 3,... k,... n (принимая при этом $q^0 = 1$); из полученных чисел составить ряд (в порядке их получения), отделяя члены ряда друг от друга запятыми, если

	1	2	3	4	5	6
u_1	1	1	1	7	0,9	4
q	2	10	1	0,1	0,1	—2

Какими свойствами обладают члены написанного ряда? Как получить каждый член ряда из члена, ему предшествующего? Как называется написанный ряд чисел? Как называется число q?

508. Пусть u_1 обозначает первый член геометрической прогрессии, q — знаменатель. Как выразятся 2-й, 3-й,... n-й члены (сделать вычисления, полагая $u_1 = 3$, $q = 2$, $n = 10$)?

509. Определить знаменатель и n-й член следующих прогрессий:

1) $2, 6, 18, 54\ldots$ 2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\ldots$
3) $1, 0{,}1\ 0{,}01, 0{,}001\ldots$ 4) $a, a^2, a^3, a^4\ldots$
5) $1, -3, 9, -27$ 6) $1, x, x^2, x^3\ldots$
7) $1, -x, x^2, -x^3\ldots$

510. 1) Пусть u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, обозначают три последовательных члена геометрической прогрессии; выразить u_k через u_{k-1} и u_{k+1}. 2) На основании полученного результата дать определение геометрической прогрессии.

511. 1) Когда геометрическая прогрессия называется возрастающей, когда — убывающей? 2) Какой окажется прогрессия, если $q = 1$; 3) если $q = -1$?

512. Как изменится знаменатель прогрессии, если ее члены написать в обратном порядке?

513. Полагая первые два члена геометрического ряда равными:

1) 1 и 2, 2) 1 и 3, 3) 2 и 4, 4) 1 и —1,
5) 1 и —2, 6) $\frac{1}{2}$ и 1, 7) 1 и $\frac{1}{2}$, 8) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$,
9) 3, 4, 10) 1 и 0,1, 11) 1 и 10, 12) a и b,

определить следующие три члена и n-й член.

514. Написать прогрессию, первый и третий члены которой равны соответственно: 1) 1 и 9; 2) $\frac{1}{3}$ и 3; 3) 1 и a^2.

515. На одной из двух взаимноперпендикулярных прямых (осей) от точки их пересечения отложен произвольный отрезок u_1, на другой произвольный отрезок $u_2 > u_1$, концы этих отрезков соединены и к полученной гипотенузе прямоугольного треугольника, в ее концах, восставлены перпендикуляры, которые отсекают на осях новые отрезки u_3 и u'_2; в концах этих перпендикуляров к ним восставлены новые перпендикуляры, которые отсекают на осях новые отрезки u_4 и u'_3 и т. д. Показать, что отрезки u_1, u_2, u_3, u_4.... образуют возрастающую геометрическую прогрессию, а отрезки u_2, u_1, u_2', u_3'.... образуют убывающую геометрическую прогрессию. При какой зависимости между u_1 и u_2 полученная спираль обратится в квадрат?

516. Представить графически изменение членов геометрической прогрессии, изображая ординатами значения соответствующих членов прогрессии, а абсциссами их нумера. (Для построения последовательных членов прогрессии по двум первым ее членам можно воспользоваться приемом, указанным в предыдущей задаче.) 1) Что можно сказать об относительном расположении концов отрезков, изображающих члены геометрической прогрессии, если 1) знаменатель >1 (для примера взять задачу 513 1), 2), 3), 9), 11); 2) знаменатель — положительное число, меньшее 1 (задача 513, 7), 8), 10); 3) отрицательное число (5); 4) -1 или $+1$ (4)?

Сумма членов геометрической прогрессии.

517. Составить ряд, члены которого получаются умножением на q членов геометрической прогрессии

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots\ \ u_n,$$

если q обозначает знаменатель прогрессии. Какую прогрессию образует новый ряд? Как выразится сумма членов нового ряда, если сумму членов первоначальной прогрессии обозначить через S_n?

518. Какое уравнение получится для определения S_n, если сумму первоначального ряда вычесть из суммы членов ряда, полученного умножением членов первого ряда на q?

519. Если u_1—первый член геометрического ряда, q—знаменатель, u_n—n-й член, S_n—сумма всех n членов, то имеют место следующие соотношения:

$$\text{I.}\quad u_n = u_1 q^{n-1};$$

$$\text{II.}\quad S_n = \frac{u_n q - u_1}{q-1} = \frac{u_1 - u_n q}{1-q};$$

$$\text{III.}\quad S_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

При каком значении q не имеют смысла формулы II и III? 1) Вывести формулу III из основных формул I и II. 2) Какие виды формул II и III удобны для возрастающей прогрессии и какие для убывающей?

520. Указать, сколько величин необходимо и достаточно для определения геометрической прогрессии и почему.

521. В геометрической прогрессии:

	Дано.	Найти.		Дано.	Найти.
1)	n, u_n, s_n	$u_1, q.$	6)	u_1, n, s_n	$q, u_n.$
2)	q, u_n, s_n	$u_1, n.$	7)	u_1, n, u_n	$q, s_n.$
3)	q, n, s_n	$u_1, u_n.$	8)	u_1, q, s_n	$n, u_n.$
4)	q, n, u_n	$u_1, s_n.$	9)	u_1, q, u_n	$n, s_n.$
5)	u_1, u_n, s_n	$q, n.$	10)	u_1, q, n	$u_n, s_n.$

Задачи с 2) по 5) и с 7) по 10) приводятся к простым алгебраическим или показательным уравнениям; напротив, задачи 1) и 6) к уравнениям высших порядков, в общем случае элементарными средствами не разрешимым. Почему достаточно знать, что задача 1 приводится к уравнению высшей степени, чтобы возможно было то же сказать и относительно задачи 6. (Обратить внимание на одинаковую роль u_1 и u_n; обратимость ряда.)

522. Доказать, пользуясь формулой III задачи 10-й (что и само собой очевидно), что в ряде:

$$a - a + a - a + a - a + \dots$$

сумма четного числа членов равна 0, а сумма нечетного числа членов равняется a. 2) Почему для ряда с равными членами формулы II и III неприменимы?

Примеры.

523. В следующих задачах, принимая три величины данными, определить две остальные (проверить составленную таблицу).

	u_1	q	n	u_n	S_n
1)	2	3	15	9 565 938	14 348 906
2)	4	5	9	1 562 500	1 953 124
3)	1	7	9	5 764 801	6 725 601
4)	4	6	11	241 867 704	290 237 644
5)	1	-2	19	262 144	174 763
6)	1	-2	20	$-524\,288$	$-349\,525$
7)	32	$2\frac{1}{2}$	6	3 125	5 187
8)	512	$2\frac{1}{2}$	10	1 953 125	3 254 861
9)	$\frac{1}{9}$	3	10	2 187	$3\,280\frac{4}{9}$
10)	$\frac{1}{64}$	2	13	64	$127\frac{63}{64}$
11)	2 187	$\frac{2}{3}$	12	$25\frac{23}{81}$	$6\,510\frac{35}{81}$
12)	1 024	$1\frac{1}{2}$	13	$132\,860\frac{1}{4}$	$396\,532\frac{3}{4}$
13)	25 600	0,5	13	6,25	51 193,75

524. Вычислить суммы следующих прогрессий:

1) $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1$;
2) $a^{10} + a^9b + a^8b^2 + \ldots + b^{10}$;
3) $a^7 - a^6b + a^5b^2 - a^4b^3 + \ldots - b^7$;
4) $a^{20} - a^{19}b + a^{18}b^2 - a^{17}b^3 + - \ldots + b^{20}$;
5) $a + \sqrt[5]{a^4b} + \sqrt[5]{a^3b^2} + \ldots + b$;
6) $a + \sqrt[7]{a^6b} + \sqrt[7]{a^5b^2} + \ldots + b$;
7) $\sqrt[9]{a^7} + \sqrt[9]{a^6b} + \sqrt[9]{a^5b^2} + \ldots + \sqrt[9]{b^7}$.

525. 1) Сумма 1-го и 2-го членов геометрической прогрессии равна 3, а сумма 3-го и 4-го ее членов равна 12. Найти первый член и знаменатель.

2) Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 7, а сумма 3-го, 4-го и 5-го равна 28. Найти прогрессию.

3) Сумма 1-го и 2-го членов геометрической прогрессии равна 4, а сумма 1-го и 4-го равна 28. Найти первый член и знаменателя прогрессии.

4) Сумма 2-го и 3-го членов геометрической прогрессии равна 12, а произведение 1-го члена на 2-й равно 8. Найти прогрессию.

5) Разность между вторым и первым членами геометрической прогрессии равна 2, а разность между третьим и вторым равна 4. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

6) Разность первого и второго членов геометрической прогрессии равна 54, а разность между первым и четвертым членами равна 72. Написать прогрессию.

526. В геометрической прогрессии, имеющей 20 членов, сумма членов, стоящих на четных местах, равна a, сумма же членов, стоящих на нечетных местах, равна b. Определить первый член и знаменатель прогрессии.

527. В геометрической прогрессии, имеющей 40 членов, сумма первых 20 членов $= a$, сумма последних 20 равна b. Определить первый член и знаменатель прогрессии.

528. В геометрической прогрессии, состоящей из 4-х членов, сумма крайних членов равна a и сумма средних равна b. Определить первый член и знаменатель прогрессии.

529. В геометрической прогрессии, состоящей из 3-х членов, сумма членов равна a, сумма их квадратов равна b. Определить первый член и знаменатель прогрессии.

530. Решить предыдущую задачу для случая четырехчленной прогрессии.

Интерполяция.

531. Поместить по одному члену между каждыми двумя членами ряда 1, 2, 4, 8 и т. д. так, чтобы вновь образовался геометрический ряд.

532. Поместить 6 средних геометрических между 1 и 7. Найти знаменатель этого ряда.

533. Поместить 7 средних геометрических между a^8 и b^8.

534. Поместить 5 средних геометрических между a и b.

535. Поместить 11 средних геометрических между a и $2a$.

Приложения [1]).

536. По свидетельству арабского писателя Асафада, Сисса-ибн-Дохара, изобретатель шахматной доски, просил выдать ему в виде вознаграждения столько зерен пшеницы, сколько их получится, если на первое поле шахматной доски положить одно зерно, на второе 2, на третье 4 и т. д.; и на каждое последующее из всех 64 вдвое более, чем на предыдущее. Во сколько раз следует увеличить земную поверхность, чтобы она могла дать необходимое количество хлеба, если принять землю за шар радиуса 6370000 метров, вся поверхность которого представляет поле, дающее на гектар до 40 гектолитров, а один гектолитр содержит 1600000 зерен (поверхность шара $= 4\pi R^2$, где $\pi = 3{,}14159\ldots$).

537. Некто сообщил новость двум своим знакомым, из них каждый сообщил опять двум знакомым и т. д. Предполагая, что каждое сообщение получается через четверть часа, и что новость сообщают все новым лицам, которые о ней ничего не знают, определить, во сколько времени узнает об этой новости все 7-миллионное население Лондона, если новость начала циркулировать по городу с 7-ми часов утра.

538. Одно лицо, желавшее сделать сбор с благотворительной целью, придумало для этого такой способ (так называемую «лавину»): оно разослало двадцати своим знакомым письма следующего содержания: «№ 1. Лицо, которое получит это письмо, просят в течение суток разослать копию его 20 своим знакомым, пометив ее № 2, с тем, чтобы каждый, получивший № 2, сделал то же, т.-е. в течение суток копию этого № 2 разослал также 20 своим знакомым, пометив ее № 3 и т. д., до № 20. Все лица, которые получат письма за № 20, должны послать тем, от кого они получили эти письма, по 20 коп.; лица, получившие письма за № 19, по получении денег с тех лиц, которым они посылали письма за № 20, прикладывают к собранной ими сумме по 20 коп. и пересылают всю сумму тому лицу, от которого они получили письма, т.-е. № 18 и т. д. Решить: 1) может ли быть осуществлен придуманный сбор; 2) каково должно быть, по меньшей мере, население земного шара, чтобы каждое лицо получило письмо только по одному разу; 3) какую сумму дал бы придуманный сбор, если бы он мог быть осуществлен.

539. Несколько лет тому назад одно «Депо часов» сделало такую публикацию: «Всякий может купить золотые часы за 5 руб-

---

[1]) При решении этих задач удобнее всего воспользоваться логарифмами.

лей! Для этого нужно купить в Депо за 5 рублей квитанцию с 10 талонами на получение часов; как только купивший квитанцию распродаст свои талоны, он передает полученные деньги в Депо и получает часы, всякое лицо, купившее талон, получает даром квитанцию с 10 талонами, по распродаже которых получает часы, и т. д.» Объяснить, почему указанная операция, которую придумал владелец «Депо часов», была запрещена.

540. При помощи спектрального анализа можно безошибочно установить присутствие $\frac{1}{3000000}$ доли миллиграмма поваренной соли; составить представление о таком незначительном количестве можно следующим образом: единица веса каменной соли (уд. вес 2,28) при комнатной температуре растворяется в 2,8 весовых частях воды; берут 1 куб. *см* этого насыщенного раствора и смешивают с 1 литром воды. Снова берут 1 куб. *см* этой смеси и опять смешивают с 1 литром чистой воды. Определить, будет ли содержать 1 капля последнего раствора (считая ее объем равным 1 куб.миллиметру) вышеуказанное количество соли. Сколько раз следует повторить подобное смешивание, чтобы 1 куб. *см* этой жидкости содержал приблизительно указанное количество соли?

541. Некто предложил расколоть 20 больших поленьев с тем, чтобы ему заплатили за 1-е полено 1 копейку, за 2-е — 2 коп., за 3-е — 4 коп. и т. д., т.-е. за каждое следующее вдвое больше предыдущего. Сколько он должен получить всего и во что обойдется в среднем каждое полено, если владелец дров согласится на его предложение?

542. Над 1250 литрами 80-градусного спирта три раза выполняют следующую операцию: отливают половину жидкости и добавляют водой. Сколько литров чистого спирта останется после последнего переливания?

543. Определить упругость воздуха под колоколом воздушного насоса, после 20 качаний поршня, если известно, что вместимость колокола (считая в том числе и соединительный канал) содержит 30 куб. дм, а цилиндр (не считая объема поршня) 6 куб. дм, и что первоначальное давление равнялось 1-й атмосфере.

544. Выразить результат предыдущей задачи, заменив числа 30, 6 и 20 соответственно числами a, b и n.

545. Емкость колокола воздушного насоса равна 40 куб. дм, емкость цилиндра (без поршня) равна 5 куб. дм. После скольких качаний упругость воздуха под колоколом составит лишь $\frac{1}{10}$ первоначальной упругости?

§ 5. Сравнение арифметической и геометрической прогрессии.

546. Даны две прогрессии, арифметическая и геометрическая, с общими первыми двумя членами:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ldots$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\ldots$$

Построить на одном и том же чертеже графики обеих прогрессий, принимая номера членов за значения абсциссы, а значения членов за ординаты точек и соединяя последовательные построенные точки прямолинейными отрезками. Имеют ли графики прогрессий общее звено? Как располагается графика одной прогрессии относительно другой? Что можно сказать на основании этого относительно соответствующих членов обеих прогрессий?

547. Показать, что, если имеются две возрастающих прогрессии, 1) арифметическая и 2) геометрическая, с двумя общими первыми членами:

$$\begin{array}{lllll} 1)\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\ldots\ldots & a_k,\ldots & a_n & a_1 = u_1 \\ 2)\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\ldots\ldots & u_k,\ldots & u_n & a_2 = u_2, \end{array}$$

то $u_k > a_k$.

Указание: Для этого следует выразить знаменатель q второй прогрессии через первый член и разность r первой и показать, что: $u_1 > u_3 + 2r$; $u_4 > u_1 + 3r$ и т. д., т.-е. что $u_k > a_k$.

Как расположится поэтому графика данной арифметической прогрессии относительно графики данной геометрической прогрессии?

548. Дана прогрессия

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{4},\ 3\frac{3}{8}\ldots\ldots \quad \left(1\frac{1}{2}\right)^{k-1}\ldots\ldots \quad \left(1\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Написать арифметическую прогрессию с теми же первыми двумя членами. Составить формулу общего члена второй прогрессии. Пользуясь этой формулой, показать, что в данной геометрической прогрессии можно найти (если ее продолжать неограниченно) член u_k с таким номером k, чтобы u_k было > 1000.

549. Показать, что в геометрической прогрессии

$$1{,}2;\quad 1{,}44;\quad 1{,}728\ldots.$$

всегда можно найти такое значение для числа k, чтобы $u_k > 1000000$.

550. Даны прогрессии

$$\begin{array}{lll} 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\ldots. & 2^{k-1}\ldots & 2^{k-1} \\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16} & \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\ldots & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{array}$$

Показать, 1) что первую прогрессию всегда можно настолько продолжить, чтобы ее последний член был больше 1000000; 2) что вторую прогрессию можно продолжить настолько, чтобы последний ее член оказался $< 0{,}000001$.

551. 1) Показать, что в возрастающей геометрической прогрессии можно найти член u_k с таким номером k, что u_k окажется больше произвольного числа A.

2) Показать, что в убывающей геометрической прогрессии можно найти член u_k с таким номером k, чтобы u_k оказалось меньше наперед заданного числа ε.

552. Между числами 1 и 16 1) поместить (интерполировать) три средних арифметических; 2) три средних геометрических. Построить на одном и том же чертеже графики обеих полученных прогрессий. Продолжить (экстраполировать) обе прогрессии а) на три члена вправо, б) на три члена влево. Как располагаются изображения соответствующих членов в промежутке 1... 16? Вне этого промежутка?

553. Между числами 125 и $\frac{1}{125}$ поместить (интерполировать) пять средних арифметических и 5 средних геометрических. Продолжить построенные прогрессии (экстраполировать) 1) на два члена вправо; 2) на два члена влево. Построить графики прогрессий. Как располагаются графики внутри интервала $125 \ldots\ldots \frac{1}{125}$? вне его?

554. Показать, что, если в двух прогрессиях (с положительными членами): арифметической

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3 \ldots\ldots \quad a_k \ldots\ldots \quad a_l, \ldots \quad a_n$$

и геометрической

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots\ldots \quad u_k \ldots\ldots \quad u_l \ldots\ldots \quad u_n \ldots \qquad k < l$$

$$a_k = u_k \quad \text{и} \quad a_l = u_l,$$

то все члены арифметической прогрессии, номера которых больше k и меньше l, больше соответственных членов геометрической прогрессии, а остальные члены меньше соответственных членов геометрической прогрессии. Как это отражается на графиках указанных прогрессий?

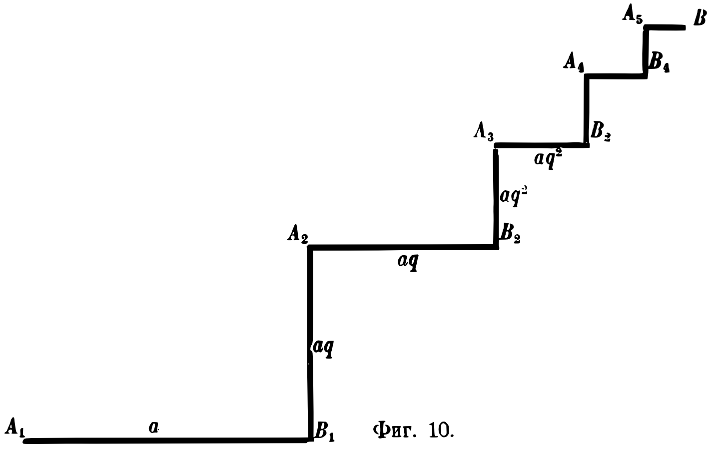
555. Составить две прогрессии ($n = 10$): арифметическую и геометрическую, соответственными членами которых были бы 0 и 1; 1 и 1,1; 2 и 1,21; члены второй прогрессии вычислять с точностью до 0,01.

Каким членам арифметической прогрессии соответствуют члены геометрической прогрессии 1,33 и 1,61? Какому члену арифметической прогрессии соответствует произведение этих чисел? Частное от деления второго числа на первое? Квадрат числа 1,33? Какие действия следует произвести над членами арифметической прогрессии, соответствующими взятым членам геометрической прогрессии, чтобы в ней получить член, соответствующий 1) произведению этих чисел; 2) частному их; 3) квадрату взятого члена геометрической прогрессии?

§ 6. Бесконечные геометрические ряды. — Сумма бесконечного геометрического ряда.

556. Члены геометрического ряда представить графически при помощи ступенчатой кривой, ширина и высота ступеней которой соответственно равны (в определенном масштабе) значениям членов ряда, т.-е.

$$\begin{aligned}
A_1B_1 &= a,\\
A_2B_2 &= A_2B_1 = aq,\\
A_3B_3 &= A_3B_2 = aq^2,\\
&\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\\
A_nB_n &= A_nB_{n-1} = aq^{n-1}.
\end{aligned}$$



Фиг. 10.

557. Показать, что точки B_1, B_2, B_3,... B_n (фиг. 10) располагаются на одной прямой (прямая B), а точки A_1, A_2, A_3,... A_n — на другой прямой (прямая A).

558. 1) Под каким углом прямая B наклонена к прямой A_1B_1? 2) Составить уравнение прямой, проходящей через точки A_1, A_2, A_3,... (прямой A), если начало координат поместить в точке A_1, а ось x направить по A_1B_1; какой геометрический смысл имеет в полученном уравнении знаменатель прогрессии q?

559. Составить уравнение прямой, проходящей через точки B_1, B_2, B_3,... (прямой B), относительно той же системы координат. Чему равен угловой коэффициент этой прямой? Как расположатся прямые A и B при 1) $q=1$, 2) $q<1$, 3) $q>1$? В каждом случае определить абсциссу точки пересечения прямых A и B.

560. Спроектировать точки B_2, B_3... на продолжение A_1B_1 и таким образом графически представить сумму членов ряда.

561. В каком из трех указанных в задаче 559 случаев абсцисса точки пересечения прямых A и B представляет **предел** суммы членов прогрессии при безграничном возрастании числа ее членов?

562. Пользуясь чертежом (фиг. 12), пояснить, почему такой ряд называется сходящимся.

563. На основании результатов задач 561, 562 определить, какой ряд называется сходящимся?

564. На основании результатов указанных задач решить вопрос, при каких значениях знаменателя q прогрессия с неограниченно возрастающим числом членов будет представлять ряд сходящийся и при каких значениях q—расходящийся.

565. Формула суммы членов геометрической прогрессии может быть представлена в виде:

$$S_n=\frac{u^1}{1-q}-\frac{qu_n}{1-q}.$$

При каком значении q формула S_n не имеет смысла? При каких значениях q второй член правой части уменьшается с увеличением n? Почему? Можно ли подобрать такое значение для числа n, чтобы второй член правой части оказался меньше наперед заданного числа ε? Как это сделать (см. зад. № 546—551)?

566. На основании результата предыдущей задачи показать, что **предел** суммы членов убывающей геометрической прогрессии при неограниченном возрастании их числа определяется формулой:

$$S=\frac{u_1}{1-q}.$$

1) Выразить u_1, как функцию S и q.

2) Выразить q, как функцию u_1 и S.

3) Сколько величин необходимо и достаточно для полного определения бесконечно-убывающей геометрической прогрессии? Почему?

Примеры.

567. Вычислить сумму членов бесконечного геометрического ряда:

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\dots$$

568. В следующих задачах, рассматривая две из величин u, q, S как данные, определить третью:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_1	7	1	5	14	12	117	10	0,88	0,94	1,32
S	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	0,2	—0,3	0,96	— 0,76	0,53	—0,1
q	14	$\frac{3}{5}$	$7\frac{1}{2}$	10	15	90	250	0,5	2	1,2

569. Определить первый член и знаменатель бесконечно-убывающей геометрической прогрессии, сумма которой имеет значение $\frac{1}{2-y}$, и указать границу, которой не должно переходить значение y, чтобы эта дробь представляла суммы бесконечно-убывающей геометрической прогрессии.

570. Решить тот же вопрос относительно дробей:

$$1)\ \frac{1}{5+2y},\qquad 2)\ \frac{3}{4+y},\qquad 3)\ \frac{5}{3-7y}.$$

571. Составить беспредельно-убывающую прогрессию, сумма которой равна 1 и каждый член которой равен пределу суммы всех членов, за ним следующих. Чему равны ее первый член и знаменатель?

572. Составить бесконечный геометрический ряд, в котором $u_5 = \frac{1}{2}$, а каждый член равен пределу суммы всех за ним следующих. Чему равна сумма этой прогрессии?

573. Составить прогрессию, первый член который равен 0,7, а каждый член в 9 раз больше предела суммы всех за ним следующих. Чему равна сумма этой прогрессии?

574. Составить бесконечный ряд, первый член которого $= 0,9$, а каждый член в 9 раз больше предела суммы членов за ним следующих. Чему равна сумма членов этой прогрессии?

575. Составить бесконечный убывающий ряд, первый член которого равен a, а каждый член равен пределу суммы членов за ним следующих, за исключением члена, непосредственно стоящего за ним. Составить формулу суммы членов такого ряда. Показать, что в этом ряде каждый член равен сумме двух за ним следующих. Как поэтому еще может быть определен искомый ряд (золотое сечение!)?

576. Как следует соединить в группы члены рядов:

1) $x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + 3x^6 + \ldots$ и

2) $x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + 3x^5 + 2x^6$,

чтобы стало очевидным, что каждый из этих рядов представляет геометрическую прогрессию? Определить в каждом ряде первый член и знаменатель.

577. Соединяя попарно члены бесконечного ряда $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ и вынося общие множители за скобку, показать справедливость равенства

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. = (1 + x)(1 + x^2 + x^4 + \ldots.).$$

578. Поступить подобным же образом с рядами:

1) $1 + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots$

2) $1 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots$

579. Пользуясь вышеуказанными приемами (зад. 577, 578, 1 и 2), бесконечный ряд $1 + x + x^2 + \ldots.$ преобразовать в «бесконечное произведение». 2) Какого значения не должно превышать x, чтобы это произведение стремилось к определенному пределу? 3) Указать предельное значение, к которому должны приближаться и приближаются вновь приписываемые множители этого произведения по мере неограниченного увеличения их числа.

580. Преобразовать в бесконечное произведение бесконечный ряд:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots$$

581. Преобразовать в бесконечное произведение:

1) бесконечный ряд $1 + 3u + 9u^2 + 27u^3 + \ldots$

2) бесконечный ряд $1 - 2u^3 + 4u^6 - 8u^9 + \ldots$

В обоих случаях указать, какого значения не должно превышать u, чтобы такое преобразование имело смысл?

Задачи из геометрии.

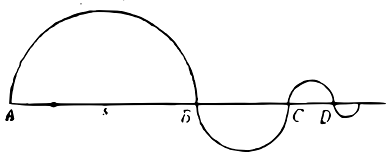
582. 1) Из произвольной точки одной из двух взаимно-перпендикулярных прямых (осей) проведена прямая под углом к этой оси, меньшим 45°; в другом конце отрезка, полученного от пересечения прямой с другой осью, восставлен перпендикуляр, в точке пересечения последнего с первой осью к нему новый перпендикуляр и т. д. Длина первого полученного отрезка $= a$; отношение второго отрезка к первому $= q$. Будет ли неограниченно возрастать длина получаемой при указанном построении спирали, если его неограниченно продолжать, или нет? Можно ли найти предел, к которому стремится эта длина? Чему он равен?

2) На одной из сторон острого угла от вершины его отложен отрезок a. Из конца этого отрезка опущен на другую сторону перпендикуляр x, который отсекает от нее отрезок b. Из конца отрезка b опущен на отрезок a перпендикуляр x_1, из основания этого перпендикуляра новый перпендикуляр x_2 на отрезок b и т. д. Найти предел длины ломаной, образованной перпендикулярами

$$x + x_1 + x_2 + \dots,$$

если неограниченно продолжать их построение.

3) Решить предыдущую задачу, зная лишь длину первого перпендикуляра $= c$ и длину второго перпендикуляра $= c_1$.



Фиг. 11.

4) Отрезок $AB = s$ увеличен на BC, равное его половине, отрезок BC снова увеличен на CD, равное его половине и т. д. На полученных отрезках AB, BC, CD, ... писаны полуокружности. Вычислить общую длину (предел) получаемой при неограниченном продолжении построения кривой линии.

5) Основание равнобедренного треугольника равно b, боковая сторона его $= a$. В треугольник вписывают круги следующим образом: первый круг вписан в данный треугольник, второй касается боковых сторон и первого круга, третий — боковых сторон и второго круга и т. д. Определить предел суммы радиусов всех кругов и предел суммы их площадей.

6) Дан равносторонний треугольник, сторона которого равна a. В треугольник вписан круг, в круг вписан снова равносторонний треугольник, в треугольник — круг и т. д. Определить предел суммы радиусов всех кругов и предел суммы площадей: 1) всех кругов, 2) всех треугольников.

7) Дан равносторонний треугольник. Из высот этого треугольника образован новый равносторонний треугольник; из высот второго треугольника образован снова равносторонний треугольник и т. д. Определить сумму площадей всех полученных треугольников при неограниченном продолжении построения.

8) Как выразится результат предыдущей задачи, если данный треугольник разносторонний, площадь его равна p, а площадь второго треугольника равна q.

9) В круг радиуса r вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в круг — квадрат и т. д. Вычислить сумму (предел) площадей всех кругов, не считая первого, и сумму площадей всех квадратов.

10) В куб, ребро которого равно a, вписан шар, в шар вписан куб, в куб снова шар и т. д. Определить: 1) сумму объ-

емов всех кубов, 2) сумму объемов всех шаров, 3) как изменится результат 1) и 2), если каждый куб заменить цилиндром, осевое сечение которого есть квадрат, а для первого цилиндра $h = 2r = a$?

Софизм философа Зенона Елейского (ок. 450 до нашей эры).

11) Ахиллес преследует черепаху со скоростью, в 10 раз большей скорости черепахи. Когда Ахиллес достигнет того места, где черепаха была, когда он ее увидел, последняя продвинется на $\frac{1}{10}$ первоначального расстояния между ними; когда Ахиллес достигнет и этого места, черепаха продвинется на $\frac{1}{100}$ первоначального расстояния и т. д.; таким образом, Ахиллес должен сначала достигнуть того места, которое черепаха уже покинула, и никогда уже черепахи не догонит. Указать ошибочность такого рассуждения и определить, где Ахиллес догонит черепаху, если первоначальное расстояние между ними $= a$.

Задачи из арифметики.

583. 1) Записать в более коротком виде сумму прогрессии (не вычисляя ее предела):

а) $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001\ldots$
б) $0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + \ldots$
в) $0{,}29 + 0{,}0029 + 0{,}000029 + \ldots$

2) Чистую периодическую десятичную дробь 0,2727... представить как сумму членов бесконечно-убывающего геометрического ряда. Определить первый член и знаменатель.

3) Решить ту же задачу для следующих дробей:

а) 0,438438..., б) 0,06120612..., в) 0,428571428571...

4) Воспользоваться указанным в задачах 2) и 3) приемом для обращения чистой периодической дроби в обыкновенную и затем вывести отсюда общее правило для такого преобразования.

5) Смешанную периодическую дробь 0,3575757... разбить на две части так, чтобы одна из частей представляла бесконечно-убывающую геометрическую прогрессию. Определить первый член и знаменатель этой прогрессии.

6) Поступить таким же образом с дробью 0,8174242...

7) Приложить указанный выше прием к преобразованию любой смешанной периодической дроби в обыкновенную.

8) Вывести общее правило для преобразования смешанной периодической дроби в простую.

9) Рассматривая знаменатели обыкновенных дробей, 1) обращающихся в конечную десятичную дробь, 2) в чистую периоди-

ческую, 3) смешанную периодическую, указать условия, от которых зависит обращение обыкновенной дроби в тот или другой вид десятичной.

10) В какой системе счисления прогрессия

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots.$$

может быть записана в виде 1,11111....?

11) В какой системе счисления периодическая дробь 0,22222.... представляет сумму.

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\ldots$$

Геометрической прогрессией называется числовой ряд, каждый последующий член которого равен произведению предшествующего ему члена на некоторое определенное число q, называемое знаменателем прогрессии.

Если абсолютное значение q больше 1, то прогрессия называется возрастающей, если оно меньше 1, то прогрессия называется убывающей, если $q=1$, то все члены ряда равны одному и тому же числу. Если через u_k обозначить k-ый член геометрической прогрессии, через q — знаменатель, а через S_n сумму n ее членов, то имеют место следующие соотношения:

I. $u_k = u_1 \; q^{k-1}$

II. $S_n = \frac{u^n q - u_1}{q-1} = \frac{u_1 - u^n q}{1-q}$

III. $S_n = u_1\frac{q-1}{q-1} = u_1\frac{1-q^n}{1-q}.$

Для определения геометрической прогрессии из пяти величин, входящих в формулы II и III, достаточно задать три.

Если мы имеем две возрастающие прогрессии (с положительными членами), арифметическую и геометрическую, первые два члена которых совпадают, то последующие члены геометрической прогрессии больше соответствующих им членов арифметической прогрессии.

Так как в любой арифметической прогрессии всегда можно взять такое число членов, чтобы абсолютное значение последнего члена было больше любого наперед заданного числа, то и в возрастающей геометрической прогрессии можно взять столько членов, чтобы абсолютное значение последнего члена было больше любого наперед заданного числа.

Во всякой убывающей геометрической прогрессии всегда можно взять такое число членов, чтобы абсолютное значение последнего члена прогрессии было меньше любого наперед заданного числа.

Если в числовом ряде неограниченно увеличивать число его членов, то ряд называется бесконечным. Ряд называется сходящимся, если существует число, к которому сумма членов этого ряда приближается так, что в ряду всегда можно взять столько членов, чтобы разность между этим числом и их суммой (а также суммой любого большого числа членов) была по абсолютному значению меньше какого угодно наперед заданного числа.

Сумма n членов ряда представляет *переменную* величину, зависящую от числа членов.

Число, к которому неограниченно приближается сумма n членов (при неограниченном возрастании n) сходящегося ряда, называется *суммой* бесконечного ряда.

Геометрическая убывающая прогрессия при неограниченном возрастании числа ее членов представляет сходящийся ряд. Сумма этого ряда равна

$$S = \frac{u_1}{1-q}.$$

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ.

ШЕСТАЯ ГЛАВА.

Расширение понятия степени. Логарифм.

§ 1. Определение степени с нулевым и отрицательным показателем.

584. Проверить равенства:

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad (1)$$

$$a^n : a^m = \frac{1}{a^{m-n}} \quad (2)$$

при

m	5	5	5	5	5
n	3	4	5	6	7

Какой смысл следует придать выражению a^0, если мы желаем, чтобы формула (1) имела место при $m = n$? Какой смысл следует придать выражению a^{-k}, если мы желаем, чтобы формула (1) имела место при $n < m$?

585. Выяснить, какие из законов действий над степенями останутся в силе при $n = 0$, если выражению a^0 ($a \neq 0$) придать смысл: $a^0 = 1$.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad m > n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{m-n}}, \qquad m < n$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$
$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

При каком значении a a^0 не имеет смысла и после установления определения смысла a^0?

586. Проверить, какие из перечисленных законов останутся в силе, если выражению a^{-k} придать смысл: $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$, при

m	5	5	-2	-9	-7	p	$-p$	$-p$	0	-2	$-p$
n	-3	-7	4	5	-2	$-q$	q	$-q$	-4	0	0

$p > 0$, $q < 0$

587. Какие из написанных ниже выражений имеют смысл, в силу установленных определений, и какой? Какие смысла не имеют?

1) $\sqrt[5]{a^{-20}}$; 2) $\sqrt[-3]{a^{12}}$; 3) $\sqrt[-5]{a^{-20}}$; 4) $\sqrt[12]{a^{-15}}$;
5) $\sqrt[0]{a^0}$; 6) $\sqrt[0]{a^8}$; 7) $\sqrt[-4]{a^0}$; 8) $\sqrt[0]{a^{-4}}$.

588. Составить ряд значений: 1) 10^n; 2) $\left(\frac{1}{10}\right)^n$; 3) 2^n; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, и расположить их в таком же порядке, как расположены в данном ниже ряду значения n, подписывая под каждым значением соответствующее значение a^n.

$$n = \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$$

589. Вычислить:

1) $9 \cdot 3^{-2}$; 2) $8 \cdot 2^{-2}$; 3) $16 \cdot 4^{-3}$; 4) $(-1)^{-4}$;
5) $9^2 \cdot 3^{-5}$; 6) $25^3 \cdot 5^4$; 7) $96 \cdot 2^6$; 8) $(-1)^{-3}$;
9) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$; 10) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; 11) $8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 12) $(-10)^{-2}$;
13) $\frac{1}{4^{-2}}$; 14) $\frac{1}{3^{-3}}$; 15) $\frac{25}{4^{-4}}$; 16) $(0,2)^{-1}$;
17) $(0,5)^{-2}$; 18) $(1,5)^{-2}$; 19) $(-0,1)^{-2}$; 20) $9 \cdot (4,5)^{-1}$.

590. Освободить следующие выражения от нулевых и отрицательных показателей:

1) a^0x^0; 2) $3a^0$; 3) $4(a-b)^0$; 4) $(a+b)^{-1}$;
5) $5^0(x-y)$; 6) $7^0(x+y)^0$; 7) $(a^0)^n$; 8) $(a^n)^0$;

9) $(a^0)^0$; 10) x^{-n}; 11) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$; 12) $\left(\frac{a}{x}\right)^{-n}$;

13) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-2}$; 14) 1^{-n}; 15) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$; 16) $\left(\frac{5}{x}\right)^{-2}$;

591. Умножение и деление:

1) $a^5 \cdot a^{-3}$; 2) $b^{-4} \cdot b^{-7}$; 3) $c^7 \cdot c^{-8}$; 4) $p^8 \cdot p^{-5}$;

5) $x^m \cdot x^{-n}$; 6) $y^m \cdot y^{-3}$; 7) $z^{n+3} \cdot z^{-5}$; 8) $a^{-3x} \cdot a^{4x}$;

9) $2{,}5a^{-7}b \cdot 4a^{-2}b^{-3}$; 10) $4{,}5a^{-2}b^{-3} \cdot 0{,}4a^5b^8$;

11) $\frac{b^{-4}}{b^{-9}}$; 12) $\frac{a^{-5}}{a^{11}}$; 13) $\frac{a^m}{a^{-n}}$; 14) $\frac{b^{n-3}}{b^{-5}}$;

15) $\frac{54x^5y^{-1}z^{-4}}{42x^{-1}y^{-8}z^{-4}}$; 16) $\frac{18x^{-4}y^{-5}z}{24x^{-3}y^8z^{-1}}$; 17) $\frac{21x^{-1}y^5z^{-3}}{35x^{-2}y^6z^{-4}}$;

18) $\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}+b^{-2}}$; 19) $\frac{x^{-4}-y^{-4}}{x^{-2}+y^{-2}}$; 20) $\frac{p^{-6}-q^{-6}}{p^{-3}+q^{-3}}$;

592. Возведение в степень:

1) $(a^{-2})^{-3}$; 2) $(a^{-3})^2$; 3) $(a^{-30})^0$;

4) $(-a^2)^{-5}$; 5) $(-a^5)^{-2}$; 6) $(-a^{-5})^{-2}$;

7) $(-a^3)^{-2n}$; 8) $(-a^{2n})^{-3}$; 9) $(-a^{-2n})^{-3}$;

10) $\left(\frac{a^{-2}b^8}{x^{-1}y^{-4}}\right)^2$; 11) $\left(\frac{a^{-3}b}{x^3y^{-2}}\right)^{-3}$; 12) $\frac{a^{-1}b^6}{x^2y^{-3}}$.

Смешанные задачи.

593. Следующие выражения записать без знаменателей, пользуясь степенями с отрицательными показателями:

1) $\frac{n}{x^n}$; 2) $\frac{n+1}{x^{n+1}}$; 3) $\frac{n-1}{x^{n-1}}$; 4) $x+\frac{1}{x}$; 5) $a^x+\frac{1}{a^x}$,

6) $y^n+\frac{1}{y^n}$; 7) $\frac{a-b}{x^{a-b}}$; 8) $\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}$; 9) $\frac{1}{1+x}$; 10) $\frac{1}{1+x^n}$.

594. В следующих выражениях заменить n через $-n$ и упростить:

1) x^{-n}; 2) x^{-n-1}; 3) x^{n+1}; 4) $\frac{1}{x^n}$;

5) $\frac{1}{x^{n-1}}$; 6) $(n+1)x^{n+1}$; 7) $\frac{x^{n+1}}{n+1}$; 8) $\frac{x^{n-1}}{n-1}$.

Выражение a^0 само по себе не имеет смысла. Но, чтобы равенство $a^n : a^m = a^{n-m}$ имело место при $m = n$, введено определение $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$.

Выражение 0^0 и после введения указанного определения остается не имеющим смысла.

Не имеет смысла также выражение $\sqrt[0]{a}$, так как нулевая степень всякого числа равна 1.

Выражение a^{-k} само по себе не имеет смысла. Но, чтобы равенство $a^n : a^m = a^{n-m}$ имело место и при $m > n$, введено **определение** $a^{-k}=\frac{1}{a^k}$.

При установленных определениях a^0 и a^{-k} оказываются справедливыми все установленные ранее для степеней с натуральными показателями законы действий над степенями, если подразумевать под показателями **любые целые относительные числа**:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

§ 2. Определение степени с дробным показателем.

595. Проверить равенство

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

при

	$\underbrace{1}$	$\underbrace{2}$	$\underbrace{3}$	$\underbrace{4}$	$\underbrace{5}$	$\underbrace{6}$
m	10	5	2	2	3	7
n	20	15	—6	5	2	5

596. Какой смысл следует придать выражению $a^{\frac{m}{n}}$, чтобы равенство $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ имело место при n не кратном m?

597. Преобразовать следующие радикалы в количества с дробными показателями:

1) $\sqrt[4]{a^3}$; 2) $\sqrt[4]{a}$; 3) $\sqrt{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$;
5) $\sqrt{x^3}$; 6) $\sqrt[4]{a^2}$; 7) $\sqrt{a^n}$; 8) $\sqrt[3]{a}$;
9) $\sqrt[3]{x+y}$; 10) $\sqrt[3]{x-y}$; 11) $\sqrt[3]{a^2+b^2}$; 12) $\sqrt[3]{(a+b)^2}$;
13) $\sqrt[3]{a^2b^2}$; 14) $\sqrt{9a^2+4b^2}$; 15) $\sqrt[3]{(a+b)x}$; 16) $\sqrt[4]{(a+x)^3}$;
17) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; 18) $\frac{1}{\sqrt{x+y}}$; 19) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$; 20) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}$.

598. Записать следующие выражения в виде радикалов:

1) $a^{\frac{1}{2}}$; 2) $a^{\frac{2}{3}}$; 3) $b^{\frac{3}{4}}$; 4) $b^{\frac{1}{4}}$; 5) $c^{\frac{2}{5}}$; 6) $c^{\frac{1}{5}}$;
7) $x^{\frac{1}{n}}$; 8) $x^{\frac{n}{2}}$; 9) $a^{-\frac{1}{2}}$; 10) $b^{-\frac{2}{3}}$; 11) $c^{1\frac{1}{2}}$; 12) $c^{-2\frac{1}{2}}$;
13) $x^{0,5}$; 14) $x^{0,2}$; 15) $x^{-0,5}$; 16) $x^{-0,3}$; 17) $(a+b)^{\frac{1}{2}}$;
18) $(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}$; 19) $(8x^3-y^3)^{\frac{2}{3}}$; 20) $(8x^3y^3)^{\frac{2}{3}}$.

599. Проверить, все ли законы действий над степенями сохраняют силу, если под m и n разуметь любые положительные дробные числа:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m};$$
$$a^m : a^n = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}; \qquad (a^m)^n = a^{mn};$$
$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m; \qquad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

600. Выяснить, все ли законы извлечения корня:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b},$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

сохраняют силу, если под m и n разуметь любые положительные дроби.

601. Какие из следующих выражений имеют смысл и какой? Какие смысла не имеют?

1) $a^{-\frac{5}{3}}$; 2) $\sqrt[5]{a^{\frac{3}{5}}}$; 3) $a^{-\frac{3}{5}:\frac{2}{7}}$; 4) $a^{\frac{0}{2}}$;
5) $a^{\frac{2}{0}}$; 6) $a^{-\frac{0}{2}}$; 7) $a^{-\frac{2}{0}}$; 8) $a^{-\frac{5}{8}:-\frac{3}{4}}$;
9) $\sqrt[-\frac{3}{5}]{a^{-\frac{5}{3}}}$; 10) $\sqrt[\frac{5}{2}]{0^2}$; 11) $\sqrt[0]{0}$; 12) $\sqrt[-1]{a^{\frac{4}{5}}}$.

602. Проверить, какие из законов, перечисленных в задаче 599, сохраняют силу, если под m и n разуметь любые рациональные числа.

603. Вычислить выражения:

1) $16^{\frac{3}{4}}$; 2) $27^{-\frac{2}{3}}$; 3) $25^{2\frac{1}{2}}$; 4) $8^{\frac{5}{3}}$; 5) $12^{\frac{2}{3}}$;

6) $12^{\frac{2}{6}}$; 7) $12^{-\frac{2}{3}}$; 8) $12^{-\frac{3}{9}}$; 9) $64^{-\frac{5}{6}}$; 10) $(-64)^{\frac{5}{6}}$.

604. Упростить выражения:

1) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}$; 2) $x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}}$; 3) $x^{\frac{5}{6}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$; 4) $a^{\frac{3}{8}}\cdot a^{-\frac{3}{8}}$;

5) $x^{\frac{3}{5}}\cdot x$; 6) $a\cdot a^{-\frac{5}{3}}$; 7) $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}$; 8) $z^{\frac{2}{3}}\cdot z^{\frac{5}{6}}$;

9) $a^{\frac{3}{7}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}$; 10) $a^{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt[3]{a^2}$; 11) $x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x^2}$; 12) $x^{0,1}\cdot x^{0,3}\cdot x^{-0,4}$.

13) $a^{\frac{1}{p}}\cdot a^{\frac{1}{q}}$; 14) $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{q}{p}}\cdot a^2$; 15) $x^{\frac{p}{q}}\cdot x^{\frac{q}{p}}\cdot x^{-\frac{p^2+q^2}{pq}}$;

16) $125^{1\frac{1}{2}}\cdot 25^{-\frac{3}{4}}$; 17) $2^{\frac{5}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{16}}$; 18) $x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{x}$; 19) $x^{-\frac{1}{2}}:\sqrt{x}$;

20) $a^{\frac{2}{3}}:\sqrt[5]{a^2}$; 21) $x^{1,4}:x^{-1,6}$; 22) $\sqrt[3]{x}:x^{-\frac{2}{3}}$; 23) $\sqrt[5]{x^2}:x^{-\frac{3}{5}}$;

24) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}:x^{\frac{1}{8}}$; 25) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}:a^{-\frac{1}{8}}$; 26) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\cdot x^{-\frac{8}{16}}$;

27) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}\cdot a^{\frac{14}{27}}$; 28) $16^{\frac{3}{4}}:8^{\frac{2}{3}}$; 29) $27^{\frac{5}{3}}:9^{\frac{3}{2}}$; 30) $125^{\frac{5}{3}}:25^{-\frac{5}{2}}$;

31) $(0,008)^{\frac{2}{3}}:(0,04)^{-\frac{1}{2}}$; 32) $a^{\frac{3}{5}}:a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{16}{15}}$; 33) $x^{\frac{5}{3}}:x^{\frac{8}{3}}:x^{-\frac{16}{15}}$;

34) $16^{\frac{3}{4}}:8^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{-\frac{3}{2}}$; 35) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$; 36) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{b}{a}}:\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{a}{b}}$;

37) $(a^6)^{\frac{1}{3}}$; 38) $(x^8)^{\frac{3}{8}}$; 39) $\left(y^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}}$; 40) $\left(z^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{5}{3}}$; 41) $\left(a^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{5}{6}}$;

42) $\left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^0$; 43) $(x^0)^{-\frac{3}{7}}$; 44) $\left(a^{-0,6}\right)^{-0,5}$; 45) $\left(x^{-0,9}\right)^{\frac{10}{9}}$;

46) $\left(x^{\frac{q}{p}}\right)^{-\frac{q}{p}}$; 47) $\left(a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{r}{s}}\right)^{-\frac{qs}{pr}}$.

Выражение $a^{\frac{n}{k}}$ при n не кратном k само по себе не имеет смысла. Но, чтобы равенство $\sqrt[k]{a^n}=a^{\frac{n}{k}}$ имело место при n не кратном k, введено о п р е д е л е н и е $a^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{a}$.

При установленном определении извлечение корня всегда может быть заменено возведением в степень.

При установленном определении $a^{\frac{1}{k}}$ (а также и a^{-k}) оказываются справедливыми все установленные ранее для степеней с натуральными показателями законы действий над степенями и в том случае, если под показателями разуметь любые р а ц и о н а л ь н ы е числа.

§ 3. Показательная и логарифмическая функции.

Показательная функция.

605. Представить графически функцию $y = 2^x$, давая показателю x значения: 1) целые и положительные, 2) целые и отрицательные, 3) $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$ и т. д. 4) $x = \pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{3}{4}$, $\pm\frac{5}{4}$ и т. д. (вычисляя корни с точностью до 0,01).

Вычислить значения функции для $x = \pm\frac{1}{8}$, $\pm\frac{3}{8}$, $\pm\frac{5}{8}$ и т. д.

Какой числовой ряд образуют абсциссы построенных точек? Какой ряд образуют их ординаты?

606. Представить, как и в задаче 605, графически следующие функции:

1) $y = 3^x$; 2) $y = 5^x$;
3) $y = 10^x$; 4) $y = \frac{1}{10}\cdot 10^x$.

607. 1) Описать изменение показательной функции $y = a^x$, если a есть произвольное положительное число, большее 1.

2) Какой вид принимает эта показательная функция, если $a = 1$?

608. Какой вид имеет графика показательной функции, если a есть положительное число < 1, например $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$?

Понятие логарифма.

$$y = a^x;\ x = \lg_a y.$$

609. Что называется логарифмом числа y при основании a? Переписать следующие показательные равенства в виде логарифмических:

1) $5^2 = 25$; 2) $4^4 = 256$; 3) $2^5 = 32$; 4) $3^3 = 27$;
5) $7^3 = 343$; 6) $5^3 = 125$; 7) $3^7 = 2187$; 8) $8^3 = 512$.

610. Переписать следующие логарифмические равенства в виде показательных:

1) $\lg_{10} 10 = 1$; 2) $\lg_3 3 = -1$; 3) $\lg_7 49 = 2$; 4) $\lg_5 125 = 3$;
5) $\lg_2 16 = 4$; 6) $\lg_4 16 = 2$; 7) $\lg_7 343 = 3$; 8) $\lg_{49} 343 = 1{,}5$.

611. Найти при основании 2 логарифмы следующих чисел:

1) 2; 2) 4; 3) 64; 4) 16; 5) 128; 6) 32; 7) 1; 8) $\frac{1}{4}$; 9) $\frac{1}{2}$; 10) $\frac{1}{8}$.

612. Найти при основании 3 логарифмы следующих чисел: 1) 9; 2) 81; 3) 3; 4) 27; 5) 1; 6) 243; 7) $\frac{1}{27}$; 8) $\frac{1}{9}$; 9) $\frac{1}{81}$.

613. Найти бригговы логарифмы (основание $=10$) следующих чисел: 1) 10; 2) 100; 3) 1000; 4) 1000000; 5) 1; 6) 0,1; 7) 0,001; 8) 0,000001.

614. Вычислить при основании 2 логарифмы следующих чисел: 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[4]{2}$; 3) $\sqrt[3]{2}$; 4) $\sqrt[8]{2}$; 5) $\sqrt[4]{2^3}$; 6) $\sqrt[5]{2^4}$; 7) $\sqrt[3]{4}$; 8) $\sqrt[5]{8}$.

615. Вычислить при основании 3 логарифмы следующих чисел: 1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[3]{3^2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt[4]{27}$; 5) $\sqrt[5]{9}$; 6) $\sqrt[6]{27}$; 7) $\sqrt[5]{81}$.

616. Вычислить бригговы логарифмы следующих чисел: 1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt[4]{10}$; 3) $\sqrt[4]{10^3}$; 4) $\sqrt[8]{10}$; 5) $\sqrt[8]{100}$; 6) $\sqrt[8]{1000}$; 7) $\sqrt[8]{10000}$; 8) $\sqrt[8]{100000}$; 9) $\sqrt[8]{1000000}$.

617. Определить при основании a (a — положительное число $\neq 1$) логарифмы следующих чисел: 1) a^2; 2) $\frac{1}{a}$; 3) 1; 4) a^n; 4) a^n; 5) $\sqrt{a}$; 6) $\sqrt[n]{a}$; 7) $\frac{1}{a^v}$; 8) $\sqrt[n]{a^m}$; 9) $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

618. В следующих уравнениях найти значение x на основании определения логарифма:

1) $x=\lg_2 0,25$;	2) $x=\lg_4 64$;	3) $x=\lg_8 64$;
4) $x=\lg_{16} 64$;	5) $x=\lg_9 27$;	6) $x=\lg_5 0,04$;
7) $x=\lg_5 125$;	8) $x=\lg_2 0,125$;	9) $x=\lg_{49} 343$;
10) $\lg_2 x=3$;	11) $\lg_5 x=2$;	12) $\lg_2 x=5$;
13) $\lg_4 x=4$;	14) $\lg_5 x=-4$;	15) $\lg_4 x=-5$;
16) $\lg_9 x=1\frac{1}{2}$;	17) $\lg_8 x=\frac{2}{3}$;	18) $\lg_{27} x=-1\frac{2}{3}$;
19) $\lg_x 4=2$;	20) $\lg_x 16=4$;	21) $\lg_x 343=3$;
22) $\lg_x 1024=10$;	23) $\lg_x 2192=3$;	24) $\lg_x 1728=3$;
25) $\lg_x 10=-1$;	26) $\lg_x 2=-\frac{1}{2}$;	27) $\lg_x 9=-\frac{2}{3}$.

619. Составить ряд чисел, логарифмы которых образуют ряд целых чисел, если основанием системы является 1) число 2; 2) число 3; 3) число 10 (бригговы логарифмы). Какой ряд образуют эти числа? Какой ряд образуют их логарифмы?

Логарифмическая функция.

620. Построить графику функции $y = \lg_2 x$ на том же чертеже, где уже построена графика функции $y = 2^x$. Как графика логарифмической функции может быть получена из графики показательной функции при том же основании?

Построить таким же образом графику функции $y = \lg_3 x$.

621. Построить графику функции $y = \lg_{10} x$, приняв вертикальный масштаб (по оси y) в 10 раз крупнее горизонтального (по оси x). Для построения по точкам этой графики воспользоваться логарифмами чисел $10^{\frac{1}{8}}$, $10^{\frac{2}{8}}$,..., $10^{\frac{8}{8}}$, определяемых последовательным извлечением квадратных корней.

Показать, что построенная графика является симметричной графике $y = 10^x$ (построенной так, чтобы горизонтальный масштаб был в 10 раз крупнее вертикального) относительно прямой $y = x$. Какими функциями являются по отношению друг к другу функции показательная и логарифмическая?

622. При помощи построенной графики определить (по чертежу) $\lg_{10} 2$, 3, 4, 5,..., 9.

623. Описать вид кривой $y = \lg_a x$ при $a = 2$, 3, 10,...

624. Какая точка является общей для логарифмических кривых при всяком основании?

625. Выяснить, на какое число отличаются друг от друга бригговы логарифмы чисел: $\lg n$, $\lg 10n$, $\lg 100n$, $\lg 1000n$,...., $\lg \frac{n}{10}$, $\lg \frac{n}{100}$, $\lg \frac{n}{1000}$.

626. Составить ряд чисел

$$n,\ 10n,\ 100n \ldots \text{ и т. д.}$$

Какой ряд образуют самые числа? Какой ряд образуют их логарифмы?

Понятие об иррациональном показателе (логарифме). Элементарный прием вычисления бригговых логарифмов.

627. Составить ряд степеней числа 2 с показателями: 2, 3, 5, 10, 20, 40. Между какими степенями числа 10 лежит 2^5? На основании составленных для 2^5 неравенств определить, между какими степенями 10 лежит число 2.

628. Между какими степенями числа 10 лежит 2^{10}? На основании написанного неравенства для 2^{10} определить, между какими степенями 10 находится число 2. Поступить так же, пользуясь неравенствами для 2^{20}, 2^{40}. Ряд каких чисел представляют показатели при 10 в левых частях написанных неравенств? В правых частях? В какую степень следует возвести 2, чтобы показатели при 10 в соответствующих неравенствах разнились друг от друга на 0,01? на 0,001? на 0,0001? и т. д. Существует ли степень 10 с рациональным показателем, которая бы равнялась 2? Приближенными значениями какого числа являются показатели при 10, взятые из левых частей неравенств? взятые из правых частей неравенств? Как следует назвать иррациональное число, определяемое составленными указанным образом двумя рядами чисел?

629. Полагая $10^x = 7$, составить дальнейшие равенства, последовательно возводя в квадрат, до $7^{128} = 10^{128x}$. Найти подсчетом числа цифр в результате возведения в степень 7^{128} приближенные значения $\lg 7$.

630. Таким же образом вычислить приближенные значения 1) $\lg_{10} 3$; 2) $\lg_{10} 43$; 3) $\lg_{10} 121$; 4) $\lg_{10} 237$.

631. Составить таблицу чисел, логарифмы которых равны $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ Первое число равно 10. Как определить второе число, затем третье число? Проверить следующую таблицу, где в левом столбце помещены числа, а в правом — соответствующие им трехзначные логарифмы.

N	L	N	L
10,000	1,000	1,037	$0{,}015_5$
3,162	0,500	1,018	0,008
1,778	0,250	1,009	0,004
$1{,}333_5$	0,125	$1{,}004_5$	0,002
1,155	$0{,}062_5$	1,002	0,001
1,075	0,031	$1{,}000_5$	$0{,}000_5$

632. Число 6 разложить на множители, встречающиеся в левом столбце нашей таблицы. (Указание: наибольший из встречающихся сомножителей есть 3,162; 6 : 3,162 = 1,898, отсюда 6 = 3,162 · 1,898. Наибольший сомножитель числа 1,898 есть 1,778; теперь 1,898, = 1,778 · 1,068. Следовательно, 6 = 3,162 · 1,778 · 1,068 и т. д.).

Функция $y = a^x$ называется *показательной* функцией ($a > 0$; $a \neq 1$).

Число x, являющееся показателем степени при основании a, называется логарифмом числа y при основании a и обозначается $x = \lg_a y$.

Логарифмом числа при данном основании называется показатель той степени, в которую следует возвести основание, чтобы получить это число.

Функция $y = \lg_a x$ является функцией, обратной показательной функции $y = a^x$.

Согласно первоначально установленному определению степени как произведения равных сомножителей, x может принимать только целые числовые значения.

Благодаря установленному определению чисел с отрицательными и дробными показателями, функция $y = a^x$ оказывается определенной для любого рационального значения x.

При рациональном a степени a с целым (положительным и отрицательным, показателем (т.-е. числа, имеющие логарифмами целые числа) суть числа рациональные.

При рациональном a (не представляющем целой степени другого рационального числа), числа, которым соответствуют дробные показатели, оказываются числами иррациональными.

Если при рациональном a рациональное число y не имеет логарифмом целого числа, то оно не может иметь и дробного логарифма.

Чтобы иметь возможность рассматривать функцию $y = a^x$ при *любых* значениях x — рациональных и иррациональных (при *непрерывном изменении* x), а также и для того, чтобы иметь возможность рассматривать функцию $y = \lg_a x$ при любом (главным образом, *рациональном*) значении x, необходимо установить определение степени с иррациональным показателем.

Если оказывается невозможным решить в рациональных числах показательное уравнение $A = a^x$, то всегда возможно подыскать такие два числа (с произвольным знаменателем k) $\frac{n}{k}$ и $\frac{n+1}{k}$, что

$$a^{\frac{n}{k}} < A < a^{\frac{n+1}{k}} \quad (a > 1);$$

если знаменателю k давать значения 1, 10, 100, 1000 и т. д., то значения $\frac{n}{k}$ и $\frac{n+1}{k}$ определят некоторую бесконечную десятичную дробь, которая представляет некоторое иррациональное число. Это иррациональное число, определяемое значениями $\frac{n}{k}$ и $\frac{n+1}{k}$, и принимается за значение показателя x в уравнении $A = a^x$ (логарифма числа A при основании a).

Свойства показательной и логарифмической функций.

$a^x > 0$ при любом действительном значении x ($a > 0$; $a \neq 1$).

Логарифм отрицательного числа не может быть выражен действительным числом.

При $a \neq 1$:

a^x при $x = 0$ равно 1 при всяком значении a;

a^x при $x = 1$ равно a.

При $a > 1$:

при $x > 0$ $\quad a^x > 1$; при $x < 0$ $\quad a^x < 1$.

a^x при неограниченно возрастающих положительных значениях x неограниченно возрастает $[a^\infty = \infty]$;

a^x при неограниченно возрастающих по абсолютной величине отрицательных значениях x неограниченно убывает $(a^{-\infty} = 0)$.

(При $a < 1$:

при $x > 0$ $\quad a^x < 1$ $\quad a^\infty = 0$

$x < 0$ $\quad a^x > 1$ $\quad a^{-\infty} = \infty$)

При основании системы $a > 1$ логарифмы чисел, больших единицы, положительны;—меньших единицы, отрицательны (при основании, меньшем единицы,—наоборот).

Логарифм единицы $= 0$.

Логарифм основания $= 1$.

При неограниченном возрастании числа логарифм его неограниченно возрастает $\{\lg \infty = \infty\}$ (при $a < 1$ в этом случае логарифм принимает отрицательные значения, неограниченно возрастающие по абсолютной величине).

При неограниченном убывании числа логарифм его принимает отрицательные значения, неограниченно возрастающие по абсолютной величине $\{\lg 0 = -\infty\}$ (при $a < 1$ в этом случае логарифм получает неограниченно возрастающие положительные значения).

§ 4. Преобразования выражений, содержащих логарифмы.

633. Пользуясь тождествами вида: $A = a^{\lg_a A}$, $B = a^{\lg_a B}$, доказать справедливость следующих законов преобразования логарифмов:

$\lg (A + B)$ не может быть выражен через $\lg A$ и $\lg B$.

$\lg AB = \lg A + \lg B$;

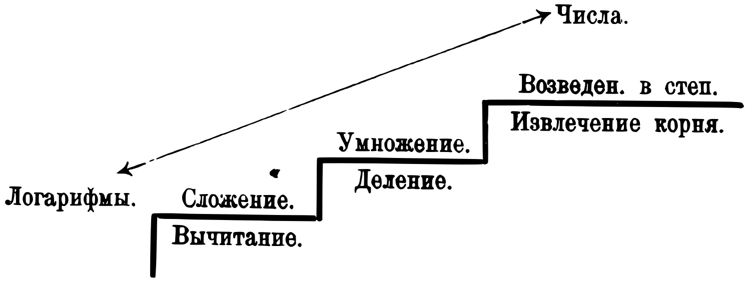
$\lg A^n = n \lg A$;

$\lg \frac{A}{B} = \lg A - \lg B$;

$\lg \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \lg A$.

634. Каким действием какой ступени заменяется при переходе от действий над числами к действиям над их логарифмами: 1) умножение, 2) деление, 3) возведение в степень, 4) извлечение корня?

635. Объяснить смысл следующей таблицы, иллюстрирующей законы логарифмирования:



636. Прологарифмировать следующие выражения:

1) $\lg abc$; 2) $\lg mnpqrst$; 3) $\lg 3ax(x+y)$;

4) $\lg \frac{ab}{c(x+7)}$; 5) $\lg \frac{abcde}{fgke}$; 6) $\lg \frac{(a+b)x}{(c-d)y}$;

7) $\lg ab^2$; 8) $\lg (ab)^2$; 9) $\lg ab^2c^3d^4$;

10) $\lg (a^2-b^2)$; 11) $\lg (a^2-1)$; 12) $\lg (x^4-a^4)$;

13) $\lg a\sqrt[3]{b}$; 14) $\lg \sqrt{ab}$; 15) $\lg \sqrt[3]{abc}$;

16) $\lg 5a^2b\sqrt[3]{c}$; 17) $\lg 7x\sqrt[4]{ab^3}$; 18) $\lg a\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[4]{xy^3}$;

19) $\lg 31x(7x-8)^3$; 20) $\lg 8a^2b(6c-d)^2$;

21) $\lg 5a^3\sqrt{x}\sqrt[3]{(x^2+y^2)^3}$; 22) $\lg 5x\sqrt[4]{a(8y-z)}$;

23) $\lg 9xy^8\sqrt{(a^2+b^2)c}$; 24) $\lg \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$;

25) $\lg \frac{ab^3}{c\sqrt{d}}$; 26) $\lg \frac{a^2\sqrt[3]{x}}{5cy^3}$;

27) $\lg \frac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{y\sqrt{y\sqrt{y\sqrt{y}}}}}$; 28) $\lg \frac{23a(x-y)^4}{324\sqrt[3]{(ax-y)^2}}$;

29) $\lg \frac{a^3\sqrt{c(ax-b)}}{(x+z)\sqrt[3]{cx-d}}$; 30) $\lg \frac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}$;

31) $\lg \sqrt{\frac{ax}{x-y}}$; 32) $\lg \left(\frac{a-b}{x-y}\right)^4$;

33) $\lg \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^7$; 34) $\lg \frac{a}{b}\sqrt[6]{\frac{cx^3}{d^2}}$;

35) $\lg \frac{a-b}{c-d}\sqrt[3]{\frac{cx-d}{ax-b}}$; 36) $\lg \frac{m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n}}}}{n\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m}}}}$.

37) $\lg \frac{1}{(a+b^2)^7}$;

38) $\lg \frac{1}{a\sqrt[5]{c-x}}$;

39) $\lg \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}}$;

40) $\lg \frac{a(bx-c)^{\frac{1}{2}}}{(mx-n)^{-3}}$;

41) $\lg \left(\frac{ax-b}{x\sqrt{y-z}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

42) $\lg \left(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b}\right)^{-\frac{5}{7}}$.

637. Преобразовать следующие суммы логарифмов в логарифмы произведений и частных:

1) $\lg a + \lg b - \lg c$;
2) $\lg a - \lg b + \lg c - \lg d$;
3) $\lg a - (\lg b + \lg c) + \lg d$;
4) $3 \lg a + 2 \lg b - 4 \lg c$;
5) $\frac{1}{2} \lg x - \frac{1}{3} \lg y + \frac{1}{4} \lg z$;
6) $2 \lg a - \frac{1}{2} \lg b + \frac{1}{3} \lg x - 3 \lg y$;
7) $7 \lg (a+b) - \frac{2}{5} \lg (a-b) + \frac{1}{2} \lg x - 4 \lg y$;
8) $\frac{2}{3} \lg (ax-b) - \frac{5}{4} \lg (cx-d) + \frac{3}{5} \lg (mx-n)$;
9) $\frac{1}{3} \lg (a^2+b^2) - \frac{1}{2} [\lg (a+b) + \lg (a-b)]$;
10) $2 \lg (x-y) - \frac{1}{2} \lg (x^2-xy+y^2) - \frac{1}{2} \lg (x+y)$;
11) $\lg \frac{a}{b} + \lg \frac{b}{c} - \lg \frac{c}{d} - \lg \frac{ax}{dy}$;
12) $\lg \frac{x}{y} + \lg (xy) - 3 \lg (x-y) - \lg \sqrt{\frac{x}{y}}$.

§ 5. Употребление логарифмических таблиц Бриггса.

638. Зная, что четырехзначный $\lg 2 = 0{,}3010$, написать логарифмы чисел:

1) 20; 2) 200; 3) 2000; 4) 2000000;
5) 0,2; 6) 0,02; 7) 0,0002; 8) 0,00002.

Объяснить, почему характеристика $\lg 2$ равна 0.

639. Зная, что $\lg 7{,}9 = 0{,}8976$, написать логарифмы чисел:

1) 79; 2) 7900; 3) 790000; 4) 0,79; 5) 0,0079.

В каждом случае указать высшие разрядные единицы, входящие в состав логарифмируемого числа; как определяется характеристика логарифма в зависимости от того, какие высшие разрядные единицы входят в состав логарифмируемого числа?

640. Найти четырехзначные логарифмы следующих чисел (см. таблицы, стр. 548).

1) 28;	2) 3,5;	3) 50;	4) 5;	5) 2;
6) 2,8;	7) 3500;	8) 96;	9) 100;	10) 260000;
11) 0,0056;	12) 9,6;	13) 44000;	14) 9900;	15) 0,98;
16) 243;	17) 443;	18) 256;	19) 49600;	20) 0,368;
21) 0,998;	22) 48,3;	23) 7,88;	24) 0,875;	25) 969;
26) 819;	27) 10,1;	28) 8,94;	29) 0,648;	30) 0,101.

641. Найти по логарифмам числа, если эти логарифмы встречаются непосредственно в таблицах:

1) 0,9031;	2) 0,7160;	3) 0,7482;	4) 0,8774;	5) 0,0086;
6) 1,7033;	7) 1,8567;	8) 0,3424;	9) 1,9122;	10) 3,8842;
11) 4,9330;	12) 0,9987;	13) 0,4771;	14) 1,8960;	15) 4,9614;
16) 2,0531;	17) 0,0043;	18) 6,6201;	19) 0,4116;	20) 2,7059.

642. $\lg 2 = 0{,}3010$, $\lg 3 = 0{,}4771$. На логарифмической кривой отметить эти точки и соединить их прямой линией. 1) Определить построением и вычислением точки, в которых эта прямая пересекает прямые $x = 2{,}1$; $x = 2{,}2$ и т. д. до $x = 2{,}9$. 2) Составить таблицы отклонения значений, полученных интерполяцией, от значений (взятых из таблиц) $\lg 2{,}1$; $\lg 2{,}2$ и т. д. Где будет наибольшее отклонение и где наименьшее?

643. Найти пятизначные логарифмы следующих чисел:

1) 248;	2) 101;	3) 20,8;	4) 1,44;
5) 0,996;	6) 4425;	7) 2135;	8) 2,165;
9) 0,4135;	10) 0,4136;	11) 41,38;	12) 4,558;
13) 0,4579;	14) 752,5;	15) 9524;	16) 28,88;
17) 0,4694;	18) 0,6887;	19) 2,683;	20) 0,04287.

Сохранить в найденных логарифмах по четыре десятичных знака (выбирая наиболее точное из двух приближенных значений).

Найти те же логарифмы по четырехзначным таблицам, пользуясь интерполяцией. Объяснить на основании рассмотрения таблиц, почему значения, полученные тем и другим способом, должны совпадать (в крайнем случае разниться на 1 последнего знака).

644. Найти числа по соответствующим им пятизначным логарифмам (если последние непосредственно встречаются в таблицах):

1) 1,97772;	2) 2,69425;	3) 0,93611;	4) 2,74819;
5) 0,47770;	6) 1,56820;	7) 0,70027;	8) 0,99021;
9) 1,71003;	10) 1,73030;	11) 0,56820;	12) $\bar{3},43457$;
13) 4,58636;	14) 4,70053;	15) 2,40088;	16) $\bar{2},56820$;
17) 1,83020;	18) 0,75043;	19) 7,30081;	20) 3,19005.

645. Пользуясь таблицами и интерполяцией, отыскать логарифмы следующих чисел:

а) (по четырехзначным таблицам)

1) lg 2307;	2) lg 4036;	3) lg 5751;
4) lg 8973;	5) lg 4987000;	6) lg 4175;
7) lg 813700;	8) lg 6548;	9) lg 91380000;
10) lg 0,4596;	11) lg 357,6;	12) lg 47,28;
13) lg 5,831;	14) lg 0,7356;	15) lg 0,7326;
16) lg 0,03875;	17) lg 0,008423;	18) lg 0,09387;
19) lg 0,0009246;	20) lg 0,0001248;	21) lg $56\frac{1}{4}$;
22) lg $423\frac{1}{2}$;	23) lg $215\frac{1}{5}$;	24) lg $4\frac{3}{8}$;
25) lg $3\frac{5}{16}$;	26) lg 124,55;	27) lg 100,08;
28) lg 0,10484;	29) lg 2,0065;	30) lg 1,6996.

б) (по пятизначным таблицам)

1) lg 53843;	2) lg 74067;	3) lg 80395;
4) lg 76306;	5) lg 265780;	6) lg 3805700;
7) lg 74183000;	8) lg 626260;	9) lg 83638000;
10) lg 10101000;	11) lg 34,043;	12) lg 3,7408;
13) lg 0,57654;	14) lg 0,084375;	15) lg 0,0043896;
16) lg 4,7385;	17) lg 0,38471;	18) lg 763,84;
19) lg 0,075638;	20) lg 0,32689;	21) lg $47\frac{5}{8}$;
22) lg $736\frac{3}{4}$;	23) lg $\frac{3}{32}$;	24) lg $23\frac{7}{25}$;
25) lg $12\frac{15}{64}$;	26) lg 1265,45;	27) lg 2,00088;
28) lg 200,006;	29) lg 1006,08;	30) lg 300,684.

646. Найти 1) четырехзначные логарифмы чисел:

а) 405; б) 405,6; в) 405,67; г) 405,678; д) 405,6785;

2) пятизначные логарифмы тех же чисел. Сколько знаков достаточно было сохранить в числе (увеличивая в случае необходимости на 1 последний удержанный знак) [в прим. в, г, д)], чтобы получить четырехзначный (пятизначный) логарифм? Почему?

647. Найти четырехзначные и пятизначные логарифмы чисел:

а) 685; б) 685,3; в) 685,34; г) 685,348; д) 685,3484.

Какие десятичные знаки и в каких из данных примеров не влияют на значение а) четырехзначного, б) пятизначного логарифма, и поэтому могут быть отброшены (с соответственным увеличением на 1 в случае необходимости последнего удержанного знака)?

648. Найти четырехзначные и пятизначные логарифмы чисел:

а) 12,42; б) 12,426; в) 12,4264; г) 12,42648; д) 12,426485.

Какие знаки и в каких из данных примеров не влияют на значение; а) четырехзначного, б) пятизначного логарифма?

649. Сколько значащих цифр достаточно сохранить в числе при определении его: 1) четырехзначного, 2) пятизначного логарифма, если табличная разность >10 (единиц последнего десятичного знака)? $\leqq 10$? При какой первой значащей цифре числа табличная разность приблизительно равна 10?

650. Найти логарифмы следующих чисел (удержав в них нужное число десятичных знаков). [NB. Простые дроби должны быть предварительно обращены в десятичные]:

1) 3,141592653...; 2) 2,7182818284...;

3) $1\frac{2}{5}$; 4) $\frac{43}{24}$; 5) $3\frac{1}{7}$; 6) $\frac{47}{36}$;

7) 2,347347...; 8) 0,303,303...;

9) 0,389389...; 10) 335,888...

651. Найти числа, соответствующие логарифмам:

а) (по четырехзначным таблицам):

1) 0,9193;	2) 0,6309;	3) 0,2437;	4) 0,8850;
5) 0,6247;	6) 1,9017;	7) 0,1626;	8) 3,7080;
9) 5,9000;	10) 0,5000;	11) $\bar{2}$,0440;	12) $\bar{1}$,1305;
13) $\bar{3}$,3580;	14) $\bar{4}$,5675;	15) 0,3333;	16) 0,1462;
17) 0,1000;	18) $\bar{1}$,0537;	19) 0,0180;	20) 2,0007.

б) По пятизначным таблицам:

1) 4,378754;	2) 3,05867;	3) 2,75306;	4) 1,65073;
5) 0,28888;	6) 0,83705;	7) 2,85439;	8) 0,40765;
9) $\bar{1}$,37605;	10) 6,44444;	11) 0,08375;	12) 0,95368;
13) $\bar{3}$,75431;	14) $\bar{2}$,57093:	15) 0,33333;	16) 3,16667;
17) 2,10000;	18) $\bar{1}$,00100;	19) $\bar{1}$,00010;	20) 2,00070.

За основание логарифмической функции обычно принимается число 10.

Значения логарифма, вычисленные при определенном основании для ряда значений аргумента, образуют таблицу логарифмов.

Если за основание логарифмической функции принято число 10, то логарифмы называются десятичными или Бригговыми (по имени Бриггса, впервые составившего вместе с Непером — изобретателем логарифмов — десятичные таблицы логарифмов).

Свойства десятичных логарифмов:

При умножении числа на 10^k его логарифм увеличивается на k.

Логарифмы двух десятичных чисел, разнящихся только местом запятой (записанных одинаковыми значащими цифрами), имеют одинаковую дробную часть (мантиссу).

Целая часть десятичного логарифма числа (характеристика) равна логарифму той разрядной единицы, которую означает первая значащая цифра числа.

Применение логарифмических таблиц к вычислениям.

652. Вычислить при помощи четырехзначных или пятизначных таблиц [или при помощи логарифмической линейки (см. стр. 417)] значения следующих выражений. В каждом случае сохранить в данных числах лишь нужное число значащих цифр. (Все ли из указанных ниже задач могут быть решены при помощи картонной логарифмической линейки?)

1) $948{,}8\cdot 0{,}04388$; 2) $3{,}410\cdot 0{,}008\,763$;
3) $0{,}0003769\cdot 830{,}8$; 4) $8{,}440\cdot 98{,}27$;
5) $276{,}568\cdot 0{,}037948$; 6) $538{,}974\cdot 0{,}14839$;
7) $\frac{2{,}3768}{0{,}87534}$; 8) $\frac{34{,}785}{3{,}8768}$;
9) $\frac{73{,}5875}{0{,}895347}$; 10) $\frac{3{,}78548}{0{,}40382}$;
11) $\frac{7{,}8564\cdot 3{,}7653}{98{,}706}$; 12) $\frac{17{,}539\cdot 0{,}87643}{42{,}397}$;
13) $\frac{5{,}4763\cdot 19{,}8547}{23{,}6053}$; 14) $\frac{736{,}894\cdot 0{,}09387}{19{,}7508}$;
15) $\frac{754.098}{24{,}6893\cdot 8{,}4957}$; 16) $\frac{98{,}3907}{0{,}76085\cdot 58{,}9673}$;
17) $\frac{839\cdot 0{,}75436}{976\cdot 0{,}08754}$; 18) $\frac{0{,}43687\cdot 47643}{9{,}7685\cdot 8{,}0765}$;
19) $\frac{576\cdot 0{,}38954\cdot 37{,}807}{983\cdot 0{,}07549\cdot 56{,}754}$; 20) $\frac{3754\cdot 45{,}786\cdot 0{,}78394}{4573\cdot 9{,}837\cdot 0{,}34075}$;

21) $(1{,}3578)^5$; 22) $(1{,}5097)^6$; 23) $(1{,}4987)^7$; 24) $(2{,}7359)^4$;
25) $\left(\frac{19}{13}\right)^{10}$; 26) $\left(\frac{57}{41}\right)^8$; 27) $\left(\frac{79}{53}\right)^7$; 28) $\left(\frac{97}{75}\right)^9$;
29) $\left(\frac{5768}{4307}\right)^4$; 30) $\left(\frac{0{,}30\,854}{0{,}16\,687}\right)^6$; 31) $\left(\frac{7638}{4075}\right)^2$; 32) $\left(\frac{0{,}75\,834}{0{,}47\,039}\right)^5$;
33) $\left(2\frac{17}{87}\right)^6$; 34) $\left(1\frac{47}{97}\right)^7$; 35) $\left(2\frac{8}{91}\right)^5$; 36) $\left(1\frac{43}{137}\right)^8$;
37) $\sqrt[3]{9}$; 38) $\sqrt[3]{9876}$; 39) $\sqrt[3]{19}$; 40) $\sqrt[3]{837}$;
41) $\sqrt{15}$; 42) $\sqrt{8507}$; 43) $\sqrt{738}$; 44) $\sqrt{58076}$;
45) $\sqrt[7]{1000}$; 46) $\sqrt[4]{93{,}768}$; 47) $\sqrt[9]{100}$; 48) $\sqrt[10]{876{,}39}$;

49) $\sqrt{0,764}$; 50) $\sqrt{0,078549}$; 51) $\sqrt{0,9876}$;
52) $\sqrt{0,003879}$; 53) $\sqrt[3]{0,876}$; 54) $\sqrt[3]{0,08395}$;
55) $\sqrt[3]{0,2376}$; 56) $\sqrt[3]{0,007934}$; 57) $\sqrt[4]{0,837}$;
58) $\sqrt[5]{0,07365}$; 59) $\sqrt[6]{0,008394}$; 60) $\sqrt[7]{0,01769}$;
61) $\sqrt{\frac{73}{41}}$; 62) $\sqrt[3]{\frac{789}{31}}$; 63) $\sqrt{\frac{91}{17}}$; 64) $\sqrt[3]{\frac{835}{59}}$;
65) $\sqrt{17\frac{5}{9}}$; 66) $\sqrt[3]{627\frac{5}{6}}$; 67) $\sqrt{23\frac{5}{11}}$; 68) $\sqrt[3]{193\frac{5}{7}}$;
69) $\sqrt{\frac{83}{97}}$; 70) $\sqrt[3]{\frac{937}{8745}}$; 71) $\sqrt{\frac{197}{873}}$; 72) $\sqrt[3]{\frac{573}{1768}}$;
73) $\sqrt[4]{\frac{7}{9873}}$; 74) $\sqrt[6]{\frac{8}{3769}}$; 75) $\sqrt[5]{\frac{19}{89057}}$; 76) $\sqrt[7]{\frac{27}{98471}}$;
77) $(0,7428737)^{1,2}$; 78) $(0,6894191)^{0,6}$;
79) $(0,6942832)^{1,4}$; 80) $(0,8602648)^{0,7}$;
81) $73,845\cdot\sqrt{0,0970093}$; 82) $37,468\cdot\sqrt[3]{0,887005}$;
83) $78,9466\cdot\sqrt[3]{0,8574}$; 84) $45,6372\cdot\sqrt{0,6573}$;
85) $\frac{\sqrt{3,8057}}{0,59463}$; 86) $\frac{\sqrt{8,376}}{0,5788264}$; 87) $\frac{\sqrt{5,6047}}{0,73058}$; 88) $\frac{\sqrt[3]{7,6805}}{0,6576708}$;
89) $\frac{9807}{2908}\cdot\left(\frac{0,7873}{0,9175}\right)^3$; 90) $\frac{38075}{83746}\cdot\left(\frac{0,0857}{0,0683}\right)^5$;
91) $\frac{85,39\sqrt{45}}{708,73}$; 92) $\frac{0,8948\sqrt[3]{83}}{6,0895}$;
93) $\frac{3,8497\sqrt[3]{100}}{0,7308}$; 94) $\frac{0,80947\sqrt{10}}{0,23095}$;
95) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt[3]{5}}{1-0,0625^3}$; 96) $\frac{\sqrt[3]{14,4444}-\sqrt[3]{4,4444}}{1-0,18973^3}$;
97) $\frac{\sqrt[3]{10}-\sqrt[4]{0,1}}{4-1,25678}$; 98) $\frac{(\sqrt[5]{5}-1)(\sqrt[5]{5}+1)}{1-0,03033^2}$;
99) $\frac{\sqrt[5]{5}-\sqrt{5}}{1-1,23456^2}$; 100) $\frac{\sqrt{0,1}-\sqrt{10}}{1-0,35035^2}$.

Логарифмические шкалы. Логарифмическая линейка.

653. Пользуясь масштабом, в 10 раз большим для оси y, чем для оси x, построить логарифмическую кривую $y=\lg_{10}x$ и спроектировать на ось y значения, соответствующие 1) $x=1$, 2 и т. д. до 10, затем 2) 20, 30 и т. д. до 100 на ось y. (В виду больших размеров получаемого чертежа последнее (2) построение следует сделать в меньшем масштабе). 3) Отметить на кривой точки, соответствующие значениям $x = 1{,}5$; 2,5 и т. д. Полученная таким образом на оси y шкала называется логарифмической.

654. Отметить на логарифмической шкале: 1) точки, соответствующие числам 2, 4, 8, 16, 32, 64. 2) 3, 9, 27, 81. Что можно сказать относительно размеров интервалов?

655. На логарифмической шкале от ее начала отложен ряд равных отрезков. Конец первого отрезка соответствует числу 1,1. Написать ряд чисел, которые соответствуют построенным указанным образом точкам.

656. Построить логарифмическую шкалу, принимая для интервала от 1 до 2 (т.-е. для lg2) масштаб в 1 см. 1) Где при этом расположатся точки, соответствующие числам 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024? 2) Отметить на-глаз точки, соответствующие числам 100, 200, 300 и т. д. до 1000.

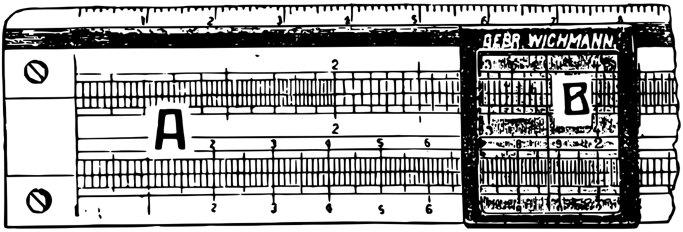
657. Построить логарифмическую шкалу, выбрав для интервала от 1 до 2 (т.-е. для логарифма 2) масштаб в 1 миллиметр. Принимая $1024 \backsim 1000$, таким же образом продолжить шкалу до 1.000.000. 3) до 10^9, 4) до 10^{12}, 5) до 10^{15}.

658. Построить на одном и том же чертеже две равных логарифмических шкалы так, чтобы они располагались на двух параллельных прямых, имели одно и то же направление и чтобы начало одной шкалы (т.-е точка с пометкой 1) оказалось против пометки 2 другой шкалы. Какие пометки второй шкалы окажутся против пометок 2, 3, 4, 6...; 7,5; 2,25 первой шкалы? Как следует поместить начало первой шкалы, чтобы ее пометки оказались против пометок другой шкалы, имеющих значения в 3 раза большие? в 3 раза меньшие?

659. Как, имея две равных логарифмических шкалы, могущих скользить одна по другой, можно производить умножение и деление? Почему при перемножении чисел соответствующие числам отрезки шкал складываются, а при делении вычитаются?

660. Построить на двух параллельных прямых в одном и том же направлении две логарифмические шкалы так, чтобы начала их оказались одно против другого, а масштаб на нижней из них был вдвое крупнее масштаба верхней. Какие пометки верхней шкалы окажутся против пометок 1, 2, 3, 4... нижней? Как при помощи этих шкал производить возведение в степень? извлечение квадратного корня?

661. Обыкновенная логарифмическая линейка (фиг. 12 и 13) состоит из четырех логарифмических шкал; две из них помещены на линейке, две на движке *A*, который может скользить в пазах линейки; нижние шкалы построены во вдвое более крупном масштабе, чем верхние. Для удобства вычислений линейка имеет еще подвижной указатель *B*.



Фиг. 12.

662. Объяснить на фиг. 14, как на нижней шкале при имеющемся расположении движка *A* производится умножение на 2? деление на 2? Как на верхней шкале производится умножение на 4? деление на 4? Найти на чертеже результаты следующих действий:

1) $1{,}5 \cdot 2$; 2) $3 : 2$; 3) $1{,}4 \cdot 2$; 4) $3{,}4 : 2$;
5) $2 \cdot 4$; 6) $2{,}5 \cdot 4$; 7) $2{,}4 \cdot 4$; 8) $8{,}4 : 4$.

663. Какие действия и над какими числами представлены на фиг. 15 (верхняя шкала)? Указать числа, действия и результаты.

664. Какие действия и над какими числами представлены на фиг. 16? Как, пользуясь указателем, производить на логарифмической линейке возведение в квадрат и извлечение квадратного корня?

665. Произвести при помощи логарифмической линейки следующие вычисления:

1) 7^2;	2) 15^2;	3) 17^2;
4) 23^2;	5) $1{,}34^2$;	6) $7{,}86^2$;
7) $12{,}3^2$;	8) $18{,}1^2$;	9) $\sqrt{5}$;
10) $\sqrt{11}$;	11) $\sqrt{18}$;	12) $\sqrt{85}$;
13) $\sqrt{3{,}5}$;	14) $\sqrt{17{,}4}$;	15) $\sqrt{65{,}8}$;

16) $\sqrt{26,9}$;
17) $2,3 \cdot 4,5$;
18) $23 \cdot 35$;
19) $7,4 \cdot 6,9$;
20) $5,3 \cdot 0,75$;
21) $2,25 \cdot 5,7$;
22) $13,2 \cdot 17,5$;
23) $8,18 \cdot 16.5$;
24) $425 \cdot 316$;
25) $1,26 \cdot 7,36 \cdot 1,3$;
26) $1,31 \cdot 1,62 \cdot 3,84$.
27) $579 \cdot 6,4 \cdot 14,4$;
28) $16,2 : 3,1$;
29) $87,5 : 5,6$;
30) $8710 : 78$;
31) $123 : 17,5$;
32) $3,45 : 11,3$;
33) $32,8 : 189$;
34) $315 : 0,78$;
35) $22,5 : 813$;
36) $\frac{213 \cdot 828}{314}$;
37) $\frac{3,14 \cdot 33^2}{1,33}$;
38) $\frac{3,14 \cdot 5,8 \cdot 22^2}{66}$;
39) $\sqrt{\frac{77}{12}}$;
40) $\sqrt{\frac{14^2}{3,14}}$;
41) $\sqrt{\frac{17,3 \cdot 2,45}{3,14}}$.

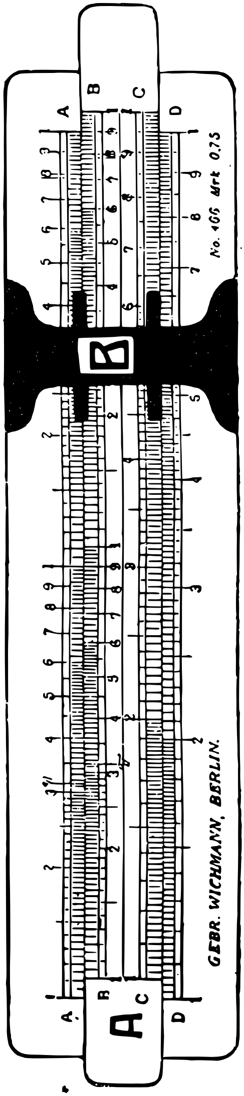
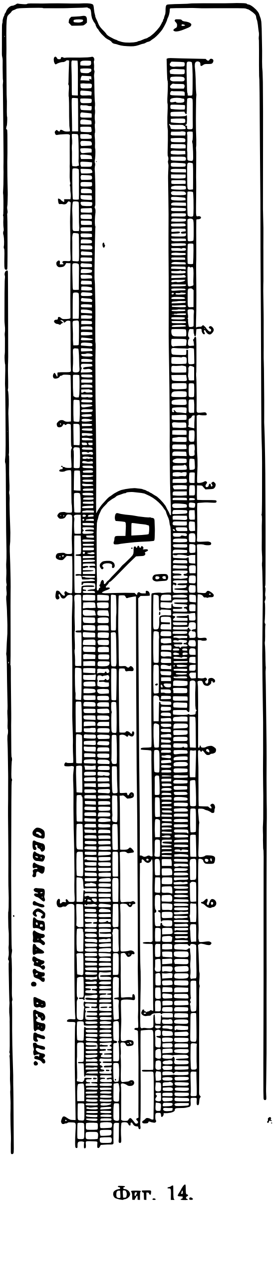
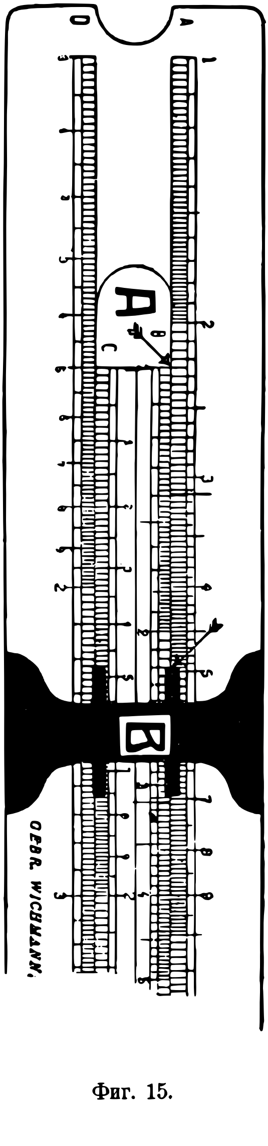


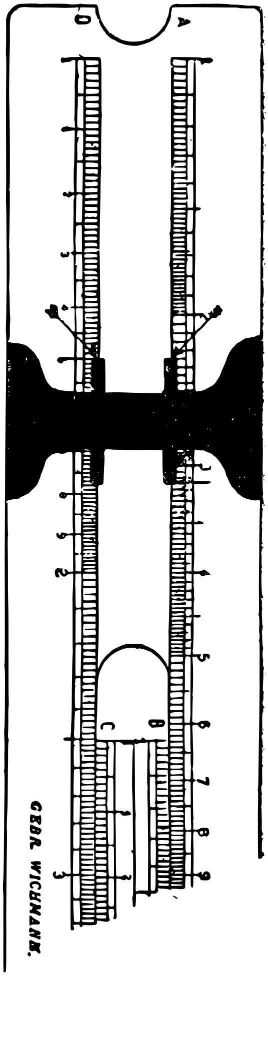
Рис. 13.



Фиг. 14.



Фиг. 15.



Фиг. 16.

§ 6. Относительная и абсолютная погрешность числа.— Точность логарифмических вычислений.

Если **(абсолютную)** погрешность α числа разделить на самое число $a+\alpha$, то полученное при этом частное называется **относительной** погрешностью.

666. Проверив равенство

$$\frac{\alpha}{a+\alpha}-\frac{\alpha}{a}=-\frac{\alpha^2}{(a+\alpha)a},$$

показать, что вместо выражения $\frac{\alpha}{a+\alpha}$ для вычисления относительной ошибки можно пользоваться формулой $\frac{\alpha}{a}$, где под a разумеется приближенное значение числа $a+\alpha$.

667. Доказать справедливость неравенств:

$$\frac{|\alpha|+|\beta|}{A+B}=\frac{\frac{|\alpha|}{A}+\frac{B}{A}\frac{|\beta|}{B}}{1\;+\frac{B}{A}}<\frac{\frac{|\alpha|}{A}+\frac{B}{A}\frac{|\alpha|}{A}}{1\;+\frac{B}{A}}=\frac{|\alpha|}{A},$$

$$\text{если } \frac{|\alpha|}{A}>\frac{|\beta|}{B};$$

$$<\frac{|\beta|}{B}, \text{ если } \frac{|\alpha|}{A}<\frac{|\beta|}{B}.$$

Выяснить на основании написанных неравенств верхнюю границу относительной погрешности суммы двух чисел ($|\alpha|$ означает абсолютное значение α).

668. Какой вид имеет выражение относительно ошибки разности двух чисел? (Какие знаки придется изменить для этого случая в неравенствах предыдущей задачи?) Откуда видно, что относительная погрешность разности двух чисел может значительно превышать относительные погрешности уменьшаемого и вычитаемого?

669. Принимая во внимание, что абсолютная погрешность произведения двух чисел $(a+\alpha)(b+\beta)$, где под α и β разумеются абсолютные погрешности сомножителей, $\leqq a|\alpha|+b|\beta|$, вычислить, чему равна относительная погрешность произведения. Формулировать словами полученный результат.

670. Принимая во внимание, что абсолютная погрешность частного $\frac{a+\alpha}{b+\beta}$ равна или меньше $\frac{b|\alpha|+a|\beta|}{b^2}$, найти относительную ошибку частного. Формулировать полученный результат.

671. На основании выражения относительной ошибки произведения показать, что относительная ошибка степени равна относительной ошибке основания, умноженной на показатель степени.

672. На основании выведенного выражения относительной ошибки степени показать, что относительная ошибка корня меньше относительной ошибки подкоренного числа.

673. Вычислить, сколько процентов составит относительная ошибка, которую мы допустим, если примем за значение отношения метра к аршину ($\backsim 1{,}406$) отношение диагонали квадрата к его диагонали ($\backsim 1{,}414$).

674. Увеличить числа 100, 200, 300, 420, 530, 720, 860, 425, 725, 863 на 1%; на какое число умножается при этом каждое из данных чисел? на какое число изменяется его четырехзначный (пятизначный) логарифм? Уменьшить каждое из данных чисел на 1%. На какое число умножается при этом каждое из данных чисел? На какое число уменьшается его логарифм (четырехзначный, пятизначный)? Вычислить приращение логарифма, соответствующее изменению (увеличению, уменьшению) числа на $0{,}1\%$, на $0{,}01\%$ при четырехзначных и пятизначных таблицах? В каком из этих случаев абсолютное значение приращения логарифма не зависит от **знака** изменения соответствующего числа? Какой погрешности числа соответствует абсолютная погрешность логарифма? Вычислить **коэффициент** пропорциональности между этими погрешностями.

675. Чему равна наибольшая абсолютная погрешность четырехзначного табличного логарифма? пятизначного табличного логарифма? С какой относительной погрешностью определяет табличный логарифм соответствующее ему число? (Указание: воспользоваться результатами предыдущей задачи).

676. На сколько может увеличиться абсолютная ошибка логарифма, получаемого интерполяцией, при его округлении? С какой относительной погрешностью определяет число соответствующий ему логарифм, если он не находится в таблицах и требует поэтому для определения числа применения интерполяции? Какую относительную ошибку вносит в результат вычисления с логарифмами каждое логарифмирование (если при этом не приходится производить вычитания чисел) при четырехзначных таблицах, при пятизначных таблицах?

677. Чему равна наибольшая возможная относительная ошибка результата вычисления, требующего в общей сложности не более пяти логарифмирований (логарифм n-й степени при этом следует считать за n логарифмов).

678. Не производя вычислений, определить в %, какую относительную ошибку будут содержать результаты вычисления в задачах:

№ 652 6), 7), 9), 11), 19), 20), 21), 23), 29), 37), 57), 81), 87), 89), 94),

а) при пользовании четырехзначными таблицами?

б) при пользовании пятизначными таблицами?

в) при пользовании логарифмической линейкой, если предположить, что каждый отсчет на последней может быть произведен с точностью до 0,1%?

Частное, получающееся от деления абсолютной погрешности числа на самое число, называется относительной погрешностью (ошибкой) числа.

При вычислении относительной ошибки, вместо того чтобы делить абсолютную ошибку (или ее верхнюю границу) на самое число (которое обычно оказывается неизвестным), обыкновенно делят абсолютную ошибку числа на его приближенное значение.

Относительная ошибка суммы равна или меньше наибольшей из относительных ошибок слагаемых.

Относительная ошибка разности двух чисел может оказаться значительно больше относительных ошибок уменьшаемого и вычитаемого.

Относительная ошибка произведения не больше суммы относительных ошибок сомножителей *).

Относительная ошибка частного не больше относительных ошибок делимого или делителя *).

Относительная ошибка степени равна относительной ошибке основания, умноженной на показатель степени *).

Относительная ошибка корня не больше относительной ошибки подкоренного числа.

Абсолютная ошибка логарифма пропорциональна относительной ошибке числа.

Четырехзначный табличный логарифм определяет соответственное число с относительной ошибкой ∽ 0,012%; пятизначный — с относительной ошибкой ∽ 0,0012%.

Если мантисса не находится в таблице логарифмов, то, благодаря ошибке, вносимой округлением последнего знака мантиссы, относительная ошибка, с которой логарифм определяет соответствующее число, может увеличиться вдвое (против табличного логарифма) и равна или меньше для четырехзначных таблиц ∽ 0,024% (точнее 0,023%), а для пятизначных ∽ 0,0024% (точнее 0,0023%).

---

*) Обратить внимание на те условия, при которых эти утверждения оказываются справедливыми. См. примечание на стр. 251.

§ 7. Смешанные задачи.

679. Вычислить:

1) $\sqrt[n]{2}$ при $n=2,\ 3,\ 4,\ldots,\ 10$; 2) $\sqrt[n]{3}$ при $n=2,\ 3,\ldots,\ 10$;

3) $\sqrt[n]{0{,}5}$ при $n=2,\ 3,\ 4,\ldots,\ 10$; 4) $\sqrt[n]{\frac{1}{3}}$ при $n=2,\ 3,\ldots,\ 10$.

680. На основании результатов предыдущей задачи выяснить, как меняется значение корня $\sqrt{A}$ с возрастанием показателя корня 1) при $A>1$, 2) при $A<1$.

681. Вычислить:

1) $\sqrt{a^2-b^2}$ при а) $a=6{,}369$, $b=5{,}321$, б) $a=0{,}8460$, $b=0{,}6824$;

2) $\sqrt{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ при $p=0{,}471$, $q=0{,}399$;

3) $\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$ при $a=273{,}86$, $b=194{,}38$;

4) $\sqrt{a^2+b^2}$ при $a=3{,}768$, $b=2{,}391$;

5) $\sqrt[3]{a^2+b^2}$ при $a=780{,}9$, $b=473{,}6$;

6) $\sqrt{a^2+b^2}$ при $a=83{,}46$, $b=67{,}91$;

7) $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ при $a=3{,}768$, $b=2{,}391$;

8) $\sqrt[n]{a^3-b^3}$ а) при $a=7{,}831$, $b=4{,}392$; б) $a=18{,}74$, $b=17{,}91$;

9) $\sqrt[3]{a^3-b^3}$ при $a=384{,}7$, $b=305{,}4$;

10) $\sqrt{1+\frac{ac}{b^2}}$ а) при $a=4{,}837$, $b=5{,}704$, $c=9{,}368$;
б) $a=48{,}71$, $b=91{,}72$, $c=63{,}47$;

11) $\sqrt{1-\frac{ac}{b^2}}$ а) при $a=28{,}37$, $b=39{,}83$, $c=41{,}50$;
б) $a=173{,}5$, $b=375{,}4$, $c=280{,}2$.

682. Корни квадратного уравнения $ax^2-2bx+c=0$ определяются по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{b}{a}\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{ac}{b^2}}.$$

При вычислении значений корней следует сперва вычислить значение $\frac{ac}{b^2}$, а затем каждое из слагаемых в выражении $x_{1,2}$.

Найти корни уравнения при

1) $a = 237{,}1$, $b = 349{,}4$, $c = -193{,}2$;
2) $a = 41{,}74$, $b = 53{,}83$, $c = 93{,}59$;
3) $a = 1{,}835$, $b = 7{,}494$, $c = 9{,}876$.

683. Найти при помощи логарифмических вычислений корни уравнений в задачах №№ 255 и 256.

Показательные и логарифмические уравнения.

684. Решить следующие уравнения:

1) $a^x = b$;
2) $\sqrt[x]{a} = mn$;
3) $a^x \cdot b^{mx} = c$;
4) $a^{n-x} = nb^x$;
5) $a^{mx-p} = b^{nx-q}$;
6) $a^{3x-2} \cdot b^{2x-3} = c^{4x-5}$;
7) $10^x = 3$;
8) $100^x = 0{,}005736$;
9) $1000^x = 0{,}093768$;
10) $5^x = 10$;
11) $7^x = 100$;
12) $0{,}025229^x = 1000$;
13) $3{,}111^x = 1{,}7497$;
14) $2{,}506184^x = 10$;
15) $10^x = 1{,}3713^{10}$;
16) $(1{,}04952^x)^{1{,}05} = (100^{1{,}05})^{1{,}04952}$;
17) $10^{4x} = 5{,}7544$;
18) $5{,}188^x = 88238$;
19) $7{,}8886^x = 9{,}92126$;
20) $1428{,}57^x = 0{,}0007$.

685. 1) $7^x = 7^9$;
2) $a^x = a^{-6}$;
3) $b^{x-7} = b^3$;
4) $a^{3x+3} = a^{12}$;
5) $11^{5x-2} = 121^4$;
6) $9^{3x} = 27$;
7) $(a^{x+2})^{x-2} = a$;
8) $a^{x-7} = a^{7-x}$;
9) $(a^{x-7})^{7-x} = a^{-1}$;
10) $3^{-x} = \frac{1}{9}$;
11) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27}$;
12) $9^{6x-7} = 27$;
13) $3^{2x-1} \cdot 9^{x-2} = 27$;
14) $0{,}5^{x-2} \cdot 4^{x-8} = 8$;
15) $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$;
16) $\sqrt{a^{3x+5}} + a^4$;
17) $\sqrt[x]{27} = 9\frac{1}{2}$;
18) $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x}$;
19) $\sqrt[x+5]{4^7} = \sqrt[x+1]{8^4} \cdot \sqrt[2x-12]{4^8}$;
20) $\sqrt[3x-1]{4^3} = \sqrt[4x+1]{4 \cdot 8} \cdot \sqrt[2x+9]{8^6}$;
21) $5^x - 5^{x-1} = 4$;
22) $5^{2x} = 25 + 24 \cdot 5^x$;
23) $\sqrt[3]{9^{x^2-1}} = \sqrt[6]{243}$;
24) $\sqrt[x+3]{27} = 3^{x+5}$;
25) $5\lg x = 3\lg 32$;
26) $3\lg x = 2\lg 27$;
27) $\frac{1}{2}\lg x^4 = 7\lg 2^2$;
28) $\frac{1}{3}\lg x^9 = \frac{3}{4}\lg 27$;
29) $\lg 4x + \lg x^2 = 2\lg x^2 + 2\lg x$;
30) $\lg\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = 2\sqrt{2\sqrt{2}}$;

31) $\lg(x-2)+\lg(x+2)=0$ [1];
32) $\lg(x-3)+\lg(x-1)=\lg 3$ [1];
33) $\lg_{10}(x-5)+\lg_{10}(x+5)=2$ [1];
34) $\lg_{10}(x-5)+\lg_{10}(x-4)=0{,}3$ [1];
35) $x^{4+\lg x}=100000$;
36) $\lg(x^2-3x+12)-\lg(x-1)=1$;
37) $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}=\lg 30-1$;
38) $\frac{\lg(3x-4)}{\lg 2+\lg(x^2-2)}=\frac{1}{2}$.

СЕДЬМАЯ ГЛАВА.

Тригонометрические функции.

§ 1. Синус и косинус дуги и угла.

686. Угол в α° получается вращением луча, выходящего из данной точки (вершины угла). Какой путь описывает точка этого луча, находящаяся от вершины на расстоянии R? на расстоянии 1?

687. 1) Выразить в **радиальной мере** (т.-е. найти отношение соответствующей дуги к радиусу круга) следующие дуги (углы):

а) 360°; б) 180°; в) 270°; г) 90°; д) 45°; е) 60°; ж) 30°; з) 10°; и) -45°; к) 1°; л) $20^\circ 30'$; м) 540°; н) α°; о) $n\cdot 360^\circ$; п) $\frac{\alpha^\circ}{n}$; р) $n\cdot 90^\circ$.

2) Выразить в градусах дугу по ее выражению в радиальной мере:

а) π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) -2π; г) $\frac{\pi}{3}$; д) $\frac{\pi}{4}$; е) $\frac{3\pi}{4}$; ж) $\frac{\pi}{6}$; з) $-\frac{5\pi}{6}$; и) 1; к) 2; л) 0,1; м) 10; н) s; о) ns; п) $n\frac{\pi}{2}$; р) $2n\pi$.

688. Написать уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $=1$. Приняв за начало счета дуг точку пересечения окружности с положительным направлением оси x и выбрав за положительное направление дуг направление про-

[1]) Выяснить, все ли найденные корни удовлетворяют данным уравнениям?

тив часовой стрелки, найти абсциссу и ординату точки окружности, соответствующей дуге в:

1) $30°$;	2) $60°$;	3) $45°$;	4) $0°$;	5) $90°$;
6) $150°$;	7) $120°$;	8) $135°$;	9) $180°$;	10) $215°$;
11) $270°$;	12) $-60°$;	13) $360°$;	14) $390°$;	15) $480°$.

В каждом случае выразить дугу в радиальной мере.

689. Ордината и абсцисса точки окружности радиуса 1, если их рассматривать как функции дуги s этой окружности, называются тригонометрическими функциями, при чем ордината точки окружности называется синусом s и обозначается $\sin s$, а абсцисса называется косинусом s и обозначается $\cos s$. Каким соотношением связаны синус и косинус одной и той же дуги (на основании уравнения окружности)?

Примечание. Так как центральный угол содержит всегда столько угловых единиц, сколько его дуга соответствующих дуговых единиц, то s (отношение дуги к радиусу: при окружности радиуса 1 оно равно числовому значению длины дуги) можно принять и за число угловых единиц в (центральном) угле, соответствующем этой дуге (в этом случае за угловую единицу принимается центральный угол, дуга которого равна радиусу). В дальнейшем мы будем обозначать дугу через s, когда она должна быть выражена в радиальной мере, и через φ, когда за единицу измерения принят градус или же когда будет безразлично, в каких единицах измерена дуга или соответствующий ей угол.

690. Как располагаются на окружности точки, соответствующие дугам s, $s+2\pi$, $s+4\pi$, $s-2\pi$, $s-4\pi$..., $s+2k\pi$ [φ, $\varphi+360°$, $\varphi+720°$, $\varphi+k360°$] (при любом целом относительном значении k)? Что можно поэтому сказать про значения синуса и косинуса для указанных значений дуги. Почему синус и косинус называются периодическими функциями дуги? Чему равен период $\sin s$ и $\cos s$?

691. 1) На основании зависимости между координатами точек окружности, симметричных относительно оси y, найти выражения $\sin(\pi-s)$ и $\cos(\pi-s)$ через $\sin s$ и $\cos s$ [$\sin(180°-\varphi)$ и $\cos(180°-\varphi)$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$].

692. На основании зависимости между координатами точек окружности, симметричных относительно оси x, найти выражения $\sin(-s)$ и $\cos(-s)$ через $\sin s$ и $\cos s$ [$\sin(-\varphi)$ и $\cos(-\varphi)$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$].

693. На основании зависимости между координатами точек окружности, симметричных относительно начала, выразить $\sin(\pi+s)$ и $\cos(\pi+s)$ через $\sin s$ и $\cos s$ [$\sin(180°+\varphi)$ и $\cos(180°+\varphi)$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$].

694. На основании зависимости между координатами точек окружности, симметричных относительно биссектрисы нормального угла, выразить $\sin\left(\frac{\pi}{2}-s\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right)$ через $\sin s$ и $\cos s$ [$\sin(90°-\varphi)$ и $\cos(90°-\varphi)$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$].

695. В каких пределах достаточно (на основании результатов задач 690—697) знать значения $\sin s$ и $\cos s$, чтобы иметь возможность вычислить $\sin s$ и $\cos s$ для любого значения s?

696. Принимая значения дуги (выраженной в радиальных мерах) за абсциссу точки, а значение функции за ординату, построить графику функции $y=\sin x$ (для упрощения построения принять $\pi \backsim 3{,}2$) (значения функции взять из приложенной на стр. 550 таблицы). Указать точки, соответствующие 1) корням, 2) наибольшим и наименьшим значениям функции. Чему равен отрезок оси x между двумя последовательными корнями?

697. Сделать такое же построение и решить те же вопросы для функции $y=\cos x$.

698. Представить функцию

$$y=a\cdot\sin bx$$

графически и определить: 1) точки, соответствующие корням функции, 2) период, 3) точки, соответствующие наибольшим, 4) наименьшим значениям функции, если

$$1)\ a=1,\quad b=2,\ 3,\ 4;\qquad 2)\ a=1,\quad b=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},$$

$$3)\ b=1,\quad a=2,\ 3,\ 4;\qquad 4)\ b=\frac{1}{2},\quad a=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},$$

699. Представить функцию $y=a\cos(bx+c)$ графически и определить: 1) точки, соответствующие корням функции, 2) период, 3) точки, соответствующия наибольшим, 4) наименьшим значениям функции, если

$$1)\ a=2,\quad b=\frac{1}{2},\quad c=0;\qquad 2)\ a=2,\quad b=2,\quad c=\frac{\pi}{4},$$

$$3)\ a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{2},\quad c=-\frac{\pi}{4};\quad 4)\ a=\frac{1}{2},\quad b=2,\quad c=\pi.$$

700. Найти оси симметрии график: 1) функции $y=\sin x$, 2) функции $y=\cos x$.

701. Найти центры симметрии график функций:

$$1)\ y=\sin ax,\qquad 2)\ y=a\cdot\cos x.$$

702. Кривая синусов может быть преобразована в кривую косинусов путем зеркального отражения относительно некоторой прямой. Написать уравнение этой прямой.

703. При простом колебании по закону синуса отклонение точки в данный момент от среднего положения определяется значением функции

$$s = a \sin bt,$$

где a есть амплитуда колебания, а b — частное от деления 2π на период колебания T; t означает время и является независимой переменной. Представить графически закон колебания при 1) $a=1$, $b=1$ и 2) $a=\frac{1}{2}$, $b=2$ и построить новую кривую, складывая ординаты точек, соответствующих одному и тому же значению t.

704. Колебание $s=a \sin bt$ при $a=1$, $b=1$, сложить графически с колебанием, полученным из первого, сдвигом на: 1) $\frac{1}{4}$, 2) $\frac{1}{2}$, 3) $\frac{3}{4}$ периода.

705. Показать на графике, что наложением друг на друга 1) трех колебаний, смещенных последовательно друг относительно друга на $\frac{1}{3}$ периода, 2) четырех колебаний, смещенных последовательно на $\frac{1}{4}$ периода, 3) пяти на $\frac{1}{5}$ периода, колебания совершенно уничтожаются, т. е., что:

$$1)\ a\sin\alpha + a\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right) + a\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right) = 0;$$

$$2)\ a\sin\alpha + a\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) + a\sin(\alpha+\pi) + a\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right) = 0;$$

$$3)\ a\sin\alpha + a\sin\left(\alpha+\frac{2}{5}\pi\right) + a\sin\Big(\alpha+\frac{4\pi}{5} + a\sin\left(\alpha+\frac{6\pi}{5}\right) +$$

$$+ a\sin\left(\alpha+\frac{8\pi}{5}\right) = 0.$$

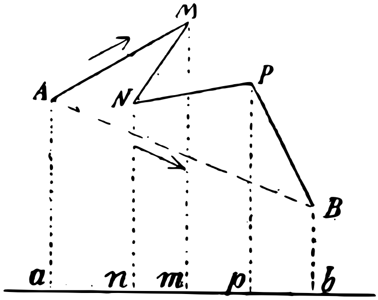
§ 2. Проекции. Синус и косинус суммы двух дуг (углов).

706. Как выразятся координаты точки окружности радиуса R через радиус и тригонометрические функции угла (дуги), образуемого радиусом с осью x?

707. Как выразятся координаты x и y точки Q через расстояние этой точки от начала координат r радиус-вектор и угол φ (амплитуда, аргумент), который образует этот отрезок r с осью x?

708. Показать, что проекция отрезка $OM=x$, лежащего на одной оси, на другую ось, образующую с этой осью угол φ, выражается формулой $p = x \cos\varphi$ (x и p в зависимости от направления соответствующих отрезков могут иметь и положительные и отрицательные значения) при любом положении точки M относительно начала O и при любом угле между осями.

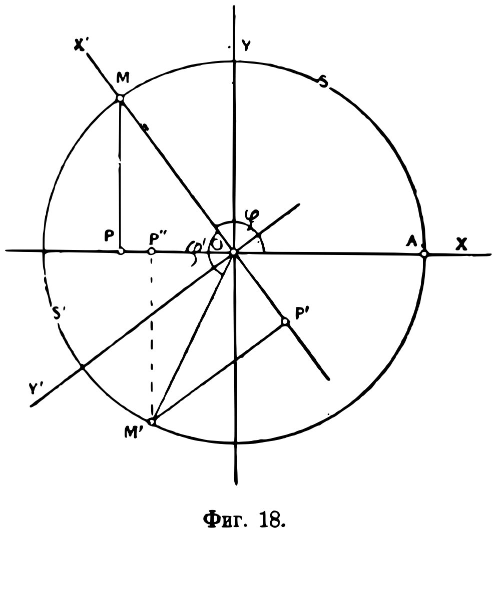
709. Точки A и B соединены прямою AB и ломаной $AMNPB$. Доказать, что проекция ломаной $AMNPB$ (определяя проекции не только по величине, но и по знаку) равна проекции замыкающей AB (фиг. 17).



Фиг. 17.

710. Рассматривая на чертеже (фиг. 18) PM и OP как $\sin\varphi$ ($\sin s$) и $\cos\varphi$ ($\cos s$), $P'M'$ и OP', как $\sin\varphi'$ и $\cos\varphi'$ ($\cos s'$), показать, что $M'P'' = \sin(\varphi+\varphi') = \sin(s+s')$ и $OP'' = \cos(\varphi+\varphi') = \cos(s+s')$, как проекции на оси Y и X радиуса OM' или ломаной $OP'M'$, для которой OM' служит замыкающей, выражаются через функции φ и φ' следующим образом:

$$\sin(\varphi+\varphi') = \sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi',$$
$$\cos(\varphi+\varphi') = \cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'.$$



Фиг. 18.

Примечание. Обратить внимание на то, какие углы образуют оси X' и Y' (и параллельные им отрезки) 1) с осью X, 2) с осью Y.

711. Полагая $\varphi' = -\psi$ показать справедливость формул:

$$\sin(\varphi - \psi) = \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi;$$
$$\cos(\psi - \varphi) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi.$$

712. Пусть дана точка Q с координатами x, y. Построить новую систему координат так, чтобы начало новой системы совпадало с началом старой системы, а ось x' (новой системы) образовала с осью x (старой системы) угол φ (новая система получается из старой поворотом на угол φ около начала). Обозначая расстояние точки Q от начала через r, а угол, который образует это расстояние r (радиус-вектор) с осью x' через φ' и пользуясь выведенными формулами $\sin(\varphi + \varphi')$ и $\cos(\varphi + \varphi')$ и соотношениями $x = r\cos(\varphi + \varphi')$ и $y = r\sin(\varphi + \varphi')$, $x' = r\cos\varphi'$ и $y' = r\sin\varphi'$, показать, что при указанном повороте осей координат около начала на угол φ старые координаты точки R (x, y) (т.-е. координаты точки по отношению к прежней системе) выражаются через новые координаты x', y' той же точки, т.-е. относительно нового положения осей) формулами:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi;$$
$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

713. Полагая $\alpha = x + y$ и $\beta = x - y$ в выражениях $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ и определяя выражения x и y через α и β, показать справедливость формул **преобразования сумм тригонометрических функций в произведения:**

1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

§ 3. Функции тангенс и котангенс.

714. Построить окружность $x^2 + y^2 = 1$. Провести к этой окружности касательные в точках пересечения ее с положительными направлениями осей x и y. Ордината точки, в которой продолженный радиус встречает первую касательную, если эту ординату рассматривать, как функцию дуги s, определяемой концом радиуса, называется тангенсом дуги: $\operatorname{tg} s$, или $\operatorname{tg} \varphi$ (т.-е. тангенсом угла φ, соответствующего этой дуге), абсцисса той точки, в которой продолженный радиус встречает вторую касательную, если эту абсциссу рассматривать, как функцию дуги s, называется котангенсом s ($\operatorname{ctg} s$), или котангенсом угла φ ($\operatorname{ctg} \varphi$). Показать, на основании определения тангенса и котангенса, что при любом значении s

$$\operatorname{tg} s = \frac{\sin s}{\cos s}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

$$\operatorname{ctg} s = \frac{\cos s}{\sin s}, \qquad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \cdot s \cdot \operatorname{ctg} s = 1. \qquad \operatorname{tg} \varphi\ s \operatorname{ctg} \varphi = 1.$$

715. На основании соотношений между $\operatorname{tg} s$, $\operatorname{ctg} s$, $\sin s$ и $\cos s$ показать, что:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \operatorname{ctg} s; \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \operatorname{tg} s;$$

$$\operatorname{tg}(-s) = -\operatorname{tg} s; \qquad \operatorname{ctg}(-s) = -\operatorname{ctg} s;$$

$$\operatorname{tg}(\pi - s) = -\operatorname{tg} s; \qquad \operatorname{ctg}(\pi - s) = -\operatorname{ctg} s;$$

$$\operatorname{tg}(\pi + s) = \operatorname{tg} s; \qquad \operatorname{ctg}(\pi + s) = \operatorname{ctg} s;$$

Чему равен **период** тангенса?

716. Деля выражение $\sin(\alpha + \beta)$ на выражение $\cos(\alpha + \beta)$ [соотв. $\sin(\alpha - \beta)$ на $\cos(\alpha - \beta)$] на основании соотношений между тангенсом, синусом и косинусом одной и той же дуги (одного и того же угла) показать, что:

$$\operatorname{tg}(\varphi + \varphi') = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'};$$

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'}.$$

717. 1) Представить функцию $y = \operatorname{tg} x$ графически; указать 2) точки, соответствующие корням функции, 3) точки, соответствующие бесконечным значениям функции, 4) период функции.

718. 1) Представить функцию $y = \operatorname{cotg} x$ графически, 2) определить точки, соответствующие корням функции, 3) точки, соответствующие бесконечным значениям функции, 4) период функции.

719. Кривая тангенсов преобразуется в кривую котангенсов путем зеркального отражения относительно некоторой прямой. Написать уравнение такой прямой.

720. Выражая $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ через синусы и косинусы соответствующих дуг и применяя теорему сложения, доказать справедливость равенств:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$
$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Графическое решение тригонометрических уравнений.

721. Решить графически следующие уравнения (пользуясь графиками $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$):

1) $\sin x=\frac{1}{2}$; 2) $\cos x=0{,}6$;
3) $\sin x=-0{,}4$; 4) $\cos x=-0{,}5$;
5) $\operatorname{tg} x=2$; 6) $\operatorname{ctg} x=4$;
7) $\operatorname{tg} x=-1$; 8) $\operatorname{ctg} x=-0{,}75$;
9) $\operatorname{tg} x=x$; 10) $\sin x=x$;
11) $\operatorname{ctg} x=x$; 12) $\cos x=x$.

722. Решить графически и вычислением следующие уравнения. (Указание: положить $\cos\alpha=x$, $\sin\alpha=y$ и принять во внимание, что $x^2+y^2=1$.)

1) $4\cos\alpha=3\sin\alpha$; 2) $6\cos\alpha+4\sin\alpha=3$;
3) $4\sin\alpha=6+7\cos\alpha$; 4) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$;
5) $\cos\alpha-2\sin\alpha=0$; 6) $3\cos\alpha-2\sin\alpha=1$;
7) $2\cos\alpha+3\sin\alpha=3$; 8) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}$;
9) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{4}\sqrt{3}$; 10) $2\sin\alpha=\cos^2\alpha$.

Дуги круга измеряются двумя способами: 1) в первом из них за единицу принимается *градус*, т.-е. $\frac{1}{360}$ окружности; градус в свою очередь разделяется на 60 *минут*, а минута на 60 *секунд;* во втором — за единицу принимается дуга, длина которой равна радиусу.

Координаты точки окружности $x^2+y^2=1$, если их рассматривать как функции дуги s, называются тригонометрическими функциями и обозначаются: абсцисса через $\cos s$, а ордината через $\sin s$. За начало дуги в этом случае принимается точка пересечения окружности

$x^2+y^2=1$ с положительным направлением оси x, а за положительное направление дуг — направление движения по окружности *против* часовой стрелки.

Если вместо окружности $x^2+y^2=1$ взять окружность $x^2+y^2=R$ то синус и косинус дуги будут связаны с координатами точки окружности следующими соотношениями:

$$\sin s=\frac{y}{R} \qquad y=R\sin s$$

$$\cos s=\frac{x}{R} \qquad x=R\cos s.$$

При движении точки по окружности радиус круга, проходящий через эту точку, опишет некоторый угол. Если принять за единицу измерения углов центральный угол, опирающийся на дугу, равную единице, и ввести такие же условия относительно начала счета и положительного направления углов, то дуга и соответствующий ей центральный угол будут всегда иметь одинаковые числовые значения. Поэтому значение s, представляющее значение независимой переменной для функций $\sin s$ и $\cos s$, можно принимать не только за значение *дуги*, но и за значение некоторого *центрального угла.*

Углы измеряются либо в градусах, либо в *радиальной* мере: 1) угловым градусом называется центральный угол, опирающийся на дугу, равную дуговому градусу; угловой градус делится на 60 угловых минут, минута — на 60 секунд; 2) в случае измерения углов в радиальной мере за угловую единицу принимается угол, опирающийся на дугу, равную радиусу.

Если выбрано начало счета дуг, дано положительное направление дуг и установлена единица измерения, то каждому числу, если его принять за значение s, соответствует вполне определенная точка окружности и вполне определенный радиус круга, другими словами — каждому числу соответствует единственная вполне определенная дуга и единственный вполне определенный центральный угол.

Но каждой точке на окружности соответствует бесчисленное множество дуг, оканчивающихся в этой точке; общее выражение таких дуг имеет вид:

в радиальной мере $\qquad s+2k\pi$

в градусах $\qquad \varphi+k\cdot 360^\circ$,

где под k разумеется любое целое относительное число, а s и φ могут быть выбраны так, чтобы выполнялись неравенства $0\leqq s<2\pi$, $0^\circ\leqq\varphi<360^\circ$.

Каждой точке окружности $x^2+y^2=1$ соответствуют вполне определенные значения x и y; следовательно, каждому значению s [φ] соответствуют вполне определенные значения $\sin s$ и $\cos s$ [$\sin\varphi$ и $\cos\varphi$]; но заданным значениям $\sin s$ и $\cos s$ (удовлетворяющим условию

$\sin^2 s + \cos^2 s = 1$), соответствует бесчисленное множество дуг (углов), для которых эти функции имеют заданное значение; эти дуги отличаются друг от друга на любое целое число окружностей.

Поэтому, если к дуге, которой соответствуют данные значения $\sin s$ и $\cos s$, прибавить (или от нее отнять) произвольное целое число окружностей, то значения $\sin s$ и $\cos s$ останутся без перемены.

В силу сказанного $\sin s$ и $\cos s$ называются периодическими функциями дуги, а длина окружности называется периодом этих функций; выражение периода в зависимости от того, в каких единицах измерялись дуги, будет или 2π или $360°$.

Числовое значение отрезка, отсекаемого продолженным радиусом окружности $x^2 + y^2 = 1$ на касательной $x = 1$, проведенной в точке пересечения окружности с положительным направлением оси x, называется, если его рассматривать как функцию дуги s, тангенсом дуги s (значение этого отрезка представляет ординату точки пересечения продолженного радиуса и касательной); если взять окружность не радиуса $=1$, а окружность $x^2 + y^2 = R^2$, то тангенс будет представлять отношение указанного выше отрезка к радиусу.

Числовое значение отрезка, отсекаемого продолженным радиусом окружности $x^2 + y^2 = 1$ на касательной $y = 1$ (абсцисса точки пересечения этих линий), если его рассматривать как функцию дуги s, называется котангенсом дуги s (угла φ). В случае окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $\operatorname{ctg} s$ равен отношению соответствующего отрезка касательной к R.

Период тангенса и котангенса равен половине окружности.

Основные свойства тригонометрических функций выражаются следующими равенствами.

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2 s + \cos^2 s = 1 \\ &\operatorname{tg} s = \frac{\sin s}{\cos s} \\ &\operatorname{tg} s \cdot \operatorname{ctg} s = 1 \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin(s + 2k\pi) = \sin s \qquad & \operatorname{tg}(s + k\pi) = \operatorname{tg} s \\ &\cos(s + 2k\pi) = \cos s \qquad & \operatorname{ctg}(s + k\pi) = \operatorname{ctg} s \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{II}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \cos s \qquad & \cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \sin s \\ &\sin(-s) = -\sin s \qquad & \cos(-s) = \cos s \\ &\sin(\pi + s) = -\sin s \qquad & \cos(\pi + s) = -\cos s \\ &\sin(\pi - s) = \sin s \qquad & \cos(\pi - s) = -\cos s \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{III}$$

Для $\operatorname{tg} s$ и $\operatorname{ctg} s$ соответствующие соотношения даны в задаче 715.

$$\left.\begin{aligned} &\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha \\ &\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \pm \sin\alpha \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{IV}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \pm \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\[2ex]
\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \dfrac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha \pm \beta}{2} \\[2ex]
\cos \alpha = \cos \beta = 2 \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} \\[2ex]
\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2}.
\end{array}\right\} \mathrm{V}$$

Функции показательная, логарифмическая и тригонометрические называются *трансцендентными* функциями.

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ.

ВОСЬМАЯ ГЛАВА.

Комбинаторика (теория соединений).

§ 1. Соединения.

723. Соединением называется определенная группировка вещей; вещи, образующие соединение, называются его **элементами.** Указать элементы, из которых составлены соединения: 1) *абвг,* 2) *баба,* 3) 1234, 4) $+-+$, 5) $\alpha\beta\gamma abc$, 6) $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

724. В соединениях могут приниматься во внимание: 1) состав соединения, 2) порядок элементов в соединении и 3) число элементов. Образовать различные соединения из элементов: 1) a, b, c, d, 2) x, y, z, 3) 1, 0, 3, 4) $+$, $-$, 5) из трех элементов $+1$, 0, -1, 7) из пяти элементов A, B, C, D, E.

725. Даны 3 элемента a, b и c. Написать все соединения, которые могут быть образованы из этих элементов, так чтобы в каждое соединение входило: 1) по 3, 2) по 2 и 3) по 1 элементу. При этом следует составить и такие соединения, в которые один и тот же элемент входит по нескольку раз. Соединения, отличающиеся порядком элементов, следует считать при этом различными.

726. Даны четыре элемента a, b, c, d. 1) Составить все соединения из этих элементов по 2, не обращая при этом внимания на порядок элементов и не вводя в каждое соединение один и тот же элемент более одного раза. 2) Составить все соединения из этих элементов по 3, обращая при этом внимание на порядок элементов, но не вводя в каждое соединение одного и того же элемента более одного раза. 3) Образовать все соединения по 4 элемента, не обращая внимания на порядок элементов и допуская повторение в одном и том же соединении одного и того же элемента.

§ 2. Перестановки.

Перестановки без повторений.

727. Под **перестановками** (перемещениями) разумеют такие соединения, в состав каждого из которых входят все данные элементы, а одно соединение от других отличается лишь последовательностью (порядком) элементов. Составить таблицу перестановок: 1) из двух элементов a, b; 2) из трех элементов a, b, c; 3) из четырех элементов a, b, c, d, располагая эти перемещения, как слова в словаре.

728. Сколько различных перестановок можно образовать из двух различных элементов?

729. 1) Даны 3 различных элемента a, b, c. Образуя из них перестановки, мы поступаем следующим образом: берем один из элементов, например b, и принимаем его за **первый** элемент перестановки (занимаем им первое место); затем берем один из оставшихся и занимаем им второе место; последним оставшимся элементом занимаем третье место. Сколькими различными способами можно занять первое место в перестановках, образуемых из этих элементов? 2) Сколькими различными способами можно занять второе и третье место того после, как первое место занято определенным элементом? 3) Сколько перестановок можно составить из трех различных элементов?

730. 1) На сколько групп могут быть разделены все перестановки из четырех элементов a, b, c, d в зависимости от того, какой элемент помещен на первом месте? 2) Сколько перестановок войдет в состав каждой группы, если в нее включить все перемещения, отличающиеся порядком остальных трех элементов?

731. Как получить число перестановок: 1) из 5 элементов, зная число перестановок из 4-х, 2) из 7 элементов, зная число перестановок из 6 элементов?

732. 1) Доказать формулу

$$P_n = n \cdot P_{n-1},$$

где P_n означает число перестановок из n элементов.

2) Определить значение P_n, перемножая почленно равенства

$$P_n = n \cdot P_{n-1},$$
$$P_{n-1} = (n-1) \cdot P_{n-2}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

733. Доказать формулу

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1).\ n$$

следующим образом: 1) показать, что она справедлива при $n=1$; 2) доказать, что она имеет место при $n=k+1$, если она верна при $n=k$. **(Способ полной индукции)**

Выражение $n!$

734. 1) Для обозначения произведения n первых членов натурального ряда введен символ:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1) \cdot n.$$

Вычислить а) $2!$ б) $3!$ в) $4!$ г) $5!$ д) $6!$ е) $7!$

2) Записать в раскрытой форме:

1) $(n+1)!$ 2) $(n-1)!$ 3) $(n+3)!$ 4) $(2n)!$ 5) $(2n+1)!$

5) Вычислить произведения: а) $2 \cdot n!$ и $(2n)!$ б) $\frac{1}{2}\,n!$ и $\left(\frac{1}{2}\,n\right)!$ в) $an!$ и $(an)!$ г) $2n-2!$ и $(2n-2)!$

735. Написать значения следующих выражений сначала в общем виде, а затем вычислить полагая $n=4$.

1) $(n+1) \cdot n!$;
2) $\frac{(n+1)!}{n+1}$;
3) $n \cdot (n-1)!$;
4) $n(n+1) \cdot (n-1)!$;
5) $\frac{(n+1)!}{n(n+1)}$;
6) $\frac{(n+k)!}{(n+1)(n+2) \cdots (n+k)}$;
7) $\frac{n!}{3!}$,
8) $\frac{n!}{5!}$;
9) $\frac{(n+1)!}{n!}$;
10) $\frac{n!}{(n-2)!}$;
11) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$;
12) $\frac{(n+3)!}{(n-1)!}$;
13) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$;
14) $\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$;
15) $\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n+1)!}$;
16) $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$;
17) $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$;
18) $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

Перестановки с повторениями.

736. Допустим, что среди шести элементов a, b, c, d, e, f два элемента e и f оказываются тождественными. 1) Какие перестановки в этом случае придется считать за одну и ту же перестановку (считать тождественными)? Сколько таких различных раньше перестановок придется считать за одну? 2) Сколько и каких перестановок придется считать за одну и ту же, если окажутся тождественными не два, а уже три элемента d, e, f?

737. Сколько перестановок придется считать за одну и ту же, если в числе элементов, из которых составляются перестановки, p элементов будут одинаковы? 2) На какое число следует разделить $n!$, чтобы получить число перестановок из n элементов, среди которых p элементов одинаковы?

738. Показать, что число различных перестановок из n элементов, среди которых оказываются группы в r, p и q одинаковых элементов, выражается формулой.

$$PP_n = \frac{n!}{r!\,p!\,q!}$$

739. 1) Составить все перестановки из 3 элементов a, a, b (среди которых два одинаковых).

2) Составить все перестановки из 4 элементов: а) a, a, a, b; б) a, a, b, c; в) a, a, b, b.

3) Составить все перестановки из 5 элементов:

а) a, a, a, b, b; б) a, a, a, b, c; в) a, a, b, b, c.

4) Составить все перестановки из 6 элементов:

а) a, a, a, a, b, c; б) a, a, a, b, b, c; в) a, a, a, b, c, d; г) a, a, b, b, c, d; д) a, a, b, c, d, e.

740. Указать число возможных перестановок, которые можно образовать из сомножителей каждого из следующих произведений.

а) a^2b^5; б) $a^2b^2c^2$; в) ab^3c^5; г) $a^3b^3c^3$;
д) $m^4n^4p^4$; е) $x^5y^5z^5$; ж) $a^3b^4c^5d^6$; з) $ab^3c^5d^7$;
и) $a^2b^4c^6d^8$; к) $ab^2c^3d^4c^5$; л) $a^2b^2c^2d^2e^2$; м) $a^3b^3c^3d^3e^3$;
н) $a^{m-1}b$; о) $a^{m-2}b^2$; п) $a^{m-3}b^3$; р) a^{m-4};
с) a^3b^{m-3}; т) a^2b^{m-2}.

Приложения.

741. Вычислить 1) P_8, 2) P_{10}, 3) P_{15} (при вычислении P_{15} требуется только приблизительный результат с двумя значащими цифрами).

742. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр: 1) 1, 4, 7, 9; 2) 1, 2, 5, 7, 9; 3) 2, 3, 4 (в каждое число должны входить все данные цифры)?

743. Сколькими различными способами можно пересадить в классе 1) 10, 2) 15 учеников?

744. Сколькими способами можно расположить в ряд пару гривенников, пару пятиалтынных и пару двугривенных? 3 рубля и 5 полтинников?

745. Английский замок содержит обыкновенно 3 или 4 сувальды, т.-е. предохранительные пластинки, мешающие отпереть замок отмычкой; все сувальды имеют обычно различную форму; каждому расположению сувальд соответствует свой ключ, отпирающий замок при данном их расположении. Сколько различных ключей следует иметь, чтобы отпереть замок при любом расположении сувальд, 1) если число сувальд 3, 2) если число сувальд 4, 3) если число сувальд 4, и две из них одинаковые, 4) если они образуют две пары одинаковых.

746. Общество состоит из 6 пар. Сколькими различными способами можно пересадить общество: 1) оставляя все время каждую пару вместе, 2) разделяя пары?

§ 3. Размещения.

Размещения без повторений.

747. Соединение, состоящее из k элементов, взятых из числа данных n элементов ($n > k$), называется **размещением из n элементов по k**, если, кроме состава, принимается во внимание и порядок элементов в соединении; при этом оно называется размещением без повторений, если ни один элемент не встречается более одного раза в одном и том же соединении. Как велико число размещений из n элементов по одному?

748. 1) Составить все размещения по два (без повторений) из элементов а) a, b; б) a, b, c; в) a, b, c, d; г) a, b, c, d, e.

2) Составить все размещения по 3 (без повторений) из элементов: а) a, b, c; б) a, b, c, d; в) a, b, c, d e.

3) Составить все размещения по 4 (без повторений) а) из элементов a, b, c, d; б) первые 20 размещений из элементов a, b, c, d, e.

749. 1) Сколькими способами можно занять первое место при составлении размещений без повторений из 7 элементов по 2? 2) Сколькими способами можно занять второе место после того, как первое место занято определенным элементом? 3) Каково число всех размещений из 7 элементов? по 2 без повторений?

750. Сколько размещений без повторений по 2 можно составить из: 1) 3 элементов; 2) 8 элементов и 3) n элементов?

751. При образовании размещений из 7-ми элементов по 3 1) сколькими способами можно занять 3-е место (после того как будут заняты первое и второе места)? 2) сколько размещений без повторений можно образовать из 7-ми элементов по 3?

752. Как велико число размещений по 3 без повторений а) из 3; б) из 8-ми; в) из n элементов?

753. Какое число размещений без повторений можно образовать (обобщить результаты предыдущих задач): а) из 7 элементов по 4, б) из 7 элементов по 6; в) из n элементов по 4?

754. 1) Доказать рекурсионную формулу

$$A_n^k = (n - k + 1) A_n^{k-1},$$

где A_n^k означает число размещений из n элементов по k без повторений.

2) Доказать, перемножая почленно результаты подстановки в рекурсионную формулу $A_n^k = (n - k + 1) A_n^{k-1}$ и т. д. вместо k чисел 1, 2, 3... k, справедливость формулы (принимая $A_n^0 = 1$):

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1),$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

755. Доказать ту же формулу, пользуясь методом полной индукции.

756. Сколько размещений по n без повторений можно составить из n элементов? Каким термином можно назвать этот особый случай размещений?

Размещения с повторениями.

757. 1) Составить размещения по 2 с повторениями из элементов: а) a, b; б) a, b, c; в) a, b, c, d; г) a, b, c, d, e.

2) Составить размещения по 3 с повторениями из элементов: а) a, b; б) a, b, c; в) a, b, c, d.

3) Составить размещения по 4 с повторениями из элементов: 1) a, b; 2) x, b, c.

758. При составлении размещений с повторениями из n элементов по k ($n \geq k$) 1) сколькими способами может быть занято первое место? 2) сколькими способами может быть занято 2-е место? 3) сколькими 3-е? 4) сколькими способами p-е место?

759. Сколько размещений с повторениями получится из n элементов по 2? по 3? по 5?

760. 1) Доказать рекурсионную формулу:

$$AA_n^k = n\, AA_n^{k-1},$$

где AA_n^k обозначает число размещений с повторениями из n элементов по k.

2) Перемножая почленно результаты подстановки в формулу $AA_k^n = nAA_n^{k-1}$ вместо k значений: k, $k-1$, $k-2$ и т. д., до 2, доказать справедливость формулы:

$$AA_n^k = n^k.$$

Приложения.

761. Вычислить:

1) A_9^3; 2) A_7^5; 3) A_{12}^{11}; 4) A_{52}^1; 5) A_{32}^{10};
6) A_{16}^2; 7) AA_6^2; 8) AA_6^3; 9) AA_n^n.

762. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр (если предположить, что цифры могут повторяться):

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 2) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;
3) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 4) 0, 2, 4, 6, 8?

763. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр (если каждая цифра в каждом числе встречается только один раз):

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 2) 1, 2, 3, 5, 7, 9?

764. 1) Сколько различных группировок неодинаковых фигур возможно при одновременном бросании а) двумя костями; б) тремя костями? При этом кости считаются различными (одна из них, например, белая, другая красная, третья синяя); кости имеют форму куба, на гранях которого имеются фигуры в 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков.

2) Сколько вообще возможно группировок фигур при одновременном бросании а) двумя, б) тремя костями (при сохранении условий предыдущей задачи)?

3) Сколько группировок одинаковых фигур возможно при бросании двумя костями? Как связаны между собою это число и числа, полученные в задачах 1 а) и 2 а)?

4) Сколько группировок, в которых совпадает по крайней мере пара фигур, возможно при одновременном бросании тремя костями?

765. Сколько размещений с повторениями можно образовать из знаков $+$ и $-$ 1) по 2, 2) по 3, 3) по 4?

§ 4. Сочетания.

Сочетания без повторений.

766. Соединение, состоящее из k элементов, взятых из данных n элементов, называется **сочетанием из n элементов по k**, если различными считаются только те соединения, которые отличаются друг от друга только **составом**, а не **порядком** элементов (порядок элементов в соединении не имеет значения). Сочетания называются сочетаниями без повторений, если в данной группе один и тот же элемент встречается не более одного раза. Пользуясь этим определением, составить сочетания без повторений: 1) по 1, 2) по 2, 3) по 3 из элементов a, b, c.

2) Из элементов a, b, c, d составить сочетания без повторений: а) по 2, б) по 3, в) по 4.

3) Составить все сочетания без повторений из элементов a, b, c, d, e, а) по 1, б) по 2, в) по 3, г) по 4.

767. 1) Как велико число сочетаний без повторений из n элементов: а) по 1; б) по n?

2) Сколько сочетаний без повторений по 2 элемента (пар) можно составить из: а) 3, б) 4, в) 5 и г) 6 элементов?

3) Сколько сочетаний без повторений по 3 элемента (терн) можно составить из: а) 3, б) 4, в) 5 и г) 6 элементов?

4) Сколько сочетаний без повторений по 4 элемента (кватерн) можно составить из: а) 4, б) 5 и г) 6 элементов?

5) Вычислить число сочетаний из n элементов а) по 2, зная число сочетаний по 1, б) по 3, зная число сочетаний по 2, в) по 4, зная число сочетаний по 3.

768. 1) Доказать справедливость рекурсионной формулы:

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1},$$

где C_n^k есть число сочетаний без повторений из n элементов по k.

2) Перемножая по частям результаты подстановки в написанную рекурсионную формулу вместо k чисел: k, $k-1$, $k-2, \ldots$ и т. д., показать, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

769. Доказать ту же формулу, пользуясь методом полной индукции.

770. 1) Составлены сочетания из n элементов по k (без повторений). Сколько размещений без повторений из n элементов по k можно составить из каждого из этих сочетаний?

2) Доказать равенство:

$$A_n^k = k!C_n^k = P_n . C_n^k.$$

771. 1) При составлении сочетаний из n элементов по k из имеющихся n элементов берется для образования сочетания k элементов; как можно назвать то соединение, которое образуют остальные $n-k$ элементов? Что можно поэтому сказать относительно чисел C_n^k и C_n^{n-k}?

2) Доказать, что $C_n^k = C_n^{n-k}$ на основании выражения C_n^k, данного в задаче 768. 2).

772. 1) Как образовать все сочетания из $n+1$ элементов по k, если все сочетания из n первых элементов уже образованы? Какая зависимость существует между числами C_n^k, C_n^{k-1} и C_{n+1}^k?

2) Доказать формулу $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, пользуясь значением C_n^k, данным в задаче 768 2).

773. Какое **определение** следует дать неимеющему смысла символу C_n^0, чтобы равенство $C_n^k = C_n^{n-k}$ имело место и в этом случае **(принцип перманентности)?**

Сочетания с повторениями.

774. 1) Составить сочетания с повторениями а) по 1 элементу, б) по 2, в) по 3 элемента из a, b, c.

2) Составить сочетания с повторениями а) по 2, б) по 3, в) по 4, г) по 5 из элементов a, b, c, d.

3) Составить сочетания с повторениями: а) по 1, б) по 2, в) по 3 из элементов a, b, c; b, e.

4) Определить число сочетаний с повторениями из n элементов: а) по 1, б) по n.

5) Зная число сочетаний из n элементов по одному, определить число сочетаний с повторениями по 2; б) зная число сочетаний с повторениями по 2, определить число сочетаний по 3, в) найдя выражения для числа сочетаний с повторениями по 3, определить число подобных же сочетаний по 4.

775. 1) Доказать следующую рекурсионную формулу:

$$K_n^k = \frac{n+k-1}{k} \cdot K_n^{k-1},$$

где K_n^k означает число сочетаний с повторениями из n элементов по k.

2) Умножением результатов подстановки в данную рекурсионную формулу вместо k чисел k, $k-1$, $k-2$ и т. д. доказать формулу:

$$K_n^k = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{k!}.$$

3) Показать, что ту же формулу можно написать так:

$$K_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}.$$

4) Формулу, дающую выражение K_n^k, доказать методом полной индукции.

Приложения.

776. Вычислить: 1) C_7^5, 2) C_{10}^3, 3) C_{12}^2.

777. Вычислить: 1) C_n^2, 2) C_n^{n-1}, 3) C_n^{n-2}.

778. Вычислить; 1) K_5, 2) K_7^3, 3) K_{15}^2.

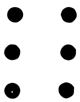
779. Вычислить: 1) K_n^3, 2) K_n^{n-1}, 3) K_n^n.

780. 1) Плоский треугольник, стороны которого a, b и c и два угла α и β, определяется тремя из этих элементов (при чем не всегда получается одно решение). Сколько можно составить различных задач на построение треугольника по тем или иным из указанных элементов?

2) Сферический треугольник, элементы которого суть a, b, c, α, β, γ, где a, b и c суть стороны, а α, β и γ — углы, определяется тремя из них. Сколько можно составить различных задач на решение такого треугольника?

3) В формулы, относящиеся к теории прогрессий с конечным числом членов, входят пять величин: a_1 (u_1), a_n (u_n), n, r (q) и S_n; тремя из этих величин прогрессия определяется; сколько различных основных задач на прогрессию можно составить?

781. В азбуке для слепых для представления букв употребляются точки числом от 1 до 6, которые помещаются в тех или или других из 6-ти мест, указанных на прилагаемой схеме. Сколько различных знаков можно составить из: 1) 1, 2) 2, 3) 3, 4) 4, 5) 5, 6) 6 точек? Сколько различных знаков можно составить в общем итоге?



§ 5. Смешанные задачи.

782. Десять лиц, которые ежедневневно обедают и ужинают в одной и той же столовой, просят содержателя подождать с получением денег до тех пор, пока они не пересядут за столом всеми возможными способами, если каждый день за обедом они будут сидеть по-другому. Сколько лет пришлось бы ждать содержателю столовой, если бы он согласился на это предложение?

783. Сколько прямых можно провести через: 1) 5, 2) 6, 3) n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой?

784. Определить наибольшее возможное число точек пересечения: 1) 3-х, 2) 5-ти, 3) n прямых.

785. Сколькими способами можно разделить 7 различных карт между двумя лицами так, чтобы одно получило 3 карты, а другое 4?

786. Сколькими способами можно разделить 9 карт между 3 лицами так, чтобы первое получило 2, второе 3, а третье 4 карты?

787. Сколькими способами можно: 1) разделить 6 карт между тремя лицами так, чтобы каждое получило по 2 карты? 2) разделить 12 карт между 4 лицами так, чтобы каждое получило по 3 карты?

788. Сколькими способами можно разделить 32 карты между четырьмя игроками так, чтобы каждый получил по 8 карт?

789. Сколькими способами можно разложить произведение из $2n$ сомножителей на n произведений, содержащих каждое по 2 сомножителя?

790. Сколькими способами произведение из $2n$ сомножителей можно разложить на 2 произведения из n сомножителей каждое?

791. Сколькими способами можно произведение из $3n$ сомножителей представить в виде n произведений из трех сомножителей каждое?

792. Сколькими способами можно произведение из $3n$ множителей представить в виде 3-х произведений по n сомножителей каждое?

793. Сколько слов можно составить из 20 согласных и 8 гласных, если в каждое слово должно входить по 2 гласных и по 4 согласных и если гласные должны помещаться на 2-м и 5-м местах?

794. Сколько односложных слов, состоящих из двух согласных и помещенной между ними гласной, можно составить из 20 согласных и 8 гласных?

795. 1) Сколько различных группировок неодинаковых фигур возможно при одновременном бросании а) двумя костями; б) тремя костями? При этом кости считаются различными (одна из них, например, белая, другая красная, третья синяя); кости имеют форму куба, на гранях которого имеются фигуры в 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков.

2) Сколько группировок одинаковых фигур возможно при бросании двумя костями?

3) Сколько группировок, в которых совпадает по крайней мере пара фигур, возможно при одновременном бросании тремя костями?

4) Сколько вообще возможно группировок фигур при одновременном бросании: а) двумя, б) тремя костями (при сохранении условий предыдущей задачи)?

796. В прежнее время для сохранения приоритета на изобретение или открытие составляли фразу, в которой сообщалось о сделанном открытии, затем переставляли в ней буквы таким образом, чтобы трудно было восстановить ее смысл (*анаграмма*). Так, например, Рейта (Антон-Мария Ширлеус, 1597—1660) по поводу изобретения им четырехлинзовой трубы составил анаграмму «convexa quattuor», и придал ей форму cqotunavteuxoar. Сколько времени придется потратить на разгадывание анаграммы, если кто-нибудь вздумает разгадать ее, составляя всевозможные перестановки букв, и если это лицо в каждую минуту будет составлять 3 перестановки, а каждый день тратить на эту работу по 10 часов?

797. «Интернациональная сигнальная книга» состоит из 26 флажков. Сколько сигналов можно дать: 1) 2-мя различными флажками, 2) 3-мя флажками, 3) 4-мя флажками?

§ 6. Бином Ньютона для натурального показателя.

Вывод формулы бинома Ньютона.

798. Указать, члены скольких различных типов войдут в произведения (в разложения в виде многочленов произведений):

1) $(a+b)\cdot(a+b)$, 2) $(a+b)(a+b)(a+b)$

и сколько раз встречается член каждого из типов.

799. Произведение

$$(a+b)(a+b)\ldots(a+b)(a+b),$$

состоящее из n сомножителей, преобразуется в многочлен последовательным перемножением двучленов.

Определить число членов (до приведения) вида: 1) $a^{n-1}b$, 2) $a^{n-2}b^2$, 3) $a^{n-k}b^k$.

800. 1) Показать, что разложение $(a+b)^n$ представляет однородный многочлен, т.-е. сумма показателей при степенях a и b у всех членов одинакова. 2) Составить ряд членов, входящих в разложение бинома Ньютона, без их коэффициентов, начиная с a^n, $a^{n-1}b$ и т. д.

801. Определить коэффициент, соответствующий члену: 1) $a^{n-3}b^3$, 2) a^3b^{n-3}, 3) $a^{n-k}b^k$, 4) a^kb^{n-k} в разложении $(a+b)^n$.

802. Доказать справедливость следующего равенства при натуральном значении показателя:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \\ + \ldots + nab^{n-1} + b^n.$$

Свойства коэффициентов разложения по биному Ньютона (биномиальных коэффициентов).

803. Введем следующее обозначение для коэффициентов разложения по биному Ньютона:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

1) Записать формулу бинома Ньютона (№ 802), пользуясь этим обозначением. 2) Показать, что $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. 3) Каким условиям должны удовлетворять числа n и k в равенстве, определяющем биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$, чтобы этот символ имел смысл?

804. Вычислить:

1) $\binom{5}{1}$; 2) $\binom{5}{3}$; 3) $\binom{5}{4}$; 4) $\binom{5}{5}$;
5) $\binom{7}{1}$; 6) $\binom{7}{2}$; 7) $\binom{7}{4}$; 8) $\binom{7}{6}$;
9) $\binom{10}{2}$; 10) $\binom{13}{2}$; 11) $\binom{17}{2}$; 12) $\binom{21}{2}$;
13) $\binom{24}{2}$; 14) $\binom{24}{3}$; 15) $\binom{24}{4}$; 16) $\binom{24}{5}$;
17) $\binom{n}{1}$; 18) $\binom{n}{2}$; 19) $\binom{n+1}{3}$; 20) $\binom{n-1}{4}$.

805. Из коэффициентов разложения бинома составить так называемый **треугольник Паскаля** до $n=8$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ . & & . & & . & & . \end{array}$$

806. На основании осевой симметрии треугольника Паскаля указать необходимость существования равенства:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

и доказать его: 1) сравнивая между собой дроби, выражающие эти коэффициенты, 2) пользуясь соотношением

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

3) пользуясь тем соображением, что $\binom{n}{k} = C_n^k$.

807. Пользуясь только что выведенным свойством (кратчайшим способом) вычислить значения следующих биномиальных коэффициентов:

1) $\binom{28}{27}$; 2) $\binom{56}{55}$; 3) $\binom{100}{99}$; 4) $\binom{18}{17}$;
5) $\binom{27}{25}$; 6) $\binom{16}{14}$; 7) $\binom{50}{48}$; 8) $\binom{51}{49}$;

9) $\binom{17}{14}$; 10) $\binom{20}{15}$; 11) $\binom{25}{20}$; 12) $\binom{30}{27}$;

13) $\binom{n}{n-1}$; 14) $\binom{n+1}{n}$; 15) $\binom{n+1}{n-1}$; 16) $\binom{n+2}{n-2}$.

808. Указать основания, в силу которых полезно ввести определение.

$$\binom{n}{o} = 1.$$

809. Вывести значение символа $\binom{n}{o} = 1$ на основании определения C_n^o.

810. Составить выражение: 1) 7-го члена разложения $(a+b)^{10}$, 2) 11-го члена разложения $(x+y)^{15}$, 3) 8-го члена разложения $(p+q)^{20}$.

811. Найти: 1) 6-й и 10-й коэффициенты разложения 14-й степени бинома, 2) 8-й и 18-й коэффициенты 20-й степени бинома.

812. Определить коэффициент m-го члена разложений:

1) $(a+b)^n$, 2) $(a+b)^{2m}$, 3) $(a+b)^{2m-1}$.

813. Определить коэффициент при: 1) a^4b^5, 2) a^2b^7 в разложении $(x+b)^9$.

814. Определить коэффициент при: 1) $a^{10}b^5$, 2) a^3b^{12} в разложении $(a+b)^{15}$.

815. Определить коэффициент при: 1) a^7b^3, a^5b^5, a^2b^8 в разложении $(a+b)^{10}$; 2) при x^5y^6 и x^6y^5 в разложении $(x+y)^{11}$.

816. Какие члены разложения $(a+b)^n$ имеют те же коэффициенты, что и 1) 5-й, 2) 7-й и 3) m-й член того же разложения? Написать соответствующие члены.

817. Какие члены разложения 31-й степени бинома имеют те же коэффициенты, как и 1) 7-й, 2) 12-й, 3) 27-й члены? указать их номера и вычислить эти коэффициенты.

818. Как выразится через A_9 10-й биномиальный коэффициент, если A_9 означает 9-й биномиальный коэффициент разложения $(a+b)^n$?

819. Определить наибольшие коэффициенты разложений: 1) $(a+b)^9$, 2) $(a+b)^{13}$.

820. Определить наибольшие коэффициенты разложений: 1) $(a+b)^7$, 2) $(a+b)^{11}$, 3) $(a+b)^{16}$.

821. Доказать, что биномиальные коэффициенты, несмотря на то, что они записываются в виде дробей, суть числа целые.

822. Вывести формулу суммы всех коэффициентов бинома n-й степени: 1) положив в разложении $(a+b)^n$ $a=b=1$ или 2) из свойства треугольника Паскаля).

823. В разложении $(a - b)^n$ положить $a = b = 1$ и определить значения суммы биномиальных коэффициентов: 1) стоящих на местах с четными номерами, 2) с нечетными номерами.

824. Пусть A есть сумма чисел сочетаний четных порядков (с четным числом членов в сочетании), B — сумма чисел сочетаний нечетных порядков из n элементов без повторений (включая сочетания по o и по n). Чему тогда равно $A + B$ и $A - L$?

Примеры.

825. Разложить по формуле бинома Ньютона:

1) $(x + a)^6$; 2) $(y + b)^8$; 3) $(p + q)^{10}$;
4) $(r + t)^5$; 5) $(x + y)^7$; 6) $(u + v)^9$;
7) $(a - x)^5$; 8) $(t + x)^7$; 9) $(x - a)^6$;
10) $(1 + x)^6$; 11) $(1 - x)^7$; 12) $(1 - t)^8$;
13) $(1 + x)^7 + (1 - x)^7$; 14) $(x + 1)^7 + (x - 1)^7$;
15) $(1 + x)^8 + (1 - x)^8$; 16) $(x + 1)^8 + (x - 1)^8$;
17) $(1 + x)^6 - (1 - x)^6$; 18) $(x + 1)^9 - (x - 1)^9$;
19) $(1 + x)^8 - (1 - x)^8$; 20) $(x + 1)^{10} - (x - 1)^{10}$;
21) $(a + b)^n + (a - b)^n$; 22) $(a + b)^n - (a - b)^n$.

Доказательство формулы бинома методом полной индукции.

826. Так как $(a + b)^7 = (a + b)^6 \cdot (a + b)$, то формула бинома 7-й степени может быть выведена из формулы бинома 6-й степени умножением всех членов последнего разложения сперва на a, а затем на b и приведением подобных членов этих произведений. 1) Как составляется при этом 3-й коэффициент разложения $(a + b)^7$ из двух коэффициентов разложения $(a + b)^6$ и каких именно? Из каких двух коэффициентов разложения $(a + b)^6$ составляется: 1) 4-й коэффициент разложения $(a + b)^7$, 2) 5-й, 3) предпоследний, 4) 2-й; как составляется 5) последний, 6) первый коэффициент того же разложения?

827. Составить: 1) 4-й, 2) 6-й, 3) 9-й коэффициент разложения $(a + b)^{12}$ из двух коэффициентов разложения $(a + b)^{11}$.

828. Показать, пользуясь треугольником Паскаля, закон составления любого биномиального коэффициента из двух коэффициентов разложения бинома степени на единицу низшей.

829. Доказать формулу:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

1) записав эти символы в виде дробей, 2) принимая во внимание формулу задачи 772.

830. Доказать формулу бинома методом полной индукции, воспользовавшись равенством предыдущей задачи.

Задачи.

831. Разложить по формуле бинома и, если возможно, упростить:

1) $(x-2y)^7$; 2) $(3x+y)^8$; 3) $(2x+3y)^5$;
4) $(1+x^2)^4$; 5) $(1-x^3)^7$; 6) $(1+x^2)^5$;
7) $(\frac{1}{2}x+2)^5$; 8) $(\frac{1}{3}x-3y)^6$; 9) $(x^2-3^3)^6$;
10) $(5-2t)^6$; 11) $(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}x)^7$; 12) $(\frac{3}{4}x+1\frac{1}{3}y)^4$;
13) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$; 14) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^7$; 15) $\left(\frac{2a}{3b}-\frac{3b}{2a}\right)^6$;
16) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^6$;
17) $(1+\sqrt{x})^7-(1-\sqrt{x})^7$.

832. Вычислить (с 3 или 4 десятичными знаками), пользуясь формулой бинома Ньютона, значения следующих выражений:

1) $1{,}1^{10}$; 2) $1{,}02^{20}$; 3) $1{,}005^{22}$; 4) $1{,}0007^{27}$;
5) $0{,}9^9$; 6) $0{,}98^{15}$; 7) $0{,}997^{24}$; 8) $0{,}9995^{30}$;
9) $\left(\frac{91}{90}\right)^{10}$; 10) $\left(\frac{79}{80}\right)^{11}$; 11) $\left(\frac{51}{50}\right)^{12}$; 12) $\left(\frac{29}{30}\right)^{13}$;
13) $\left(\frac{48}{47}\right)^6$; 14) $\left(\frac{83}{84}\right)^7$; 15) $\left(\frac{565}{563}\right)^8$; 16) $\left(\frac{872}{875}\right)^9$.

833. Вычислить (с 6-ю десятичными знаками), пользуясь формулой Ньютона, значения следующих так называемых множителей наращения (см. вычисление ренты):

1) $1{,}04^4$; 2) $1{,}03^5$; 3) $1{,}05^4$; 4) $1{,}03^6$;
5) $1{,}035^6$; 6) $1{,}033\ldots^5$; 7) $1{,}045\ldots^7$; 8) $1{,}0466\ldots^{10}$.

834. При введении коэффициента кубического расширения полагают

$$(1+\alpha t)^3 = 1+3\alpha t,$$

где α есть коэффициент линейного расширения.

Определить допускаемую при этом ошибку при $t=10^0$ и среднем линейном коэффициенте расширения: 1) железа, $\alpha=0{,}000012$, 2) алюминия, $\alpha=0{,}000023$, 3) цинка, $\alpha=0{,}000029$.

Общий член разложения бинома.

835. Обозначая через U_{k+1} $k+1$-й член разложения $(a+b)^n$ по формуле Ньютона, написать его выражение при

1) $k=0$; 2) $k=1$; 3) $k=2$; 4) $k=n-1$; 5) $k=n$.

836. 1) Составить выражение U_{k+2}, заменяя в формуле предъидущей задачи k через $k+1$. 2) Найти отношение $\frac{U_{k+2}}{U_{k+1}}$. 3) Написать выражение U_{k+2} через U_{k+1}.

837. 1) В разложении $\left(a+\frac{1}{2}\right)^{10}$ найти член, не содержащий a.

2) Найти рациональные члены разложения $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^5$ (если такие существуют).

3) Выписать рациональные члены разложения $(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^{11}$ и найти их сумму.

4) Найти такой член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\sqrt{a}\right)^7$, который содержит a в первой степени.

5) При каком значении n в разложении $\left(a^{-\frac{2}{5}}+a^{\frac{3}{5}}\right)^n$ U_{10} содержит a^{12}?

6) В разложении $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{a}}\right)^8$ найти член, не содержащий x.

7) Найти такой член разложения $\left(y^{\frac{2}{3}}-y^5\right)^5$, который содержит y в 9-й степени.

8) При каком значении n U_7 в разложении $(\sqrt{a}+\sqrt{a^3})^n$ содержит a^{16}?

838. Отношение коэффициента U_5 к коэффициенту U_3 разложения $(\sqrt[3]{a-1}+\sqrt{a+1})^n$ равно $2\frac{1}{2}$. Найти третий член этого разложения.

2) Коэффициент U_4 разложения $(\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{a-1})^n$ равен 4. Найти третий член разложения.

ОТДЕЛ СЕДЬМОЙ.

ДЕВЯТАЯ ГЛАВА.

Комплексные числа.

§ 1. Мнимая единица. Комплексное число.

При решении квадратных уравнений нередко приходится встречаться с задачей извлечения квадратного корня из отрицательного числа (см. жирн. шрифт на стр. 300); задача эта не может быть разрешена в действительных числах, так как квадрат всякого действительного числа есть число положительное. Чтобы сделать извлечение квадратного корня из отрицательного числа возможным, область изучаемых чисел расширяется введением **мнимых** чисел, образуемых из новой единицы, называемой **мнимой** единицей (в отличие от **действительной** единицы, из которой образованы действительные числа) и обозначаемой буквой i; связь между мнимой единицей и действительной единицей, из которой образованы все действительные числа, определяется равенством $i^2 = -1$.

$$\overbrace{i+i+i+i+\cdots+i}^{n \text{ раз}} = ni.$$

839. Записать в более короткой форме:

1) $i+i+i+i+i$; 2) $2i+3i$; 3) $5i-2i$;
4) $5i-3i$; 5) $6i-6i$; 6) $3i+2i-4i$;
7) $9i-3i+4i$; 8) $7i-9i+2i$; 9) $ai+bi$;
10) $ai-bi$; 11) $ai+bi-ai$; 12) $ai-ai$.

Комплексные числа.

Число, образованное соединением a действительных единиц с b мнимыми, называется **комплексным** числом и обозначается:

$$a\cdot 1+bi \text{ или короче: } a+bi.$$

840. Построить точку M, координаты которой суть:

1) (5, 3); 2) (— 1, 2); 3) (a, b); 4) (a, 0); 5) (0, b).

Точка M, координатами которой служат коэффициенты a и b при действительной и мнимой единицах в выражении $a+bi$, принимается за геометрическое изображение числа $a+bi$.

841. Построить точку, служащую изображением числа:

1) $5+3i$; 2) $7-2i$; 3) $-5+4i$; 4) $-2-2i$; 5) 3; 6) $4i$; 7) $0{,}5+0{,}4i$; 8) $-0{,}3+0{,}7i$.

842. Написать комплексные числа, изображениями которых являются точки A, B, C, D, E, O на фиг. 23, стр. 221.

843. Исследовать, устанавливается ли при введенном представлении комплексных чисел посредством точек **однозначное соответствие** между комплексными числами и точками «числовой плоскости» и обратно.

844. Что можно сказать про числа $a+bi$ и $a'+b'i$, если $a=a'$ и $b=b'$?

845. При выполнении каких условий $m+ni=0$, если ввести определение, что $a+bi=a'+b'i$ тогда и только тогда, когда отдельно $a=a'$ и $b=b'$?

§ 2. Действия над комплексными числами.

846. Какое о п р е д е л е н и е следует дать сумме двух комплексных чисел $a+bi$ и $a'+b'i$, чтобы законы сложения, имеющие место при сложении действительных чисел, сохраняли свою силу и в случае сложения комплексных чисел?

847. Построить числа:
1) $3+5i$ и $5+3i$;
2) $3+2i$ и $3-2i$;
3) $4+3i$ и $-4+3i$;
4) $2+3i$ и $-2-3i$;
5) $-2+4i$ и $2-4i$;
6) $5+3i$ и $2+4i$;
7) $a+bi$ и $a'+b'i$,

и их сумму.

Соединить прямыми точки, изображающие слагаемые и сумму, с началом координат и между собою.

Какая фигура образуется этими прямыми в случаях 1, 2, 3, 4 и 5? 6? В общем случае (7-м)?

848. Построить и вычислить разности чисел:

1) $3+4i$ и $2+i$; 2) $7-3i$ и $7+3i$;
3) $4+5i$ и $-4+3i$; 4) $2+4i$ и $-2-4i$;
5) $-7+2i$ и $7+2i$; 6) $a+bi$ и $a'+b'i$.

849. Вычислить:

1) $(3+4i)+(2+3i)$; 2) $(2-3i)+(1+i)$;
3) $(-3+2i)+(2-i)$; 4) $(3{,}5-0{,}5i)+(1{,}5-2{,}5i)$;
5) $(1+i)-(5+3i)$; 6) $(-2+3i)-(2-i)$;
7) $\left(\frac{1}{4}-i\right)-\left(\frac{3}{4}+i\right)$; 8) $\left(-\frac{1}{4}-2i\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}i\right)$.

850. Даны комплексные числа: 1) $7-i$, 2) $5-3i$, 3) $2+5i$, 4) $-1+4i$, 5) $a+bi$. Ответить на следующие вопросы относительно каждого из этих чисел: а) Какое число следует к нему прибавить (из него вычесть), чтобы получить действительное число? б) Какое число следует к нему приложить (из него вычесть), чтобы получить мнимое число (т.-е. число, состоящее только из мнимых единиц)?

851. В каком случае сумма двух комплексных чисел 1) есть действительное число? 2) мнимое? 3) к какой числовой области принадлежит сумма двух комплексных чисел вообще?

852. В задаче 845 было дано определение равенства двух комплексных чисел, заключающееся в том, что два комплексных числа равны, если отдельно равны их действительные и отдельно равны их мнимые части, т.-е. $a+bi=c+di$, если $a=c$ и $b=d$. Показать, что это определение совпадает с требованием (выполняющимся при равенстве двух действительных чисел), чтобы разность их была равна нулю.

853. Два комплексных числа, отличающиеся лишь знаками при мнимой части, называются **сопряженными комплексными числами.** Написать числа, сопряженные числам:

1) $2+3i$; 2) $2-3i$; 3) $2+5i$; 4) $-2+5i$; 5) $-7-9i$.

854. Написать числа, сопряженные числам:

1) $m-ni$; 2) $p+qi$; 3) $-a-bi$; 4) $\frac{1}{2}-3i$; 5) $-0{,}4+1{,}2i$.

855. 1) Указать, как располагаются на числовой плоскости изображения двух сопряженных комплексных чисел.

2) Сложить каждое из данных в задачах 853 и 854 комплексных чисел с числом, ему сопряженным.

3) К какой числовой области принадлежит сумма двух сопряженных комплексных чисел?

856. Вычесть из каждого числа задач №№ 853 и 854 число. ему сопряженное. К какой числовой области принадлежит разность двух сопряженных комплексных чисел?

857. Какое определение следует дать произведению двух комплексных чисел $a+bi$ и $a'+b'i$, чтобы законы умножения. имеющие место при умножении действительных чисел, сохраняли свою силу и для комплексных чисел и чтобы, согласно введенному ранее определению, $i^2 = -1$?

858. Вычислить:

1) $3(2+i)$; 2) $-2(1+0{,}3i)$;

3) $i(3+2i)$; 4) $-\frac{i}{2}(1+2i)$;

5) $(2+3i)(3+5i)$; 6) $(1+i)(2+i)$;

7) $(3+4i)(1-i)$; 8) $(0{,}2+0{,}5i)(5+2i)$;

9) $(0{,}6+0{,}5i)(0{,}7-0{,}6i)$; 10) $(3+i\sqrt{2})(5+7i\sqrt{2})$;

11) $(5-2i\sqrt{7})(6-2i\sqrt{7})$; 12) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$;

13) $(a+bi)(c+di)$; 14) $(x+iy)(2x+iy)$;

15) $(p-2qi)(2p+qi)$; 16) $(a-i\sqrt{b})(-a-2i\sqrt{b})$.

К какой числовой области принадлежит обыкновенное произведение двух комплексных чисел?

859. Вычислить:

1) $2\cdot 3i$; 2) $4i\cdot 2$; 3) $-5i\cdot 4$;

4) $5i\cdot 7i$; 5) $-2i\cdot 4i$; 6) $-2i\cdot -4i$;

7) $mi\cdot ni$; 8) $-pi\cdot qi$; 9) $-pi\cdot -qi$.

Какой числовой области принадлежит произведение двух чисто мнимых (без действительной части) чисел? Почему?

860. Вычислить:

1) $(3+2i)(3-2i)$; 2) $(7+i)(7-i)$;

3) $(1-i)(1+i)$; 4) $(a+bi)(a-bi)$;

5) $(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$; 6) $(3+2i\sqrt{2})(3-2i\sqrt{2})$;

7) $(a+i\sqrt{b})(a-i\sqrt{b})$; 8) $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$.

К какой числовой области принадлежит произведение двух сопряженных комплексных чисел? Почему?

861. Разложить на пары комплексных сомножителей:

1) x^2+y^2; 2) m^2+4n^2; 3) $9a^2+16b^2$;
4) $a^2+\frac{b^2}{4}$; 5) $p^4+\frac{q^2}{4}$; 6) $p+q$;
7) q^2+1; 8) $16+1$; 9) $25+4$;
10) 5; 11) 37; 12) 65.

862. Найти, пользуясь определением умножения и определением равенства комплексных чисел, такое число $x+iy$, чтобы $(x+iy)(a+bi)=a'+b'i$. Показать, что то же выражение частного $\frac{a'+b'i}{a+bi}$ получится, если числитель и знаменатель дроби $\frac{a'+b'i}{a+bi}$ умножить на $a-bi$.

863. Вычислить частные:

1) $15i:3$; 2) $4i:2i$; 3) $6i:(-3i)$;
4) $\frac{17+i}{i}$; 5) $\frac{i-1}{i}$; 6) $-\frac{51}{5i}$;
7) $\frac{5}{1+2i}$; 8) $\frac{17i}{3+5i}$; 9) $\frac{1+i}{1-i}$; 10) $\frac{4-3i}{2+i}$;
11) $\frac{17-6i}{3-4i}$; 12) $\frac{5+12i}{3+2i}$; 13) $\frac{63+16i}{4+3i}$; 14) $\frac{56+33i}{12-5i}$;
15) $\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$; 16) $\frac{64}{1+3i\sqrt{7}}$; 17) $\frac{5i}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$; 18) $\frac{3i}{\sqrt{2}+i}$;
19) $\frac{1-20i\sqrt{5}}{7-2i\sqrt{5}}$; 20) $\frac{5-29i\sqrt{5}}{7-3i\sqrt{5}}$; 21) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; 22) $\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$;
23) $\frac{m+ni}{m-ni}$; 24) $\frac{1+i}{(1-i)^3}$; 25) $\frac{1-i^2}{(1+i)^3}$;
26) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$; 27) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$; 28) $\frac{1}{(1+i)^4}-\frac{1}{(1-i)^4}$;
29) $\frac{x+i\sqrt{1-x^2}}{x-i\sqrt{1-x^2}}$ $(x^2<1)$; 30) $\frac{a+bi}{c+di}+\frac{a-bi}{c-di}$;
31) $\frac{a+bi}{c+di}-\frac{a-bi}{c-di}$; 32) $\frac{\sqrt{x}+i\sqrt{y}}{\sqrt{x}-i\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}+i\sqrt{x}}{\sqrt{y}-i\sqrt{x}}$;

33) $\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$.

864. Вычислить:

1) i^2; 2) i^3; 3) i^4; 4) i^5;
5) i^6; 6) i^7; 7) i^8; 8) i^9;
9) i^{4n}; 10) i^{4n+1}; 11) i^{4n+2}; 12) i^{4n+3};
13) $(2i)^2$; 14) $(5i)^3$; 15) $(3i)^4$; 16) $(i\sqrt{3})^2$;
17) $(-i)^{10}$; 18) $-i^{32}$; 19) $(-i)^{19}$; 20) $-i^{19}$.

865. Вычислить (найти оба значения):

1) $\sqrt{-4}$; 2) $\sqrt{-27i}$; 3) $\sqrt{-3}$; 4) $\sqrt{-5}$;
5) $\sqrt{-9}$; 6) $\sqrt{18}$; 7) $\sqrt{-16}$; 8) $\sqrt{-8i}$;
9) $\sqrt{-a}$; 10) $\sqrt{-abc}$; 11) $\sqrt{-m^2}$; 12) $\sqrt{-4a^2b^2}$.

К какой числовой области принадлежит квадратный корень из отрицательного числа?

866. Упростить выражение (под буквой разумеется **положительное число**):

1) $\sqrt{-x^2}\cdot\sqrt{-y^2}$; 2) $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-1}$;
3) $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}$; 4) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{-a}$;
5) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{-12}$; 6) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{-\frac{1}{2}}$;
7) $\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-\frac{1}{5}}$; 8) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{-\frac{3}{5}}$;
9) $\sqrt{ab^2}\cdot\sqrt{-ab^4}$; 10) $\sqrt{-ab\cdot i}\cdot\sqrt{-ab}$;
11) $\sqrt{-ab^3}\cdot\sqrt{a^3b}$; 12) $i\sqrt{a}\cdot\sqrt{-b^3}$.

867. Упростить выражение:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sqrt{a-b}\cdot\sqrt{b-a}, \\ 2)\ \sqrt{a-b}\cdot\sqrt{(b-a)^3}, \\ 3)\ \sqrt{(a-b)^4}\cdot\sqrt{(b-a)^4} \end{array}\right\}\ \text{при условии } a>b.$$

Выяснить, в каких случаях наложенное условие влияет и в каких не влияет на окончательное выражение результата.

868. К какой числовой области принадлежат степени комплексного числа?

869. Вычислить:

1) $(1+i)^2$; 2) $(1-i)^2$;
3) $(a+bi)^2$; 4) $(4+3i)^2$;
5) $(2+i\sqrt{3})^2$; 6) $(5+3i\sqrt{2})^2$;
7) $(2-i\sqrt{2})^2$; 8) $(\sqrt{a}-i\sqrt{b})^2$;
9) $(a+bi)^2+(a-bi)^2$; 10) $(a+bi)^2-(a-bi)^2$;
11) а) $(1+i)^3$, б) $(1-i)^3$; 12) а) $(1+i)^4$, б) $(1-i)^4$;
13) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2$; 14) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$;
15) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2$; 16) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$;
17) $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$; 18) $(1+i\sqrt{2})^5+(1-i\sqrt{2})^5$.

870. Раскрыть по формуле бинома Ньютона:

1) $(1+i)^8$; 2) $(1-i)^{10}$; 3) $(\sqrt{3}+i)^9$.

871. Вычислить:

1) $(a+bi)^5+(a-bi)^5$; 2) $(a+bi)^6-(a-bi)^6$;
3) $(1+i)^8+(1-i)^8$; 4) $(1+i)^9+(1-i)^9$;
5) $(1+i)^{10}-(1-i)^{10}$; 6) $(1+i)^{11}-(1-i)^{11}$;
7) $(3+i\sqrt{5})^7+(3-i\sqrt{5})^7$; 8) $(3+i\sqrt{5})^7-(3-i\sqrt{5})^7$;
9) $(1+i\sqrt{3})^9+(1-i\sqrt{3})^9$; 10) $(1+i\sqrt{3})^9-(1-i\sqrt{3})^9$.

872. Найти, пользуясь формулой возведения в квадрат комплексного числа и определением равенства комплексных чисел, такое число $x+iy$, чтобы $(x+iy)^2=a+bi$; другими словами, найти значение $\sqrt{a+bi}$. Показать на основании теоремы Виета о выражении коэффициентов квадратного уравнения через корни, что x^2 и $-y^2$ являются корнями уравнения $z^2-az-\frac{b^2}{4}=0$. Почему это уравнение всегда имеет действительные корни?

873. Вычислить указанным выше способом:

1) $\sqrt{ai}$; 2) $\sqrt{-i}$; 3) $\sqrt{5+12i}$;
4) $\sqrt{35-12i}$; 5) $\sqrt{21+20i}$; 6) $\sqrt{63-16i}$;
7) $\sqrt{15+8i}$; 8) $\sqrt{9+40i}$; 9) $\sqrt{-13+84i}$;
10) $\sqrt{8+6i}$; 11) $\sqrt{-77+36i}$; 12) $\sqrt{-33-56i}$;
13) $\sqrt{3,75+2i}$; 14) $\sqrt{-0,75+i}$; 15) $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$.

874. Доказать возведением в квадрат справедливость формул:

1) $\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}=\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}+a)}$;
2) $\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi}=i\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}-a)}$.

875. Складывая (и вычитая) почленно написанные формулы, показать, что

$$\sqrt{a\pm bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

876. Преобразовать по формулам 1) и 2) задачи № 874 выражения:

1) $\sqrt{8+6i}\pm\sqrt{8-6i}$; 2) $\sqrt{40+9i}\pm\sqrt{40-9i}$;
3) $\sqrt{15+8i}\pm\sqrt{15-8i}$; 4) $\sqrt{35+12i}+\sqrt{35-12i}$.

877. Преобразовать по формуле задачи 875

1) $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{7+30i\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{1-6i\sqrt{10}}$; 4) $\sqrt[4]{-a}$.

§ 3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Полярные координаты.

Положение точки на плоскости может быть определено не только при помощи прямоугольных (так называемых Декартовых) координат, но и другим способом: при помощи полярных координат. Назовем некоторую точку плоскости O **полюсом** и некоторую прямую OP, выходящую из точки O, **полярной осью.** Тогда положение точки M может быть определено заданием числовых значений отрезка OM (оно всегда считается положительным) и угла, образуемого прямою OM с OP (или дугой, соответствующей этому углу); угол этот считается положительным, если получается вращением луча против часовой стрелки, и отрицательным, если он получается вращением луча по часовой стрелке. Значение OM обозначается посредством r и называется радиусом-вектором, а угол обозначается посредством α и называется амплитудой или аргументом (ср. §§ 8 — 9 гл. VII).

878. Построить точки по их полярным координатам:

1) $1, \frac{\pi}{2}$; 2) $1, \pi$; 3) $1, \frac{3}{2}\pi$; 4) $1, 2\pi$;

5) $1, 0$; 6) $2, \frac{\pi}{6}$; 7) $2, \frac{\pi}{3}$; 8) $2, \frac{2}{3}\pi$;

9) $3, \frac{4}{3}\pi$; 10) $2, -\frac{\pi}{6}$; 11) $3, -\frac{\pi}{3}$; 12) $3, -\frac{7}{3}\pi$.

879. Показать, что при определении положения точки при помощи ее полярных координат всякое комплексное число может быть представлено в так называемой тригонометрической форме (принимая полюс лежащим в начале Декартовой системы координат и ось x совпадающей с полярной осью):

$$a+bi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{r}; \qquad \sin\alpha=\frac{b}{r},$$

где r называют **модулем,** α — **аргументом** комплексного числа.

880. Как велики аргумент и модуль чисел:

1) $1+i$; 2) $-1+i$; 3) $i-1$; 4) $\sqrt{3}+i$;

5) $i-\sqrt{3}$; 6) $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}$; 7) $-2i$; 8) $3+3i$.

881. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

1) $8+15i$; 2) $12-5i$; 3) $6-5i$; 4) $-11-3i$.

882. Вместо того чтобы принимать за изображение комплексного числа $a+bi$ точку M (a,b), оказывается выгодным рассматривать как изображение этого числа в е к т о р OM (направленный отрезок), т.-е. отрезок, определяемый по в е л и ч и н е и по н а п р а в л е н и ю; для определения величины вектора может служить его значение r, а для определения направления — аргумент α. Два вектора считаются равными, если они имеют одинаковую величину и одинаковое направление, другими словами, если один из них может быть получен параллельным п е р е н е с е н и е м другого. Показать, что сумма двух комплексных чисел определяется графически таким п е р е н е с е н и е м вектора, представляющего одно из слагаемых, чтобы его начало совместилось с концом вектора, представляющего другое слагаемое. Построить вектор, представляющий сумму.

Сравнить сложение векторов с теоремой о параллелограмме сил. Что в этом случае соответствует: 1) компонентам, 2) равнодействующей?

883. Выполнить вычитание двух комплексных чисел, пользуясь параллельным перенесением векторов, и сравнить эту операцию с разложением силы на компоненты.

884. Построить по правилу сложения векторов: а) суммы 1) $3+2i$ и $3-2i$, 2) $-4+2i$ и $4+2i$, 3) $a+bi$ и $a-bi$, б) разности тех же чисел.

885. На основании симметричности относительно оси x изображений сопряженных комплексных чисел показать, что сумма их — действительное число, а разность — число мнимое.

886. В каких случаях модуль суммы двух чисел равен 1) сумме модулей слагаемых, 2) их разности? каким неравенствам удовлетворяет модуль суммы в остальных случаях?

887. Построить сомножители и произведение:

1) $3\cdot(2+i)$; 2) $(2-3i)\cdot 2$;

3) $(a+bi)\cdot k$; 4) $2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$;

5) $3(\cos 30^\circ - \sin 30^\circ)$; 6) $m\cdot[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]$.

Какая из величин, определяющих комплексное число в тригонометрической форме, не меняется при умножении комплексного числа на действительное число? Что изменяется в векторе, представляющем комплексное число, при таком умножении? Что сохраняется без перемены?

888. Построить сомножители и произведение:

1) $2\cdot i$; 2) $i\cdot i$; 3) $2i\cdot i$; 4) $(1+i)\cdot i$;
5) $2(\cos 0°+i\sin 0°)\cdot i$; 6) $3(\cos 30°+i\sin 30°)\cdot i$;
7) $3(\cos 60°-i\sin 60°)$; 8) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot i$.

Что сохраняется неизменным в векторе при умножении его на i? Что изменяется в определении вектора? Насколько отличается аргумент произведения от аргумента множимого при умножении его на i? Какой аргумент больше?

Каким **движением** может быть получено в этом случае произведение из множимого?

[Принять во внимание формулы $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$, $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$].

889. Представить при помощи векторов сомножители и произведения:

1) $(3+4i)(4+3i)$; 2) $(3+4i)\cdot(2+3i)$; 3) $(3+4i)(3-4i)$.

Измерить на чертеже аргументы сомножителей и произведения. Какой вывод можно сделать относительно аргументов сомножителей и произведения?

890. Показать, выполнив умножение (и применяя теорему сложения для sin и cos), что вообще:

$$r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)\cdot r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)=$$
$$=r_1r_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)].$$

Формулировать эту теорему словами. Чему равен 1) модуль, 2) аргумент произведения?

891. Рассматривая каждое из трех чисел (т.-е. сомножители и произведение) как вектор, воспользоваться при выражении предыдущей теоремы понятиями вращения и растяжения.

892. Составить произведения:

1) $2(\cos 30°+i\sin 30°)\cdot 3(\cos 45°+i\sin 45°)$;
2) $(\cos 60°+i\sin 60°)\cdot 2(\cos 135°+i\sin 135°)$

a) вычислением, c) построением.

893. Пусть некоторое комплексное число представляет произведение двух других чисел. Показать, что вектор, представляющий произведение, и вектор, представляющий один из сомножителей, определяют треугольник, подобный треугольнику, построенному на другом векторе и векторе 1.

894. Решить графически задачи, данные в №№ 858 (5—16), 860, 889, пользуясь построением подобных треугольников.

895. Из теоремы, устанавливающей зависимость между 1) модулями, 2) аргументами сомножителей и произведения, вывести правило деления одного комплексного числа на другое.

896. Пользуясь выведенным правилом, выполнить графически следующие деления:

$$1)\ \frac{5}{1+2i};\qquad 2)\ \frac{4-3i}{2+i};\qquad 3)\ \frac{3i}{\sqrt{2}+i}.$$

Проверить вычислением точность построения.

897. Возвести $r(\cos\alpha+\sin\alpha)$ в квадрат (по форм. задачи 890); как велик 1) модуль, 2) аргумент полученного результата?

898. Вычислить графически:

$$1)\ (1{,}5+i)^2,\qquad 2)\ \left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2.$$

899. Число $a+bi$ представлено в виде вектора; представить графически $\sqrt{a+bi}$.

Пояснение. Модуль $\sqrt{a+bi}$ представляет среднее геометрическое между 1 и модулем $a+bi$; как велик аргумент $\sqrt{a+bi}$ сравнительно с аргументом $a+bi$?

900. Найти построением значения выражений:

$$1)\ \sqrt{5+12i};\qquad 2)\ \sqrt{3+4i};\qquad 3)\ \sqrt{3{,}75+2i}.$$

Проверить вычислением точность результата, полученного построением.

901. Вычислить:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\gamma+i\sin\gamma),$$

сперва вычислив произведение двух сомножителей и умножая затем полученный результат на третий сомножитель.

902. 1) Пользуясь методом полной индукции, показать, что вообще

$$(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)\dots(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n)=$$
$$=\cos(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n).$$

2) Составить словесное выражение этой теоремы.

903. Вычислить возможно проще:

1) $(\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ)(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)$;
2) $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$;
3) $(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$;
4) $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^2$;
5) $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$;
6) $(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$;
7) $(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ)(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$;
8) $(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)^3$.

904. Доказать на основании формулы задачи № 902, что теорема Муавра $(\cos\alpha + \sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ справедлива для целых значений n:

905. Пользуясь этой формулой, вычислить:

1) $(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)^9$; 2) $(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^{10}$;
3) $(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)^7$; 4) $(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)^6$.

906. Доказать теорему: если два сопряженных комплексных числа возвести в одну и ту же степень, то снова получатся два сопряженных комплексных числа.

Пояснение. 1) Принять во внимание, что $\cos\alpha - i\sin\alpha$ можно записать также в виде

$$\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha);$$

2) применить теорему Муавра.

907. Вычислить:

1) $(\cos 36^\circ - i\sin 36^\circ)^5$; 2) $\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ)^4$;
3) $(\cos 15^\circ - i\sin 15^\circ)^9$.

908. Найти выражение $[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n$. 2) Полученный результат сформулировать в виде теоремы.

909. Вычислить:

1) $(1+i)^8$; 2) $(1-i)^{10}$; 3) $(\sqrt{2}+i)^9$

(сравни задачу № 870).

910. На основании теоремы Муавра найти выражения (применяя формулу бинома Ньютона):

1) $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, 2) $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$, 3) $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$,
4) $\sin 5\alpha$ и $\cos 5\alpha$, 5) $\sin 7\alpha$ и $\cos 7\alpha$, 6) $\sin 10\alpha$ и $\cos 10\alpha$.

911. При действительном значении основания x под выражением x^{-n} разумеется число, обратное x^n; приняв это равенство за определение x^{-n} и при комплексных значениях основания x, преобразовать выражение

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-n} = \frac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n}$$

умножением числителя и знаменателя правой части на $(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n$ и показать таким образом, что теорема Муавра справедлива и для целых отрицательных значений n.

912. Вычислить:

$$1)\ (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^{-6}, \qquad 2)\ (\cos 45^\circ + i\sin 35^\circ)^{-3},$$
$$3)\ (\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ)^{-5}.$$

В примере 3 преобразовать основание, как указано в примечании к задаче № 906.

913. 1) Пользуясь формулой Муавра, найти такое число (с модулем 1) $\cos\varphi + i\sin\varphi$, чтобы

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

2) Показать на основании периодичности функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, что общее выражение φ имеет вид

$$\varphi + \frac{\alpha + k\cdot 360^\circ}{n}$$

и что

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[n]{\cos\alpha + i\sin\alpha} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{1}{n}} = \\ &= \cos\frac{\alpha + k\cdot 360^\circ}{n} + i\sin\frac{\alpha + k\cdot 360^\circ}{n} \end{aligned}\right\}$$

где k может иметь любое целое значение (положительное, отрицательное или равное нулю).

3) а) Какое значение принимает правая часть равенства при $k = n,\ n+1,\ n+2,\ldots$? б) Сравнить эти значения с теми, которые получаются при $k = 0,\ 1,\ 2\ldots$ в) Показать таким образом, что

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-n}$$

имеет не более и не менее как n различных значений.

4) а) Какую фигуру определяют геометрические представления этих n значений? б) Выяснить свойства этой фигуры.

914. 1) Вычислить все значения:

а) $\sqrt[4]{\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ}$, б) $\sqrt[3]{\cos 13^\circ 5 + i \sin 135^\circ}$,
в) $\sqrt[5]{\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ}$, г) $\sqrt[6]{\cos 72^\circ - i \sin 72^\circ}$,
д) $\sqrt[3]{\cos 22^\circ 30' + i \sin 22^\circ 30'}$, е) $\sqrt[5]{\cos 69^\circ - i \sin 69^\circ}$.

2) Проверить результаты решения этих задач построением (выбирая для изображения единицы подходящий масштаб).

915. Решить двучленное уравнение $x^3 - 1 = 0$ или $x^3 = 1$, принимая во внимание, что $1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$, и применяя формулу Муавра. Получить тот же результат, разлагая на множители выражение $x^3 - 1$. Построить корни этого уравнения.

916. Показать, что, если корень двучленного уравнения $x^n - 1 = 0$ равен α, то любая целая степень этого корня α^k является также корнем этого уравнения.

917. Решить уравнения:

1) $x^4 - 1 = 0$, 2) $x^5 = 1$, 3) $x^6 = 1$, 4) $x^{12} = 1$, 5) $x^{10} = 1$.

Возводя корни данных уравнений в последовательные целые степени, выяснить, какие корни их являются первообразными, какие нет (степени первообразного корня дают полную систему решений уравнения).

918. Решить уравнения:

1) $x^3 = 27$, 2) $x^4 = 16$, 3) $x^5 = 3125$, 4) $x^6 = 64$,
5) $x^3 = 2$, 6) $x^3 = -1$, 7) $x^5 = 5$, 8) $x^4 = -1$.

919. Дать в общей форме решения уравнения $x^n = 1$ (т.-е. дать все значения n-го корня из единицы).

920. Решить уравнение $x^n - a = 0$ на основании того, что:

при $a > 0$ $x = \sqrt[n]{a \cdot 1} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{1} = a^{\frac{1}{n}}\,(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)^{\frac{1}{n}}$,

при $a < 0$ $x = \sqrt[n]{-a \cdot -1} = \sqrt[n]{-a}\,(\cos 180^\circ + i 180^\circ)^{\frac{1}{n}}$,

при a комплексном $x = \sqrt[n]{|a| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)} =$

$$= \sqrt[n]{|a|}\,\sqrt[n]{\cos\alpha + i \sin\alpha},$$

где $|a|$ означает модуль a.

921. Сколько n-х корней из единицы (ср. задачу 919) оказываются действительными числами, если 1) n четное число, 2) n — нечетное?

922. Почему комплексные значения корней из единицы оказываются попарно сопряженными. (Следует обратить внимание на то, что получится, если в правой части k заменить через $n-k$, и затем сравнить с результатами 913.)

923. Выяснить, на основании решения задачи 920, почему корень четной степени из отрицательного числа не может иметь действительного значения.

924. Выяснить, указав соответствующее построение, почему задача о решении двучленного уравнения сводится к делению окружности на равные части.

925. С какой геометрической задачей связано последовательное построение корней уравнений:

1) $x^6=1$; 2) $x^{12}=1$; 3) $x^{24}=1$; 4) $x^{48}=1$ и т. д.?

926. Найти графически все значения:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt[6]{i}$;
4) $\sqrt[3]{8}$; 5) $\sqrt[4]{-625}$; 6) $\sqrt[5]{-243}$.

927. Вычислить: $\sqrt[3]{-11-2i}$ (представляя подкоренное число в тригонометрической форме и применяя таблицы значений тригонометрических функций (стр. 550).

928. Вычислить все значения:

1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sqrt[6]{i}$; 3) $\sqrt[3]{2+3i}$;
4) $\sqrt[6]{9-8i}$; 5) $\sqrt[4]{-3-5i}$; 6) $\sqrt[6]{-3+i\sqrt{2}}$

929. Найти все корни следующих двучленных уравнений:

1) $x^3=7$; 2) $x^3+10=0$; 3) $x^5=5$;
4) $x^6=10$; 5) $x^8=2$; 6) $x^{10}=10$;
7) $x^3=i$; 8) $x^4=i$; 9) $x^2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$;
10) $x^3=1+i$; 11) $x^4=1+i$; 12) $x^2=1-i$.

Область чисел, изучаемых в алгебре, может быть расширена введением комплексных чисел.

Комплексное число представляет соединение двух чисел, образованных при помощи двух различных *единиц.*

Одна из этих единиц отождествляется с действительной единицей, из которой образованы все действительные числа. Другая единица обозначается посредством буквы *i* и называется *„мнимой“* единицей.

1) Число, образованное соединением n мнимых единиц, обозначается посредством ni:

$$\overbrace{i+i+i+\ldots+i}^{n \text{ раз}}=ni$$

2) $ai+bi=(a+b)i$

3) Связь мнимой единицы с действительной: $i^2=-1$.

4) Соединение a действительных единиц с b мнимыми единицами обозначается посредством $a\cdot 1+bi$ или короче $a+bi$ и называется комплексным числом.

5) Определение равенства двух комплексных чисел:

$$a+bi=a'+b'i \text{ лишь при } a=a' \text{ и } b=b'$$
$$a+bi=0 \text{ лишь при } a=0,\ b=0.$$

6) Определение суммы двух комплексных чисел:

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i.$$

7) Определение произведения двух комплексных чисел

$$(a+bi)\ (a'+b'i)=(aa'-bp')+i\,(ab'+a'b).$$

Определения суммы и произведения двух комплексных чисел даются в указанных выше формах в виду того, что при наличности первого из этих определений сумма двух комплексных чисел получается по правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов для действительных чисел, если принимать i не за мнимую единицу, а за некоторый числовой коэффициент, при наличности же второго определения произведение двух комплексных чисел получается по правилу перемножения двучленов, образованных из действительных чисел (как если бы i было некоторым числовым коэффициентом), при чем i^2 заменяется через -1.

Принцип, положенный в основу определения действий над комплексными числами (нетрудно видеть, что он применялся и раньше при определении действий с нулем, отрицательными, дробными и иррациональными числами) и заключающийся в том, что при определении действий для новых чисел эти определения даются в такой форме, что формулы преобразований алгебраических выражений, справедливые при натуральных значениях входящих в них букв (выражающие так называемые *законы* действий), остаются справедливыми и при значениях букв, равных новым числам, называется *принципом перманентности.*

Область чисел, включающая числа действительные, мнимые и комплексные, называется замкнутой, потому что в ней все прямые и обратные действия (за исключением не имеющих смысла деления на 0 и извлечения 0-го корня) приводят к числам той же числовой области.

ОТДЕЛ ВОСЬМОЙ.

ДЕСЯТАЯ ГЛАВА.

Рациональные целые и дробные функции.

§ 1. Пределы.

930. Дан ряд чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ и т. д.

а) образовать суммы, пользуясь следующим обозначением:

$$s_1 = 1;\ s_2 = 1 + \frac{1}{2};\ s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4},\ s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

и т. д.

Вычислить значение этих сумм;

б) Вычислить разности $2 - s_1$; $2 - s_2$; $2 - s_3$ и т. д.

Дать общий вид выражения разности.

931. В выражении:

$$S_k = 2 - \frac{1}{2^{k-1}}$$

указать постоянное число и переменные числа.

Какая существенная разница между этими переменными?

932. Возможно ли указать число, меньше которого не может быть $\frac{1}{2^{k-1}}$ при условии безграничного возрастания числа k?

933. Может ли то же выражение при каком-либо из значений k обратиться в нуль?

934. Каким условиям должна удовлетворять величина, чтобы ее можно было назвать бесконечно-малой.

935. Дано выражение $\frac{1}{1-x}$, где x принимает значения $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ и т. д. Можно ли указать число, больше которого не может сделаться это выражение?

Какая величина называется бесконечно-большой?

936. Может ли выражение S_k в задаче 931 при каких-либо условиях достичь значения 2.

Что называется пределом?

937. Показать, что число, выражающее длину окружности, можно рассматривать как предел чисел, выражающих длины периметров многоугольников с одинаковым числом сторон—одного вписанного, другого описанного около данной окружности.

938. а) При каком значении x может иметь место неравенство

$$y < \frac{x}{n},$$

если y есть величина бесконечно-малая, а n некоторая конечная величина.

б) Каким числом изобразится предел бесконечно-малой величины?

939. Показать, что сумма n бесконечно-малых величин, при конечном значении n, есть величина бесконечно-малая.

940. Доказать, что разность бесконечно малых величин есть величина бесконечно-малая.

941. Полагая в задаче 939 $E = E_1 = E_2 = \cdots = E_{n-1}$, показать, что произведение бесконечно-малой величины на конечную есть величина бесконечно-малая.

На основании каких соображений произведение конечной величины на бесконечно-малую должно оказаться величиной бесконечно-малой?

942. Основываясь на результате предшествующей задачи и на основном соотношении между элементами деления, показать, что $\frac{E}{K}$ = бесконечно-малой величине.

943. Что делается с частным, если при постоянном значении делимого делитель убывает?

Что будет с частным, если при тех же условиях делитель безгранично убывает?

Какой величиной изобразится частное от деления конечной величины на бесконечно-малую?

Чему равно частное $\frac{k}{0}$, где k есть величина постоянная?

944. 1) Если $x = A + \varepsilon$, где x переменная, A постоянная и ε бесконечно-малая величина, и $y = B + \varepsilon_1$, то показать, что $x + y = (A + B) + \varepsilon_2$, где ε_2 есть тоже некоторая бесконечно-малая величина.

2) Доказать, что $x - y = (A - B) + \varepsilon$.

3) а) Доказать, что $xy = AB + \varepsilon$.

б) Распространить задачу а) на любое конечное число сомножителей.

в) Полагая $x = y = z$ и т. д., установить теорему о пределе степени.

4) Пользуясь равенством

$$\frac{x}{y} = \frac{A}{B} + \frac{A+\varepsilon}{B+\varepsilon_1} - \frac{A}{B},$$

установить теорему о пределе частного.

§ 2. Функции первой и второй степени. Производная.

945. Построить графику функции $y = kx + b$ (например, при $k = 2$, $b = 1$); вычислить значение функции при $x = 1$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$. Вычислить **приращения функции** y: $y_1 - y$; $y_2 - y$, $y_3 - y$, соответствующие **приращениям независимой переменной** $x_1 - x = 1$, $x_2 - x = 2$, $x_3 - x = 3$, если под y разуметь значение, соответствующее значению независимой переменной $x = 1$. Чему равны значения отношений: $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, $\frac{y_2 - y}{x_2 - x}$, $\frac{y_3 - y}{x_3 - x}$? На основании графики функции объяснить тот факт, что значения этих отношений одинаковы. Вычислить значение этого отношения для произвольных значений x_1 и x ($x_1 \neq x$). Какой геометрический смысл имеет найденное отношение приращений?

946. Построить графику функции $y = x^2$. Полагая $x = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, вычислить значения **отношений приращений**: $\frac{y_3 - y}{x_3 - x}$, $\frac{y_2 - y}{x_2 - x}$, $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$; построить на чертеже точки с координатами (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); соединить точку (x, y) с остальными построенными точками прямыми и указать геометрический смысл отношения приращений; почему значения этих отношений оказываются различными?

Найти общее выражение $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ **отношения приращения функции** $y = x^2$ **к приращению независимой переменной**, сокращая выражение $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ на разность $x_1 - x$.

947. Подобным же образом найти выражение отношения приращения функции к приращению независимой переменной $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ для функций:

1) $y = x$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 2x + 3$; 4) $y = 2x - 3$;
5) $y = 2\pi x$; 6) $y = 2x^2$; 7) $y = \frac{1}{2}x^2$; 8) $y = x^2 + 2$.

948. Определить отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ функции $y = x^2$ для точки, абсцисса которой $x = 3$. Абцисса другой точки получает последовательно значения $x_1 = 0$; 1; 2; 2,9; 2,99;... Вычислением и, насколько окажется возможным, на чертеже выяснить, к какому пределу стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если расстояние подвижной точки от неподвижной неограниченно уменьшается. Вычислить отношение приращений, принимая $x = 3$, а $x_1 = 5$; 4; 3,5; 3,1; 3,01. Показать, что и в этом случае отношение приращений стремится к тому же пределу.

949. Вычислить предел отношения приращений:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ (производную)}$$

для следующих функций (производная функция y обозначается посредством y'; производная функции $f(x)$ обозначается посредством $f'(x)$):

1) $y = x$;	2) $y = 2x$;
3) $y = ax$;	4) $y = 2\pi x$;
5) $y = x + 4$;	6) $y = -3x + 2$;
7) $y = \frac{x}{2}\sqrt{2}$;	8) $y = ax + b$;
9) $y = 2x^2$;	10) $y = -\frac{x^2}{3}$;
11) $y = ax^2$;	12) $y = 4\pi x^2$;
13) $y = x^2 + 2$;	14) $y = \frac{x^2}{2} - 4$;
15) $y = \frac{x^2}{a} + b$;	16) $y = x^2 + x$;
17) $y = x^2 - 2x + 3$;	18) $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$;
19) $y = ax^2 + bx$;	20) $y = x^2 + px + q$;
21) $y = ax^2 + bx + c$;	22) $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{b} + c$.

950. Вычисляя значение производной, определить углы, образованные при графическом изображении функций: 1) $y = \frac{x^2}{12}$, 2) $y = \frac{x^2}{10}$ с осью x, касательными проведенными в точках 0, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$, если за положительное направление касательной принять: 1) направление, в котором возрастают ординаты; 2) направление, в котором возрастают абсциссы. Воспользоваться этими данными для более точного построения графики функций.

951. Определить для функций, данных в задаче 949, тангенс угла, образованного при графическом изображении функций касательными в точках: 1) $x = 0$, 2) $x = +1$, 3) $x = -3$ с осью x, если за положительное направление на касательной и на оси x принять то, в котором возрастают абсциссы.

Minimum и maximum целой функции второй степени.

952. Начертить графики следующих функций и их производных:

1) $y = x^2$; 2) $y = x^2 + 1$;
3) $y = x^2 - 1$; 4) $y = x^2 + 2x + 1$;
5) $y = x^2 - 5x + 6$; 6) $y = x^2 + 5x + 6$;
7) $y = x^2 - x - 6$; 8) $y = x^2 + x - 6$;
9) $y = x^2 - 2x + 1$.

Как располагается графика производной в той области значений x, в которой с возрастанием x функция y а) убывает? б) возрастает? Какой знак имеет значение производной в той области изменения x, в которой функция а) убывает? б) возрастает? Почему? Где лежит точка графики производной, соответствующая наименьшему значению y? Как располагается касательная к кривой $y = f(x)$ в этой точке? Почему значение производной должно в этой точке равняться 0?

953. Проследить, как меняется с изменением (возрастанием) x тангенс угла, который образует с осью абсцисс касательная, проведенная в данной кривой $y = x^2 - 2$ в точке с абсциссой x. 1) Указать наименьшее абсолютное значение, которое получает при этом тангенс, а вместе с ним и угол, и определить, при каком значении x получается это наименьшее абсолютное значение. 2) Какое значение принимает при этом соответствующее y? 3) К какому значению стремится тангенс и к какому значению стремится угол, если x стремится к а) $+\infty$, б) $-\infty$? Все вопросы решить как вычислением, так и из рассмотрения чертежа.

954. Определить minimum (значение переменного независимого, которое соответствует наименьшему значению функции, и значение самой функции) следующих функций:

1) $y = x^2 + 2$; 2) $y = x^2 - 3$;
3) $y = 3x^2 - 1$; 4) $y = x^2 + 3x$;
5) $y = \frac{x^2}{4} + 2x$; 6) $y = 3x^2 - x$;
7) $y = x^2 + 3x + 4$; 8) $y = x^2 - 4x + 2$;

9) $y = 2x^2 - \frac{x}{2} + 4$; 10) $y = 2x^2 - 8x + 1$;

11) $y = \frac{x^2}{2} + x - 17$; 12) $y = 10x^2 + 10x + 7$;

13) $y = (a - x)^2 + (b + x)^2$; 14) $y = (9 - 3x)^2 - (1 + 2x)^2$;

15) $y = (a - x)(b - x)$; 16) $y = (x + a)(x + b)$.

955. Какое соотношение имеется между коэффициентами функции

$$y = x^2 + px + q$$

и значениями m и n координат точки, в которой функция достигает своего minimum (вершина параболы)?

956. Какое соотношение имеется между коэффициентами функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

при $a > 0$ и значениями m и n координат точки, в которой функция достигает своего наименьшего значения?

957. 1) В функции

$$y = x^2 + px + q$$

заменить независимую переменную x посредством x', где $x = x' + m$. Какое значение следует придать m, чтобы полученная функция переменной x' не содержала члена с первой степенью независимой переменной? 2) Какой геометрический смысл имеет такое параллельное перемещение системы координат, соответствующее подстановке $x = x' + m$, где m имеет найденное выше значение? Где лежит вершина параболы в преобразованной системе координат? Как располагаются относительно начала в этом случае точки пересечения кривой с осью x'?

958. Какие значения должен имет коэффициент p функции второй степени $y = x^2 + px + q$, если minimum ее соответствует значению x: 1) $x_m = 2$, 2) $x_m = -3$, 3) $x_m = 0$, 4) $x_m = a$. Написать для каждого случая общее выражение функции.

959. Какой вид (т. е. каковы значения коэффициентов p и q) имеет функция второй степени

$$y = x^2 + px + q,$$

minimum которой имеет место при

1) $x_m = 1$ и $y_m = -3$; 2) $x_m = 0$ и $y_m = -2{,}5$;

3) $x_m = +1{,}5$ и $y_m = +2$; 4) $x_m = p$ и $y_m = q$?

960. Исследовать, какое соотношение имеет место между дискриминантом уравнения $x^2+px+q=0$ и минимальным значением функции

$$y=x^2+px+q.$$

961. Чтобы определить minimum функции второй степени

$$y=x^2+px+q,$$

поступают следующим образом: решают уравнение x^2+px+ $+q-y=0$ относительно x и приравнивают дискриминант этого уравнения нулю. Обосновать правильность такого приема и показать на графике, какой геометрический смысл имеет такое обращение дискриминанта в 0.

962. Уравнение $x^2+px+q=0$ можно решить графически, пересекая параболу $y=x^2$ прямой $y+px+q=0$. Какое неравенство или равенство должно существовать между p и q, чтобы парабола и прямая имели: 1) две общих точки, 2) одну, 3) не имели ни одной общей точки? Показать, что в случае одной общей точки прямая является касательной к данной параболе.

963. По графикам определить точки, в которых производные следующих функций получают значение 0:

1) $y=-\frac{x^2}{4}$; 2) $y=-2x^2+3$;

3) $y=-x^2+2x-1$; 4) $y=-ax^2+bx+c$ при $a>0$;

5) $y=(8-2x)^2-(1-3x)^2$; 6) $y=(x-a)(b-x)$.

Как следует назвать в этом случае то значение функции, которое соответствует обращению производной в 0?

964. Во скольких точках ось x пересекает графику функции

$$y=-ax^2+bx+c,$$

если a есть положительное число, и если значение maximum ее: 1) положительно, 2) равно нулю, 3) отрицательно?

965. Какой вид имеет функция второй степени

$$y=-x^2+px+q,$$

если она достигает своего maximum при значении:

1) $x_m=+1$, 2) $x_m=-3$?

966. При каких значениях и какого из коэффициентов целая функция второй степени

$$y=ax^2+bx+c$$

1) имеет minimum, 2) имеет maximum?

967. Имеет ли линейная функция maximum или minimum или нет? Почему?

968. В следующих задачах воспользоваться тем, что производная пройденного пути по времени равна скорости. При этом, конечно, путь рассматривается как функция времени.

1) Путь, пройденный свободно падающим телом, определяется формулой

$$s = \frac{1}{2}\, gt^2.$$

Определить скорость падения: 1) по истечении 1, 2) 2, 3) 3,2 секунды после начала падения ($g = 9{,}81$, если s дано в метрах, t — в секундах).

2) Путь, пройденный телом, брошенным вертикально вниз с начальной скоростью c, определяется формулой

$$s = ct + \frac{1}{2}\, gt^2.$$

Определить скорость, если $c = 12{,}5$ м в секунду: 1) через 1, 2) через $\frac{1}{4}$, через 2,5 секунды.

3) Путь, пройденный телом, брошенным вертикально вверх с начальной скоростью c, определяется формулой

$$s = ct - \frac{1}{2}\, gt^2.$$

Определить скорость тела: 1) через 3 секунды, 2) через $\frac{c}{g}$ сек. 3) Сравнить скорости в момент $\frac{c}{g} - t$ и $\frac{c}{g} + t$.

Задачи на maxima и minima.

969. 1) Какой высоты достигает тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью c, т.-е. при каком значении t выражение пути $s = ct - \frac{g}{2}\, t^2$, пройденного телом, достигнет своего maximum? Определить значение этого maximum.

2) Отрезок, в 100 м. длиною, разделить на два таких отрезка, чтобы площадь прямоугольника, построенного на этих отрезках, была наибольшая.

3) Разделить отрезок, длиною в 24 м, на такие две части, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на этих отрезках была наименьшей.

4) На какие слагаемыя следует разбить число a, чтобы произведение их было наибольшее?

5) Какой из прямоугольников с одним и тем же периметром имеет наибольшую площадь?

6) Какой из всех треугольников, сумма основания и высоты которых равны a, имеет наибольшую площадь? Как велико это значение площади?

7) Насколько следует уменьшить бо̀льшую сторону a прямоугольника и увеличить мѐньшую сторону b, не изменяя при этом периметра, чтобы площадь прямоугольника достигла своего maximum? Определить площадь нового прямоугольника и узнать, насколько она больше площади первоначального прямоугольника.

8) Узнать, для какого треугольника ABC с основанием a и с соответствующей высотой h выражение $AB^2 + AC^2$ достигает своего minimum (за независимое переменное принять один из отрезков основания).

9) Квадрат стороны треугольника, лежащей против угла α, имеет следующее выражение

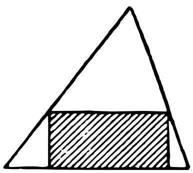
$$z = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

где b и c две другие стороны.

Исследовать, при каком значении b z получает предельное (наибольшее или наименьшее) значение, если α и c постоянны, а b рассматривается как переменное.

Решить, будет ли это предельное значение maximum или minimum, и указать геометрический смысл найденного решения.

10) Сумма двух сторон треугольника, образующих постоянный угол α, равна s. Какие значения должны иметь эти стороны, чтобы площадь треугольника достигла своего maximum?



Фиг. 19.

11) Вписать в данный круг прямоугольник с наибольшой площадью.

12) В данный круг вписать прямоугольник с наибольшим периметром.

13) В данный треугольник вписать прямоугольник с наибольшей площадью. См. фиг. 19.

14) На сторонах прямоугольника, периметр которого равен $2p$, построены: а) квадраты, б) равносторонние треугольники. Определить, при каких значениях сторон прямоугольника, площадь всей фигуры достигнет своего maximum.

15) Дан центр круга с переменным радиусом. Вне круга дана точка A, из которой проведены две касательныя AB и AC. При каком значении радиуса хорда BC будет иметь наибольшее значение?

§ 3. Целая рациональная функция третьей степени.

970. Построить графики следующих функций 3-й степени, построив предварительно возможно больше отдельных точек кривой:

1) $y = x^3 - 4$;
2) $y = (x-2)^3$;
3) $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$;
4) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;
5) $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$;
6) $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$;
7) $y = x^3 - x^2 + 1$;
8) $y = x^3 + 2x^2 + x + 2$.

971. Указать целые значения x, между которыми расположены корни (нули) следующих функций:

1) $y = x^3 - 2x^2 - 10$;
2) $y = x^3 - 3x + 7$;
3) $y = x^3 - 17x + 100$;
4) $y = x^3 - 9x + 5$;
5) $y = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 5$;
6) $y = 5x^3 - 7x^2 + 3x + 9$.

972. 1) Вычислить отношение приращения Δy функции к приращению независимой переменной Δx для функции $y = x^3$, пользуясь формулой:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

и освобождаясь от знаменателя сокращением дроби на $x_1 - x$.

2) Составить выражение производной функци $y = x^3$, полагая

$$y' = lim \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

973. Определить значение производной: 1) функции $y = x^3$, 2) функции $y = \frac{x^3}{12}$, при: а) $x = 0$, б) $x = \pm 1$, в) $x = \pm 2$, г) $x = \pm 3$ и указать расположение касательной, проведенной к кривой в каждой из этих точек.

974. Найти производныя следующих функций:

1) $y = 2x^3$;
2) $y = \frac{x^3}{3}$;
3) $y = \frac{4}{3}\pi x^3$;
4) $y = \sqrt{2}x^3$;
5) $y = ax^3$;
6) $y = a \cdot \frac{x^3}{b}$;
7) $y = x^3 + x^2$;
8) $y = ax^3 + bx$;
9) $y = x^3 - 12x + 5$;
10) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$;
11) $y = x^3 - x^2 - 16x + 10$;
12) $y = x^3 - 13x^2 - 64x + 32$;
13) $y = x^3 - 11x^2 - 16x + 98$;
14) $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 10$;
15) $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$;
16) $y = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$;
17) $y = x^3 + ax^2 + bx + c$;
18) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

975. Найти производныя следующих функций:

1) $y=x^3+x$ и $y=x^3-x$; 2) $y=x^3+3$ и $y=x^3-3$;
3) $y=2x^3$ и $y=-2x^3$; 4) $y=5x^3$ и $y=\frac{x^3}{5}$;
5) $y=(x+1)^3$, и $y=(x-1)^3$; 6) $y=(x+2)^3$ и $y=(x-2)^3$;
7) $y=x^3$ и $y=(2x)^3$.

Maxima и *minima* функций.

976. 1) Как располагается касательная к кривой, представляющей функцию в той точке, в которой функция (ордината кривой) имеет maximum или minimum? 2) Какое уравнение придется составить, если воспользоваться выражением производной для отыскания тех значений независимой переменной, при которых функция третьей степени достигает maximum или minimum? Какой степени это уравнение? Сколько существует значений независимой переменной, при которых может быть maximum или minimum функции 3-й степени? Всегда ли обращение в 0 первой производной соответствует наибольшему или наименьшому значению функции?

Чтобы ответить на поставленные вопросы, рассмотреть: а) кривую $y=x^3$, б) кривую $y=x^3+3x$, в) $y=x^3-3x$. 2) Имеет ли функция maximum или minimum, когда корни уравнения, получаемого при обращении в 0 производной: а) действительные и различные, б) действительные и равные, в) мнимые?

977. Исследовать, имеют ли следующие функции maximum или minimum; если имеют, то определить соответствующие значения независимой переменной и вычислить значения функций. Выяснить, в каком промежутке при изменении независимой переменной от $-\infty$ до $+\infty$ производная положительна? отрицательна? Как изменяется в каждом из этих промежутков самая функция? В каких промежутках она возрастает? убывает?

1) $y=2x^3+x^2$; 2) $y=x^3+x$;
3) $y=x^3$; 4) $y=x^3+3x^2+3x-7$;
5) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$; 6) $y=(x-1)(x+3)$;
7) $y=x(x^2+x+1)$; 8) $y=(x-1)(x^2+1)$;
9) $y=(x-1)(x^2-1)$; 10) $y=(x+1)(x^2+1)$;
11) $y=x^3+9x^2+27x-5$; 12) $y=x^3-6x^2+12x+3$;
13) $y=x^3+ax+b$; 14) $y=x^3+ax^2+bx$;
15) $y=(x-a)(x-b)^2$; 16) $y=(x-a)(x-b)(x-c)$;
17) $y=(x-a)^3+(x-b)^3$;
18) $y=(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3$.

978. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты p и q функции 3-й степени

$$y = x^3 + px + q,$$

если функция имеет один minimum и один maximum при

1) $x_m = \pm 3$, 2) $x_m = \pm \frac{4}{3}$. 3) $x_m = \pm t$.

(Почему положительные значения x соответствуют minimum, а отрицательные — maximum?)

979. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты функции 3-й степени

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

1) если она имеет один minimum и один maximum соответственно при $x = 2$ и при $x = -3$; 2) один minimum при $x = +1$ и один maximum при $x = -1$; 3) один maximum при $x_m = n$ и один minimum при $x_m = m$. Какому соотношению должны удовлетворять m и n, чтобы выполнилось условие 3.

980. Какой вид должно иметь выражение функции

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

если: 1) функция удовлетворяет условию 1-му предыдущей задачи и, кроме того, кривая, соответствующая функции, проходит через начало? 2) Выполнено условие 2-е предыдущей задачи и функция при $x = 1$ принимает значение $y = 1$. 3) Выполнено условие 1-е и при этом значение minimum $= 3$. 4) Выполнено условие 3-е и при этом maximum имеет значение M?

Вторая производная.

981 Представить графически функцию

$$y = x^3 - 3x + 2$$

и ее производную относительно той же самой системы координат. Ту часть график, где функции убывают с возрастанием независимой переменной, вычертить черной краской, а ту, где функция возрастает — красной. Исследовать, возрастает ли или убывает производная функция при том значении независимой переменной, при котором ее первообразная функция имеет minimum. Исследовать то же самое относительно maximum.

982. 1) Показать исследованием направления касательной, что при том значении независимой переменной, при котором функция третьей степени имеет minimum, производная возрастает с возрастанием независимой переменной. 2) Показать исследованием направления касательной, что при том значении независимой переменной, при котором функция третьей степени имеет maximum, производная функции убывает при возрастании независимой переменной.

983. 1) Составить для функции

$$y = x^3 - 3x + 2$$

вторую производную (т.-е. производную от производной). 2) Вычертить также графику второй производной так, как это указано в задаче 981. Какие части графики будут изображены черным цветом и какие — красным?

984. Показать, что при том значении независимой переменной, при котором функция имеет minimum, вторая производная — положительна, а при том значении x, при котором функция имеет maximum, вторая производная — отрицательна.

985. Какими особенностями обладают графики функции и ее первой производной в той точке, где вторая производная обращается в нуль? Составить уравнение касательной к кривой в этой точке и построить эту касательную. Как располагается кривая в этой точке относительно касательной? Почему эта точка называется *точкой перегиба*?

986. Для следующих функций вычертить их графики и графики 1-й и 2-й производных, и показать в каждом случае, что по знаку второй производной можно решить, будет ли кривая обращена своей выпуклостью вверх или вниз (в направлении возрастания ординат и в направлении их убывания). Что происходит с изгибом кривой в той точке, для которой вторая производная обращается в нуль?

1) $y = 3x^2$;	2) $y = -2x^2$;
3) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} - 1$;	4) $y = -\frac{x^2}{2} + 2x - 2$;
5) $y = x^3$;	6) $y = -x^3$;
7) $y = \frac{x^3}{6}$;	8) $y = -\frac{x^3}{6}$;
9) $y = x^3 + 3x^2 + x - 1$;	10) $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$;
11) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$;	12) $y = x^3 - 3x + 2$;
13) $y = x^3 + 3x^2 + 9x + 2$;	14) $y = (x - 1)^3$;
15) $y = (x - 2)^2(x + 2)$;	16) $y = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

987. Для следующих функций, не пользуясь их графиками, а исключительно с помощью исследования первой и второй производной, найти их maxima и minima и выяснить, при каком значении x функция имеет maximum и при каком — minimum. Коэффициенты a, b, c считаются положительными.

1) $y = ax^2 + bx$; 2) $y = -ax^2 + bx$;
3) $y = ax^2 - bx$; 4) $y = ax^2 - bx + c$;
5) $y = ax^3 + b$; 6) $y = -ax^3 + bx$;
7) $y = ax^3 + bx^2$; 8) $y = ax^3 - bx^2$.

Точки перегиба и касательные в точках перегиба.

988. Определить: 1) координаты точки перегиба и 2) положение касательной в точке перегиба (указать угловой коэффициент) для следующих кривых:

1) $y = x^3 - x^2 + 2x + 1$; 2) $y = \frac{x^3}{6} - x^2 + 4x + 16$;
3) $y = 2x^3 - 3x + 25$; 5) $y = 10x^3 - 15x^2 - 11$:
5) $y = (x-1)(x-7)(x+5)$; 6) $y = (x-6)(x+7)x$;
7) $y = (x-3)^2(x-10)$; 8) $y = (x+2)^2x$;
9) $y = (x+1)^3 + (x-1)^3$; 10) $y = (2x+1)^3 - (x-2)^3$.

989. Для следующих кривых (кубических парабол) определить: 1) положение точки перегиба, 2) угловой коэффициент касательной в точке перегиба:

1) $y = x^3 + ax^2 + bx + c$;
2) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;
3) $y = x^3 + px + q$.

990. Функции третьей степени могут быть разделены на 2 типа, при чем функции одного типа не имеют maximum и minimum, а другие имеют один maximum и один minimum. Каким неравенствам удовлетворяют коэффициенты функции

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

в том и другом случае?

Какими свойствами будет обладать функция, если неравенства, характеризующие каждый тип, перейдут в равенство?

991. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты функции 3-й степени

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

если эта функция должна иметь точку перегиба при 1) $x = 1$, 2) $x = 1\frac{1}{3}$, 3) $x = -\frac{2}{3}$, 4) $x = w$.

992. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты функции 3-й степени

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

если эта функция

1) имеет точку перегиба при $x = -1$, а касательная в точке перегиба параллельна оси x?

2) если функция имеет точку перегиба при $x = -\frac{1}{3}$, а касательная в этой точке образует с осью x угол в 45°?

993. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты функции третьей степени

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

если 1) точка перегиба и касательная в этой точке удовлетворяют первому условию предыдущей задачи и при этом функция в точке перегиба получает значение $+2$; 2) точка перегиба и касательная в этой точке удовлетворяют второму условию той же задачи и при этом кривая проходит через начало?

Геометрические приложения.

994. 1) Из всех конусов, для которых сумма радиуса основания и высоты есть величина постоянная, какой будет иметь наибольший объем?

2) В данный шар вписать прямой цилиндр с возможно большим объемом.

3) В данный шар вписать конус с возможно большим объемом.

4) В полусферу данного радиуса вписать конус так, чтобы объем его был наибольший, а вершина располагалась в центре основания.

5) Вписать в шар конус с наибольшим объемом и с вершиной, лежащей внутри шара в точке P. (Положение точки P определяется расстоянием a ее от центра шара.) Изменяя в окончательном результате расстояние a от 0 до r, рассмотреть связь полученного решения с решениями задач 3) и 4).

6) Имеется прямоугольный кусок картона длиною в a *см* и шириною в b *см* Из его углов следует вырезать квадраты так, чтобы из оставшейся части картона можно было сделать открытый ящик наибольшей вместимости. (Для вычислений $a = 25$, $b = 17$.) Определить размер этих квадратов.

Если от значения независимой переменной x мы переходим к значению x_1, то разность $x_1 - x$ называется приращением независимой переменной и обозначается либо

$$x_1 - x = \triangle x, \text{ либо } x_1 - x = h.$$

Если при значении независимой переменной x значение функции было $y = f(x)$, а при значении независимой переменной x_1 значение функции было $y_1 = f(x_1)$, то разность

$$y_1 - y = f(x_1) - f(x) = f(x + \triangle x) - f(x) = f(x + h) - h(x)$$

называется приращением функции и обозначается:

$$y_1 - y = \triangle y;\ f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle f(x).$$

Для линейной функции $y = kx + b$ отношение $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ приращения функции к приращению независимой переменной имеет постоянное значение (не зависящее ни от того, при каком значении x мы вычисляем это отношение, ни от того, какое значение имеет $\triangle x$) и равно угловому коэффициенту прямой, представляющей функцию $y = kx + b$.

Для функции второй степени $y = ax^2 + bx + c$ отношение $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ представляет величину переменную, зависящую 1) от того, каково то начальное значение x, которому дается приращение $\triangle x$, и 2) от того, какое значение мы даем приращению $\triangle x$.

Если значение $\triangle x$ неограниченно уменьшать, то $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ для функции $y = ax^2 + bx + c$ приближается к некоторому пределу, равному $2ax + b$, называемому *производной* этой функции. Производная квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ сама представляет некоторую функцию x: она зависит от x, но уже не зависит от значения приращения.

Производной (первой производной) данной функции при заданном значении x называется предел, к которому приближается отношение приращений, которые получают функция и независимая переменная при переходе последней от x к x_1, $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ при неограниченном уменьшении $\triangle x$.

$$y' = \lim_{\triangle x - 0} \left[\frac{\triangle y}{\triangle x} \right] = \lim_{x_1 - x} \left[\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\triangle x - 0} \left[\frac{\triangle f(x)}{\triangle x} \right] = \lim_{x_1 - x} \left[\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \right] =$$

$$= \lim_{\triangle x - 0} \left[\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} \right] = \lim_{h - 0} \left[\frac{f(x +)h - f(x)}{h} \right].$$

Значение производной при заданном значении x является в то же время значением тангенса угла, образуемого с осью x касательной, проведенной в соответственной точке кривой, представляющей функцию.

При тех значениях x, при которых производная положительна (касательная к кривой образует положительный острый угол с осью x), функция *возрастает* с *возрастанием* x; при тех значениях x, при которых производная отрицательна, функция убывает с возрастанием x.

Если при некотором значении x производная обращается в 0, то касательная к кривой оказывается параллельной оси x. В этом случае функция второй степени $y = ax^2 + bx + c$ достигает своего minimum (при $a > 0$) или maximum (при $a < 0$).

Производная первой производной данной функции называется *второй производною* этой функции.

В области тех значений x, при которых вторая производная положительна, кривая, представляющая функцию, обращена *выпуклостью вниз* (в сторону убывания ординат); в области тех значений, при которых вторая производная отрицательна, кривая обращена *выпуклостью вверх* (в сторону возрастания ординат).

В той точке (при том значении x), где кривая $y = f(x)$ имеет точку перегиба, вторая производная функции y равна 0.

Функция $y = f(x)$ достигает maximum при том значении x, для которого $f'(x) = 0$, а $f''(x) < 0$. Функция $y = f(x)$ достигает minimum при том значении x, для которого $f'(x) = 0$, а $f''(x) > 0$.

Функция может и не иметь ни maximum, ни minimum при $f'(x) = 0$.

§ 4. Некоторые общие свойства целой рациональной функции (многочлена) N-й степени. Теорема Безу и ее приложения.

Корни уравнения n-й степени.

995. Разделив многочлен $x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 9x - 8$ на $x - 3$, выразить делимое, т.-е. данный многочлен, через делитель, полученное частное и остаток. Какое значение должна принять правая часть написанного тождества при замене x значением 3? Как, не производя деления, можно узнать значения остатка от деления данного многочлена на $x - 3$ (принять во внимание то выражение, в которое обратится левая часть написанного тождества). Не производя деления, узнать остаток от деления данного многочлена на: 1) $x - 2$, 2) $x - 1$. Чему равен остаток в последнем случае? Что можно сказать про делимость данного многочлена на $x - 1$?

996. Обозначая частное от деления многочлена

$$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \ (a_0 \neq 0)$$

на двучлен $x - a$ через $f_{n-1}(x) = a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \ldots + b_{n-3}x + b_{n-1}$, и остаток через R, выразить многочлен $f_n(x)$ через $x - \alpha$, $f_{n-1}(x)$ и R. Почему частное от деления $f_n(x)$ на $x - \alpha$ должно быть $n - 1$ степени? Почему старший член этого частного имеет при себе коэффициент, равный a_0? Содержит ли R в своем выражении x или нет? Почему? Какой вид принимает написанное тождество при $x = \alpha$? Как выражается R через коэффициенты многочлена $f_n(x)$ и через значение α? Что можно сказать о делимости многочлена на $x - \alpha$, если результат подстановки α вместо x в выражение $f_n(x)$ обращается в 0?

997. Не производя деления, исследовать делимость выражений $x^m - a^m$ и $x^m + a^m$ на $x - a$ и $x + a$. Какой вид имеет частное при делении па $x - a$? на $x + a$?

998. Показать, что если α есть корень функции

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

т.-е. если

$$y_\alpha = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0,$$

то y делится без остатка на $y - \alpha$. (Рассмотреть для этого выражение $Y = y - y_\alpha$).

999. Показать, что, если α_1 есть корень функции $y = f_n(x)$, где $f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x_n^{-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ то $y = f_n(x) = (x - \alpha_1)f_{n-1}(x)$, где $f_{n-1}(x)$ есть некоторая функция $n - 1$ степени.

1000. В высшей алгебре доказывается теорема, что **всякое уравнение n-й степени имеет по крайней мере один действительный или комплексный корень.** На основании этой теоремы показать, что целая функция n-й степени (многочлен) 1) имеет n корней; 2) может быть представлена в виде:

$$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$

$= a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_n$ корни функции; 3) что между коэффициентами уравнения и корнями существуют соотношения (теорема Виета):

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_3}{a_0},$$

. . . .

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\ \alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

1001. 1) Какой вид примут написанные соотношения для функции:

$$y_n = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n?$$

2) Какой вид должно иметь уравнение n-ой степени, если один корень его равен 0? два корня $= 0$?

1002. 1) Показать, что если $p + iq$ есть комплексный корень уравнения с действительными коэффициентами:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

то и $p - iq$ должно быть также корнем этого уравнения. 2) Может ли быть нечетным число комплексных корней уравнения n-й степени с действительными коэффициентами или нет? Почему? 3) При каком значении n уравнение n-й степени наверное имеет один действительный корень?

1003. Составить многочлен второй степени, на который делится без остатка функция n-й степени, если одним корнем этой функции оказывается:

1) i; 2) $1 + i$; 3) $1 - i$; 4) $1 + 2i$;
5) $2 + i$; 6) $3 - i$; 7) qi; 8) $p + qi$.

1004. Составить уравнение второй степени с действительными коэффициентами, корнем которого служит:

1) i; 2) $i + 3$; 3) $2 - i$; 4) $a + bi$.

1005. Составить уравнение третьей степени с действительными коэффициентами, корнями которого служат:

1) 3 и i; 2) -1 и $i + 1$; 3) 1 и $2 - i$;
4) 0 и $1 - i$; 5) -2 и $1 + i$; 6) $-2a$ и $a + bi$.

1006. Составить уравнение четвертой степени с действительными коэффициентами, корнями которого служат:

1) i и $1 + i$; 2) $1 + i$ и $1 - 2i$; 3) $2 + i$ и $1 + 2i$;
4) $3i$ и $2i$; 5) ai и bi; 6) $a + bi$ и $p + qi$.

1007. Составить многочлен пятой степени с действительными коэффициентами, корнями которого служат: $1, 1, -1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ и который обращается в 1 при $x = 0$.

Рациональные (целые) корни уравнения n-й степени.

1008. На основании теоремы Безу и последней из формул Виета решить следующие уравнения:

1) $x^5 - x^4 - 12x^3 - 53x^2 + 65x = 0$;
2) $x^5 - x^2 = 0$;
3) $x^3 - 7x + 6 = 0$;
4) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$;
5) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$;
6) $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = 0$;
7) $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$;
8) $x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 16x^2 + 36x - 180 = 0$.

1009. Составить уравнение с действительными коэффициентами (возможно низкой степени), корнями которого служат числа:

1) 1, 2, 3;
2) 1, 2, $1 + i$;
3) 1, -1, 0, 2, -2;
4) i, 4, -3;
5) 2, $\frac{1}{2}$, 1, i;
6) 5, i, $1 + i$;
7) двухкратный корень $= 1$ и трехкратный $= -1$;
8) 3 и -3 являются трехкратным корнем каждый.

1010. Показать, что, если уравнение

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

не имеет целых корней, то оно не имеет и рациональных корней [положить $x = \frac{q}{s}$(где q и s целые числа) и, умножив члены уравнения на s^{n-1}, свести к равенству нулю суммы дроби и целого числа].

§ 5. Уравнения третьей и четвертой степени.

1011. Сколько корней имеет уравнение третьей степени? Может ли существовать уравнение третьей степени с действительными коэффициентами, все корни которого были бы мнимы? Сколько мнимых корней может иметь уравнение третьей степени с действительными коэффициентами?

1012. Написать уравнения третьей степени, которые имеют следующие корни:

1) 1, 2, 4;
2) 1, 1, -2;
3) 2, 3, -5;
4) 3, -4, -7;
5) 7, $+\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$;
6) 2, $+\sqrt{-3}$, $-\sqrt{-3}$;

7) $-8,\ 0{,}36,\ 0{,}75$; 8) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -0{,}75$;

9) $7,\ -3\frac{1}{2},\ -4\frac{1}{2}$; 10) $3\frac{3}{4},\ -\frac{2}{3},\ -1{,}5$;

11) $3,\ 1,\ i$; 12) $-5,\ 2+\sqrt{5}, 2-\sqrt{5}$;

13) $3, \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$; 14) $-1, \frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

1013. Составить уравнение третьей степени, все три корня которого равны: 1) $+5$, 2) -4, 3) w.

1014. Составить уравнение третьей степени, корни которого суть: 1) $x_1=x_2=10,\ x_3=-10$, 2) $x_1=x_2=a,\ x_3=b$.

1015. Составить соотношения между корнями и коэффициентами уравнения третьей степени (теорема Виета):

$$1)\ x^3+px+q=0;$$
$$2)\ x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0;$$
$$3)\ a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0.$$

1016. На основании теоремы Виета составить уравнение третьей степени, корнями которого служили бы:

1) $2,\ -3,\ 4$; 2) $-2,\ +3,\ -4$; 3) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}$;

4) $2,\ 1\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}$; 5) $1,\ 1+2i,\ 1-2i$; 6) $-2,\ 1+i,\ 1-i$.

1017. Угадывая один из корней уравнения, на основании теорем Безу и Виета решить уравнения:

1) $x^3-5x=12$; 2) $x^3-7x^2+50=0$;
3) $x^3-8x^2+13x-6=0$; 4) $x^3-4x^2+x+6=0$;
5) $x^3-6x^2+11x-6=0$; 6) $x^3+2x^2-23x+6=0$.

1018. Следующие целые функции представить в виде произведения линейных множителей:

1) $y=x^3+4x^2+x-6$; 2) $y=x^3-19x+30$;
3) $y=x^3+4x^2+4x$; 4) $y=16x^3-16x^2-x+1$.

1019. Составить уравнение четвертой степени, корнями которого служили бы числа:

1) $1,\ 2,\ 3,\ 4$, 2) $1,\ -1,\ 2;\ -2$; 3) $1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 2$;

4) $1,\ -1,\ i$; 5) $i,\ \frac{1+i}{2}$; 6) $2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$;

7) $\pm 2,\ \pm\sqrt{3}$; 8) $1\pm\sqrt{2},\ \frac{1+i}{2}$; 9) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

1020. Написать биквадратное уравнение, если корнями его служат:

i и $-2i$; 2) -2 и 3; 3) 1 и -4; 4) $1+i$; 5) $1-i$.

1021. Написать возвратное уравнение четвертой степени с действительными коэффициентами, корнями которого служат:

1) 5 и 3; 2) 1 и -1; 3) 2 и i; 4) $1+i$; 5) $1-i$.

1022. Определить p и q (p и q числа действительные) так, чтобы многочлен $x^4+4x^3+6x^2+px+q$ 1) делился без остатка на x^2+3x+2; делился без остатка на $x+i$.

1023. 1) Решить уравнения:

1) $x^4-3x^3=6x-18$; 2) $x^4-5x^3+2x^2+20x-24=0$;
3) $x^4-2x^3+5x^2-8x+4=0$; 4) $x^4-13x^2+48x-60=0$;
5) $x^4-6x^3+24x-16=0$; 6) $x^4-2x^3-x+2=0$;
7) $x^4-12x^3+47x^2-72x+36=0$.

Уравнения третьей и четвертой степени приведенного вида и графическое их решение.

1024. 1) В функцию

$$y=x^3+p_1x^2+p_2x+p_3$$

подставить новую переменную x', связанную с x следующим равенством:

$$x=x'+m.$$

2) Определить m так, чтобы коэффициент при x'^2 в полученном выражении функции был равен 0.

1025. Пусть уравнение

$$x^3+p_1x_2+p_2x+p_3=0$$

после преобразования принимает вид

$$x'^3+px'+q=0.$$

Какими равенствами связаны между собой коэффициенты p_1, p_2, p_3 и коэффициенты p, q?

1026. Следующие уравнения третьей степени преобразовать в уравнения приведенного вида:

1) $x^3-3x^2+5x-7=0$; 2) $2x^3-12x^2+8x-19=0$;
3) $x^3+5x^2-3x-16=0$; 4) $5x^3-7x^2+3x-8=0$.

1027. Показать, что подстановка, приводящая к уравнению приведенного вида, соответствует такому смещению соответствующей кривой, что точка перегиба оказывается на оси y.

1028. Доказать, что кривая, представляющая функцию 3-й степени, имеет центр симметрии в точке перегиба.

1029. 1) Как выражается каждый из трех действительных корней x_1, x_2 и x_3 приведенного уравнения $x^3 + px + q = 0$ через два других?

2) Каким равенством связаны между собой действительный корень x_1 и мнимые корни $x_2 = a_2 + b_2 i$, $x_3 = a_3 + b_3 i$ приведенного уравнения $x^3 + px + q = 0$?

1030. В функции $y = x^3 + ax^2 + b$ сделать замену независимой переменной посредством подстановки $x = \frac{1}{x}$. Какой вид принимает функция после такой подстановки?

1031. 1) Пользуясь подстановкой предыдущей задачи, преобразовать уравнение $x^3 + ax^2 + b = 0$ в уравнение приведенного вида. 2) Исследовать, приводит ли эта подстановка быстрее к цели, чем подстановка, указанная в № 1024. 3) В каких уравнениях 3-й степени замена, указанная в предыдущей задаче, приводит к цели?

1032. Следующие уравнения преобразовать в уравнения приведенного вида:

1) $x^3 + 5x^2 - 4 = 0$; 2) $x^3 + 2x^2 + 5 = 0$;

3) $x^3 - \frac{x^2}{3} + 6 = 0$; 4) $2x^3 + x^2 + 1 = 0$.

1033. В функции $y = x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4$, сделав замену независимой переменной при помощи подстановки $x = x' + m$, подобрать такое значение для m, чтобы коэффициент при x'^3 обратился в 0.

1034. Преобразовать следующие уравнения так, чтобы в преобразованном уравнении отсутствовал член с третьей степенью неизвестного:

1) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$;
2) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$;
3) $x^4 + 8x^3 + x - 1 = 0$;
4) $x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 2x + 2 = 0$;
5) $x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 0$.

1035. Решить графически следующие уравнения при помощи определения точек пересечения раз навсегда построенной параболы $y = x^3$ и прямой $y = kx + b$ (для решения можно воспользоваться параболой фиг. 6. Обратить внимание на различие масштабов!)

1) $x^3 + x = 10$; 2) $x^3 - x + 10 = 0$;
3) $x^3 - 7x + 6 = 0$; 4) $x^3 - 3x = 2$;

5) $x^3 + x = 1$; 6) $x^3 - x = 1$;
7) $4x^3 - 27x + 27 = 0$; 8) $x^3 + 14x - 36 = 0$;
9) $x^3 + 8x - 24 = 0$; 10) $x^3 + 10x - 50 = 0$.

1036. Показать, что уравнение

$$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$$

может быть разрешено графически пересечением параболы

$$y = x^2 + p_1x + p_2$$

с гиперболой $$yx + p_3 = 0.$$

1037. Написать уравнения параболы и гиперболы (по аналогии с предыдущей задачей), пересечением которых определяются корни уравнения:

$$x^3 + px + q = 0.$$

1038. Решить графически приемами, указанными в двух предъидущих задачах, уравнения:

1) $x^3 - x = 6$; 2) $x^3 + x + 7 = 0$;
3) $x^3 - 4x^2 + 4x = 1$; 4) $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = 0$.

1039. Показать, что корни (действительные) приведенного уравнения четвертой степени

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

могут быть найдены как абсциссы точек пересечения парабол $y = x^2$ и

$$x = -\frac{1}{q}y^2 - \frac{p}{q}y - \frac{r}{q}.$$

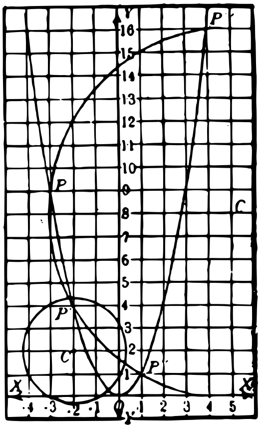
1040. Показать, что действительные корни приведенного уравнения четвертой степени

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

могут быть получены, как абциссы точек пересечения неподвижной параболы $y = x^2$ с окружностью

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2,$$

при чем постоянные a, b, ρ могут быть выражены через коэффициенты уравнения p, q, r. Найти эти выражения. [Фиг. 20 изображает решение указанным методом уравнения $x^4 - 3x^2 + 4x + 3 = 0$, $a = -2$, $b = -2$, $\rho = \sqrt{5}$.] (Почему в этом случае нельзя брать вертикальный и горизонтальный масштаб различными?)



Фиг. 20.

1041. Решить указанным приемом уравнения:

1) $x^4 - 4x^2 + 5x - 4 = 0$;
2) $x^4 - x^2 + 2x - 2 = 0$;
3) $x^4 - 6x^2 - 3x + 2 = 0$;
4) $x^4 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$.

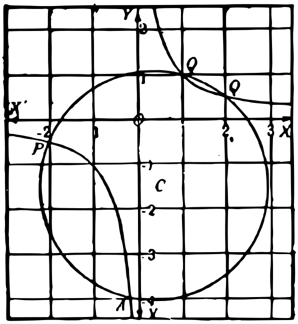
1042. Показать, что корни уравнения:

$$x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + 1 = 0$$

могут быть найдены как абсциссы точек пересечения неподвижной гиперболы $xy = 1$ с окружностью

$$x^2 + p_1x + p_2 + p_3y + y^2 = 0$$

или $\left(x + \frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{p_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_3}{2}\right)^2 - p_2.$



Фиг. 21.

(Фиг. 21 показывает применение указанного метода к решению уравнения $x^4 - \frac{3}{4}x^3 - 4\frac{1}{4}x^2 + 3x + 1 = 0$).

Решить указанным приемом уравнение № 4 задачи 1041.

1043. Показать, что, если умножить на x все члены уравнения

$$x^3 + px + q = 0,$$

то, введя новый корень $x = 0$, можно полученное таким образом уравнение решить графически, находя точки пересечения неподвижной параболы $y = x^2$ с окружностью

$$\left(x + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{q^2 + (p-1)^2}{4}.$$

1044. Решить последним приемом уравнения:

1) $x^3 + x - 2 = 0$; 2) $x^3 + 5x + 3 = 0$;
3) $x^3 - 5x + 3 = 0$; 4) $x^3 - 7x + x = 0$.

Почему при решении уравнения указанным методом окружность всегда проходит через начало координат?

1045. Показать, что решение уравнения:

$$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$$

умножением этого уравнения на $x + \frac{1}{p_3}$, может быть сведено к отысканию общих точек пересечения гиперболы $xy = 1$ с окружностью, центр которой лежит в точке $\left[-\frac{1}{2}\left(p_1+\frac{1}{p_2}\right), -\frac{1}{2}\left(p_3+\frac{p_2}{p_1}\right)\right]$ и которая проходит через точку $\left(-\frac{1}{p_2}, p_1\right)$ (сравнить с задачей 1042).

1046. Решить указанным приемом уравнение:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Исторические задачи.

1047. 1) Делийская задача об удвоении куба. Найти ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного куба с ребром a.

2) Задача Менэхма (370 г. до нашей эры): к двум данным отрезкам a и b найти пару средних пропорциональных, т.-е. найти такие два отрезка x и y, чтобы

$$a : x = x : y = y : b.$$

а) Найти x. б) Показать связь между этой задачей и задачей удвоения куба. (Скольким a должно равняться b, чтобы x представляло ребро этого куба?) в) Решить пропорцию графически, пользуясь пересечением двух конических сечений.

3) а) Дан угол α; полагая $\sin\alpha = m$ ($\sin\alpha$ может быть построен, раз дан угол α; он представляет значение половины хорды дуги 2α радиуса 1), составить уравнение, которому удовлетворяет $x = \sin\frac{\alpha}{3}$. (Для составления уравнения составить выражение $\sin\alpha$ через $\sin\frac{\alpha}{3}$ пользуясь, например, теоремой Муавра). Какой степени оказывается составленное уравнение? Почему произвольный угол не может быть разделен на три части при помощи циркуля и линейки?

б) Решение Декарта (1596 — 1650). Параболу $y^2 = x$ пересечь кругом

$$(x-2)^2 + \left(y+\frac{q}{2}\right)^2 = 2^2 + \frac{q^2}{4}.$$

в) Показать связь между координатами точек пересечения и корнями уравнения

$$y^3 = 3y - q$$

(уравнение $y^3 = 3y - q$ получится, если положить $2\sin\frac{\alpha}{3} = y$ и $2\sin\alpha = q$).

4) Задача Архимеда (287—212 до нашей эры). Шар рассечь плоскостью так, чтобы объемы полученных при сечении частей находились в определенном отношении.

а) Показать связь этой задачи с пропорцией

$$(a - x) : b = c^2 : x^2$$

и определить x. [Для получения написанной пропорции положить, что одна из частей, на которые рассечен шар, например большая) составляет часть его объема λ, т.-е. обладает объемом $\lambda \cdot {}^4/_3 \pi R^3$; λR обозначить через b, $2R$ через c и $3R$ через a, высоту этой части (если принять круг сечения за основание) через x].

б) Решить пропорцию графически пересечением параболы

$$x^2 = \frac{c^2}{a} y$$

с гиперболой

$$y(a - x) = ba.$$

Показать правильность такого решения, приписываемого Архимеду.

в) Решить пропорцию графически пересечением параболы

$$x^2 = cy$$

с гиперболой

$$y(a - x) = bc.$$

Показать правильность этого решения, принадлежащего арабам.

Если в многочлене $y = f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ вместо x подставить α, то результат такой подстановки равен остатку, который получится при делении многочлена на $x - \alpha$ (Теорема Безу).

Если результат подстановки α вместо x в многочлен $y = f_n(x)$ равен 0 (α служит корнем многочлена $y = f_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - \alpha$.

Многочлен n-й степени может быть представлен в виде: $f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ (x - \alpha_3) \ldots\ x(-\alpha_n)$, где α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_n$ представляют n корней этого многочлена. Всякое уравнение n-й степени имеет n действительных или комплексных корней.

Между коэффициентами и корнями уравнения n-й степени существуют соотношения (теорема Виета):

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

. . . .

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

Если уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексный корень вида $p + iq$, то оно имеет и корень $p - iq$.

Всякое уравнение нечетной степени (например, третьей) с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.

Если уравнение

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

не имеет целых корней, то оно и не имеет рациональных корней. Целые корни уравнения (если они существуют)

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + p_3x^{n-3} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

являются делителями свободного члена p_n этого уравнения и могут быть найдены конечным числом проб (подстановок целых чисел вместо x), так как число делителей всякого числа *конечно.*

Задачи об удвоении куба и делении произвольного угла на три части (а также задачи Менэхма и Архимеда) представляют из себя задачи *третьего порядка,* так как их алгебраическое решение сводится к *неприводимому* (не имеющему корней, рационально выражаемых через его коэффициенты) уравнению третьей степени.

Эти задачи не могут быть решены построением при помощи проведения прямых линий и окружностей (при помощи циркуля и линейки), так как при помощи циркуля и линейки разрешаются задачи, приводящие к квадратному уравнению или к уравнению высшей степени, сводимому к решению квадратных уравнений. Последнее следует из того, что решение систем уравнений:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ (x-a')^2 + (y-b')^2 = r'^2, \end{cases}$$

определяющих пересечение окружности с прямой или двух окружностей исключением одной координаты, сводится к решению одного квадратного уравнения с одной неизвестной.

§ 6. Дифференцирование целых рациональных функций.

Определение непрерывной функции.

1048. Если за значение независимой переменной x мы можем принять любое число в некотором промежутке от a до b

$$a \leq x \leq b,$$

то такое изменение переменной x называется непрерывным.

Будет ли изменение переменной x непрерывным, если x принимает 1) только целые значения? 2) если x принимает только рациональные значения?

1049. Будет ли изменение x в интервале от 0 до 1 непрерывным 1) если значением x может быть любая конечная десятичная дробь или любая периодическая дробь, целая часть которой равна 0? 2) если значением x может быть любая конечная или бесконечная дробь, целая часть которой равна 0?

В дальнейшем мы, говоря о характере изменения функции в каком-либо интервале, будем считать независимую переменную всегда изменяющейся непрерывно.

1050. Пусть функция $y = f(x)$ изображается в некотором промежутке от a до b некоторой сплошной кривой. Показать на чертеже, что при любом значении x в этом промежутке всегда можно подобрать такое число ε, что при всяком приращении независимой переменной, меньшем по абсолютному значению, чем ε, приращение функции по абсолютному значению будет меньше произвольно заданного числа η.

1051. Формулировать словами определение непрерывной функции в интервале $a \leq x \leq b$, заключающееся в том, что для всякого значения x в этом интервале:

$$|f(x_1) - f(x)| < \eta \quad \text{при} \quad |x_1 - x| < \varepsilon,$$

или

$$|f(x+h) - f(x)| < \eta \quad \text{при} \quad |h| < \varepsilon$$

1052. Показать, что следующие функции являются непрерывными функциями в интервале $-\infty < x < \infty$, т.-е. при любом значении x.

1) $y = kx$
2) $y = kx + d$
3) $y = x^2$
4) $y = x^2 + px + q$
5) $y = ax^2 + bx + c$
6) $y = x^3$
7) $y = ax^m$.

1053. Доказать теорему, что сумма двух (или нескольких) непрерывных функций есть функция непрерывная. (Указание: чтобы сумма n слагаемых имела значение меньше η, достаточно принять меры к тому, чтобы значение каждого слагаемого было меньше $\frac{\eta}{n}$.)

1054. Доказать на основании предыдущей теоремы, что целый многочлен $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ есть непрерывная функция x ($a_0 \neq 0$) в нтервале: $-\infty < x < \infty$.

1055. Доказать, что произведение двух непрерывных функций есть также непрерывная функция x.

Функция называется непрерывной в интервале от a до b, если при всяком x, удовлетворяющем неравенствам

$$a \leqq x \leqq b,$$

можно найти такое малое число ε, что при любом приращении независимой переменной, по абсолютному значению меньшем ε, приращение функции оказывается меньше (по абсолютному значению) любого наперед заданного числа η.

Функция $y = ax^n$ есть непрерывная функция x при любом конечном значении x (при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$).

Сумма двух (или нескольких) непрерывных функций есть функция непрерывная.

Целый многочлен есть непрерывная функция в интервале $-\infty < x < \infty$.

Произведение двух непрерывных функций переменной x есть непрерывная функция той же переменной.

Производная степени и постоянной.

1056. Показать, что следующие две (различные по внешнему виду) формулы выражают одно и то же определение производной (предполагая, что функция непрерывна и имеет производную) для $y = f(x)$:

$$\text{I) } y' = f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

$$\text{и II) } y' = f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h = 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

1057. Вывести выражение производной степенной функции $y = x^n$:

$$y' = nx^{n-1},$$

где под n разумеется натуральное число, пользуясь формулой I (выражающей определение производной) и сокращая дробь на $x_1 - x$ до перехода к пределу.

1058. Показать, что, если $y = af(x)$, где a есть постоянная, то $y = af'(x)$.

1059. Написать производные следующих функций (a и b обозначают постоянные, n — натуральное число).

1) $y = x^4$; 2) $y = x^7$; 3) $y = x^{13}$;
4) $y = 3x^5$; 5) $y = \frac{x^6}{6}$; 6) $y = \frac{2}{3}x^8$;
7) $y = (2x)^4$; 8) $y = \left(\frac{x}{3}\right)^3$; 9) $y = (ax)^5$;
10) $y = 7x^7$; 11) $y = 5^2x$; 12) $y = 3\cdot 7^{18}x^{18}$;
13) $y = x^n$; 14) $y = x^{n+1}$; 15) $y = x^{2n-1}$;
16) $y = ax^n$; 17) $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$; 18) $y = \frac{ax^{n-1}}{n-1}$;
19) $y = \sqrt{5}\cdot x^5$; 20) $y = \sin\frac{\pi}{2}x^n$; 21) $y = (\pi\cdot x^3)^2$.

1060. Написать первую, вторую и третью производные:

1) $y = x^5$; 2) $y = \frac{x^4}{4}$; 3) $y = \frac{x^6}{3}$;
4) $y = x^{n-1}$; 5) $y = ax^{n+1}$; 6) $y = \frac{x^n}{n}$;
7) $y = \frac{x^n}{n!}$; 8) $y = \frac{(n+1)x^{n+1}}{n+1}$; 9) $y = \frac{ax^{n-1}}{b}$.

Производная суммы и разности.

1061. Определить производные для

1) $y = x^3 + x^2$; 2) $y = x^5 + x^4$; 3) $x^n + x$;
4) $y = x^5 + 1$; 5) $y = x^5 + 7$; 6) $y = x^5 + x^4 + 100$.

1062. 1) Доказать, что, если $y = f(x) + \varphi(x)$, то

$$y' = f(x) + \varphi'(x).$$

2) Обобщить правило нахождения производной суммы функций на случай: а) разности двух функций, б) суммы трех функций, в) n-членной суммы (n есть целое конечное число).

1063. Сравнивая выражения производных:

1) $y = x^3 + 3$ и $y = x^3$; 2) $y = x^n$ и $y = x^n + a$;

где a постоянная величина, найти, чему равна производная постоянной.

Выяснить, почему **производная постоянной равна 0.** (Какое только значение может иметь приращение величины, сохраняющей одно и то же значение при любых изменениях x?)

1064. Написать производные:

1) $y = x^n + x^{n+1}$;
2) $y = ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4}$;
3) $y = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$;
4) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$;
5) $y = \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n-2} + \ldots + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{1}$;
6) $y = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!}$.

1065. Для функций, указанных в задаче 1059, вычислить вторую и третью производные.

1066. Вычислить: 1) n-ю, 2) $n-1$-ю, 3) $n+1$-ю производные функции n-й степени

$$y = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Производная произведения.

1067. Доказать, что, если $y = f(x) \cdot \varphi(x)$, то

$$y' = f(x)\,\varphi' + \varphi(x) \cdot f'(x).$$

Проверить справедливость этого правила, вычисляя сперва непосредственно производные следующих функций, а затем рассматривая эти функции как произведения:

1) $y = x^2 = x \cdot x$; 2) $y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$;
3) $y = ax^n = a \cdot x^n$; 4) $y = x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$;
5) $y = x^n = x \cdot x^{n-1}$; 6) $y = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$;
7) $y = af(x) = a \cdot f(x)$.

1068. Найти производные следующих функций:

1) $y = (x^5 + x^3 + x)^2$; 2) $y = (x^n - x^{n-2} + 1)^n$;
3) $y = (x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)^2$;
4) $y = (x^2 + a)(x^3 + b)$; 5) $y = (x^2 - 1)(x^3 + x + 1)(x^2 + 1)^2$;
6) $y = x \cdot f(x)$; 7) $y = x^n \cdot f(x)$;
8) $y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$; 9) $y = [f(x)]^2$; 10) $y = (1 + x)^4$;
11) $y = (1 - x)^5$; 12) $y = (1 + x)^n$; 13) $y = (a + bx)^n$

Смешанные задачи.

1069. 1) Построить кривые, разыскав maxima и minima функций, точки перегиба, а также последовательные целые числа между которыми лежат корни (или целые значения корней, если такие существуют):

а) $y = x^4 - 2$; б) $y = x^4 - x$; в) $y = x^4 + x^2 + 1$;
г) $y = x^4 - 3x^2 + 4$; д) $y = x^4 - 4x^2 + 4x - 1$;
е) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 10$.

2) Найти такие значения коэффициентов a, b, c, d, при которых графика функции

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

а) проходит через начало координат и имеет точки поворота (maxima или minima) при $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$;

б) проходит через начало и имеет точки поворота при $x = -1$, $x = -3$, $x = -5$;

в) проходит через начало и имеет точки поворота при $x = m_1$, $x = m_2$, $x = m_3$;

г) Какой вид примет функция, если предположить, что $m_1 = m_2 = m_3$?

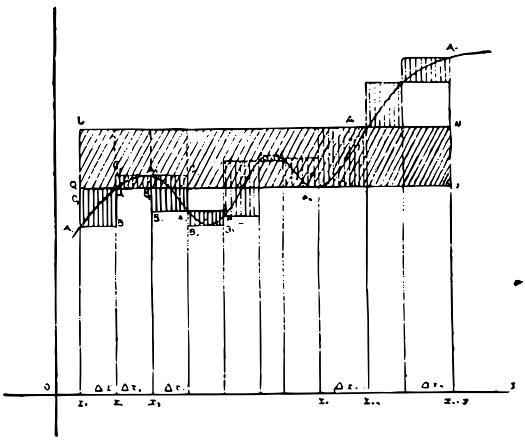
д) если кривая имеет точки перегиба а) при $y = 3$ $x = -4$, б) $x = w_1$ и $x = w_2$, в) $x = w$ и $x = -w$.

3) Исследовать кривую $y = (x^2 - 1)^2$ по отношению к пересечению с осью x, maxima и minima и точкам перегиба и найти касательную в точке перегиба.

4) Исследовать кривые:

а) $y = (x^2 - 1)^3$; в) $y = (x - 5)^3 - 80x$;
б) $y = (x^3 - 1)^2$; г) $y = (x - 4)^4 - 32x$.

§ 7. Понятие об интеграле.



Фиг. 22.

1070. Сравнить площадь S (фиг. 22), ограниченную осью x, ординатами точек A_0 и A_n и кривою A_0 A_n с площадью s_n, образованною прямоугольниками $x_0 A_0 B_1 x_1, x_1 A_1 B_2 x_2$ и т. д., вписанными в эту фигуру, и с площадью S_n, образованною прямоугольниками $x_0 C_1 A_1 x_1, x_1 C_2 A_2 x_2, x_2 A_2 C_3 x_3$ и т. д., описанными около соответственных частей площади S. Какая из этих трех площадей наименьшая? наибольшая? Почему $S_n - s_n$ меньше площади прямоугольника $LNPQ$? Что служит основанием этого прямоугольника?

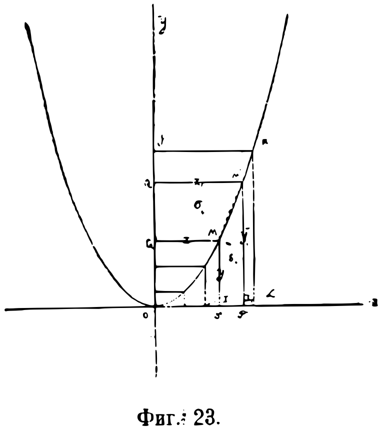
высотой? Что будет происходить с площадями вписанной и описанной около кривой фигур, если мы будем увеличивать число точек деления x_1, x_2, x_3...? Что будет происходить при этом с высотой прямоугольника $LNPQ$? Его основанием? Как будет изменяться при этом площадь прямоугольника $LNPQ$? Почему? К какому пределу будут приближаться площади вписанной и описанной фигур? К какому пределу будет приближаться площадь фигуры, ограниченной осью x, ординатами точек A_0 и A_n и ломаной, которую образуют хорды, соединяющие точки A_0 и A_1, A_1 и A_2, A_2, A_2 и A_3 и т. д.? Почему?

1071. Вычислить площадь S треугольника, ограниченную осью x, ординатой точки, абсцисса которой равна x, и прямою $y = kx$? Что будет происходить с площадью треугольника при изменении x? Написать выражение S как функции x. Найти производную S по x. Сравнить выражение этой производной с функцией $y = kx$, геометрическое изображение которой ограничивает треугольник.

1072. 1) Выразить площадь S трапеции, ограниченной осью x, прямою $y = kx$ и ординатами точек, абсциссы которых суть 1 и x, как функцию x. Найти производную S по x.

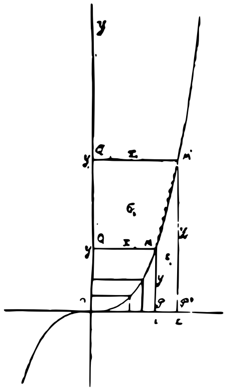
2) Выразить площадь S трапеции, ограниченной осью x, прямою $y = kx + b$ и ординатами точек, абсциссы которых суть a и x, как функцию x. Найти производную S по x.

1073. Дана парабола $y = x^2$ (фиг. 23). Найти выражения площадей трапеций $PP'M'M$ и $QMM'Q'$ через абсциссы x и x_1 точек M и M'. Чему равно отношение этих площадей? К какому пределу приближается это отношение при неограниченном уменьшении разности $x_1 - x$?



Фиг. 23.

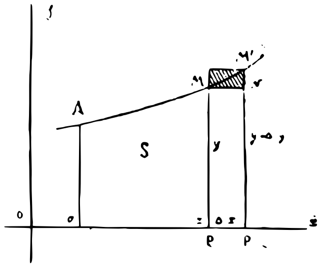
1074. Вычислить площадь прямоугольника $OGKL$ (фиг. 23) как функцию абсциссы x точки K параболы. Рассматривая площади $OGKM'MO$ и $OLKM'MO$, на которые делится прямоугольник $OGKZ$ параболой, как пределы площадей многоугольников, ограниченных осями координат, параллелями к осям, проходящими через точку K, и ломаной $O...MM'K$, вписанной в параболу, найти отношение площадей этих фигур, на которые парабола делит прямоугольник $OGKL$. (Воспользоваться результатом, полученным при решении предыдущей задачи.) Выразить площадь, ограниченную параболой, осью x и ординатой, соответствующей абсциссе x, как функцию x. Найти выражение производной площади этой фигуры. Сравнить выражение этой производной с функцией $y = x^2$ (уравнением параболы).



Фиг. 24.

1075. Дана парабола третьего порядка $y = x^3$ (фиг. 24). Найти выражения площадей трапеций $PP'MM'$ и $QMM'Q'$ через абсциссы x и x_1 точек M и M'. Чему равен предел отношения этих площадей? Найти отношение, в котором парабола $y = x^3$ делит площадь прямоугольника $OQ'M'P'O$. Найти выражение площади прямоугольника $OQMPO$ как функции x. Найти выражение площади фигуры, ограниченной параболой $y = x^3$, осью x и ординатой, соответствующей абсциссе x, как функции x. Найти выражение производной этой функции. Сравнить это выражение с уравнением параболы $y = x^3$.

1076. На основании рассмотрения фиг. 25 показать, что функция $y = f(x)$ является производной для функции S, выражающей площадь фигуры, ограниченной осью x, кривой $y = f(x)$ и ординатами, соответствующими абсциссам a и x (a постоянная). Изменится ли выражение производной, если начальную ординату, которой ограничена площадь, слева заменить другой ординатой, соответствующей какой-нибудь другой абсциссе b (b вместо a, $b < x$)? На какую площадь будут различаться друг от друга функции S и S_1 (площадь, ограниченная осью x, кривой и ординатами в точках b и x)? Представляет ли эта разность постоянную или переменную величину при неизменных a и b? Почему в таком случае производные функции S и S_1 должны быть равны?



Фиг. 25.

1077. Функция, имеющая данную функцию $y = f(x)$ своей производной, называется по отношению к этой функции — **перво-**

образной функцией и обозначается посредством

$$S(x) = f(x)dx$$

в том случае, когда является безразличным, какую ординату принять за начальную при вычислении S, т.-е. когда требуется найти лишь выражение первообразной функции. Символ $\int f(x)dx$ называется **неопределенным интегралом.** (В чем заключается его неопределенность?)

Если же имеется в виду вычисление площади, ограниченной ординатами, соответствующими определенным абсциссам a и X, то выражению S дают вид

$$S = \int_a^X f(x)dx.$$

Это выражение называется **определенным интегралом.** Если изменять X (конечную абсциссу), сохраняя a неизменной, то S окажется функцией X; поэтому вторую формулу полнее можно записать в виде

$$S(X) = \int_a^X f(x)dx.$$

Проверить дифференцированием следующие равенства, принимая во внимание, что согласно определению производная функции $\int f(x)dx$ есть $f(x)$:

1) $\int 3x^2dx = x^3 + C$. (Почему прибавлено постоянное слагаемое C?)

2) $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$; 3) $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$;

4) $\int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + C$; 5) $\int x^5dx = \frac{x^6}{6} + C$;

6) $\int \left(\frac{x^7}{8} + \frac{x^2}{3}\right)dx = x^8 + x^3 + C$;

7) $\int (x^2 - x + 1)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$.

1078. Показать, что выражение площади S, ограниченной кривою, осью x и ординатами, соответствующими абсциссам a и b, имеет вид:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

где под $F(x)$ разумеется какая-нибудь из первообразных функций для функции $f(x)$. (Чем разнятся друг от друга различные п е р в о о б р а з н ы е для данной функции $f(x)$?)

1079. Вычислить площадь, ограниченную осью x, линией

1) $y=kx$ и ординатами, соответствующими абсциссам 4 и 7;

2) $y=kx$ и ординатами, соответствующими абсциссам 5 и 5;

3) $y=kx$ и ординатами, соответствующими абсциссам 5 и — 5 [1]);

4) $y=x^2$ и ординатами, соответствующими абсциссам 0 и 4;

5) $y=x^2$ и ординатами, соответствующими абсциссам 1 и 9;

6) $y=x^2$ и ординатами, соответствующими абсциссам — 3 и 3;

7) $y=x^3$ и ординатами, соответствующими абсциссам 0 и 4;

8) $y=x^3$ и ординатами, соответствующими абсциссам 3 и 5;

9) $y=x^3$ и ординатами, соответствующими абсциссам — 4 и 4 [1]);

10) $y=x^4+x^2+1$ и ординатами, соответствующими абсциссам 0 и 5.

§ 8. Дробные рациональные функции.

Нули и бесконечности функций.

1080. Определить нули (т.-е. значения x, при которых функция y обращается в 0) следующих дробных рациональных функций:

1) $y=\frac{x-1}{x^2+1}$; 2) $y=\frac{x^2-4x}{x+1}$; 3) $y=\frac{x-5}{x^2+x+1}$;

4) $y=\frac{x^2+2x-8}{x^2-1}$; 5) $y=\frac{x^2-1}{x^2+x+2}$; 6) $y=\frac{x^3-1}{x^2+x+2}$;

7) $y=\frac{x^4-2}{x^5-1}$; 8) $y=\frac{x^2-3}{x^2+3x-1}$.

1081. В каких случаях дробная рациональная функция не имеет нулей? (Дать примеры.) Найти нули следующих дробных рациональных функций (или указать, почему их нет):

1) $y=\frac{7}{x^2-1}$; 2) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 3) $y=\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$;

4) $y=\frac{x-1}{x^2+2x-3}$; 5) $y=\frac{x+1}{x^2-5x-6}$; 6) $y=\frac{x^2-4x+3}{x^2+5x-6}$.

1082. Определить бесконечности (точки разрыва, т.-е. значения x, при которых выражение функции y не имеет смысла,

[1]) Объяснить, почему в этом случае получается странный, на первый взгляд, результат.

так как принимает вид $\frac{k}{0}$, или, как говорят, обращается в бесконечность) следующих рациональных дробных функций.

1) $y=\frac{x-3}{x^2-1}$; 2) $y=\frac{x-7}{x}$; 3) $y=\frac{x-2}{x^2-9}$;

4) $y=\frac{x-1}{x^2-x-2}$; 5) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+\frac{1}{4}}$; 6) $y=\frac{x^2-x+1}{(x^2-2)(x^2-3)}$;

7) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$; 8) $y=\frac{x-1}{x^2+x+1}$.

В каком случае дробная рациональная функция не имеет точек разрыва? (Дать примеры.)

1083. Исследовать, получают ли следующие функции бесконечное значение, и если получают, то при каких значениях аргумента:

1) $y=\frac{x}{x^2+4}$; 2) $y=\frac{x^2-2x-3}{x-3}$;

3) $y=\frac{x^2+3x-10}{x^2-4}$; 4) $y=\frac{x^2+3x-10}{x^2+10}$.

1084. Для следующих дробных рациональных функций сперва определить их нулевые значения и бесконечные значения, а затем построить графики этих функций:

1) $y=\frac{1}{x+1}$; 2) $y=\frac{1+x}{x}$; 3) $y=\frac{x}{x-1}$;

4) $y=\frac{x+1}{x-2}$; 5) $y=\frac{3x}{x\ \ 4}$; 6) $y=\frac{2x}{x+3}$;

7) $y=\frac{2x+5}{3x-1}$; 8) $y=\frac{4x-1}{3x-2}$; 9) $y=\frac{x^2+1}{x-3}$;

10) $y=\frac{x^2+2x-3}{x+1}$; 11) $y=\frac{x}{x^2-4}$; 12) $y=\frac{x-2}{x^2+4x+4}$.

1085. 1) Какое значение принимает при $x=2$ функция

$$y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}.$$

2) Какой смысл имеет символ $\frac{0}{0}$? Найти предел выражения

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} \text{ при } x=2.$$

3) Почему можно утверждать, что числитель и знаменатель в выражении дробной функции делится на $x-m$, если при $x=m$ дробная функция принимает вид $\frac{0}{0}$?

1086. Найти пределы следующих выражений:

1) $\lim\limits_{x=1} \frac{x^2-1}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x=1} \frac{x^3-1}{x-1}$; 3) $\lim\limits_{x=1} \frac{x^n-1}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x=1} \frac{x^n-1}{x^m-1}$; 5) $\lim\limits_{x=a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$; 6) $\lim\limits_{x=a} \frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}$;

7) $\lim\limits_{x=2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$; 8) $\lim\limits_{x=4} \frac{x^2-2x-8}{x^3-64}$; 9) $\lim\limits_{x=3} \frac{x^2+x-12}{2x^2-x-15}$;

10) $\lim\limits_{x=-1} \frac{x^2+x}{x^3+x+2}$; 11) $\lim\limits_{x=\frac{1}{2}} \frac{2x^2+x-1}{4x^2-1}$; 12) $\lim\limits_{x=\frac{1}{3}} \frac{3x^2+2x-1}{3x^2-x}$.

Производные. Maxima и minima.

1087. Для функции $y=x^{-1}$: 1) составить отношение приращений $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ (устраняя сокращением встречающийся в знаменателе множитель x_1-x). 2) Найти выражение производной.

1088. Какое направление имеет касательная к равносторонней гиперболе $y=x^{-1}$, в точках, абсциссы которых суть: 1) $x=1$, 2) $x=2$, 3) $x=-1$, 4) $x=\frac{1}{3}$. К какому предельному положению стремится касательная, если значение абсциссы: 1) неограниченно убывает по абсолютному значению? 2) неограниченно возрастает по абсолютному значению, принимая а) положительные значения, б) отрицательные?

1089. Вычислить производные следующих функций:

1) $y=\frac{a}{x}$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=\frac{a}{x^2}+b$;

4) $y=\frac{1}{x^3}$; 5) $y=\frac{1}{x^n}$.

1090. Показать, что формула производной функции $y=x^n$

$$y'=nx^{n-1}$$

имеет место и в том случае, если n есть целое отрицательное число.

1091. Для следующих функций написать 1-ю и 2-ю производные:

1) $y=\frac{1}{nx^n}$; 2) $y=\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$;

3) $y=\frac{a}{x}+x$; 4) $y=\frac{a}{x^n}+x^n$;

5) $y=ax+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$; 6) $y=x^2-\frac{1}{x^2}$;

7) $y=a_0+\frac{a_1}{x^1}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\frac{a_4}{x^4}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}$;

8) $y=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}+\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{4!x^4}+\ldots+\frac{1}{n!x^n}$.

1092. Определить maxima и minima следующих функций:

1) $y=9x+\frac{1}{x}$; 2) $y=x+\frac{1}{4x}$; 3) $y=x^2+\frac{16}{x^2}$;

4) $y=3x^2+\frac{2}{x}$; 5) $y=\frac{3x}{2}+\frac{8}{x^3}$; 6) $y=\frac{x^2-9}{2x}$.

1093. Показать, что, если $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, то $y'=\frac{\varphi(x)f'(x)-f(x)\varphi'(x)}{[\varphi(x)^2]}$.

1094. Убедиться в справедливости этой формулы, находя производные следующих функций: 1) непосредственно, 2) как для частных: .

1) $y=ax^{-n}=\frac{a}{x^n}$; 2) $y=x+1=\frac{x^2-1}{x-1}$;

3) $y=x-1=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$;

4) $y=x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x^2+x+1=\frac{x^n-1}{x-1}$.

1095. Найти производную функции

$$y=\frac{x+x^3+x^5}{1+x^2+x^4}$$

и пояснить полученный результат.

1096. Определить maxima и minima следующих функций:

1) $y=\frac{x^2+3}{x+1}$; 2) $y=\frac{x^2-5}{x-3}$; 3) $y=\frac{x-4}{x^2-7}$;

4) $y=\frac{x-2}{x^2+5}$; 5) $y=\frac{x^2+6x+9}{3x+4}$; 6) $y=\frac{x^2-5x+9}{x-5}$;

7) $y=\frac{9}{x-3}-\frac{1}{x-5}$; 8) $y=\frac{9}{x-1}-\frac{4}{x-6}$;

9) $y=\frac{4}{x-3}-\frac{16}{x-7}$; 10) $y=\frac{25}{7-x}-\frac{9}{3-x}$.

Смешанные задачи.

Исследование кривых.

1097. 1) Под какими углами кривая

$$y=\frac{x^3+1}{x^2-1}$$

пересекает оси координат?

2) Исследовать кривую

$$y=\frac{x^2-2x+3}{x^2-2x-3}.$$

3) Найти касательные к кривой

$$y=\frac{x-1}{x^2+1}$$

1) параллельную оси x, 2) наклоненную к оси x под углом 45°.

4) Сравнить кривые

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1};\quad y=\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

(Построить графики этих кривых, основываясь на исследовании.)

5) Найти максимальные и минимальные ординаты кривой

$$y=\frac{x^3}{6a^2}+\frac{a^2}{2x}.$$

6) Из точки $\left(\frac{4}{7}m, \frac{6}{7}m\right)$ провести касательную к равносторонней гиперболе

$$xy=m^2.$$

7) Какой из прямоугольников, имеющих одну и ту же площадь, имеет наибольший периметр?

8) Прямоугольный параллелепипед имеет объем V, а одно из его измерений $=a$. Как велики должны быть его два другие измерения, если его поверхность должна иметь минимальное значение?

9) Для изготовления цилиндрического открытого сверху литра следует затратить возможно меньше жести. Каковы должны быть высота и диаметр основания этого литра?

ОДИННАДЦАТАЯ ГЛАВА.

Простейшие иррациональные и трансцендентные функции.

§ 9. Производные простейших иррациональных функций.

1098. Составить выражение отношения приращений $\frac{y_1-y}{x_1-x}$, а также найти выражение производной для следующих иррациональных функций:

1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$; 3) $y=\sqrt[n]{x}$

(разлагая знаменатель на множители по формуле разности одинаковых степеней двух количеств и сокращая на $\sqrt[n]{x_1}-\sqrt[n]{x}$).

1099. Составить выражение производной функции:

1) $y=\sqrt{x^2}$; 2) $y=\sqrt{x^2+a^2}$; 3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

1100. Найти производные функций:

1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=a\sqrt{x}$; 3) $y=\sqrt{\pi x}$;
4) $y=\sqrt{x^3}$; 5) $y=\sqrt[3]{x}$; 6) $y=a\sqrt[3]{x}$;
7) $y=\sqrt[3]{x^4}$; 8) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 9) $y=\sqrt{1-x^2}$;
10) $y=\sqrt{x^2+1}$; 11) $y=\sqrt{(x^2+1)^3}$; 12) $y=\sqrt{x(x-1)}$.

Приложения.

1101. 1) В окружность вписан прямоугольник. а) Какую форму должен иметь этот прямоугольник, чтобы он имел наибольший периметр? б) Какую форму должен иметь прямоугольник, чтобы он имел наибольшую площадь?

2) В данный полукруг вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

3) В данный полукруг вписать прямоугольник с наибольшим периметром.

4) Доказать, что из всех треугольников с одним и тем же основанием и одной и той же высотой равнобедренный треугольник имеет наименьший периметр.

5) Найти прямоугольный треугольник, имеющий данную площадь при наименьшем периметре.

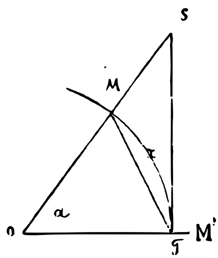
6) В какой из прямых круговых конусов с данной образующей можно вписать наибольший шар? К какой планиметрической задаче сводится эта задача?

§ 10. Тригонометрические функции.

Производная функций sinus и cosinus.

1102. Вычислить $\frac{\sin x}{x}$ при: 1) $x=0{,}1$; 2) $x=0{,}01$; 3) $x=0{,}001$.

1103. На фиг. 26 площадь сектора OTM больше площади треугольника OTM и меньше площади треугольника OTS. Записать эти неравенства в иной форме, выражая площади через радиус $MC=r$ и через дугу x (выраженную в абсолютной мере). Вывести отсюда высшую и низшую границы значения $\frac{x}{\sin x}$.



Фиг. 26.

1104. На основании соображений, приведенных в предыдущей задаче, найти:

1) $\lim\limits_{x=0}\frac{x}{\sin x}$, 2) $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin x}{x}$.

1105. Указать на основании таблицы тригонометрических функций, до какого угла, выраженного в градусах $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, совпадают по величине: 1) включительно до 2 десятичных знаков, 2) до 3 десятичных знаков.

1106. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin 2x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin x}{2x}$;

3) $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin ax}{x}$; 4) $\lim\limits_{x=0}\frac{a\sin x}{x}$;

5) $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$; 6) $\lim\limits_{x=0}\frac{a\sin bx}{cx}$;

7) $\lim\limits_{x=x_1}\frac{\sin(x-x_1)}{x-x_1}$; 8) $\lim\limits_{x=x_1}\frac{\sin 2(x-x_1)}{x-x_1}$;

9) $\lim\limits_{x=x_1}\frac{\sin\frac{1}{a}(x-x_1)}{x-x_1}$; 10) $\lim\limits_{x=x_1}\frac{\sin a(x-x_1)}{x-x_1}$.

1107. 1) Составить отношение приращений $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ для функции $y=\sin x$ (разность $\sin x_1-\sin x$ заменить произведением по формуле преобразования $\sin\alpha-\sin\beta$), а затем, перейдя к пределу (см. зад. 1104), найти выражение производной той же функции. 2) Определить производную функции $y=\sin ax$, исходя из рассмотрения отношения приращений.

1108. 1) Составить отношение приращений для функции $y=\cos x$, а затем, перейдя к пределу (см. зад. 1104), найти выражение производной той же функции. 2) Определить производную функции $y=\cos ax$, исходя из рассмотрения отношения приращений.

1109. Найти: 1) первые, 2) вторые производные следующих функций (при этом следует применить правила дифференцирования произведения, частного). Дать объяснения в тех случаях, когда решения этих задач представляют некоторые особенности:

1) $y=a\sin x$; 2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $y=\sin^2 x$;

4) $y=\sin^3 x$; 5) $y=\sin^4 x$; 6) $y=\sin^n x$;

7) $y=\sin^2 x-1$; 8) $y=x\cdot\sin x$; 9) $y=\frac{\sin x}{x}$;

10) $y=\sin\frac{\pi}{2}$; 11) $y=x\cdot\sin 2\pi$; 12) $y=\frac{1}{\sin x}$;

13) $y=\frac{1}{\sin^2 x}$; 14) $y=\cos^2 x$;

15) $y=\sin x\cdot\cos x$; 16) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$;

17) $y=\frac{1}{\cos x}$; 18) $y=\frac{x}{\cos x}$;

19) $y=\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}$; 20) $y=x\cdot\cos x$.

1110. Как располагается касательная синусоиды $y=\sin x$: 1) в точке, соответствующей $x=0$, 2) $x=\pi$, 3) $x=\frac{\pi}{2}$.

1111. Найти производную функции $y=\cos x$, пользуясь соотношением: 1) $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, 2) $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

1112. Найти графически или путем вычисления maxima и minima следующих функций:

1) $y=\sin 3x$; 2) $y=\sin\frac{x}{3}$;

3) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)$; 6) $y=a\sin(bx+c)$;

7) $y=\frac{\sin x}{x}$; 8) $y=x\cdot\sin x$.

Производные остальных тригонометрических функций. Смешанные примеры.

1113. 1) Найти производную функцию $y=\operatorname{tg}x$, а) исходя из соотношения $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, б) пользуясь формулой преобразования в произведение $\operatorname{tg}x_1-\operatorname{tg}x$.

2) Найти производную функции $y=\operatorname{cotg}x$, исходя из соотношения: 1) $\operatorname{cotg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$, 2) $\operatorname{cotg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, 3) $\operatorname{cotg}x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

1114. Найти первую и вторую производные следующих функций (если решения представляют некоторые особенности, то объяснить их):

1) $y=\operatorname{tg}x$; 2) $y=\operatorname{cotg}x$; 3) $y=\operatorname{tg}2x$;

4) $y=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$; 5) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{n}$; 6) $y=\operatorname{cotg}nx$;

7) $y = \dfrac{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin x}$; 8) $y = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$;

9) $y = a\,\mathrm{tg}\,(bx + c)$; 10) $y = a\,\mathrm{cotg}(bx + c)$;

11) $y = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; 12) $y = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$;

13) $y = \sin x - x\cdot\cos x$; 14) $y = \sin x\cdot\sin(1 - x)$;

15) $y = \mathrm{tg}x + \mathrm{cotg}x$; 16) $y = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$.

1115. Указать, какие из следующих функций удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y.$$

В каждом случае найти значение постоянной a:

1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$;

3) $y = \mathrm{tg}x$; 4) $y = \mathrm{cotg}x$;

5) $y = n\sin x + n\cos x$; 6) $y = \sin px$;

7) $y = \cos px$; 8) $y = m\sin px + m\cos qx$

Приложение к исследованию кривых.

1116. Определить точки перегиба и касательные в этих точках для следующих кривых:

1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$;

3) $y = \mathrm{tg}x$; 4) $y = \mathrm{cotg}x$;

5) $y = a\sin x$; 6) $y = \cos ax$;

7) $y = a\sin bx$; 8) $y = a\cos bx$.

1117. 1) Определить угол между касательными, проведенными к кривым $y = \sin x$ и $y = \cos x$ в точках а) $x = 0$, б) $x = \frac{\pi}{4}$, в) $x = \frac{\pi}{2}$, г) $x = \pi$, д) $x = \frac{3\pi}{2}$.

2) Найти площадь, ограниченную осью x и одной ветвью синусоиды, лежащей над осью x.

1118. 1) Определить, под каким углом пересекаются кривые тангенсов и котангенсов.

2) Определить нули, бесконечности (если они существуют), maxima и minima, точки перегиба и построить графики следующих функций:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$;

3) $y = \sin^2 x$; 4) $y = \sin x\cdot\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1119. Исследовать первую производную и дать ее графику для функции: 1) $y = \operatorname{tg} x$; 2) $\operatorname{cotg} x$.

1120. Как велик должен быть угол между двумя данными сторонами a и b треугольника, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

Задачи из физики.

1121. 1) Над серединой круглого стола (радиус его $= r$) висит лампа. Как высоко над столом следует поместить лампу, чтобы книга, лежащая на краю стола, была освещена наилучшим образом?

2) Как высоко должны быть помещены две дуговые лампы, находящиеся одна от другой на расстоянии 50 *м*, если лежащее на одинаковом расстоянии между ними место улицы должно быть освещено наилучшим образом?

3) По одну и ту же сторону от прямой линии даны 2 точки P_1 и P_2. На этой прямой найти такую точку Q, чтобы путь $\overline{P_1Q} + \overline{P_2Q}$ был minimum. (Закон отражения.) Обратить особое внимание на то, какие углы образуют с данной прямой лучи P_1Q и P_2Q.

4) (Закон преломления). Световой луч по одну сторону прямой распространяется со скоростью v_1, а по другую со скоростью v_2. Луч должен пройти из точки P_1, пересечь прямую в точке Q и по другую сторону прямой попасть в точку P_2; где должна лежать точка Q, чтобы путь $\overline{P_1Q} + \overline{QP_2}$ был пройден в наиболее короткий срок? Обратить внимание на углы, образуемые лучами P_1Q и P_2Q с прямой.

ОТДЕЛ ДЕВЯТЫЙ.

Дополнительные главы.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Приложения теории соединений и формулы Ньютона.

§ 1. Элементы теории вероятностей.

Определение вероятности.

1. Математическая вероятность осуществления некоторого события определяется равенством:

$$w = \frac{m}{n},$$

где m есть число благоприятных статочностей, а n — число всех возможных статочностей. Выразить определение вероятности словами. 1) Какое значение принимает w, если событие достоверно? 2) Какое значение получает w, если событие невозможно? 3) Как велико w, если осуществление события столь же вероятно, как и его неосуществление?

2. Показать, что в силу произвольного, хотя и весьма целесообразного, определения математической вероятности значения ее заключены между 0 и 1.

Если бы определение вероятности было дано в иной форме, например, $w = \frac{m}{m'}$, где m есть число благоприятных, а m'—число неблагоприятных статочностей, то какое значение имела бы вероятность: 1) в случае достоверности события, 2) невозможности события, 3) в случае, если осуществление события столь же вероятно, как и его неосуществление?

3. 1) Как велика математическая вероятность w' того, что событие не осуществится, если m есть число статочностей, благоприятствующих осуществлению события, а n — число всех возможных статочностей? 2) Доказать справедливость равенства $w + w' = 1$.

4. Как изменяется значение вероятности: 1) с увеличением числа благоприятных статочностей, 2) с уменьшением числа возможных статочностей (при сохранении числа благоприятных статочностей), 3) с увеличением числа возможных статочностей, 4) с увеличением числа неблагоприятных статочностей, 5) с уменьшением числа неблагоприятных статочностей.

Простейшие примеры.

5. Как велика вероятность того, что при бросании монеты выпадет серп и молот?

6. Как велика вероятность того, что при бросании одной кости (в виде куба с №№ на гранях 1, 2, 3, 4, 5, 6) выпадет: 1) 6, 2) 3 или 4, 3) ни 3 ни 4?

7. В ящике лежат 4 красных, 8 черных и 12 белых шаров. Как велика вероятность вынуть по первому разу: 1) красный шар, 2) белый шар, 3) или белый или черный, 4) не черный?

8. Как велика вероятность при одновременном бросании двух костей выкинуть: 1) две четверки, 2) одну из пар 1, 1; или 2, 2; или 3, 3, и т. д., 3) 4 и 5, 4) 1 и 6.

9. 1) Исследовать, как велика вероятность, при бросании двумя костями, выбросить сразу сумму очков в 2, 3, 4,... и т. д. до 12. 2) Представить значения графически, принимая значение суммы очков за абсциссу, а значение вероятности за ординату (масштаб ординаты взять крупнее масштаба абсциссы). 3) Выяснить симметричность полученной графики.

10. 1) Исследовать вероятность того, что при одном бросании трех костей сумма очков окажется равной 3, 4,... и т. д. до 18; воспользоваться при этом симметричностью результатов. Вычертить графику значений.

11. Монету бросают два раза подряд. Как велика вероятность, что 1) один и только один раз выпадет серп и молот, 2) по крайней мере, один раз выпадет серп и молот, 3) два раза выпадет серп и молот?

12. Кость бросают два раза подряд. Как велика вероятность того, что выпадет: 1) один раз и только один, 2) по крайней мере один раз, 3) оба раза по 6.

Опытная поверка результатов, даваемых теорией вероятностей.

13. Следующая таблица дает результаты, полученные Р. Вольфом при 20000-кратном бросании пары игральных костей, красной и белой.

	1	2	3	4	5	6
1	547	587	500	462	621	690
2	609	655	497	535	651	684
3	514	540	468	438	587	629
4	462	507	414	413	509	611
5	551	562	499	506	658	672
6	563	598	519	487	609	646

белая.

красная.

1) Составить подобную таблицу на основании теоретического расчета. 2) Составить таблицу отклонений. 3) Отметить те комбинации, которые отклоняются в ту или другую сторону от ожидаемого числа; выделить те случаи, в которых отклонение больше 50, а среди них выделить те, в которых отклонение более 100. 4) Какая комбинация очков встречается всего чаще и какая всего реже при этих «плохих» [1]) костях?

14. О. Мейснер сделал 1800 бросаний с костями из рога и получил следующие результаты.

1	2	3	4	5	6
299	295	303	307	289	307.

Составить таблицу отклонений, получаемых сравнительно с числами, даваемыми теорией вероятности.

[1]) Плохими костями называются те, у которых центр тяжести расположен не в точке пересечения его диагоналей, т.-е. в том случае, если кости не однородны.

15. При только что указанных 1800 бросаниях получено: 293 случая появления одного и того же числа два раза подряд, 50 случаев появления одного и того же числа три раза подряд, 6 случаев появления одного и того же числа 4 раза подряд. Как велики отклонения от вычисленных вероятностей?

Сложение и умножение вероятностей.

16. Показать, что если при наличности определенных условий вероятность осуществления некоторого события есть w_1, вероятность осуществления некоторого другого — w_2, то вероятность осуществления либо того, либо другого события w выражается суммой:

$$w = w_1 + w_2.$$

Доказательство основывается на установленном выше определении вероятности.

17. Как велика вероятность бросить одной костью: 1) 1 или 3 очка, 2) 1 или 3, или 6 очков?

18. Как велика вероятность вынуть из урны с 7-ю белыми 3-мя красными и 5-ю черными шарами: 1) один белый или один красный, 2) один белый или один черный, 3) один красный или один черный?

19. Выразить словами закон, записанный равенством:

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n.$$

20. Показать, что при сложении отдельных вероятностей сумма всегда $\leqq 1$. В каком случае сумма $= 1$?

21. Пусть вероятность осуществления одного события есть w_1, вероятность осуществления другого события, не зависящего от первого, есть w_2. Доказать на основании определения вероятности, что

$$w = w_1 \cdot w_2,$$

где w есть вероятность осуществления как первого, так и второго события.

22. Выразить словами законы, записанные в виде следующих равенств:

1) $w = w_1 \cdot w_2 \ldots w_n$, 2) $w + w_1^n$.

23. Как велика вероятность бросить одной костью подряд 1) сперва 1, а затем 5; 2) сперва 5 и затем опять 5; 3) сперва четное, а затем нечетное число?

24. Как велика вероятность вынуть из урны с 7 белыми, 3 красными и 5 черными шарами: 1) сперва красный, затем черный; 2) сперва черный, затем красный; 3) сперва белый, затем черный; 4) сперва белый, и затем опять белый. В каждом случае вынутый шар кладется обратно в урну.

25. Как велика вероятность вынуть из урны с 10 белыми, 6-ю красными и 4-мя черными шарами: 1) сперва один красный, затем один черный, 2) сперва один черный, затем один красный, 3) сперва один белый, затем один черный, 4) сперва белый, а затем опять один белый? Во всех случаях шары обратно в урну не кладутся.

26. Стрелок попадает в цель из 10 выстрелов 9 раз. Как велика вероятность, что он попадет 10 раз подряд?

27. Чтобы отличить те случаи, в которых вероятности следует сложить, от тех, в которых вероятности следует умножить, можно руководствоваться следующим правилом: если события осуществляются «как» (одно), «так и» (другое), то следует вероятности умножить; если же события осуществляются «либо» (одно) — «либо» (другое), то вероятности следует сложить. Пояснить это правило примерами из задач 17 — 26.

Смешанные задачи.

28. Как велика вероятность, при одновременном бросании тремя костями: 1) выбросить три различных фигуры, 2) выбросить три последовательные фигуры?

29. Монету бросают три раза. Как велика вероятность, что вскроется серп и молот: 1) один и только один раз, 2) по крайней мере, один раз, 3) три раза, 4) по крайней мере, два раза?

30. По расчету д'Аламбера вероятность того, что при двукратном бросании монеты, по крайней мере, два раза появится серп и молот, равна $\frac{2}{3}$; при этом он различает три следующих возможных случая: 1) при первом бросании серп и молот, 2) при первом бросании решка, при втором серп и молот, 3) при первом и при втором бросании решка. Найти ошибку в заключении и сравнить верное значение вероятности с значением, полученным д'Аламбером (см. зад. 11).

31. Монету бросают n раз. Как велика вероятность того, что 1) каждый раз будет вскрываться серп и молот, 2) серп и молот вскроется только один раз, 3) серп и молот вскроется, по крайней мере, только один раз?

32. В урне находится 12 белых и 8 черных шаров; какова вероятность того, что при одновременном вынимани двух шаров вынутся: 1) один белый и один черный, 2) два белых, 3) два черных, 4) как велика вероятность при одновременном вынимании 5 шаров вынуть 3 белых и два черных?

33. В урне находится 18 белых, 12 черных и 6 красных шаров. Как велика вероятность при одновременном вынутии 3 шаров вынуть: 1) только белые; 2) только черные; 3) три шара различной окраски.

34. *А* спорит с *В* на 10 копеек, что при бросании один раз двумя костями выпадет или 5, или 6, или 7 очков. Как велик риск *В*?

35. *А* спорит с *В*, что при одновременном бросании двух кубиков не выпадет ни 2, ни 3, ни 4, ни 10, ни 11, ни 12. У кого есть надежда выиграть пари?

Геометрические вероятности.

36. Как велика вероятность того, что кольцо, скользящее по метровой линейке, окажется: 1) между 0 *см* и 10 *см*, 2) между 40 *см* и 60 *см*, 3) между 60 *см* и 100 *см*.

37. Мяч, диаметр которого равен 5 *м*, бросают в решетку с квадратными отверстиями в 8 *см* шириной; толщина проволоки не принимается в расчет. Как велика вероятность, что мяч пролетит через решетку, не задев ее? При этом, конечно, предполагается, что при бросании не целятся. Сколько удачных бросаний можно при этом ожидать, например, из 100?

38. Серебряный четвертак—24 *мм* в диаметре—бросают на шахматную доску, с квадратами со стороной в 4 *см*. Как велика вероятность того, что монета упадет внутри квадрата (в крайнем случае касаясь одной или двух его сторон), при чем и в данном случае монета бросается наобум?

---

§ 2. Вычисление сложных процентов и рент.

Сложные проценты.

39. 1) Объяснить смысл выражения: «Капитал отдан из 4%? из $5\frac{1}{2}$%? из p %?»

2) Сколько процентных денег принесут в год a рублей, отданные по p %?

3) До какого размера возрастет в течение года капитал a рублей, отданный по p %? На какой множитель следует умно-

жить капитал, чтобы в произведении получить ту сумму, до которой он возрастет в течение года?

Множитель $1+\frac{p}{100}$ называется коэффициентом роста (наращения, наращенным рублем) и обозначается

$$1+\frac{p}{100}=q.$$

40. 1) Чему равен коэффициент роста, если p равно:

а) 4, б) 5, в) 3,6, г) 5,5, д) $4\frac{3}{4}$, е) $5\frac{1}{3}$, ж) $4\frac{5}{6}$.

2) Чему равна такса %, если коэффициент роста равен

а) 1,05, б) 1,04, в) 1,036, г) 1,0475, д) $1\frac{1}{20}$, е) $1\frac{1}{30}$, ж) $\frac{26}{25}$?

41. Доказать, что капитал, отданный по p %% (сложных процентов), в течение n лет возрастет до

$$b=a_n=aq^n\ ^{1)},\quad \text{где } q=1+\frac{p}{100}.$$

42. На основании формулы задачи 41 1) выразить a через a_n, n и q, 1) q через a_n, a и n, 3) n через a_n, a и q.

43. В какую сумму обратится капитал в 100 руб., отданный на сложные %% через 1, 2, 3, 4,..., 10 лет, если процентная такса равна: 1) 3%, 2) $3\frac{1}{2}$%, 3) 4%?

44. Вычертить графику возрастания наращенного капитала для значений предыдущей задачи, выбирая соответственный масштаб и целесообразно выбранную систему координат, например перемещая ось абсцисс на 100 единиц кверху.

Примеры.

45. Капитал в 1500 руб. отдан по 4%. В какую сумму он обратится через 30 лет, если считать проценты на проценты?

46. В какую сумму обращается капитал в 3750 р., отданный на 20 лет по 5%.

---

[1]) При вычислениях $\lg q$ следует для уменьшения ошибки результата взять семизначный логарифм (стр. 550) и по умножении его на n округлить до 5 (или 4) десятичных знаков.

47. Вычислить наращенный капитал в следующих задачах:

	a	p	n		a	p	n
1)	2500	$3\frac{1}{2}$	20	2)	100	4,2	18
3)	10000	$4\frac{1}{4}$	15	4)	350	3,6	25
5)	6450	4	12	6)	20000	4,5	19
7)	95624	$3\frac{3}{4}$	11	8)	785 р. 96 к.	4	20

48. В каком случае наращенный капитал окажется больше, если отдать его на 10 лет из $4^0/_0$ сложных, или на 4 года из $10^0/_0$ сложных?

49. В какую сумму обратится капитал в 25300 руб. через 10 лет: по сложным процентам, если проценты будут присчитываться к капиталу по полугодиям, и если такса равна $2^1/_2{}^0/_0$ в полугодие?

50. Как велик прирост капитала в 1000 рублей, отданного в рост на 10 лет: 1) по $6^0/_0$ годовых, 2) по $3^0/_0$ полугодовых, 3) по $1^1/_2{}^0/_0$ в четверть года, 4) по $^1/_2{}^0/_0$ в месяц, если $^0/_0$ присчитываются к капиталу: 1) через год, 2) через полгода, 3) по четвертям, 4) ежемесячно?

51. Какой вид примет формула наращенного капитала, если предположить, что капитал отдан по p сложных $^0/_0{}^0/_0$ на n лет и k месяцев, 1) если проценты присчитываются по истечении каждого года, а в последний раз по истечении k месяцев, 2) если проценты присчитываются по истечении каждого месяца?

52. Какой вид примет формула наращенного капитала отданного на n лет и t дней, если предположить, что проценты присчитываются по истечении каждого дня, и если в году считать 360 дней?

53. Какой вид примет формула наращенного капитала, если положить, что капитал лежит в банке 1 год, а проценты присчитываются через каждую $\frac{1}{m}$ долю года? Преобразовать полученную формулу, принимая $\frac{p}{100}=r$ и $\frac{r}{m}=\frac{1}{n}$. К какому пределу стремится выражение при неограниченном возрастании n (непрерывном росте) наращенного капитала, если предел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при n неограниченно возрастающем равен числу $e=2{,}718281828459045...$ (e есть так называемое основание Неперовых логарифмов — число иррациональное)?

54. Некто обязан уплатить через 5 лет сумму в 1000 рублей. Он желает сейчас же ликвидировать это обязательство. Сколько он должен заплатить, если заем сделан из $4^3/_4{}^0/_0$?

55. Придать иную форму предшествующей задаче, пользуясь понятием о дисконте (учете). Обобщить результат, называя дробь $\frac{1}{q}$ коэффициентом учета.

56. Учесть на настоящий момент сумму в 15000 рублей, которая должна быть уплачена через 10 лет, с учетом по $5^0/_0$.

57. Решить следующие задачи на дисконт (b—дисконтируемый капитал):

	b	p	n		b	p	n
1)	10000	5,5	12	2)	25000	4,75	5
3)	18750	5,25	4	4)	6200	3,6	18
5)	5600	6	2	6)	7500	5,2	9

58. Какой капитал, будучи отдан по $4^0/_0$, через 2 года обратится в 17000 руб.?

59. Какой капитал, будучи отдан по $4^1/_2{}^0/_0$, обратится через 30 лет в 30000 руб.?

60. Какой капитал, будучи отдан по $4^1/_2{}^0/_0$, в 10 лет обратится в ту же сумму, в какую обращаются 8549 р. через 7 лет при процентной таксе в $5^0/_0$?

61. Вычислить основной капитал в следующих задачах:

	a_n	p	n		a_n	p	n
1)	10727 р.	2	10	3)	303 р. 24 к.	5	19
2)	16265 р.	$3\frac{1}{2}$	18	4)	29038 р.	$5\frac{1}{2}$	10

62. По скольку % следует отдать капитал, чтобы он утроился через 20 лет?

63. По скольку % следует отдать капитал, чтобы он через 30 лет увеличился в 5 раз?

64. Вычислить p в следующих задачах:

	a_n	a	n		a_n	a	n
1)	60443 р.	40000	12	3)	38783,5 р.	25000 р.	9
2)	48381 р.	36000	10	4)	5926,7 р.	5368 р.	5

65. В какой срок 8007 рублей при $4\frac{3}{4}\%$ обратятся в 21217,6 рублей?

66. В какое время удваивается капитал при трехпроцентной таксе?

67. Найти n, если

	a	$b=a_n$	p		a	$b=a_n$	p
1)	16400	30665	$3\frac{3}{4}$	2)	9560	31000	4
3)	25000	58914	3	4)	22500	59699	5
5)	9600	33607	$4\frac{3}{4}$	6)	6000	24623,5	4

68. Во сколько времени капитал, отданный: 1) по 3% удвоится, 2) по $2\frac{1}{2}\%$ утроится, 3) по $3\frac{1}{2}\%$ увеличится в $3\frac{1}{2}$ раза.

Смешанные задачи.

69. 1) Во сколько раз увеличится капитал, отданный а) на 100 лет по 2%, б) на 24 года по $3\frac{1}{4}\%$, в) на 25 лет по 4%?

2) В уставе сберегательной кассы, платящей 3,6%, имеется параграф, что сумма, записанная на книжку, может быть переписана до истечения года в другую книжку вместе с процентными деньгами за время обращения этой суммы (без потери процентных денег). Человек, положивший в сберегательную кассу 900 рублей, чтобы увеличить свой доход, придумал такой маневр:

по истечении полугода он переменил книжку. Насколько больше он получит % денег в этом случае по сравнению с тою прибылью, которую он получил бы, если бы не менял книжки? Сколько бы он нажил лишнего, если бы проделывал этот маневр по истечении каждого месяца?

3) Сколько % прибыли принесет в год капитал, если в конце каждого месяца к нему присчитывается $\frac{1}{2}$%?

4) *A* дает *B* 25 марок на 2 года с процентами и процентами на проценты. Через 2 года *B* возвращает, кроме долга, еще 24 марки. По скольку % был сделан заем. (Из задачника Видмана 1489 года.)

5) *A* предлагал за имение 300000 рублей наличными, *B* предлагал 348000 р. с уплатой через три года, *C* предлагал 364500 р. с уплатой через 4 года. Кто из них предлагал более выгодные условия, если произвести расчет из 5% сложных, и на сколько *A* предлагал больше других? (Для решения вопроса учесть платежи *B* и *C* ко дню покупки.)

6) Некто завещал школе стипендиальный капитал в 7500 руб. с условием, чтобы выдача стипендий из %% на капитал начата была с того времени, когда завещанная сумма возрастет до 10000 рублей при 4 сложных %. Когда окажется возможным начать выдачу стипендий?

7) В городе 20000 жителей; сколько человек будет в этом городе через 30 лет, если народонаселение этого города возрастает ежегодно на $2\frac{1}{4}$%?

8) Народонаселение некоторого города, увеличиваясь ежегодно на 3%, возросло в настоящее время до 155693 человек. Сколько жителей было в этом городе 25 лет тому назад?

Задачи на ежегодные взносы в конце года.

70. 1) Во что обратится капитал a рублей, отданный в рост по p сложных % в n лет, если в конце каждого года прибавлять к капиталу или брать из него одну и ту же сумму в r рублей. Накопленный капитал выражается следующей формулой:

$$A_n = ar^n \pm r\frac{q^n - 1}{q - 1},$$

где $r = 1 + \frac{p}{100}$. Вывести эту формулу.

2) а) Выразить a, как функцию A_n, n, q, r,

б) » n, » » a, A_n, q, r,

в) » r, » » a, A_n, n, q.

г) Почему, вообще говоря, является невозможным определить q (и p)?

3) Во что обратится капитал в 100 рублей через 1, 2, 3, 4 года, отданный по: 1) 3%, 2) $3^1/_2$%, 3) 4%, если в конце каждого года прибавлять по: 1) 8 р., 2) 10 р., 3) 9 р. Дать графику роста капитала в подходящем масштабе.

4) К капиталу в 1000 руб., отданному в рост по 5%, в конце каждого года прибавляют по 100 рублей. Какая сумма получится через 10 лет?

5) Во что обратится через 20 лет капитал в 4500 руб., если его в конце каждого года увеличивать на 150 р. при $4^1/_4$%?

6) Во что обратится капитал в 10000 руб., отданный в рост по $5^1/_4$%, через 8 лет, если его в конце каждого года увеличивать на 300 руб.?

7) Какой долг от займа в 40000 руб., сделанного по 5%, останется через 10 лет, если ежегодно вносится на уплату %% и погашение 5000 руб.?

8) Заем в 4000 сделан по $4^1/_2$%. Как велик будет остаток этого долга через 8 лет, если ежегодно уплачивать по 500 руб.?

9) Капитал в 8000 руб. внесен по $5^1/_4$%. Через сколько лет получится капитал не менее 50000 руб., если в конце каждого года вносить еще по 400 руб.?

10) Арендатор ежегодно не доплачивает 300 руб. Как велик будет его долг через 7 лет, если на недоплаченные суммы насчитывается $4^1/_2$%?

11) Отец при рождении сына положил в сберегательную кассу, платящую 3,6%, 200 р. и намерен в конце каждого года вносить определенную сумму, чтобы накопить для сына, когда последнему исполнится 21 год, 3000 руб.

а) Сколько должен отец вносить ежегодно?

б) На сколько меньше пришлось бы ему платить, если бы касса давала 4%?

12) Некто оставил своим пяти детям капитал в 50000 руб., помещенный по 4%. В течение 6 лет по смерти завещателя из этого капитала опека выдавала ежегодно по 3000 р. на воспитание детей, после чего оставшаяся сумма была разделена поровну между всеми наследниками. Сколько получил каждый?

13) Заем в 3000 р., сделанный из 5%, уплачивается ежегодными взносами по 100 руб. 1) Сколько долга останется через 10 лет? 2) Как изменится результат, если заем будет сделан из 3%?

Срочные уплаты.

71. 1) Чему следует принять равным A_n в формуле

$$A_n = aq^n - r\frac{q^n - 1}{q - 1},$$

если предположить, что ежегодные выдачи по r рублей в конце каждого года исчерпают весь капитал в течение n лет?

2) Выразить при указанном предположении r, a и n как функции остальных величин.

3) Какую сумму можно проживать ежегодно, чтобы капитала в 30000 руб. хватило на 20 лет ($p = 4\%$)?

4) Капитал в 50000 руб. положен в банк по $4\frac{1}{2}\%$. На сколько времени хватит этого капитала, если ежегодно расходовать по 4000 руб.?

5) Через сколько лет будет израсходован капитал в 16000 руб., приносящий 4%, если в конце каждого года брать по 1000 руб.?

6) Некто должен уплатить долг в 50000 руб., сделанный по 4%. Ежегодно он уплачивает вместе с процентными деньгами по 10000 руб. в год. Через сколько лет долг будет уплачен и сколько придется уплатить в последний год?

7) Некто хочет в течение 8 лет уплатить долг в 20000 руб., взятый по $4\frac{1}{2}\%$. По скольку рублей он должен уплачивать ежегодно?

8) Сколько следует уплачивать ежегодно, чтобы в течение 6 лет покрыть долг в 10000 руб. вместе с процентными деньгами из 5%?

9) Заем в 250000 руб., сделанный из $3\frac{1}{2}\%$, должен быть покрыт в 25 лет. а) Как велика ежегодная уплата? б) Сколько долга останется через 12 лет? в) В какое время заем уменьшится вдвое? г) Когда останется уплатить лишь пятую долю займа?

10) а) Как велика ежегодная уплата займа в 1000000 р., заключенного по 3%, если долг должен быть погашен в 40 лет? б) Как должна быть изменена ежегодная уплата, если в 20 лет должна быть уплачена половина всего займа? в) Как изменится уплата, если в 40 лет должны быть уплачены три четверти такого же займа, заключенного по 4%?

Взносы и уплаты в начале каждого года.

72. 1) Во что обратится капитал a, отданный в рост по $p\%$, через n лет, если в конце каждого года процентные деньги причисляются к капиталу и, кроме того, в начале каждого года (начиная со второго) вносится или берется некоторая постоянная сумма r. Вывести формулу для этого случая

$$A'_n = aq^n \pm r\frac{q^n - q}{q - 1}$$

а) из формулы $A_n = aq^n \pm r\dfrac{q^n - q}{q - 1}$, б) независимо от этой формулы.

2) Если вносить некоторую сумму r в начале каждого года (считая и первый), то накопленный капитал выразится формулой (сберегательных касс)

$$b_n = r \cdot q \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Вывести эту формулу из предыдущей.

3) а) A вносит в начале каждого года, B — в конце года по r рублей, оба в течение n лет по одинаковым процентам. На сколько A накопил больше B в течение n лет? б) Пример: $a = 100$, $p = 4$, $n = 20$. в) В каком отношении увеличится разница в сбережениях, если взносы увеличить в два раза (вообще в k раз)? (Последний вопрос решить, не вычисляя.)

4) Сколько следует вносить а) в начале каждого года, б) в конце каждого года, чтобы через 25 лет накопить капитал в 25000 рублей ($p = 4$)?

5) Некто застраховал свою жизнь в возрасте 30-ти лет в 40000 руб., и с этой целью вносил в банк в начале каждого года по 900 руб.; 56 лет он умер. Сколько прибыли или сколько убытку получит банк, если расчет ведется из 4%?

6) Решить предыдущую задачу при следующих данных: страхователь в возрасте 32 лет застраховал свою жизнь в 10000 руб.; ежегодная премия равна 400 руб.; страхователь умер 49 лет, банк платит $4\frac{1}{2}\%$.

7) Некто внес в банк, платящий 4%, 5000 руб.; в начале каждого года (начиная со 2-го) он вносит еще по 500 руб. Сколько накопится по истечении 15 лет?

8) Решить ту же задачу при следующих условиях: а) 10000 руб., $3\frac{1}{2}\%$, 300 руб., 12 лет; б) 3000 руб., $3\frac{1}{4}\%$, 400 руб., 20 лет.

Начисление процентов не в годичные сроки.

73. 1) Чем следует заменить q и n в задачах 70.1), 71.1), 72.1) и 2) если начисление процентов и взносы производятся не ежегодно, а а) по полугодиям, б) каждые 3 месяца, в) каждый месяц?

2) Как велик коэффициент роста при таксе в а) 2%, б) 3%, в) 6%, если начисление процентов производится 1) ежегодно, 2) по полугодиям, 3) по четвертям и 4) помесячно?

3) Ту же задачу решить при процентной таксе а) $2{,}4\%$, б) $3{,}6\%$, в) $4{,}8\%$. г) Для таксы в $3{,}6\%$ (годовой) решить ту же задачу в предположении, что $\%\%$ присчитываются ежедневно (считая год в 360 дней).

4) Если проценты начисляются ежегодно, а взносы производятся: а) по полугодиям, б) по четвертям, в) помесячно,

то q приходится заменить через а) $q^{\frac{1}{2}}$, б) $q^{\frac{1}{4}}$, в) $q^{\frac{1}{12}}$ и n через а) $2n$, б) $4n$, в) $12n$. Объяснить, почему это так?

5) Указать, как изменятся выведенные формулы, если проценты начисляются ежегодно, а взносы производятся через каждые 2, 3,... k лет.

Ренты.

74. Если в конце каждого года приходится получать или уплачивать определенную сумму r руб., то вместо этого можно уплатить или получить единовременно a рублей. Сумма r называется членом ренты, a — стоимостью ренты. Если уплата должна производиться n лет, то имеет место равенство:

$$aq^n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

где q обозначает $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Вывести эту формулу: 1) из формулы $A_n = aq^n \pm r\frac{q^n - 1}{q - 1}$, 2) независимо от этой формулы.

2) Выразить: а) a, б) r, в) n как функции остальных величин.

г) Почему из этой формулы нельзя получить формулу для процентной таксы (в общем виде)?

3) Если рента должна уплачиваться в конце каждого года и срок окончания ренты не определен (в е ч н а я рента), то стоимость ренты определяется формулой:

$$a = \frac{r}{q - 1}.$$

Вывести эту формулу: а) из общей формулы ренты, б) исходя из того соображения, что рента в этом случае должна представлять лишь процентные деньги с внесенной суммы.

4) Если рента уплачивается не в конце, а в начале каждого года (считая и 1-й), то имеет место формула

$$aq^n = rq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Вывести эту формулу: а) из формулы $A_n = aq^n \pm r\frac{q^n - q}{q - 1}$, б) $aq^n = r\frac{q^n - 1}{q - 1}$, г) независимо от них.

5) Найти в этом случае выражения a, r, n.

6) Для вечной ренты, уплачиваемой в начале года (*praenumerando*), имеет место формула:

$$a = \frac{rq}{q - 1}.$$

Доказать ее различными способами.

7) Какую сумму следует внести из $4^1/_2{}^0/_0$, чтобы пользоваться в течение 16 лет ежегодной рентой в 1200 руб.?

8) Некто имеет право получать в течение 20 лет 800 рублей ежегодной ренты. В какую сумму он может капитализировать это право, если произвести расчет из $3^1/_2{}^0/_0$?

9) Сколько следует заплатить за ежегодную ренту в 900 р., срок которой истекает через 10 лет, если считать по $4^1/_4{}^0/_0$?

Смешанные задачи.

75. 1) За дом A дает 30000 рублей наличными, B — 35000 с уплатой через три года, C — 33000 р. с ежегодной уплатой в три срока по 11000 руб. в начале каждого года. Кто из них предлагает наиболее выгодные условия и на сколько больше, чем другие. если произвести расчет из $5^0/_0$?

2) Крестьяне одной деревни за право ловли рыбы в реке обязались уплачивать ежегодную ренту по 450 руб. в течение 30 лет. Какой единовременной уплатой они могли бы заменить эту ренту ($3^1/_2{}^0/_0$)?

3) При рождении ребенка родители желают положить в банк на $4^0/_0$ такую сумму, чтобы сын, по достижении им 20-летнего возраста, в течение 4-х лет получал в начале каждого полугодия по 500 рублей. Как велик должен быть взнос?

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Неравенства.

Свойства неравенств.

76. Даны неравенства:

$$а)\ 5 > 3,\ б)\ 11 > 7,\ в)\ -10 > -15,\ г)\ -30 > -100;$$

$$д)\ \frac{5}{17} > \frac{1}{17};\ е)\ \frac{19}{20} > \frac{2}{3};\ ж)\ \sqrt{5} > \sqrt{3}.$$

Составить для каждого из неравенств разности между числами, стоящими в его левой и правой части. К области каких чисел относятся эти разности?

77. Даны неравенства:

$$а)\ 3 < 5;\ б)\ 7 < 11;\ в)\ \frac{1}{17} < \frac{5}{17};\ г)\ \frac{2}{3} < \frac{19}{20};\ д)\ -15 < -10;$$

$$е)\ -100 < -30;\ ж)\ \sqrt{3} < \sqrt{5}.$$

Составить для каждого из неравенств разность между числами, стоящими в левой и правой части, и указать, к какой числовой области т е п е р ь относятся полученные разности.

78. Формулировать определение неравенства или равенства действительных чисел a и b в зависимости от того, какое число: положительное, отрицательное или нуль, представляет разность $a - b$.

79. Какому неравенству удовлетворяет любое положительное число?

80. Какому неравенству удовлетворяет любое отрицательное число?

81. Пользуясь результатами, полученными при решении задач 76, 77 и 78, указать, каким неравенствам будут удовлетворять разности между левой и правой частями каждого из неравенств: $a > b$ и $c < d$.

82. Установлены ли соотношения неравенства для комплексных чисел, подобно соотношению между знаком неравенства между двумя действительными числами и знаком их разности? Почему?

83. Каким знаком неравенства, не изменяя порядка букв, можно соединить:

1) x и y, если известно, что $x - y = +a$;
2) m и n, » » $m - n = -b$;
3) p и q, если $\begin{cases} p + q = +k \\ p^2 - q^2 = -m, \end{cases}$

где под буквами a, b, k, m разумеются абсолютные значения чисел.

84. Из рассмотрения тождества

$$(A - B) + (B - C) + (C - D) = A - D$$

вывести справедливость теоремы:

если $A > B$, $B > C$, $C > D$, то $A > D$.

85. Из рассмотрения тождества

$$(A \pm C) - (B \pm C) = A - B$$

вывести справедливость теоремы:

если $A > B$, то $A \pm C > B \pm C$.

Какой закон сложения действительных чисел (и вычитания) выражается этой теоремой?

86. Показать, что на основании предыдущей теоремы каждое неравенство может быть приведено к одному из двух видов: $A > 0$ или $A < 0$.

87. Показать на основании тождества

$$(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)-(B_1+B_2+B_3+\ldots+B_n)=$$
$$=(A_1-B_1)+(A_2-B_2)+(A_3-B_3)+\ldots+(A_n-B_n),$$

что если $A_1>B_1,\ A_2>B_2,\ A_3>B_3,\ldots,\ A_n>B_n$, то

$$A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n>B_1+B_2+B_3+\ldots+B_n.$$

88. Будет ли справедлива аналогичная теорема для вычитания тождеств одинакового смысла? Проверить это на рассмотрении неравенств:

$$48>35;\ 35>11;\ 18>17.$$

Как должна видоизмениться доказанная выше теорема в случае вычитания неравенств?

89. Даны неравенства:

$$15>3,\ 2>-7,\ 6<9,\ -15<-10.$$

Каким знаком неравенства связаны пары чисел

1) 45 и 9, 2) 6 и -21, 3) 18 и 27, 4) -45 и -30,

т.-е. числа, полученные от умножения членов данных неравенств на одно и то же положительное число?

90. Даны неравенства: $3<5,\ 16>11,\ -7>-10,\ 3>1$.

1) Каким знаком неравенства должны быть связаны пары чисел

-9 и -15, -32 и -22, $+28$ и $+40$, -15 и -5,

т.-е. пары чисел, полученных от умножения членов каждого из данных неравенств на одно и то же отрицательное число?

2) Что делается со знаком неравенства при умножении его членов на одно и то же отрицательное число?

91. Записать в виде неравенства результаты, полученные от умножения каждого из членов неравенства

а) $0{,}001>-500$, б) $25<31$, в) $-2>-17$

на 1) $-\frac{3}{7}$, 2) -100, 3) $-0{,}15$, 4) $-0{,}02$.

92. Доказать, что если дано неравенство $A>B$ и затем $C>0$, то $AC>BC$.

Как изменится формулировка доказанной теоремы в случае, если $C<0$?

93. Формулировать теорему для деления неравенства на одно и то же 1) положительное, 2) отрицательное число.

94. Показать, что при перемножении неравенств одинакового смысла с положительными первой и второй частью получается неравенство того же смысла.

Дать пример, из которого было бы видно, что доказанная теорема не имеет места, если предположить, что левые и правые части неравенств (все или частью) представляют отрицательные числа.

95. Показать, что при $a \neq b$, $a^2 + b^2 > 2ab$.

На основании последнего неравенства доказать, что среднее арифметическое двух неравных положительных чисел больше их среднего геометрического.

96. При каких значениях a и b имеет место неравенство $a^2 - ab > ab - b^2$?

97. Показать, что если

$$\frac{A_1}{B_1} \geqq \frac{A_2}{B_2} \geqq \frac{A_3}{B_3} \geqq \frac{A_4}{B_4} \geqq \cdots \geqq \frac{A_n}{B_n} \text{ и}$$

все B представляют числа одного и того же знака, то

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}{B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n},$$

заключено между наибольшим и наименьшим из написанных отношений.

98. Показать, что та же теорема справедлива и для выражения

$$\frac{m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3 + \ldots + m_nA_n}{m_1B_1 + m_2B_2 + m_3B_3 + \ldots + m_nB_n},$$

если все m суть положительные числа, а все B суть числа одного и того же знака.

99. Показать, что при положительных значениях букв

1) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) > 4$, 2) $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$, 3) $x + \frac{1}{x} > 2$.

При каких значениях букв неравенства переходят в равенства?

Решение неравенств.

100. Даны неравенства

$$1)\ x + 5 > x;\quad 2)\ (y-2)^2 + a > (y-2)^2;$$
$$3)\ (x+y-z)^3 + (x+y-z)^2 + 1 > (x+y-z)^3.$$

Можно ли в этих неравенствах переменным x, y и z давать любые значения, не изменяя смысла этих неравенств?

101. Даны неравенства:

$$1)\ x + 5 > 12;\quad 2)\ x + 1 < 6;\quad 3)\ z + a > 2a.$$

Можно ли в этих неравенствах x и z давать любые значения? На основании результатов, полученных в этой и предыдущей задачах, составить определения: какое неравенство называется условным и какое безусловным?

Подметить аналогию с подразделением равенств на уравнения и тождества.

102. Найти, при каких значениях неизвестных выполняются следующие неравенства (решить неравенства):

1) $3x+15>51$; 2) $4x-5>x+7$; 3) $3x+6a>15b$;

4) $3a^2x-3b^2x>a^4-b^4$; 5) $\frac{15z+a}{m}>p$;

6) $\frac{mx^2+nx^2}{m+n}<10x$; 7) $\frac{x^2-8x+15}{x^2-10x+21}<20$.

103. Из числа написанных неравенств одинакового смысла указать неравенство, исключающее все остальные, т.-е. такое неравенство, удовлетворив которому, мы подавно удовлетворим остальным.

1) $x>5$, $x>10$, $x>15$, $x>20$;
2) $x<5$, $x<10$, $x<15$, $x<20$;

3) $y>\frac{2}{3}$, $y>\frac{1}{12}$, $y>\frac{5}{6}$;

5) $z<0{,}01$, $z<0{,}32$, $z<0{,}0001$;
6) $t>2$, $t>-1$, $t>-2$;

7) $t>0$, $t>-\frac{1}{5}$, $t>-\frac{2}{3}$;

8) $t<200$, $t<32$, $t<0{,}000475$.

104. Указать целые значения, которые можно придать переменной, если переменная удовлетворяет таким совокупным неравенствам:

1) $x>0$; $x<5$;	2) $x>0$; $x<7$;	3) $z>-0$; $z<5$;	4) $t>0$; $t<1$;
5) $t>1$; $t>-1$;	6) $y<2\frac{3}{5}$; $y>\frac{3}{15}$;	7) $t>0{,}75$; $t>3{,}75$;	8) $y>10\frac{3}{4}$; $y>11\frac{1}{5}$;
9) $z<-\frac{1}{3}$; $z>-5\frac{2}{3}$;	10) $x>-12$; $x<12$;	11) $t>5$; $t<9$;	12) $t<-5$; $t>-9$.

105. Указать 1) целые и положительные, 2) целые и отрицательные значения, которые могут принимать переменные величины, удовлетворяющие следующим совокупным неравенствам:

1) $x<15$; $x>-3$; 2) $y>3$; $y>5$; $y>7{,}5$; $y<10$; $y>25$; $y<1000$; 3) $t>5\frac{1}{3}$; $t>2{,}5$; $t<1{,}75$; $t>3$.

4) $t > 0$, $t > -3$, $t > 4\frac{1}{6}$; 5) $t > 3$; $t < 5$; $t > -3{,}9$;
$t < 20$; $t < -20$; $t < 2{,}75$; $t < 17$; $t > 0$; $t < 12{,}3$.

106. Одна сторона треугольника равна 3 футам, и разность двух других сторон равна 1 футу. Найти стороны этого треугольника, если они выражаются в целых числах.

107. В двухзначном числе цифра десятков на 2 меньше цифры единиц; самое число должно быть больше 20 и меньше 37. Найти число.

108. Числитель дроби меньше ее знаменателя на единицу; если к числителю и знаменателю дроби прибавить по единице, то значение дроби будет $> \frac{1}{2}$; если от числителя и знаменателя отнять по единице, то значение дроби будет меньше $\frac{6}{7}$. Найти дробь.

109. Если к некоторому двузначному числу прибавить его половину, то в результате получается число большее 149, но меньшее 153. Найти это число.

110. Радиус одной окружности на 2 фута больше другой; какие значения могут иметь радиусы этих окружностей, если окружности должны: 1) пересекаться, 2) соприкасаться, 3) не пересекаться; если, кроме того, известно, что линия центров этих окружностей равна 20 дюймам, а длина меньшего радиуса должна выражаться целым числом сантиметров и не превышать 15 сантиметров?

111. Доказать, что сумма гипотенузы и высоты (опущенной на гипотенузу из вершины прямого угла) больше полупериметра.

112. Решить следующие неравенства:

1) $3(x+5) > 7x - 25$; 2) $3(x+a) > 9x + 26$;

3) $4(z+2) - z(17-z) < z^2$; 4) $(t+1)^2 < (t-1)^2$;

5) $5(x+0{,}75) - 6x < x + 2{,}75$; 6) $0{,}15(t+2) - \frac{2}{3} > (t-2)$;

7) $\frac{2}{3}k + 1\frac{2}{5} > \frac{5}{7}\left(\frac{7}{9}z - 12\frac{3}{5}\right)$; 8) $z + \frac{z}{a} + \frac{z+1}{a^2} > a$;

9) $1 - \frac{4t+1}{b^2} < \frac{t}{b} + \frac{15}{b^2}$; 10) $\frac{y+a}{b} + \frac{b}{a} > \frac{(a+b)^2}{ab} - \frac{b}{a}$;

11) $2y + \frac{m(1-y)}{n} < \frac{n}{m}(y+1)$.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Неопределенные уравнения.

Нахождение целых решений неопределенного уравнения с двумя неизвестными.

113. Построить на клетчатой бумаге прямые, определяемые уравнениями:

1) $3x + 4y = 24$; 2) $3x + 4y = 26$; 3) $3x - 4y = 11$;
4) $2x - 5y = 10$; 5) $2x - 5y = 7$; 6) $2x - 5y = -1$;
7) $4x + 6y = 12$; 8) $4x + 6y = 8$; 9) $4x + 6y = 11$.

Сколько систем решений имеет каждое из уравнений?

Отметить на построенных прямых точки, обе координаты которых выражаются целыми числами (если такие точки имеются); те точки, обе координаты которых, кроме того, положительны, отметить красной краской, остальные из этих точек — черной. Найти в каждом случае: 1) разности абсцисс двух последовательных точек с целыми значениями координат; 2) разности ординат; 3) расстояния между каждой парой таких последовательных точек. Какой ряд образуют абсциссы таких точек с целыми значениями координат (если такие точки имеются), если эти абсциссы записать в том порядке, в каком соответствующие точки расположены на прямой? Ординаты?

114. Какие значения будет принимать в уравнении $8x - 3y = 10$ 1) неизвестное y, если x давать значения 0, 1, 2; 2) x в том же уравнении, если y давать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? В каждом случае составить таблицу решений в таком виде:

x	0	1	2
y	$-3\frac{1}{3}$	...	...

115. Какие значения будет принимать в уравнении $2x - 3y = 7$ 1) x, если y давать значения 0, 1, 2, 3; 2) y, если x давать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5? Выбрать из этих решений систему, в которой оба решения выражаются целыми числами.

116. Какие значения получает в уравнении $2x + 3y = 9$ 1) x, если y давать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5; 2) y, если x давать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8? Выбрать системы целых решений.

117. Какие значения будет принимать в уравнении $3x + 6y = 8$ 1) x, если y давать значения 0, 1, 2; 2) y, если x давать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5?

118. Какие значения получает в уравнении $2x + 4y = 5$ 1) x, если y давать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5; 2) y, если x давать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

119. Решить уравнение $6x - 9y = 17$. Составить таблицу решений. Имеет ли это уравнение хоть одну пару целых решений?

120. Деля все члены следующих уравнений на общий наибольший делитель коэффициентов при x и y, выяснить, какие из следующих уравнений не могут иметь ни одной системы целых решений:

1) $16x + 56y = 96$; 2) $16x + 56y = 84$; 3) $16x + 56y = 49$;
4) $77x - 33y = 99$; 5) $77x - 33y = 17$; 6) $45y - 24x = 8$.

121. Показать, что если коэффициенты a и b в уравнении $ax + by = c$ суть числа взаимносоставные и c не делится без остатка на их общий наибольший делитель, то уравнение не имеет ни одной системы целых решений.

122. Составить таблицу решений уравнения $5x + 7y = 69$, 1) задавая y значения 0, 1, 2, 3, 4; 2) задавая x значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сколько раз в том и другом случае другое неизвестное принимает целое значение? Что можно сказать про дробные части остальных значений этого неизвестного? Имеют ли эти дробные части одинаковые числители?

123. Составить таблицу решений уравнения $7x - 3y = 5$, 1) задавая x значения 0, 1, 2; 2) задавая y значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Каждое дробное решение представить в виде суммы целого числа (положительного или отрицательного) и положительной правильной дроби. Встретится ли одна и та же дробь в выражении двух различных корней и в этом случае?

124. Показать, что если в уравнении $ax + by = c$ (полагая, что a и b числа целые и взаимнопростые) неизвестному y давать последовательные целые значения, начиная с 0 и кончая $a - 1$, и представлять в каждом случае выражение x в виде целого числа и положительной правильной дроби, то числители всех дробей должны быть различны. (Воспользоваться методом доказательства от противного, предположив, что при двух подстановках y_1 и y_2 соответственные значения x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{c - by_1}{a} = p_1 + \frac{r_1}{a},$$

$$x_2 = \frac{c - by_2}{a} = p_2 + \frac{r_2}{a},$$

таковы, что $r_1 = r_2$.)

125. Пользуясь результатом, полученным в предыдущей задаче, показать, что (в случае взаимно-простых a и b) при подстановке вместо y чисел $0, 1, 2 \ldots a-1$ один (и только один) остаток r_1 должен оказаться равным 0, т.-е. что одному из написанных целых значений y всегда соответствует одно (и только одно) целое значение x.

126. 1) Указать условие необходимое и достаточное для того, чтобы неопределенное уравнение $ax+by=c$ имело целые решения

2) Указать возможно меньшее число подстановок последовательных целых значений (вместо одного из неизвестных), при котором непременно будет получена одна система целых решений 1) при $a>b$, 2) при $a<b$.

127. Найти пару целых решений уравнения $8x+5y=15$.

128. Найти ряд систем целых решений этого уравнения.

Составить таблицу этих решений. Можно ли по двум первым парам решений написать остальные? Сколько систем целых решений имеет данное уравнение? Представить графически все решения данного уравнения. Указать целые решения и соответствующие приращения значений x и y при переходе от одной системы к наименее от нее отличающейся другой.

129. Решить предыдущую задачу применительно к уравнениям:

1) $5x+6y=13$; 2) $9x-y=17$; 3) $3x+7y=10$.

130. Показать, что если m и n найденная пара целых решений неопределенного уравнения $ax+by=c$, то

$$\begin{aligned} x&=m+bt \\ y&=n-at \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x&=m-bt \\ y&=n+at, \end{aligned}$$

где t произвольное число, также удовлетворяют этому уравнению. При каких значениях t x и y имеют в этом случае целые значения?

131. Пусть m и n найденная пара решений неопределенного уравнения $ax-by=c$; показать, что

$$\begin{aligned} x&=m+bt \\ y&=n+at, \end{aligned}$$

где t произвольное целое относительное число, также представляют пару целых решений этого уравнения.

132. Решить в целых числах, если это окажется возможным, способом подстановки (проб) следующие уравнения:

1) $4x+7y=100$;	2) $15x+10y=211$;
2) $6x+35y=287$;	4) $9x+7y=0$;
5) $5x+14y=17$;	6) $5y-2z=7$;
7) $14x-21y=23$;	8) $25y-3z=20$.

Найти в каждом случае те из целых решений, которые удовлетворяют еще следующим дополнительным условиям: 1) чтобы x было > 7, а $y < 13$; 2) $x < 7$ и $y < 7$; 3) x и y были положительны; 4) x имело положительное значение, а y отрицательное; 5) чтобы и x и y имели отрицательные значения.

Решение неопределенного уравнения способом последовательного деления.

133. Решить уравнения: 1) $x - 3y = 0$, 2) $x + 4y = 5$ относительно x. При каких значениях y неизвестное x получает целые значения?

134. Решить уравнения: 1) $5x = 7y$, 2) $3x - 5 = 5y$ относительно x. Кратным какого числа должно быть y, чтобы x было целым числом? В какой форме поэтому может быть представлено y? Как выразится в таком случае x через вспомогательное неизвестное?

135. Решить уравнения: 1) $5x = 7y + 7$, 2) $3x - 5 = 5y$ относительно x. Кратным какого числа должно быть $y + 1$, чтобы x было целым числом?

136. Решить уравнения: 1) $7y = 10y - 10$, 2) $9y + 13 = 13x$ относительно y. Кратным какого числа должно быть $x - 1$, чтобы y было целым числом?

137. Решить уравнения: 1) $5x = 7y + 2$, 2) $3x = 5y - 2$ относительно x и исключить целое число из полученных дробей. Кратным какого числа должно быть: 1) $y + 1$, 2) $y - 1$, чтобы x было целым числом?

138. Решить уравнение $5y = 7x + 3$ относительно y и исключить целое число из полученной дроби. Кратным какого числа должен быть числитель полученной дроби, чтобы y было целым числом? Вновь полученное уравнение решить относительно x и исключить целое число из полученной дроби. Кратным какого числа должен быть числитель новой дроби, чтобы x было целым числом? Выразить y и x через вспомогательное неизвестное, кратным которого является последний числитель. Составить таблицу целых решений для y и x и дать графику этих решений.

139. Решить предыдущую задачу для уравнений:

1) $7x = 4y - 5$, 2) $11x - 13y = 16$.

140. Решить способом последовательного деления следующие уравнения:

1) $7x + 19y = 106$; 2) $10x - 17y = 5$;
3) $43x - 17y = 27$; 4) $15x + 11y = 137$.

141. До каких пор приходится продолжать прием последовательного деления?

142. $$x = \frac{14 + 15y}{4} = 3 + 3y + \frac{2 + 3y}{4};$$
$$x = \frac{14 + 15y}{4} = 3 + 4y + \frac{2 - y}{4}.$$

Пользуясь приемом, указанным во втором из данных равенств, ускорить решение следующих уравнений:

1) $4x - 15y = 14$;　　2) $5y = 13 - 24x$.

143. Решить следующие уравнения в целых и 1) положительных, 2) целых и отрицательных числах способом последовательного деления или способом подстановки (проб):

1) $13x + 100y = 2711$;　　2) $17x + 287y = 1000$;
3) $17x + 5y = 90$;　　4) $5x + 8y = 71$;
5) $5x = 11y - 77$;　　6) $3x - 20y = 14$;
7) $4x + y = 100$;　　8) $5x - 12y = 0$;
9) $3x + 25y = 28$;　　10) $13x + 2y = 80$;
11) $37x + 11y = 1000$;　　12) $8x + 33y = 770$;
13) $15y - 19z = 100$;　　14) $x - 7y = 15$;
15) $15x + 41y = 3003$;　　16) $45x - 32y = 60$;
17) $4y - 3y = 5$;　　18) $9x + y = 11$;
19) $11x - 7y = 10$;　　20) $10x - 17y = 5$;
21) $y = 17 + \frac{2}{15}(17 - x)$;
22) $19x + 51y - 127 = 437 - 17x + 13y$.

144. Решить неопределенные системы в целых и положительных числах:

1) $17x - 8y + 5z = 47,\ 4x + 10y - 25z = 51$;
2) $9x + 2y + 7z = 27,\ 4x + 3y + z = 12$;
3) $x - 3y - z = -10,\ 3x + y - z = 16$;
4) $5x - 4y + 7z = 8,\ 10x + 7y - z = 16$.

145. Выяснить, почему уравнение $ax - by = c$ имеет бесчисленное множество систем целых и положительных решений, а уравнение $ax + by = c$ (a и b суть взаимно-простые натуральные числа, c любое целое относительное число) имеет лишь ограниченное число таких систем или их совсем не имеет. (Геометрическая интерпретация!)

Задачи, приводящие к решению неопределенных уравнений.

146. 1) Некто имеет 1000 рублей десятирублевыми и трехрублевыми кредитными билетами. Сколько у него тех и других?

2) Покупатель, сделав покупку на 713 рублей, расплатился 50-ти и 3-рублевыми билетами. Сколько он дал тех и других?

3) Некто, сделав покупку на 3 руб. 40 коп., отдал в уплату несколько двугривенных, а сдачу получил трехкопеечными монетами. Найти число двугривенных и трехкопеечных монет.

4) Сшито 25 тетрадей различного объема — по 3 и по 5 листов. Сколько бумаги пошло на первые и на вторые тетради?

5) Какое количество почтовых марок 5-ти и 7-ми-копеечных можно купить на 1 рубль?

6) При решении уравнения $ax + by = 71$ нашли, что $x = 8$ и $y = 3$. Определить коэффициенты a и b (a и b целые числа).

7) Разность двух дробей, имеющих знаменателями 24 и 60, равна $\frac{1}{40}$. Найти числители этих дробей.

8) Найти дробь, от прибавления к числителю и знаменателю которой по 7 получается дробь, равная $\frac{1}{2}$.

9) Через 5 лет лета двух братьев будут относиться как 5:3. Сколько лет каждому из них в настоящее время, если сумма их лет более 30-ти и менее 40?

10) Два работника начали одновременно общую работу, но через несколько дней один из них захворал, вследствие чего пришлось оканчивать работу другому без помощи первого. Сколько дней каждый из них работал, если первый один мог бы окончить всю работу в 10 дней, а второй, также один, в 18 дней?

11) Найти два капитала, из которых первый, будучи отдан по $8\frac{1}{2}\%$, приносит ежегодно процентных денег на 86 рублей более, нежели второй, отданный по 6%.

12) В двузначном числе по ошибке цифра единиц была поставлена на месте десятков, а цифра десятков на месте единиц; вследствие этого получилось число на 36 единиц менее требуемого. Найти число, которое следовало написать.

13) Если к числу, записанному тремя цифрами, изображающими три последовательных натуральных числа, прибавить число, изображенное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится сумма, изображенная тремя одинаковыми цифрами. Найти это число.

14) В числе 8053 заменить 0 такою цифрою, чтобы получилось число, делящееся на 17 без остатка.

15) Найти две дроби с знаменателями 45 и 36, дающие в сумме $\frac{167}{180}$.

16) Прибавив к делимому и делителю по 3, получим в частном 16; отняв от тех же чисел по 3, получим в частном 16 и в остатке 90. Найти делимое и делитель.

17) Представить дробь $\frac{31}{35}$ в виде суммы двух дробей со знаменателями 5 и 7.

18) Представить дробь $\frac{109}{117}$ в виде суммы двух дробей со знаменателями 9 и 13.

19) Представить дробь $\frac{47}{126}$ в виде разности двух дробей со знаменателями 14 и 9.

20) Представить дробь $\frac{3}{68}$ в виде разности двух дробей со знаменателями 17 и 4.

21) Найти для x значение, при котором дробь $\frac{5x-9}{13}$ обращается в целое положительное число.

22) Найти для значение x, при котором дробь $\frac{7x+11}{16}$ обращается в целое положительное число.

23) Как разменять 100 рублей кредитными билетами в 5 и 3 рубля?

24) а) Найти наименьшее целое положительное число, которое при делении на 7 дает в остатке 6. б) Найти наименьшее целое положительное число, которое при делении на 13 дает в остатке 4.

25) Найти наибольшее двузначное число, которое при делении на 7 и на 49 дает в остатке 1.

26) Найти наименьшее трехзначное число, которое при делении на 9 и на 11 дает в остатке 2.

27) Каждый рабочий одной партии получал по 3,5 руб. за день, другой партии — по 2,4 руб.; сколько было рабочих той и другой партии, если первая партия зарабатывала в день на 23 рубля больше второй партии и если известно, что число рабочих обеих партий было менее 20?

28) На какие две дуги, содержащие целое число градусов, можно разделить окружность, если известно, что число градусов одной дуги делится без остатка на 5, а число градусов другой без остатка на 4?

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Непрерывные дроби.

Конечные и бесконечные непрерывные дроби.

147. Проверить справедливость следующих равенств:

1) $\frac{17}{5}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$; 2) $\frac{35}{9}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8}}$;

3) $\frac{94}{11}=8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}$; 4) $\frac{9}{35}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8}}}$;

5) $\frac{11}{94}=\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$.

148. Путем последовательного деления показать, что

1) 17 и 5, 2) 94 и 11, 3) 9 и 35

суть числа взаимно-простые, т.-е. что их общий наибольший делитель равен 1. Сравнить в каждом отдельном случае все получаемые частные с «частными знаменателями» отдельных звеньев соответствующих непрерывных дробей предыдущей задачи.

149. Представить в виде непрерывных дробей.

1) $\frac{19}{5}$; 2) $\frac{5}{19}$; 3) $\frac{20}{7}$; 4) $\frac{7}{20}$;
5) $\frac{22}{7}$; 6) $\frac{95}{17}$; 7) $\frac{7}{100}$; 8) $\frac{35}{109}$;
9) $\frac{355}{113}$; 10) 0,2475; 11) 3,14; 12) 0,3125;
13) 3,14159.

Следующие непрерывные дроби обратить в простые:

1) (0, 1, 2, 3), 2) (0, 2, 5, 7, 2),
3) (3, 5, 1, 1, 2), 4) (2, 2, 2, 2, 3),
5) (0, 1, 1, 2, 5, 5), 6) (0, 1, 2, 3, 4, 5).

150. Дана непрерывная дробь:

(3, 7, 15, 1, 288).

Вычислить простые дроби, в которые обращаются дроби, получаемые из непрерывной, если в ней удержать одно, два, три и т. д. звеньев (так называемые **подходящие дроби**).

151. Решить предыдущую задачу для дробей:

1) (7, 1, 2, 5), 2) (0, 5, 1, 1, 2),
3) (2, 7, 1, 2, 1, 3), 4) (0, 2, 1, 1, 1, 5).

152. 1) Найти для каждого отдельного случая предыдущей задачи разность между непрерывной дробью и каждой из ее подходящих дробей. 2) Указать, какие из подходящих дробей больше непрерывной и какие меньше. 3) Указать, какая из любых двух последовательных подходящих дробей ближе подходит по величине к непрерывной дроби.

153. Доказать, что всякое рациональное число $\frac{m}{n}$ может быть представлено в виде конечной непрерывной дроби.

154. Представляя $\sqrt{5}$ в виде $2+\frac{1}{x}$, найти, между какими целыми числами заключено число x; представляя x в виде $a+\frac{1}{x_1}$, где под a разумеется приближенное значение x по недостатку с точностью до 1, найти, между какими целыми числами заключено число x_1; представляя x_1 в виде $a_1+\frac{1}{x_2}$, продолжить указанный процесс возможно дальше. Может ли процесс обращения $\sqrt{5}$ в непрерывную дробь закончиться, т.-е. может ли $\sqrt{5}$ быть обращен в конечную непрерывную дробь или нет? Почему? Какое число определяется бесконечной непрерывной дробью?

Свойства подходящих дробей и их числителей и знаменателей.

155. Обозначая подходящие дроби: первую через $\frac{p_1}{q_1}$, вторую через $\frac{p_2}{q_2}$, третью через $\frac{p_3}{q_3}$ и т. д.,

1) найти выражения $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ и т. д., если непрерывная дробь имеет вид

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}};$$

2) указать, чем разнятся друг от друга выражения $\frac{p_3}{q_3}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ в виде непрерывных дробей;

3) показать, что $\frac{p_3}{q_3}$ может быть получено из $\frac{p_2}{q_2}$, если в выражении этой дроби заменить a_1 через $a_1+\frac{1}{a_2}$;

4) выразить: 1) p_3 и q_3 через p_2, q_2 и a_2, 2) p_4 и q_4 через p_3, q_3 и a_3.

156. Дана непрерывная дробь $x = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_k, a_{k+1}, \ldots a_n)$. Составить выражения членов подходящей дроби $\frac{p_2}{q_2}$ через p_1, q_1 и a_1, $\ldots \frac{p_5}{q_5}$ через p_3, q_3, p_4, q_4, a_4. Составить по аналогии общие формулы для выражения p_k и q_k через p_{k-2}, q_{k-2}, p_{k-1}, q_{k-1} и a_{k-1} и доказать справедливость этой формулы, пользуясь методом полной индукции. (Обратить внимание на то, чем отличаются друг от друга выражения $\frac{p_k}{q_k}$ и $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, если они представлены в виде непрерывных дробей.)

157. Найти подходящие дроби следующих непрерывных дробей:

1) (0, 2, 1, 1, 3, 4), 2) (2, 7, 3, 1, 2, 3),
3) (0, 7, 1, 1, 3), 4) (3, 1, 1, 2, 2, 3),
5) (3, 7, 15, 1, 288).

В каждом случае составить разности пар последовательных подходящих дробей, вычитая из последующей предыдущую. Чему равны числители в выражениях полученных разностей? Как выражаются знаменатели этих разностей через знаменатели сравниваемых подходящих дробей?

158. Дана непрерывная дробь: $x = (a_0, a_1, a_2, \ldots a_k, a_{k+1}, \ldots a_n)$. 1) Составить выражения $\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}$. 2) Способом полной индукции доказать, что $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$. На основании полученного результата установить соотношение, которым связаны члены двух последовательных подходящих дробей. 3) Доказать на основании установленного соотношения, что подходящие дроби несократимы.

159. Составить разность между $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$. На основании рассмотрения составленной разности показать, что подходящие дроби нечетного порядка представляют ряд возрастающих чисел, а подходящие дроби четного порядка — ряд убывающих чисел.

160. Обратить 3,1416 (π) в непрерывную дробь и составить разности между данной дробью и ее подходящими. Какие из этих разностей положительны, какие отрицательны? Какими неравенствами связана данная дробь с двумя последовательными подходящими дробями? В каком случае знак неравенства переходит в знак равенства?

161. Вычислить подходящие дроби и составить разность между двумя любыми смежными подходящими дробями следующих непрерывных дробей:

1) (1, 2, 3, 4, 5), 2) (5, 4, 3, 2, 2),
3) (0, 2, 4, 6, 8), 4) (0, 1, 3, 5, 7).

162. 1) Представляя непрерывную дробь $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_k, a_{k+1} \ldots$ в виде $x = \frac{p_k x_k + p_{k-1}}{q_k x_k + q_{k-1}}$, где $x_k = (a_k, a_{k+1}, \ldots)$, показать, что

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| > \left| x - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right|.$$

2) Принимая во внимание, что значение непрерывной дроби заключено между значениями двух последовательных подходящих дробей, найти ошибку приближения при замене непрерывной дроби подходящей дробью. 3) Как изменится дробь, выражающая ошибку, если заменить произведение знаменателей квадратом знаменателя дроби с меньшим указателем.

163. Определить ошибку приближения: 1) 2-й и 4-й подходящих дробей непрерывной дроби:

$$(3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2\ldots);$$

2) 4-й и 6-й подходящих дробей:

$$(0,\ 12,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 7\ldots);$$

3) 3-й и 5-й подходящих дробей:

$$(1,\ 2,\ 1,\ 4,\ 5,\ 1,\ 2\ldots)$$

164. Вычислить приближенные значения следующих дробей с ошибкой, не превышающей: а) 0,001, б) 0,00001, в) 0,000001:

1) (0, 6, 6, 6, 6...), 2) (2, 4, 4, 4...),
3) (0, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2...), 4) (4, 2, 1, 4, 2, 1...),
5) (0, 3, 1, 4, 1, 5, 7, 6...), 6) (0, 1, 1, 1, 1...).

165. Предполагая, что дробь $\frac{a}{b}$ ближе подходит к данной непрерывной, чем подходящая $\frac{p_k}{q_k}$, показать на основании рассмотрения разностей: $\frac{a}{b} - \frac{p_k}{q_k}$ и $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}$, что $b > q_k$, т.-е. что не существует дроби, ближе подходящей к непрерывной дроби и имеющей более простую форму, чем $\frac{p_k}{q_k}$.

166. Пользуясь приемом, указанным в задаче 154, выразить в виде непрерывной дроби следующие корни:

1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{10}$; 4) $\sqrt{11}$;
5) $\sqrt{66}$; 6) $\sqrt{65}$; 7) $\sqrt{82}$; 8) $\sqrt{101}$.

Вычислить эти корни с точностью до 0,01, 0,001. 0,0001.

167. Найти значения следующих периодических непрерывных дробей:

1) $(1, 2, 2, 2\ldots)$, 2) $(1, 1, 2, 1, 2\ldots)$,
3) $(4, 8, 8, 8\ldots)$, 4) $(4, 4, 8, 4, 8\ldots)$,
5) $(5, 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10\ldots)$,
6) $(6, 2, 12, 2, 12\ldots)$,
7) $(4, 2, 8, 2, 8\ldots)$.

Решение неопределенных уравнений при помощи непрерывных дробей.

168. Пусть дробь $\frac{a}{b}$ при обращении в непрерывную дробь имеет предпоследней подходящею дробью $\frac{c}{d}$ (последней подходящей является сама дробь $\frac{a}{b}$); найти разность между непрерывной дробью и предпоследней подходящей дробью. В полученном равенстве освободиться от дробей и написать неопределенное уравнение, систему решений которого представляют числа c и d, если дробь $\frac{c}{d}$: 1) четная по порядку, 2) нечетная по порядку.

169. Найти пару целых решений следующих уравнений:

1) $5x - 6y = 1$; 2) $10x - 7y = 1$;
3) $13x + 5y = 1$; 4) $8x + 3y = 1$.

170. Найти пару целых решений следующих уравнений:

1) $5x - 6y = 17$; 2) $10x - 7y = 5$;
3) $13x + 5y = 150$; 4) $8x + 3y = 90$.

171. Решить способом непрерывных дробей в целых и положительных числах следующие уравнения:

1) $14x - 37y = 71$; 2) $29x + 2y = 303$; 3) $37x - 28y = 203$;
4) $7x - 2y = 203$; 5) $77x + 9y = 1294$; 6) $25x + 301y = 376$.

ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ
ЛОГАРИѲМОВ ЧИСЕЛ от 1 до 1009.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0 000	043	086	128	170	212	253	294	334	374
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755
12	792	828	864	899	934	969	004	038	072	106
13	1 139	173	206	239	271	303	335	367	399	430
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
15	1 761	790	818	847	875	903	931	959	987	014
16	2 041	068	095	122	148	175	201	227	253	279
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989
20	3 010	032	054	075	096	118	139	160	181	201
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962
25	3 979	997	014	031	048	065	082	099	116	133
26	4 150	166	183	200	216	232	249	265	281	298
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	4 771	786	800	814	829	843	857	871	886	900
31	914	928	942	955	969	983	997	011	024	038
32	5 051	065	079	092	105	119	132	145	159	172
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428
35	5 441	453	465	478	490	502	514	527	539	551
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010
40	6 021	031	042	053	064	075	085	096	107	117
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
45	6 532	542	551	561	571	580	590	599	609	618
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893
49	910	911	920	928	937	946	955	964	972	981
50	6 990	998	007	016	024	033	042	050	059	067
51	7 076	084	093	101	110	118	126	135	143	152
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396
55	7 404	412	419	427	435	443	451	459	466	474

P. P.

	43	42	41	39
1	4.3	4.2	4.1	3.9
2	8.6	8.4	8.2	7.8
3	12.9	12.6	12.3	11.7
4	17.2	16.8	16.4	15.6
5	21.5	21.0	20.5	19.5
6	25.8	25.2	24.6	23.4
7	30.1	29.4	28.7	27.3
8	34.4	33.6	32.8	31.2
9	38.7	37.8	36.9	35.1

	38	37	36	35
1	3.8	3.7	3.6	3.5
2	7.6	7.4	7.2	7.0
3	11.4	11.1	10.8	10.5
4	15.2	14.8	14.4	14.0
5	19.0	18.5	18.0	17.5
6	22.8	22.2	21.6	21.0
7	26.6	25.9	25.2	24.5
8	30.4	29.6	28.8	28.0
9	34.2	33.3	32.4	31.5

	34	33	32	31
1	3.4	3.3	3.2	3.1
2	6.8	6.6	6.4	6.2
3	10.2	9.9	9.6	9.3
4	13.6	13.2	12.8	12.4
5	17.0	16.5	16.0	15.5
6	20.4	19.8	19.2	18.6
7	23.8	23.1	22.4	21.7
8	27.2	26.4	25.6	24.8
9	30.6	29.7	28.8	27.9

	29	28	27	26
1	2.9	2.8	2.7	2.6
2	5.8	5.6	5.4	5.2
3	8.7	8.4	8.1	7.8
4	11.6	11.2	10.8	10.4
5	14.5	14.0	13.5	13.0
6	17.4	16.8	16.2	15.6
7	20.3	19.6	18.9	18.2
8	23.2	22.4	21.6	20.8
9	26.1	25.2	24.3	23.4

	25	24	23	22
1	2.5	2.4	2.3	2.2
2	5.0	4.8	4.6	4.4
3	7.5	7.2	6.9	6.6
4	10.0	9.6	9.2	8.8
5	12.5	12.0	11.5	11.0
6	15.0	14.4	13.8	13.2
7	17.5	16.8	16.1	15.4
8	20.0	19.2	18.4	17.6
9	22.5	21.6	20.7	19.8

	21	19	18	17
1	2.1	1.9	1.8	1.7
2	4.2	3.8	3.6	3.4
3	6.3	5.7	5.4	5.1
4	8.4	7.6	7.2	6.8
5	10.5	9.5	9.0	8.5
6	12.6	11.4	10.8	10.2
7	14.7	13.3	12.6	11.9
8	16.8	15.2	14.4	13.6
9	18.9	17.1	16.2	15.3

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7 404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
60	7 782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
63	993	000	007	014	021	028	035	041	048	055
64	8 062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
65	8 129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
70	8 451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
75	8 751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
78	921	927	932	938	943	849	954	960	965	971
79	976	982	987	993	998	004	009	015	020	025
80	9 031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
85	9 294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
90	9 542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
95	9 777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996
100	0 000	004	009	013	017	022	026	030	035	039

P. P.

	16	15
1	1.6	1.5
2	3.2	3.0
3	4.8	4.5
4	6.4	6.0
5	8.0	7.5
6	9.6	9.0
7	11.2	10.5
8	12.8	12.0
9	14.4	13.5

	14	13
1	1.4	1.3
2	2.8	2.6
3	4.2	3.9
4	5.6	5.2
5	7.0	6.5
6	8.4	7.8
7	9.8	9.1
8	11.2	10.4
9	12.6	11.7

	12	11
1	1.2	1.1
2	2.4	2.2
3	3.6	3.3
4	4.8	4.4
5	6.0	5.5
6	7.2	6.6
7	8.4	7.7
8	9.6	8.8
9	10.8	9.9

	9	8
1	0.9	0.8
2	1.8	1.6
3	2.7	2.4
4	3.6	3.2
5	4.5	4.0
6	5.4	4.8
7	6.3	5.6
8	7.2	6.4
9	8.1	7.2

	7	6
1	0.7	0.6
2	1.4	1.2
3	2.1	1.8
4	2.8	2.4
5	3.5	3.0
6	4.2	3.6
7	4.9	4.2
8	5.6	4.8
9	6.3	5.4

	5	4
1	0.5	0.4
2	1.0	0.8
3	1.5	1.2
4	2.0	1.6
5	2.5	2.0
6	3.0	2.4
7	3.5	2.8
8	4.0	3.2
9	4.5	3.6

Семизначные таблицы логарифмов некоторых чисел (для вычислений сложных %%, рент и проч.).

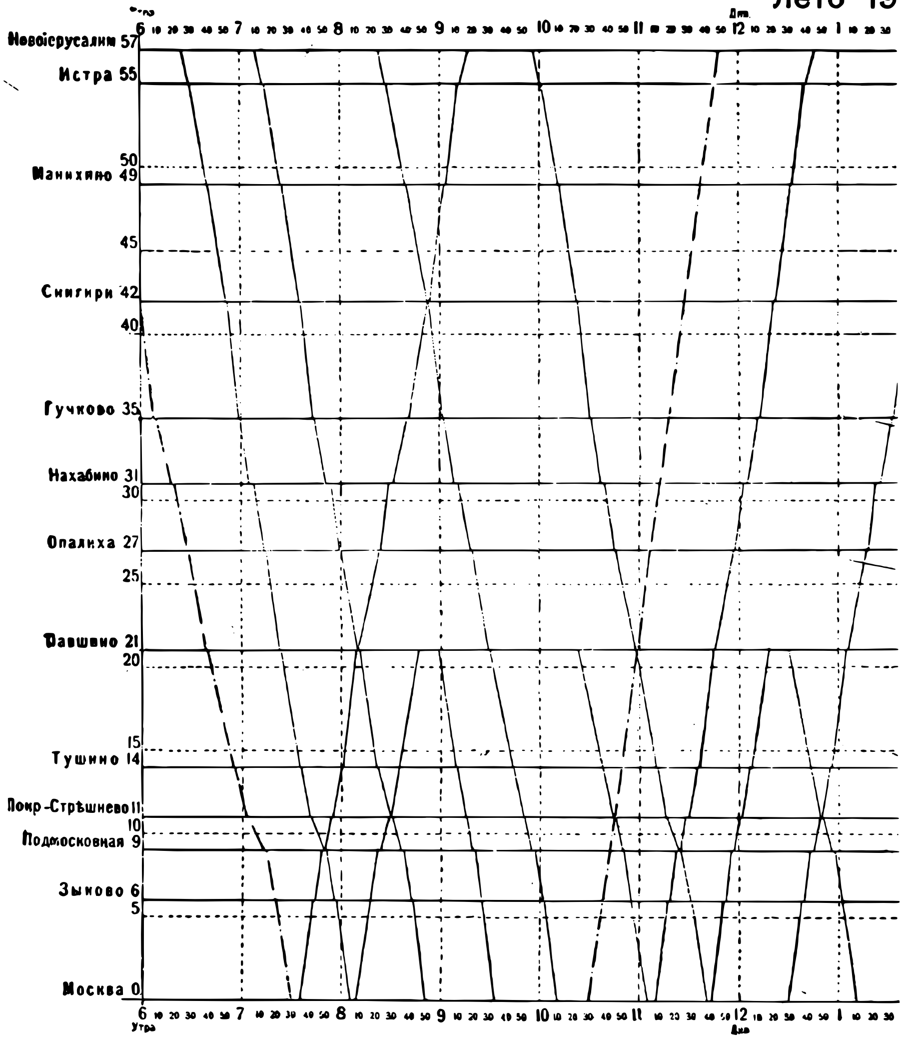
N	L	N	L
1,00010	0000434	1,03500	0149403
1,00100	0004341	1,03600	0153598
1,00167	0007247	1,03750	0159881
1,00250	0010844	1,04000	0170333
1,00300	0013009	1,04200	0178677
1,00400	0017337	1,04250	0180761
1,00500	0021661	1,04500	0191163
1,00600	0025980	1,04750	0201540
1,00750	0032451	1,04800	0203613
1,00825	0035682	1,05000	0211893
1,00900	0038912	1,05250	0222221
1,01000	0043214	1,05400	0228406
1,01200	0051805	1,05500	0232525
1,01500	0064660	1,05750	0242804
1,01800	0077478	1,06000	0253059
1,02000	0086002	1,06250	0263289
1,02250	0096633	1,06500	0273496
1,02400	0103000	1,07000	0293838
1,02500	0107239	1,07500	0314085
1,02700	0115704	1,08000	0334238
1,02750	0117818	1,09000	0374265
1,03000	0128372	1,10000	0413927
1,03250	0138901	1,12000	0492186

Значения тригонометрических функций для целых градусов.

N°	Sin.	Tang.	Cot.	Cos.	N°
0	0.000	0.000	∞	1.000	**90**
1	0.017	0.017	57.290	1.000	89
2	0.035	0.035	28.636	0.999	88
3	0.052	0.052	19.081	0.999	87
4	0.070	0.070	14 301	0.998	86
5	0.087	0.087	11.430	0.996	85
6	0.105	0.105	9.514	0.995	84
7	0.122	0.123	8.144	0.993	83
8	0.139	0.141	7.115	0.990	82
9	0.156	0.158	6.314	0.988	81
10	0.174	0.176	5.671	0.985	**80**
11	0.191	0.194	5.145	0.982	79
12	0.208	0.213	4.705	0.978	78
13	0.225	0.231	4.331	0.974	77
14	0.242	0.249	4.011	0.970	76
15	0.259	0.268	3,732	0.966	75
16	0.276	0.287	3.487	0.961	74
17	0.292	0.306	3.271	0.956	73
18	0.309	0.325	3.078	0.951	72
19	0.326	0.344	2.904	0.946	71
20	0.342	0.364	2.747	0.940	**70**
21	0.358	0.384	2.605	0.934	69
22	0.375	0.404	2.475	0.927	68
23	0.391	0.424	2.356	0.921	67
24	0.407	0.445	2.246	0.914	66
25	0.423	0.466	2.145	0.906	65
26	0.438	0.488	2.050	0.899	64
27	0.454	0.510	1.963	0.891	63
28	0.469	0.532	1.881	0.883	62
29	0.485	0.554	1.804	0.875	61
30	0.500	0.577	1.732	0.866	**60**
31	0.515	0.601	1.664	0.857	59
32	0.530	0.625	1.600	0.848	58
33	0.545	0.649	1.540	0.839	57
34	0.559	0.675	1.483	0.829	56
35	0.574	0.700	1.428	0.819	55
36	0.588	0.727	1.376	0.809	54
37	0.602	0.754	1.327	0.799	53
38	0.616	0.781	1.280	0.788	52
39	0.629	0.810	1.235	0.777	51
40	0.643	0.839	1.192	0.766	**50**
41	0.656	0.869	1.150	0.755	49
42	0.669	0.900	1.111	0.743	48
43	0.682	0.933	1.072	0.731	47
44	0.695	0.966	1.036	0.719	46
45	0.707	1 000	1.000	0.707	45
N°	**Cos.**	**Cot.**	**Tang.**	**Sin.**	**N°**

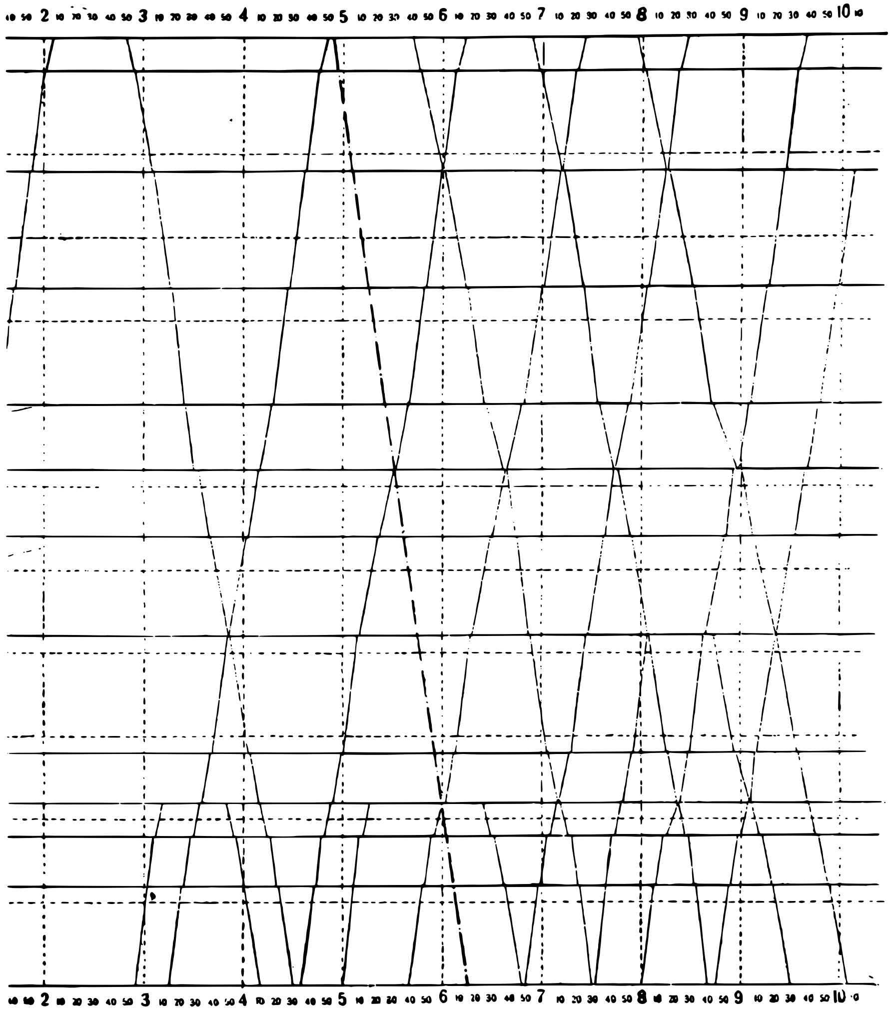
График движения поездов. Московско-Белорусско-Балти

Лето 19



Фиг.

йская ж. д. между станциями Москва-Новоиерусалимская.
13 года.



ОТВЕТЫ.

5. 1) 64,87 и 64,88; 3) 0,60 и 0,61; 5) 1, 66 и 1,67; 7) 0,45 и 0,46.
7. 1) $< 0{,}01$. **9.** 1) $< 0{,}01$ и пр. **11.** 1) До 0,001; 3) 0,00001.
16. 1) 4 дес. знака; 2) 3 дес. зн. и т. д. **17.** а) 0,01; б) 0,01;
22. $\frac{b|\alpha|+a|\beta|}{b^2}$. **23.** 1) $< 0{,}1$; 3) $< 0{,}1$. **30.** 1) 82,7;
3) 510 милл. *кв. км*; 5) 255.10^6 *км*; 7) 5,68.
9) 73,1 трилл. *тонн*; 11) а) 0,498. **56.** 1) $a^5(a^6+a^3-1)$;
3) $a^2b^3c^2(bc+ab+a^2)$; 5) $x^{2a-2b}(x^{7b}+x^{3a}-x^{5b})$. **62.** 7) $\frac{1-x+x^2}{x^n}$;
13) $\frac{2x^n-x^{n-2}y^2}{(x+y)^n}$; 15) $\frac{4a^xb^y}{a^{2x}-b^{2x}}$. **147.** 1) 12; 3) 27; 5) 15; 7) 19;
9) 290; 11) 2100; 13) 35; 15) 43; 17) 47; 19) 92; 21) 440; 23) 49;
25) 234; 27) 253; 29) 308; 31) 707; 33) 909; 35) 222; 37) 372; 39) 506;
41) 705; 43) 2351; 45) 7557; 47) 3708; 49) 3504; 51) 5703; 53) 1305;
55) 0,22; 57) 0,93; 59) 0,123; 61) 62,5; 63) 0,024; 65) 4,37; 67) 0,671;
69) $\frac{38}{79}$; 71) $\frac{11}{111}$; 73) $\frac{81}{16}$. **170.** 17) $(4a+b+2c-d)\sqrt{x}$; 19) $8\sqrt{a}$;
21) $-3\sqrt{2}$; 23) $5(\sqrt{5}-1)$; 25) $\frac{269}{441}\sqrt{7}-\sqrt{35}$; 27) 0; 29) $(2+x)\sqrt{a-b}$;
173. 1) 4; 3) $2\sqrt{6}$; 5) $6-30\sqrt{3}+24\sqrt{10}$; 7) $\sqrt{yz}+z-1$; 9) $15-6\sqrt{6}$;
11) $5+44\sqrt{35}$; 13) $7\sqrt{2}$; 15) $13\sqrt{3}$; 17) $5\sqrt{3ax}+4a-6x$; 19) $10(\sqrt{6}+3)$;
21) $3a-2b$; 23) $(a-1)(\sqrt{a}+1)$. **174.** 14) $5-2\sqrt{(3-x)(2+x)}$;
15) $\frac{(x+1)^2}{x}$; 17) $\frac{2(a+b)^2}{3ab}$; 19) $2a+2\sqrt{a^2-b^2-x^2+2bx}$. **176.** 1) 1;
3) $\sqrt{2}$; 5) 1; 7) $6-2\sqrt{5}$; 9) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; 11) $\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{y}{b}}$; 13) $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$;
177. 49) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$; 51) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$. **224.** 1) $2\sqrt[3]{2}$;
3) $10\sqrt[3]{17}$; 5) 0; 7) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-3$; 9) $2(\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x})$.
227. 1) $3+\sqrt[3]{18}$; 3) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}-\frac{1}{2}$; 5) $a-\sqrt[3]{a^2}$; 9) $a+\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}-b$;

233. 1) 5; 3) 3; 5) $a+b^2$; 7) 0; 9) $2\frac{1}{4}$; 11) 36; 13) 12; 15) 2; 17) 26; 19) 6; 21) 19; 23) 7; 25) 10; 27) 25; 29) 28; 31) 71; 33) 70; 35) 1; 37) 4; 39) 9; 41) 9; 42) 32; 45) не имеет решения; 47) 3; 49) —64; 51) 10; 53) 9; 55) $\frac{1}{4}$; 57) 1; 59) 4; 61) 9; 63) 49; 65) 4; 67) $\frac{(a-1)^2}{4}$; 69) 17; 71) 19; 73) не имеет решения; 75) 7; 77) 11; 79) $\frac{ab}{a+b}$.

234. 5) $\frac{3}{4}$, 2,5 и $2\frac{1}{3}$; 7) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$; 9) —3 и +5;

236. 17) $-\frac{4}{5}$ и — 1; 19) 0,—3 и — 5; 21) 0, $\frac{1}{7}$ и $-\frac{1}{8}$; 23) 0, — 2 и 1; 25) $\pm\sqrt{-16}$ и $\pm\sqrt{-9}$; 27) 0 и $-\frac{1}{2}$; 29) $-a$ и $-b$.

237. 11) 6 и 1; 13) 0.

291. 5) $\pm 2{,}5$; 7) ± 4; 9) ± 4; 11) $\pm\frac{1}{16}\sqrt{14}$; 13) ± 1; 15) ± 10; 17) ± 1; 19) ± 23; 21) 0; 23) $\pm\sqrt{a^2-b^2}$.

245. 1) —7 и 1; 3) 5 и —8; 5) $\frac{1}{15}$ и —1,6; 7) $\frac{16}{35}$ и —2; 9) 2,4 и —3,6; 11) —7 и — 1,4; 13) 5 и $1\frac{2}{3}$; 15) —4 и $-4\frac{1}{2}$; 17) 2 и 0,16; 21) $\frac{a+d}{b-c}$ и $\frac{a-d}{b+c}$; 23) $a-b$ и $a+b$; 25) $\frac{3}{4}m$ и $\frac{3m-8b}{3}$; 27) 2 и —4; 29) —3 и —5; 31) 1 и —4; 33) $l-m$ и $-m-l$; 35) $m-3a$ и $-m-3a$; 37) 1 и —2; 39) $3\frac{1}{2}$ и $-6\frac{1}{2}$; 41) $\frac{2m-p}{2}$ и $\frac{-2m-p}{2}$; 43) $-a-b-r$ и $r-a-b$; 45) $a+b-c$ и $a+b+c$; 47) 2 и —4; 49) 4 и —36; 51) —1,5 и 0,3; 53) 1 и —15; 57) 1 и 9; 59) $2a$ и $2b$; 61) $2m$ и $\frac{2}{m}$; 63) —2 и 1; 65) $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$; 67) 2 и 1; 69) 4 и 5; 71) 0,5 и 0,1; 73) $-\frac{3}{2}p$ и $\frac{1}{2}p$; 75) $-\frac{m}{4}$ и $-\frac{3m}{4}$; 77) l и $-m+l$; 79) $-1\pm\sqrt{7}$; 81) $-2\pm\sqrt{10}\,i$; 83) $\frac{-1\pm\sqrt{13}\,i}{2}$; 85) $\frac{-3\pm\sqrt{13}\,i}{2}$; 87) $m\pm\sqrt{n}$; 89) $\frac{l}{2}\pm\sqrt{n}$; 91) $\frac{p}{2}(-1\pm\sqrt{5})$; 93) $-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

247. 25) $\frac{5}{9}$ и $-\frac{9}{5}$; 27) $1\frac{7}{8}$ и —1,6; 29) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{5}$. 31) 1,7 и —2,7; 33) 2,5 и —0,4; 35) 2 и 1; 37) 2 и —3; 39) 5 и —3; 41) $-a$ и b.

248. 5) $a+1$ и $a-1$; 11) 6 и —10,6; 13) $\frac{5}{7}$ и $-\frac{9}{13}$; 15) $5\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{7}$; 17) $\frac{3\pm\sqrt{7}}{5}$; 19) —4 и $\frac{3}{7}$; 21) —2 и $\frac{5}{7}$; 23) $3\frac{1}{3}$ и $2\frac{1}{2}$; 25) 3 и $\frac{1}{3}$; 27) $\frac{1}{8}$ и $-\frac{1}{7}$; 29) $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{10}$; 31) $\frac{-n\pm\sqrt{n^2-ab}}{a}$.

251. 21) 8 и $\frac{1}{3}$; 23) $\frac{b}{2}$ и $-c$; 25) $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$; 27) $-\frac{c}{a}$ и $\frac{d}{c}$;

29) 2 и $\frac{5}{7}$; 31) 0 и 15. **255.** 1) $-2{,}00$ и $-2{,}18$; 3) 0,375 и $-0{,}889$; 5) 0,405 и 0,674. **256.** 1) 78,210 и 1,790; 3) 0,999 и $-1000{,}999$; **257.** 1) 6; 3) 0,1; 5) 1; 7) $-4\pm\sqrt{55}\,i$; 9) $\frac{-3\pm3\sqrt{3}\,i}{4}$; 11) $\frac{-4\pm\sqrt{29}\,i}{3}$.

263. 11) $(m-13)(m+34)$; 13) $(y-2000)(y-3)$; 15) $(a+23)(a+32)$; 17) $(y-19)(y-18)$; 19) $(x-m-n)(x+n)$; 21) $(x-b^2-a^2)(x-b^2+a^2)$; 23) $(y+3)(10y-7)$; 25) $(10x-49)(x-0{,}5)$; 27) $(2x-a)(3x-b)$; 29) $(2y-a^2-b^2)(2y-a^2+b^2)$; 31) $(z-2ab)(z-c)$. **268.** $p=1$, $q=-2$.

285. 7) 3 и 7; 9) $\frac{9}{28}$ и 3; 11) $4\frac{1}{8}$ и 1; 13) 4 и -2; 15) -4 и 1; 17) 0 и 5; 19) 1 и $\frac{1}{2}$; 21) -6 и $+4$; 23) 7 и 2; 25) 2 и $-6\frac{3}{7}$; 27) 12 и 1; 29) 8 и $-7\frac{3}{11}$; 31) 4 и -10; 33) 9 и 2; 35) 7 и $2\frac{4}{7}$; 37) 3 и $1\frac{2}{5}$; 39) 2 и $2\frac{18}{19}$; 41) 1 и $\frac{1}{a}$; 43) a и $\frac{1}{a}$; 45) $\frac{a}{b}$ и $-\frac{b}{a}$; 47) 0 и $\frac{2ab}{a+b}$; 49) $a+b+c$ и $-2c$; 51) 1 и $\frac{(c\alpha-\gamma a)+(c\beta-\gamma b)}{(a\gamma-\alpha c)-(a\beta-\alpha b)}$; 53) 0 и $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$; 55) ±1; 57) $\frac{a-3b}{2}$; 59) $a-2b$, $b-2a$; 61) 5 и -5; 63) 13; 65) 8; 67) a и $-a$; 69) a и b; 71) 6; 73) 3 и -3; 75) 5; 77) 11; 79) 2 и 3; 81) $\sqrt{b^2+a^2}$; 83) $\sqrt{a^2+14ab+b^2}$; 85) ±9.

325. 7) 12,05 *см.*; 9) 4,82 *м*; 11) 1) 3 *см* и 7 *см*; 13) 27,6 *см*; 15) 10 д. и 8,4 д; 17) 80 *м* и 99 *м*; 19) $\frac{\pm p\sqrt{p^2-4m^2}}{2}$; 21) 684 *м* и 783 *м*, 189 *м* и 288 *м*; 23) 12 *м* и 11 *м*; 25) ок. 15 *см*. **326.** 15) осн. 42 *м*; 17) 33,6 *м*. 19) $3\sqrt{114}$ *м*. **327.** 1) 12; 3) 5. **328.** 1) 7,23 *м*; 3) 84 *м.*; 5) 19,54 *см.*; 7) кас. $3\sqrt{7}$ *см*; 9) 0,618 *м* и 10,506 *м*. **329.** 1) 6, 8 и 10 *см.*; 3) 8 *м*; 5) 21 *м* и 9 *м*; 7) 512 *кв. дм.* **330.** 5) 4 *см* и 6 *см*; **331.** 5) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **332.** 1) 40; 3) 30; 5) 8000 р.; 7) 10 ч.; 9) 6 ч. и 14 ч.; 11) 8; 13) 8. **333.** 1) а) ок. 3 *сек.*, б) ок. 3,3 *сек.*; 3) $\backsim$ 25 *м* в *сек.*; 5) ок. 4,35 *см*; 7) а) $53\frac{4}{7}$ *см* и $18\frac{4}{7}$ *см*, б) $\frac{45a^2}{a^2-b^2}$; 9) ок. 5,32 *м* или 0,282 *м*;

337. 7) $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ и 1; 9) 2 и $-1\pm i\sqrt{3}$; 11) -3 и $\frac{3(1\pm i\sqrt{3})}{2}$; 13) ±1; 15) 3, -2 и -1; 19) 7 и 6. **338.** 7) $\frac{2-n}{m}$, $\frac{a-n}{m}$; 9) $\frac{2b-3l+m}{3k}$, $-\frac{m+l}{k}$; 11) $2a-3b$ и $3a-4b$; 13) 1 и 4; 15) $x_1=\frac{a}{b}$, $x_2=-\frac{b}{a}$; 17) $a-2b$, $b-2a$ и 2, $\frac{1}{2}$. **339.** 21) $\pm(a+b)$ и $\pm(a-b)$;

23) $\pm\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b^2}}{2}}=\frac{\pm\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b}}{2}$; 25) $\pm\sqrt{3(a+b)}$ и $\pm\sqrt{a+b}$; 27) $\pm 2a$, $\pm 2b$; 29) $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-2m\pm 2\sqrt{m^2+4p}}}{2}$. **340.** 1) 2, 1, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ и $-1\pm i\sqrt{3}$; 3) 1 и $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{3}$; 5) $x+2=\pm 2$, $\pm 2i$, ± 3, $\pm 3i$; 7) 2, 1 и др.; 9) $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{4}$; 11) 2 и 7 (ост. комплексные).

341. 1) $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{7}$ и $-\frac{1}{2}$; 3) 3, 5, 15 и 1; 5) $-1\frac{2}{3}$, 5, $-1\frac{1}{4}$ и $2\frac{1}{2}$; 13) 64 и 16; 15) 16 и 1; 17) 1 и $\left(\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 19) 25; 21) обозн. $\sqrt{x^2-x+1}=z$, пол. $2z^2+3z-5=0$. **342.** 1) 191^2 и $(-71)^2$; 3) ± 4 и ± 2; 5) 225, 144, 100. **344.** 1) 2 и $\frac{1}{2}$; 3) -1 и $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; 5) -1, $2\pm\sqrt{3}$; 7) 1, 2 и $\frac{1}{2}$; 9) 1, 3 и $\frac{1}{3}$; 11) 1, 1,5 и $\frac{2}{3}$; 13) 1, 4 и $\frac{1}{4}$; 15) ± 1, -2, $-\frac{1}{2}$; 17) ± 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$; 19) -1, -1, 2, $\frac{1}{2}$; 21) 2, $\frac{1}{2}$, $\pm i$; 23) -1, -1, 2 и $\frac{1}{2}$; 25) -1, -1, 4 и $\frac{1}{4}$; 27) 1, -1, 2, $-\frac{1}{2}$; 29) $\frac{1}{2}$, -2, $\frac{5\pm\sqrt{89}}{8}$; 31) 1, 1, $\frac{-7\pm\sqrt{13}}{6}$; 33) 1, 2, $\frac{1}{2}$ и $\pm i$; 35) -1, $\pm i$, 3 и $\frac{1}{3}$; 37) -1, 3, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$ и -2. **397.** 5) 1 и $11+4\sqrt{7}$, 9 и $11-4\sqrt{7}$; 7) $x=3$, $x=\frac{-3(1\pm i\sqrt{3})}{2}$. **399.** 7) ± 6 и ± 4; 9) $\pm 1{,}2$ и $\pm 0{,}5$.

400. 1) $\pm\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2}$ и $\pm\frac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{2}$; 3) $\pm(a+b)$, $\pm(a-b)$; 5) $\pm(a+b)$; $\pm\frac{a+b}{2}$; 7) ± 6 и ± 7; 9) $x=\pm 9$, $x=\pm\sqrt{2}$; 13) $x=\pm 5$, $x=\pm 7$; 21) ± 20 и ± 5; 23) $\pm 11\cdot\pm 3$. **402.** 5) $\frac{n\pm\sqrt{2m^2-n^2}}{2}$; 7) 10 и 7; 15) 0, $a-b$ и 0, $b-a$. **404.** 9) 81 и 9.

405. 3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ и 3, 2, 5 и 2; 7) $x=-p\pm\sqrt{p^2+r^2}$; 9) $y=\pm\sqrt{\frac{-a^2\pm\sqrt{a^4-4m^4}}{2}}$.

406. 11) $12+4\sqrt{5}$ и $12-4\sqrt{5}$; 13) 2 и $\frac{1}{2}$; 5) 7 и $\frac{1}{7}$; 17) 2 и 1; 19) 4 и 5; 21) 2 и 1; 23) ± 7 и ± 3; 25) $x=2$; $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$; $y=1$; $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; 27) 1 и 3.

407. 3) $x=\frac{d\pm\sqrt{d^2+4m^2}}{2}$; 5) 5 и 2, -2 и -5; 7) 25, -4 и 4, -25; 9) 25, -4 и 4, -25; 11) 2 и $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$ и -2; 13) ±5 и ±4; 15) $16a^2$ и $9a^2$; 17) ±5 и ±4. **408.** 1) ±12 и ±16; 3) ±7 и ±5; 5) ±2 и ±3; 7) ±13 и ±2; 9) 3 и 1, -3 и -1. **409.** 11) 12, -6 и 8, -16; 13) ±6 и ±8; 15) ±18 и ±8; 17) 4 и 6, 8 и 2. **410.** 7) 20, 35 и -3, -11; 9) 6, 5 и 2, 1; 11) ±7, ±9; 13) 4, 3 и $-2\frac{1}{3}$, $\frac{7}{15}$; 15) ±5); 17) 4 и $-3{,}6$ 6 и $-5{,}4$; 19) $\pm\sqrt{ab}$; $\pm\frac{\sqrt{ab}}{b}$; 21) ±4 и ±5; 23) $y=\frac{8}{41}\sqrt{205}$ или $\frac{8}{41}i\sqrt{205}$; 27) 3 и 2; 29) $\frac{ab-1\pm\sqrt{a^2+b^2-4ab-1}}{2a(b-a)}$. **415.** 1) 9, ±8; 3) $y_1=8$, $y_2=6$, $y_3=-2+\sqrt{46}$, $y_4=-2-\sqrt{4}$; 5) (0,7), (0,7), $\left(\pm\frac{14}{5}, \frac{168}{25}\right)$; 7) не пересек.; 9) на биссектрисах углов между осями. **416.** 5) $\pm\frac{a}{\sqrt{a+b+c}}$; 7) $\pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{a}$; 9) $x=\frac{\sqrt{abc}}{b}$; 11) $\frac{a}{\sqrt[4]{abc}}$; 13) ±4, ±12 и ±18; 15) $x=\pm3, y=\pm7$; 17) $z=\pm5$; 19) 0, 0, 0 или $x=1, y=3, t=2$; 21) $16a$, $4a$ и a 23) $z=1$ и -17; 25) $x=-5$ и 5,4; 27) $x=8$ и 10,5; 29) 4, 1, 3 и 2. **417.** 31) 9261, 6859; 33) 11 и 7, -7 и -11; 35) ±8, ±9, ±13; 37) 45, 15 и 5; 39) 4, 10, 25; 41) ±2, ±3 и ±4; 43) 9, 3, 21, 7. **418.** 1) 16 *см* и 9 *см*; 3) 40 *см* и 15 *см*; 5) 21 *м*, 20 *м*; 7) 77 *м*, 36 *м*; 9) 35 *см* и 1 *см*; 11) 33 *см* и 56 *см*; 13) $12\sqrt{5}$ *см* и $6\sqrt{5}$ *см*; 15) 50 *м*, 40 *м*, 30 *м*; 17) 45 *м* и 21 *см*; 19) 168 *кв. ф*; 21) 48 д. и 20 д.; 23) $\frac{1}{2}(p-a\pm\sqrt{a^2+2ap-p^2})$; 25) $\frac{1}{4}(p\pm\sqrt{8d^2-p^2})$; 27) меньш. ст. 25,19 *см*; 29) 10 *см*, 6 *см*, 14 *см*; 31) 60 *см*, 91 *см*, 109 *см*; 33) 8 *см*, 9 *см*, 12 *см*; 35) 5 *см*, 7 *см*; 37) 21 *см*, 40 *см*; 39) 10 *см*, 26 *см*; 41) 324 π *куб. см*, 216 π *кв. см*; 43) 6 *см*, 8 *см*, 10 *см*; 45) 3 *см*, 9 *см*; 47) 2 *см*, 8 *см*; 49) 4 *см*, 9 *см*; 51) $h=2r$, $r_1=r_2=r$; 53) 9 *см*, 1 *см*; 55) $2\sqrt{15}$ *м*, 5 *м*, 3 *м*. **419.** 1) $\backsim$ 14 *кг*, $\backsim$ 35 *кг*; 3) 120 *см*, 30 *см*; 5) 0 и 0,54 *см* и 108 *см*.

443. 1) 501-й и т. д.; 3) 2776-й и т. д. **444.** $x>\frac{A-a_1}{a_2-a_1}+1$. **445.** 1) 1001. **446.** 1) 578. **448.** $a_n=1+2(n-1)$, $s_n=n^2$. **450.** 1) 5050. **452.** 1645. **454.** 1683. **456.** $\frac{p\cdot n(n+1)}{2}$. **460.** $r=1\frac{1}{2}$. **461.** 1) $r=\frac{b-a}{n+1}$; 2) $\frac{b(n+2)-a}{n+1}$, $\frac{b(n+3)-2a}{n+1}$, $\frac{b(n+4)-3a}{n+1}$; **462.** $a_1=-14$; $r=4$. **464.** -40, -20, 0, 20, 40, 60, 80. **468.** $a_1=7$; $n=31$;

470. $a_4=20$; $r=-3$. **472.** —16, 2; 181, —2. **474.** $n=2k+1$.
476. 3270 р., 72750. **478.** 5 р, 243 р. **480.** А выигрывает пари.
482. 16 кач. **484.** 112,7 *м* и 705,6 *м*. **486.** 10. **488.** $1\frac{2}{3}$ *мин*.
490. 382 *м* в сек.; 7664 *м*. **492.** 1,5 *м*. **499.** 1) $U_n=\frac{k(k+1)}{2}$.
502. $U_k=k^2+2k-1$; $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n^2$. **503.** 340.
504. $U_k=\frac{1}{9}(k^2+4k+1)$; 1, $1\frac{7}{9}$, $2\frac{7}{9}$, 4, $5\frac{4}{9}$...
$S_n=\frac{1}{9}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}+n\right]$. **505.** В последнем ряду: $\frac{n(n+1)}{2}$;
всего: $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$; **506.** 1463. **524.** 1) $\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$; 3) $\frac{a^8-b^8}{a+b}$;
5) $\frac{b\sqrt[6]{b}-a\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{b}-\sqrt[6]{a}}$; 7) $\frac{b-a}{\sqrt[8]{b}-\sqrt[8]{a}}$. **525.** 1) 3, —2 и 1, 2; 3) 3, —2 и 1, —4; 5) 2, 2.
527. $u_1=\frac{\sqrt[20]{a^{19}b}-a}{b-a}\cdot a$. **529.** $u_1=\frac{a^2+b\pm\sqrt{(3a^2-b)(3b-a^2)}}{4a}$. **531.** $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2},\ldots$
533. a^8, a^7b, a^6b^2, ... **535.** $q=\sqrt[12]{2}$. **537.** Между 12 и 1 часом дня.
545. $\backsim$ 0,16151 атм. **545.** $\backsim$ 20 качаний (для двухцилиндрового насоса) или $\backsim$ 40 (для одноцилиндр.). **567.** $1\frac{1}{3}$. **569.** $a_1=\frac{1}{2}$; $y<2$.
571. $u_1=q=\frac{1}{2}$. **573.** 0,7; 0,07; ... $s=\frac{7}{9}$. **575.** a, $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;
$a\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$; $s=\frac{a}{2}(3+\sqrt{5})$. **579.** $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots.$ **582.** $\frac{a}{1-q}$
3) $\frac{c^2}{c-c_1}$; 5) $h=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$; $r=\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2(2a+b)}$; $l=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$; $s=\frac{(2a+b)^2}{16}$;
7) $a^2\sqrt{3}$; 9) s кругов$=r\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$, s квадр.$=4r^2$. **583.** 10) 2; 11) 3.
652. 1) 41,633; 3) 0, 31313; 5) 10,495; 7) 2,7152; 9) 82,19; 11) 0,29969; 13) 4,6061; 15) 3,5952; 17) 7,4077; 19) 2,0142; 21) 4,6153; 23) 16,981; 25) 44,474; 27) 16,348; 29) 3,2164; 31) 3,5132; 33) 111,96; 35) 39,678; 37) 2,0801; 39) 2,6684; 41) 3,873; 43) 27,116; 45) 2,6827; 47) 1,6681; 49) 0,8741; 51) 0,99377; 53) 0,95682; 55) 0,61937; 57) 0,9565; 59) 0,45081; 61) 1,3343; 63) 2,3137; 65) 3,0742; 67) 4,843; 69) 0,92503; 71) 0,4754; 73) 0,16318; 75) 0,18442; 77) 0,69999; 79) 0,60008; 81) 23; 85) 3,2808; 87) 3,24046; 89) 2,1308; 91) 0,80822; 93) 24,451; 95) 0,52826; 97) 0,70682; 99) 1,634. **684.** 3) $\frac{\lg c}{\lg ab^m}$; 5) $\frac{p\lg a-q\lg b}{m\lg a-n\lg b}$; 7) $x\backsim 0,47712$; 9) $\backsim -0,34265$;
11) $\frac{2}{\lg_{10}7}$; 13) $\backsim$ 0,4929; 15) 1,3713; 17) 0,1900; 19) 1,111. **685.** 5) 2;
7) $\pm\sqrt{5}$; 9) 8, 6; 11) —3; 13) 2; 15) 3; 17) 3; 19) 2 (другой корень

дробный); 25) 8; 27) 128; 29) $\sqrt[3]{4}$; 31) $\sqrt{5}$; 33) $5\sqrt{5}$. **792.** 1) 60; 3) 50.

744. $\frac{6!}{2!2!2!}$; $\frac{8!}{3!5!}$. **746.** 1) $6!2^6$; 2) 12! **762.** 1) 9^5; 3) $9{,}10^4$.

763. 1) 60480. **764.** 1) а) 30; б) 120; 3) 6. **776.** 1) 21; 3) 66.

777. 1) $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$; 3) $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$. **778.** 1) 15; 3) 120. **779.** 1) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

3) $\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$. **780.** 1,3) 10. **782.** Около 4971 л. **784.** 1) 3;

3) $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$. **786.** $\frac{9!}{2!3!4!}$. **788.** $\frac{32!}{(8)^4}$. **790.** $\frac{2n!}{(n!)^2 2!}$. **792.** $\frac{3n!}{3!(n!)^3}$.

794. 3200. **795.** 20. **797.** 1) 650; 3) 14950. **832.** 1) 2,591;

3) 1,116; 5) 0,3882; 7) 0,9304; 9) 1,117; 11) 1,268; 13) 1,125; 15) 1,029.

833. 1) 1,16986; 3) 1,21551; 5) 1,22926; 7) 1,36086. **837.** 1) 252;

3) **сумма**$=29150$; 5) $n=14$; 7) **такого члена нет.** **838.** 1) $28(a-1)^2(a+1)$.

863. 7) $1-2i$; 9) i; 11) $3+2i$; 13) $12-5i$; 15) $1-i\sqrt{3}$; 17) $\sqrt{2i}-\sqrt{3}$.

19) $3-2i\sqrt{5}$; 21) $\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}$; 23) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}+\frac{2mn}{m^2+n^2}i$; 25) $-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}$; 27) 0;

29) $2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}$; 31) $\frac{2(bc-ad)}{c^2+d^2}i$; 33) $2a$. **866.** 1) $-xy$; 3) $-a$;

5) $6i$; 7) $-\sqrt{5}$; 9) ab^8i; 11) a^2b^2i. **867.** 1) $(a-b)i$; 3) $(a-b)^4$.

869. 1) $2i$; 3) a^2-b^2+2abi; 5) $1+4i\sqrt{3}$; 7) $2-4i\sqrt{2}$; 9) $2(a^2-b^2)$;

11) а) $2(i-1)$; 13) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; 15) $-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 17) 1.

871. 1) $2(a^5+10a^3b^2+5ab^4)$; 3) 32; 5) $64i$; 7) -56280; 9) -1024.

873. 1) $\pm\frac{\sqrt{2a}}{2}(1+i)$; 3) $\pm(3+2i)$; 5) $\pm(5+2i)$; 7) $\pm(4+i)$; 9) $\pm(6+7i)$;

11) $\pm(2+9i)$; 13) $\pm(2+0{,}5i)$; 15) $4, -4, 2i, -2i$. **876.** 1) 6; 3) 8. **877.** 1) $\sqrt{\text{[illegible]}}$;

3) $\sqrt{10}-3i$. **927.** $\sqrt{5}(0{,}447+i\cdot 0{,}895)$. **928.** 1) при $k=0$: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$,

при $k=1$: $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ и т. д.; 3) при $k=0$: $\sqrt[6]{13}(0{,}947+i0{,}322)$;

5) при $k=0$: $\sqrt[8]{34}(0{,}605+i\,0{,}796)$ и т. д. **929.** 1) $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$

3) $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[5]{5}(0{,}309+0{,}951i)$ и т. д.; 5) $\sqrt[8]{2}$, $\sqrt[8]{2}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $i\sqrt[8]{2}$ и т. д.;

7) $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$, $\frac{i-\sqrt{3}}{2}$, $-i$; 9) $\pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}$. **949.** 1).

3) a; 5) 1; 7) $\frac{1}{2}$; 9) $4x$; 11) $2ax$; 13) $2x$; $\frac{2x}{a}$

17) $2(x-1)$; 19) $2ax+b$; 21) $2ax+b$. **950.** 1) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{}$;

9) $\operatorname{tg}\alpha_0=0$, $\operatorname{tg}\alpha_1=4$, $\operatorname{tg}\alpha_{-3}=-12$; 11) $\operatorname{tg}\alpha_0=0$, $\operatorname{tg}\alpha_1=2a$, $\operatorname{tg}\alpha_{-3}=-6a$; 15) $\operatorname{tg}\alpha_0=0$, $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{2}{a}$, $\operatorname{tg}\alpha_{-3}=-\frac{6}{a}$. **954.** 1) $x=0$, $y=2$; 3) $x=0$, $y=-1$; 5) $x=-4$, $y=-4$; 7) $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{7}{4}$; 9) $x=\frac{1}{8}$, $y=3\frac{31}{32}$; 11) $x=-1$, $y=-17{,}5$; 13) $x=\frac{a-b}{2}$, $y=\frac{(a+b)^2}{2}$; 15) $x=\frac{a+b}{2}$, $y=-\frac{(a-b)^2}{4}$. **958.** 1) $p=-4$; 3) $p=0$. **959.** 1) $p=-2$, $q=-2$; 3) $p=-3$, $q=4{,}25$. **965.** 1) $y=-x^2+2x+q$; 2) $y=-x^2-6x+q$. **968.** а) 9,81 *м* в сек.; б) 19,62; в) 31,39; 3) а) $c-29{,}43$; в) gt и $-gt$. **969.** 1) $t=\frac{c}{g}$, $s=\frac{c^2}{2g}$; 3) 12 *м*; 5) квадрат.; 7) а) на полуразность сторон; б) $s=\frac{(a+b)^2}{4}$; в) $\frac{(a+b)^n}{4}$; 9) z min. в прямоугольном треугольнике с гипотенузой c и катетом b, прилежащим углу α; 11) квадрат; 14) прямоугольник с высотою $\frac{h}{2}$ и основанием $\frac{b}{2}$; 15) $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. **974.** 1) $6x^2$; 3) $4\pi x^2$; 5) $3ax^2$; 7) $3x^2+2x$; 9) $3x^2-12$; 11) $3x^2-2x-16$; 13) $3x^2-22x-16$; 15) $3x^2-2x-4$; 17) $3x^2+2ax+b$. **975.** 1) $3x^2\pm1$; 3) $\pm6x^2$; 5) $3(x\pm1)^2$; 7) $3x^2$, $24x^2$. **977.** Y_{max}. при $x=-\frac{1}{3}$, y_{min}. при $x=0$; 3) не им. ни *max.*, ни *min.*; 5) Y_{max}. при $x=\frac{6+\sqrt{3}}{3}$ и y_{min}. при $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}$; 7) не имеет; 9) $x_{min}=1$, $x_{max}=-\frac{1}{3}$; 11) ни max., ни min.; 13) При $a\geqq0$ не имеет ни maximum ни minimum; 15) Если $b-a>0$, то minimum при $x=b$ и max. при $x=\frac{2a+b}{3}$; 17) не имеет ни max., ни min. **987.** 1) min. при $x=-\frac{b}{2a}$; 5) не имеет; 7) minimum при $x=0$, maximum при $x=-\frac{2b}{3a}$. **988.** 1) $x=\frac{1}{3}$, $y=1\frac{16}{27}$, $\operatorname{tg}\alpha=1\frac{2}{3}$; 3) $x=0$, $y=25$, $\operatorname{tg}\alpha=-3$; 5) $x=1$; 7) $x=5\frac{1}{3}$; $y=-\frac{14\cdot49}{27}$; 9) $x=0$, $y=0$, $\operatorname{tg}\alpha=6$. **989.** 1) $x=-\frac{a}{3}$, $y=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$; $\operatorname{tg}\alpha=b-\frac{a^2}{3}$; 3) $x=0$, $y=q$, $\operatorname{tg}\alpha=p$. **994.** 1) при $r=2h$; 3) $v_{max}=\frac{32}{81}\pi r^3$; 5) при $h=\frac{2(z-a)+\sqrt{3r^2+(r-a)^2}}{3}$.

1003. 1) x^2+1; 3) x^2-2x+2; 5) x^2-4x+5; 7) x^2+q^2. **1004.** 1) $x^2+1=0$; 3) $x^2-4x+5=0$. **1005.** 1) $x^3-3x^2+x-3=0$; 3) $x^3-5x^2+9x-5=0$; 5) $(x+2)(x^2-2x+2)=0$.
1006. 1) $x^4-2x^3+3x^2-2x+2=0$; 3) $(x^2-4x+5)(x^2-2x+5)=0$; 5) $x^4+(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$. **1008.** 1) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=+5$, x_4 и x_5—мнимые; 3) 1, -3, $+2$; 5) $x_1=x_2=1$, $x_3=+i$, $x_4=-i$; 7) $x_1=-1$, $x_2=x_3=1$; $x_4=x_5=-1$. **1009.** 1) $x^3-6x^2+11x-6=0$; 3) $x^5-5x^3+4x=0$; 5) $2x^5-7x^4-9x^3-9x^2+7x-2=0$; 7) $x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1=0$.
1012. 1) $x^3-6x^2+11x-6=0$; 3) $x^3-19x+30=0$; 5) $x^3-7x^2-5x+35=0$; 7) $(x+8)(x-0{,}36)(x+0{,}75)=0$; 9) $8x^3+6x^2-553x-833=0$; 11) $x^3-5x^2+8x-6=0$; 13) $x^3-8x+3=0$. **1013.** 1) $(x-5)^3=0$; 3) $(x-w)^3=0$. **1014.** 1) $x^3-10x^2-100x+1000=0$; 2) $(x-a)^2(x-b)=0$.
1016. 1) $x^3-3x^2-10x+24=0$; 3) $24x^3-26x^2+9x-1=0$; 5) $x^3-3x^2+7x-5=0$.
1017. 1) $x_1=3$, $x_{2,3}=\dfrac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}$; 3) $x_1=6$, $x_2=x_3=1$; 5) $x=1, 2, 3$.
1018. 1) $y=(x-1)(x+2)(x+3)$; 3) $y=x(x+2)^2$.
1019. 1) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$; 3) $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$; 5) $2x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$; 7) $x^4-7x^2+12=0$; 9) $x^4+x^2+1=0$.
1020. 2) $x^4+5x^2+4=0$; 3) $x^4-17x^2+16=0$; 5) $x^4+4=0$.
1021. 1) $15x^4-128x^3+290x^2-128x+15=0$; 3) $x^4-2{,}5x^3+2x^2-2{,}5x+1=0$; 5) $x^4-3x^3+4{,}5x^2-x+1=0$. **1022.** 1) $p=5$, $q=2$; 2) $p=4$, $q=5$.
1023. 1) 3, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{6}\cdot\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; 3) $x_{1,2}=1$, $x_3=2i$, $x_4=-2i$; 5) ±2; $3\pm\sqrt{5}$; 7) 1, 2, 3, 6. **1026.** 1) $27z^3-54z-80=0$; 3) подстановка: $x=x'+1\frac{2}{3}$. **1034.** 1) Подстановкой $x=x'-1$; 3) $x=x'-2$; 5) $x=x'-a$. **1059.** 1) $4x^3$; 3) $15x^{14}$; 5) x^5; 7) $64x^3$; 9) $5a^5x^4$; 11) 25; 13) nx^{n-1}; 15) $(2n-1)x^{2n-2}$; 17) x^n; 19) $5\sqrt{5}x^4$; 21) $6\pi^2x^5$. **1060.** 1) $y'=5x^4$, $y''=4.5.x^3$, $y'''=3.4.5x^2$; 3) $2x^5$, $5.2x^4$, $4.5.2.x^3$; 5) $(n+1)ax^n$, $n(n+1)ax^{n-1}$, $(n-1)n(n+1)ax^{n-2}$; 7) $\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, $\dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}$, $\dfrac{x^{n-3}}{(n-3)!}$; 9) $\dfrac{a(n-1)x^{n-2}}{b}$, $\dfrac{a(n-1)(n-2)x^{n-3}}{b}$, $\dfrac{a(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}}{b}$. **1064.** 1) $y'=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}$; 3) $y'=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots+(n-k+1)a_kx^{n-k}+\ldots+a_{n-1}$; 5) $y'=x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1$. **1068.** 1) $2(x^5+x^3+x)\,.\,(5x^4+3x^2+1)$; 3) $2(x^n+x^{n-1}+\ldots+x^3+x^2+1)[nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\ldots+2x+1]$; 5) $6x^6+3x^4-4x^3-2x^2-1$; 7) $x^nf'(x)+nx^{n-1}f(x)$; 9) $2f(x)\,.\,f'(x)$; 11) $y'=-5(1-x)^4$; 13) $y'=bn(a+bx)^{n-1}$. **1079.** 1) $\dfrac{33k}{2}$; 3) $s=0$; 5) $\dfrac{728}{3}$; 7) 64; 9) 0. **1080.** 1) 1; 3) 5; 5) ±1; 7) $\pm\sqrt[4]{2}$.
1081. 1) Нет; 3) при $x=-1$; 5) нет; **1082.** 1) ±1; 3) ±3;

5) $-\frac{1}{2}$. **1083.** 1) При действительных значениях x не получает; 3) при $x=-2$. **1086.** 1) 2; 3) n; 5) na^{n-1}; 7) 6; 9) $\frac{7}{11}$; 11) $\frac{3}{4}$. **1089.** 1) $y'=-\frac{a}{x^2}$; 3) $y'=-\frac{2a}{x^3}$; 5) $-\frac{n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}$.

1091. 1) $y'=-\frac{1}{x^{n+1}}$, $y''=\frac{n+1}{x^{n+2}}$; 3) $-\frac{a}{x^2}+1$, $\frac{2a}{x^3}$; 5) $a-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}$, $\frac{2b}{x^3}+\frac{6c}{x^4}$; 7) $-\frac{a_1}{x^2}-\frac{2a_2}{x^3}-\ldots-\frac{ka_k}{x^{k+1}}\ldots-\frac{na_n}{x^{n+1}}$. **1092.** 1) $Y_{max}=-6$, $Y_{min}=+6$; 3) $Y_{min}=8$, $x=\pm 2$; 5) Minimum при $x=\pm 2$, max. при $x=-2$.

1095. 1. **1096.** 1) $Y_{max}=-6$, $Y_{min}=2$; 3) $Y_{max}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{14}$; 5) $Y_{max}=0$, $Y_{min}=\frac{20}{9}$; 7) $Y_{max}=4$, $Y_{min}=8$; 9) $Y_{max}=1$, $Y_{min}=9$.

1097. 1) $\operatorname{tg}\alpha=0$; 9) ширина $\frac{20}{\sqrt[3]{\pi}}$ см.; высота $\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ см. **1099.** 1) $y'=1$; 3) $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **1100.** 1) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$; 5) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 7) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$; 9) $-\frac{x}{\sqrt{1-x_2}}$; 11) $y'=3x\sqrt{x^2+1}$. **1101.** 1) Квадрат; 3) $h=\frac{r\sqrt{5}}{5}$; 5) катеты$=\sqrt{2s}$. **1106.** 1) 2; 3) a; 5) $\frac{1}{2}$; 7) 1; 9) $\frac{1}{a}$.

1109. 1) $a\cos x$, $-a\sin x$; 3) $\sin 2x$; $2\cos 2x$; 5) $4\sin^3 x\cdot\cos x$, $4(3\sin^2 x\cdot\cos^2 x-\sin^4 x)$; 7) $\sin 2x$, $2\cos 2x$; 9) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$, $\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}$; 11) 0, 0; 13) $-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$, $\frac{2+4\cos^2 x}{\sin^4 x}$, 15) $\cos 2x$, $-2\sin 2x$; 17) $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$, $\frac{1+\sin^2 x}{\cos^6 x}$; 19) $y'=0$.

1112. 1) Maxim. при $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, min. при $x=\frac{\pi}{6}(3+2k)$, 3) max. при $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, min. при $\frac{5}{4}\pi+2k\pi$; 5) max. при $x=\pi(1+4k)-1$, min. при $x=\pi(4k-1)-1$. **1114.** 1) $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 3) $\frac{2}{\cos^2 2x}$, $\frac{8\sin 2x}{\cos^3 2x}$; 5) $\frac{1}{n\cos^2\frac{x}{n}}$, $\frac{2\sin\frac{x}{n}}{n^2\cos^3\frac{x}{n}}$; 7) 0; 9) $\frac{ab}{\cos^2(bx+c)}$, $y''=\frac{2ab^2\sin(bx+c)}{\cos^3(bx+c)}$; 11) $\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}$; 13) $x\sin x$,

$x\cos x+\sin x$; 15) $y'=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$, $y''=2\cdot\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\cos^3 x\ \sin^3 x}$.

1118. 2) *a*) Имеет нули при $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$, maxim. при $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, беск. знач. нет; 3) нули при $x=k\pi$, maxim. при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, беск. знач. нет. **1120.** $\frac{\pi}{2}$.

Дополнительные главы.

5. 1) $\frac{1}{2}$. **6.** 1) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{2}{3}$. **7.** 1) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$. **8.** 1) $\frac{1}{36}$; 3) $\frac{1}{36}$

9.

12	11	10	9	8	
2	3	4	5	6	7
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$

10. $\frac{1}{216}$, $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{10}{216}$, $\frac{5}{72}$, $\frac{7}{72}$, $\frac{25}{216}$, $\frac{21}{216}$.

11. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$. **12.** 1) $\frac{5}{18}$; 3) $\frac{1}{36}$. **18.** 1) $\frac{2}{3}$. **23.** 1) $\frac{1}{36}$; 3) $\frac{1}{4}$.

24. 1) $\frac{1}{15}$; $\frac{4}{45}$. **25.** 1) $\frac{6}{95}$; 3) $\frac{2}{19}$. **28.** 1) $\frac{5}{9}$. **29.** 1) $\frac{8}{8}$; 3) $\frac{1}{8}$

31. 1) $\frac{1}{2^n}$; 3) $1-\frac{1}{2^n}$. **32.** 1) $\frac{48}{95}$; 3) $\frac{14}{95}$. **33.** 1) $\frac{4}{35}$,

35. *A* $\frac{2}{3}$. **36.** 1) 0,1; 3) 0,4. **37.** $\frac{9}{64}$. **40.** 2) а) 1,04, в) 1,035, д) 1,0475, ж) $1\frac{29}{600}$; 2) а) 5%, в) 3,6%, д) 5%, ж) 4%.
43. 1) 134,39 р., 3) 148,02 р. **45.** 4865,1 р. **47.** 1) 14974,5 р.;) 19352,6 р.; 5) 10326,7 р. 7) 143363 р. **49.** 41457 р. **0.** 1) 1791 р.; 3) 1814,7 р. **54.** 792,92 р. **57.** 1) 5259,8 р.) 1527,96 р.; 5) 4984 р. **59.** 8010 р. **61.** 1) 8800 р.; 3) 120 р.; **3.** 5,512%. **64.** 1) 3,5%. **65.** 21 г. **67.** 1) 17 л.; 3) 28 л.; 5) 27 л. **68.** 1) 23,44 г.; 3) 36 л. 5 мес. **69.** 1) а) в 7,2446 раза, в) в 2,6658 раза; 3) 6,168%; 5) при учете сумм на день покупки оказывается, что *B* предлагает на 614 р. больше *A*, *C* на 127 р. меньше *A*.; 7) 389881 р.; 9) ок. 18 л. **70.** 3) для 1 года: 111 руб.; для 2-х лет: 122,31 р.; для 3-х лет: 134 р.; 5) 14558,5 р.; 7) 2267 р.; 9) 27 л.; 11) 84,30 р.; 13) 3628,9 р. **71.** 3) 2207,5 р.; 7) 3032,2 р.; 9) а) 15169,3 р.; г) на 16-м году. **72.** 1) *A* вносит на 28,77 р. больше *B*; 5) 1474 р. приб.; 7) 18516 р. **73.** 3) а) 2,4; 2,414; 2,421 2,426. **74.** 7) postnum. 13481 р. и praen. 14087,7 р.; 9) 7209,7 р. **75.** 1) Предл. *C* выгоднее предложения *A* на 1453,2 р. и предложения *B* на 1219,2 р.; 3) а) 9667 р.; в) в два срока по 5309 руб. и в два срока $\left\{\begin{array}{l}\text{перв. } 3656{,}4 \text{ р.}\\ \text{втор. } 7312{,}8 \text{ р.}\end{array}\right.$; 5) 1707,7 р.

102. 1) $x>12$; 3) $x>5b-2a$; 5) при $m>0$ $z>\frac{mp-a}{15}$, при $m<0$ $z<\frac{mp-a}{15}$; 7) $x>7\frac{2}{9}$ или $x<7$. **106.** 3 ф. и 4 ф.; 4 ф. и 5 ф. и т. д. **108.** $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ и $\frac{6}{7}$. **112.** 1) $x<10$; 3) $z>\frac{8}{13}$; 5) $x>\frac{1}{2}$; 7) $k>-93\frac{3}{5}$; 9) при $b>4$, $t>b-4$, при $b<4$, $t<b-4$; 11) $y>\frac{m+n}{m-n}$ (при одинаковых знаках у m и n ($m\neq n$) и $y<\frac{m+n}{m-n}$ (при разных знаках у m и n). **146.** 1) 1 и 330, 4 и 320 и т. д.; 3) 20 и 20, 23 и 40 и т. д.; 5) 13 и 5, 6 и 10; 7) 1 и 1, 3 и 6 и т. д. или 1 и 4, 3 и 9 и т. д.; 9) 25 и 13; 11) 104 и 4, 116 и 21 и т. д. 13) 123, 234, 345; 15) $\frac{38}{48}$ и $\frac{3}{36}$, $\frac{33}{48}$ и $\frac{7}{36}$ и т. д.; 17) $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}$; 21) $x=13t-6$ при $t>0$; 23) 2 и 30, 5 и 25 и т. д.; 25) 99; 27) 10 и 5. **167.** 1) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{17}$; 5) $\sqrt{28}$; 7) $\sqrt{20}$. **171.** 1) 13 и 3, 50 и 17 и т. д.; 3) 7 и 2 и т. д.; 5) 5 и 101; 14 и 24.

Оглавление 1-й части.

Стр.

Предисловие 3

Отдел первый.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Употребление букв.

§ 1. Число и действия. Геометрическое представление чисел на прямой (ось) 5
§ 2. Значение скобок и их употребление 8
§ 3. Употребление букв 10
§ 4. Числовые значения буквенных выражений 15
§ 5. Знак равенства. Тожества и уравнения 18
§ 6. Знаки неравенства. Неравенства 20
§ 7. Коэффициент. Приведение 21

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Четыре основные действия.

§ 8. Сложение и вычитание одночленов. Уравнения и задачи . . . 22
§ 9. Сложение и вычитание многочленов 29
§ 10. Умножение и деление одночленов. Уравнения. Упражнения . . 37
§ 11. Степени 43
§ 12. Умножение и деление многочленов. Умножение многочлена на одночлен. Умножение многочленов. Преобразование многочленов в произведения. Подстановки. Уравнения. Деление многочлена на одночлен 50
§ 13. Задачи на составление уравнений 63

Отдел второй.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Стр.

§ 1. Нуль 66
§ 2. Введение отрицательных чисел 68
§ 3. Сложение и вычитание относительных чисел 71
§ 4. Знак числа и знак действия 75
§ 5. Упражнения 77
§ 6. Умножение и деление относительных чисел. Умножение многочленов. Законы действий. Деление многочленов. Уравнения . . 81
§ 7. Исследование формул 91

Отдел третий.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Дроби.

§ 1. Понятие о дроби. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями 93
§ 2. Преобразование дробей. Сокращение дробей. Разложение на множители. Общее наинизшее кратное и общий наивысший делитель. Сокращение дробей 96
§ 3. Сложение и вычитание дробей. Исключение целого выражения из алгебраической дроби. Уравнения 103
§ 4. Умножение и деление дробей. Умножение и деление. Двойные дроби 114

ПЯТАЯ ГЛАВА.

§ 1. Пропорции. Пропорция и основное свойство ее членов. Знаменатель пропорции и коэффициент пропорциональности. Среднее арифметическое и среднее геометрическое. Применения теории пропорций 126

Отдел четвертый.

ШЕСТАЯ ГЛАВА.

Уравнения первой степени.

§ 1. Уравнения первой степени с одним неизвестным. Смешанные задачи 136
§ 2. Задачи на составление уравнений первой степени с одним неизвестным. Задачи геометрического содержания. Задачи на движение. Задачи из физики. Задачи, заимствованные из старинных книг по математике и старых учебников. Задачи-шутки и загадки 150
§ 3. Системы уравнений первой степени с двумя и многими неизвестными. Уравнения с двумя неизвестными. Системы уравнений с тремя и более неизвестными 173
§ 4. Составление систем уравнений. Задачи из геометрии. Задачи на движение. Задачи из физики. Задачи на работу. Задачи, заимствованные из старых сочинений по математике, и задачи-шутки 187

Отдел пятый.

СЕДЬМАЯ ГЛАВА.

Таблицы и графики.

		Стр.
§ 1.	Определение средних значений	205
§ 2.	Построения, употребляемые обычно для наглядного представления данных статистического характера. Изображение сравнительных размеров величин при помощи отрезков. Сравнительное представление величин при помощи площадей	206
§ 3.	Координатная бумага. Применение координатной (клетчатой) бумаги для графического представления опытных данных. Ступенчатые кривые. Графическое изображение законов явлений на основании ряда наблюдений (измерений)	

ВОСЬМАЯ ГЛАВА.

Графическое представление и исследование функций.

§ 1.	Координаты точки	221
§ 2.	Уравнение прямой	223
§ 3.	Обратная пропорциональность. Гипербола	228
§ 4.	Исследование уравнений	230

Оглавление 2-й части.

Стр.

Предисловие 243

Отдел первый.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Приближенные и сокращенные вычисления.

§ 1. Приближенное значение числа 245
§ 2. Сложение и вычитание 246
§ 3. Умножение 248
§ 4. Деление 249
§ 5. Приложения 251

Отдел второй.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Степени с натуральным показателем.

§ 1. Понятие степени 254
§ 2. Действие над степенями. Умножение степеней. Деление степеней. Введение в степень произведения и частного. Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями. Возведение степени в степень 257
§ 3. Степенная функция и ее графическое представление. Параболы . 261
§ 4. Системы счисления 263
§ 5. Решение уравнений 267

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Радикалы и действия над ними. Иррациональное число.

Стр.

§ 1. Понятие корня 269
§ 2. Квадратный корень. Извлечение квадратного корня. Извлечение квадратного корня из чисел 270
§ 3. Иррациональное число 274
§ 4. Действия над квадратными корнями. Преобразование радикалов. Вывод рационального множителя из-под знака корня. Приведение корней к нормальному виду. Сложение и вычитание корней (приведение). Умножение и деление квадратных корней. Преобразование $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ 277
§ 5. Приближенные вычисления с квадратными корнями. Задачи из геометрии 284
§ 6. Графическое представление функций $y = \pm \sqrt{x}$ 288
§ 7. Общее понятие корня 290
§ 8. Действия над корнями с любым показателем. Преобразование корней. Сложение и вычитание (приведение) корней. Умножение и деление корней. Возведение корней в степень и извлечение из них корня 291
§ 9. Уравнения, содержащие радикалы (приводимые к уравнениям первой степени) 295

Отдел третий.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Квадратные уравнения.

§ 1. Решение уравнений разложением левой части на множители . . 297
§ 2. Неполные и двухчленные квадратные уравнения. Понятие о мнимом числе 298
§ 3. Полные квадратные уравнения 300
§ 4. Свойства корней квадратного уравнения. Исследование квадратного уравнения 306
§ 5. Задачи 310
§ 6. Исследование функции второй степени (квадратного трехчлена) . 313
§ 7. Задачи на составление квадратных уравнений второй степени с одним неизвестным. Планиметрические задачи. Задачи из стереометрии. Задачи смешанного характера. Задачи из физики. Задачи, заимствованные из старинных книг по математике и старых учебников 320
§ 8. Уравнения, решение которых приводится к решению квадратных уравнений. Уравнения с легко угадываемыми (одним или несколькими) корнями. Уравнения, решаемые введением вспомогательного неизвестного: трехчленные уравнения. Системы, решаемые введением вспомогательных неизвестных. Возвратные уравнения . 332
§ 9. Простейшие дробные функции. Гиперболы. Элементарные дроби . 336
§ 10. Простейшие алгебраические функции 340
§ 11. Квадратные уравнения со многими неизвестными 345
§ 12. Общее уравнение второй степени с двумя неизвестными. Пересечение двух кривых в общем случае. Пересечение двух кривых при их особом относительном расположении. Системы уравнений со многими неизвестными. 351
§ 13. Задачи на составление систем уравнений второй степени . . . 359

Отдел четвертый.

ПЯТАЯ ГЛАВА.

Ряды (прогрессии).

		Стр.
§ 1.	Арифметические ряды (прогрессии) первого порядка. Сумма членов арифметической прогрессии. Возврастание абсолютного значения n-ого члена прогрессии и суммы ее членов при возрастании n	367
§ 2.	Примеры. Приложения. Задачи из физики. Задачи, заимствованные из старинных книг по математике	371
§ 3.	Арифметические ряды высших порядков	376
§ 4.	Конечные геометрические прогрессии. Сумма членов геометрической прогрессии. Примеры. Интерполяция. Приложения	378
§ 5.	Сравнение арифметической и геометрической прогрессии	386
§ 6.	Бесконечные геометрические ряды. Сумма бесконечного геометрического ряда. Примеры. Задачи из геометрии. Задачи из арифметики	388

Отдел пятый.

ШЕСТАЯ ГЛАВА.

Расширение понятия степени. Логарифм.

§ 1.	Определение степени с нулевым и отрицательным показателем	396
§ 2.	Определение степени с дробным показателем	399
§ 3.	Показательная и логарифмическая функции. Показательная функция. Понятие логарифма. Логарифмическая функция. Понятие об иррациональном показателе (логарифме). Элементарный прием вычислений бригговых логарифмов	402
§ 4.	Преобразование выражений, содержащих логарифмы	407
§ 5.	Употребление логарифмических таблиц Бриггса. Применение логарифмических таблиц к вычислениям. Логарифмические шкалы. Логарифмическая линейка	409
§ 6.	Относительная и абсолютная погрешность числа. Точность логарифмических вычислений	419
§ 7.	Смешанные задачи. Показательные и логарифмические уравнения	422

СЕДЬМАЯ ГЛАВА.

Тригонометрические функции.

§ 1.	Синус и косинус дуги и угла	424
§ 2.	Проекции. Синус и косинус суммы двух дуг (углов)	427
§ 3.	Функции тангенс и котангенс. Графическое решение тригонометрических уравнений	429

Отдел шестой.

ВОСЬМАЯ ГЛАВА.

Комбинаторика (теория соединений).

Стр.

§ 1. Соединения 435
§ 2. Перестановки: Перестановки без повторений. Выражение $n!$ Перестановки с повторениями 436
§ 3. Размещение. Размещение без повторений. Размещение с повторениями 439
§ 4. Сочетание. Сочетание без повторений. Сочетание с повторениями 441
§ 5. Смешанные задачи 444
§ 6. Бином Ньютона для натурального показателя. Вывод формулы бинома Ньютона. Свойства коэффициентов разложения по биному Ньютона (биномиальных коэффициентов). Примеры. Доказательство формулы бинома методом полной индукции. Задачи. Общий член разложения бинома 446

Отдел седьмой.

ДЕВЯТАЯ ГЛАВА.

Комплексные числа.

§ 1. Мнимая единица. Комплексное число 452
§ 2. Действия над комплексными числами 453
§ 3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Полярные координаты 459

Отдел восьмой.

ДЕСЯТАЯ ГЛАВА.

Рациональные целые и дробные функции.

§ 1. Пределы 468
§ 2. Функции первой и второй степени. Производная. *Minimum* и *maximum* целой функции второй степени 470
§ 3. Целая рациональная функция третьей степени. *Maxima* и *minima* функций. Вторая производная. Точки перегиба и касательные в точках перегиба. Геометрические приложения 477
§ 4. Некоторые общие свойства целой рациональной функции (многочлена) n-ой степени. Теорема Безу и ее приложения. Корни уравнения n-ой степени. Рациональные (целые) корни уравнения n-ой степени 484
§ 5. Уравнения третьей и четвертой степени. Уравнения третьей и четвертой степени приведенного вида и графическое их решение. Исторические задачи 487

Стр.

§ 6. Дифференцирование целых рациональных функций. Определение непрерывной функции. Производная степени и постоянной. Производная произведения. Производная суммы и разности. Смешанные задачи 496
§ 7. Понятие об интеграле 500
§ 8. Дробные рациональные функции. Нули и бесконечности функций. Производные. *Maxima* и *minima*. Смешанные задачи. Исследование кривых 501

ОДИННАДЦАТАЯ ГЛАВА.

Простейшие иррациональные и трансцендентные функции.

§ 1. Производные простейших иррациональных функций 508
§ 2. Тригонометрические функции. Производные функций *sinus* и *cosinus*. Производные остальных тригонометрических функций. Смешанные примеры. Задачи из физики 509

Отдел девятый.

Дополнительные главы.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Приложения теории соединений и формулы Ньютона.

§ 1. Элементы теории вероятностей. Определение вероятности. Простейшие примеры. Опытная поверка результатов, даваемых теорией вероятностей. Сложение и умножение вероятностей. Смешанные задачи. Геометрические вероятности 515
§ 2. Вычисление сложных процентов и рент. Сложные проценты. Задачи на ежегодные взносы в конце года. Срочные уплаты. Взносы и уплаты в начале каждого года. Начисление процентов не в годичные сроки. Ренты. Смешанные задачи . . 519

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Неравенства.

Свойства неравенств. Решение неравенств 529

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Неопределенные уравнения.

Нахождение целых решений неопределенного уравнения с двумя неизвестными. Решение неопределенного уравнения способом последовательного деления. Задачи, приводящие к решению неопределенных уравнений 535

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Непрерывные дроби.

Стр.

Конечные и бесконечные непрерывные дроби. Свойства подходящих дробей и их числителей и знаменателей. Решение неопределенных уравнений при помощи непрерывных дробей 542
Четырехзначные таблицы логарифмов чисел от 1 до 1009 547
Семизначные таблицы логарифмов некоторых чисел (для вычислений сложных %%, рент и проч.). 550
Значений тригонометрических функций для целых градусов. 551
Железнодорожный график 552